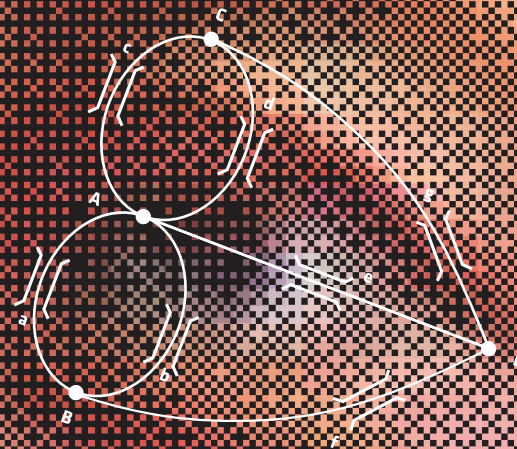




PRESEK

- LEONHARD EULER
- POIZKUŠEVALNICA
- KANALI NA MARSU
- NAGRADNA KRIŽANKA



ISSN 0351-6652



9 770351 665432



Metanje spama v koš

➤ Uporabniki elektronske pošte se znova in znova sprašujejo: kdo je naročil spam? Odgovor je seveda nihče, toda pošiljanje take pošte nazaj samo še povečuje količino spam pošte. S spamom se bojujejo z mnogimi orodji, kot so na primer filtri, ki iščejo izdajalske znake, da je pošta spam. Pošiljatelji spam sporočil po drugi strani seveda premagujejo preproste filtre s prikrivanjem besed in prikrivanjem namena njihovih sporočil. Zato bolj prefinjeni filtri uporabljajo matematiko tako, da šolajo filtre za prepoznavanje spama, da bi nam strežniki prinesli samo to, kar si želimo.

Pošiljatelji spama prilagajajo sporočila tako, da se izognejo številnim orodjem za preprečevanje spama. Z uporabo matematičnega rezultata, znanega kot Bayesov izrek, se po drugi strani prilagajajo tudi ustrezna orodja. Ko uporabniki dnevno pregledujejo pošto, označujejo, katera sporočila, ki so se izmuznila skozi filter, so v resnici spam. Filtri preko učenja ugotovijo, kako verjetno je, da se dane besede ali značilnosti pojavijo v spam sporočilih. Bayesov izrek omogoča filtru, da obrne to informacijo tako, da izračuna verjetnost, da je sporočilo spam, kadar so prisotne izbrane besede ali karakteristike. Gre za močno uporabo starega in osnovnega matematičnega rezultata. Matematika z uporabo starih in novih matematičnih orodij nadaljuje iskanje novih tehnik za boj proti spamu. ✖

	From	Subject	Date
☒	katiemag@cabledeals.edu	Never pay for cable again	06/21/04
☒	Robert@gygacre.com	Turn your opinion into biggg bux	06/21/04
☒	coolpix@insthematic.com	dwghdxqL@@K	06/21/04
☒	theremedy@chemcross.net	Miracle Hangover Cure	06/21/04
☒	contest@eaulfactory.com	Free Rolex just for you!!	06/21/04

POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike "The Mathematical Moments", ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 34, šolsko leto 2006/2007, številka 3

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marijan Prosen, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2006/2007 je za posamezne naročnike 4.000 SIT (16,69 EUR) – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 3.500 SIT (14,61 EUR), posamezna številka 900 SIT (3,76 EUR), dvojna številka 1.650 SIT (6,89 EUR), stara številka 650 SIT (2,71 EUR), letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASIX, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje, ilustracija in tehnično urejanje

Polona Šterk in Matjaž Čuk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 2100 izvodov

© 2006 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1650

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevi naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Metanje spama v koš 2

■ MATEMATIKA

Leonhard Euler (1707–1783) – 300 let od rojstva
velikega matematika (*Marija Vencelj*) 4–9 in 31

■ FIZIKA

Strel z nogo (*Janez Strnad*) 13–15 in 18
Poizkuševalnica v sončni sobi – Kakšno obliko ima senca?
(*Mojca Čepič*) 19
Kopalniška poizkuševalnica – Svetlobni zajček in dvojna senca
Odgovor na nalogo iz prejšnje številke (*Mojca Čepič*) 20–22

■ ASTRONOMIJA

Kanali na Marsu (*Andrej Guštin*) 25–27

■ RAČUNALNIŠTVO

Mreže – Drugi del (*Andrej Taranenko*) 28–30

■ RAZVEDRILO

Nagradna križanka (*Marko Bokalič*) 16–17
Rešitev nagradne križanke Presek 34/2 18
Sudoku 19

■ TEKMOVANJA

Mednarodna matematična olimpijada v Sloveniji
(*Gregor Dolinar in Irena Majcen*) 10–12
37. mednarodna fizikalna olimpijada (*Ciril Dominko*) 22–23
Urn timer tekmovanj v letu 2007 (*Darjo Felda*) 23–24
50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije priloga
6. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake
srednjih tehniških in strokovnih šol priloga
6. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake poklicnih šol priloga

Leonhard Euler (1707–1783)

300 LET OD ROJSTVA
VELIKEGA MATEMATIKA

MARIJA VENCELJ

15. aprila bo minilo 300 let od rojstva švicarskega matematika Leonharda Eulerja, vodilnega matematika 18. stoletja in enega največjih matematikov vseh časov. Njegov vpliv na razvoj matematike morda najbolj opišejo besede francoskega matematika Laplacea: "Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous."¹ Tristoletnico bodo proslavili matematiki vsega sveta, najsvečaneje v treh mestih, kjer je Euler živel in deloval: v Baslu, St. Petersburgu in v Berlinu.

■ Basel

Leonhard Euler je bil najstarejši sin protestantskega pastora Paula Eulerja in Margaret Brucker, hčerke drugega pastora. Rodil se je v Baslu v Švici, vendar se je družina kmalu po njegovem rojstvu preselila v bližnji Riehen, kjer je Leonhard preživel svoja otroška leta. Oče Paul je bil družinski prijatelj Bernoullijev.² Johann I Bernoulli, tedaj najpomembnejši evropski matematik, ima gotovo velike zasluge za to, da je mladi Euler svoje življenje in delo posvetil matematiki. Paul Euler je namreč želel, da bi tudi njegov sin postal pastor. Še ne štirinajstleten se je zato Leonhard vpisal na baselsko univerzo, da bi pridobil splošno izobrazbo pred nadaljnjim študijem. Tam mu je predaval elementarno matematiko Johann Bernoulli, ki je zainteresiranim študentom nudil tudi zasebne ure iz višje matematike in fizike. Pri teh urah je Bernoulli hitro spoznal, kakšen izjemen matematični talent se skriva v njegovem mlademu učencu. Po





Slika 1. Najbolj znan Eulerjev portret je leta 1753 naslikal Emanuel Handmann, portretist iz Basla. Na sliki se jasno vidi, da je tedaj Euler že imel probleme z desnim očesom, medtem ko je levo oko še videti zdravo.

■ St. Petersburg

Matematikom, ki so svojo znanstveno pot začeli v majhni Švici, v tistih časih ni bilo lahko. Profesorskih mest in s tem možnosti za primerno zaposlitev je bilo v deželi malo, bili so brez znanstvenih revij, založniki so se izmikali tiskanju finančno nedonosnih matematičnih knjig. Je pa prav takrat na novo ustanovljena carska akademija znanosti v ruskem St. Petersburgu iskala učno osebje. Povabilu sta se odzvala tedaj že znana matematika Nicolaus II in Daniel Bernoulli, sinova Johanna Bernoullija. Da bi pomagala svojemu mlademu prijatelju, sta izposlovala povabilo tudi zanj. Spomladi leta 1727 je Euler zapustil Basel in odšel v St. Petersburg. Od tedaj dalje je bilo njegovo življenje in znanstveno delo tesno povezano s petersburško akademijo in Rusijo. V Švico se ni nikoli več vrnil, čeprav je obdržal švicarsko državljanstvo.

Euler je takoj po prihodu v St. Petersburg dobil mesto asistenta za uporabno matematiko in mehaniko na medicinski fakulteti, naučil se je rusko in sprejel celo dodatno zaposlitev kot zdravstveni delavec v vojni mornarici. Brez odlašanja je začel tudi z znanstvenim delom in objavljanjem svojih izsledkov, za kar so bile pri petersburški akademiji ugodne razmere. Leta 1731 je postal profesor na katedri za

diplomi iz filozofije leta 1723 je Euler na očetovo željo sicer začel študirati teologijo, vendar v njej ni videl svojega poslanstva, četudi je vse življenje ostal iskren kristjan. Po Bernoullijevem posredovanju mu je oče dovolil, da teologijo zamenja s študijem matematike. Iz matematike je Euler diplomiral leta 1726, star 19 let. Tedaj je tudi že začel s samostojnim raziskovanjem. Objavil je dva matematična članka in se leta 1727 potegoval za nagrado pariške akademije znanosti za najboljšo rešitev problema postavitve jamborov na ladji. Zasedel je drugo mesto, kar je bil za mladeniča velik uspeh.³ Kasneje, med letoma 1738 in 1772, je dobil Euler kar dvanajstkrat veliko nagrado pariške akademije.



Slika 2. V rojstnem Baslu bodo Eulerjevo 300-letnico rojstva proslavili na različne načine. Od marca do junija 2007 bo odprta razstava dokumentov iz Eulerjevega življenja, marca bo interdisciplinarna konferenca (plakat na sliki), v aprilu slovesnosti ob rojstnem dnevu z mašo zadušnico in koncerti, maja mednarodni Eulerjev simpozij in septembra kongres švicarske akademije znanosti.

¹ "Berite Eulerja, berite Eulerja, on nam je vsem učitelj."

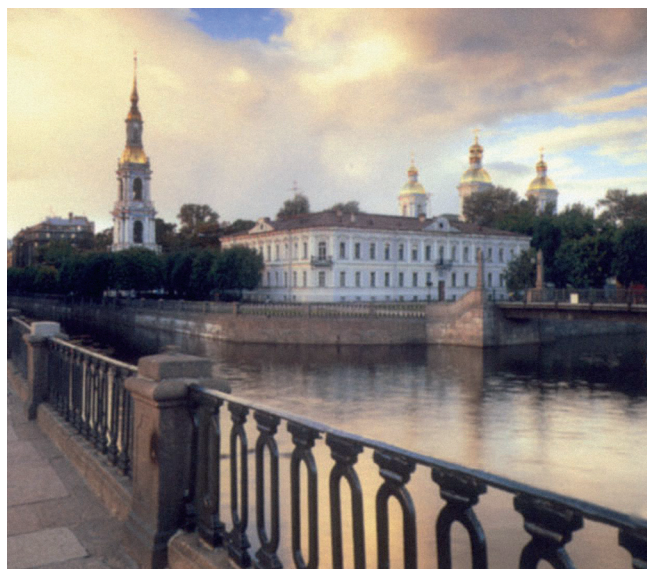
² O matematični družini Bernoullijev smo pisali v 3. številki lanskega letnika Preseka. Zapis najdete na straneh 4-7.

³ Nagrado je dobil Pierre Bouguer, kasneje znan kot 'oče pomorske arhitekture'.





Slika 3. St. Petersburg velja za eno najlepših mest na svetu. V njem je Euler živel in ustvarjal v dveh obdobjih: od leta 1727 do 1741 in od 1766 do svoje smrti leta 1783. V St. Petersburgu je tudi pokopan.



Ob 300-letnici Eulerjevega rojstva bo v St. Petersburgu junija in julija 2007 organiziran Kongres Leonharda Eulerja, ki bo vključeval tudi Eulerjev festival in vrsto satelitskih konferenc.

fiziko. Ko se je dve leti kasneje Daniel Bernoulli vrnil v Basel, ga je Euler nasledil kot vodja matematičnega oddelka v St. Petersburgu.

Leta 1934 se je poročil s Katharino Gsell, hčerko švicarskega učitelja slikarstva na petersburški gimnaziji. Imela sta trinajst otrok, od katerih jih je le pet preživelo otroška leta. Euler je rad pripovedoval, da je do največjih matematičnih trditev prišel z najmlajšim v naročju, medtem ko so se drugi otroci igrali ob njegovih nogah.

Leta 1736 je Euler objavil delo *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, ki mu je prineslo svetovno slavo. V njem je z metodami matematične analize opisal gibanje v vakuumu in mirujočem sredstvu. Njegov sloves se je še povečal, ko je za leti 1738 in 1740 prejel veliki nagradi pariške akademije znanosti. V tem času je napisal tudi učbenik Uvod v aritmetiko, lepo delo, ki predstavlja aritmetiko kot znanstveno vejo matematike.

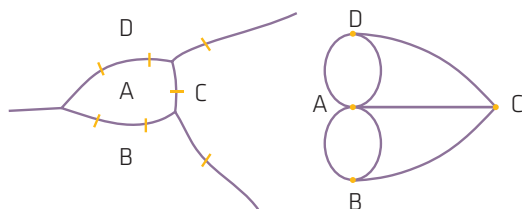
Obdobje prvega Eulerjevega bivanja v St. Petersburgu je trajalo 14 let. Mirno življenje znanstvenika, učitelja in družinskega očeta je zmotila le huda vro-

činska bolezen, zaradi katere je kasneje, komaj enatridesetleten, oslepel na desno oko.

■ Berlin

Po letu 1740 so se v Rusiji razmere za tujce nevarno zaostrile. Zato se je Euler odločil, da sprejme povabilo pruskega kralja Friderika Velikega za delo na berlinski akademiji. Z družino se je leta 1741 preselil v Berlin in tam ostal nadaljnjih 25 let. V Prusiji je užival velik ugled in imel popolno svobodo pri izbiri svojega raziskovalnega dela. Ni pa nikoli prekinil stikov z rusko akademijo. Še vedno je pri njih objavljал svoje znanstvene članke in poučeval mlade Ruse, ki so prišli v Berlin. Ves čas je iz Rusije dobival tudi del svoje plače.

