



PRESEK

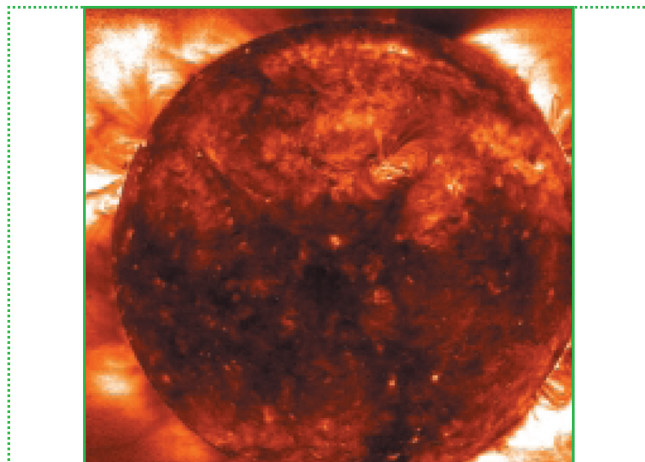
- MATEMATIKA
- NAPENJANJA VEZALK
- HAWKING BO
- OBISKAL SLOVENIJO
- NAGRADNA
- KRIŽANKA



Napajanje skozi vesolje

☛ Elektromagnetne motnje na soncu, oddaljenemu približno 150 milijonov kilometrov, običajno ne vplivajo na nas, lahko pa večji sončni vihar vpliva na satelite, elektriko in komunikacije. Na primer, leta 1989 so sončne eksplozije povročile razpad glavnega električnega omrežja, tako da je okoli šest milijonov ljudi v Kanadi ostalo brez elektrike. Napovedovalci vesoljskega vremena imajo zdaj na razpolago boljše matematične modele, iz katerih izdelujejo statistične napovedi o sončni aktivnosti in njenih posledicah. Napovedi so se izboljšale skupaj s tehnologijo, vendar bi bili brez matematike in izboljševanja modelov celo najhitrejši računalniki izgubljeni v vesolju.

Modeli vesoljskega vremena so zasnovani na Maxwellovih enačbah o elektriki in magnetizmu ter na enačbah o pretoku tekočin. Zaradi njihove zapletenosti je te enačbe potrebno reševati numerično. Najnovejši izstreljeni sateliti, med drugim štirje, ki tvorijo formacijo tetraedra in zagotavljajo tridimenzionalno sliko vesoljskega vremena, zagotavljajo potrebno informacijo za razumevanje vesoljskega okolja in omogočajo opozorila o možnih okvarah sodobnih dobrin. ✖



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike "The Mathematical Moments", ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

➔ Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 35, šolsko leto 2007/2008, številka 1

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Mirjam Galičič, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marijan Prosen, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2007/2008 je za posamezne naročnike 16,69 EUR (3.999,59 SIT) – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 14,61 EUR (3.501,14 SIT), posamezna številka 3,76 EUR (901,05 SIT), dvojna številka 6,89 EUR (1.651,12 SIT), stara številka 2,71 EUR (649,42 SIT), letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASIX, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje in tehnično urejanje Polona Šterk

Ilustracija Ines Kristan

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 3100 izvodov

© 2007 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1679

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Napajanje skozi vesolje 2

■ MATEMATIKA

Matematika napenjanja vezalk (*Matej Kolar*) 4-9

Elipsa (*Aleksandar Jurišič*) 9-10

Bistrovidec – Bik se pase, trava rase (*Vladimir Batagelj*) 10

■ FIZIKA

Mikrogravitacija na letalu (*Janez Strnad*) 11-15

Razmisli in poskusi (*Mitja Rosina*) 15 in 18

Kuhinjska poizkuševalnica – Kateri se bo prvi stalil?
(*Mojca Čepič in Gorazd Planinšič*) 19

■ ASTRONOMIJA

Hawking bo obiskal Slovenijo (*Andrej Guštin*) 22

Velikani prihajajo (*Andrej Guštin*) 23-24

■ RAČUNALNIŠTVO

Razdalja med nizi (*Andrej Taranenko*) 25-27

Riš, Ravnilo in šestilo – Rišem in študiram – Prvi del
(*Damjan Kobal*) 28-30

■ RAZVEDRILO

Nagradna križanka (*Marko Bokalič*) 16-17

Rešitev nagradne križanke Presek 34/6 21

Rešitev nagradne naloge – Povezana skrita računa
(*Marija Vencelj*) 10

■ TEKMOVANJA

27. tekmovanje osnovnošolcev v znanju fizike za Stefanova
priznanja (*Saša Kožuh*) 20-21

Tekmovanje za srebrno Stefanovo priznanje 2006/07 **priloga**

Tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje 2006/07 **priloga**

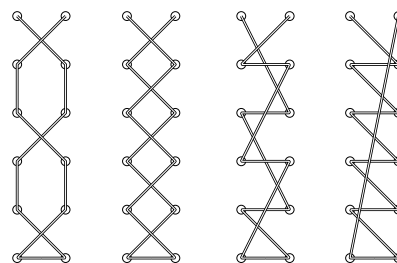
SLIKA NA NASLOVNICI: Leta 1942 rojenemu angleškemu fiziku in kozmologu Stephenu Williamu Hawkingu, se je letos izpolnila velika želja, da se je po dolgi vrsti let osvobodil invalidskega vozička in poletel v breztežnosti. Ta kratkotrajna breztežnost, ki jo lahko med letom doseže posebej prirejeno letalo, naj bi bila prvi Hawkingov korak v vesolje. Med čakanjem na naslednji Hawkingov podvig pa lahko preberete kakšno njegovo knjigo, predstavljeno na ovojju Preseka.

Matematika napenjanja vezalk

MATEJ KOLAR

☛ Se vam je že kdaj strgala vezalka, pa niste imeli rezervne? Bili ste prisiljeni izkoristiti staro, zato jo je bilo potrebno skozi očesca na čevlju znova napeljati na najboljši možni način (če ni bila napeljana tako že od začetka).

Na sliki 1 je nekaj glavnih načinov napeljave vezalk skozi očesca na čevlju, ki so se uveljavili v praksi (oba prosta konca vezalk na slikah izpustimo zaradi preglednosti).



Slika 1. Nekatere napeljave vezalk in njihova uveljavljena imena

metuljček cik-cak evropska trgovska

S problemom napeljave vezalk (angl. „shoelace problem“) se je ukvarjal John H. Halton in o njem poročal jeseni 1995 v reviji *Mathematical Intelligencer*, poleg njega pa še Burkard Polster, ki je leta 2002 v reviji *Nature* objavil članek na to temo. Problem spada v vejo matematike, ki ji pravimo *kombinato-*

rika; z njenimi osnovami se srečajo tudi slovenski srednješolci.

Dolžina nekaterih napeljav

Da bomo zmogli problem opisati matematično, pri-
vzemimo, da n parov očesc (tj. točk) leži v ravnini v
dveh vzporednih stolpcih z medsebojno razdaljo b ,
kjer so zaporedne vrstice oddaljene za a . Z uporabo
Pitagorovega izreka lahko izrazimo dolžine napelja-
nih vezalk za vzorce napeljav s slike 1:

- cik-cak: $C_n = 2(n-1)\sqrt{a^2 + b^2} + b$
- trgovska: $T_n = (n-1)\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{((n-1)a)^2 + b^2} + (n-1)b$
- evropska: $E_n = 2\sqrt{a^2 + b^2} + (n-2)\sqrt{(2a)^2 + b^2} + (n-1)b$
- metuljček: $M_n = 2\lceil n/2 \rceil \sqrt{a^2 + b^2} + 2\lceil (n-1)/2 \rceil a + b$

Pri zadnjem izrazu oznaka $\lceil \cdot \rceil$ pomeni celi del realnega števila, tj. največje celo število, ki ne presega podanega realnega števila, na primer $\lceil 2,3 \rceil = 2$, $\lceil 2,99 \rceil = 2$, $\lceil 3 \rceil = 3$.

Z običajnimi računskimi postopki je možno preveriti, da za vsak $n \geq 4$ velja

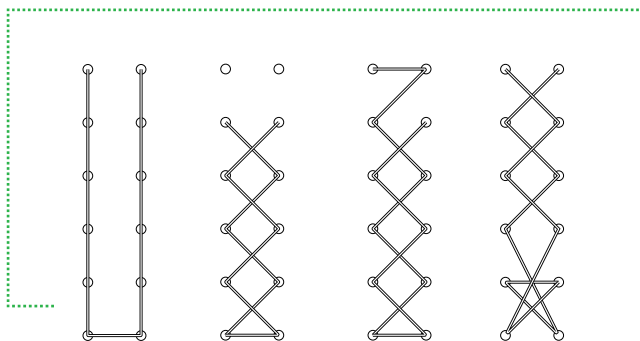
$$M_n < C_n < E_n < T_n$$

in $M_2 = C_2 = E_2 = T_2$ ter $M_3 \leq C_3 \leq E_3 = T_3$.

To pomeni, da je od štirih vzorcev napeljav na sliki 1 najkrajši metuljček, ki mu sledi napeljava cik-cak, njej evropska, najdaljša pa je trgovska napeljava.

Vezava kot posebni tip napeljave

Na sliki 1 so izrisane štiri napeljave na šestih parih očesc. Seveda to niso edine možne: na sliki 2 najdemo še štiri dodatne, ki delujejo manj sprejemljivo za vezavo šestih očesc na čevlju. Katere so njihove hibe? Prva čevlja ne veže, druga ni napeljana skozi vsa očesca, pri tretji en konec vezalke ne poteka skozi vrhnje očesce, pri četrti so mnenja o smiselnosti lahko deljena. Razmislimo in postavimo



Slika 2. Nekateri nenavadni načini napeljave vezalk skozi šest parov očesc

pogoje, ki jim naj zadošča „smiselna“ napeljava. Napeljavi vezalke rečemo **vezava**, če so izpolnjeni tile pogoji:

- **pogoj enkratnosti:** vezalka gre skozi vsako očesce natanko enkrat;
- **robni pogoj:** konca vezalke gresta skozi vrhnji očesci;
- **pogoj izmeničnosti:** vsako očesce je povezano z vsaj enim očescem iz sosednjega stolpca.

Vsak od pogojev opravlja določeno nalogo: ta je pri prvih dveh jasna, tretji pa nam zagotavlja, da vezalka čevlj zares veže.

Opazimo, da vsaka napeljava s slike 1 in četrta s slike 2 ustreza vsem naštetim pogojem, medtem ko prve tri napeljave s slike 2 ne zadoščajo vsem trem pogojem hkrati (preverite katerim).

Ojačane vezave so krepke vezave

Izkaže se, da je obravnava pravkar definiranih vezav zahtevnejša od tipa vezav, kjer zgornji *pogoj izmeničnosti* okrepimo:

- **pogoj stroge izmeničnosti:** vsako očesce je povezano izključno z očescem iz sosednjega stolpca.

Vezavi, ki zadošča pogoju stroge izmeničnosti, rečemo **krepka vezava**.

Lažja obravnava krepkih vezav ni edini razlog za vpeljavo tega pojma; dejansko v praksi srečamo (skorajda) samo takšne. Pogled na sliki 1: vezava „metuljček“ ni krepka, ostale tri so (sami presodite še napeljave na sliki 2).

→ ■ Število krepkih vezav

Poiščimo odgovor na vprašanje, koliko je vseh krepkih vezav n parov očesc. Zamislimo si postopek napeljevanja vezalke: ko (po dogovoru) začnemo v zgornjem levem očescu, imamo na izbiro $n - 1$ očesc v desnem stolpcu, zatem spet $n - 1$ očesc v levem stolpcu, nadalje $n - 2$ očesc v desnem, spet $n - 2$ v levem, vse dokler ne izčrpamo vseh očesc v vrsticah pod prvo. Končno napeljemo vezalko skozi zgoranje desno očesce; vseh različnih krepkih vezav je po osnovnem izreku kombinatorike torej

$$\blacksquare (n-1)(n-1)(n-2)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = ((n-1)!)^2.$$

■ Še običajnejši tipi vezav

Prej smo že preverili, da spada četrta napeljava s slike 2 med krepke vezave. Vendar take vezave v praksi ne bomo srečali med običajnimi napeljavami vezalk. Pri običajnih napeljavah se spuščamo od zgornjega očesca do spodnjega para očesc, zatem pa se dvigamo do zgornjega očesca, ki leži naproti tistemu, s katerim smo začeli.

Vpeljimo nov tip vezav; rekli bomo, da je vezava **monotona**, če se pri napeljevanju vezalk, začeniš v zgornjem očescu, v vseh ostalih vrsticah ne dvigamo, dokler ne dosežemo spodnje, nato pa se ne spuščamo, dokler ne dosežemo zgornjega (še nezasedenega) očesca.

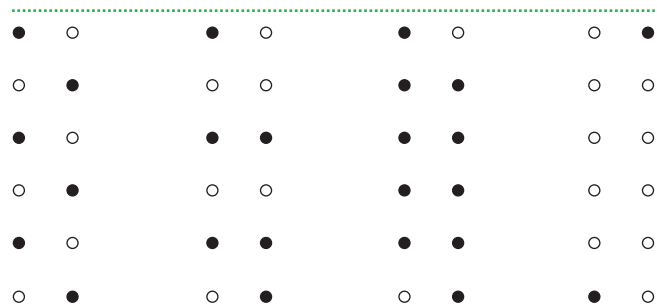
Preprost razmislek nam pove, da sta pri monotoni povezavi spodnji očesci povezani neposredno.

■ Število monotoni krepkih vezav

Monotone krepke vezave so tiste, ki so se v praksi izkazale kot najbolj primerne in običajne za zavezovanje čevljev. Take so: vezava cik-cak, evropska in trgovska vezava (in še mnogo drugih, omenjene so samo najbolj uporabljane), medtem ko metuljček in nobena vezava s slike 2 ni monotona krepka (premisli, kateri od pogojev ni izpolnjen pri vsaki). Poskusimo jih prešteti.

Spet si zamislimo potek napeljevanja vezalke. Začnimo v enem od zgornjih očesc. Naslednje očesce bo nekje nižje v nasprotnem stolpcu, sledilo bo očesce v nasprotnem stolpcu, ki ne bo ležalo višje (bo na isti ali manjši višini), in tako vse do očesc v spodnji

vrstici. Pri tem delu napeljevanja se ves čas spuščamo ali ostajamo kvečjemu na isti višini (razen v zgornji vrstici, kjer pustimo nasprotno očesce za konec napeljave). Ko dosežemo spodnjo vrstico, se začne vzpon. Pri vzponu pa ne moremo izbirati, saj moramo zasesti natanko tista očesca, ki smo jih pri spustu izpustili (pogoj enkratnosti), in moramo pri vsakem koraku zamenjati stolpec (pogoj stroge izmeničnosti). Zato zaslutimo, da je celotna napeljava vezalk natanko določena že z izbiro očesc pri spustu.

