



PRESEK

- NOGOMET
- KOPALNIŠKA POIZKUŠEVALNICA
- MREŽE
- NAGRADNA KRIŽANKA



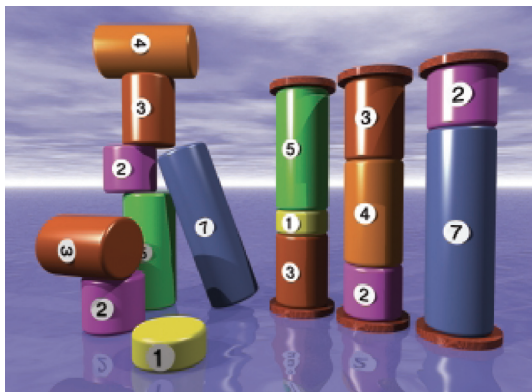
ISSN 0351-6652



Pakiranje

➔ Pakiranje predmetov v zaboj danih prostornin se morda ne sliši pomembno (razen če pakiraš za na potovanje). Vendar področje *pakiranja zabojev* poleg običajnih problemov, kot je recimo nakladanje tovornjakov, vključuje tudi situacije kot sta dodeljevanje blokov računalniškega pomnilnika, ali izdelovanje razporedov letalskih poletov. Raziskovalci uporabljajo različna področja matematike (med drugim teorijo števil, geometrijo in verjetnost) za reševanje problemov pakiranja, tako da sta čas in prostor (tako fizični kot elektronski) učinkovito uporabljena.

Matematiki so dokazali, da so problemi pakiranja zabojev »težki« in da se zdi malo verjetno, da bi obstajal uporaben algoritem, ki bi nam dal optimalno rešitev za vse probleme pakiranja. Kljub temu, da morda nikoli ne bo znana »hitra« splošna rešitev, matematiki skušajo izboljšati algoritme pakiranja in tako industriji prihraniti čas in denar. Na primer, rezultat iz teorije pakiranja pravi, da je eden izmed najpreprostejših algoritmov pakiranja, ki najprej naloži največji predmet, ki ga lahko spravimo v zaboj, vedno znotraj okoli 20% najboljše možne rešitve. ✖



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike »The Mathematical Moments«, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

➔ Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 34, šolsko leto 2006/2007, številka 2

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marijan Prosen, Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 2517 281.

Naročnina za šolsko leto 2006/2007 je za posamezne naročnike 4.000 SIT (16,69 EUR) – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 3.500 SIT (14,61 EUR), posamezna številka 900 SIT (3,76 EUR), dvojna številka 1.650 SIT (6,89 EUR), stara številka 650 SIT (2,71 EUR), letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASIX, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje, ilustracija in tehnično urejanje
Polona Šterk in Matjaž Čuk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 2100 izvodov

© 2006 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
– 1644

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učenec višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večina razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželen velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije **Presek**, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

■ MATEMATIČNI TRENUTKI

Pakiranje 2

■ MATEMATIKA

O nogometu in statistiki – Prvi del (*Dominik Benkovič*) 4-8
 Je lahko matura iz angleščine navdih matematikom
 ali matematični komentarji h knjigi »*Skrivnostni primer
 ali kdo je umoril psa*« – Drugi del: Igre (*Jasna Kos*) 8-10
 Predstavitev nove knjige (*Petar Pavešič*) 31

■ FIZIKA

Met iz outa (*Janez Strnad*) 14-15 in 18
 Kopalniška poizkuševalnica – Svetlobni zajček? (*Mojca Čepič*) 19
 Kuhinjska poizkuševalnica – Ali teče, ali je trdno?
 Odgovor na nalogo iz prejšnje številke (*Mojca Čepič*) 20-21

■ ASTRONOMIJA

Pluton je izgubil status planeta (*Andrej Guštin*) 24-25
 Svetlobno onesnaženje – Drugi del (*Andrej Guštin*) 25-27

■ RAČUNALNIŠTVO

Mreže – Prvi del (*Andrej Taranenko*) 28-30

■ RAZVEDRILO

Nagradna križanka (*Marko Bokalič*) 16-17
 Rešitev nagradne križanke Presek 34/1 18

■ TEKMOVANJA

50. matematično tekmovanje srednješolcev
 Slovenije (*Darja Delač Felda*) 11-13
 44. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (*Ciril Dominko*) 21-23
 17. državno tekmovanje v razvedrilni matematiki priloga
 27. mednarodno matematično tekmovanje mest priloga

SKUPINA A	SKUPINA B	SKUPINA C	SKUPINA D
ARGENTINA : KOSTARIKA 4:2	ANGOLIJA : PARAGVAJ 1:0	ARGENTINA : SL. OBALA 2:1	MEHIKA : IRAN 3:1
ARGENTINA : EKVADOR 0:2	ANGOLIJA : PARAGVAJ 0:0	ARGENTINA : NIZOZEMSKA 0:1	ANGOLA : PORTUGALSKA 0:1
ARGENTINA : POLJSKA 1:0	ANGOLIJA : TRINIDAD 2:0	ARGENTINA : NIZOZEMSKA 6:0	MEHIKA : ANGOLA 0:0
ARGENTINA : KOSTARIKA 3:0	ARGENTINA : PARAGVAJ 1:0	ARGENTINA : NIZOZEMSKA : SL. OBALA 2:1	PORTUGALSKA : IRAN 2:0
ARGENTINA : NEMČIJA 0:3	ARGENTINA : ANGLIJA 2:2	ARGENTINA : NIZOZEMSKA : ARGENTINA 0:0	PORTUGALSKA : MEHIKA 2:1
ARGENTINA : POLJSKA 1:2	ARGENTINA : PARAGVAJ : TRINIDAD 2:0	SL. OBALA : ARGENTINA 3:2	IRAN : ANGOLA 1:1

HOTEL 2426

0 nogometu in statistiki

PRVI DEL

DOMINIK BENKOVIČ

TABELA 1

SKUPINA A	SKUPINA E
NEMČIJA : KOSTARIKA 4:2	ITALIJA : GANA 2:0
POLJSKA : EKVADOR 0:2	ZDA : ČEŠKA 0:3
NEMČIJA : POLJSKA 1:0	ITALIJA : ZDA 1:1
EKVADOR : KOSTARIKA 3:0	ČEŠKA : GANA 0:2
EKVADOR : NEMČIJA 0:3	ČEŠKA : ITALIJA 0:2
KOSTARIKA : POLJSKA 1:2	GANA : ZDA 2:1
SKUPINA B	SKUPINA F
ANGLIJA : PARAGVAJ 1:0	BRAZILIJA : HAVAJŠKA 1:0
TRINIDAD : ŠVEDSKA 0:0	AVSTRALIJA : JAPONSKA 3:1
ANGLIJA : TRINIDAD 2:0	BRAZILIJA : AVSTRALIJA 2:0
ŠVEDSKA : PARAGVAJ 1:0	JAPONSKA : HAVAJŠKA 0:0
ŠVEDSKA : ANGLIJA 2:2	JAPONSKA : BRAZILIJA 1:4
PARAGVAJ : TRINIDAD 2:0	HAVAJŠKA : AVSTRALIJA 2:2
SKUPINA C	SKUPINA G
ARGENTINA : SL. OBALA 2:1	FRANCIJA : ŠVICA 0:0
ŠČG : NIZOZEMSKA 0:1	KOREJA : TOGO 2:1
ARGENTINA : ŠČG 6:0	FRANCIJA : KOREJA 1:1
NIZOZEMSKA : SL. OBALA 2:1	TOGO : ŠVICA 0:2
NIZOZEMSKA : ARGENTINA 0:0	TOGO : FRANCIJA 0:2
SL. OBALA : ŠČG 3:2	ŠVICA : KOREJA 2:0
SKUPINA D	SKUPINA H
MEHIKA : IRAN 3:1	ŠPANIJA : UKRAJINA 4:0
ANGOLA : PORTUGALSKA 0:1	TUNIZIJA : SAJD. ARABIJA 2:2
MEHIKA : ANGOLA 0:0	ŠPANIJA : TUNIZIJA 3:1
PORTUGALSKA : IRAN 2:0	SAJD. ARABIJA : UKRAJINA 0:4
PORTUGALSKA : MEHIKA 2:1	SAJD. ARABIJA : ŠPANIJA 0:1
IRAN : ANGOLA 1:1	UKRAJINA : TUNIZIJA 1:0

➔ V prispevku bomo ob primerih s svetovnega prvenstva v nogometu spoznali osnovne pojme opisne statistike, ki so povezani z urejanjem in grafičnim prikazovanjem podatkov. Posebej nas bodo zanimale srednje vrednosti in mere razpršenosti ter normalna porazdelitev.

Za nami je letošnji najpomembnejši športni dogodek, svetovno prvenstvo v nogometu, ki je potekalo v Nemčiji. Čeprav se naša reprezentanca na to prvenstvo ni uvrstila, nas je velika večina v vročih junjskih in julijskih dneh z zanimanjem spremljala nogometne tekme. Kako tudi ne, saj pravijo, da se v času svetovnega prvenstva svet vrti okoli žoge! Nogomet je namreč najbolj priljubljen ekipni šport na svetu. Njegova filozofija je enostavna, za zmago je potrebno v skladu s pravili v nasprotnikovo mrežo spraviti vsaj en zadetek več, kot ga prejeti.

Ob polčasu in ob koncu tekme so nam vedno postregli tudi s *statistiko* nastopajočih ekip, kot je posest žoge v odstotkih, število prekrškov, število rumenih in rdečih kartonov, število kotov, število prepovedanih položajev itd. Posebej velja omeniti nevsakdanji dogodek, ki se je zgodil na četrtfinalni tekmi med Nemčijo in Argentino, ki se je po enajstmetrovkah končala z zmago domačinov. Pred streljanjem enajstmetrovk, na golovi črti je namreč nemški vratar Jens Lehmann v roki držal listek. Kaj je bilo na njem napisano, ne vemo. Z veliko gotovostjo lahko domnevamo, da je bila v ozadju statistika posameznih argentinskih nogometašev pri streljanju enajstmetrovk, torej, kateri kot gola igralec najpogosteje izbere. Lahko, da je tudi statistika odločilno prispevala k temu, da je Lehmann obranil dva strela in po-

peljal Nemčijo v naslednji krog. Kot vidimo, nikjer več ne gre brez statistike, tudi v nogometu ne.

A odgovorimo najprej na vprašanje, kaj je statistika. Beseda sama izvira iz latinskega izraza *statisticum collegium*, kar pomeni predavanje o državnih zadevah. Iz latinskega izraza izhajata italijanska beseda *statista*, kar pomeni državnik, in nemška beseda *Statistik*, ki v izvirniku pomeni analizo podatkov o državi. Danes pod to besedo razumemo tisto področje človekove dejavnosti, ki je povezano z zbiranjem, razvrščanjem, urejanjem in analiziranjem podatkov. Poleg tega statistika kot veda zajema tudi pripravo statističnih eksperimentov in statistično sklepanje ter se uporablja v vseh eksperimentalnih znanostih, tako naravoslovnih kot družboslovnih. Statistiko delimo na opisno in analitično. *Opisna statistika* obsega področje zbiranja, razvrščanja in urejanja podatkov, npr. zdravstvena statistika (zdravstveno stanje prebivalstva), državna statistika, športna statistika, medtem ko *analitična statistika* obsega predvsem področji vzorčenja in statističnega sklepanja. V prvem delu bomo spoznali osnovne pojme opisne statistike. Za uresničitev te naloge bomo uporabili podatke z minulega nogometnega prvenstva, ki so v tabeli 1.

■ Opisovanje statističnih podatkov

V statistiki imamo opravka z množico, ki jo imenujemo *statistična populacija*, na kateri opazujemo ali merimo neko merljivo količino. Rezultat tega opazovanja ali merjenja je *statistični podatek*. Statistično populacijo sestavljajo *statistične enote*. Statistične podatke delimo na *atributivne* ali *opisne*, katerih vrednosti opisujemo z besedami, in *numerične* ali *številске*, katerih vrednosti so realna števila. V nadaljevanju nas bodo zanimali samo številski podatki.

V našem primeru naj statistično populacijo sestavljajo vse nogometne tekme v predtekmovanju, posamezna tekma pa naj bo statistična enota. Na svetovnem prvenstvu je sodelovalo 32 reprezentanc, ki so bile razdeljene v osem skupin (A,B,C,D,E,F,G,H), po štiri ekipe v vsaki skupini. V vsaki skupini je bilo odigranih šest tekem, vsak je igral z vsakim, zato naša populacija šteje 48 enot. Merljiva količina naj bo število zadetkov, ki so bili doseženi na posamezni tekmi. Opravka imamo torej s številskimi podatki. Opisni podatek pa bi bil npr. skupina, v kateri je bila odigrana posamezna tekma. Tako je bila prva tekma

prvenstva – Nemčija proti Kostariki – odigrana v skupini A in na tej tekmi je bilo doseženih šest zadetkov. Iz tabele 1, kjer so rezultati vseh tekem, najprej po vrsti izpišimo število doseženih zadetkov:

- 6, 2, 1, 3, 3, 3, 1, 0, 2, 1, 4, 2, 3, 1, 6, 3,
- 0, 5, 4, 1, 0, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 4,
- 2, 0, 5, 4, 0, 3, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 1, 1.

Vidimo, da se število zadetkov od tekme do tekme spreminja in se giblje v razponu od nič do šest zadetkov. Številске podatke lahko vedno uredimo po velikosti od najmanjše do največje vrednosti. Tako dobimo *urejeni niz*, ki je v našem primeru:

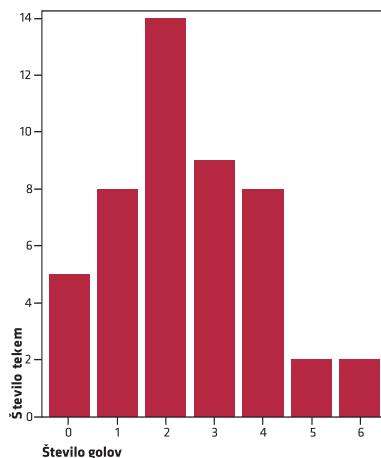
- 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2,
 - 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3,
 - 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6.
- (1)

Če je podatkov veliko in se ponavljajo, podatke raje predstavimo s *frekvenčno tabelo*, v kateri podamo le različne vrednosti in njihove frekvence (število ponovitev):

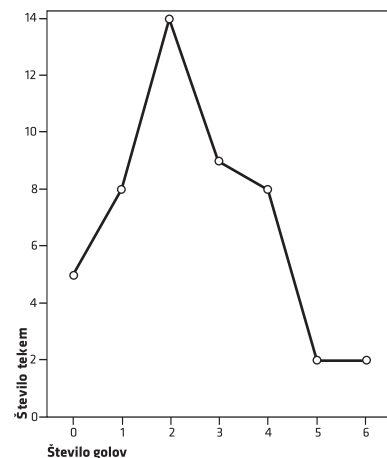
število zadetkov	0	1	2	3	4	5	6
število tekem	5	8	14	9	8	2	2

(2)

Tako smo dobili zelo pregleden zapis podatkov in prišli do *frekvenčne porazdelitve*, ki jo lahko lepo grafično ponazorimo s *stolpičnim diagramom* (slika 1) ali s *frekvenčnim poligonom* (slika 2).