Eulerjeva berlinska leta so bila izredno produktivna. Napisal je okrog 380 znanstvenih člankov in več znanstvenih knjig s področij funkcijske teorije, diferencialnega računa, analize, variacijskega računa, artilerije in balistike, gradnje ladij in navigacije, računanja tirov planetov in gibanja Lune.



■ Problem königsberških mostov

Königsberg je bilo lepo starodavno kraljevsko mesto v Vzhodni Prusiji ob Baltskem morju. Ob koncu druge svetovne vojne je bilo do tal zbombardirano, po potsdamski konferenci pa je pripadlo Sovjetski zvezi in dobilo ime Kaliningrad.

Skozi mesto teče reka Pregel. Ta se v mestu razcepi na dva rokava, ki oblivata dva otoka. Posamezne dele mesta je v Eulerjevem času povezovalo sedem mostov. Levi diagram na sliki prikazuje tedanji tloris reke in mostov. Meščani Königsberga so neuspešno iskali način, kako prehoditi vse dele mesta, iti pri tem čez vsak most natanko enkrat in se vrniti v začetno točko.

Euler je problem rešil tako, da je dokazal, da taka pot ne obstaja. Problem je pravzaprav prevedel v obliko, ki jo prikazuje desni diagram (graf). Posamezne dele kopnega je nadomestil s točkami (vozlišči) in mostove s črtami, ki povezujejo točke (povezavami).

Če bi bil iskani sprehod skozi Königsberg možen, bi to ustrezalo možnosti, da lahko preidemo po povezani poti vsako povezavo grafa na desnem diagramu natanko enkrat. Ker lahko v vsako vozlišče grafa pridemo večkrat, je uspešnost sprehoda odvisna od tega, ali lahko po prihodu v posamezno oglišče le-to zapustimo po povezavi, ki je še nismo prehodili. To pa je možno le, če se stika v posameznem vozlišču sodo število povezav (število prihodov je enako številu odhodov).

V primeru problema königsberških mostov vidimo, da se v vsakem vozlišču stika liho število poti, kar pomeni, da problem nima rešitve.

V zvezi s tem problemom je Euler razvil tudi teorijo mrež, v katerih povezave vežejo vozlišča in omejujejo področja. Izpeljal je naslednjo formulo, ki velja za poljubno ravninsko mrežo:

$$V - L + R = 1,$$

kjer je V število vozlišč, L število povezav in R število omejenih področij.

Tej formuli očitno ustreza desni diagram na sliki, saj je $R = V = 4$ in $L = 7$.

Napisal je tudi nekaj poljudno znanstvenih knjig, med njimi uspešnico *Pisma nemški princesi o različnih fizikalnih in filozofskih pojmihi*. V njej je zbral okrog 200 pisem, napisanih za nečakinjo Friderika Velikega, ki jo je na kraljevo željo zasebno poučeval. Knjiga vsebuje poljudno razlago različnih matematičnih in fizikalnih pojmov ter osnove astronomije, nudi pa tudi verodostojen vpogled v matematikovo osebnost in versko prepričanje. To najbolj brano Eulerjevo delo je bilo prevedeno v številne jezike in je doživelo skoraj 40 izdaj.

Kakšne delovne sposobnosti je imel Euler, pove podatek, da je letno objavil okrog 800 strani teksta. Leto za letom. To je celo za romanopisca veliko, za matematika pa komaj verjetno. Ogromen je bil njegov prispevek k razvoju analize, geometrije, trigonometrije in teorije števil. Uvedel je številne nove oznake, ki jih v matematiki uporabljamo še danes: $f(x)$ za funkcijo, $\sum$ za vsoto, e za osnovo naravnih



Slika 4. Lesene mostove, ki so povezovali posamezne dele pruskega mesta Königsberg, lahko vidimo danes le še na starih razglednicah. Mesto je bilo ob koncu druge svetovne vojne do tal porušeno, najbolj je bilo prizadeto prav staro mestno središče. Izgubilo je tudi svoje ime. Danes se imenuje Kaliningrad.



logaritmov, π za razmerje med obsegom in premerom kroga in i za imaginarno enoto $\sqrt{-1}$. Dokazal je tudi formulo $O + P - R = 2$, ki velja za vse konveksne poliedre, kjer je O število oglišč, R število robov in P število mejnih ploskev poliedra. Ta formula ima v topologiji, moderni matematični veji, pomembno razširitev, imenovano Eulerjeva karakteristika.

Leta 1759 se je izpraznil predsedniški položaj na berlinski akademiji. Vodenje akademije je prevzel Euler, toda ne kot predsednik, direktni nadzor nad akademijo si je pridržal kralj Friderik. Že dolgo narkhani odnosi med kraljem in Eulerjem so se s tem močno poslabšali. V vseh ozirih. Med drugim je kralj kazal očiten prezir do tistih matematičnih področij, katerih rezultati niso bili neposredno uporabni, najhujši pa je bil njun spor zaradi kraljevega poseganja v upravljanje s finančnimi sredstvi akademije. Ko je Friderik leta 1763 predsedniški položaj ponudil d'Alembertu, ki je mesto sicer odklonil, je Euler sklenil, da zapusti Berlin. Kralj mu je sicer poskušal preprečiti odhod, saj je vedel, da berlinska akademija z njim izgublja svojega najboljšega znanstvenika in gonilno silo. Končno je Eulerju dovolil, da odide, vendar je svojo odločitev javno pospremil z grobimi šalami na Eulerjev račun.

■ Povratek v St. Petersburg

Leta 1762 so se razmere v Rusiji spet spremenile. Na oblast je prišla prosvetljena vladarica Katarina Velika, ki je dobro vedela, da dežela ne more napredovati brez znanosti. Ko je Euler dal vedeti, da se je pripravljen vrniti v St. Petersburg, mu je na matematičnem oddelku petersburške akademije takoj ponudila pomembno mesto tajnika-svetovalca z zelo visoko plačo.

Leta 1766 se je Euler vrnil v St. Petersburg, kjer je preživel preostanek življenja. Z njim je odšla tudi vsa njegova družina. Sin Johann Albrecht je dobil mesto na fizikalni katedri akademije in postal kasneje njen redni tajnik, Christoph pa je dosegel visok položaj v ruski vojski.

Eulerjevo drugo petersburško obdobje so zaznamovale številne tragedije. Kmalu po povratku v Rusijo je oslepel še na levo oko. Leta 1771 je pogorela njihova hiša, iz katere mu je uspelo rešiti le matematične zapiske. Uspešna operacija sive mreže na levem očesu kmalu po požaru mu je sicer povrnila

vid, a le za nekaj dni. Kaže, da Euler ni upošteval zdravnikovega nasveta, da mora oko počivati. Tako je dokončno popolnoma oslepel. Dve leti kasneje mu je umrla še žena, s katero sta preživela skupaj skoraj 40 let.

Slepota ni zmanjšala Eulerjeve znanstvene aktivnosti. Zaradi svojega briljantnega razuma in fotografskega spomina⁴ je bil sposoben nadaljevati svoje raziskave v optiki in algebri ter o gibanju Lune. Vseeno je presenetljiv podatek, da skoraj polovica Eulerjevega znanstvenega dela sodi v obdobje po vrnitvi v St. Petersburg, ko je bil star že več kot 59 let.

Seveda Euler vsega tega ne bi zmogel brez pomoči. Pomagala sta mu sinova Johann Albrecht in Christoph, dva člana petersburške akademije Krafft in Lexell ter dva mlada matematika, Švicar Fuss, ki je kasneje poročil Eulerjevo vnukinjo, in Golovin, nečak ruskega pisatelja in znanstvenika Lomonosova. Eulerjevi sodelavci pa niso bili zgolj zapisovalci njegovih idej. Z njim so razpravljali o obravnavani snovi, razvijali njegove ideje, izračunavali tabele, iskali primere in protiprimere. Zaupal jim je tudi pripravo svojih obsežnih knjižnih del in številnih člankov za tisk. Člankov je v tem času izšlo več kot 300. Od knjig omenimo delo o gibanju Lune, ki obsega 775 strani, Dioptriko, delo s področja optike v treh zvezkih, in Osnove integralnega računa, prav tako v treh delih. V francoščini je izšla tudi skrajšana verzija njegovega pomorskega priročnika za mornariške kadete o izgradnji in upravljanju vojnih ladij. Priročnik je bil hitro preveden v angleški, italijanski in ruski jezik. Zanj sta mu ruska in francoska vlada plačali visok honorar.

Euler je delal do zadnjega dne. Še tik pred smrtjo je z Lexellom in Fussom razpravljal o dve leti prej odkritem planetu Uranu. Umrl je zaradi možganske kapi 18. septembra 1783.

Po Eulerjevi smrti so v St. Petersburgu še skoraj 50 let nadaljevali z izdajanjem njegovih dotlej neobjavljenih del.

⁴Euler je znal brez zatikanja od začetka do konca zrecitirati Eneido, Vergilovo epsko pesnitev v dvanajstih knjigah, ter navesti prvo in zadnjo vrstico vsake strani svoje izdaje Eneide.

■ Poimenovanja po Eulerju

Leonhard Euler je bil tako izjemen, vsestranski in produktiven matematik, da v kratkem zapisu ni mogoče niti približno predstaviti njegovega dela in ogromnega prispevka k razvoju matematike. Poskusimo to vsaj malo popraviti z nepopolnim seznamom matematičnih pojmov in izrekov, katerih avtor je bil in ki nosijo njegovo ime.

Eulerjeva premica, Eulerjev trikotnik in Eulerjeva krožnica (v elementarni geometriji)

Eulerjeva trikotniška formula (za razdaljo med središčema trikotniku očrtane in včrtane krožnice)

Eulerjev trikotnik in Eulerianska števila (v kombinatoriki)

Eulerjev oficirski problem

Eulerjeva domneva (o grško-latinskih kvadratih)

Eulerjeva poliedrska formula

Eulerjeva karakteristika (v topologiji)

Eulerjev obhod (v teoriji grafov)

Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$ (število vseh od n manjših naravnih števil, ki so tuja z n)

Eulerjev izrek ($a^{\varphi(n)} \equiv 1, (n); (a, n) = 1$)

Eulerjeva psevdopraštevila (sestavljena števila, ki izpolnjujejo Eulerjev potreben pogoj za praštevila $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv \pm 1, (n); (a, n) = 1$)

Eulerjev kriterij (za kvadratne residue v algebri)

Eulerjeva identiteta ($e^{i\pi} + 1 = 0$)

Eulerjeva relacija ($e^{iz} = \cos z + i \sin z$)

Eulerjevo število $e = 2,71828\dots$

Euler-Mascheronijeva konstanta $\gamma = 0,5772\dots$

Eulerjeva integrala prvega in drugega reda (funkciji $B(x, y)$ in $\Gamma(z)$)

Eulerjeva zeta funkcija

Eulerjevi polinomi

Eulerjeva formula za ukrivljenost ploskve

Euler-Bernoullijeva enačba (diferencialna enačba 4. reda, ki v mehaniki kontinuumov opisuje obnašanje gredi)

Eulerjeva obremenitev (najmanjša osna obremenitev gredi, ki je potrebna, da se gred upogne)

Euler-Eytelweinova formula (o oprijemanju navite vrvi)

Eulerjeva gibalna enačba (za gibanje idealne tekočine)

Eulerjevi koti (za opis rotacije v 3-dimenzionalnem prostoru)

Eulerjeva zibka (kardanska obesa, gibljiva v smereh vseh treh Eulerjevih kotov)

Eulerjeva enačba za rotacijo togega telesa

Eulerjeva formula v harmonični analizi

Euler-Maclaurinova formula (za razvoj določenega integrala v vrsto)

Eulerjeva števila (nastopajo v koeficientih razvoja funkcije $\sec x$ v Taylorjevo vrsto)

Eulerjeva diferencialna enačba ($\sum_{k=0}^n a_k x^k y^{(k)} = 0$)

Euler-Lagrangeova enačba (v variacijskem računu)

Eulerjeva turbinska enačba

Eulerjeva metoda za reševanje diferencialnih enačb

Euler-Maruyamova metoda (za reševanje stohastičnih diferencialnih enačb)

Eulerjev multiplikator

Eulerjev adicijski izrek za eliptične integrale

Euler-Hierholzov izrek

Po Eulerju se imenuje eden od kraterjev na Luni in asteroid, odkrit leta 2002. Njegovo ime nosi tudi eden od računalniških programov za numerično in simbolno računanje.



Mednarodna matematična olimpijada v Sloveniji

GREGOR DOLINAR in IRENA MAJČEN

➤ Mednarodno matematično olimpijado (MMO), ki je potekala od 6. do 18. julija 2006 v Ljubljani in Portorožu, je organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije pod finančnim pokroviteljstvom vlade Republike Slovenije.

Po številu udeležениh držav je bila 47. MMO z več kot 1000 udeleženci iz 90 držav drugi največji dogodek v zgodovini samostojne Slovenije. Tako velikega dogodka se seveda ne da organizirati čez noč. Prve zamisli o organizaciji segajo več kot desetletje v preteklost, prva uradna podpora ideji pa je bila dana decembra 1996, ko je Programski svet za tekmovanje v znanju pri tedanjem Ministrstvu za šolstvo in šport RS sprejel sklep, da se pristopi k izdelavi načrtov za organizacijo MMO. Dokončno je bila odločitev o organizaciji MMO v Sloveniji sprejeta na vladi RS 11. julija 2002. Takoj zatem so v okviru ožje skupine v sestavi dr. Gregor Dolinar, mag. Darjo Felda in dr. Matjaž Željko, stekle prve organizacijske priprave, leta 2004 pa smo na upravnem odboru DMFA Slovenije formirali organizacijski odbor, ki ga je vodil dr. Zvonko Trontelj in v katerem sta bila poleg prej omenjene ožje skupine še dr. Andrej Bauer in Klavdija Mlinšek. Izredno pomembno vlogo vodje slovenske ekipe tekmovalcev je prevzela Irena Majcen.