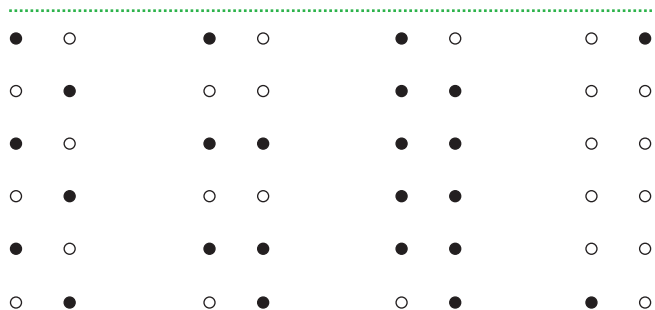


Slika 3. Potek napeljave vezalk, nakazan s počrtnitvijo očesc

Malce si oddahnimo. Na sliki 3 so primeri treh načinov napeljav po zgoraj opisanem postopku: počrtnjena so tista očesca, ki jih prehodimo pri spustu, nepočrtnjena pa ostanejo za vzpon. Ker proučujemo monotone krepke vezave, moramo seveda upoštevati pogoj enkratnosti, robni pogoj in pogoj stroge izmeničnosti. Bralec lahko zasluti, da je zato pri dani počrtnitvi možna ena sama napeljava vezalk: pri prvi dobimo cik-cak, pri drugi evropsko in pri tretji trgovsko napeljavo, pri četrti pa prav tako trgovsko, ki je zrcalna podoba tretje (na sliki 3 skiciraj nakazano napeljavo vezalk in jo primerjaj s sliko 1).

Premislimo, kako počrtniti očesca, da bo počrtnitev enolično določala monotono krepko vezavo. Zamislimo si, da se nahajamo v nekem očescu, iz katerega lahko napeljemo vezalko (ni pa nujno) v naslednjo vrstico nižje (tam sta na izbiro dve očesci). Na voljo imamo tri izključujoče možnosti (glej sliko 5): vezalka ne bo šla skozi nobeno od očesc, šla bo natanko skozi eno (ki mora ležati v nasprotnem stolpcu) ali pa bo šla skozi obe (najprej skozi tisto v nasprotnem stolpcu).

Ko pridemo v spodnjo vrstico, povežemo obe spodnji očesci in se začnemo vzpenjati. Zdaj moramo vezalko napeljati skozi vsa preostala očesca (torej ti-



Slika 4. Počrtnitve, ki ne določajo monotone krepke vezave

sta, ki niso počrtnjena). Ali je to mogoče, upoštevaje tri pravila, ki določajo monotono krepko vezavo? V težavah bi se znašli samo v primeru, ko bi ne mogli pri vsakem koraku zamenjati stolpca, saj v tem primeru vezava ne bi bila več krepka (preostali pravili nam ne delata težav). Vendar se to ne more zgoditi, kajti v primeru, ko bi zaporedni nepočrtnjeni očesci stali v istem stolpcu (ostala očesca med njima in sosednji bi bili seveda počrtnjeni), bi že pri spustu kršili pravila monotone krepke vezave.

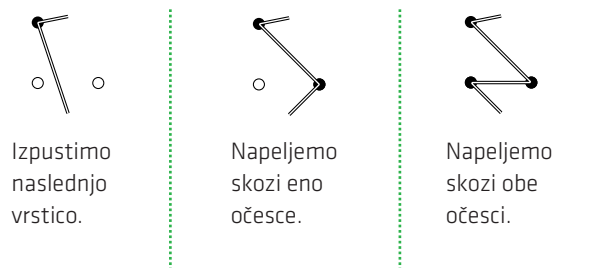
Sklenemo lahko: monotona krepka vezava je enolično določena že z spustom, pri katerem upoštevamo pravila monotone krepke vezave.

S to ugotovitvijo bomo znali prešteti vse monotone krepke vezave na n parih očesc. Uporabimo osnovno načelo kombinatorike: s spustom začnemo (po dogovoru) v zgornjem levem očescu, torej imamo za počrtnitev na izbiro eno samo možnost; v vsaki od naslednjih $n - 2$ vrstic (brez spodnje) pa lahko počrtnimo obe očesci, eno ali nobenega (glej sliko 5), v spodnji vrstici pa je na voljo ena sama izbira (saj je vrstni red napeljave skozi spodnji očesci določen že s predhodnim očescem). Skupaj imamo torej

$$\blacksquare 3^{n-2}$$

različnih počrtnitev, torej prav toliko možnih spustov upoštevaje pravila monotone krepke vezave, zato je natanko toliko tudi vseh monotonihih krepkih vezav na n parih očesc.

Med preštetimi vezavami nekatere tvorijo simetrične pare. Edina vezava, ki je simetrična (sama sebi), je vezava tipa cik-cak. Zato je vseh različnih vzorcev (če štejemo, da simetrični par določa en unikatni vzorec) med monotonihih krepkimi vezavami



Slika 5. Za krepko vezavo velja: iz dane vrstice se lahko spustimo skozi naslednjo na tri načine.

natanko

$$\blacksquare \frac{3^{n-2}-1}{2} + 1 = \frac{3^{n-2}+1}{2}.$$

■ Nekaj zgledov

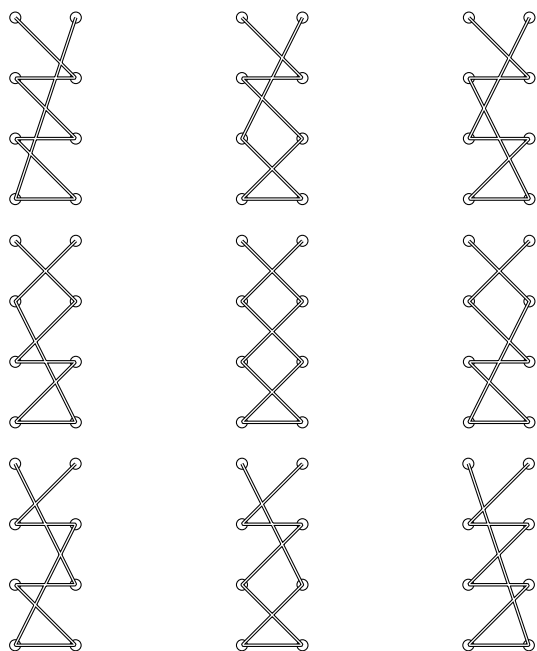
Običajni čevelj za odrasle premore od štiri do sedem parov očesc, največkrat pet ali šest. Število krepkih in monotonihih krepkih vezav za nekaj konkretnih parov očesc najdemo v tabeli 1.

število parov očesc	število krepkih vezav	število monotonihih krepkih vezav
n	$((n-1)!)^2$	3^{n-2}
2	1	1
3	4	3
4	36	9
5	576	27
6	14 400	81
7	518 400	243
8	25 401 600	729

Tabela 1. Število krepkih in monotonihih krepkih vezav

Na sliki 6 so izrisane vse monotone krepke vezave na 4 parih očesc. Poiščimo vse simetrične pare vezav!





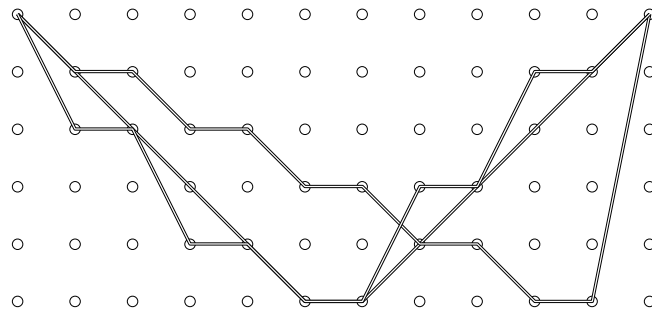
Slika 6. Vse monotone krepke vezave na 4 parih očesc

■ Najkrajša monotona krepka vezava

Na začetku članka smo že uspeli izračunati dolžine nekaterih pomembnih vezav in jih razvrstiti po velikosti. Med monotonomi krepkimi vezavami s slike 1 je najkrajša vezava cik-cak. Izkaže se, da je vezava cik-cak najkrajša med *vsemi* monotonomi krepkimi vezavami.

Pri dokazu te trditve bomo uporabili *načelo zrcaljenja*. Zamislimo si, da levi in desni stolpec očesc izmenično razmnožimo v desno smer ali povedano drugače, najprej izrišemo desni stolpec, zatem desnega, nato levega, nato spet desnega, ... Pri napeljevanju vezalk se potem pri menjavi stolpca samo premaknemo v stolpec na desni, namesto da gremo v levo. Na sliki 7 smo uporabili predstavljeno načelo na konkretnih napeljavah.

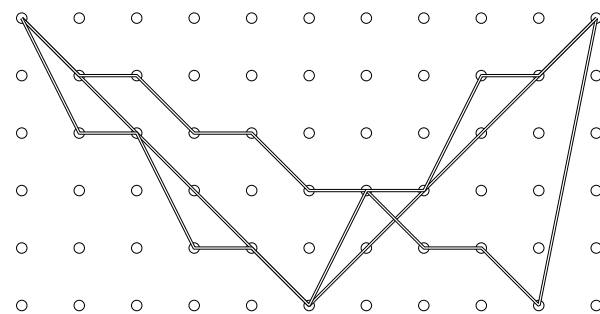
Opazimo, da se vse krepke vezave na šestih parih očesc začnejo v zgornji levi točki (po dogovoru) in končajo v zgornji desni točki (ker vse krepke vezave na n parih očesc zamenjajo stolpca enako mnogo-krat, to je $(2n - 1)$ -krat, v našem primeru 11-krat). Poleg tega ima vsaka monotona krepka vezava vodoravno povezavo v spodnji vrstici (to je povezava



Slika 7. Predstavitev cik-cak, evropske in trgovske napeljave po načelu zrcaljenja (poskusi izrisati vsako napeljavo z različno barvo).

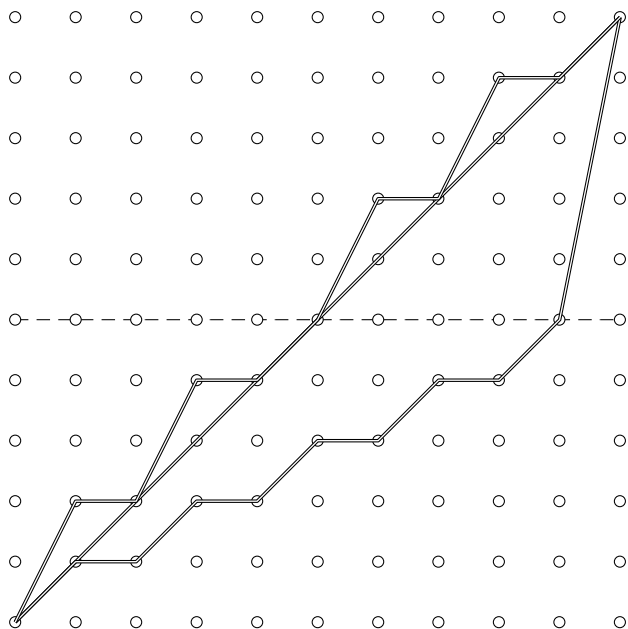
med spodnjima očescema, ki sta neposredno povezana, kot smo že ugotovili).

Zato predstavimo iste napeljave brez omenjene vodoravne povezave; rekli bomo, da je takšna napeljava *okrnjena* (glej sliko 8).



Slika 8. Predstavitev okrnjenih napeljav s slike 7 po načelu zrcaljenja (izriši vsako napeljavo z različno barvo).

Po odstranitvi spodnje vodoravne povezave, gre vsaka monotona krepka vezava skozi natanko eno točko v spodnji vrstici. Prezrcalimo del vezave pred to točko preko spodnje vrstice. Dobimo sliko 9. Prepričamo se lahko, da je vezava cik-cak, ki je predstavljena z diagonalo kvadrata, najkrajša med vsemi (ne samo med narisanimi tremi!) monotonomi krepkimi vezavami na šestih parih očesc. Utemeljitev je enostavna: najkrajša razdalja med dvema točkama je dolžina daljice, ki ju povezuje.



Slika 9. Predstavitev okrnjenih napeljav s slike 8 po dodatnem zrcaljenju (pobarvaj napeljave z različnimi barvami).

Podoben grafični razmislek lahko naredimo za utemeljitev splošne trditve: vezava cik-cak je *najkrajša* med vsemi monotonimi krepkimi vezavami na n parih očesc.

■ Za konec in naprej

Na medmrežju najdemo nekaj zanimivih omemb problema napeljevanja vezalk.

Bogata z vsebino in ilustracijami je stran

- <http://www.fieggen.com/shoelace/index.htm>,

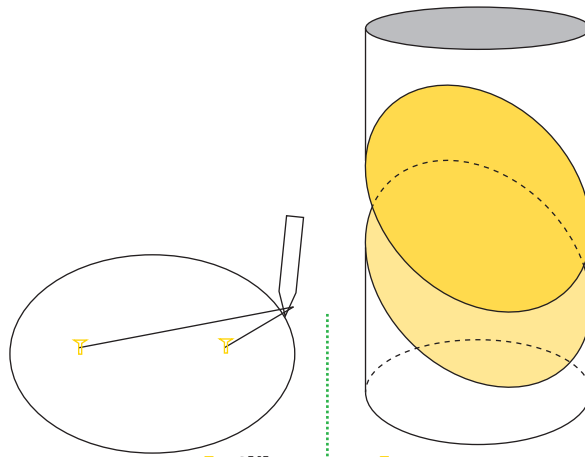
ki jo ureja Ian Fieggen. Na njej najdete o zabavni plati vezalk več, kot ste si kdajkoli upali pomisliti.

Poleti 2006 je že omenjeni matematik Burkard Polster pri American Mathematical Society izdal knjigo z naslovom „The Shoelace Book: A Mathematical Guide to the Best (And Worst) Ways to Lace Your Shoes“, v prevodu „Knjiga o vezalkah: matematični vodnik za najboljše (in najslabše) zavezovanje čevljev“. ☘

Elipsa

ALEKSANDAR JURIŠIĆ

☘ Verjetno se še spomnite, da lahko elipso narišemo z dvema žebličkoma in vrstico. Elipsa predstavlja množico točk v ravnini, katerih vsota razdalj od obeh žebličkov je enaka dolžini vrvice (glej sliko 1 levo).



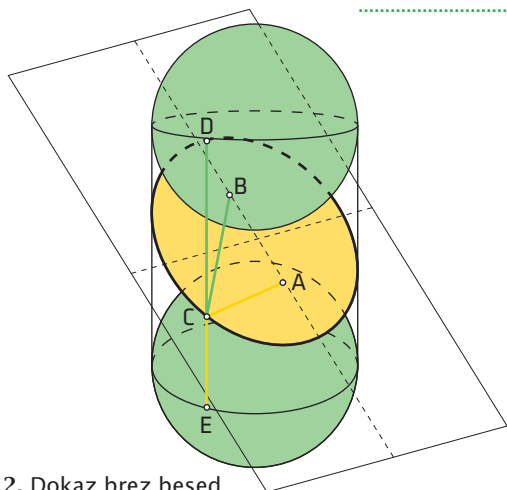
Slika1.