Slika 1. Stolpični diagram



Slika 2. Frekvenčni poligon

→ Stolpični diagram je prikaz, kjer številske podatke ponazorimo s stolpci, katerih višina odraža frekvenco posameznega podatka. Pri tem vrednosti podatkov nanašamo na abscisno os, frekvence pa na ordinatno os. Pri frekvenčnem poligonu v koordinatnem sistemu določimo točke, ki označujejo vrednost podatka in njegovo frekvenco, ter te točke zaporedoma povežemo z daljicami.

■ Srednje vrednosti

Eden od statističnih pojmov, s katerim se v vsakodnevnem življenju pogosto srečujemo, so *povprečja* ali *srednje vrednosti* številskih podatkov. Pod pojmom srednja vrednost razumemo vrednost, ki pokaže osrednjo težnjo podatkov na neki populaciji. To je vrednost, okoli katere se na populaciji podatki zgostijo. Poznamo več meril za srednjo vrednost, najpomembnejše med njimi so *povprečje*, *mediana* in *modus*.

Najpreprostejša srednja vrednost je modus ali gostiščna vrednost. Modus je vrednost, ki v naboru podatkov nastopa najpogosteje. Iz frekvenčne porazdelitve (2) takoj vidimo, da je v našem primeru modus $M = 2$, saj se je kar 14 tekem končalo z dvema zadetkoma. V tem primeru modus lepo opiše osrednjo tendenco. Opozorimo, da modus ni nujno enolično določen, porazdelitev podatkov ima lahko več modusov. V primeru, da obstaja več modusov, je to znak, da vrednosti podatkov niso homogene. Zato modus ni najboljša mera za srednjo vrednost. Boljša srednja mera je mediana.

Za vpeljavo mediane se dogovorimo, da bomo vrednosti n podatkov (v našem primeru $n = 48$) v urejenem nizu (1) po vrsti označili z $x_1, x_2, \dots, x_n$, pri čemer je seveda x_1 najmanjša in x_n največja vrednost. Mediana ali središčna vrednost je tista vrednost, od katere je polovica podatkov iz urejenega niza večjih ali enakih, polovica pa od nje manjših ali enakih. Torej, če je podatkov liho mnogo $n = 2k + 1$, vzamemo za mediano vrednost sredinskega podatka v urejenem nizu $m = x_{k+1}$, če pa je podatkov sodo mnogo $n = 2k$, je mediana določena kot aritmetična sredina osrednjih dveh podatkov $m = (x_k + x_{k+1})/2$. Ker je v našem primeru $n = 48$, sta osrednja podatka $x_{24} = 2$ in $x_{25} = 2$ (v urejenem nizu (1) označena krepko), dobimo mediano $m = 2$. Tudi mediana lepo opiše osrednjo tendenco.

V veliko primerih je najboljša srednja mera pov-

prečje ali aritmetična sredina, ki je odvisna od vseh podatkov. Povprečje izračunamo tako, da vse vrednosti podatkov seštejemo in delimo z njihovim številom po formuli

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Če imamo podatke podane v obliki frekvenčne porazdelitve, potem povprečje lahko izračunamo tudi po formuli

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_k x_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k},$$

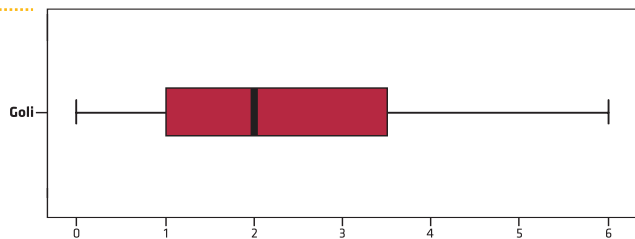
kjer je k število različnih vrednosti in f_i frekvenca posamezne vrednosti x_i . V našem primeru iz frekvenčne tabele (2) hitro izračunamo

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{48} = 2,44.$$

Na tekmi je torej v povprečju padlo 2,44 zadetkov. Sama vrednost nam sedaj ne pove veliko, ker je takšen izid tekme nemogoč. Kako to obrazložiti? Povprečna vrednost pove, kolikšno vrednost bi imel številski podatek na posamezni enoti populacije, če bi vsoto vseh vrednosti podatkov dejansko enakomerno razdelili na vse enote. Kot vidimo, se hitro zgodi, da take vrednosti v podatkih nimamo. Razlog za to je, da imamo opravka z diskretno porazdelitvijo, torej število zadetkov zavzame samo končno mnogo vrednosti 1, 2, 3, 4, 5, 6. Praviloma je povprečje najboljša mera za srednjo vrednost, ker pri izračunu povprečja upoštevamo vse vrednosti in njihove velikosti. Na povprečje pa imajo velik vpliv ekstremne vrednosti. Ravno zaradi te lastnosti je povprečje mogoče manj primerna srednja vrednost za tiste podatke, ki so zelo nehomogeni.

■ Mere variabilnosti

Pri analizi številskih podatkov nas poleg same srednje vrednosti zanima tudi, koliko so podatki razpršeni oziroma koliko variirajo okoli te srednje vrednosti. Spoznajmo tri najpomembnejše mere variabilnosti, variacijski razmik, medčetrtnski razmik in standardni odklon. *Variacijski razmik* je mera variabilnosti, ki jo izračunamo kot razliko med največjo in najmanjšo vrednostjo v urejenem nizu (1). Npr. variacijski razmik iz našega primera znaša 6. Va-



riacijski razmik je v splošnem groba in zelo nestabilna mera, ki jo določata samo dve skrajni vrednosti. Boljša mera variabilnosti je *medčetrtnski razmik* ali *kvartilni razmik*.

Definirajmo *prvi kvartil* q_1 kot tisto vrednost v urejenem nizu podatkov, od katere je manjših ali enakih četrtna podatkov, večjih ali enakih pa tri četrtnine podatkov. Drugi kvartil, ki je mediana, že poznamo. Podobno je *tretji kvartil* q_3 vrednost, od katere je manjših ali enakih tri četrtnine podatkov, večjih ali enakih pa ena četrtnina. *Medčetrtninski razmik* je razlika med tretjim in prvim kvartilom $q_3 - q_1$. Medčetrtninski razmik teoretično obsega 50% osrednjih vrednosti, 25% manjših in 25% večjih vrednosti je zunaj njega. Medčetrtninski razmik je zanesljivejša mera variabilnosti od variacijskega razmika, ker nanj ne vplivajo skrajne vrednosti. Prvi in tretji kvartil najlažje določimo tako, da urejeni niz razdelimo na dve polovici. Če je podatkov sodo mnogo $n = 2k$, potem vsak niz vsebuje k podatkov, če pa je podatkov liho mnogo $n = 2k + 1$, potem podvojimo osrednji podatek in po delitvi vsak niz vsebuje $k + 1$ podatkov. Preostane samo še, da pri vsakem tako dobljenem urejenem nizu izračunamo mediano po postopku, ki smo ga vpeljali zgoraj. V obravnavanem primeru imamo 48 podatkov, ki jih razdelimo na polovico

■ 0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2; (3)

■ 2,2,2,3,3,3,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,5,5,6,6. (4)

Iz (3) sledi, da je prvi kvartil $q_1 = (1 + 1)/2 = 1$ in iz (4) sledi, da je tretji kvartil $q_3 = (3 + 4)/2 = 3,5$. Zelo nazoren prikaz porazdelitve številskih podatkov je *škatla z brki* (glej sliko 3), s katero podamo informacijo o največjem in najmanjšem podatku, o mediani in kvartilih ter medčetrtnskem razmiku (brki segajo od najmanjšega do največjega podatka, škatla pokriva osrednjo polovico podatkov in z debelejšo črto je označena mediana).

Varianca ali disperzija, je definirana kot povprečje kvadratov odklonov od povprečja $\bar{x}$, zapisano s formulo

$$\blacksquare \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}. \quad (5)$$

Če imamo podatke podane v obliki frekvenčne porazdelitve, se disperzija izračuna po formuli

$$\blacksquare \quad \sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + f_k(x_k - \bar{x})^2}{f_1 + \cdots + f_k}, \quad (6)$$

kjer je k število različnih vrednosti in f_i frekvenca posamezne vrednosti x_i . Odkloni $x_k - \bar{x}$ imajo isto mersko enoto kot podatki, disperzija pa je v skladu s formulama (5) in (6) izražena v kvadratni merski enoti. Ker je ta podatek manj nazoren, uporabimo za mero variabilnosti kvadratni koren iz disperzije, ki ga označimo s σ in imenujemo *standardni odklon*. Zapomniti si velja, da je standardni odklon povprečen teoretični odklon od sredine populacije. V našem primeru disperzija, ki jo izračunamo s pomočjo frekvenčne tabele (2) in obrazca (6), znaša

- $\sigma^2 = \frac{1}{48}(5 \cdot 2,44^2 + 8 \cdot 1,44^2 + 14 \cdot 0,44^2 + 9 \cdot 0,56^2 + 8 \cdot 1,56^2 + 2 \cdot 2,56^2 + 2 \cdot 3,56^2) \doteq 2,29.$

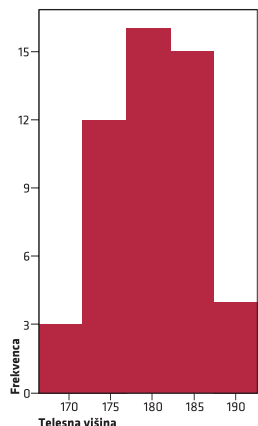
Zato je standardni odklon $\sigma = \sqrt{2,29} \doteq 1,5$. V povprečju je na tekmo padlo 2,44 zadetkov, povprečen odklon od te vrednosti pa je znašal 1,5 zadetka.

■ Zvezni podatki

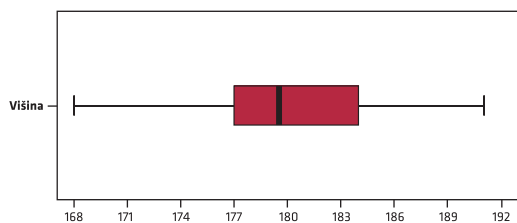
Do sedaj smo imeli opravka z diskretnimi podatki (število zadetkov), ki so zavzeli samo nekatere vrednosti. V vsakdanjem življenju srečamo veliko količin, katerih vrednosti se spreminjajo zvezno npr. telesna teža, telesna višina, čas vožnje, razdalja med kraji itd. Omenimo, da pri podatkih, ki se spreminjajo zvezno in zato zavzamejo veliko različnih vrednosti, te vrednosti združujemo v razrede. Število razredov je odvisno od narave pojava, ki ga proučujemo, in od števila enot v populaciji. Spodaj so podatki o telesni višini v centimetrih 50 naključno izbranih nogometašev na svetovnem prvenstvu:

- 183, 176, 168, 181, 190, 186, 174, 185, 187, 179,
- 177, 184, 185, 177, 182, 174, 180, 184, 179, 191,
- 185, 186, 175, 178, 181, 183, 176, 184, 179, 185, (7)
- 178, 177, 182, 179, 180, 186, 169, 180, 191, 179,
- 177, 178, 179, 184, 176, 171, 179, 183, 174, 175.

Kot zanimivost, prvih pet podatkov pripada no-



Slika 4. Histogram



Slika 5. Škatla z brki za telesno višino

→ gometášem Ronaldu (183 cm), Ronaldinhu (176 cm), Robertu Carlosu (168 cm), Torresu (181 cm) in prej omenjenemu vratarju Lehmannu (190 cm). Podatke bomo razdelili v 5 razredov in jih prikazali s frekvenčno tabelo:

višinski razred	število nogometašev
do 172	3
173–177	12
178–182	16
183–187	15
nad 188	4

in histogramom (slika 4).

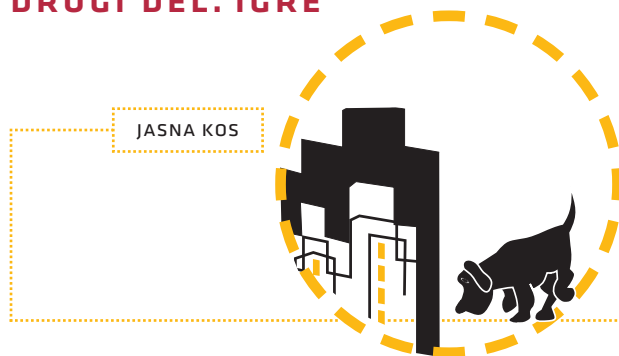
Histogram je prikaz s stolpci, pri katerih je neodvisna spremenljivka, na katero se nanašajo stolpci, številski in zvezna (v našem primeru višina). Za razliko od stolpičnega diagrama se pri histogramu stolpci zaradi zveznosti dotikajo. Bralec lahko sam preveri, da je povprečna višina nogometašev iz vzorca (7) 180,22 cm in standardni odklon 5,16 cm. Prvi kvartil, mediana in tretji kvartil pa po vrsti v centimetrih zavzamejo vrednosti 177, 179,5 in 184, kar je razvidno iz škatle z brki (slika 5).

■ Naslednjič

V analitični statistiki igrata najpomembnejšo vlogo ravno povprečje in standardni odklon. To sta namreč parametra, ki izhajata oziroma določata normalno porazdelitev. Normalno porazdelitev bomo podrobneje spoznali v drugem delu prispevka o nogometu in statistiki. ✖

Je lahko
matura iz
angleščine
navdih
matematikom
ali
matematični
komentarji
h knjigi
»Skrivnostni
primer
ali kdo je
umoril psa«

DRUGI DEL: IGRE



➔ Christopher, glavni junak knjige *“Skrivnostni primer ali kdo je umoril psa”* avtorja Marka Haddona, je avtist. Dogajanje okoli sebe zaznava tako, da vse podatke, ki jih neprestano dobivajo njegovi možgani, razvršča, spravlja v vzorce in zemljevide. Ko je podatkov preveč, se Christopher zapre v svoj svet. Intuicije nima razvite, ima pa visoko razvito sposobnost logičnega sklepanja. Zato rad rešuje uganke, predvsem tiste, ki se skrivajo v detektivskih zgodbah in matematiki.