Pri Društvu smo se seveda dobro zavedali, da bodo letos pričakovanja in pozornost javnosti glede uvrstitve naše ekipe izjemna. Zato smo delno spremenili

Slika 1. Delo v Portorožu med odgovarjanjem na vprašanja tekmovalcev



tudi potek priprav. Dijake smo povabili na več enodnevnih in tedenskih priprav, reševati pa so morali tudi domače naloge in sodelovati na treh izbirnih testih.

Na prvih tedenskih pripravah se je 25 vabljenih dijakov, ki so se v prejšnjem letu izkazali na matematičnih tekmovanjih, zbralo že sredi septembra 2005. Med njimi je bilo kar šest veteranov, ki so se udeležili vsaj ene izmed prejšnjih olimpijad v Grčiji in Mehiki.

Domače naloge in rezultat prvega testa v decembru so odločali o izboru 15 dijakov, ki so preživeli teden dni v januarju v Plemljevi hiši na Bledu. Dopoldnevi in zgodnje popoldne so bili namenjeni predavanjem, preostanek dneva pa druženju in reševanju nalog za kremne rezine.

V začetku februarja so se dijaki soočili z nalogami drugega izbirnega testa, konec marca pa so pisali še zadnjega. O dokončni uvrstitvi v ekipo je tako odločala le še ena domača naloga in državno tekmovanje.

Na podlagi do tedaj zbranih točk smo izbrali osem dijakov, ki so se udeležili spomladanskih tedenskih priprav v začetku aprila. Te so ponovno potekale v naši bazi na Bledu, našim dijakom pa se je tokrat pridružilo šest dijakov iz Srbije. Srbski dijaki so pohvalili blejsko vreme in kremne rezine, mi pa smo se čudili srbskemu dijaku, ki je poznal skoraj vse naloge, ki smo jih reševali na predavanjih, še več, pri vsaki je povedal tudi na katerem tekmovanju in katerega leta se je pojavila. Na olimpijadi v Ljubljani je potem osvojil "le" bronasto medaljo.



Zadnji preizkus je bil tako 22. aprila, ko je v Kočevju potekalo že 50. državno tekmovanje iz matematike. Kljub temu, da so bili uradni rezultati kmalu znani, dokončne ekipe nismo mogli določiti še cel teden. Kot skoraj vsako leto se nekateri dijaki odlično uvrščajo tako v tekmovanjih iz matematike kot fizike. Takšna sta bila letos kar dva, Gašper Zadnik in Matjaž Berčič. Za vse, ki smo se letos posvetili izvedbi Mednarodne matematične olimpijade pri nas, je bila Gašperjeva odločitev o udeležbi na fizikalni olimpijadi neprijetno presenečenje, saj je Gašper na prejšnjih dveh matematičnih olimpijadah že osvojil bronasto in srebrno medaljo.

V ekipi, ki je zastopala Slovenijo na domačih tleh, so bili Matjaž Berčič, David Gajser, Primož Koželj, Peter Lendero in Špela Špenko, dijaki 4. letnika ter Urban Jezernik, dijak 3. letnika. Vsi razen Primoža so se že udeležili ene izmed prejšnjih olimpijad, tako so Matjaž, Špela in David na MMO že prejeli pohvale. Izkušenj jim torej ni manjkalo, prav tako tudi ne zavzetosti za delo, zato smo upravičeno pričakovali, da bo letošnji izkupiček večji kot kdaj prej. Najboljša ekipa do tedaj je bila leta 2000 v Južni Koreji s srebrno in bronasto medaljo ter dvema pohvalama.

Delo ekipe pa v začetku maja še zdaleč ni bilo končano. Na zaključni slovesnosti so poleg nagrad od vodje priprav dobili še zajeten kup nalog. Poleg vsega pa se je približevala tudi matura. Kljub temu so še našli čas za matematiko ter za pot v Ljubljano, kjer smo se

Slika 2. Razglabljanje vodij ekip o odgovoru na vprašanje, ki ga je postavil tekmovalac Hrvaške



Slika 3. Delo popravilalcev med kupi papirja

tu in tam pogovorili o nalogah.

Zaključne priprave na olimpijado so se začele tik pred olimpijado, to je 1. junija. Tokrat se je naši ekipi na Bledu pridružila ekipa Velike Britanije, ki redno osvaja 5 ali 6 medalj. Skupaj so dijaki reševali kopico zanimivih nalog in zahtevne teste, na katerih so bile naloge podobne kot na olimpijadi. Že testi so dali slutiti, da je bila tokrat ekipa odlično pripravljena. Mogoče je bila ekipa Velike Britanije res boljša v matematiki in nogometu, smo jih pa zato nadigrali v košarki. Seveda je nemogoče ves čas razmišljati samo o malo bolj ali malo manj rešljivih nalogah, zato smo si skupaj z ekipami Velike Britanije, Kanade, Švedske in Luksemburga, ki so vse predčasno prišle v Slovenijo, hladili glave na Voglu in v Bohinju.

Medtem, ko so se tekmovalci še vneto pripravljali, so vodje ekip 6. julija prispeli v Portorož. Tam so v prvih dneh izbrali 6 tekmovalnih nalog in jih nato prevedli v materine jezike tekmovalcev. Vseh različnih jezikovnih verzij tekmovalnih nalog je bilo 52.

Tekmovalci, skupaj jih je bilo 498, so prispeli v Slovenijo 10. julija in so bili nastanjeni v Dijaškem domu Ivana Cankarja v Ljubljani. Iz vsake države lahko na olimpijadi sodeluje do 6 tekmovalcev, gostitelji pa vsaki ekipi dodelijo vodiča, ki ves čas spremlja ekipo in ji pomaga v stikih z domačini. Na vabilo Društva, da postanejo vodiči ekip, se je odzvalo skoraj 100 dija-





Slika 5. Ekipe v Ljubljani po enem izmed razgovorov

kov 3. in 4. letnika in vsi po vrsti so povedali, da je bila zanje olimpijada nepozabna izkušnja. V dobrem tednu dni, ki so ga preživeli skupaj s tekmovalci, so navezali številne stike z vrstniki s celega sveta in se pri tem tudi dobro zabavali.

Olimpijado je 11. julija v Unionski dvorani v Ljubljani uradno otvoril minister za šolstvo in šport dr. Milan Zver, otvoritvi pa sta sledila dva tekmovalna dneva 12. in 13. julija. Vsak dan so tekmovalci štiri ure in pol reševali po tri naloge.

V dneh, ki so sledili tekmovanju, so spremljevalci ekip ocenjevali izdelke tekmovalcev, tekmovalci pa so si skupaj s svojimi vodiči ogledali Postojnsko jamo in Piran, bili so na kopanju v Portorožu, sprehodili so se skozi Vintgar, si ogledali Bled in imeli piknik v Kranjski Gori, organizirana pa so imeli tudi številna tekmovanja v športnih in računalniških igrah. Noči so



si tekmovalci organizirali po svoje. Omenimo, da so se tekmovalci kar sami dogovorili, da so imeli vsi z identifikacijsko kartico olimpijade prost vstop v dva največja nočna kluba v Ljubljani.

Tudi člani naše ekipe so se med olimpijado dobro počutili in se seveda udeleževali vseh aktivnosti, ki so bile namenjene udeležencem olimpijade. Fantje so se kar nekaj dni podili po košarkaškem igrišču in nazadnje osvojili drugo mesto. Najbolj so se spoprijateljili z Norvežani, s katerimi so prebili večino prostega časa, med drugim so jim temeljito razkazali nočno življenje v Ljubljani.

Vendar pa je letošnja olimpijada v marsikaterem pogledu za naše tekmovalce potekala drugače kot ponavadi. Sestavni del vsakdanjika so predstavljali številni pogovori z novinarji raznih časopisov in revij. Takšnih pogovorov je bilo manj pred samim tekmovanjem, ko so jih zamenjala matematična razglabljanja, po tekmovanju pa so se le še stopnjevali. Tako sta imela Primož in Špela pogovor z novinarjem nekega lokalnega radia kar na enem izmed izletov.

Olimpijada se je zaključila s slovesno podelitvijo medalj v Cankarjevem domu 17. julija. Medalje je najboljšim podelil dr. Janez Potočnik, evropski komisar za znanost in raziskave v Evropski komisiji, med ostalimi častnimi gosti pa je bil tudi minister za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo dr. Jurij Zupan. Naša ekipa je dosegla največji ekipni uspeh doslej, uspešen pa je bil prav vsak izmed tekmovalcev. Tako sta Urban in Primož prejela pohvali, David, Peter in Špela bronaste medalje, Matjaž pa je osvojil srebrno medaljo.

Tako tekmovalno kot tudi organizacijsko je bila olimpijada velik uspeh.

Slišali smo res veliko pohvalnih besed o odlični organizaciji. Mogoče največ o dobri organizaciji in številnih novih organizacijskih rešitvah, ki smo jih uvedli, pove podatek, da smo dobili vabili obeh organizatorjev prihodnjih olimpijad, da jim pomagamo z nasveti, kar doslej ni bil običaj.

Za zaključek povzemimo še besede dr. Józsefa Pelikána, predsednika vodstvenega organa MMO: "Slovenija je najmanjša država, ki je kdajkoli organizirala Mednarodno matematično olimpijado, a po tem, kar smo doživeli, imamo občutek, da smo v veliki državi."

Več slik in podrobnosti o MMO je na spletni strani http://imo2006.dmf.si/index_SL.html ✖

Slika 4. Ekipe na izletu k Slapu Savici

Strel z nogo

JANEZ STRNAD

Svetovno nogometno prvenstvo je minilo, zanimanje za nogomet pa je ostalo. Presek se je dotaknil meta iz outa, ki je sicer pomemben sestavni del nogometne igre. Vendar zmage prinašajo zadetki in te igralci dosežejo z nogo ali z glavo. Zato poskusimo s fizikalne strani najprej osvetliti strel z nogo.

Igralec žogo z nogo ustrelj proti vratom ali jo poda soigralcu. Smer in hitrost žoge lahko določi tem manj natančno, čim hitreje se odloči za strel in čim močnejše zadene žogo. Menda ima tudi zaradi nenačnosti pri strelu nogomet svoj čar. Kaj lahko o strelu z nogo povemo, če se opremo na preprosta fizikalna spoznanja?

Pri strelu noga trči z žogo. Kostni v stopalu so preko nartnic, golenice in mečnice ter stegenice z močnimi sklepi povezane z medenico. Zato pri trku z žogo noge niti približno ne moremo obravnavati kot proste. Med trkom noga s silo deluje na žogo, ki po trku odleti z določeno hitrostjo v določeni smeri. Med letom žoge, ki nas tu ne bo zanimal, hitrost zaradi zračnega upora pojema, in to tem hitreje, čim manjša je masa žoge. Ne pozabimo, da bi si nogometaš pri strelu žoge z veliko maso lahko poškodoval nogo. Kako bi bilo, če bi brcnil medicinko? Mednarodna nogometna zveza FIFA je smiselno predpisala maso žoge med 410 in 450 g in obseg od 68 do 70 cm ali polmer od 10,8 do 11,1 cm. Na najpomembnejših tekmah pa uporabijo žoge, katerih masa in obseg sta podrobneje določena, med 420 in 445 g in med 68,5 in 69,5 cm.

Vzemimo, da pri strelu z nogo proti desni žoga miruje. Žoga je krogla in noga se je dotakne v ploskvi. Zaradi lažjega računanja vzemimo, da se noga dotakne žoge v točki in da sila noge deluje na zveznici s težiščem žoge. Tako smo se omejili na preme





trke. Žoga je prožna (slika 1) in ima maso. Trk opišimo v preprostem modelu, v katerem obe lastnosti ločimo. Prožnost prevzame vzmet, maso pa telo. Vzmet s koeficientom k naj ima zanemarljivo majhno maso in zanjo naj velja Hookov zakon $F = ks$, po katerem je skrček s sorazmeren s silo F . Telo, ki ga obravnavamo kot togo, ima maso m .

Ob strelu začne noga delovati s silo F , za katero vzamemo, da se ne spreminja s časom, na vzmet v smeri osi. Vzmet brez mase se skrči za s in silo v trenutku prenese na telo. Sila pospešuje telo in mu dovaja delo, enako njegovi kinetični energiji, $\kappa F = mv^2/2$. Pri tem je x premik prijemališča sile, to je desnega krajišča vzmeti na telesu, ki se ujema s premikom telesa. Levo krajišče vzmeti se premakne za $s + x = d$ (slika 2). Z zapisanima enačbama izrazimo s in x ter dobimo enačbo $F/k + mv^2/2F = d$. Smiselna rešitev kvadratne enačbe za silo je

$$\blacksquare F^2 - kdF + \frac{1}{2}kmv^2 = 0$$

in

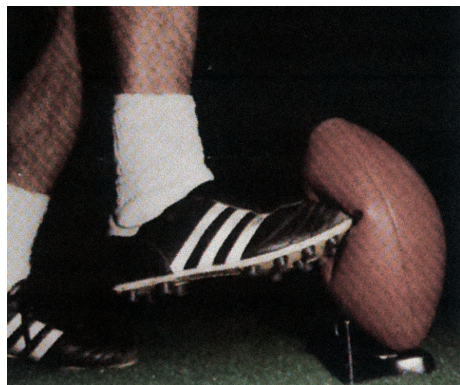
$$\blacksquare F = \frac{1}{2}kd \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2mv^2}{kd^2}} \right).$$

Sila je odvisna od koeficienta prožnosti in od mase. Največja je v primeru, ko je koren, ki ga odštejemo, enak 0. Tedaj sta hitrost in sila

$$\blacksquare v_m = d\sqrt{\frac{k}{2m}}, \quad F_m = \frac{1}{2}kd.$$

Za koeficient vzmeti pri žogi s premerom $2r$ smemo v premem približku vzeti $k = 2r\Delta p$, če je tlak v žogi za Δp večji od zunanjega zračnega tlaka. FIFA predpisuje, da mora razlika tlakov meriti od 0,6 do 1,1 bara. Žoga bi bila ohlapna, če bi bila razlika manjša, ali pretrda, če bi bila večja. Oboje bi bilo za strel manj ugodno. Najpomembnejše tekme igrajo z žogami, pri katerih je tlačna razlika podrobneje določena, in sicer 0,8 bara. Pri njih ustreza koeficientu vzmeti $k = 2r\Delta p = 1,76 \cdot 10^4 \text{ N/m}$, če upoštevamo povprečni polmer 11 cm in to, da ustreza 1 baru 10^5 N/m^2 . S tem koeficientom bomo računali tudi mi, če ne bomo navedli drugače.