Točkama, v katerih žeblička prebadata ravnino, pravimo *gorišči* elipse. Elipse ni težko najti v vsakdanjem življenju. Že če pogledamo rob kozarca, „vidimo“ elipso. Le-ta je seveda popolnoma okrogla, če gledamo kozarec od zgoraj, in sploščena v daljico, če gledamo kozarec od strani. Matematično bi rekli, da gre v tem primeru za projekcijo kroga na ravnino (glej npr. članek M. Prosenja *Kako do enačbe sence?*, Presek 29 (2001/2002), str. 144–148). Lahko pa si izberemo tudi drugačno pot. Valj presekamo z ravnino (glej sliko 1 desno).

Tudi tokrat seveda dobimo elipso. Zakaj? Bi znali najti tudi njeni gorišči? Oba odgovora najdete na sliki 2, če vam je le že znano, da so vse tangente iz iste točke na kroglo enako dolge.

Na koncu zastavimo zagnanim presekovcem še





Slika 2. Dokaz brez besed

dve vprašanji:

- Kako je treba presekat stožec, da dobimo elipso?
- Na podoben način kot na sliki 2 se prepričajte, da je dobljeni presek stožca in ravnine res elipsa. ✖

Povezana skrita računa

REŠITEV NAGRADNE NALOGE

1	4	8		2	4	8	2
8	7	4		8	3	6	4
1	0	2	2	1	0	8	4
						6	

➔ Pravilne rešitve so nam poslali MAJA ALIF iz Košnice pri Celju, VALENTINA HERBAJ iz Nedelice pri Turnišču, JURE SENČAR iz Križevcev pri Ljutomeru, UROŠ KOVAČ iz Tevč pri Ajdovščini, JURIJ VOLČIČ iz Škofje Loke, ANDREJ JAKOBČIČ iz Novega mesta in NINO BAŠIČ ter MATJAŽ LEONARDIS iz Ljubljane.

Žreb je enoletno naročnino na Presek namenil NINU BAŠIČU, UROŠU KOVAČU in MATJAŽU LEONARDISU. ✖

Bik se pase, trava rase

VLADIMIR BATAGELJ

➔ Leta 1707 je Newton objavil delo *Splošna aritmetika*, v katerem je algebrski pristop dobil obliko, kakršne smo danes vajeni. V tem delu najdemo tudi naslednjo nalogo:

Dvanajst bikov je v štirih tednih popaslo tri in še tretjino jutra pašnika; enajndvajset bikov pa popase deset juter takega pašnika v devetih tednih. Koliko bikov bi popaslo štiriindvajset juter pašnika v osemnajstih tednih? ✖

BISTROVIDEC



Mikrogravitacija na letalu

JANEZ STRNAD

☛ Začnimo z opisom poskusa. Mislimo si, da stojimo na vzmetni tehtnici v dvigalu, ki se giblje s pospeškom a v navpični smeri. Pospešek vzamemo za pozitiven, če je usmerjen navzgor, in negativen, če je usmerjen navzdol. Poskus naj opiše opazovalec, ki stoji na tleh in ki se ne giblje pospešeno. Trditev velja le približno, ker se opazovalec z Zemljo vred vrti okoli njene osi in kroži okoli Sonca. Za nepospešenega opazovalca velja prvi in zato tudi drugi in tretji Newtonov zakon. Dvigalo pa se giblje pospešeno, zato za nas v dvigalu ne veljata prvi in drugi zakon v običajni obliki.

Na nas delujeta vzmetna tehtnica s silo F_v navpično navzgor in Zemlja s težo mg navpično navzdol, če je m naša masa in g absolutna vrednost težnega pospeška na površju Zemlje. Po drugem Newtonovem zakonu je vsota vseh sil na nas enaka naši masi, pomnoženi s pospeškom dvigala: $F_v - mg = ma$. Sila vzmetne tehtnice je

$$F_v = m(g + a).$$

To silo čutimo v podplatih, teža pa prijemlje po vsej naši prostornini. Sili imata nasprotno smer in nas stiskata.

Če se dvigalo giblje s pospeškom a navzgor, je sila vzmetne tehtnice $F_v = m(g + a)$ večja, kot če bi se dvigalo ne gibalo pospešeno. V podplatih čutimo večjo silo in večja sila nas stiska. Teža se navidez poveča. Če se dvigalo giblje s pospeškom a navzdol, pa je sila vzmetne tehtnice $F_v = m(g - |a|)$ manjša. Čutimo manjšo silo v podplatih in manjša sila nas stiska, kot če bi se dvigalo ne gibalo pospešeno. Teža se navidez zmanjša. V posebnem primeru, ko se dvigalo giblje navzdol s pospeškom, ki je enako velik kot težni pospešek, $|a| = g$, postane sila vzmetne tehtnice enaka 0. Teža se navidez zmanjša na nič. V podplatih ne čutimo nobene sile in nobena sila nas ne stiska. To občutimo kot olajšanje. Koristno bo $g_{ef} = g + a$ vpeljati kot *efektivni pospešek*.





Nekdaj so navidezno težo nič imenovali *breztežnost* ali *breztežno stanje*, sedaj govorimo raje o *mikrogravitaciji*. Ne moremo namreč doseči, da bi se efektivni pospešek zmanjšal prav na nič. Na nas delujejo z gravitacijo deli dvigala in druga telesa v bližini. Težni pospešek je ob nogah malo večji kot ob glavi. Tu so še druge sile, na primer zračni upor dvigala. Efektivni pospešek ni enak nič, je pa veliko manjši od težnega pospeška g .

Opis poskusa spodbudi k razmišljanju. V vzmetni tehtnici se vzmet skrči in je skrček sorazmeren s silo. V osebni tehtnici starejše izvedbe je zgornja plošča, na katero stopimo, pritrjena na vzmeteh. Njen premik navzdol preko vzvodov odkloni kazalec, ki pokaže našo težo, ko jo uravnovesi sila vzmeti. Enako velja za sodobno osebno tehtnico, le da ima ta namesto vzmeti stebričke iz piezoelektrične keramike. Ti se skrčijo in na njih se nabere tem večji električni naboj, čim večja je sila. Naboj steče po merilniku in odklon kazalca v merilniku pokaže našo težo. Teža ni odvisna od tega, ali dvigalo miruje ali se giblje navzgor ali navzdol z veliko ali majhno hitrostjo, če se hitrost ne spreminja. Pomembna je samo sprememba hitrosti dvigala, to je pospešek.

Dvigalo bi se gibalo s pospeškom g navzdol, ko bi prosto padalo. V prosto padajočem dvigalu ne bi čutili teže. To bi veljalo tudi, če ne bi bilo dvigala in bi prosto padali ali skočili navpično navzgor. Z dvigalom tega ni mogoče izvesti, a v nemškem Bremnu so zgradili visok stolp, v katerem izvajajo poskuse v celici, ki prosto pada. Čas opazovanja podvojijo, ko celico izstrelijo navpično navzgor, da se giblje pojemajoče in začne padati potem, ko na vrhu cevi doseže najvišjo točko (*Breztežno stanje*, Presek 17 (1989/70), str. 298 ali 26 (1998/99), str. 38). Na svetu je več podobnih in manjših stolpov. Državna aeronavtična in vesoljska administracija NASA upravlja podoben stolp v Clevelandu, poleg tega pa še več manjših. Podobni napravi sta še v Franciji v Grenoblu in na Japonskem. Pri teh poskusih so pojemki pri zaviranju tolikšni, da jih ljudje ne bi prenesli. Pri navpičnem in pri poševnem metu se telo giblje s težnim pospeškom g navpično navzdol – kot pri prostem padanju. Enako velja tudi za gibanje umetnih satelitov in vesoljskih sond, ko prenehajo delovati motorji.

Opisani poskus je postal pomemben leta 1907, ko je Albert Einstein imel „najbolj posrečeno misel v življenju“. Gravitacija mu je povzročala težave, ko jo

je poskusil vključiti v posebno teorijo relativnosti. Sedeč na stolu v svoji sobi na patentnem uradu v Bernu se je nenadoma zavedel, da krovec, ki bi padal s strehe, ne bi občutil teže. Tako je prišel na misel, da je gravitacijo mogoče opisati s pospeševanjem „dvigala“ v nasprotni smeri! Za opazovalca, ki prosto pada, veljajo enaki zakoni fizike kot za opazovalca, ki miruje daleč od teles v prostoru brez gravitacije. Iz tega je zrasla splošna teorija relativnosti, ki gravitacijo opiše podrobneje kot Newtonov gravitacijski zakon.

Pomislek, da se opazovalec na površju Zemlje samo v približku giblje nepospešeno, je bil potemtaka delno neupravičen. Zemlja zaradi gravitacije Sonca – in Lune – prosto pada. S tem povezani pospešek ne vpliva na veljavnost prvega in drugega Newtonovega zakona. Preostane pospešek zaradi vrtenja Zemlje okoli osi, zaradi katerega telo na ekvatorju pada z malenkost manjšim pospeškom kot na polu. Einstein je svoji zamisli, znani kot *načelo ekvivalenosti*, dodal zahtevo, da se prosto padajoči opazovalec ne sme vrteti in opazovati na velikih razdaljah.

Podobne razmere kot krovec doseže skakalec pri skoku v vodo, smučar pri skoku s smučmi, padalec pri skoku, preden odpre padalo, če odmislimo zračni upor. V vseh teh primerih dosežejo mikrogravitacijo, a ne morejo izvajati poskusov. Taki poskusi so postali potrebni po uvedbi vesoljskih poletov. Pri tem ni šlo le za fizikalne ali kemijske poskuse, ampak tudi za poskuse z živimi bitji. Prve poskuse te vrste so izvedli na umetnih satelitih in vesoljskih postajah s človeško posadko. Manj zahtevno kot izstreliti satelit ali postajo je poleteti z letalom. NASA izvaja *Program zmanjšane gravitacije* RGP z letalom C9, izpeljanko znanega DC-9. Za poskuse je na voljo vsa kabina, ki je obložena z debelo plastjo penaste snovi. Letalo vzleta in pristaja na letališča blizu vesoljskega središča Johnson, znanega tudi po vesoljskih letalih Space Shuttle, v Houstonu v Teksasu. Poleg tega v Združenih državah Družba za gravitacijo nič v enake namene uporablja letalo boeing 727 in prodaja svoje usluge. Evropska vesoljska agencija ESA pa izvaja mikrogravitacijske poskuse z različnimi letali.

V svetovnem letu fizike 2005 so NASA, Ameriško fizikalno društvo in Ameriško združenje učiteljev fizike razpisali natečaj za poskuse v letalu C9 za dijakke srednjih šol in njihove mentorje. V februarški številki revije The Physics Teacher, ki je namenjena predvsem poučevanju fizike na srednjih šolah, so

član vesoljskega središča Johnson in trije mentorji iz zvezne države Ohio – dva sta tudi povezana z vesoljskimi ustanovami – poročali o takem poletu. Enajstčlanska skupina dijakov je sodelovala pri pripravi poskusov, a je polet spremljala z letališča. Kratek opis poskusa utegne zanimati bralce Preseka.

Na začetku leta 2005 je skupina izvedela, da je bil na natečaju sprejet njihov predlog. Začele so se priprave, med katerimi je bilo treba podrobno navesti značilnosti tudi najmanjšega dela naprav za poskuse. Predpisi zahtevajo, da naprave prenesejo učinkoviti pospešek $9g$, da ne bi ogrozile osebja v letalu, če bi prišlo do nesreče. Za jesen 2005 napovedani polet so morali zaradi orkana preložiti na pomlad 2006. Tedaj so bili nared vsi člani skupine in vse naprave za poskuse. Mentorji so morali opraviti priprave na polet, biti v celici za kratek čas izpostavljeni tlaku, kakršen je na višini 7600 metrov, in prestati zdravniški pregled za pilote. Poučili so jih tudi o tem, kako naj ravnajo, če jih obide slabost. Po obsežnih pripravah z vajami so jim pred poletom dali mešanico zdravil proti slabosti. Brez zdravil približno 60 odstotkov udeležencev poleta bruha, zdravila zmanjšajo ta delež na 15 odstotkov. Pri tem pa ni mogoče napovedati, koga bo med poletom obšla slabost in koga ne. Zato letalu pravijo tudi „bruhalni komet“.

Po vzletu letalo hitro doseže višino 7600 metrov. Nato se po paraboli dviga okoli 25 sekund na višino 10600 metrov. (Na tej višini je težni pospešek le za 0,3 odstotka manjši kot na tleh.) Med dviganjem zaradi pospeševanja učinkoviti pospešek v smeri pravokotno na tla kabine naraste na $1,84g$. V tem času enako kot med vzletom in pristankom potniki sedijo na sedežih v zadnjem delu letala. Ko letalo doseže vrh parabole,ugasnejo motorje in potem letalo okoli 25 sekund prosto pada po paraboli do višine 7600 metrov (slika 1). To je obdobje mikrogravitacije, ko izvajajo poskuse. Deset takih dvigov in spustov opravi letalo nad Mehikiškim zalivom, deset na povratku. Sledi jih še deset nad morjem in deset na povratku. Štiridesetim dvigom in spustom so dodali še spusta z učinkovitima pospeškoma $0,167g$ in $0,38g$, ki ustrezata težnima pospeškoma na površju Lune in Marsa. Ves polet traja dve uri. Mentorji so se udeležili dveh poletov v dveh zaporednih dneh.

Od četverice potnikov iz te skupine nikomur ni bilo slabo. Na vsakem od obeh poletov je bilo slabo vsaj dvema potnikoma, ki sta morala na sedeže v za-



Slika 1. Letalo C9 se najprej dvigne in nato spusti po paraboli. Med pospešenim dviganjem učinkoviti pospešek naraste, med prostim padanjem pa nastopi mikrogravitacija. Vpliv zračnega upora v redkejšem zraku delno izravna z izbiro poti. Pot je nakazana le shematično, na vsakem od obeh krakov letalo prepotuje skoraj 10 kilometrov. Slika je vzeta iz članka R. Dempsey, G. A. DiLisi, L. A. DiLisi, G. Santo, *Thank you for flying the Vomit Comet*, *The Physics Teacher* 45 (2007) 72. (NASA)

dnjem delu letala. Na obeh poletih je bilo enemu udeležencu slabo pri vseh 42-ih spustih. Do slabosti naj bi prišlo v glavnem zaradi nasprotujočih si čutnih zaznav. Odsvetujejo sunkovite gibe z glavo ali pogled skozi okno, ker bi lahko videli obzorje pod nenavadnim kotom. Udeležence so tedaj, ko niso bili zaposleni s poskusi, spodbujali, najokusijo slasti mikrogravitacije. Izvajali so salte, stoje, in se dali slikati s samosprožilcem lastnemu fotografskemu aparatu, ki je lebdel v letalu.