“V televizijskem kvizu, ki ga vodi Monty Hall, tekmovallec stoji pred tremi zaprtimi vrati. Za enimi je skrita nagrada, avto, za drugima dvema pa stoji koza. Tekmovallec mora uganiti, za katerimi vrati se skriva avto. Ko se odloči in pokaže na ena od treh vrat, jih Monty Hall ne odpre, da bi tekmovallec videl, ali je zadel avto. Namesto tega odpre ena od drugih dvoje vrat in pokaže, da za njimi stoji koza (ker seveda ve, kaj je za vrati). Potem tekmovalcu reče, da si lahko še premisli in izbere druga vrata. Kolikšna je verjetnost, da je avto skrit za drugimi vrati? Enaka ali večja kot pri prvem poskusu? Naj se tekmovallec premisli ali ne?” [1, str. 84]

Opisana je resnična oddaja in vprašanje bralca v ameriški reviji *Parade* septembra 1990. Pravilni odgovor, ki pravi, da z verjetnostjo $2/3$ tekmovallec zadene avto, če se premisli in izbere druga vrata, je sprožil mnogo polemik. Intuicija nam narekuje drugačen odgovor:

“To pomeni, da nas človeški občutki lahko privedejo do napačnih odločitev. Ljudje se pri reševanju življenjskih problemov ponavadi zanašajo na občutke, v resnici pa je logika boljši način za iskanje pravih odločitev.” [1, str. 88]

Na internetu boste našli več različic igrice in lahko se “igrate prepričate”, da je rešitev naloge pravilna. Pogledajte na primer na stran

- <http://www.grand-illusions.com/simulator/montysim.htm>
- <http://www.mathsnet.net/asa2/2004/shodor/montynew/index.html>

Pogledali si bomo dokaza, ki nam jih v knjigi ponuja Christopher. Prvi je dokaz s kombinatoričnim drevesom.

Na sliki 1 so z rdečo barvo označeni izidi v primeru, ko smo ostali pri svoji prvotni odločitvi. Pogledjmo rdeče pravokotnike v spodnji vrstici. Vidimo, da le v eni izmed treh možnosti dobimo avto, v ostalih dveh kozo. Z rumeno barvo so označeni izidi, ko si premislimo in spremenimo svojo prvotno odločitev. Tokrat je izid obrnjen, v dveh izmed treh možnosti dobimo avto. To pomeni, da je verjetnost, da zadene avto, če spremenimo svojo začetno odločitev, enaka $2/3$.

Verjetnostni račun se obravnava v četrtem letniku srednje šole in morda mlajši bralci naslednjemu dokazu ne boste mogli slediti. Pri dokazovanju bomo uporabili pogojno verjetnost in naslednje oznake:

- Vrata označimo z X , Y in Z .
- V_Y naj označuje dogodek, da voznik odda odpre vrata Y in podobno za ostala vrata.
- Dogodek, da se za vrata X skriva avto, naj bo A_X in tako naprej.

Denimo, da smo v prvem krogu izbrali vrata X . Izračunajmo verjetnost, da v drugem krogu zadene avto, če smo svojo odločitev pri izbiri vrat spremenili. Možna sta dva poteka dogajanja:

(a) Voznik bo odprl vrata Y , mi izberemo v drugem krogu vrata Z . Avto zadene, če je ta za vrata Z .

(b) Voznik bo odprl vrata Z , mi izberemo v drugem krogu vrata Y . Avto zadene, če je ta za vrata Y . Zapišimo še v matematičnem jeziku:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(V_Y \cap A - Z) + P(V_Z \cap A_Y) \\ &= P(V_Y | A_Z) \cdot P(A_Z) + P(V_Z | A_Y) \cdot P(A_Y). \end{aligned} \quad (1)$$

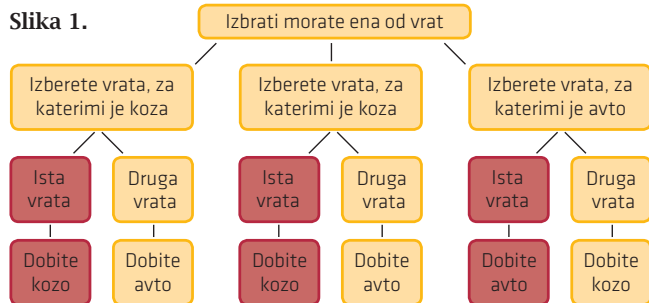
Sedaj si oglejmo le še verjetnosti posameznih dogodkov:

(a) Avto se z enakimi verjetnostmi skriva za vrata X , Y ali Z , zato velja:

$$P(A_X) = P(A_Y) = P(A_Z) = 1/3. \quad (2)$$

(b) V prvem krogu smo izbrali vrata X , zato teh voznik ne sme odpreti. Voznik ve, za katerimi vrati je





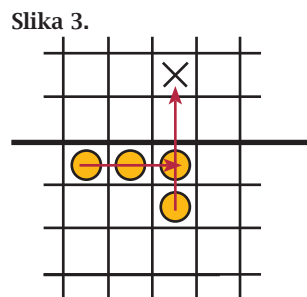
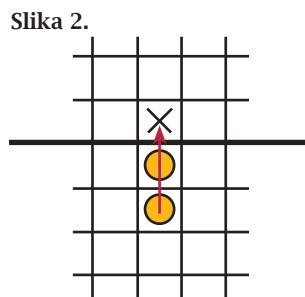
→ avto. Kolikšna je verjetnost, da bo odprla vrata Y, če je avto za vrati Z? Preprosto, verjetnost dogodka je 1, kar pomeni $P(V_Y | A_Z) = 1$. Seveda je verjetnost enaka tudi v obratnem primeru, ko je avto za vrati Y. Vstavimo izračunane verjetnosti v enačbo (1) in seveda dobimo enako rešitev kot pred tem z uporabo kombinatoričnega drevesa; verjetnost, da zadenemo avto, če svojo odločitev spremenimo, je $2/3$.

Predstavljajte si, da ste v televizijskem studiu, kamere so uprte v vas, vi pa se odločate katera vrata izbrati. Matematične izračune poznate, a kaj, ko vas tista "izgubljena" tretjina tako muči. Ne le denar, še vest trka na vaše srce. Vedno trdno stojite za svojimi odločitvami, tokrat pa, ko vas gleda na tisoče ljudi, bi "cincali"? Kaj storiti? Naj se premislim, naj ostanem pri svoji odločitvi? Naj bo kovanec tisti, ki odloča. Kolikšna je verjetnost, da zadenete avto, če bo kovanec odločil, kaj storiti? In še eno vprašanje. Kaj če stojimo pred desetimi vrati in je avto le za enimi? Izberemo vrata, voditelj odpre osem vrat, za katerimi meketajo koze. Kolikšna je verjetnost, da zadenemo avto, če se tokrat premislimo pri izbiri vrat?

Od vseh teh vprašanj in premišljevanja se moramo tudi mi umiriti. Lahko to storimo kot Christopher, z igrico?

Imenuje se vojščaki, v originalu jo Mark Haddon imenuje Conway's Soldiers. Igra se na poljubno veliki mreži polj, ki je podobna nepobarvani šahovnici. S črto je razdeljena na polovici. Nad črto so prazna polja, pod črto so črne ploščice – vojščaki. Vsako ploščico lahko premaknemo navpično ali vodoravno na prazno polje tako, da z njo preskočimo drugo črno ploščico. Ploščica, ki smo jo preskočili, sme biti le ena, se umakne iz igre. Namen igre je spraviti čim več črnih ploščic čim dlje čez štartno črto.

"... ampak je to vseeno dobra matematična igra, ki se jo da igrati brez papirja in svinčnika, kadar nočeš misliti na druge stvari, in si jo lahko narediš tako zapleteno, kolikor hočeš zaposliti možgane, ker si lahko nastaviš različno veliko tablo in igraš bolj ali manj zapletene poteze." [1, str. 191]



Lahko poskusite na pamet, vendar jo na začetku, da igro spoznate, nekajkrat preigrajte na računalniku:

■ <http://perso.wanadoo.fr/jean-paul.davalan/jeux/solitaires/sol/sol2-en.html>

Kolikšno je najmanjše število vojščakov in kakšen je njihov položaj, da lahko en vojščak stopi v prazno polje za štartno črto.

Na sliki 2 je s križcem označeno polje, na katerega naj pride vojščak. Primer je seveda preprost in odgovor bi lahko izstrelili kot iz topa: "Potrebujemo dva vojščaka."

Na sliki 3 smo narisali še primer, ko mora vojščak osvojiti prazno polje v drugi vrstici za štartno črto. To vojaško operacijo izvedejo štirje vojščaki v treh korakih. Označena sta prva dva koraka, tretji pa je identičen prejšnjemu primeru.

Za osvojitve praznega polja v tretji vrsti potrebujemo osem vojščakov. Bi znali narisati njihov začetni položaj? Koliko vojščakov bi potrebovali za osvojitve četrte ali pete vrste? Glede na začetek 2, 4, 8, bi sklepali, da bosta odgovora 16 in 32, vendar ni tako. Za osvojitve četrte vrste potrebujemo 20 vojščakov, pete vrste pa ne moremo osvojiti, pa naj bo vojska še tako številčna. To je dokazal angleški matematik John Horton Conway, rojen leta 1937, profesor na univerzi v Princetonu. Christopher si je v mislih narisal mrežo z 18 vojščaki v eni vrsti. Igral je na pamet. Vas zanima, koliko vojščakov je uspel premakniti nad štartno črto? Odgovor vas čaka v knjigi "Skrivnostni primer ali kdo je umoril psa".

■ Literatura

- [1] M. Haddon, *Skrivnostni primer ali kdo je umoril psa*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1982.
- [2] M. G. Fung, *Read This!* <http://www.maa.org/reviews/dogincident.html>,
- [3] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, vol. 4., Academic Press, New York, 1982. ✖

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

DARJA DELAČ FELDA

*S čim naj se ukvarjajo matematiki,
če ne z redom in razmerji?*

ARISTOTEL

*Geometrija ima dva zaklada: eden je
Pitagorov izrek, drugi delitev daljice v
notranjem in zunanem razmerju (zla-
tem rezu). Prvega lahko primerjamo z
zlatom, drugega z draguljem*

JOHANN KEPLER

Ob običajnih praznovanjih okroglih obletnic, radi pomislimo na zlato. In kje ga lahko najdemo v matematiki? Matematiki sicer radi trdimo, da je vse, s čimer se ukvarjamo, samo suho zlato in to že tisočletja dokazujemo in dokazujemo. Da pa bi tudi laiki verjeli, da se v matematiki res skriva zlato, smo organizatorji tekmovanja na *Gimnaziji Kočevje* pomislili na zlati rez, starodavno mistično izročilo, polno skrivnosti in lepote, ki ga najdemo skoraj povsod v naravi (v telesnih razmerjih ljudi in živali, celo v rastlinskem svetu). Matematiki in umetniki že tisočletja z veseljem iščemo uporabo zlatega reza in Fibonaccijevega zaporedja v naravi, v arhitekturi, glasbi, umetnosti, poeziji. Tako smo se odločili, da zlati rez postane simbol 50. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije.

Tekmovanje je otvorila ravnateljica Gimnazije Kočevje mag. Meta Kamšek, dijake in mentorje pa sta

pozdravila dr. Alenka Šverc, državna sekretarka na Ministrstvu za šolstvo in šport, in Janko Veber, župan Občine Kočevje.

Izjemno smo bili počaščeni, ker smo ob visokem jubileju matematičnih tekmovanj prav na Gimnaziji Kočevje pripravljali podelitev posebnega priznanja, ki ga je *DMFA Slovenije* namenilo akademiku prof. dr. Ivanu Vidavu, vzorniku, učitelju in mentorju številnim slovenskim matematikom ter ustanovitelju matematičnih tekmovanj srednješolcev Slovenije. Podelitev priznanja smo morali zaradi slabšega zdravja nagrajenca preložiti na majsko podelitev nagrad v Koloseju v Ljubljani.

Prisrčno smo se zahvalili tudi častnemu gostu profesorju Srečku Kovačiču za življenjsko delo – za dolgoletno poučevanje matematike in prenašanje znanja na mnoge generacije mladih iz kočevske in ribniške občine.

Upamo, da so tekmovalci in njihovi mentorji preživeli lep tekmovalni dan v Kočevju. Zahvaljujemo se dijakinjam in dijakom drugega letnika evropskega oddelka na Gimnaziji Kočevje, ki so vestno pripravili in izvedli popoldanske turistične ogleda Kočevja in Ribnice ter tako tekmovalcem in mentorjem približali lepote in znamenitosti obeh krajev.

Prav posebno pa bi se radi zahvalili vsem donatorjem in sponzorjem tekmovanja, ki so s svojimi prispevki omogočili, da smo tekmovanje izvedli na primernem nivoju.

ZLATA PRIZNANJA SO PREJELI

■ Prvi letnik

TOMO MARKOČIČ in PRIMOŽ VOVK (Srednja tehniška šola Koper), ŽIGA KOS, MATJAŽ PAYRITS, ANJA KOMATAR, MARKO BUNC, GREGOR ČEPIN, BLAŽ RUGELJ, IRENA KUJAR, GREGOR GRASELLI in NEJA BERLIČ (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), JURE GANTAR (Srednja šola Vena Pilon, Ajdovščina), PRIMOŽ PUŠNIK (ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava), MIHA MUNDA, DENIS ŠTIMULAK in KATJA BRENKO (I. gimnazija v Celju), JERNEJ REPAS (ŠC Slovenj Gradec – Gimnazija), MATJAŽ SLOVŠA (Gimnazija Kočevje), MATJAŽ ZUPAN (Gimnazija Kranj), FILIP AGATIČ (Škoifijska gimnazija Antona Martina Slomška, Maribor), ŠTEFAN MARKIČ (Gimnazija Želimlje), INES MURŠIČ



→ (Dvojezična srednja šola Lendava), LANA SEMEČNIK in ANDREJ KRŽIČ (ŠC Velenje - Splošna in strokovna gimnazija), BOJAN HITI (Gimnazija Jurija Vege, Idrija), BORIS MITROVIČ (ŠC Krško-Sevnica - Tehniška gimnazija Krško), IRMA ZIDAR (Srednja šola Josipa Jurčiča, Ivančna Gorica), TOMAŽ ČEGOVIČ in DEJAN BANOVIC (ŠC Novo mesto - Srednja elektro šola in tehniška gimnazija), KLEMEN PAVLIČ (ŠC Rudolfa Maistra Kamnik - Gimnazija), ALEKSANDER SIMONIČ (Gimnazija Ledina, Ljubljana) ter PETER ŠUŠNJAR (Škofjska klasična gimnazija, Ljubljana);

■ Drugi letnik

MAJA ALIF, TEJA TURK, JAN KEJŽAR in MARKO JOŠT (I. gimnazija v Celju), MIHA ČANČULA, JURE VOGRINC, ALJAŽ ZALAR, GAŠPER GOLOB, JAN BERČIČ, KATJA VOZEL, JAKA MUR in NADJA KOBOLD (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), MAJA POKLINEK (Gimnazija Ravne na Koroškem), ALEŠ SRNA (Gimnazija Kranj), VESNA TRATNIK in MATEJ DRAME (ŠC Celje - Splošna in strokovna gimnazija Lava), KATJA BLAGUS, DAVID KRALJIČ in JURE ČEH (ŠC Velenje - Splošna in strokovna gimnazija), BLAŽ PETERLIN (ŠC Novo mesto - Srednja elektro šola in tehniška gimnazija), NIKO COLNERIČ in BLAŽKA HUNSKI (Gimnazija Celje-Center), ALJAŽ GABER in METKA PIRIH (Gimnazija Škofja Loka), MARTIN HERIČKO (Prva gimnazija Maribor), PABLO MARTIN KOSTELEK (Gimnazija Novo mesto), ALEKSANDER BEŠIR (Gimnazija Piran) ter ŠPELA ZUPANČIČ (Gimnazija Kočevje);