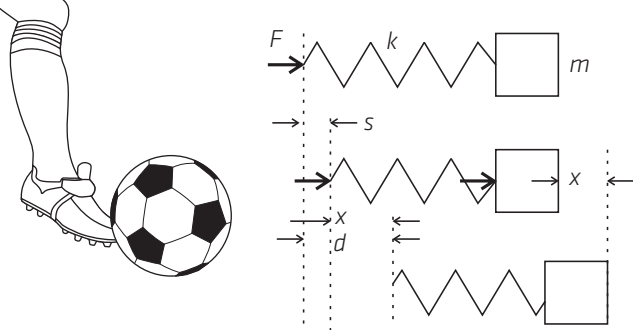
Pri številnih poskusih so podrobno merili, kolikšna je razdalja, na kateri se noga dotika žoge, dosežena hitrost in sila noge na žogo. Za razdaljo stika noge in žoge d so izmerili v povprečju 0,22 m. S tem



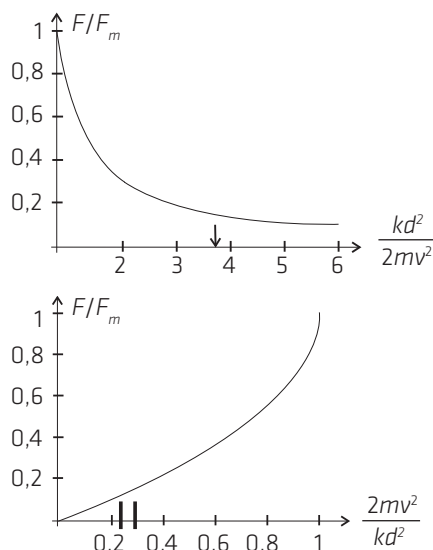
Slika 1. Žoga ob trku z nogo spremeni obliko. Na sliki je podolgovata žoga za ameriški nogomet, ki ima v Združenih državah veliko več privrženecv od našega. Lastnosti žog pri športih, ki so v ZDA bolj priljubljeni, na primer tenis, golf, baseball, superball, so precej bolj raziskane kot lastnosti nogometne žoge.

podatkom izračunamo vrednosti v maksimumu (2): $v_m = 31 \text{ m/s}$ in $F_m = 1940 \text{ N}$. Pri strelu Brazilca Roberta Carlosa, ko je leta 1997 Francozom zabil gol, so zares izmerili začetno hitrost žoge 31 m/s , vendar je to ujemanje najbrž naključno. V računih upoštevamo precej manjšo povprečno hitrost žoge, ki jo za zdaj vzamemo enako hitrosti noge 16 m/s . Ugotovili so, da sila za zelo kratek čas doseže do 5000 N , konstantna povprečna vrednost pa je precejkrat manjša.

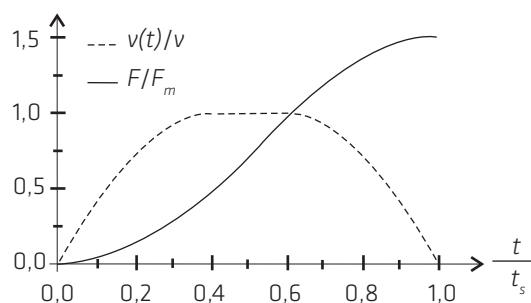
Določimo jo tako, da je model kolikor mogoče notranje skladen, se pravi, da njegove napovedi ne nasprotujejo druga drugi in ne nasprotujejo izkušnjam. Zato raziščimo rešitev kvadratne enačbe F/F_m v odvisnosti od koeficienta k in v odvisnosti od mase m ter za ti količini upoštevajmo meje, ki jih predpisuje FIFA (slika 3). Območji se pokrivata na ozkem pasu $3,7 < kd^2/(2mv^2) < 4,1$. Izberemo vrednost $kd^2/(2mv^2) = 3,87$ na sredi tega pasu. Ustreza ji sila $F = 0,14F_m = 0,24 \cdot kd/2 = 269 \text{ N}$. To je precejšnja sila, enaka teži telesa z maso 27 kg . Za preizkus izračunamo skrček $s = F/k = 1,5 \text{ cm}$. Za premik telesa dobimo $x = mv^2/2F = 20,5 \text{ cm}$. Tako je $d = s + x = 22 \text{ cm}$, kar se ujema s privzeto vrednostjo d . Preprosti model se v tem pogledu kar dobro odreže. K temu smo prispevali z izbiro hitrosti 16 m/s in s tem, da smo se že v začetku oprli na razliko tlakov $0,8 \text{ bara}$. Kinetična energija žoge



Slika 2. Razmere pri trku noge z žogo v preprostem modelu.



Slika 3. Odvisnost sile od koeficienta prужnosti in od mase. Na navpično os je naneseno razmerje F/F_m , na vodoravno os na prvi risbi razmerje $kd^2/(2mv^2)$ in na drugi $2mv^2/(kd^2)$. Navpični črti omejujeta vrednost razlike tlakov (puščica ustreza razliki 0,8 bara) in mase po predpisih FIFA za uporabljene podatke.



Slika 4. Risba kaže okvirno odvisnost sile in hitrosti težišča žoge od časa. V preprostem modelu smo vzeli, da se sila ne spreminja s časom.

$W_k = mv^2/2 = 55 \text{ J}$ je veliko večja od prужnostne energije vzeti $W_{pr} = ks^2/2 = 2 \text{ J}$.

V uporabljenem modelu je hitrost žoge enaka hitrosti noge v . Merjenja pa so pokazala, da hitrost žoge pri dobrem strelu preseže hitrost noge. To poskusimo pojasniti s spoznanjem, da se v drugem delu trka noga giblje enako hitro kot žoga in ne opravlja več dela na žogi. Pač pa se žoga od noge odriva, ko se zmanjšuje skrček in se žoga vrača v prvotno obliko. Ali ni podobno pri odboju žoge od togih tal, ko tla delujejo na žogo s silo, ki pa na žogi ne opravi nobenega dela? Pri strelu se v najboljšem primeru vsa prужnostna energija vzeti spremeni v dodatno kinetično energijo žoge, kar pripelje do večje končne hitrosti žoge v' :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}mv'^2, \quad v' = v\sqrt{1 + \frac{ks^2}{mv^2}}. \quad (3)$$

Z našimi podatki je $v' = 1,02v$ in je povečanje neznatno. To se z zvezo $v' = 1,23v + 2,72 \text{ m/s}$, ki naj bi ustrezala merjenjem pri hitrosti žoge od 16 do 27 m/s ne sklada. Prvi člen na desni strani zveze bi lahko pojasnili, če bi prужnostna energija dosegla polovico kinetične. V tem primeru bi moral biti skrček enak 5,6 cm, če bi obdržali druge podatke.

A. Vieira v članku *Kick-off* v *The Physics Teacher* 44 (2006) 286 ni upošteval zveze $k = 2r\Delta p$, postavil pa je $d = 20 \text{ cm}$ in $F = F_m = 500 \text{ N}$ ter dobil $k = 2F_m/d = 5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ in $s = F/k = \frac{1}{2}d = 10 \text{ cm}$. Namesto z $v_m = d\sqrt{k/m} = 15 \text{ m/s}$ je računal s hitrostjo 20 m/s. Tako je dobil $v' = \sqrt{1,5}v = 1,23v$. Zdi pa se, da velik skrček s nasprotuje izkušnjam. Ta pripomba naj opozori, da je mogoče model uporabiti tudi z drugačnimi vrednostmi količin.

Doslej se nismo dotaknili časovne odvisnosti (slika 4). Merjenja so za čas stika noge z žogo dala 0,006 do 0,016 s. V uporabljenem modelu ocenimo ta čas z $x/v = 0,0128 \text{ s}$, kar ustreza merjenjem. Drugačno napoved za čas stika dobimo, če žogo primerjamo z nihalom na vijačno vzmet z nihajnim časom $2\pi\sqrt{m/k}$. Pri strelu je treba upoštevati polovico tega časa, to je $\pi\sqrt{m/2r\Delta p} = 0,016 \text{ s}$, če vstavimo $k = 2r\Delta p$ in upoštevamo razliko tlakov $\Delta p = 0,8 \text{ bara}$.

Spoznali smo, da je strel z ного dokaj zapleten pojav, ki ga s preprostim modelom lahko opišemo le delno. Vendar je tudi tak model koristen, ker da vsaj okvirni pregled nad medsebojno odvisnostjo količin, in nakaže, katere količine je smiselno meriti.

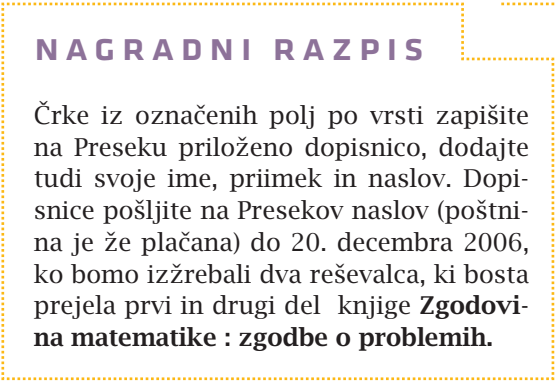


Nagradna križanka



							ANGLEŠKI PISATELJ, AVTOR ROMANA <i>ROBINSON CRUSOE</i> (DANIEL)	NOGO-METNA POSTAVA V IGRI	ŠESTI GLASBENI INTERVAL	BENEŠKI ROKOKOJSKI SLIKAR (GIOVANNI BATTISTA)	REDKA OBLIKA IMEN OTOKAR ALI OTON	DESNI PRITOK PADA JV. OD CREMONE						
							VLADAR Z NEO-MEJENO OBLASTJO						1					
							VERGILOV EP											
							MNOŽENEC ALI MNOŽITELJ ZDRAVILNA RASTLINA											
										5								
												PRIMARIJ IZ NASE MALE KLINIKE	BRUSNI KAMEN ZA KOSO					
RAČUNAL. OBLIKOV. MATEVŽ BOKALIČ	ODPOVED PREDVIDENE UDELEŽITVE	AVSTRAL. MOTOCIKLIST (MICHAEL)	TRETJA POTENCA	LINDA GRAY	SMETANA DRUŽBE	BARJ	PRIPRAVA ZA SKOK IZ LETALA		VODITELJ 24 UR (MATJAŽ) CIRILSKA CRKA					?	KO, KER, DA, CE	PUSTO-LOVŠČINA	WASH. TO. ?	
ODPIRANJE S KLJUČEM											EVROPSKA DEŽELA PIVCEV IN PEVCEV						KALI-FORNJA	
AMERIŠKA IGRALCA (KIRK IN MICHAEL)							4	100 m²			ITAL. KONCERN ZA PISARNIŠKE STROJE						ELIA KAZAN	
								NAGNJE-NOST RAVNINE			PODROČJE MATE-MATIKE	PRIDVIG. STOPNJA PRIDEVNIKA						
SVETO-PISEMSKA OSEBA		15			ENAČBA, KI JE VEDNO RES TIROLSKA REKA										POSVETILO V PESMI ZNAK SLIKOVNE PISAVE			
ANDREJ HIENG					LATINSKI PREVOD SV. PISMA PRITR-DILNICA				7						HINKO NUČIČ		UČENJE	
SL. MATE-MATIK (ALOJZIJ)					10			HUDOURNIŠKI JAREK SIMBOL ZA PROS-TORNINO							RUSSEL CROWE		LATINKI VEZNIK	
GANEC KI JE 10 LET VODIL OZN (KOFI)											OLIVER TWIST VULKANSKA KAMNINA, LIPARIT				ŠPANSKO MESTO V AFRIKI POTUJOČI PASTIRJI	8		
															ENAKI CRKI		NAJVEČJA SATURNOVA LUNA	
																AMERIŠKI IGRALEC (WARREN)		
																HE, SHE, ?		
							OTOK PRED SPLITOM	11										
							VINOGRADNIŠKI KRAJ V OBČINI ORMOŽ				RUŠKO LOVSKO LETALO					JADRANSKI POLOTOK AVSTRAL. PTIČ TEKAČ		
							VEZNIK PRI DIS-JUNKCIJI V LOGIKI				UNIVER-ZALEN JE DESETERO-BOJEČ AŠTAT							
							GLAVNO MESTO SAVDSKE ARABIJE			16						ŠTEVILO, KATEREGA KVADRAT JE -1		
							FR. FILMSKI REŽISER IN IGRALEC, MOJSTER PANTOMIMICNE KOMIKE (JACQUES)									V MATE-MATIKI JO ZAPIŠEMO Z f(x)		





Na drugi strani je treba upoštevati, da tudi merski podatki niso natančni in niso vedno med seboj usklajeni. Pri tem smo se lotili le najpreprostejšega primera, ko mirujočo žogo ustrelimo v določeni smeri. To se navadno dogodi le pri izvajanju kazenskih strellov. Večinoma pa žoga pred strelom ne miruje in navadno ne odleti v smer, iz katere prileti. Te primere bi morali obravnavati v prostoru.