Nazadnje opišimo poskuse, ki jih je pripravila skupina in so jih mentorji izvedli med poletom. Poskusi so bili razmeroma preprosti, saj naj ne bi segli iz okvira srednješolske fizike, vseeno pa so sodili v polje pravega raziskovanja. Pri njih so raziskovali vpliv spremenljivega učinkovitega pospeška na *kapljevinske vratove* ali *kapljevinske mostičke*. To so valjasti deli kapljevine med trdnima oporama s krožnim presekom. Podobni vratovi nastanejo na primer, ko vilice pomočimo v olje. Taki vratovi so zanimivi za uporabo. Vplivajo na lastnosti tkanin in drugih luknjičavih snovi. Stavbe iz mivke so zaradi vodnih vratov med zrcni mivke obstojne, če mivki dodamo določen delež vode. Vratovi so zanimivi v medicini med drugim pri zdravljenju bolezni dihal in sklepov. Raziskujejo možnost, da bi s kapljevinskimi vratovi premostili poškodovane dele hrbtenjače.

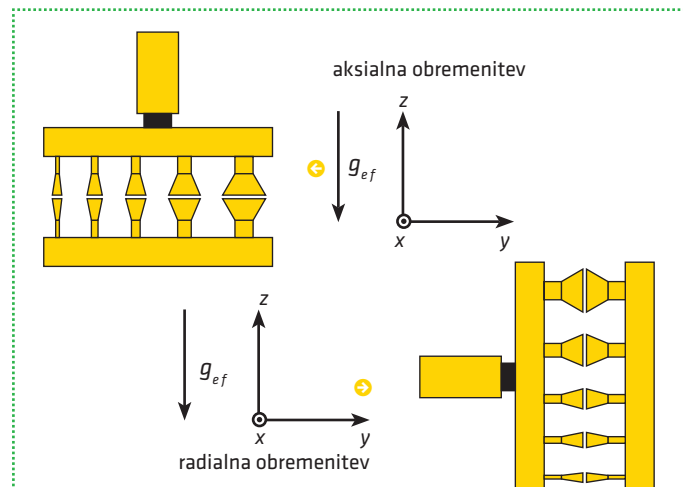
Raziskovalci so merili, kako se vratovi odzovejo na spremenljivi učinkoviti pospešek. Doslej so take





pojave raziskovali na enega od dveh načinov. Pri prvem potopijo vratove iz določene kapljevine v drugo kapljevino, ki se s prvo ne meša. Vzgon je sorazmerno z razliko gostot in v kapljevini z enako gostoto uravnovesi težo, tako da postane efektivni pospešek enak 0. Pri tem pa ni mogoče hitro spremeniti efektivnega pospeška. Poleg tega se kapljevina onesnaži z drugo kapljevino. Napravo, v kateri vzgon izravna težo, NASA uporablja za šolanje vesoljcev. Pri drugem načinu kapljevini primešajo paramagnetno snov s kar se da veliko permeabilnostjo in težo uravnovešijo z nehomogenim magnetnim poljem. Pri tem je mogoče izključiti magnetno polje in s tem zelo hitro spremeniti razmere. Tudi v tem primeru se snov onesnaži. Poskuse so delali tudi na vesoljskem letalu, a pri tem je bil efektivni pospešek med poletom ves čas blizu 0. Poskusi na letalu C9 imajo prednost, da pri njih dosežejo mikrogravitacijo in povečani efektivni pospešek, in to večkrat zapored.

Iz aluminija so izdelali nekakšne dvojne grablje, od katerih je bil del pritrjen, drugi pa premičen. Opre, ki so si stale nasproti, so imele različne premere, razdaljo med njimi pa so spreminjali z mikrometrskim vijakom. Napravo so postavili tako, da je bila os kapljevinskih vratov v smeri efektivnega pospeška, to je pravokotno na tla kabine – aksialno – ali pravokotna na smer efektivnega pospeška – radialno. Ta slika in naslednji dve sta vzeti iz članka istih avtorjev *Results of the 2005-2006 World Year of Physics Reduced Gravity Program: The stability of liquid bridges under varying total body force* na naslovu <http://ftp.aip.org/cgi-bin/epaps?ID=E-PHTEAH-45-005702>.

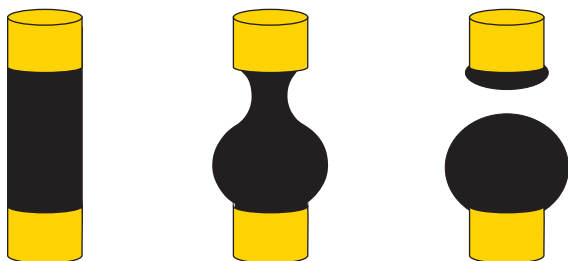


Slika 2. Razdaljo med deloma naprave iz aluminija z oporami z različnimi premeri so uravnavali z mikrometrskim vijakom. Napravo so postavili tako, da je bila os kapljevinskih vratov v smeri efektivnega pospeška, to je pravokotno na tla kabine – aksialno – ali pravokotna na smer efektivnega pospeška – radialno. Ta slika in naslednji dve sta vzeti iz članka istih avtorjev *Results of the 2005-2006 World Year of Physics Reduced Gravity Program: The stability of liquid bridges under varying total body force* na naslovu <http://ftp.aip.org/cgi-bin/epaps?ID=E-PHTEAH-45-005702>.

Pomemben podatek je bila *tankost* vratu, to je razmerje med dolžino in premerom $T = l/(2r)$. Ugotovili so, da pri danem polmeru opore obstaja *kritična tankost* T_k , pod katero se vratovi sploh ne pretrgajo. Kritična tankost se manjša z naraščajočim premerom opore in je za aksialno obremenitev večja kot za radialno.

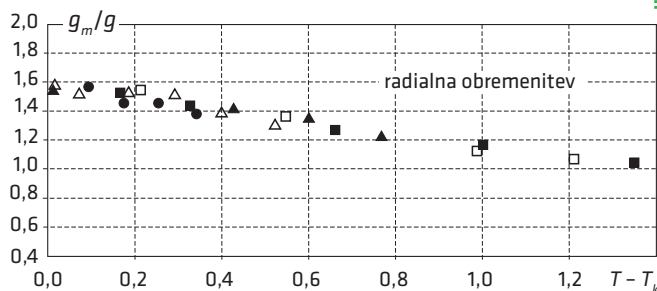
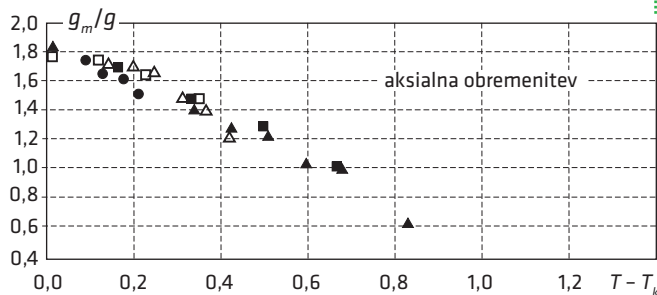
premer opore $2r$ [mm]	1,6	2,4	3,2	4,8	6,4
mejna tankost T_k za aksialno obremenitev	1,83	1,54	0,99	0,80	0,70
mejna tankost T_k za radialno obremenitev	1,16	0,90	0,82	0,54	0,45

Merili so *mejni efektivni pospešek* g_m , pri katerem se vratovi pretrgajo. Pri manjšem efektivnem pospešku so vratovi obstojni, pri večjem pa se pretrgajo.



Slika 3. Vrat spremeni obliko in se pretrga, ko efektivni pospešek g_{ef} preseže mejni pospešek g_m .

Ugotovili so, da se vratovi pretrgajo le, ko je tankost na ozkem intervalu. Pri tem mejni pospešek g_m narašča z manjšanjem polmera opore. Poskuse so snemali s televizijsko kamero in pozneje posnetku računalniško dodali ustrezne izmerjene vrednosti efektivnega pospeška. Glavne značilnosti razberemo iz diagrama, v katerem mejni pospešek g_m nanesemo v odvisnosti od *reducirane tankosti* $T - T_k$ (slika 4).



Slika 4. Mejni pospešek pri aksialni in radialni obremenitvi v odvisnosti od reducirane tankosti je neodvisen od premera opor. Polni kvadrati ustrežajo premeru opor 1,6 mm, votli kvadrati 2,4 mm, polni trikotniki 3,2 mm, votli trikotniki 4,8 mm in krogi 6,4 mm. Na vodoravno os je nanesena reducirana tankost $T - T_k$, na navpično pa g_m/g .

Mejni pospešek g_m približno linearno pojema z reducirano tankostjo, neodvisno od premera vratu. V aksialni smeri je pojemanje bolj strmo kot v radialni. Pod reducirano tankostjo 0,33 je aksialni mejni pospešek večji od radialnega, nad njo pa radialni mejni pospešek večji od aksialnega. Rezultati so zanimivi sami po sebi, prav pa bodo prišli tistim, ki raziskujejo kapljevinske vratove. Poskusi, pri katerih so sodelovali, pa so bili zagotovo posebna izkušnja za sodelujoče mentorje in dijake. ☒

Razmisli in poskusi

MITJA ROSINA



21. Stabilno ravnotežje. Kako daleč lahko sega kupček kart preko roba mize? Dolžina karte naj bo ℓ , število kart n , skrajni rob vrhnje karte pa naj sega največ za L čez mizo. Ali je v limiti $n \rightarrow \infty$ doseg L končen ali neskončen?

RAZMISLEK. Ena karta sega za pol karte čez rob mize ($L = \ell/2$), tako da je težišče karte na robu mize. Pri dveh kartah sega zgornja karta za $\ell/2$ čez spodnjo, spodnja karta pa le $\ell/4$ čez rob mize; skupno težišče je namreč na treh četrtinah spodnje karte – v sredi med težiščema zgornje in spodnje karte. Torej dobimo $L = \ell/2 + \ell/4 = 3\ell/4$. Posplošimo na več kart. Narišimo skico, kako sme težišče zgornjih v kart ležati kvečjemu na robu ($v + 1$)-ve karte, da se karte ne bodo prevrnile. Skupno težišče ($v + 1$) kart leži med težiščema ($v + 1$)-ve ter v -te v razmerju 1: v , torej prispeva ($v + 1$)-va karta le delež $1/v$ svoje polovične dolžine. Če seštejemo prispevke vseh kart, dobimo

$$L = \frac{\ell}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) \approx \frac{\ell}{2} (\ln n + \gamma),$$

kjer je $\gamma = 0,57722$. Navedeni približek za dobljeno zaporedje najdemo v matematičnih priročnikih. Če se zdi izpeljava zaporedja s sklepanjem od n na $n + 1$ preveč abstraktna, lahko začnemo z eno karto ($n = 1$) in nadaljujemo z dvema in tremi, nakar je posplošitev očitna.

POSKUS. Poskusimo s kartami taroka. Koliko dosežemo z desetimi kartami (primerjajmo z izračunom)? Verjetno bomo dosegli nekoliko manj. Zakaj? Koliko kart pa bi potrebovali za $L = 2\ell$? Kolikšen je doseg L v limiti $n \rightarrow \infty$? Ali ga lahko zares dosežemo?

nadaljevanje
na strani **18**



Nagradna križanka

			AVTOR MARKO BOKALIČ	SRDITOST	SCHWARZ-KOBLERICA IZ VIŠOŠKE KRONIKE	SMUČIŠČE PRI BLEDU, KI NE OBRATUJE	SESTAV TREH GLASBENIKOV	KRAJ PRI GROSLJEM	SOSEDI ČRKE F	ZELO NEVARNÁ ČREVESNA BAKTERIJA	ŽIVAL, KI DELA KUPČE PRSTI PO TRAVNIKIH							
			RAZPOK, EKSPLOZIJA				7											
			ZELATINA IZ MORSKIH ALG (DALJŠA OBLIKA)															
			PREDMET ZA ZATIKANJE NEČEDNA ZADEVA						OZNAKA LITVE ČLOVEKU PODOBNA ŽIVAL									
																DOTIK DVEH GIBAJOČIH SE TELES		
			GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	GRŠKI ARHITEKT IN KIPAR S PAROSA	DEJANJE, AKT UDELEŽENEC PUČA			IVAN MINATTI	NALOŽBENIK STARO NASELJE PRI ZADRU		6							
			RASTLIN. RAZMNOŽEVALNE CELICE, TROSI					MISELNA ZBRANOST NAJVEČJI PRITOK OBA										
			SREDNJEV. TURŠKO NOMADSKO LJUDSTVO V RUSLI						IRANSKA VALUTA KURIVO IZ ČRNEGA PREMOGA				IGRALKA MAGNANI PONAVLJAJOČI SE VZORCI					SKANDIJ RUSKI OBRAMBNI MINISTER (SERGEJ)
			VSAKE IMAJO SVOJEGA MALARJA				VIHAR RUŠILNE MOČI					ŽELE S KOŠČKI MESA (IZ FRANC.)					ZELO REDKA KOVINA (ZNAK Y)	12
			PRIKLJUČNI KONTAKT NA ELEKTRONSKEM ELEMENTU				KRAJ NA PELJEŠČU	10			POSTOPEK ZA IZBIRO IN UGOTOVITEV SPOSOBNOSTI VOJAŠKIH OBVEZNIKOV	PASJE NOGE POPLAČILO Z DELOM NA KMETIH					SINOV ALI HCERIN SIN	USPEŠNICA
			NAUK O ASKEZI					OČAK IZ SV. PISMA KRAJ POD MANGRTOM			STARIN-SKOST LITOVSKI KOŠARKAR SABONIS							
			NAJVIŠJI VRH KARAVANK				SOSEDNJA ŠUMEVEC IN SIČNIK		KRAJ PRI KOBARIDU		1			ŽILA, KI DOVAJA KRI V SRCE	PERUJSKI INDIJANEC FILMSKI DETEKTIV VENTURA			
																	VEZLJIVOST	
																	NASILNA TATVINA	SLOVENC ONSTRAN DRAGONJE (JOŠKO) NEOBUT
																		

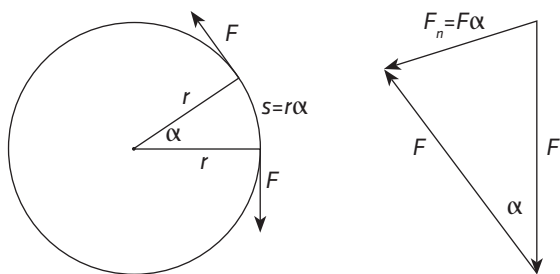
NAGRADNI RAZPIS

☛ Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do 30. septembra 2007, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **Presekov darilni paket** (majica, trak in zvezdna karta). ☛

22. Trenje navite vrvice. Če vrvico navijemo na vodoravni drog, lahko uravnesimo veliko utež z zelo majhno utežjo na drugi strani. Razmerje uteži narašča eksponentno s številom navojev. Zakaj? Poskusimo z različnimi števili navojev. Presenečeni bomo, kako majhna protisila je večsih potrebna.