■ Tretji letnik

TOM PRIMOŽIČ, JAKA GOGALA in MARKO ŠUŠTARŠIČ (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), PETER MURŠIČ in TOMO UMER (Gimnazija Koper), URBAN JEZERNIK in VESNA JAMNIŠEK (I. gimnazija v Celju), ALEKSANDER ĐURKA in ANJA NAGLIČ (Gimnazija Kranj), MARTIN HERGOUTH (ŠC Rudolfa Maistra Kamnik - Gimnazija), MOJCA PESKO in ANDREJA ŠEREG (Gimnazija Celje - Center), MARIO KURTJAK (Gimnazija Jožeta Plečnika, Ljubljana), MATEJA LAVTAR in JAN KOGOJ (Gimnazija Škofja Loka), SARA MUGERLI, MATEJA PIPAN in KATJA GABRIJELČIČ (ŠC Nova Gorica - Gimnazija), MITJA KAURAN (Prva gimnazija Maribor), JURE KOČJANČIČ in MARIANO ALEJANDRO KOSTELEK (Gimnazija Novo mesto), TADEJ STEPIŠNIK-PERDIH in ANJA DROZG (ŠC Celje - Splošna in strokovna gimnazija

Lava), TOMISLAV LUETIČ (Gimnazija Vič, Ljubljana), DANICA RAKIČ (II. gimnazija Maribor) ter GAŠPER ŠUBIC (Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana);

■ Četrty letnik

PETER LENDERO (ŠC Velenje - Splošna in strokovna gimnazija), GAŠPER ZADNIK (Gimnazija Vič, Ljubljana), ŽIGA LOKAR in ANŽE BABIČ (Gimnazija Kranj), MATJAŽ BERČIČ (Gimnazija Škofja Loka), BOŠTJAN KOVAČ, MATIJA VIDMAR, NINO BAŠIČ, DEJAN GOVC, VASJA SUSIČ, DEJAN ŠIRAJ, ZALA LENARČIČ, ŠPELA ŠPENKO in JERNEJ LALOŠ (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), NEJC ŠKOFIČ (Srednja šola Vena Pilon, Ajdovščina), DAVID GAJSER in MATJAŽ GOMILŠEK (II. gimnazija Maribor), TADEJ GROBELŠEK in MARKO ŠANTEJ (ŠC Celje - Splošna in strokovna gimnazija Lava), MATJAŽ KRNC (ŠC Slovenj Gradec - Gimnazija) ter TADEJ KODERMAN (ŠC Rudolfa Maistra, Kamnik - Gimnazija).





1. NAGRADA

■ Drugi letnik

- MAJA ALIF, I. gimnazija v Celju
- TEJA TURK, I. gimnazija v Celju

■ Četrti letnik

- PETER LENDERO, ŠC Velenje – Splošna in strokovna gimnazija
- GAŠPER ZADNIK, Gimnazija Vič, Ljubljana

2. NAGRADA

■ Drugi letnik

- MIHA ČANČULA, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MAJA POKLINEK, Gimnazija Ravne na Koroškem
- JURE VOGRINC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ALEŠ SRNA, Gimnazija Kranj

■ Tretji letnik

- TOM PRIMOŽIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

■ Četrti letnik

- ŽIGA LOKAR, Gimnazija Kranj

3. NAGRADA

■ Prvi letnik

- TOMO MARKOČIČ, Srednja tehniška šola Koper
- ŽIGA KOS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MATJAŽ PAYRITS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- JURE GANTAR, Srednja šola Vena Pilon, Ajdovščina
- ANJA KOMATAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- PRIMOŽ PUŠNIK, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava

■ Drugi letnik

- VESNA TRATNIK, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava
- ALJAŽ ZALAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

■ Tretji letnik

- PETER MURŠIČ, Gimnazija Koper
- URBAN JEZERNIK, I. gimnazija v Celju

■ Četrti letnik

- MATJAŽ BERČIČ, Gimnazija Škofja Loka
- BOŠTJAN KOVAČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- NEJC ŠKOFIČ, Srednja šola Vena Pilon, Ajdovščina
- MATIJA VIDMAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana





Met iz outa

JANEZ STRNAD

➔ V letu svetovnega prvenstva v nogometu so o nogometu za precej širok krog bralcev precej pisale tudi fizikalne revije. Delovanje delov igralčevega telesa na žogo in let žoge po zraku je mogoče opisati z enačbami fizike. Seveda bo marsikdo pripomnil, da je v nogometu še kaj več kot fizika.

V okviru fizike je mogoče pri nogometu zajeti različne pojave od časa, v katerem noga deluje na žogo, do *meta iz outa*. Met iz outa je dokaj pomemben sestavni del igre. Nogometaš meče iz outa, če je nasprotnik po nesreči ali namenoma žogo poslal čez stransko črto. Po pravilih mora biti pri metu z obema nogama na tleh na črti ali za njo in vreči žogo z obema rokama čez glavo. Met iz outa blizu kota je lahko skoraj tako nevaren kot strel iz kota. Po metu lahko spreten igralec žogo z nogo ali glavo preusmeri v vrata in doseže gol. Zares se to dogodi redkeje kot pri izvajanju kota.

Kako daleč lahko igralec pri metu iz outa vrže žogo? Pod kolikšnim kotom naj jo vrže, da bo dosegel največjo razdaljo? Ti vprašanji in podobna vprašanja sta raziskala Nicholas P. Linthorn in David J. Everett. Prvi je profesor za fiziko športa na univerzi Brunel v Angliji, drugi študent. Linthorn je o tem na kratko poročal v članku *Novi kot pri metu* v junijski številki *Physics World*, oba pa sta napisala daljši članek *Kot za največjo razdaljo pri nogometnem metu iz outa* v reviji *Sports Biomechanics*.

Pri metu iz outa gre za poševni met z višine, če vzamemo, da pade žoga na tla. Zato pričakujemo, da je metni kot pri največjem dometu manjši od običajnega najugodnejšega kota 45° . Na tekmi brez težav opazimo, da je kot precej manjši. Ali lahko to pojasnimo?

Linthorn in Everett sta se dogovorila z nogometašem, da je izvedel niz metov. Najprej je petkrat vrigel žogo pod kotom, ki se mu je zdel najugodnejši,

in nato še dvajsetkrat pri različnih kotih. Med meti je imel na voljo poljubno dolg čas za počitek. Metal je z zaletom do štirih korakov ali z mesta v brezvetrju na ravnem igrišču. Pri tem je pazil, da se je žoga kolikor mogoče malo vrtela. Raziskovalca sta mete posnela s televizijsko snemalno kamero in na posnetkih s posebnim programom otipala tirnice žoge. Tako sta ugotovila odvisnost začetne hitrosti žoge in njeno začetno višino v odvisnosti od metnega kota (slika 1).

Pri raziskovanju meta iz outa je treba upoštevati značilnosti zgradbe mišičja in okostja. Zaradi njih roki pospešita žogo do največje začetne hitrosti pri vodoravnem metu, z naraščajočim metnim kotom pa se začetna hitrost manjša. Poleg tega z naraščajočim metnim kotom začetna višina žoge nekoliko narašča. Oboje pojasni, zakaj je najugodnejši metni kot, približno 30° , precej manjši od običajnih 45° . Zračni upor, ki deluje na žogo, nekoliko skrajša domet, ne vpliva pa znatno na metni kot. Primerjava opazovanj z meti drugih nogometašev je pokazala, da si vsakdo najugodnejši metni kot izbere po svoje, da pa se kot v vsakem primeru od 30° razlikuje le za kako stopinjo. Izbira utegne biti povezana tudi s posebnostmi telesnega ustroja. Včasih je ugodno vreči žogo pod manjšim kotom od 30° , ker traja gibanje žoge krajši čas in lahko met nasprotnega igralca preseneti. Raziskovalca mislita, da ni vredno poskušati z navodili vplivati na izbiro najugodnejšega kota, do katere se nogometaš dokoplje zaradi svojih izkušenj. Učinkoviteje je razvijati mišice rok, da se podaljša domet zaradi povečane začetne hitrosti. Do podobnih sklepov so raziskovalci prišli tudi pri metu krogle, ki jo

sicer mečejo z eno roko in pri kateri zračni upor ne igra nobene vloge. Tudi pri metu krogle je metni kot precej manjši od 45° , se pa spreminja od metalca do metalca (od 28° do 36°).

Dodajmo nekaj preprostih računov. Pri poševnem metu gibanje telesa razstavimo na premo enakomerno gibanje v smeri vodoravne osi x in na enakomerno pospešeno gibanje z začetno hitrostjo v smeri navpično navzdol – os z usmerimo navpično navzgor:

$$\blacksquare \quad x = v_0 \cos \beta \cdot t, \quad z = v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 + z_0; \quad (1)$$

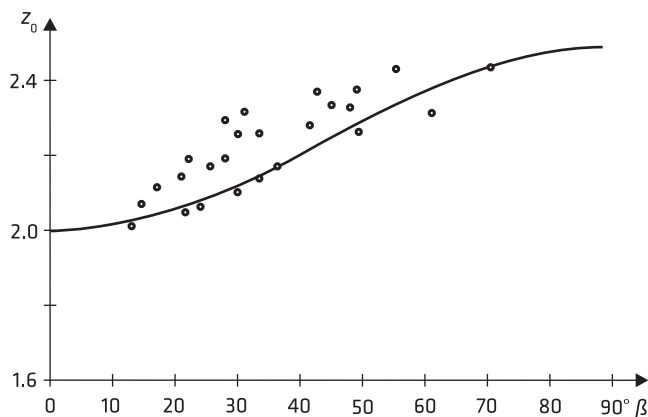
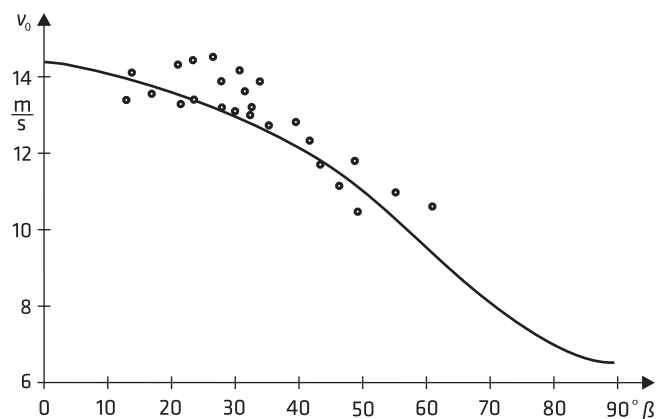
g je težni pospešek, β metni kot, v_0 začetna hitrost in z_0 začetna višina. Iz prve enačbe (1) izračunamo čas t in ga vstavimo v drugo, pa dobimo za tirnico središča žoge znano enačbo parabole: $z = \tan \beta \cdot x - gx^2/2(v_0^2 \cos^2 \beta) + z_0$. Domet je pozitivna rešitev te enačbe za $z = 0$:

$$\blacksquare \quad x = (v_0^2/g) \sin \beta \cos \beta \cdot \left(1 + \sqrt{1 + 2(gz_0/v_0^2)/\sin^2 \beta}\right). \quad (2)$$

Izmerjene podatke za začetno hitrost in začetno višino je mogoče približno opisati z enačbama

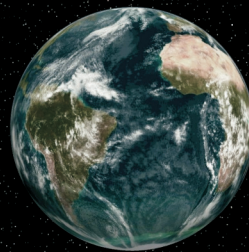
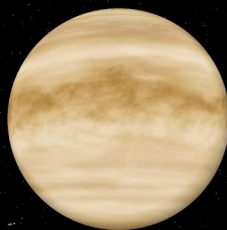
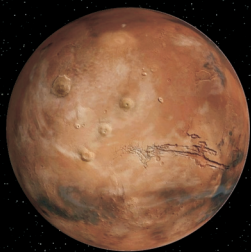
$$\blacksquare \quad v_0^2 = v_1^2(1 - a \sin^2 \beta) \quad \text{in} \\ \blacksquare \quad z_0 = z_1(1 + b \sin^2 \beta); \quad (3)$$

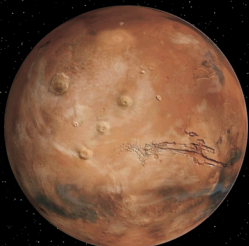
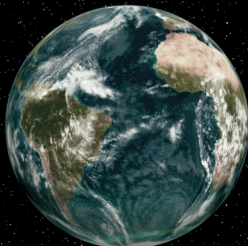
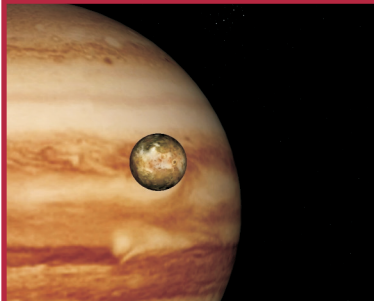
nadaljevanje na strani 18



Slika 1. Začetna hitrost (levo) in začetna višina v odvisnosti od metnega kota (desno). Merski podatki so iz omenjenega članka, krivulji pa kažeta približka $v_1 = 14,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \sqrt{1 - 0,79 \cdot \sin^2 \beta}$ in $z_1 = 2 \text{ m} \cdot (1 + 0,23 \cdot \sin^2 \beta)$.