Veliko pojavov iz vsakdanjega življenja je v fiziki mogoče približno opisati s preprostimi modeli. Vendar je celo v preprostih primerih večina modelov taka, da ne zaidejo v šolo. Nekatere modele za pojave v športu je mogoče obdelati v Preseku, izboljšane modele, ki utegnejo dati pomembne podatke trenerjem in športnim strokovnjakom, pa najdemo v strokovnih revijah.

Na začetku smo mimogrede omenili tudi zadetek z glavo. Na kratko opišimo nekaj značilnosti premege strele z glavo. Vzemimo, da se žoga s hitro-

stjo $v = 16 \text{ m/s}$ odbije na mirujoči glavi z maso $m_g = 2,5 \text{ kg}$, ki jo obravnavamo kot prosto. Skupna gibalna količina žoge in glave se ohrani $mv = m_g v_g - mv_1$, tako da je odzivna hitrost glave takoj po trku $v_g = 2mv/m_g = 5,5 \text{ m/s}$. Glava ni prosta, ampak z vratom vezana na trup, zato je dosežena odzivna hitrost glave manjša.¹ Trk vrže možgane z nekoliko manjšo hitrostjo ob lobanjo na drugi strani glave, pri čemer bi lahko prišlo do poškodb. Trenirani nogometaši se poškodbam izognejo tako, da močno napnejo vratne mišice, s čimer glavo trdneje povežejo z vratom in trupom. S tem znatno povečajo njeno efektivno maso in zmanjšajo odzivno hitrost. Med tekmo nogometaš v povprečju šestkrat igra z glavo, velikokrat pa se primeri to tudi med treningom. V strokovnih krogih so nekaj časa razpravljali o tem, ali se morda malenkostne poškodbe pri strelh z glavo ne seštevajo – kot pri boksarjih – in pripeljejo do težav z zdravjem. Kaže, da so vprašanje razčistili in da za trenirane nogometaše ni nevarnosti, vsaj po spoznanjih, ki so jih dobili pri prometnih nesrečah. Še vedno pa razpravljajo o tem, ali niso streli z glavo nevarni za mlade neizkušene nogometaše. Nekateri zanje predlagajo obvezno nošenje zaščitnih čelad med igro. Drugi imajo to za pretiran ukrep, vseeno pa svetujejo, naj bi bili pri strelh z glavo previdni. ☒

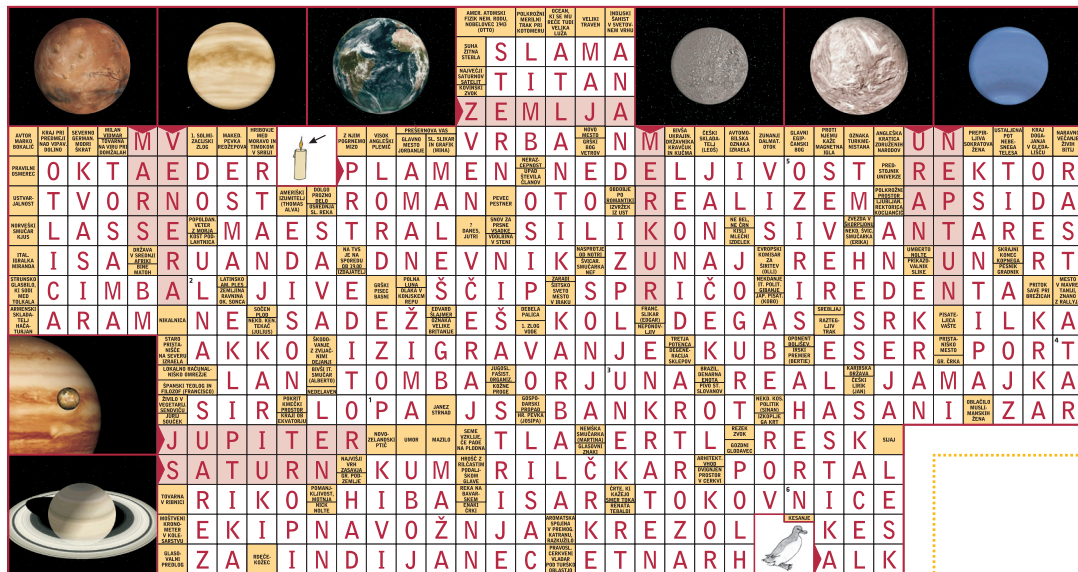
¹Račun je približen. Pri natančnejšem računu bi morali vzeti, da je hitrost žoge po trku enaka v_1 . Pri prožnem trku se ohranita gibalna količina $mv = m_g v_g - mv_1$ in kinetična energija $mv^2/2 = m_g v_g^2/2 + mv_1^2/2$. Iz enačb dobimo $v_g = 2mv/(m_g + m)$, kar da v našem primeru nekoliko manjšo odzivno hitrost $v_g = 4,7 \text{ m/s}$.

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 34/2

☒ Za nagradno križanko iz prejšnje številke smo prejeli 18 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo **Pluton**. Žreb je nagrade razdelil med naslednje nagrajence:

JAKOB JURKOŠEK, Celje; URŠKA KENDA MAVRAR, Grahovo ob Bači; PETER LENDERO, Velenje; DEJAN ŠIRAJ, Rakek; ALEŠ TOMAN, Bled.

Nagrajenci so razpisane nagrade prejeli po pošti. ☒





Kakšno obliko ima senca?



MOJCA ČEPIČ

➔ Si že kdaj opazoval obliko senc majhnih predmetov, ki nastanejo v sončni svetlobi? Naivno bi pričakovali, da ima senca obris predmeta. Toda, ali je res tako?

■ Potrebujemo

- okno, skozi katero sije sonce
- papirčke premera 1 cm do 1,5 cm različnih oblik
- lepilo, topno v vodi (da mama ne bo huda)
- bel karton ali papir za zaslon

Na okensko šipo, skozi katero sije sonce, nalepi z vodotopnim lepilom papirčke različnih oblik. Na sliki vidiš domači poizkus, ko so bile na šipo prilepljene zvezdice premera centimeter in pol. Slika je bila posneta ponoči. Še bolje bo, če boš izrezal papirčke različnih oblik. Tako boš lahko ugotavljal, kakšne sence mečejo predmeti različnih oblik.

Deset centimetrov od šipe podrži zaslon iz kartona, tako da sončna svetloba pada pravokotno nanj in opazuj sence papirčkov z okenske šipe. Nato počasi oddaljuj zaslon in opazuj, kako se spreminja senca papirčkov. ✕

Sudoku

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	3					4	2	7	
B	1	9			2				4
C			2	8	3		5		
D			1	5		7	3		
E		3	8			2			1
F	9				8			6	5
G	7	6				5		8	
H			3	6			9	4	
I		1		9	7				2

➔ Rešitev najdeš na strani 29



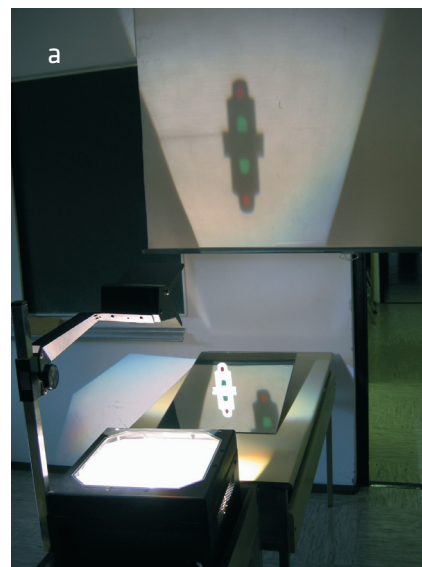
Svetlobni zajček in dvojna senca

ODGOVOR NALOGE

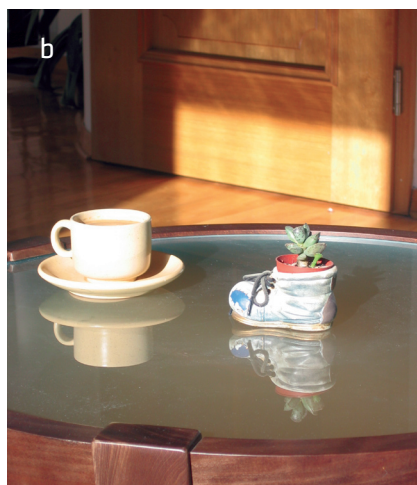
☉ Tisti, ki ste se poskusa lotili, ste lahko opazili kar nekaj zanimivosti. Če zrcalo položimo na mizo in nanj posvetimo z baterijo, nastane na steni svetlobni zajček, ki ima obliko nekoliko deformiranega zrcala. S spreminjanjem smeri svetlobe ali s spreminjanjem naklona zrcala lahko premaknemo svetlobno liso. Že v učbenikih za naravoslovje na razredni stopnji, kasneje pa v učbenikih za naravoslovje v šestem in sedmem razredu se lahko poučiš, kako in kje nastane svetlobna lisa.

Zanimivejši del zgodbe pa se začne, ko na zrcalo postavimo figurico. Seveda v zrcalu vidimo navidezno in obrnjeno sliko figurice. Figurica meče tudi senco in opazimo jo lahko v svetlobnem zajčku. A glej ga zlomka, v zajčku ni samo senca figurice temveč je senca podvojena. Prvič sem to opazila doma ob pitju pozne jutranje kave. Ob jasnem zimskem dnevu je skozi okno sijalo sonce. Sončna svetloba se je odbijala od mize z gladko stekleno površino in na steni je nastala svetlobna lisa v kateri je bila "dvojna" senca obeh predmetov na mizi (slike 1a-c).

MOJCA ČEPIČ

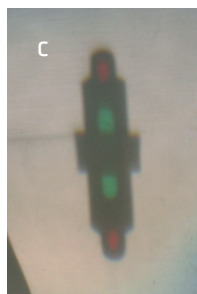
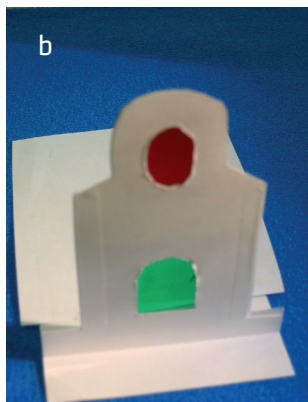


Ker opažanje na domači mizici ne omogoča drugega kot kazanje fotografij, je bil postavljen še poskus podoben predlaganemu v prejšnjem Preseku. Ta je omogočil preizkušanje okoliščin, zaradi katerih nastane v svetlobni lisi dvojna senca. Namesto sončne svetlobe ali baterije je bil uporabljen grafoskop. Namesto steklene površine mizice, je bilo na mizo položeno zrcalo (slika 2a). Zato, da je bilo mogoče slediti svetlobnim žarkom, je bila na zrcalo postavljena posebej v ta namen izdelana senčna lutka. Senčna lutka je imela dve odprtini, ki sta bili pokriti s filtroma različnih barv (slika 2b). Filter je prepustil le barvo svetlobe enako lastni barvi, zato so bili deli dvojne sence obarvani (slika 2c).



☉☉☉ Slika 1. Okoliščine, pri katerih sem opazila dvojno senco (a) in podrobnosti: predmeti na mizi z navideznimi slikami (b) in svetlobni zajček na steni z dvojno senco (c).

☞☞☞ Slika 2. Postavitev modelnega poskusa. (a) Grafoскоп (namesto Sonca), zrcalo (namesto mize) in lutka (namesto kavne skodelice) ter podrobnosti (b) senčna lutka in (c) njena dvojna senca.



V zrcalu (slika 2a) je jasno vidna navidezna slika senčne lutke. Navidezna slika je obrnjena in par predmet-slika je zelo podoben dvojni senci. Vsiljuje se misel, da tako predmet kot tudi slika mečeta senco. Ali kot je pripomnila kolegica iz Ukrajine, ko je videla te slike: "Videti je, kot da bi duhovi imeli sence v našem svetu." Toda, ali je res tako? Zato se velja z lutko na zrcalu še malo poigrati.

Svetloba pada na zrcalo, se na njem odbije in odbita svetloba pade na steno, kjer nastane svetlobni zajček. Del svetlobe pade neposredno na lutko na zrcalu, ki jo vpije, ali pa jo prehod skozi filter obarva. Zaradi vpite svetlobe nastane v svetlobnem zajčku senca. Del svetlobe pade najprej na zrcalo, se odbije in šele nato pade na lutko. Tudi zaradi tega deleža svetlobe nastane v svetlobnem zajčku senca.