RAZMISLEK. Sila vzdolž vrvice pojema od velike do male uteži zaradi lepenja. Sile v napeti vrvici dajejo namreč na zakrivljeni podlagi tudi pravokotno komponento, ki povzroči omenjeno sila lepenja. Recimo, da je večja utež na levi, manjša pa na desni. Narišimo skico, kako vzdolžna sila v vrvi vleče nek delček vrvi v levo, v desno pa ga vlečeta nekoliko manjša sila desnega dela vrvi ter sila lepenja; rezultanta sil je pravokotna na vrv in jo uravnesi sila podlage. Ker je sila lepenja sorazmerna s prečno silo in potemtakem tudi z vzdolžnimi silami v vrvici, dobimo enaka razmerja med vsemi silami, ne glede na to, ali vse povečamo ali pomanjšamo. Vsak dodaten navoj prinese enak faktor in zato razmerje sil pojema eksponentno.

Iz skice vidimo, da deluje na majhen odsek vrvice s prečna sila $F_n \approx F\alpha = Fs/r$, kjer je r radij droga ali koluta. Sila lepenja je torej $F_{lep} = kF_n = kF\alpha$. Na vsakem odseku dolžine s (kotnem odseku α) se torej



vzdolžna sila v vrvi zmanjša za faktor $(1 - k\alpha)$. Pri kotu $\varphi = m\alpha$ se torej zmanjša za faktor $(1 - k\alpha)^m \approx e^{-km\alpha} = e^{-k\varphi}$ in dobimo

$$\blacksquare F_2 = F_1 e^{-k\varphi}.$$

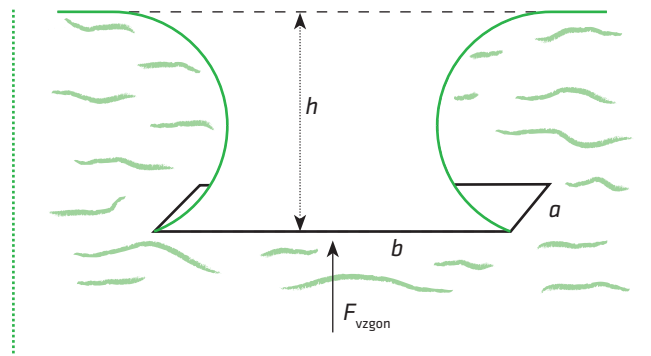
POSKUS. Imenujmo R maksimalno razmerje med silama pri enem navoju okrog droga ali koluta. Potem

je razmerje pri n navojih enako R^n . Sile najlažje povzročimo in merimo z utežmi, ki seveda visita navzdol. Torej opazujemo število navojev $n = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$. Preverimo, ali razmerja uteži, pri katerih vrvica ravno še ne zdrsne, res ubogajo zaporedje $R^{1/2}, R^{3/2}, R^{5/2}, \dots$

Iz eksponentne zveze med silo na desni in silo na levi določimo koeficient lepenja k . Pri tem je φ kot, ki ga pokriva vrv (pri n navojih je kot $\varphi = n \times 2\pi$).

23. Zakaj britvica plava? Če britvico z dolžino a in širino b previdno položimo na vodo v skodelici, plava. Zakaj? Lahko jo celo nekoliko obremenimo. Poizkusimo, kolikšno maksimalno breme lahko nosi. Ali iz tega lahko ocenimo površinsko napetost vode?

RAZMISLEK. Plava predvsem zaradi tlaka pod britvico – zaradi vzgona $F_{vzgon} = \rho g h a b$. Površinska napetost prispeva manjši delež ($F_{pov} = \sigma(2a + 2b)$) in ga smemo pri računu obremenitve zanemariti. Površinska napetost pa je bistvena, da voda ne vdre nad britvico. Če je britvica čista ali primerno mastna, tako da odbija vodo, površinska napetost vleče vodo ob stranici a zgoraj in spodaj, torej s silo $F_{a,pov} = 2\sigma a$, ki jo uravnesi sila tlaka vode $F_{a,tlak} = (\rho g h / 2) h a$. Pri tem je ρ gostota vode, za tlak ob stranici britvice pa smo vzeli povprečje med vrhom in globino h . Podobno velja ob stranici b . Iz ravnovesja $F_{a,pov} = F_{a,tlak}$ dobimo $2\sigma = \rho g h^2 / 2$.



POSKUS. Poskusimo maksimalno obremeniti britvico z lističi papirja ali koščki kovinske folije. Če poznamo površinsko napetost vode, lahko izračunamo h in maksimalno obremenitev F_{vzgon} . Raje izmerimo h ter iz tega ocenimo površinsko napetost vode. Dobljeno oceno primerjajmo s tabelami. ☒

Kateri se bo prvi stalil?

MOJCA ČEPIČ IN GORAZD PLANINŠIČ

☉ Zelo verjetno se v vsaki sodobni kuhinji nahajata obe pridobitvi, ki sta iz „črne“ kuhinje naredili moderno kuhinjo: električna pečica in mikrovalovna pečica. Člani gospodinjstva uporabljamo obe, električno pečico za pečenje in popekanje, mikrovalovno pečico pa najverjetneje za hitro pogrevanje in kuhanje.

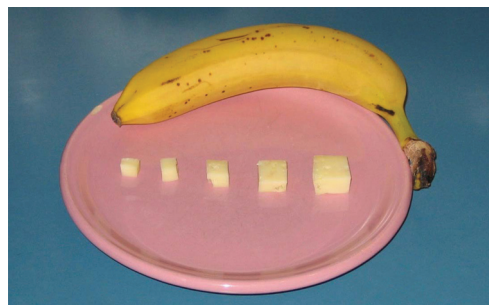
Delovanje obeh naprav se precej razlikuje. Prav tako se razlikuje način segrevanja hrane v obeh napravah. Preverimo s preprostim eksperimentom.

■ Potrebujemo

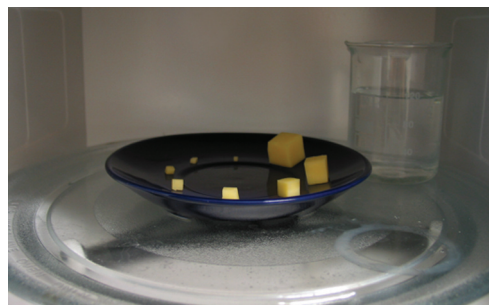
- nekaj dag navadnega trdega sira brez lukenj (npr. gauda),
- krožnik, primeren za pogrevanje hrane v mikrovalovni pečici,
- kovinski pladenj, primeren za pečenje v električni pečici,
- jedilni nož in podlago za rezanje sira.

Sir narežimo na kocke z različnimi stranicami. Najmanjša sirova kocka naj ima stranico nekaj mm, največja pa okoli 2 cm. Pri občutku za velikosti kock si lahko pomagamo s sliko 1. Za primerjavo velikosti je poleg kock sira položena še banana običajne velikosti.

Pripravimo dve enaki skupini kock. Eno skupino postavimo na krožnik, primeren za pogrevanje v mi-



Slika 1.



Slika 2.

krovalovni pečici. Drugo skupino postavimo na pladenj, ki ga lahko potisnemo v električno pečico.

Katere kocke se bodo prve stalile v električni pečici? Večje, manjše ali morda vse hkrati? Napovejmo, še preden se lotimo poskusa. Električno pečico ogrejmo na približno 200°C. Ko je pečica ogreta, postavimo krožnik s kockami sira vanjo in skozi okno pečice opazujemo, kaj se dogaja. Zadostuje nekaj minut, da se sir stali. Potem ugasnimo pečico in odstranimo krožnik iz pečice.

Sledi drugi del poskusa. Katere kocke se prej stalijo v mikrovalovni pečici? Večje, manjše ali morda vse hkrati? Napovejmo, še preden se lotimo poskusa. Mikrovalovno pečico (če je kombinirana) nastavimo tako, da bo grela le z mikrovalovi. Sirove kocke ne vpijejo veliko energije mikrovalov, zato damo v pečico še manjši kozarec z vodo, ki bo vpijal delež energije mikrovalov, ki bi se sicer vračala v oddajnik in ga lahko poškodovala (glej sliko 2). Če lahko spreminjamo moč pečice, izberimo največjo moč. Čas ogrevanja nastavimo na minuto. Po potrebi lahko gretje prekinemo ali čas gretja podaljšamo. V pečico postavimo krožnik s kockami sira, prižgimo pečico in skozi okno pečice opazujemo, kaj se dogaja.

Ali smo pravilno predvidevali? Katera kocka se je prva stalila v električni in katera v mikrovalovni pečici?

Zakaj tako, pa lahko preberemo v naslednji številki Preseka. ✕

27. tekmovanje osnovnošolcev v znanju fizike za Stefanova priznanja

SAŠA KOŽUH

☉ Oddelek za fiziko in tehniko *Pedagoške fakultete v Ljubljani*, Oddelek za fiziko *Fakultete za naravoslovje in matematiko* v Mariboru, *Društvo matematikov, fizikov in astronomov* ter *Zavod RS za šolstvo* so bili organizatorji 27. tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih obeh fakultet se je 12. maja 2007 preizkušalo 265 učencev, od tega 135 učencev iz 8. razredov in 130 učencev iz 9. razredov. Tekmovalci so reševali tri teoretične in dve eksperimentalni nalogi. Naloge za področna tekmovanja in državno tekmovanje so pripravili Barbara Rovšek, Nada Razpet, Mojca Čepič, Marja Šteblaj, Katarina Susman, Vesna Harej in Saša Kožuh. Pri organizaciji sta sodelovala še Saša Kožuh in Jelka Sakelšek, za računalniško podporo tekmovanja je skrbel Matjaž Željko, levji del urejanja nalog pa je prav tako prevzel Saša Kožuh. Pri pripravi velikega števila eksperimentalnih nalog za tekmovanje v dveh krajih, pri nakupu potrebne opreme in iskanju učinkovitih postavitvev je veliko prispeval Goran Iskrič, mnogo pa je pomagal tudi Gregor Tarman. Pri izvedbi državnega tekmovanja so sodelovali še: Barbara Rovšek, Marja Šteblaj, Katarina Susman, Aleš Fajmut, Said Bešlagič, Andrej Nemec in študentje oddelkov za fiziko obeh fakultet.

Na državnem tekmovanju je v kategoriji 8. razredov prvo nagrado osvojil en tekmovalec, drugo nagrado štirje tekmovalci in tretjo nagrado pet tekmo-

valcev. Zlato Stefanovo priznanje je osvojilo 97 tekmovalcev.

V kategoriji 9. razredov je prvo nagrado osvojil en tekmovalec, drugo nagrado štirje tekmovalci in tretjo nagrado štirje tekmovalci. Zlato Stefanovo priznanje je osvojilo 99 tekmovalcev.

1. NAGRADA

■ 8. razred

- JURIJ TRATAR, OŠ Stična

■ 9. razred

- ALEKSANDER KLEMENČIČ, OŠ Ivana Cankarja, Ljubljana

2. NAGRADA

■ 8. razred

- DOMEN IPAVEC, OŠ Komenda Moste
- DAVID KOS, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana
- MATJAŽ LEONARDIS, OŠ Franceta Bevka, Ljubljana
- VERONIKA VODEB, OŠ Šmarje pri Jelšah

■ 9. razred

- PAVEL KOS, OŠ Koseze, Ljubljana
- KATERINA KUKULJAN, OŠ Trnovo, Ljubljana
- MATJAŽ DROLC, OŠ Ivana Skvarče, Zagorje
- BERNARD TRČEK, OŠ Horjul

3. NAGRADA

■ 8. razred

- MATIC BRATINA, OŠ Dobravlje
- MARKO ES, OŠ Šoštanj
- BLAŽ MAKORIČ, OŠ Dobrovo
- BOŠTJAN PETEK, OŠ Franceta Prešerna, Maribor
- PETER RUPNIK, OŠ Idrija

■ 9. razred

- ANDRAŽ BAJT, OŠ Kanal
- LUKA KRMPOTIČ, VIZ I. OŠ Rogaška Slatina
- KLEMEN ZAJC, OŠ Cerkno
- MITJA ZIDAR, OŠ Stična

Podrobnejši rezultati so objavljeni na spletni strani

www.dmfa.si

Pred državnim tekmovanjem so bila 24. aprila 2007 področna tekmovanja v trinajstih krajih. Skupaj je tekmovalo 903 učencev v 8. razredu in 939 učencev v 9. razredu, oziroma 1842 učencev. Podeljenih je bilo skupaj 1471 srebrnih Stefanovih priznanj. Tekmovalci so na področnih tekmovanjih reševali pet nalog izbirnega tipa in tri računske naloge.

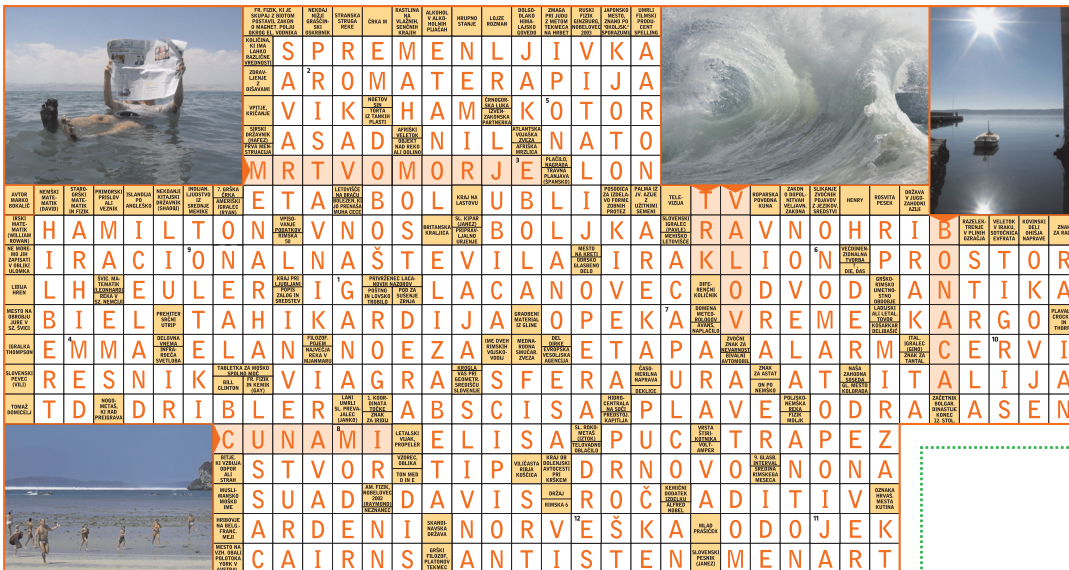
28. marca so bila šolska tekmovanja, na katerih je sodelovalo preko 9600 učencev, podeljenih je bilo 3190 bronastih priznanj v obeh tekmovalnih kategorijah.