Nagradna križanka



												AMER. ATOMSKI FIZIK NEM. RODU, NOBELOVEČ 1943 (OTTO)		POLKROŽNI MERILNI TRAK PRI KOTOMERU			
												SUHA ŽITNA STEBLA					
												NAJVEČJI SATURNOV SATELIT KOVINSKI ZVOK					
AVTOR MARKO BOKALIC	KRAJ PRI PREDMEJI NAD VIPAV. DOLINO	SEVERNO GERMAN. MODRI SKRAT	MILAN VIDMAR TOVARNA NA VIRU PRI DOMŽALAH		1. SOLMI- ZACIJSKI ZLOG	MAKED. PEVKA REDŽEPOVA	HRIBOVJE MED MORAVO IN TIMOKOM V SRBIJI		Z NJIM POGRNEMO MIZO	VISOK ANGLEŠKI PLEMIČ	PREŠERNOVA VAS GLAVNO MESTO JORDANIJE		SL. SLIKAR IN GRAFIK (MIHA)				
PRAVILNI OSMEREČ															NERAZ- CEPNOST UPAD ŠTEVILA ČLANOV		
USTVAR- JALNOST								AMERIŠKI IZUMITELJ (THOMAS ALVA)	DOLGO PROŽNO DELO OSREDNJA SL. REKA					PEVEC PESTNER			
NORVEŠKI SMUČAR KJUS					POPOLDAN. VETER Z MORJA KOST POD- LAHTNICA								? DANES, JUTRI	SNOV ZA PRSNE VSADKE VODLBINA V STENI			
ITAL. IGRALKA MIRANDA			DRŽAVA V SREDNJI AFRIKI BINE MATOH						NA TVS JE NA SPOREDU OB 19.00 IZDAJATELJ								
STRUNSKO GLASBILO, KI SODI MED TOLKALA				2	LATINSKO AM. PLES ZEMLJINA RAVNINA OK. SONCA					GRŠKI PISEC BASNI	POLNA LUNA DLAKA V KONJSKEM REPU						
ARMENSKI SKLADA- TELJ HAČA- TURJAN				NIKALNICA		SOČEN PLOD NEKD. KEN. TEKAČ (JULIUS)						EDVARD ŠLAJMER OZNAKA VELIKE BRITANIJE		DEBELA PALICA 1. ZLOG VODE			
				STARO PRISTA- NIŠČE NA SEVERU IZRAELA				ŠKODO- VANJE Z ZVLJAČ- NIMI DEJANJI									
				LOKALNO RAČUNAL- NIŠKO OMREŽJE				BIVŠI IT. SMUČAR (ALBERTO)						JUGOSL. FAŠIST. ORGANIZ. KOŽNE PROGE		GOSPO- DARSKI PROPAD HR. PEVKA (JOSIPA)	
				ŠPANSKI TEOLOG IN FILOZOF (FRANCISCO)				NEDELAVEN				1		JANEZ STRNAD			
				ŽIVILO V VEGETARJI. SENDVIČU JURJU SOUČEK				POKRIT KMEČKI PROSTOR KRAJI OB EKVATORJU									
												NOVO- ZELANDSKI PTIČ	UMOR	MAZILO	SEME VZKLJIE, ČE PADE NA PLODNA		
																HROŠČ Z RILCASTIM PODALJ- ŠKOM GLAVE	
																REKA NA BAVAR- SKEM ENAKI CRKI	
				TOVARNA V RIBNICI						POMANJ- KLJIVOST, MOTNJA NICK NOLTE							
				MOŠTVENI KRONO- METER V KOLE- SARSTVU													
				GLASO- VALNI PREDLOG				RDEČE- KOŽEC									

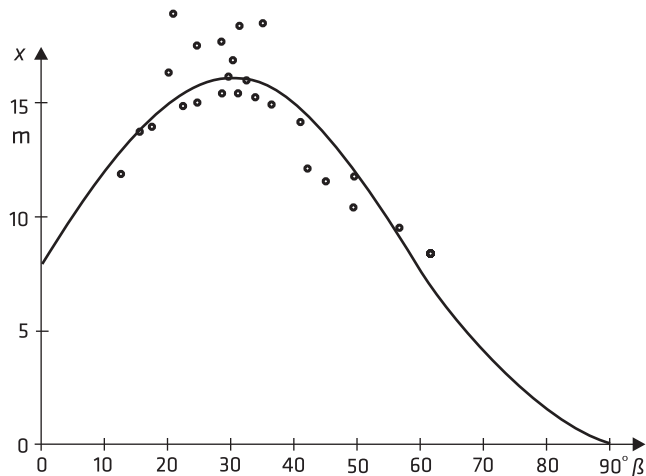
NAGRADNI RAZPIS

Črke iz označenih polj po vrsti zapišite na Preseku priloženo dopisnico, dodajte tudi svoje ime, priimek in naslov. Dopisnice pošljite na Presekov naslov (poština je že plačana) do 17. novembra 2006, ko bomo izžrebali pet reševalcev, ki bodo prejeli knjigo Marijana in Stane Prosen **Zvezdni miti in legende**.

z $v_0 = 14,5 \text{ m/s}$, $a = 0,79$, $z_0 = 2,0 \text{ m}$ in $b = 0,23$. Pri tem smo ubrali pot, ki se nekoliko razlikuje od poti v omenjenih člankih. Kvadratno odvisnost smo izbrali, ker domnevamo, da se tudi pri metu navzdol, torej pri negativnem kotu β , zmanjša začetna hitrost. V približku bi lahko sinus kota nadomestili z ločno merjenim kotom. V omenjenem članku so upoštevali popravek $(1 - a\beta)$.

Količini (3) vstavimo v enačbo (2) in dobimo domet v odvisnosti od metnega kota. Zračni upor smo upoštevali preprosto tako, da smo kvadrat začetne hitrosti relativno zmanjšali za 7% (slika 2). Kot vidimo po diagramu, se ta grobi približek kar dobro obnese. Predvsem pa je manj zapleten kot račun z dvema povezanima diferencialnima enačbama, ki sledita iz drugega Newtonovega zakona za gibanje žoge, če upoštevamo zračni upor. Največji napovedani domet je 16 m. Nogometaš pa je pri posameznih poskusnih metih dosegel tudi več, skoraj 19 m. Drugi nogometaši so metali še dlje. Nekateri od njih so na glas kot specialisti za met iz outa. Razdalja od mejne črte do sredine vrat meri okoli 25 m, tako da izurjen nogometaš lahko iz outa blizu kota vrže žogo skoraj do bližnje vratnice.

Omenili smo, da se pri poskusih žoga praviloma ni vrtela. Z vrtenjem žoge okoli vodoravne osi lahko podaljšamo ali skrajšamo domet. Vzemimo, da se žoga vrtila tako, da se zgornji del žoge zaradi vrtenja giblje v nasprotni smeri gibanja težišča žoge. Okoli



Slika 2. Domet pri metu iz outa v odvisnosti od metnega kota. Pri tem smo zračni upor upoštevali tako, da smo za v_0^2/g vstavili 20 m namesto 21,5 m.

žoge nastane vrtnec, v katerem se deli zraka nad žogo gibljejo v nasprotni smeri kot težišče žoge, pod njo pa v isti smeri. Glede na žogo imajo deli zraka nad njo večjo hitrost kot deli pod njo. Večji hitrosti ustreza manjši tlak. Razlika tlakov deluje navzgor, zaradi česar se podaljša domet. Če se žoga vrtila tako, da se zgornji del žoge zaradi vrtenja giblje v smeri gibanja težišča žoge, razlika tlakov deluje navzdol in skrajša domet. To je *Magnusov pojav*. Nogometaš pri metu iz outa doseže vrtenje žoge z največ tremi vrtljaji na sekundo. Račun je pokazal, da se zaradi tega domet podaljša ali skrajša za dober meter. ✖

1	S	K	O	Č	N	I	C	A
2	T	A	K	O	M	E	P	
3	O	T	O	N	E	L	A	
4	J	E	R	A	N	E	R	
5	A	N	D	R	E	O	S	A
6	M	A	R	I	E	T	T	

7	A	P	A	S	S	I	S	I
8	M	I	N	I	M	U	M	
9	A	S	I	M	P	T	O	T
10	S	T	O	E	A	L	I	N
11	L	O	B	R	C	A	L	
12	O	L	I	V	E	I	R	A
13	V	E	J	A	J	Ž	K	
14	N	Ž	K	N	A	O	R	S
15	I	N	E	S	A	V	D	I
16	K	O	L	E	N	H	I	M
17	S	I	L	N	I	C	E	

18	M	I	N	I	C	A	T	R	I	U	M	F	I	A	G	A	R
19	A	S	I	M	P	T	O	T	A	L	A	M	O	U	R	E	X
20	S	T	O	E	A	L	I	N	S	O	L	R	O	W	L	A	N
21	L	O	B	R	C	A	L	I	N	K	R	E	D	O	E	A	S
22	O	L	I	V	E	I	R	A	T	I	N	E	B	R	U	S	E
23	V	E	J	A	J	Ž	K	N	G	U	R	U	Š	T	A	L	E
24	N	Ž	K	N	A	O	R	S	K	I	R	E	N	A	Ž	O	L
25	I	N	E	S	A	V	D	I	H	U	P	O	G	N	I	T	E
26	K	O	L	E	N	H	I	M	E	S	T	I	L	A	K	I	H
27	S	I	L	N	I	C	E	A	L	A	R	I	K	K	U	B	A
28	T	A	J	I	T	E	V	D	A	E	T	A	A	D	A	M	

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 34/1

Za nagradno križanko iz prejšnje številke smo prejeli 15 pravih rešitev. Nagradno geslo se je glasilo Konec počitnic. Žreb je nagrade razdelil med naslednje nagrajence: KLEMEN MOŽINA, Prestranek; TINA RIHAR, Polhov Gradec; METKA ZUPANČIČ, Trbovlje.

Nagrajenci so razpisane nagrade prejeli po pošti.



MOJCA ČEPIČ

Svetlobni zajček?

➔ Kdo med nami se še ni igral s svetlobnimi zajčki? Vzameš ogledalce, se postaviš tako, da sončna svetloba pada na ogledalce, in že lahko oslepiš nekoga v daljavi. Svetlobno liso odbite svetlobe lahko ujameš na steno, z njo lahko "posvetiš" v senco. Če ima ogledalce več "zajčkarjev", si svetlobo lahko celo podajajo ali jo vsaj vodijo okoli vogalov.

zajčka ne vidiš, spremeni smer svetlobe iz baterijske svetilke, ki pada na zrcalo, dokler se zajček ne pojavi. Na ogledalo postavi šahovsko figurico, posveti nanjo in na zrcalo in si oglej svetlobno liso na steni. Kakšno obliko ima senca? Skiciraj svetlobne žarke in poskusi ugotoviti, zakaj ima senca takšno obliko. Pri ugotavljanju si lahko pomagaš tako, da preprečiš odboj svetlobe na zrcalu pred ali za figurico. V ta namen prekriješ del zrcala, na katerem želiš preprečiti odboj.

Če nimaš velikega zrcala, ki bi ga lahko položil na mizo, bo za silo dobro tudi kopalnično zrcalo na steni. Z baterijo posveti na viseče zrcalo in na stenah poišči zajčka. S koščkom plastelina ali lepilnim trakom pritrdi šahovsko figurico na zrcalo. Oglej si svetlobno liso na steni. Za zastiranje zrcala lahko pred ali za figurico nalepiš papir. ✖

■ Potrebujemo

- veliko ogledalo,
- majhno šahovsko figurico npr. konja (ali kaj podobnega, čemur lahko ločimo zgoraj in spodaj oziroma levo in desno stran),
- čim močnejšo baterijo (ali mizo, na katero posije sonce).



Kdor dobro opazuje, bo spoznal, da tudi mnoge druge površine odbijajo svetlobo dovolj intenzivno, da nastanejo zajčki. Poglejte kdaj ob sončnem popoldnevu v zastekljeno stolpnico. Pogosto vas zaslepi nehoteni zajček. Odpiranje oddaljenih oken zaznamo večkrat kot kratek svetlobni poblink, ko nas je zajček oplazil. Steklene površine sicer ne odbijajo svetlobe tako dobro kot zrcala, a dovolj, da zaznamo odboje ob intenzivnih osvetlitvah.

Tokratni predlog preizkušanja za radovedne pa ponuja posebne- ga zajčka.

Poišči čim večje ogledalo. Po diagonalni naj ima zrcalo vsaj dvajset centimetrov. Zrcalo položi na vodoravno mizo in nanj posveti z baterijo. Poišči zajčka na steni. Če

Ali teče, ali je trdno?

ODGOVOR NALOGE

MOJCA ČEPIČ



Slika 1.
Mešanica
škrobne moke in
vode.

Ali so vas presenetile lastnosti mešanice škrobne moke in vode? Verjetno ste ugotovili, da je mešanico "lahko" mešati počasi, a izjemno težko mešati "hitro". Ugotovili ste, da je mogoče mešanico valjati med prsti kot košček plastelina, a če jo spustite, odteče z roke. Ugotovili ste, da mešanica sicer teče v curku, a ko hitrost "tekočine" v curku naraste, se curek začne obnašati čudno. Začne se trgati in lomiti. Skratka, mešanica se obnaša kot tekočina z majhno viskoznostjo pri majhnih hitrostih pretakanja in kot tekočina z veliko viskoznostjo pri velikih hitrostih pretakanja.

Namenimo nekaj besed takim neobičajnim tekočinam, katerih predstavnike lahko najdemo v kuhinji ali kopalnici. V eni od prihodnjih števil bomo opisali nekaj poskusov z njimi in preprosto razlago, zakaj se obnašajo, kakor se. Tokrat njihove posebne lastnosti le naštejmo.

■ *Snovi, ki se jim viskoznost pri velikih hitrostih poveča*

Mešanica škrobne moke in vode je ena takih. Izkušnje s to tekočino že imate.

■ *Snovi, ki se jim viskoznost pri velikih hitrostih zmanjša*

Takšna je majoneza. V majonezo v kozarcu lahko postavimo žlico in bo ostala na svojem mestu. Iz majoneze lahko oblikujemo kupčke, ki ne bodo stekli. Lahko bi rekli, da je majoneza trdna. A z žlico lahko majonezo brez problemov pomešamo.

■ *Tekočine, ki se jim viskoznost spremeni pod tlakom*
Enostavno je zgraditi stolp iz brivske pene. Ne bo se porušil. Lahko ga tudi nekoliko stisnemo in se bo vr-

nil v začetno obliko. A če ga stisnemo preveč, nam bo stekel med prsti.

■ *Sipke snovi*

V vsakem gospodinjstvu lahko najdemo sipke snovi, shranjene v kozarcih ali vrečkah: moko, sladkor, riž, fižol. Lahko jih pretresamo in presipamo. Zato se včasih delamo, da so podobne so tekočinam, da predstavljajo model za tekočine, a vendar se od tekočin tudi močno razlikujejo.

Ker ste se med poletjem bolj ukvarjali s predstavni-
co prve od naštetih snovi, naj opišem le poenostavljeno razlago spremenljive viskoznosti te tekočine.

Sestavino mešanice si lahko predstavljamo kot majhne kroglice (škrobna zrna), ki jih obdaja voda. Dokler so hitrosti pretakanja mešanice majhne, se ob premikanju škrobnih zrn vodna plast ne odtrga od površine zrn. Voda deluje kot neke vrste mazivo med kroglicami in mešanico je mogoče mešati kot vodo. Ko pa se hitrost mešanja poveča, se vodna plast od zrn odtrga, med mešanjem ali pretakanjem pa zrnca drsijo med seboj. Ker je odsotno mazivo v obliki vodne plasti, je trenje med zrnci precej večje.

Najbolj presenetljivo je zato obnašanje te mešanice, če vanjo zelo hitro poskušamo potisniti žličko ali pa z žličko po njej potrkamo. Površina mešanice se obnaša skoraj kot elastična membrana.

■ **Literatura**

■ Povzeto po: P. Habdas, E. R. Weeks, D. G. Lynn, »*Squishy Materials*«, The Physics Teacher 44, str. 276-279 (2006). ✕



Slika 2. Če mešanico zajamemo z žlico in pustimo, da iz žlice odteče, je curek izrazito neenakomeren in neraven.



Slika 3. Če žlico po mešanici sunkovito premaknemo, se za njo naredijo luknje do dna posode. Stene lukenj imajo ostre robove, ki se začno kmalu zlivati.



❖ **Slika 4a.** Mešanico lahko med rokami oblikujemo v kepo, če jo gnetemo dovolj hitro.