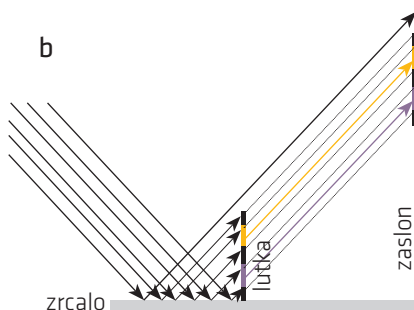
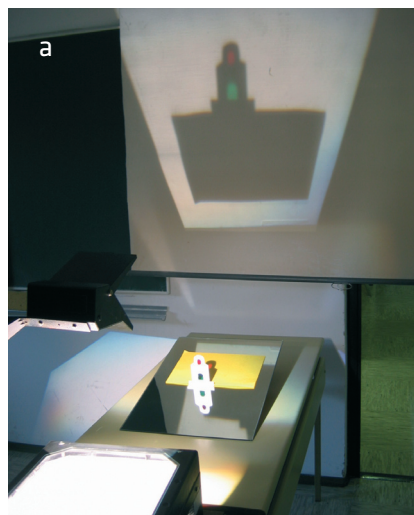
Poskusimo najprej ugotoviti, katera senca nastane zaradi svetlobe, ki se najprej odbije na zrcalu. Da preprečimo odboj svetlobe, preden le-ta pade na lutko, pokrijemo del zrcala med lutko in steno s papirjem ali kartonom (slika 3a). Na steni ostane le pokončna senca. Na sliki 3b vidimo grafično predstavitev poteka žarkov. Črtkano so označeni žarki, kjer svetlobe zaradi absorpcije ni več in je na steni senca. Bela svetloba postane po prehodu filtrov obarvana, kar nakazuje sprememba barve pri narisnem žarku. Pokončna senca torej nastane v curku svetlobe, ki se odbije na zrcalu pred lutko.

Podoben poskus pojasni nastanek druge polovice dvojne sence – obrnjeno senco. Karton položimo med

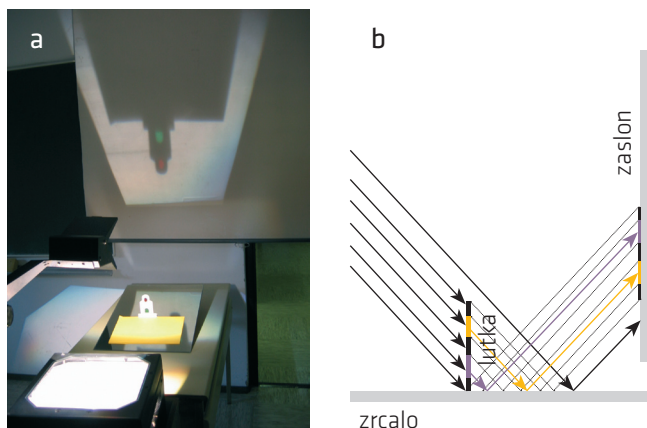
lutko in svetlobni vir (slika 4a). Svetlobno liso tvori le svetloba, ki se odbija na delu zrcala med lutko in steno. Senca nastane zato, ker se del svetlobe vpije (ali obarva) na lutki, še preden se odbije na zrcalu. Senca, ki nastane zaradi "luknje" v odbiti svetlobi, je obrnjena, kot kaže tudi grafični potek žarkov (slika 4b).

Iz gornjega preizkušanja lahko sklepamo, da navidezna slika v zrcalu ne meče sence. Ni pa odveč ponoviti, kako vidimo predmete in zakaj sliko v zrcalu sploh vidimo. Na hrapavi površini predmeta se svetloba odbija na vse strani. Del od predmeta odbite svetlobe pade neposredno v oči. Na sliki 5 to ponazarjata žarka, ki izhajata iz iste točke na gornjem delu lutke. Zaradi te svetlobe nastane na mrežnici slika predmeta. Obe očesi vidita različni sliki, saj svetloba pade v vsako oko iz nekoliko drugačne smeri. S pomočjo dodatne informacije o različnih smereh odbite svetlobe s posameznih delov predmeta nato možgani rekonstruirajo tudi oddaljenost in tridimenzionalno sliko predmeta.

Del odbite svetlobe na predmetu pade na zrcalo in se šele od njega odbije v oči. Na sliki 5 to ponazarja



☞☞ Slika 3. (a) Rumeni karton za lutko preprečuje odboj svetlobe na tem delu zrcala in na zaslonu je vidna le pokončna senca. (b) Grafični prikaz nastanka pokončne sence.



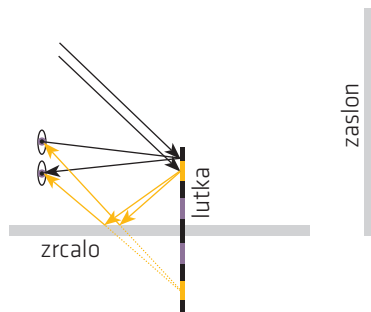
☞ Slika 4. (a) Rumena karton pred lutko preprečuje odboj svetlobe na tem delu zrcala in na zaslonu je vidna le obrnjena senco. (b) Grafični prikaz nastanka obrnjene sence.

ta žarka, ki izhajata iz iste točke na gornjem barvnem filtru na lutki. Smer te svetlobe, ko pada v oči, je popolnoma drugačna, kot smer svetlobe, ki iz predmeta pada neposredno v oči. Zato vidimo navidezno sliko v zrcalu. Poimenovanje "navidezna" ponazarja dejstvo, da se nam samo zdi, da se svetloba odbija na vse strani od neke točke za zrcalom. Oko namreč iz informacije o smeri svetlobe ne more izluščiti podatka o morebitnem odboju svetlobe na zrcalu. Navidezne slike od pravih predmetov nam pomagajo ločevati le izkušnje. Čeprav si morda predstavljamo, da imamo obilo tovrstnih izkušenj, pa obisk hiše zrcal v zabaviščnem parku kaj hitro pokaže, da so naše izkušnje z zrcali precej omejene.

Literatura

- [1] M. Čepič, *Does a virtual image cast a shadow?*, Physics Education **41**(4) (2006), str. 295–297. ☒

Slika 5. Kako vidimo predmete neposredno (gornji curek svetlobe in njegov difuzni odboj) ter v zrcalu (spodnji curek svetlobe). Zaradi nazornosti sta očesi narisani navpično.



37. mednarodna fizikalna olimpijada

CIRIL DOMINKO

➔ Letos je Slovenijo na Mednarodni fizikalni olimpijadi zastopala ekipa v postavi: MATIJA VIDMAR, VASJA SUSIČ, ŽIGA PAVLIN, vsi iz Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, MATJAŽ GOMILŠEK, II. gimnazija Maribor in GAŠPER ZADNIK, Gimnazija Vič, Ljubljana. Matija Vidmar in Matjaž Gomilšek sta se v ekipo uvrstila neposredno zaradi dosežka na lanske fizikalni olimpijadi, ostali trije pa z dosežki na regijskem, državnem in izbirnem tekmovanju. Vse stopnje tekmovanja je tudi letos organiziralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

37. mednarodna fizikalna olimpijada je potekala med 8. in 17. julijem 2006 v Singapurju. Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sta bila dr. Jure Bajc s Pedagoške fakultete v Ljubljani in mag. Ciril Dominko, DMFA Slovenije. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili DMFA Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Na olimpijadi je sodelovalo 383 tekmovalcev iz 82 držav, štiri države pa so bile opazovalke brez tekmovalcev. V naši ekipi je Matija Vidmar osvojil bronasto medaljo, ostali štirje tekmovalci pa vsak pohvalo. Tako je prvič od leta 1992, od kar Slovenija sodeluje na fizikalnih olimpijadah, vsak tekmovalec v ekipi nekaj dosegel. V celoti je bilo na olimpijadi nagrajenih in pohvaljenih 250 tekmovalcev.

Na mednarodnih tekmovanjih iz znanja tekmujejo dijaki kot posamezniki in ne kot ekipa. Tako na tekmovanju ni ekipnih dosežkov, objavljeni pa so samo rezultati tistih tekmovalcev, ki so prejeli medaljo ali pohvalo. Kljub temu spremljevalci ekip navadno ovrednotimo število in vrsto medalj ter pohval



Slika 1. Slovenska olimpijska ekipa na letališču ob prihodu v Singapur. Z leve proti desni: Jure Bajc (vodja), Matjaž Gomilšek, Žiga Pavlin, Matija Vidmar, Vasja Susič, Gašper Zadnik, Ciril Dominko (vodja).



Slika 2. Slovenska olimpijska ekipa po zaključni prireditvi. Z leve proti desni: Ciril Dominko (vodja), Vasja Susič, Žiga Pavlin, Matija Vidmar (bronasta medalja), Wu Lei (vodička ekipe), Gašper Zadnik, Matjaž Gomilšek, Jure Bajc (vodja).

in to primerjamo po državah. V taki primerjavi nas letošnji dosežki uvrščajo na 35. mesto.

Naslednje leto bo 38. mednarodna fizikalna olimpijada od 13. do 21. julija v iranskem mestu Isfahan.

Urnik tekmovanj v letu 2007

DARJO FELDA

➔ V nadaljevanju je nekaj osnovnih informacij o posameznih tekmovanjih. Vabimo vas, da obiščete spletno stran *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>), kjer boste našli več podatkov o posameznem tekmovanju.

Mentorje prosimo, da sledijo novicam, ki jih objavljamo na informacijskem strežniku.

■ Nekaj informacij o tekmovanjih

■ Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila dobite pri gospe KLAVDIJI MLINŠEK na elektronskem naslovu klavdija.mlinsek@siol.com.

■ Matematika – srednja šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov domačih nalog, izbirnih testov in državnega tekmovanja. Datumi izbirnih testov bodo objavljeni na spletni strani *DMFA Slovenije*. Podrobnejše informacije daje gospod DARJO FELDA na elektronskem naslovu darjo.felda@pef.upr.si in gospod MATJAŽ ŽELJKO na elektronskem naslovu matjaz.zeljko@fmf.uni-lj.si.

Dijaki srednjih poklicnih šol se lahko udeležijo matematičnega tekmovanja v posebni kategoriji. To tekmovanje ureja *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike*. Več informacij dobi-





te pri gospe DUŠANKI VRENČUR po elektronski pošti dusanka.vrencur@guest.arnes.si.

Tudi dijaki srednjih tehniških in strokovnih šol, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa, se lahko udeležijo tekmovanja v posebni kategoriji. Tekmovanja v tej kategoriji ureja *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike*. Informacije dobite pri gospe DARINKI ŽIŽEK po elektronski pošti darinka.zizek@guest.arnes.si.

Naj poudarimo, da se matematičnih tekmovanj srednješolcev, ki jih podrobno ureja *Pravilnik o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*, lahko udeležujejo vsi srednješolci ne glede na vrsto šole, ki jo obiskujejo. Ta tekmovanja so podvržena mednarodni primerljivosti zaradi končnega izbora ekip, ki sodelujejo na mednarodnih tekmovanjih.

■ Fizika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Dodatne informacije daje gospod SAŠA KOŽUH na elektronskem naslovu sasa.kozuh@guest.arnes.si.

■ Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja v znanju fizike je objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije*. Informacije dobite pri gospodu CIRILU DOMINKU na elektronskem naslovu ciril@gimb.org.

■ Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrilna matematika*.

■ Poslovna matematika

Podrobne informacije o tekmovanju dobite pri gospodu DARKU RUPRETU po elektronski pošti darko.rupret@s-scpet.lj.edus.si.

■ Računalništvo

Vse informacije o tekmovanju IJS v znanju računalništva dobite na naslovu <http://rtk.ijs.si/>. ☺

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko področno državno	15. marec 4. april 21. april
	srednja	šolsko izbirno državno sredozemsko olimpijada	15. marec 4. april 21. april april julij
	za dijake srednjih poklicnih šol	šolsko področno državno	15. marec 4. april 21. april
	za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol	šolsko področno državno	15. marec 4. april 21. april
fizika	osnovna	šolsko področno državno	6. marec 20. marec 14. april
	srednja	regijsko državno izbirno olimpijada	23. marec 14. april 4. maj 13. do 22. julij
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	29. september
poslovna matematika	srednja	šolsko državno	22. marec 20. april
računalništvo	srednja		31. marec
podelitev priznanj nagrajencem na državnih tekmovanjih v organizaciji DMFA Slovenije			17. maj

Kanali na Marsu

ANDREJ GUŠTIN

➤ Leta 2006 je raziskovanje Marsa z robotskimi sondami potekalo s polno paro. V orbito okoli rdečega planeta, kakor tudi pravimo Marsu, se je utirila ameriška sonda Mars Reconnaissance Orbiter (MRO) in se pridružila tam delujočim sondam Mars Global Surveyor, Mars Odyssey in Mars Express, ter vozilcema – robotskima geologoma Spirit in Opportunity, ki od leta 2004 preučujeta površje tega planeta. Nova spoznanja lahko sproti spremljate na spletnem naslovu <http://marsprogram.jpl.nasa.gov>.

Najnovejša spoznanja o Marsu se močno razlikujejo od tega, kar so astronomi o tem planetu mislili še pred petdesetimi leti. Najbolj nenavadna je zgodba o obstoju kanalov in inteligentnih bitij na rdečem planetu. Začela se je z italijanskim astronomom Giovannijem Virginio Schiaparellijem, ki je leta 1862 postal direktor milanskega observatorija Brera. Podedoval je kopico zastarelih inštrumentov, a si je kmalu izbral finančna sredstva za novi 22-centimetrski refraktor. Da bi preizkusil optiko nove pridobitve, je leta 1877 naredil nekaj opazovanj Marsa. Ko je videno primerjal s starejšimi kartami Marsa, je ugotovil, da ima njegov teleskop velik potencial pri opazovanju planetov. Takoj se je lotil intenzivnega opazovanja rdečega planeta, na njem odkril številne nove podrobnosti in izdelal natančno karto. Pri tem je uvedel svoje poimenovanje tvorb.