Letos so že drugič potekala tekmovanja po novem načinu: učenci so tekmovali posamično, medtem ko so prej dolga leta tekmovali v dvojicah. Zaradi večjega števila sprejetih tekmovalcev na državnem tekmovanju je tudi letos državno tekmovanje potekalo hkrati v Mariboru in Ljubljani.

Zahvaljujemo se vsem, ki so pripomogli k uspešni izvedbi področnih tekmovanj in državnega tekmovanja, mladim tekmovalkam in tekmovalcem ter njihovim mentorjem pa iskreno čestitamo za dosežene rezultate. ☺

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 34/6

☺ Za nagradno križanko iz šeste številke prejšnjega letnika Preseka smo prejeli 20 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo **Gremo na morje**. Izžrebanji reševalci, JURE AVSEC iz Kranja, SIMON BOHAK iz Spodnjega Dupleka, JOŽE JARC iz Domžal, LUKA KRMPOTIČ iz Rogaške Slatine in CIRIL POHAR iz Ljubljane so razpisane nagrade prejeli po pošti. ☺





ANDREJ GUŠTIN

♦ Kdo ne pozna angleškega astrofizika Stephena Hawkinga, ki ga je huda bolezen prikovala v negibnost na invalidskem vozičku, a je kljub temu dosegel izjemne uspehe v teoretični astrofiziki? Širši javnosti je znan predvsem zaradi svojih knjig *Kratka zgodovina časa* ter *Vesolje v orehovi lupini*.



Hawking bo obiskal Slovenijo

Hawking je pravzaprav postal nekakšna znanstvena ikona druge polovice 20. stoletja in je zasedel prestol, na katerem je pred tem kraljeval Albert Einstein. Čeprav taka popularnost in občudovanje spominja na malikovanje pop zvezdnikov, prispeva tudi k popularizaciji znanosti. No, Hawking je 26. aprila naredil še eno nenavadno potezo. Na prirejenem Boeingu 727 podjetja Zero Gravity Corp. je za nekaj kratkih minut doživel breztežnost (glej sliko na naslovnici). Hawking je bil nadvse navdušen in je izjavil, da si že dolgo želi v vesolje, tak polet pa je le prvi korak. Vznemirjen je bil tudi zaradi tega, ker je že 40 let privezan na invalidski voziček in mu je lebdenje v kratkotrajni breztežnosti predstavljalo pravo osvoboditev. Polet je bil organiziran tudi kot dobrodelna akcija, v okviru katere so zbrali več kot 100.000 evrov.

Za nas je še posebej zanimivo, da bo Stephen Hawking obiskal Slovenijo. Na povabilo Univerze v Novi Gorici bo imel Hawking konec avgusta uvodno predavanje na mednarodni znanstveni konferenci z naslovom *Time and Matter 2007* (Čas in snov 2007). Konferenco bo organiziral Laboratorij za astrofiziko osnovnih delcev Univerze v Novi Gorici in bo potekala od 26. do 31. avgusta 2007 na Bledu. Natančnejše informacije o konferenci so na voljo na njeni domači strani tam.ung.si.

V času izida Preseka bo že znano, če je Stephen Hawking zares obiskal Slovenijo, mi pa se bomo v prihodnjih številках posvetili nekaterim sodobnim pogledom na njegovo delo o črnih luknjah. ✕

Velikani prihajajo

ANDREJ GUŠTIN

☛ Na gori Graham v Arizoni (ZDA) je začel delovati največji dvogled oziroma binokular na svetu – *Large Binocular Telescope* (LBT). Astronomi si od njega obetajo številna odkritja, od spremljanja izbruha sevanja gama do iskanja eksoplanetov.

LBT je teleskop nove generacije, pri projektiranju in izgradnji katerega so sodelovali italijanski, nemški in ameriški strokovnjaki. Pravzaprav ne gre za en sam teleskop, temveč za binokular, ki ga sestavlja dve 8,4-metrski primarni zrcali, postavljeni na skupni montaži. Prav zaradi te revolucionarne postavitev LBT nima primerjave z drugimi današnjimi teleskopi, saj je njegova teoretična ločljivost primerljiva s teleskopom z enim zrcalom premera 22,8 metra. Načeloma bi z njim lahko na Luni videli avtomobil.

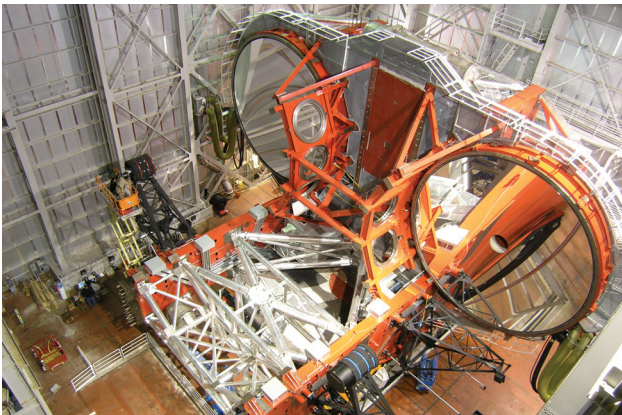
Ideja za tak teleskop sega v leto 1984, ko je italijanski konzilij za astronomske raziskave (CRA) odstopil od projekta za izdelavo nacionalnega teleskopa, ki je nastal v šestdesetih letih, in se odločil za izdelavo 8-metrskega velikana. Leto kasneje so pri CRA začeli iskati možnosti za izdelavo takega teleskopa v okviru mednarodnih programov in se priključili novemu projektu ameriških univerz Arizona in Ohio. Kmalu se je projektu pridružila univerza Chicago in padla je odločitev za še bolj smel podvig, za izdelavo orjaškega binokularja. Med leti 1986 in 1989 so naredili osnovne študije in načrte za izdelavo in postavitev LBT. Leta 1989 sta od projekta odstopili univerzi Chicago in Ohio, priključila se je ameriška Research Corporation, italijanska vlada pa je podpisala pismo o nameri sponzoriranja, kar je projekt pospešilo. Leta 1996 so k projektu pristopile še nekatere nemške raziskovalne inštitucije, leto kasneje pa se je vrnila tudi univerza Ohio. Po vseh for-

malnih zapletih so v italijanskih delavnicah Ansaldo-Camozzi leta 2002 dokončali montažo teleskopa in kupolo ter druga poslopja na gori Graham v Arizoni na nadmorski višini 3200 metrov.

Primarni 8,4-metrski zrcali sta trenutno med največjimi na svetu. Narejeni sta iz steklenega satovja, ki zmanjšuje maso zrcal in toplotno raztezanje. Nju na kratka goriščna razdalja omogoča snemanje zelo širokega polja neba. Sekundarni zrcali sta opremljeni z adaptivno optiko, ki rešuje problem turbulence ozračja oziroma migetanja, kar bo bistveno izboljšalo dejansko ločljivost. Znano je, da je prav ozračje glavna ovira zemeljskih astronomskih opazovanj. Pomemben optični del sta tudi CCD kameri LBC (Large Binocular Camera), s katerima je opremljen vsak teleskop posebej in ki imata kar 37 milijonov slikovnih elementov. LBT bo lahko deloval tudi v interferometričnem načinu. To pomeni, da bo mogoče svetlobo iz obeh teleskopov združiti v eno sliko. Na tak način bo mogoče videti mnogo manjše podrobnosti, teoretično take kot pri teleskopu s premerom 28 m. Pomembno je, da bo lahko LBT v primerjavi z drugimi sodobnimi teleskopi snemal zelo široka polja neba. Tako bo mogoče mnogo hitreje in bolje preuč-

masa	700 ton
višina teleskopa	25 metrov
višina kupole	52 metrov
montaža	altazimutna
optična shema	dva vzporedna zrcalna teleskopa z možnostjo interferometrije
premer primarnih zrcal	8,4 metrov (f/1,14)
debelina roba primarnih zrcal	89 centimetrov
masa posameznega primarnega zrcala	15.600 kilogramov
premer sekundarnih zrcal	91 centimetrov
teoretična ločljivost	0,004"
frekvenca prilagajanja adaptivne optike	do 2000 popravkov na sekundo
natančnost pozicioniranja	0,3"
omejitve delovanja	veter nad 80 kilometrov na uro





Slika 1. V orjaški kupoli se skriva največji dvogled - LBT, ki bo astronomom omogočil izjemen pogled v vesolje. (Foto: Ray Bertram)



Slika 2. Pogled na zrcali velikega teleskopa LBT. Za primerjavo velikosti lahko služijo avtomobili v spodnjem desnem kotu slike. (Foto: Aaron Ceranski)

premer primarnega zrcala	ime	nekaterne karakteristike
10,4 m	Gran Telescopio Canarias (GTC)	Je še v izdelavi in bo najverjetneje začel delovati konec letošnjega leta. Stoji na Kanarskih otokih, njegovo primarno zrcalo je sestavljeno iz 36-ih šestkotnih segmentov.
10 m	Keck I in II	Dva identična teleskopa s segmentiranimi primarnima zrcaloma delujeta že od devdesetih let preteklega stoletja na Havajih.
9,2 m	Hobby - Eberly Telescope (HET) na Mount Fowlkesu in Južnoafriški veliki teleskop (South Africa Large Telescope - SALT)	Zaradi fiksne postavitve lahko opazujeta le del neba in sta primerna predvsem za spektroskopijo.
8,3 m	Subaru	Stoji na Havajih v bližini teleskopov Keck in ima izredno natančno izbrušeno primarno zrcalo z največjim odstopanjem od idealne oblike 14 nanometrov.
8,2 m	VLT	Štirje enaki teleskopi na Evropskem južnem observatoriju - ESO (Čile). Lahko delujejo samostojno ali kot en teleskop in so trenutno najboljši sistem optičnih teleskopov na svetu.
8 m	Gemini North in Gemini South	Dva enaka teleskopa, en stoji na Havajih, drugi v Čilu (Cerro Pachón).

Tabela 2. Primerjava nekaterih največjih delujočih teleskopov

vati podrobnosti (na primer v oddaljenih galaksijah), jedra bližnjih galaksij, iskanje planetov izven Osončja in podobno. Vse te karakteristike LBT uvrščajo v sam vrh teleskopov nove generacije, če ne kar na prvo mesto, kar potrjujejo tudi prvi poskusni posnetki.

Za konec še nekaj zanimivosti. Kamere LBC bodo v eni noči posnele do za 140 CD-romov podatkov. Glavni zrcali sta tako natančno zbrušeni, da če bi bili veliki kot nogometno igrišče, bi bila odstopanja manjša od stotinke debeline človeškega lasu (pribli-

žno 25 mikronov). Za izdelavo primarnih zrcal so porabili 38 ton posebnega stekla.

Razvoj teleskopov se še ni ustavil. Strokovnjaki že načrtujejo teleskope s premerom, večjim od 20 metrov. Enega od teh predstavlja novi evropski velikani E-ELT (European Extremely Large Telescope), ki naj bi imel premer primarnega zrcala kar 42 metrov. Toda to naj bi bil le predhodnik še bolj smelega projekta, 100-metrskega velikana OWL (Overwhelmingly Large). ☒

Razdalja med nizi

ANDREJ TARANENKO

☛ Iz niza PRELEP bi želeli dobiti niz PRESEK. Kako lahko to dosežemo z najmanjšim možnim številom operacij?

Najprej moramo seveda povedati, katere operacije so dovoljene. V nizih smemo zamenjati en znak za drugega, izbrisati ali vrniti en znak. Na našem primeru vidimo, da je dovolj, da v nizu PRELEP zamenjamo L za S in zadnji P za K, da dobimo niz PRESEK. Potrebni sta torej dve operaciji in v tem primeru je to najmanjše število operacij, ki jih potrebujemo.

■ Levenshteinova razdalja

V računalništvu je *Levenshteinova razdalja* (LR) mera podobnosti med dvema nizoma. Označimo prvi niz z x in drugega z y . V tem primeru je Levenshteinova razdalja minimalno število brisanj, vrivanja in zamenjav, ki so potrebne, da prvi niz pretvorimo v drugega. Večja kot je Levenshteinova razdalja, bolj se niza razlikujeta.

PRIMER 1.

- Če je $x = \text{MIZA}$ in $y = \text{MIZA}$, potem je $LR(x, y) = 0$, saj ni potrebna nobena sprememba nizov, niza sta že identična.
- Če je $x = \text{MIZA}$ in $y = \text{MUZA}$, potem je $LR(x, y) = 1$, saj je potrebna ena zamenjava (I v U), da niz x spremenimo v y .

Levenshteinova razdalja je poimenovana po ruskem znanstveniku Vladimiru Levenshteinu, ki je leta 1965 razvil algoritem za izračun tako definirane razdalje med dvema nizoma. Levenshteinovo razdaljo uporabljamo na mnogih področjih računalništva, na pri-

mer pri preverjanju črkovanja, prepoznavanju govora, analizi DNK in ugotavljanju plagiarizma.

■ Algoritem za izračun Levenshteinove razdalje

Preden podamo algoritem za izračun Levenshteinove razdalje, izpeljimo rekursivno zvezo, ki to razdaljo definira. Predpostavimo, da poznamo Levenshteinovo razdaljo za pare nizov (x, y) , $(x + z_1, y)$ in $(x, y + z_2)$. Radi bi izračunali Levenshteinovo razdaljo $LR(x + z_1, y + z_2)$, se pravi, razdaljo med nizoma $x + z_1$ in $y + z_2$, kjer sta z_1 in z_2 poljubna znaka, operacija $+$ pa pomeni, da znak dodamo na konec niza. Zanima nas torej dodatno število operacij, ki jih potrebujemo, da niz $x + z_1$ pretvorimo v niz $y + z_2$, glede na Levenshteinovo razdaljo med enim izmed prej naštetih parov nizov. Za vsak par navajamo en primer.

- Poznamo $LR(x, y)$ in bi radi izračunali $LR(x + z_1, y + z_2)$. V tem primeru je pomembno, ali sta znaka enaka ali ne. Če sta znaka enaka, potem ne potrebujemo dodatne operacije, če pa sta različna, je potrebna ena dodatna operacija, ki znak z_1 zamenja za znak z_2 . Naj bo torej $n = 0$, če velja $z_1 = z_2$, in $n = 1$, če sta znaka različna ($z_1 \neq z_2$). V tem primeru je $LR(x + z_1, y + z_2) = LR(x, y) + n$. Poglejmo na primeru, kjer je $x = \text{MIT}$ in $y = \text{MIL}$. V tem primeru je $LR(x, y) = 1$. Dodajmo na konec niza x znak $z_1 = \text{I}$ in na konec niza y znak $z_2 = \text{O}$. Torej $LR(\text{MITI}, \text{MILO}) = LR(\text{MIT}, \text{MIL}) + 1 = 2$.