❖ **Slika 4b.** Ko nehamo gnesti, se trdna kepa skoraj v trenutku razlije....

❖ **Slika 4 c.** ... in odteče med prsti.



44. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije

CIRIL DOMINKO

➔ V šolskem letu 2005/06 je na prvi stopnji – **regijskem tekmovanju** – sodelovalo 695 dijakov iz 50 srednjih šol. Tekmovanje je bilo izvedeno 10. marca 2006 v treh tekmovalnih skupinah istočasno na sedmih srednjih šolah iz posameznih regij: Gimnaziji Bežigrad, Ljubljana, ŠC Rudolfa Maistra Kamnik – Gimnaziji, ŠC Ptuj – Poklicni in tehniški elektro šoli, Gimnaziji Celje – Center, Gimnaziji Jesenice, ŠC Nova Gorica – Gimnaziji ter na Gimnaziji in ekonomski srednji šoli Trbovlje. Tekmovalne komisije, v katerih je sodelovalo 72 učiteljev fizike, so popravile izdelke in predložile tekmovalce za državno tekmovanje iz posamezne regije. Skupno je bilo za državno tekmovanje predlaganih 127 tekmovalcev, dva pa sta se na državno tekmovanje uvrstila neposredno zaradi lanskih rezultatov na mednarodni fizikalni olimpijadi. Na tekmovanju se podeljujejo tudi bronasta priznanja. Prejelo jih je 234 tekmovalcev.

Državno tekmovanje je bilo 1. aprila 2006 na Gimnaziji Litija. V I. skupini je tekmovalo 63, v II. in III. skupini pa po 32 tekmovalcev. Na tekmovanje so se uvrstili dijaki iz 35 srednjih šol. Tekmovanje je izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa so krili *DMFA Slovenije, Ministrstvo za šolstvo in šport* ter soorganizator državnega tekmovanja – *Gimnazija Litija*. Zaradi dobre organizacije tekmovanja smo tekmovalna komisija in mentorji tekmovalcev pohvalili soorganizatorje. Pri izvedbi tekmovanja in ocenjevanju izdelkov so, tako kot že mnogo let, pomagali študentje in sodelavci FMF, Oddelek za fiziko ter sodelavci Inštituta Jožefa Stefana. Na tekmovanju je komisija razglasila pet prvih nagrad, tri druge, 13 tretjih in 51 pohval. Zlato priznanje je prejelo 21 tekmovalcev. Svečana podelitev nagrad in zlatih priznanj je bila 18. maja 2006 na prireditvi v Koloseju v Ljubljani.





Podeljene nagrade, zlata priznanja in pohvale:

■ Skupina I

1. NAGRADA IN ZLATO PRIZNANJE

- MATJAŽ PAYRITS, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

2. NAGRADA

Ni bila podeljena.

3. NAGRADA IN ZLATO PRIZNANJE

- MIHA ČANČULA, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- DAVID KRALJIČ, ŠC Velenje – Splošna in strokovna gimnazija
- ANŽE STARIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MATEJ JEREB, TŠC Kranj

POHVALA

- ANDRAŽ OBLAK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ALEŠ SRNA, Gimnazija Kranj
- IGOR BERONJA, ŠC Novo mesto – Srednja elektro šola in tehniška gimnazija
- BOJAN HITI, Gimnazija Jurija Vege, Idrija
- PETER NAGLIČ, Gimnazija Celje – Center
- TINE CURK, II. gimnazija Maribor
- JURE SENČAR, Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer
- ALJAŽ ZALAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- JURIJ ŽNIDERŠIČ, Gimnazija Brežice
- MATIJA BRUMAT, TŠC Nova Gorica – Tehniška gimnazija
- ALJAŽ GABER, Gimnazija Škofja Loka
- JURE VOGRINC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- LUKA PIRNAT, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana
- TADEJA FORJANIČ, Gimnazija Murska Sobota
- MATEJ KRAJNC, I. gimnazija Celje
- BOŠTJAN MAVRIČ, Škofijska gimnazija Vipava
- PRIMOŽ PUŠNIK, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava
- KATJA VOZEL, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MARTIN HERGOUTH, ŠC Rudolfa Maistra Kamnik – Gimnazija
- LUKA JERAJ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- JURE APLINC, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava

■ Skupina III



- ALEŠ BIZJAK, ŠC Krško-Sevnica – Tehniška gimnazija Krško
- JURE RESMAN, Gimnazija Kranj
- PETER FERJANČIČ, Gimnazija Jurija Vege, Idrija
- GAŠPER GOLOB, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MAJA POKLINEK, Gimnazija Ravne na Koroškem

■ Skupina II

1. NAGRADA IN ZLATO PRIZNANJE

- MATEJ HUŠ, I. gimnazija Celje

2. NAGRADA

Ni bila podeljena.

3. NAGRADA IN ZLATO PRIZNANJE

- JAN BITENC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MARJAN MAČEK, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- TIMOTEJ LAZAR, II. gimnazija Maribor
- NEJC RAMOVŠ, ŠC Novo mesto – Srednja elektro šola in tehniška gimnazija

POHVALA

- JAN KOGOJ, Gimnazija Škofja Loka
- ŽIGA OSOLIN, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- TADEJ STEPIŠNIK-PERDIH, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava
- TOMAŽ KOMPARA, TŠC Nova Gorica – Tehniška gimnazija
- JAKA SOČAN, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MATEJ KEBER, TŠC Nova Gorica – Tehniška gimnazija
- MARIO VUKOTIČ, Gimnazija Kranj
- BOR DEBELAK, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana
- BOJAN ŠAVRIČ, Gimnazija Brežice
- NEJC KOZAR, II. gimnazija Maribor
- JAKA GOGALA, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ALJAŽ LAZAR, Gimnazija Litija
- ELVIS SLADIČ, Srednja tehniška šola Koper

1. NAGRADA IN ZLATO PRIZNANJE

- GAŠPER ZADNIK, Gimnazija Vič, Ljubljana
- MATJAŽ GOMILŠEK, II. gimnazija Maribor
- MATIJA VIDMAR, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

2. NAGRADA IN ZLATO PRIZNANJE

- MATJAŽ BERČIČ, Gimnazija Škofja Loka
- VASJA SUSIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- AMBROŽ KREGAR, ŠC Rudolfa Maistra Kamnik – Gimnazija

3. NAGRADA IN ZLATO PRIZNANJE

- GREGOR HOSTNIK, Gimnazija Litija
- ŽIGA PAVLIN, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- MATJAŽ KRNC, ŠC Slovenj Gradec – Gimnazija
- JOŽE MUŽERLIN, Gimnazija Celje – Center
- ZALA LENARČIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

POHVALA

- JERNEJ LALOŠ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- SAMO ŠTAJNER, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- DAVID SEČ, Gimnazija Kranj
- NINO BAŠIČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- PRIMOŽ KOŽELJ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- TADEJ GROBELŠEK, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava
- JURE BERIČIČ, Gimnazija Jurija Vege, Idrija
- BOŠTJAN KOVAČ, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- UROŠ ORTHABER, II. gimnazija Maribor
- SIMON JAZBEC, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
- ANDREJ DEVETAK, II. gimnazija Maribor
- SEBASTJAN ŠLAJPAH, SŠ Josipa Jurčiča, Ivančna Gorica

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 12. maja 2006 na Inštitutu Jožefa Stefana. Povabljenih je bilo 14 najboljših tekmovalcev iz III. skupine, pri čemer pa sta bila Matija Vidmar z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana in Matjaž Gomilšek iz II. gimnazije Maribor neposredno uvrščena v letošnjo olimpijsko ekipo zaradi doseženega uspeha na lanski fizikalni olimpijadi. Tako so se jima po izbirnem tekmovanju pridružili v ekipo za letošnjo 37. mednarodno fizikalno olimpijado, ki je bila od 8. do 17. julija v Singapurju, še: Gašper Zadnik, Gimnazija Vič, Ljubljana ter Žiga Pavlin in Vasja Susič, oba z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana. ✖



Pluton je izgubil status planeta

ANDREJ GUŠTIN

➤ Na 26. generalnem zasedanju Mednarodne astronomske unije – IAU (International Astronomical Union) v Pragi so po burni razpravi 24. avgusta 2006 sprejeli novo definicijo planetov. Posledica tega je izključitev Plutona iz družine planetov in njegova umestitev v tako imenovane pritlikave planete. IAU je krovna organizacija astronomov, ki združuje nekaj manj kot 9000 strokovnjakov iz 75 držav, in je zadolžena tudi za astronomske definicije.

Nova definicija planeta in drugih teles v Osončju se glasi:

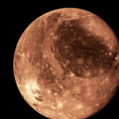
1. Planet je vesoljsko telo, ki kroži okoli Sonca, ki ima dovolj veliko maso, da z lastno težo doseže hidrostatsko ravnovesje oziroma (skoraj) okroglo obliko in JE počistilo okolico svoje orbite.
2. Pritlikavi planet je vesoljsko telo, ki kroži okoli Sonca, ki ima dovolj veliko maso, da z lastno težo doseže hidrostatsko ravnovesje oziroma (skoraj) okroglo obliko in NI počistilo okolico svoje orbite.
3. Vsa ostala telesa, ki krožijo okoli Sonca, se skupinsko imenujejo "mala telesa v Osončju".

Po teh novih definicijah med planete v Osončju spadajo Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran in Neptun. V kategorijo pritlikavih planetov, ki je strogo ločena od planetov, gotovo spada Pluton, čeprav razmejitev z drugimi kategorijami še ni dokončno določena. Med mala telesa Osončja se uvršča večina asteroidov, kometi, večina teles Kuiperjevega pasu in druga manjša telesa. Seveda so kot posebna kategorija ostali sateliti oziroma lune, ki krožijo okoli planetov.

Marsikdo se sprašuje, kaj se pravzaprav gredo ti

astronomi, da tebi nič meni nič s spiska črtajo planet, ki ga poznamo že 75 let. Toda debata o tem se ni začela na kongresu IAU, temveč že vrsto let prej. Dodatni pospešek ji je dalo lanskoletno odkritje objekta 2003 UB313, telesa, ki okoli Sonca kroži daleč za Plutonom, a je od njega nekoliko večje. Na kratko bomo poskušali pojasniti, od kod nezadovoljstvo večine astronomov s staro definicijo planeta, ki se je glasila: Planet je telo, ki ima maso med 13 mas Jupitra in je večje od Plutona ter kroži neposredno okoli zvezd. Največja masa je določena teoretično, saj naj bi pri masivnejših telesih vsaj kratek čas potekale jedrske reakcije, torej gre za tako imenovane zvezde rjave pritlikavke, v jedrih planetov pa naj reakcij ne bi bilo. Spodnja meja za velikost planetov pa je postavljena zgodovinsko, torej z najmanjšim znanim planetom v Osončju. Toda novoodkriti objekt 2003 UB313, ki so ga neuradno imenovali Xena in od septembra naprej nosi uradno ime Erida po grški boginji prepira, je večji od Plutona in bi ga morali po stari definiciji imeti za deseti planet.

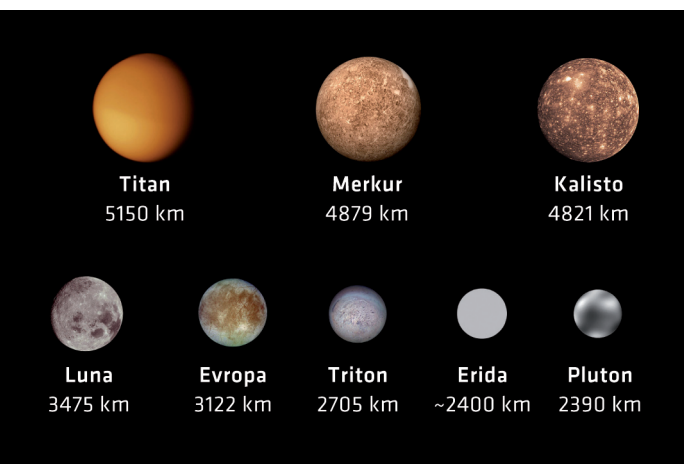
Ko je leta 1930 Američan Clyde Tombaugh odkril Pluton, so astronomi zelo slabo poznali razmere v zunanjih predelih Osončja. Pred približno desetimi leti pa so tam začeli odkrivati številna telesa in potrdili, da Pluton kroži v roju teles tako imenovanega Kuiperjevega pasu. Odkritje Kuiperjevega pasu, majhnost, razpotegnjena in, glede na ravnino kroženja drugih planetov, znatno nagnjena orbita Plutona je marsikaterga planetologa prepričala, da Plutona pravzaprav ne bi smeli uvrščati med planete. Ob odkritju Eride je postalo očitno, da Pluton niti ni največje telo Kuiperjevega pasu. Danes še ne poznamo vseh teles v tistih daljnih področjih Osončja. Kaj lahko se namreč tam skrivajo še večja telesa in pojavila se je bojazen, da bo ob novih odkritjih družina planetov narasla čez vsako razumno mejo. Astronomska skupnost se je hkrati tudi zavedla, da je obstoječa definicija planetov slaba.



Ganymed
5262 km



Io
3643 km



Slika 1. Primerjava velikosti največjih lun v Osončju s Plutonom in 2003 UB313 – Erido. Pluton je po novem uvrščen med pritlikave planete in so mu dodelili številko 134340 v katalogu asteroidov. Slike: NASA.

V znanosti je pogosto tako, da je ob novih odkritjih potrebno stare pojme zavreči in jih nadomestiti z novimi. Če smo do nedavna verjeli, da je Pluton samostojni planet, tega zaradi obstoja množice teles v Kuiperjevem pasu, ki mu tudi sam pripada, ne moremo več trditi. Nekaj podobnega se je v zgodovini astronomije že zgodilo. Ko so bili odkriti prvi asteroidi, so jih poimenovali planete. Ko pa so se vrstila nova in nova odkritja, se je izkazalo, da gre za od planetov ločeno družino teles. Tako jih danes uradno imenujemo mali planeti oziroma asteroidi. S tem, ko se bogatijo naša spoznanja o Osončju, se spreminja tudi pogled in definicije posameznih objektov. Nova definicija planetov je že požela nekaj kritik. Astronomi namreč v zadnjih letih odkrivajo vse več planetov okoli drugih zvezd, ki pa jih najnovejša definicija še ne zajema.