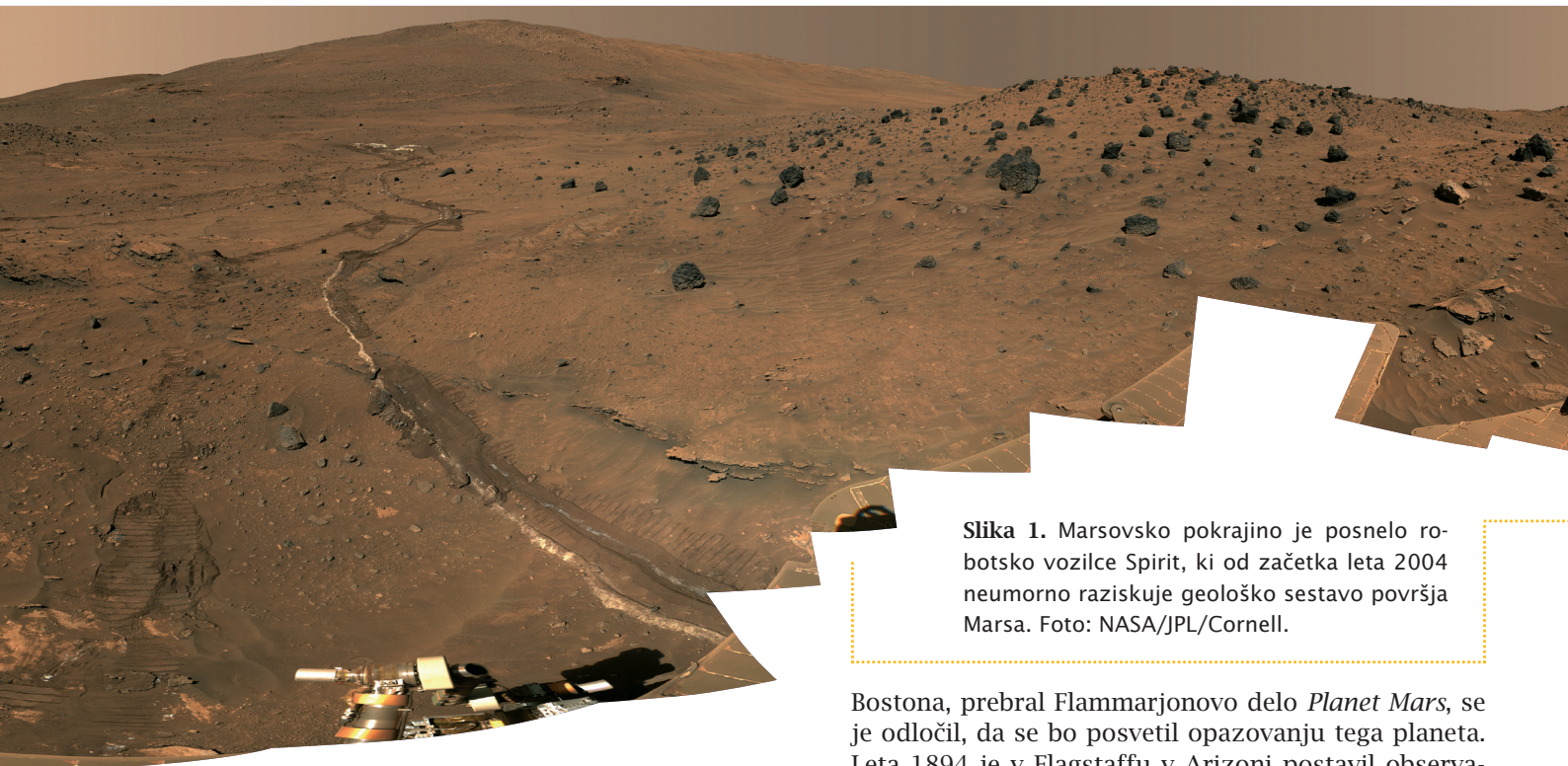


Živijo NA MARSU...

Pip pip pip pip

inteligentna bitja

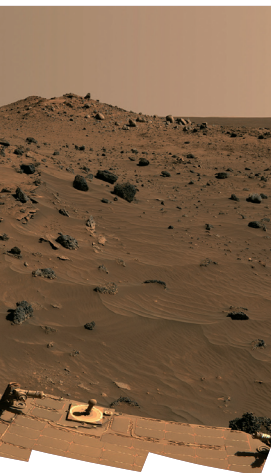
Ali obstajajo?



Slika 1. Marsovsko pokrajino je posnelo robotsko vozilce Spirit, ki od začetka leta 2004 neumorno raziskuje geološko sestavo površja Marsa. Foto: NASA/JPL/Cornell.

→ Po analogiji z Zemljo je podrobnosti na Marsu imenoval otoke, ožine, kanale, polotoke itd. Taka imena so Schiaparelliju služila bolj kot miselne oporne točke, s katerimi si je lažje zapomniti detajle. Na začetku so bila to le imena, toda kmalu je začel govoriti o dejanskih rečnih tokovih in oceanih. To je imelo dolgoročne posledice za astronomijo ob koncu devetnajstega stoletja in bila osnova za nastanek mita o Marsovcih. Velik delež pri tej zablodi je prispeval tudi prevajalski spodrseljaj v angleščino, ko so besedo "kanali", ki jo je uporabljal Schiaparelli, prevedli v *canals* in ne v pravilno obliko *channels*. V angleščini je razlika bistvena, saj *canals* pomenijo umetne prekope, *channels* pa naravne tvorbe, na primer morske ožine ali struge. Tudi francoski astronom in znameniti popularizator astronomije 19. stoletja Camille Flammarion je po Schiaparelliju povzel idejo o čudoviti obljudeni marsovski pokrajini. Njegov vpliv na javnost je bil izjemen. Njegovo knjigo *Astronomie Populaire* so prodali v več kot 130 tisoč izvodih. Kljub temu, da so nekateri astronomi zavračali domneve o obstoju Marsovcov, ki naj bi kopali kanale po rdečem planetu in celo poskušali vzpostaviti stik z Zemljani, se širše občinstvo ni zmenilo za to. Ko je Percival Lowell, sin bogatega industrijalca iz

Bostona, prebral Flammarionovo delo *Planet Mars*, se je odločil, da se bo posvetil opazovanju tega planeta. Leta 1894 je v Flagstaffu v Arizoni postavil observatorij in pričel opazovati kanale na Marsu. Poskušal je potrditi domnevo o Marsovcih. Njegove risbe Marsovega površja so bile prepredene s številnimi kanali, ki naj bi jih kopala inteligentna bitja, temna področja naj bi bila poraščena z rastlinjem... V svoji vnemi je šel Lowell tako daleč, da je celo na Veneri in Merkurju "videl" kanale. Astronom Bernard je leta 1894 z velikim refraktorjem na observatoriju Lick tudi opazoval Mars in ugotovil, da je na njem videti številne podrobnosti, nikakor pa ne likov iz Schiaparellijevih in Lowellovih risb. Tudi angleški astronom Edward Maunder je potrdil, da slika v teleskopu ne odraža dejanskih podrobnosti na površju rdečega planeta. Na neki šoli je naredil zanimiv poskus. Učencem je kazal kroge, na katerih so bile narisane podrobnosti v obliki majhnih kraterjev. Ko je risbe postavil na veliko oddaljenost od opazovalcev, ti niso več videli kraterjev, temveč se jim je zdelo, da je slika preprežena s črtami. Obstoj kanalov na Marsu je dokončno ovrgel francoski astronom Eugene Michael Antoniandi, ki je Mars z 83-centimetrskim refraktorjem v Meudonu prvič opazoval leta 1909. Izjemna optika tega inštrumenta je na mestu kanalov razkrila številne kraterje in različno obarvana področja, nikjer pa ne geometrijsko urejenih ume-



tnih prekopov. Le nekateri kanali so se pokazali kot naravni kanjoni.

■ Marsovski kanali v učilnici

V učilnici ali na prostem lahko na enostaven način ponovimo Maunderjev poskus, pri katerem ugotovimo, da se pri opazovanjih lahko podrobnosti (pike na papirju) spremenijo v črte oziroma neobstoječe geometrijske like. Iz tega poskusa sledi, da moramo vedno kritično obravnavati astronomska opazovanja, saj se lahko zaradi različnih dejavnikov videno močno razlikuje od dejanskega.

Za poskus potrebujemo: rdeč papir, črn tuš ali razredčeno črno tempero, šestilo, škarje, lepilni trak, dvogled.

1. S čopičem na papir večkrat razpršimo barvo, tako da nastane nepravilna mreža črnih pik.
2. Ko se barva posuši, s šestilom na "popackanem" papirju narišemo krog polmera najmanj 10 centimetrov in ga izrežemo. Ta krog predstavlja ploskvico Marsa.
3. Krog prilepimo na steno in ga z oddaljenosti kake tri do štiri metre opazujemo z dvogledom. Daljnogleda ne izostrimo (!). S tem simuliramo motnje ozračja in omejitve optike pri pravih opazovanjih Marsa.
4. Če nimamo daljnogleda, lahko krog opazujemo s prostim očesom na različnih oddaljenostih. Pri določeni razdalji posamezne točke ne bodo več vidne, temveč se bodo zlile v črte.
5. Vsak opazovalec naj nariše tisto, kar je videl skozi daljnogled.
6. Primerjajte risbe vseh opazovalcev.

■ Pogovor in vprašanja

1. Ali ste pri opazovanjih z neizostrenim daljnogledom še vedno videli posamezne točke?
2. Zakaj se je pri opazovanju "popackanega" papirja pokazala tako drugačna slika od resnične podobe?
3. Razmislite, zakaj se risbe različnih opazovalcev razlikujejo? ☒



Mreže

DRUGI DEL

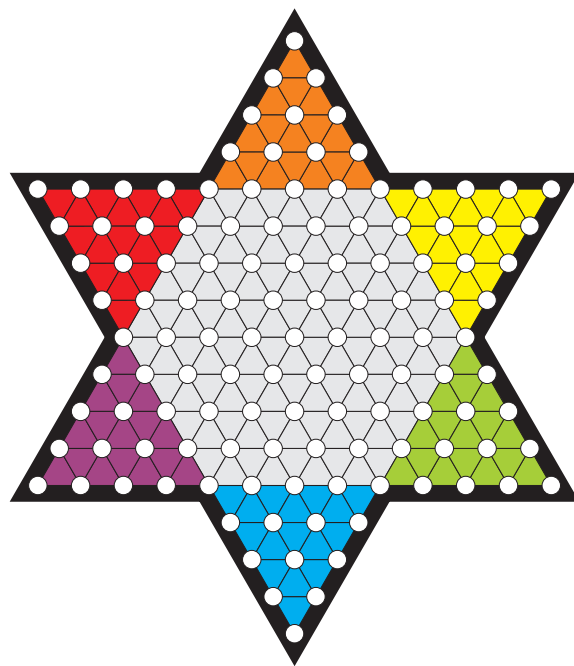
ANDREJ TARANENKO

➔ V prejšnji številki Preseka smo si podrobneje ogledali pravokotniške mreže in sprehode po teh mrežah. Kot smo obljubili, bomo tokrat opisali še trikotniške in šestkotniške mreže. Tudi s takšnimi mrežami se pogosto srečujemo, npr. v različicah popularne igre *Go*, tudi *Kitajska dama* se igra na polju, ki ga lahko predstavimo s trikotniško mrežo (glej sliko 1), v čebelnjaku imamo opravka s šestkotniškimi mrežami in še kaj bi se našlo.

■ Trikotniške mreže

Trikotniško mrežo, o kateri bomo govorili mi, sestavljajo skladni enakostranični trikotniki. To pomeni, da imamo v trikotniški mreži tri osi, in sicer horizontalno os, nato drugo os, ki je od horizontalne odmaknjena za 60° , ter tretjo os, ki je od horizontalne osi odmaknjena za 120° . Primer trikotniške mreže lahko vidimo na sliki 2. Vsaka točka v trikotniški mreži je sosednja z natanko šestimi drugimi točkami, razen v primeru, ko imamo opraviti s končno veliko trikotniško mrežo (primer je na sliki 5), kjer to ne velja za robne točke. Vsako lice trikotniške mreže je, kot že povedano, enakostranični trikotnik (z dolžino stranice d) in je sosednje s tremi drugimi lici.

Da bomo lahko identificirali točke v trikotniški mreži, bomo definirali koordinate točk na dva načina: prvi način bo t.i. *trikotniški koordinatni sistem*, drugi način pa izračun koordinat točk v kartezičnem koordinatnem sistemu. Kartezični koordinatni sistem je koordinatni sistem, ki ste ga spoznali v šoli. Ima absciso in ordinatno os, ki sta pravokotni druga na drugo.



Slika 1. Deska za igro Kitajska dama

■ Trikotniški koordinatni sistem

Najprej moramo določiti izhodiščno točko, ki bo imela koordinate $(0,0)$. Ostalim točkam bomo koordinate določili glede na horizontalno os in glede na os, ki je od horizontalne odmaknjena za 60° (v nadaljevanju 60° -os). Vse točke na isti horizontalni osi bodo imele isto prvo koordinato. Vse točke na isti 60° -osi bodo imele isto drugo koordinato. Prav tako se dogovorimo, da bodo vse točke nad horizontalno osjo imele pozitivne prve koordinate in vse točke desno od 60° -osi prav tako. Takšne koordinate so prikazane na sliki 2. Vse sosednje točke na koordinatah (x, y) dobimo tako, da prištejemo pare $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ in $(-1, 1)$.

■ Koordinate trikotniške mreže v kartezičnem koordinatnem sistemu

Dogovorimo se, da točka na koordinatah $(0,0)$ v trikotniškem koordinatnem sistemu sovpada z izhodiščem kartezičnega koordinatnega sistema (primer je prikazan na sliki 3). Naj bo dolžina osnovnice lica trikotniške mreže enaka d (na sliki 3 je $d = 1$).