- Poznamo $LR(x + z_1, y)$ in bi radi izračunali $LR(x + z_1, y + z_2)$. V tem primeru želimo v drugi niz dodati en znak, torej imamo eno dodatno operacijo, kar pomeni $LR(x + z_1, y + z_2) = LR(x + z_1, y) + 1$.
- Poznamo $LR(x, y + z_2)$ in bi radi izračunali $LR(x + z_1, y + z_2)$. V tem primeru želimo v prvi niz dodati en znak, torej imamo eno dodatno operacijo, kar pomeni $LR(x + z_1, y + z_2) = LR(x, y + z_2) + 1$.

Če želimo iz naštetih možnosti dobiti minimalno potrebno število operacij, moramo izbrati najmanjšo od prej naštetih vsot. Torej Levenshteinovo razdaljo med nizoma $x + z_1$ in $y + z_2$ izračunamo na naslednji način. Naj bo

$$n = \begin{cases} 0 & z_1 = z_2 \\ 1 & z_1 \neq z_2 \end{cases}.$$

Potem velja

$$LR(x + z_1, y + z_2) = \min\{LR(x, y) + n, LR(x + z_1, y) + 1, LR(x, y + z_2) + 1\}.$$

Poglejmo še začetne pogoje za zapisano rekurzivno formulo. Levenshteinova razdalja med dvema praznima nizoma je 0 ($LR(\diamond, \diamond) = 0$), kjer $\diamond$ označuje prazen niz. Levenshteinova razdalja med praznim nizom in poljubnim nizom x je enaka dolžini niza x , saj moramo vriniti (izbrisati) toliko znakov, kot jih imamo v nizu x . Torej $LR(\diamond, x) = LR(x, \diamond) = |x|$, kjer je $|x|$ število znakov v nizu x .

Rekurzivna implementacija problema ni preveč ugodna, saj je eksponentno počasna in nepraktična za nize z veliko znaki. Če podrobneje pogledamo rekurzivno zvezo, lahko opazimo, da je $LR(x, y)$ odvisna od $LR(x', y')$, kjer je x' krajši od x ali y' krajši od y , ali oboje. To omogoča uporabo dinamičnega programiranja, saj si pri dinamičnem programiranju shranjujemo že izračunane rešitve, ki bi jih pri rekurzivnih klicih računali večkrat.

Vmesne rešitve si bomo shranjevali v dvodimenzionalno matriko M , dimenzije $(|x| + 1) \times (|y| + 1)$. Za poljubni niz w naj oznaka $w[0]$ pomeni prazen niz, $w[i]$, za $i = 1, 2, \dots, |w|$ pa pomeni vse znake v nizu od prvega do i -tega znaka. Oznaka w_i naj pomeni i -ti znak v nizu w , pri čemer je prvi znak na mestu številka ena. Če je npr. $w = \text{PRESEK}$, potem je

$w[3] = \text{PRE}$, $w_3 = \text{E}$. Element $M[i, j]$ matrike M tako pomeni Levenshteinovo razdaljo med nizoma $x[i]$ in $y[j]$: $M[i, j] = LR(x[i], y[j])$.

Sedaj lahko zapišemo algoritem za izračun Levenshteinove razdalje med poljubnima nizoma x in y :

1. $M[0, 0] = 0$
2. $M[i, 0] = i, i = 1..|x|$
3. $M[0, j] = j, j = 1..|y|$
4. Za vse preostale elemente v matriki ($i = 1..|x|$ in $j = 1..|y|$) pa velja

$$M[i, j] = \min \begin{cases} M[i-1, j-1] + \\ \quad + \text{if } (x_i = y_i) \text{ then } 0 \text{ else } 1, \\ M[i-1, j] + 1, \\ M[i, j-1] + 1. \end{cases}$$

Matriko M lahko potemtakem izračunamo vrstico po vrstico, saj je element $M[i, j]$ odvisen od elementov v predhodni vrstici in od elementa $M[i, j-1]$. Levenshteinova razdalja med nizoma x in y je po zaključku postopka shranjena v celici $M[|x|, |y|]$.

PRIMER 2. Poglejmo še na konkretnem primeru minimalno število operacij, ki jih potrebujemo, da niz POLETJE pretvorimo v niz MORJE. V matriki na sliki 1 bomo poleg indeksov vrstic in stolpcev zapisali še ustrezne znake.

Matrika M je na sliki 1 obarvana rumeno. Ker je $M[7, 5] = 4$, je $LR(\text{POLETJE}, \text{MORJE}) = 4$.

■ Iskanje poravnave nizov

Z ravnokar predstavljenim algoritmom najdemo le minimalno število operacij, ki jih potrebujemo, da iz enega niza dobimo drugega. Kaj pa, če bi radi vedeli tudi, katere znake moramo zamenjati oziroma kje v nizu moramo znak vriniti (izbrisati)? Poiskali bomo tako poravnavo nizov (izpis nizov enega nad drugim), da bo na prvi pogled jasno, na katerem mestu smo znak zamenjali ali vrinili ali izbrisali.

To poravnavo lahko pridobimo iz matrike M . Pričeti moramo pri končni rešitvi (torej pri elementu $M[|x|, |y|]$) in se premikati nazaj, glede na izračune. Vsak premik nazaj seveda ni dober. Poljubni element $M[i, j]$ (razen začetnih vrednosti) je odvisen od elementov $M[i-1, j-1]$, $M[i-1, j]$ in $M[i, j-1]$. To pomeni, da imamo iz vsakega elementa tri možne premike. Pa tudi te tri možnosti niso vedno dovolje-

		◇	M	O	R	J	E
i \ j	0	1	2	3	4	5	
◇	0	0	1	2	3	4	5
P	1	1	1	2	3	4	5
O	2	2	2	1	2	3	4
L	3	3	3	2	2	3	4
E	4	4	4	3	3	3	3
T	5	5	5	4	4	4	4
J	6	6	6	5	5	4	5
E	7	7	7	6	6	5	4

Slika 1. Izračun LR (POLETJE, MORJE)

		◇	M	O	R	J	E
i \ j	0	1	2	3	4	5	
◇	0	0	1	2	3	4	5
P	1	1	1	2	3	4	5
O	2	2	2	2	2	3	4
L	3	3	3	3	2	3	4
E	4	4	4	4	3	3	3
T	5	5	5	4	4	4	4
J	6	6	6	5	5	4	5
E	7	7	7	6	6	5	4

Slika 2. Vsi dovoljeni premiki za primer 2

		◇	M	O	R	J	E
i \ j	0	1	2	3	4	5	
◇	0	0	1	2	3	4	5
P	1	1	1	2	3	4	5
O	2	2	2	1	2	3	4
L	3	3	3	2	2	3	4
E	4	4	4	3	3	3	3
T	5	5	5	4	4	4	4
J	6	6	6	5	5	4	5
E	7	7	7	6	6	5	4

Slika 3. Ena od optimalnih poravnav za primer 2

ne. Izberemo jih lahko le, če smo $M[i, j]$ izračunali s pomočjo njih. Torej na element levo od elementa, ki ga gledamo, se smemo premakniti le, če je za ena manjši. Enako velja za element nad gledanim elementom. Na element levo zgoraj od gledanega pa se smemo premakniti le, če je ta za ena manjši ali če je enak gledanemu elementu. Definirali smo dovoljene premike. Če imamo več dovoljenih premikov, je vseeno, katerega od njih izberemo, moramo pa izbrati manjšo od vseh dovoljenih vrednosti. Za prejšnji primer so vsi dovoljeni premiki z zelenimi puščicami prikazani na sliki 2. Vsaka izbrana pot preko puščic nam da poravnavo nizov, ki zahteva štiri transformacije.

Poglejmo še, kaj ti premiki pomenijo. Če se z elementa $M[i, j]$ premaknemo na element $M[i, j - 1]$ (na levega), to pomeni, da smo v drugem nizu vrinili j -ti znak (znak y_j je poravnan s praznino). Če se z elementa $M[i, j]$ premaknemo na element $M[i - 1, j]$ (na zgornjega), to pomeni da smo v prvem nizu i -ti znak vrinili (znak x_i je poravnan s praznino). In še zadnja možnost, da smo se z elementa $M[i, j]$ premaknili na element $M[i - 1, j - 1]$ (levo gor), to pomeni, da sta znaka x_i in y_j med seboj poravnana – če sta različna, smo znak x_i zamenjali za znak y_j .

Poglejmo še poravnavo, ki jo dobimo za prejšnji primer, če izberemo premike, ki so na sliki 3 označeni z zelenimi krogi.

Z elementa $M[7, 5]$ smo se premaknili na $M[6, 4]$, kar pomeni, da sta sedmi znak prvega niza in peti znak drugega niza poravnana. Prav tako smo se z $M[6, 4]$ premaknili na $M[5, 3]$, zato sta poravnana šesti znak prvega in četrti znak drugega niza. Z $M[5, 3]$ smo se premaknili na $M[4, 2]$, zato sta poravnana tudi peti znak prvega in tretji znak dru-

gega niza. Z elementa $M[4, 2]$ smo se premaknili na $M[3, 2]$, kar pomeni, da smo četrti znak prvega niza vrinili (poravnan s praznino, označeno s simbolom ◇). Z $M[3, 2]$ smo se premaknili na $M[2, 2]$, torej je tudi tretji znak prvega niza vrinjen. Z $M[2, 2]$ smo se premaknili na $M[1, 1]$, kar pomeni, drugi znak v prvem nizu je poravnan z drugim znakom v drugem nizu. Ter še zadnja poravnava, kjer smo se z $M[1, 1]$ premaknili na $M[0, 0]$, kar pomeni da sta prva znaka v obeh nizih med seboj poravnana.

Premike vedno zaključimo šele, ko v matriki pri-
spemo na polje $M[0, 0]$. V tretji vrstici poravnave so z zvezdicami označena mesta, kjer smo uporabili eno od možnih operacij (zamenjava, vrivanje ali brisanje).

P	O	L	E	T	J	E
M	O	◇	◇	R	J	E
*		*	*	*		

■ Nagradna naloga

Za razmislek in vzpodbudo k programiranju napišite program, ki preko tipkovnice prebere dva niza znakov in poišče najdaljše skupno podzaporedje obeh nizov. Pomagajte si z zgoraj opisanimi postopki. Ena od prejetih pravih rešitev bomo nagradili.

■ Literatura

- [1] <http://www.merriampark.com/ld.htm>
- [2] <http://www.cs.princeton.edu/introcs/96optimization/> ☒

RiŠ Ravnilo in šestilo - Rišem in študiram

PRVI DEL

DAMJAN KOBAL

☛ **RiŠ je program, s katerim lahko počnemo marsikaj. Lahko rišemo, raziskujemo, zanimiv je za matematike in vse ostale, namenjen je radovednim, pametnim in manj pametnim, vztrajnim in lenim, skratka vsem, ki radi raziskujete, ustvarjate, razumete.**

■ Kratek opis programa

Program RiŠ - ravnilo in šestilo (v originalu *ZuL - Zirkel und Lineal* ali *Zeichnen und Lernen*) je genialen, pameten, kratek program (obsega le nekaj MB), ki je prosto dostopen. Omogoča risanje in tako imenovano dinamično geometrijo. Je zelo primeren in poučen za raziskovanje ter razumevanje geometrijskih odnosov, dobri domišljiji omogoča skoraj neomejene možnosti za intuitivne in vizualne predstavitve mnogih, ne samo matematičnih vzročnih odnosov.

■ Kako do programa RiŠ?

Program si lahko naložimo direktno z originalne domače strani ZUL (<http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/>) ali iz bogato opremljene domače strani RiŠ (<http://ris.gimptuj.si/index.php>), ki je po zaslugah g. Šenvetra iz Gimnazije Ptuj v celoti v slovenščini. Naši napotki o programu RiŠ se bodo nana-

<http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/>

šali na verzijo programa, ki si ga lahko naložimo direktno na naslovu (<http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/program/car.exe>). Potem ko smo si naložili program in ga namestili na svoj računalnik, lahko začnemo.

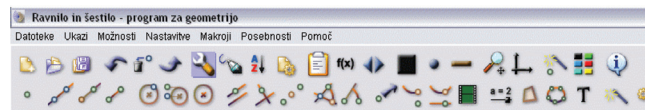
Poženiimo program, ki se mogoče pokaže v „angleščini“. Pod *Settings* izberemo *Set Language* in namesto *default* napišemo *sl*. Zapremo in ponovno zaženemo program, ki se pokaže v slovenščini.

■ Kako se naučimo programa?

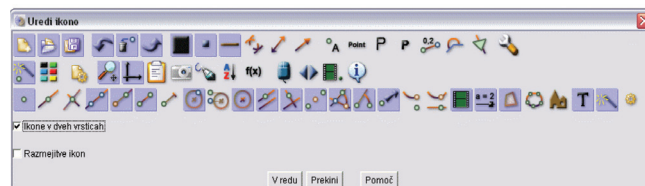
Počasi in od začetka! Program se bo v začetku mogoče zdel nekoliko nenavaden. V nekaterih rešitvah se namreč razlikuje od običajne „windows logike“ in bomo zato sprva potrebovali nekoliko več potrpežljivosti. Ko pa ga nekoliko bolje spoznamo, bomo vzljubili njegovo preprosto in genialno logiko. Uporabe programa se bomo najbolje naučili ob konkretnih nalogah. V začetku bomo razlagali nekoliko več, v nadaljevanju pa bo razlage vedno manj, izzivov pa vse več. Nameravamo pa naloge, probleme in izzive postavljati tako, da bo bralec, ob nekaj namigih, do rešitev lahko prišel sam.

NALOGA 1. V programu RiŠ nariši trikotnik *ABC* in njegovo težišče. Trikotnik naj bo tak, da boš lahko z miško poljubno spreminjal oglišča in se bo dinamično s tem spreminjalo tudi težišče.

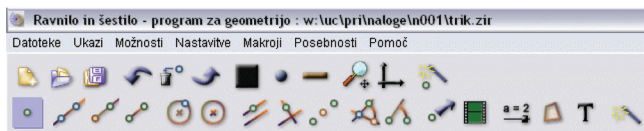
REŠITEV. Potem, ko smo zagnali program, se nam prikaže okno z naslednjimi ikonami:



Da bomo lažje začeli, pojdimo pod *Nastavitve* in *Uredi orodja*. Prikaže se nam izbor ikon, kot kaže naslednja slika.