Nekoliko več razlage gotovo potrebuje pojem "čiščenje orbit" v novi definiciji. Planeti naj bi nastali z združevanjem manjših teles v porajajočem se Osončju pred 4,6 milijardami let. Bolj kot so ti protoplaneti rasli, več teles so na svoji poti okoli Sonca polovili. Zemlja je, denimo, tako skoraj povsem pometla svojo orbito, čeprav je nekaj manjših asteroidov še vedno prisotnih. Ti so verjetno k nam prileteli iz glavnega asteroidnega pasu, kjer se za razliko ni ustvaril kak večji planet in je ta pas gosto posejan z milijoni manjših in nekoliko večjih teles. Tudi v področju Plutona je roj manjših teles, zato ga po novem moramo uvrstiti med pritlikave planete, saj svoje orbite ni počistil. ✖

Svetlobno onesnaženje

DRUGI DEL

ANDREJ GUŠTIN

➔ Umetna svetloba, ki nam ponoči kvari pogled na zvezdno nebo, je velik ekološki in ekonomski problem. V Sloveniji že skoraj desetletje poteka resna razprava o sprejemu primerne zakonske uredbe, s katero naj bi rešili težave s svetlobnim onesnaženjem. Trenutno ostaja to področje še neurejeno, čeprav je s stališča strokovnjakov, astronomov, biologov in ekologov, nujno potrebnih nekaj bistvenih ukrepov:

- po vsej Sloveniji bi morali v javni razsvetljavi uporabljati le ekološke svetilke, ki svetijo samo v tla,
- zmanjšanje moči žarnic v javni razsvetljavi, kar je v skladu s Kjotskim protokolom o smotrni rabi energije, ki ga je podpisala tudi Republika Slovenija,
- izklapljanje dela svetilk po določeni uri,
- prepoved osvetljevanja zgradb in drugih objektov ter reklamnih panojev z reflektorji, ki so usmerjeni v nebo.

S temi in še nekaterimi drugimi ukrepi bi lahko prihranili mnogo električne energije, a predvsem bi bilo nočno nebo temnejše in bi bil pogled v vesoljska prostranstva manj moten. ➔



■ Vaja – Izmerimo svetlobno onesnaženje v svojem kraju

Z meritvami svetlobnega onesnaženja v Sloveniji se ukvarjajo predvsem astronomi. Z enostavnim opazovanjem, ki ne zahteva posebnih pripomočkov, jim lahko pomagate tudi vi. Meritev temelji na določitvi mejne magnitude – ocene najšibkejših zvezd, ki jih s prostim očesom še lahko vidite s svojega opazovališča. To je hkrati tudi lepa astronomska vaja, pri kateri se naučite orientacije po nebu, spoznate ozvezdja, izboljšujete opazovalne spretnosti, spremljate Lunine mene in se naučite natančnega zapisovanja opazovanj. Tovrstna opazovanja lahko izvajate v okviru šolskih programov ali samostojno, skupinsko ali posamič. Vaše meritve bomo zbirali in naredili karto svetlobnega onesnaženja Slovenije. Ta bo tem popolnejša, čim več opazovalcev iz čim več krajev bo sodelovalo v akciji.

Potrebščine: vrtljiva zvezdna karta, karte Oriona pri različnih mejnih magnitudah iz Preseka, opazovalni obrazec, zastrta žepna svetilka, pisalo.

■ Kdaj opazujemo ozvezdje Orion?

Oriona na nebu ni težko najti. S svojo značilno štirikotno obliko, s svetlima zvezdama Betelgezo in Rigelom, ki ležita na nasprotnih ogliščih, ter nekoliko šibkejšimi zvezdami v pasu in meču mitološkega lovca, je to eno najlepših in najlažje razpoznavnih ozvezdij zimskega neba. V večernih urah je viden od začetka novembra, ko vzide ob 22. uri, do sredine aprila, ko zaide okrog 22. ure (poletni čas). V tem obdobju je tudi v ugodni legi za našo vajo, saj ga lahko opazujemo v zgodnjih večernih urah. Kdor ni najbolj vešč orientacije po nebu, naj si pri iskanju Oriona pomaga z vrtljivo zvezdno karto. Z njo bo lahko tudi določil čas ko bo to ozvezdje vzšlo.

■ Naravna in umetna svetloba neba

Če hočemo določiti svetlobno onesnaženje neba, potem moramo vajo izvajati tedaj, ko na nebu ni Lune. Svetloba Zemljine spremljevalke razsvetljuje nebo, kar je še posebej opazno ob sčipu. Ugodne noči za izvedbo vaje določimo s pomočjo koledarja oziroma efemerid, tako da poiščemo dneve okoli mlaja oziroma dneve, ko nad obzorjem ni Lune.

■ A. Priprava na opazovanje

Pred opazovanjem pripravimo obrazec, ki mora vsebovati:

1. ime in priimek,
2. naslov ali ime in naslov šole,
3. mesto opazovanja (kraj, najbližja ulica, hišna številka, pri opazovanju v naravi oddaljenost od najbližjega naselja),
4. čas opazovanja (začetek, konec),
5. vremenski pogoji (jasno, delno oblačno, ocena pokritosti neba),
6. opombe o opazovališču (približna oddaljenost od javne razsvetljave, oddaljenost od hišnih luči),
7. katera karta Oriona iz Preseka se najbolj sklada s podobo ozvezdja na nebu (št. 2, št. 3, ...).

Pred odhodom na plano izpolnimo točke od 1 do 3 in si na vrtljivi karti ogledamo lego oziroma vidljivost Oriona v načrtovanem času opazovanja. Pripravimo si žepno svetilko, ki jo moramo zaviti v rdeč celofan ali tanjši rjav papir, skozi katerega sme priti zelo malo svetlobe. Astronomi poznajo za to posebej prirejene naglavne rdeče svetilke. Preveč svetlobe namreč zmoti na temo prilagojene oči in potem na nebu ni mogoče videti najšibkejših zvezd.

■ B. Opazovanje

Opazujemo ob jasnem vremenu, približno uro in pol po zahodu Sonca ali kasneje. Lahko je tudi delno oblačno, a ozvezdje Orion ne sme biti zakrito niti z najmanjšim oblačkom. Preden začnemo primerjati karte in zvezde, ki jih v Orionu vidimo na nebu, moramo biti v temi najmanj petnajst minut. Opazovališče izberemo čimdlje od cestnih in drugih luči. Če opazujemo pred hišo, potem ugasnemo luči. Razdaljo do najbližjih prižganih svetilk izmerimo ali ocenimo in to vpišemo v opazovalni obrazec. Nato na nebu poiščemo Orion in število tam vidnih zvezd primerjamo s priloženimi kartami (za kratek čas nanje posvetimo z zastrto svetilko) v Preseku. Če se ne moremo odločiti med dvema kartama, potem v obrazec vpišemo obe. Najbolj moramo biti pozorni na najšibkejše zvezdice, ki jih še lahko vidimo.

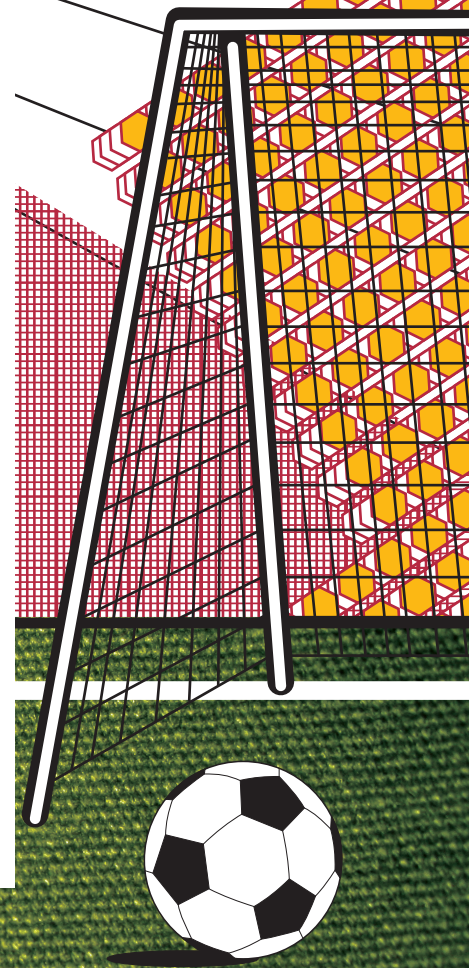
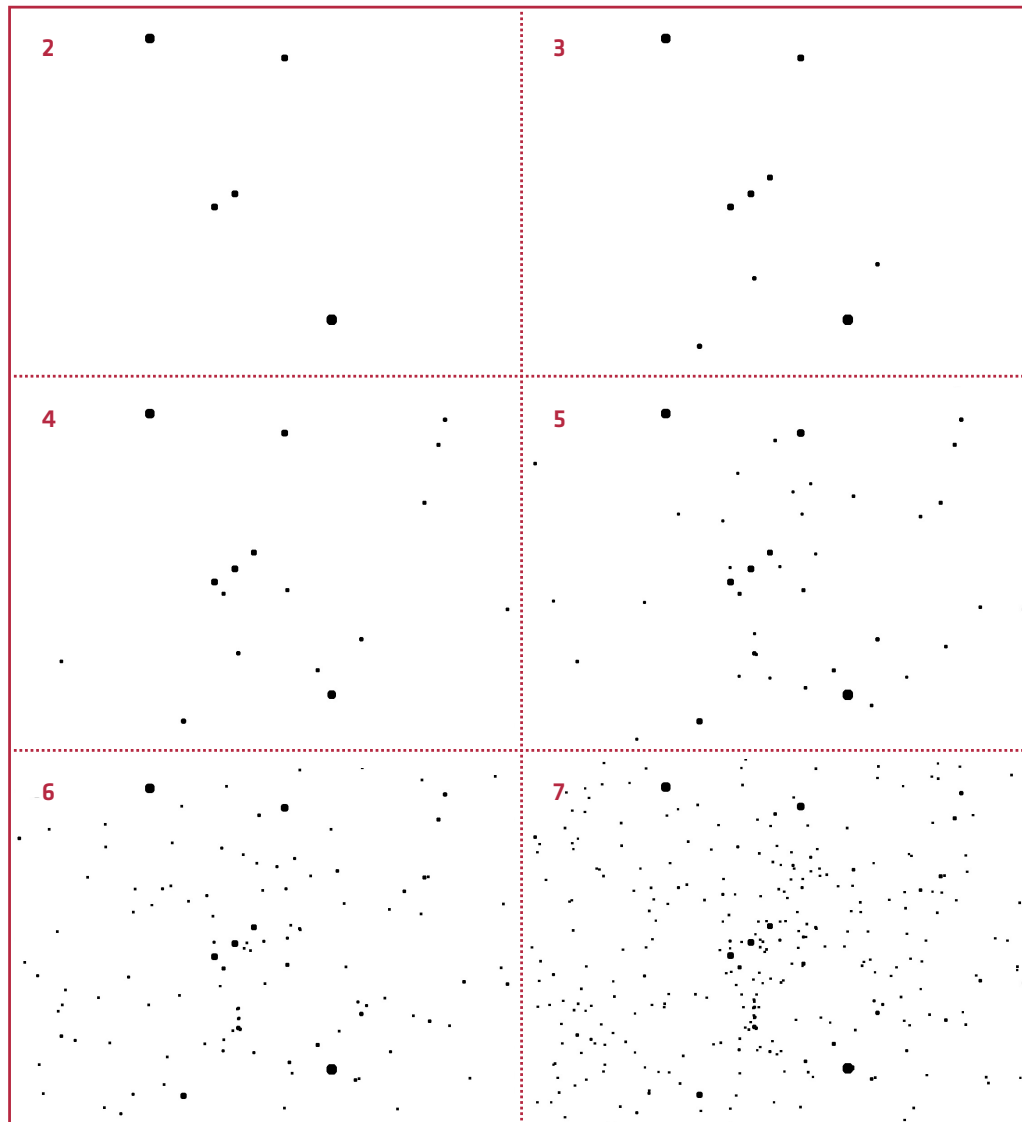
Slika 1. Karte Oriona pri različnih mejnih magnitudah. Številka na karti pomeni, da so na njej zvezde z magnitudo večjo od te vrednosti. V idealnih pogojih brez svetlobnega onesnaženja in Lune bi morali videti toliko zvezd, kot jih je na karti 7, kar je v naših krajih skoraj nemogoče. Iz urbanih središč je vidnih le peščica najsvetlejših zvezd v Orionu (karti 2 in 3).

Opazovanja ponovimo in jih vpisujemo na nove obrazce. Lahko opazujemo vedno na istem mestu, lahko pa izberemo še druge lokacije v svojem kraju.

■ c. Kaj naredimo z opazovalnimi obrazci?

Če ste opazovali v okviru rednega pouka ali astronomskega krožka, potem svoja opazovanja predstavite učitelju ali mentorju in se o njih pogovorite. Mentorji in samostojni opazovalci naj obrazce pošljejo na naslov uredništva ali v elektronski obliki na naslov: preseka@dmfa.si

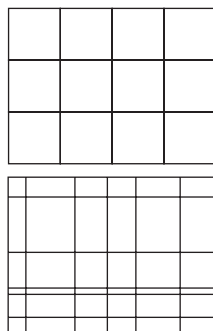
Zbrane rezultate bomo predstavili v zadnji številki Preseka. ☒



Mreže

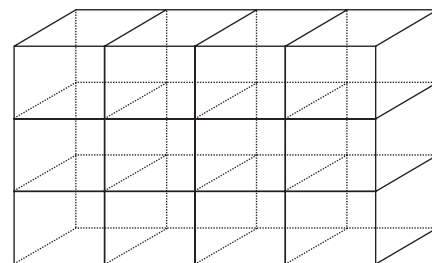
PRVI DEL

ANDREJ TARANENKO



☛ Slika 1.
Dve različni
pravokotniški
mreži

☛ Slika 2.
Primer tri-dimezi-
onalne pravoko-
tniške mreže



☛ V vsakdanjem življenju se pogosto srečujemo z različnimi mrežami. Na šahovsko desko lahko gledamo kot na mrežo in prav tako si lahko predstavljamo tudi matrike. Šestkotniške mreže zelo dobro poznajo čebelarji. Poldnevnik in vzporednik določajo mrežo na površini zemlje. Mreže so torej povsod okrog nas. Pomagajo nam, da razdelimo prostor na manjše dele, ki jim lahko priredimo naslove.

Tudi na računalniških tekmovanjih se pojavljajo naloge, kjer si lahko pomagamo z mrežami, ali pa so že same naloge zastavljene tako, da moramo dano mrežo prehoditi (obiskati vsako celico) na vnaprej predpisan način. Primere takšnih nalog lahko najdete na spletni strani, navedeni na koncu prispevka.

V tem prispevku si bomo podrobneje ogledali pravilne pravokotniške mreže ter različne načine sprehoda skozi vse celice takšnih mrež. V naslednjem popotovanju v mreže pa si bomo ogledali sprehode po trikotniških in šestkotniških mrežah.

■ Pravokotniške mreže

S pravokotniškimi mrežami smo se prav gotovo vsi srečali že vsaj enkrat. V šoli pri matematiki se uporablja milimetrski mreža, v katero lahko, recimo, rišemo grafe funkcij. V pravokotniški mreži so posamezne celice določene z enakomerno oddaljenimi vodoravnimi in navpičnimi črtami. Tudi če črte niso med seboj enakomerno oddaljene, so pa še vedno vzporedne, dobimo štirikotniško mrežo, čeprav se lahko velikosti posameznih celic med seboj razlikujejo. Pod izrazom *pravilna pravokotniška mreža* bomo imeli v mislih pravokotniško mrežo, v kateri so

vse celice skladni kvadrati. Dva primera pravokotniške mreže lahko vidite na sliki 1, kjer je zgoraj narisana pravilna pravokotniška mreža, spodaj pa pravokotniška mreža s celicami različnih velikosti.