Točka s koordinatama (x_t, y_t) v trikotniškem koordinatnem sistemu je v kartezičnem koordinatnem sistemu na koordinatah

$$(x_k, y_k) = (d(y_t + x_t \cos(60^\circ)), dx_t \sin(60^\circ)),$$

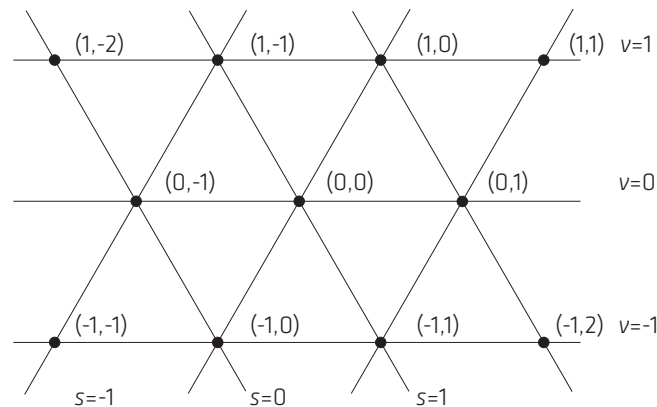
kar lahko preverimo s pomočjo trigonometrije. Če upoštevamo, da je $\cos 60^\circ = 1/2$ in $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, pri izračunu ne potrebujemo kotnih funkcij.

Šestkotniške mreže

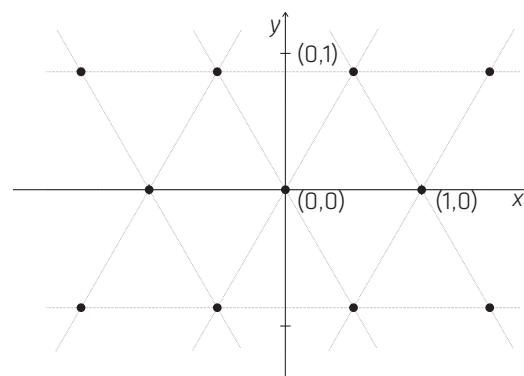
Šestkotniško mrežo dobimo iz trikotniške mreže z brisanjem ustreznih točk. Primer lahko vidite na sliki 4. Lica šestkotniške mreže, dobljene na ta način, so pravilni šestkotniki. Vsaka točka je sosednja s tremi drugimi točkami (razen seveda robnih točk v primerih končne mreže). Vsako lice je sosednje s šestimi drugimi šestkotniki.

Drugi način, da iz trikotniške mreže dobimo šestkotniško, je, da narišemo dualni graf trikotniške mreže. To pomeni, da v središče vsakega lica trikotniške mreže damo točko, dve točki pa povežemo natanko tedaj, kadar imata pripadajoči lici trikotniške mreže skupen rob.

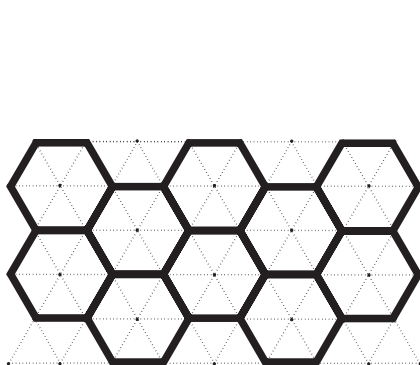
Zaradi tesne povezave med trikotniškimi in šestkotniškimi mrežami prepuščam vam v razmislek, kako bi si pomagali s trikotniškim koordinatnim sistemom, da bi označili lica ali točke šestkotniške mreže.



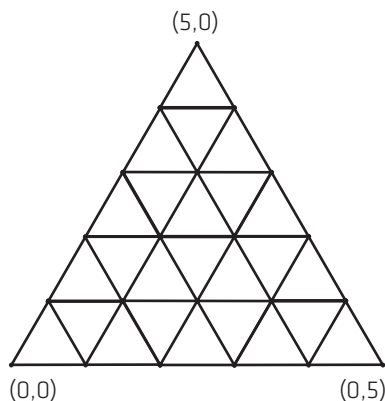
Slika 2. Trikotniška mreža



Slika 3. Primer trikotniške mreže, postavljene v kartezični koordinatni sistem



Slika 4. Šestkotniška mreža



Slika 5. Soseska na planetu Tris

REŠITEV SUDOKU S STRANI 19

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	3	8	6	1	5	4	2	7	9
B	1	9	5	7	2	6	8	3	4
C	4	7	2	8	3	9	5	1	6
D	6	4	1	5	9	7	3	2	8
E	5	3	8	4	6	2	7	9	1
F	9	2	7	3	8	1	4	6	5
G	7	6	9	2	4	5	1	8	3
H	2	5	3	6	1	8	9	4	7
I	8	1	4	9	7	3	6	5	2

➔ ■ Nagradna naloga

Na planetu Tris imajo na poseben način urejene soseske. Celotno sosesko si lahko predstavljamo kot končno trikotniško mrežo, ki je v obliki trikotnika. V vsaki točki mreže je postavljena hiša. V celotni soseski je 21 hiš. Robovi mreže predstavljajo poti, po katerih lahko prebivalci (ki imajo čisto slučajno tri noge) pešajo. Tistim, ki se jim ne ljubi pešati, so na voljo leteče preproge (seveda v obliki trikotnikov), s katerimi letijo od ene hiše naravnost do druge (v ravni črti). Hiše v soseskah so na planetu Tris označene s tremi števili (t_1, t_2, t_3) . Število t_1 pove številko soseske, v kateri se hiša nahaja. Števili t_2 in t_3 pa predstavljata koordinate hiše v trikotniškem koordinatnem sistemu, predstavljenem prej. Deklica Lea živi v hiši z naslovom (s, x_K, y_K) , deček Jan pa v hiši z naslovom (s, x_J, y_J) – oba živita v isti soseski. Lea obožuje sprehode (torej uporablja na soseski označene pešpoti), Jan pa se rad vozi z letečimi preprogami. Napišite program, ki bo za podani dve trojici števil izračunal, kako dolgo pot mora prepešati Lea, če želi obiskati Jana po najkrajši poti. Hkrati naj program izpiše tudi naslove vseh hiš, mimo katerih se Lea na tej poti sprehodi (njene in Janove hiše

ne izpišete). Napišite še program, ki bo izračunal, kako dolgo pot preleti Jan, če želi obiskati Leo, ter izpišete vse hiše, nad katerimi bo Jan letel (njegove in Leine hiše ne izpišete). Vsaka hiša je od svojih sosed oddaljena 25 metrov. Lahko se zgodi, da Lea ne gre mimo nobene tuje hiše (je Janova sosed). Prav tako se lahko zgodi, da Jan ne leti nad nobeno drugo hišo razen nad svojo in Leino (npr. če bi letel od hiše $(0, 0, 0)$ do hiše $(0, 1, 1)$).

Primer soseske na planetu Tris lahko vidite na sliki 5, kjer so prikazani naslovi hiš brez številke soseske.

Pri iskanju rešitve vam želim obilo zabave. Vašo rešitev pošljite v uredništvo Preseka do 29. decembra 2006. Naključno izžrebanega avtorja čaka lepa knjižna nagrada.

■ Literatura

- [1] S. S. Skiena in M. A. Revilla, *Programming Challenges*, Springer, New York, 2003.
- [2] <http://online-judge.uva.es/problemset/>
- [3] E. W. Weisstein, *Board. MathWorld-A Wolfram Web Resource*, <http://mathworld.wolfram.com/Board.html> ✕

Stare številke revije Presek so še vedno na voljo

Če želite dopolniti svojo zbirko revij Presek, so nekatere stare številke še vedno na voljo. Na spodnjem naslovu najdete seznam razpoložljivih števil in naročilnico:

<http://www.presek.si/staro.htm>

Za individualne naročnike revije Presek, člane DMFA, dijake in študente je cena stare številke 520 SIT (2,17 EUR), za vse ostale pa 650 SIT (2,71 EUR).

Izkoristite možnost dodatnih popustov pri večjem naročilu!

Vse informacije lahko dobite tudi v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.



■ Problem 36 oficirjev

Leta 1779 je Euler zastavil naslednjo nalogo:

Zbranih je šest delegacij iz šestih regimentov. V vsaki delegaciji je po en polkovnik, podpolkovnik, major, stotnik, poročnik in podporočnik. Častnike bi radi razporedili v formacijo v obliki kvadrata dimenzije 6×6 tako, da se v nobeni vrsti in v nobenem stolpcu ne bo dvakrat pojavil isti čin ali isti regiment.

Euler je domneval, da problem ni rešljiv. Njegovo domnevo je leta 1901 potrdil Gaston Tarry, ki je preprosto pregledal vse možnosti. Domnevo so kasneje še večkrat potrdili na različne načine, najlepši matematični dokaz je podal Stinson 1988. leta.

Eulerjev oficirski problem je poseben primer splošnejše naloge, t. i. *grško-latinskih kvadratov*, ki jih je prav tako definirjal Euler in jih danes imenujemo *Eulerjevi kvadrati*. V sodobnem jeziku jih lahko opišemo takole:

Naj bosta A in B dve množici, vsaka z n elementi, in $A \times B$ množica urejenih parov. Eulerjev kvadrat nad množicama A in B je razporeditev vseh n^2 urejenih parov v kvadratno mrežo dimenzije $n \times n$ tako, da v vsaki vrstici in vsakem stolpcu mreže nastopa vsak element iz A in vsak element iz B natanko enkrat.

Da Eulerjev kvadrat za $n = 2$ ne obstaja, lahko sami preprosto preverite. Leta 1780 je Euler pokazal, kako konstruirati grško-latinske kvadrate, če je n liho število ali večkratnik števila 4. Odprto je ostalo vprašanje za soda števila, ki niso deljiva s 4. Taki sta števili 2 in 6, za kateri Eulerjeva kvadrata ne obstajata. Verjetno je Euler pod vplivom teh dveh primerov postavil t. i. *Eulerjevo domnevo*, da ne obstajajo grško-latinski kvadrati dimenzije $n \times n$ za $n = 4k + 2$, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Domneva je privedla do številnih raziskav in pomembnih rezultatov v kombinatoriki.

Vendar je domneva napačna. Leta 1959, skoraj 180 let po njeni postavitvi, so našli prvih nekaj protiprimerov, tudi protiprimer najmanjše možne dimenzije, to je Eulerjev kvadrat velikosti 10×10 , ki ga vidite spodaj (za $A = B =$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$). Leta 1960 pa je Journal Canadien de Mathématiques objavil dokaz, da je Eulerjeva domneva napačna celo za vsak $k \geq 2$. To pa pomeni, da obstajajo grško-latinski kvadrati vseh dimenzij, razen za $n = 2$ in $n = 6$.

46	57	68	70	81	02	13	24	35	99
71	94	37	65	12	40	29	06	88	53
93	26	54	01	38	19	85	77	60	42
15	43	80	27	09	74	66	58	92	31
32	78	16	89	63	55	47	91	04	20
67	05	79	52	44	36	90	83	21	18
84	69	41	33	25	98	72	10	56	07
59	30	22	14	97	61	08	45	73	86
28	11	03	96	50	87	34	62	49	75
00	82	95	48	76	23	51	39	17	64

■ Sudoku si je izmislil Euler

Ste mislili, da ima matematična igra sudoku korenine v deželi vzhajajočega sonca? Motite se!

Zgodovina sudokuja sega v leto 1783, ko je Leonard Euler opisal nov tip magičnih kvadratov, ki jih je poimenoval *latinski kvadrati*. To so kvadratne mreže dimenzije $n \times n$, v katerih se posamezno izmed n števil (ali simbolov) pojavi samo enkrat v vsaki vrstici ali stolpcu. Po več kot dvesto letih je razlika le v tem, da je pri sudokuju latinski kvadrat dimenzije 9×9 razdeljen na devet podkvadratov 3×3 z dodatno zahtevo, da tudi v vsakem podkvadratu posamezno število nastopa samo enkrat.

Moderna različica igre se je prvič pojavila leta 1979 v reviji Dell Magazines v ameriškem Indianapolisu. Po njej so jo 1986 povzeli Japonci in ji dali današnje ime. Leta 2005 pa je postala prava mednarodna uspešnica. Tudi pri nas.

Astronomija je zanimiva

Publikacije s področja astronomije so zagotovo najzanimivejši del naše ponudbe za širši krog bralcev. O njih ste lahko že veliko prebrali tudi na straneh revije Presek.

Posodobljena in plastificirana Presekova zvezdna karta je dobrodošel učni pripomoček, predvsem za opazovanje neba s prostim očesom, binokularjem ali manjšim teleskopom. Priporočamo jo vsem ljubiteljem astronomije, tudi začetnikom.



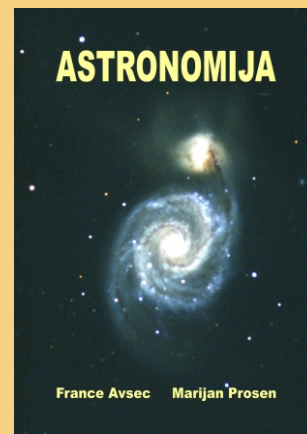
Pavla Ranzinger:

PRESEKOVA ZVEZDNA KARTA

2000,0

format 54 × 58 cm
plastificirana
zložena

800 SIT
(3,34 EUR)



France Avsec in Marijan Prosen:

ASTRONOMIJA

180 strani
format 14,5 × 20,5 cm
mehka vezava

3.000 SIT
(12,52 EUR)

Marijan Prosen:
UKVARJANJE S SENCO

96 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

2.500 SIT
(10,43 EUR)



Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih del s področja astronomije. Podrobnejše predstavitve dobite na spodnjem naslovu, kjer lahko vse tudi naročite s popustom:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek imajo pri naročilu izdaj DMFA–založništvo 20 % popusta!
Dodatne informacije dobite v uredništvu Preseka po telefonu: (01) 4766 553 ali 4232 460