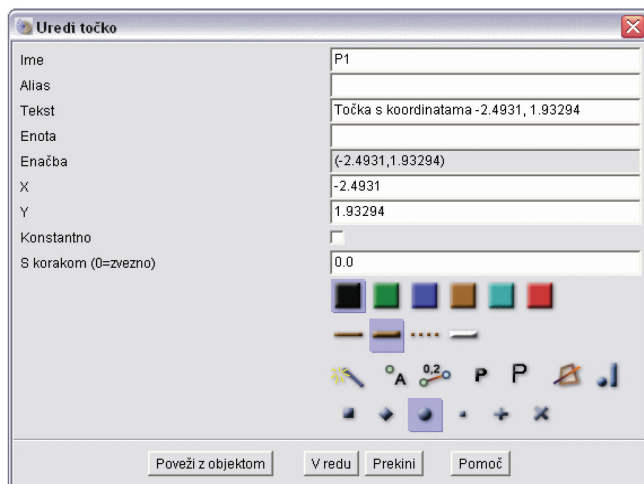


Tu imamo na razpolago nabor ikon, ki jih lahko uporabljamo. Izberemo ikone, ki jih želimo uporabljati in kliknemo *V redu*. Za vajo in za preglednost dela v nadaljevanju predlagamo, da si nabor ikon nekoliko poenostavimo, kot kaže spodnja slika.

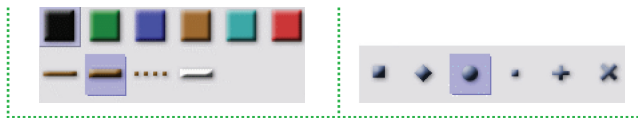


Poudarjeni kvadratični ikoni prikazuje, katero „orodje“ je trenutno izbrano. Na prvi sliki je to „ključek“, na tretji pa „mali krogec“, ki ponazarja točko. Na drugi sliki so poudarjene izbrane ikone, ki bi bile vidne za uporabo v programu.

Pripravljeni smo, da narišemo prvo točko. Če imamo izbrano ikono „mali krogec“ kot na zgornji sliki, le kliknemo (levi klik) in že smo narisali prvo točko. Sedaj naredimo „desni klik“ na točki, ki smo jo narisali. Prikaže se „osebna izkaznica“ naše točke, ki je videti takole:

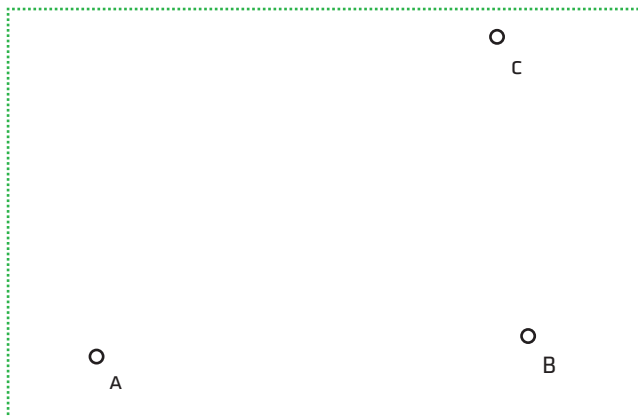


V „osebni izkaznici“ je veliko podatkov, a za nas bodo v začetku pomembni samo nekateri, ostale pa bomo spoznavali postopoma. Gotovo ne bo težko preimenovati točko v A. Ostale „pisne“ informacije pustimo. Barva točke naj ostane črna, z izborom „tanke črte“ pa bomo dobili točko označeno kot mali votel krogec. Kliknimo še na . S tem povzročimo, da se izpiše ime točke. Poskusimo še spreminjati barvo in obliko točke z različnimi izbori ikon:



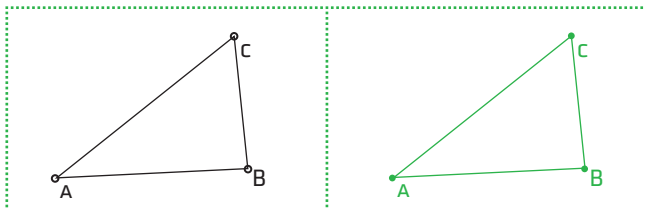
Da bi videli rezultat, kliknemo *V redu*. Osebnostno izkaznico ponovno dobimo z desnim klikom na točko. Videli bomo, da imajo zelo podobne osebne izkaznice tudi drugi objekti (daljice, premice, krogi, izrazi).

Sedaj ne bo težko narisati še točk B in C. Če kliknemo na ikono , nam program pokaže (poudari) vse tri gibljive točke, ki smo jih narisali. Točke lahko sedaj (z levo miško) prosto premikamo. Če nam je uspelo, smo dobili nekaj podobnega, kot vidimo na spodnji sliki. Podobno kot lahko na spodnji sliki z „desno miško“ prosto premikamo točke, lahko to počnemo v programu Riš tudi tedaj, ko nimamo izbrane „puščice“ za gibanje. Kliknimo na ikono za risanje daljic  in poskusimo z desno miško premikati točke. Narisane točke izgledajo takole. Če pogledamo spletno verzijo tega članka (<http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/>), bomo opazili, da točke res lahko premikamo.



Vse je pripravljeno, da narišemo trikotnik. Izberemo ikono za risanje daljic in kliknemo na zaporedna oglišča. Dobimo trikotnik, ki se bo dinamično spreminjal s premikanjem oglišč. Dobimo podobno sliko kot spodaj. Za vajo naj vsak nariše še trikotnik, kot ga vidimo na desni strani. Navodilo je preprosto. Če želimo spremeniti barvo ali obliko „objekta“, z desnim klikom odpremo „njegovo osebno izkaznico“ in spremenimo podatke tako, kot želimo. In, bodimo pozorni. Spremenimo lahko tako barve in oblike točk ter stranic, kot tudi povečamo in poudarimo oznake oglišč.





Narisati želimo še težišče. Težišče je presečišče težiščnic. Težiščnice povezujejo oglišča z razpolovišči nasprotnih stranic. Z ikono bomo zlahka narisali razpolovišča stranic, potem pa še težiščnice in težišče. Seveda je dovolj narisati dve težiščnici. Na naši spletni sliki pa težiščnic ni. Pravzaprav smo jih izbrisali in ohranili smo le težišče, da bo slika bolj pregledna. Program RiŠ nam omogoča, da objekte skrijemo. To storimo s „čarobno palico“, ikono , ki jo najdemo v drugi vrsti ikon. Objekt, ki se ga dotaknemo s čarobno palico, izgine, pravzaprav se samo čarobno skrrije. Možnost, da je objekt skrit, najdemo tudi v osebni izkaznici objekta. Seveda lahko skrijemo več objektov. Ker pa mi nastopamo tudi v vlogi čarovnika in ne le gledalcev, je včasih koristno videti tudi vse skrite objekte. Klik na ikono , ki je za las drugačna od čarobne palice, ki skriva posamezne objekte in ki jo najdemo v prvi vrsti ikon, nam prikaže vse skrite objekte. Ponovni klik jih spet skrrije.

Smo rešili prvo nalogo?

NALOGA 2. Podobno kot pri nalogi 1 narišimo trikotnik ABC ter očrtani krog in njegovo središče. S premikanjem oglišč naj se dinamično spreminja tudi krog.

REŠITEV. Podobno kot pri prvi nalogi narišemo trikotnik ABC . Središče očrtanega kroga je presečišče simetral stranic. Simetrale stranic dobimo tako, da v razpolovišču stranice narišemo pravokotnico na stranico. Vse ostale potrebne ikone že poznamo iz prejšnje naloge. Potrebujemo le še ikono , ki nariše pravokotnico na dano črto skozi dano točko. Poskusimo. Ko dobimo središče očrtanega kroga, s pomočjo ikone (ki nariše krog z danim središčem skozi dano točko) narišemo očrtani krog. S čarobno palico skrijemo odvečne črte.

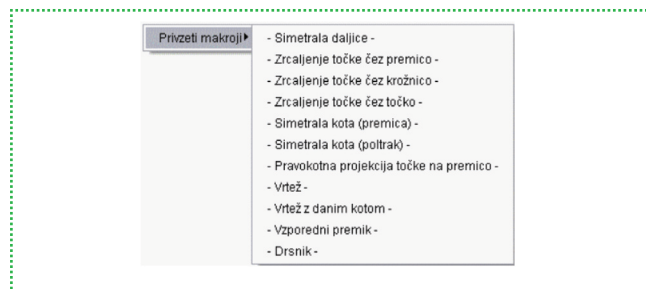
NALOGA 3. Podobno kot pri nalogi 2 narišimo trikotnik ABC ter včrtani krog in njegovo središče.

S premikanjem oglišč naj se dinamično spreminja tudi krog.

REŠITEV. Naloga je podobna prejšnji, le da bomo sedaj morali narisati simetrale kotov in ne simetrale stranic. Za risanje simetrale kota nimamo posebne ikone. Ali bomo s kombinacijo znanih operacij znali sestaviti konstrukcijo simetrale kota? Tu se srečamo z nečim zelo zanimivim in tudi zahtevnim, kar bomo še srečali v nadaljevanju. Program RiŠ namreč omogoča „pravo programiranje“, ki mu rečemo „makroji“. Kot rečeno, se bomo s tem še srečali. V programu pa je že vključena kopica standardnih makrojev, ki jih lahko uporabljamo.

Zvení zapleteno? Pa ni!

Začnimo s trikotnikom ABC , ki ga že vsi znamo narisati. Na čisti podlagi (kursor naj ne bo na nobenem objektu) naredimo desni klik. Prikaže se slika:



Izberemo *Simetrala kota (poltrak)* in z izbiro treh točk nakažemo, kateri kot želimo razpoloviti. Tako narišemo simetrali dveh kotov in dobimo središče včrtanega kroga. Z uporabo naučenega v prejšnji nalogi iz tega središča spustimo pravokotnico na stranico in dobimo dotikališče včrtanega kroga s stranico. Včrtani krog in nadaljevanje naredimo podobno kot pri prejšnji nalogi.

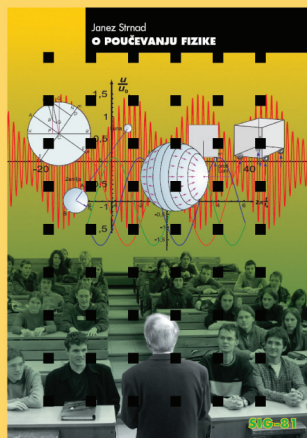
Serija pričujočih člankov o programu RiŠ je nastala na podlagi idej in razvoja obsežnega portala E-um za interaktivno učenje matematike <http://www.e-um.si/>. Avtor se zahvaljuje članom ožjega tima E-um za vzpodbude in konstruktivne psovete.

IZZIV. Podobno kot pri prejšnjih nalogah narišimo trikotnik ABC . Kako bi program uporabili tako, da bi nam z dinamičnim spreminjanjem oglišč trikotnika prikazoval spreminjajočo se trikotnikovo ploščino?

Rešitev tega izziva in še dva nova izziva najdeš na spletni strani <http://uc.fmf.uni-lj.si/pri/>.

Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev. Najnovejši dve knjižici sta izšli konec leta 2006.



Janez Strnad:
**O POUČEVANJU
FIZIKE**

320 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,49 EUR
(2.993,10 SIT)



Jeffrey S. Rosenthal:
KO STRELA UDARI

**Skrivnostni svet
verjetnosti**

264 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

12,49 EUR
(2.993,10 SIT)

Robert B. Banks:

**LEDENE
GORE,
PADAJOČE
DOMINE**
in druge prigode
iz uporabne
matematike

skupaj 348 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

cena kompleta:
20,86 EUR (4.998,89 SIT)



Borut Zalar:
**TEŽIŠČA IN
VZTRAJNOSTNI
MOMENTI**

120 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

8,35 EUR
(2.000,99 SIT)



Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 40 drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjige tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

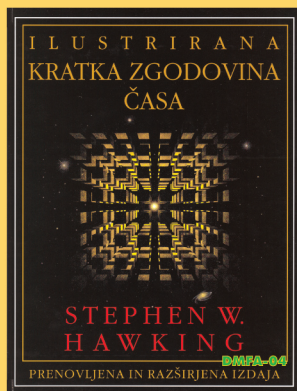
Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Knjige Stephen Hawkinga

V slovenskem prevodu je izšlo že več knjig profesorja Stephen W. Hawkinga, namenjenih širšemu krogu bralcev. Podrobnejše predstavitve posameznih del najdete na spodnjem internetnem naslovu in v preteklih številkah revije Presek.

ILUSTRIRANA KRATKA ZGODOVINA ČASA, Prenovljena in razširjena izdaja



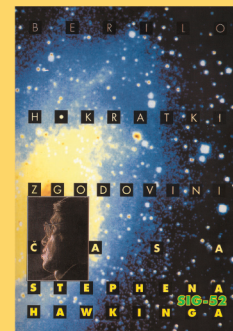
260 strani
veliko ilustracij
barvni tisk
format 19,6 × 25,5 cm
trda vezava
26,08 EUR
(6.249,81 SIT)

KRATKA ZGODOVINA ČASA

Prenovljena in razširjena ob deseti obletnici

192 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

12,52 EUR
(3.000,29 SIT)

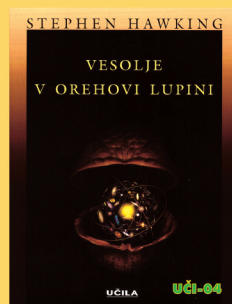
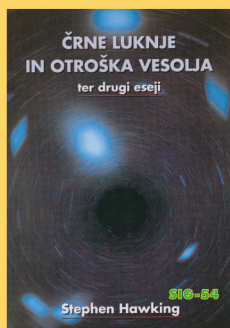


BERILO H KRATKI ZGODOVINI ČASA

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava
7,30 EUR (1.749,37 SIT)

ČRNE LUKNJE IN OTROŠKA VESOLJA ter drugi eseji

152 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava
10,43 EUR (2.499,45 SIT)

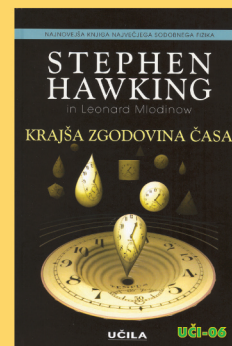
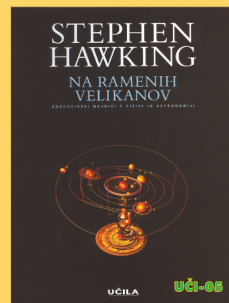


VESOLJE V OREHOVI LUPINI

224 strani
barvni tisk
format 19,5 × 25,5 cm
mehka vezava
20,82 EUR (4.989,30 SIT)

NA RAMENIH VELIKANOV

256 strani
barvni tisk
format 19,5 × 25,5 cm
trda vezava
29,17 EUR (6.990,30 SIT)



KRAJŠA ZGODOVINA ČASA

176 strani
barvni tisk
format 16 × 24 cm
trda vezava
24,80 EUR (5.943,07 SIT)

Vse Hawkingove knjige lahko naročite s popustom na naslovu:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/hawking/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.