Čeprav bomo v tem prispevku govorili o ravninskih mrežah, torej takšnih, ki nam razdelijo ravnino ali njen del na celice, imamo v splošnem lahko opravka tudi z več dimenzionalnimi mrežami. Primer tri-dimenzionalne pravokotniške mreže dobimo iz kvadra tako, da ga "razdelimo" na manjše kvadre s ploskvami, ki so vzporedne osnovnim ploskvam kvadra (slika 2).

V ravninskih pravokotniških mrežah bomo govorili o treh ključnih elementih: točkah, robovih in celicah (ali notranjosti celic). Različne elemente mrež uporabljamo v različnih situacijah. Točke so pomembne, kadar želimo govoriti o položaju, npr. o položaju šahovskih figur na šahovnici. Predstavljajmo si, da so na celicah postavljene zgradbe. V tem primeru so lahko pomembni robovi celic, saj lahko z njimi opišemo pot od ene zgradbe k drugi. Celice pa pridejo v poštev, kadar npr. želimo geometrijsko opisati del področja (v našem primeru ravnine).

Vsaka celica ravninske pravokotniške mreže je omejena s štirimi robovi in štirimi točkami. Vsaka točka (razen zunanjih v primeru, da imamo v mislih omejen del ravnine) je prav tako sosednja s štirimi celicami, s štirimi robovi in s štirimi točkami. Vsaka celica takšne mreže je sosednja z osmimi drugimi celicami (s štirimi, s katerimi ima skupen rob, in s štirimi diagonalnimi, s katerimi ima skupno le točko). V višjih dimenzijah velja naslednje (za vajo lahko preverite sami): v d -dimenzionalni mreži je vsaka točka sosednja z $2d$ robovi in 2^d celicami.

■ Sprehodi po pravokotniških mrežah

Ko bomo v nadaljevanju govorili o pravokotniški mreži dimenzije $n \times m$, si lahko namesto nje pred-

Slika 3.
Matrika kot
pravokotniška
mreža

	1	2	3	...	m-1	m
1						
2						
3						
⋮						
n-1						
n						

stavljamo matriko dimenzije $n \times m$ (glej sliko 3), kjer se lahko na posamezne celice matrike sklicujemo s parom števil (i, j) , kjer velja $1 \leq i \leq n$ in $1 \leq j \leq m$; i predstavlja zaporedno številko vrstice, j pa zaporedno številko stolpca. Sprehod po matriki pa pomeni, da na predpisani način vsakemu elementu matrike priredimo število med vključno 1 in vključno $n \cdot m$, kjer vrednost elementa na koordinatah (i, j) pomeni, na katerem koraku smo v sprehodu ta element "obiskali". V mrežah bi to nalogo opisali tako: vsem celicam v mreži priredi naslov, ki nam pove, na katerem koraku v sprehodu smo dano celico obiskali.

Najpomembnejši sprehodi skozi celice pravokotniških mrež so vidni na sliki 4 (od leve proti desni – sprehod po vrsticah, sprehod po stolpcih, kačji sprehod in sprehod po diagonalah). Poglejmo si jih podrobneje.

SPREHOD PO VRSTICAH – V tem sprehodu po vrsti obiščemo vse celice prve vrstice, nato vse celice druge vrstice itd. Na ta način si lahko dvo-dimenzionalno polje predstavimo kot eno-dimenzionalno polje, kar počne tudi večina prevajalnikov sodobnih programskih jezikov. Algoritem, ki vsakemu elementu matrike določi število glede na ta sprehod, je naslednji:

```
■ sprehod_po_vrsticah(matrika A, int n, int m)
{
    int i,j; // pomožna števec
    for (i=1; i<=n; i++)
        for (j=1; j<=m; j++)
            A[i][j] = j + (i-1)*m;
}
```

Matematično zvezo med (i, j) in prirejenim številom $j + (i - 1) * m$ premislite in preverite sami. Problem lahko rešimo tudi brez te matematične zveze tako, da vpeljemo dodatni števec, ki šteje korake; to vrednost nato priredimo elementu matrike:

```
■ sprehod_po_vrsticah(matrika A, int n, int m)
{
    int i,j; // pomožna števec
    int korak = 0; // števec korakov

    for (i=1; i<=n; i++)
        for (j=1; j<=m; j++)
        {
            korak++;
            A[i][j] = korak;
        }
}
```

SPREHOD PO STOLPCIH – V tem sprehodu po vrsti obiščemo vse celice prvega stolpca, nato vse celice drugega stolpca itd. Torej je postopek zelo podoben prejšnjemu. V algoritmu s števcem korakov zamenjamo le vrstni red zank, matematična zveza je pa tudi zelo podobna:

```
■ sprehod_po_stolpcih(matrika A, int n, int m)
{
    int i,j; // pomožna števec
    for (j=1; j<=m; j++)
        for (i=1; i<=n; i++)
            A[i][j] = i + (j-1)*n;
}
```

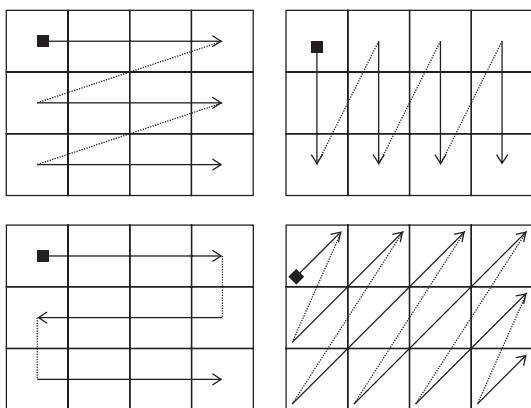
KAČJI SPREHOD – Sprehajamo se po vrsticah, vendar ne pričnemo vsakič s prvim elementom v vrstici, ampak izmenično spreminjamo smer sprehoda (v prvi vrstici gremo od prvega elementa vrstice do zadnjega, v drugi od zadnjega k prvemu, v naslednji spet od prvega k zadnjemu itn.). S števcem korakov lahko postopek izvedemo takole:

```
■ kačji_sprehod(matrika A, int n, int m)
{
    int i,j; // pomožna števec
    int korak = 0; // števec korakov

    for (j=1; j<=m; j++)
        for (i=1; i<=n; i++)
        {
            korak++;
            A[i][j + (m+1-2*j) * ((i+1) % 2)] = korak;
        }
}
```

Z izrazom $j + (m + 1 - 2 * j) * ((i + 1) \% 2)$ smo združili postopek za vrstice s sodim in lihimi indeksom. Za vajo lahko napišete postopek za kačji sprehod, kjer posebej napolnimo vrstice s sodimi in posebej vrstice z lihimi indeksi.





Slika 4.
Različni spreho-di po pravokotniških mrežah

→ **SPREHOD PO DIAGONALAH** - Kot že samo ime pove, se v tem načinu sprehoda premikamo po diagonalah. Želimo, da je sprehod takšen, kot je razviden na sliki 4, četrta podslika. Ta postopek zahteva malo več razmišljanja. Ni težko videti, da ima matrika dimenzije $n \times m$ natanko $m + n - 1$ diagonal z različnim številom elementov. Dogovorimo se, da diagonale oštevilčimo po vrsti, od ena naprej, pri čemer začnemo v prvem elementu prve vrstice, naslednja se začne v prvem elementu druge vrstice itd. Nadaljujemo do n -te diagonale, ki se začne v prvem elementu n -te vrstice. Naslednja diagonalna se začne v drugem elementu n -te vrstice. Ponovno nadaljujemo postopek do $(n + m - 1)$ -te diagonale, ki se začne v elementu na koordinatah (n, m) . Naj bo $k = \min(n, m)$. Prvih $k - 1$ diagonal ima od 1 do $k - 1$ elementov, pri čemer ima prva diagonal 1 element, $(k - 1)$ -ta pa $k - 1$ elementov. Podobno je z zadnjimi $k - 1$ diagonalami, pri čemer je vrstni red obrnjen, saj ima zadnja diagonal 1 element, $(n + m - k + 1)$ -ta diagonal pa $k - 1$ elementov. Vse preostale diagonale vmes imajo k elementov. Vse, kar nam preostane za razmislek, je, kje je prvi element posamezne diagonale. Očitno so prvi elementi prvih n diagonal na koordinatah $(d, 1)$, kjer je d številka diagonale. Preostalih $m - 1$ diagonal se prične v n -ti vrstici, od drugega elementa naprej. Algoritem, ki ga na ta način dobimo, je naslednji:

```
■ sprehod_po_diagonalah(matrika A, int n, int m)
{
    int stElt = 0; // število elt. posamezne diagonale
    int korak = 0; // števec korakov
    int k = min(n,m);
    int d, e; // d, e - števec diagonal in elt.
    int i, j; // i, j - položaj elt. v matriki

    for (d=1; j<=n+m-1; j++) {
        // določimo število elt. v diagonal d
        if (d<=k-1)
            stElt = d;
        else if ((k<=d)&&(d<=N+M-k))
            stElt = k;
        else
            stElt = N+M-d;

        // določimo koordinate 1. elt. diagonale d
        if (d<N) {
            i=d; j=1;
        }
        else {
            i=N; j=d-N+1;
        }

        // napolnimo vse elt. diagonale d
        for (e=1; e<=stElt; e++) {
            korak++;
            A[i][j] = korak;
            i--; j++; // premik v sosednji elt. v diagonal
        } } }
```

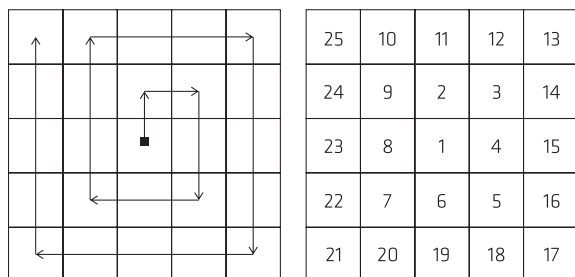
■ Nagradna naloga

Za razmislek vam dajem še en sprehod po pravokotniški mreži. Naj bo podana kvadratna matrika dimenzije $n \times n$, pri čemer je n liho število. Pričenši na elementu $(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil)$ se sprehodite po vseh elementih matrike v obliki spirale. Najprej gremo gor, nato desno, dol, levo, pa spet gor in tako naprej, dokler ne obiščemo vseh elementov matrike. Primer lahko vidite na sliki 5.

Pri iskanju rešitve vam želim obilo zabave. Svojo rešitev pošljite v uredništvo Preseka do 24. novembra 2006. Naključno izžrebanega reševalca čaka lepa knjižna nagrada.

■ Literatura

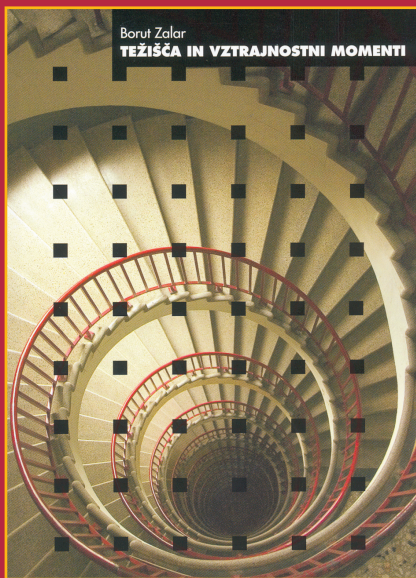
- [1] S. S. Skiena in M. A. Revilla, *Programming Challenges*, Springer, New York, 2003.
- [2] <http://online-judge.uva.es/problemset/> ✕



Slika 5.
Sprehod v obliki spirale

Predstavitev nove knjige

PETAR PAVEŠIČ



➔ V knjižnici Sigma je izšla nova izvirna knjiga *Težišča in vztrajnostni momenti*. Avtor je dr. Borut Zalar, redni profesor matematike na Fakulteti za gradbeništvo Univerze v Mariboru. Knjiga nam ponuja priložnost, da se na prijazen in poljuden način seznanimo s pojmom, ki sta stebra uporabe matematike v gradbeništvu in drugih tehničnih vedah. Pri tem je avtorju uspelo omejiti zahtevnost uporabljenih matematičnih tehnik na minimum.

Za predstavitev zahtevnosti bo pravzaprav najbolje, če si izposodimo avtorjeve besede iz uvoda:

Ta knjižica je namenjena trem kategorijam bralcev:

- matematikom, ki poučujejo študente ali dijake tehniških znanosti,
- študentom tehnike,
- srednješolcem in drugim, ki jih pojmovno enostavne teme uporabne matematike zanimajo na ljubiteljski ravni.

Prva in druga kategorija bralcev ne potrebuje dodatnih pojasnil. Znanje, ki ga študenti pridobijo pri standardnih tečajih matematike je več kot zadostno za razumevanje celotne knjige, tako rezultatov kot izpeljav. Za tretjo kategorijo, ki obvlada le osnove (ali pa sploh nič) diferencialnega in integralnega računa, je mišljeno, da bodo pri prvem branju videli besedilo v naslednji luči. Večina objektov okoli nas, ki so izdelki različnih inženirskih strok lahko geometrijsko modeliramo kot "sestavljanko" zelo enostavnih objektov: kvadrov, valjev, krogel, polkrogel v prostoru ter pravokotnikov, trikotnikov, krogov v ravnini. Prvi korak pri računanju težišč je izračunati te količine za zgoraj navedene osnovne gradnike. Tega dela računa morda ne bodo povsem razumeli, vsakdo pa lahko razume in tudi uporablja dobljene končne rezultate kot so na primer "težišče trikotnika je na tretjini višine". Drugi korak predstavljata dve enostavni formuli, ki vsakomur omogočata, da iz temeljnih rezultatov izračuna težišče in vztrajnostni moment glede na dano os pri vsakem "normalnem" objektu. Svoje razumevanje bo bralec lahko preskusil na nalogah, katerih reševanje ne zahteva odvodov in integralov temveč le malo geometrijske domislenosti. ☒

Knjižnica Sigma

Od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev. Najnovejša izdaja je že osemdeseta po vrsti!



Borut Zalar:

TEŽIŠČA IN VZTRAJNOSTNI MOMENTI

120 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

2.000 SIT
(8,35 EUR)

**JE OSEMDESETA IZDAJA
V KNJIŽNICI SIGMA!**



Ciril Dominko in Bojan Golli:

REŠENE NALOGE IZ FIZIKE Z DRŽAVNIH TEKMOVANJ – 3. del

Prva knjiga:

VADEMEKUM IN NALOGE

Druga knjiga:

NAMIGI IN REŠITVE

skupaj 424 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

cena kompleta: 5.000 SIT (20,86 EUR)



Robert B. Banks:

LEDENE GORE, PADAJOČE DOMINE in druge prigode iz uporabne matematike

1. in 2. del

skupaj 348 strani
format 14×20 cm
mehka vezava

cena kompleta: 5.000 SIT
(20,86 EUR)

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 40 drugih del. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjige tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate pri naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.