

E.

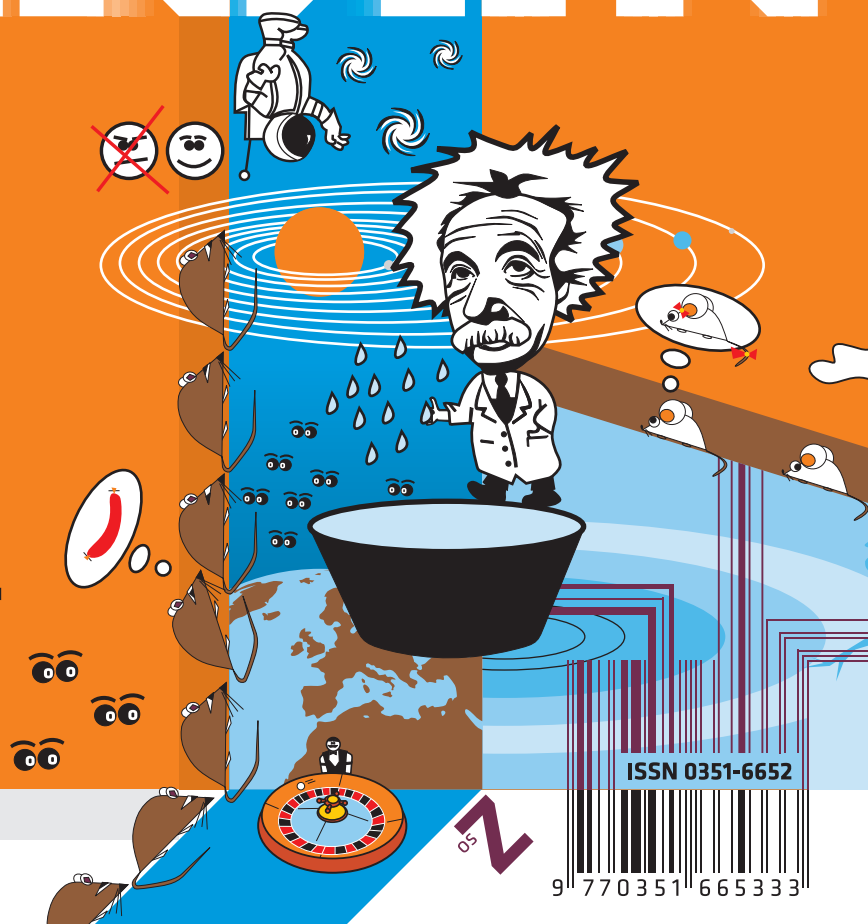


NAGRADNA KRIŽANKA
URNIK TEKMOVANJ
DRUŽINA BERNOULLIJEV
RULETA

DRUGS



astronomija



ISSN 0351-6652

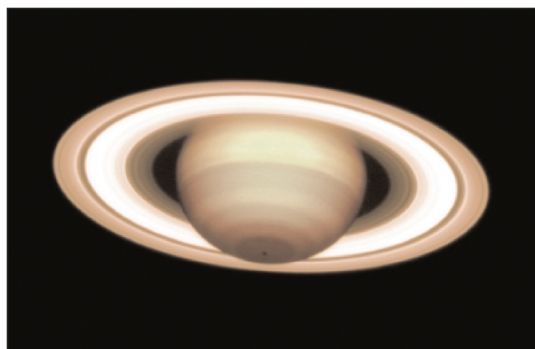
9 770351 665333

matematični trentutki

Videti bolj jasno

Utripajoče zvezde so zabavne za pesmi toda težavne za astronome. Sodobna tehnologija uporablja prilagodljivo optiko za uravnavanje turbulenc v atmosferi in dostavlja natančne podobe zvezd, planetov in satelitov. Pri popravljanju atmosferskih deformacij so vpleteni linearna algebra, geometrija in statistika. Z njimi lahko določimo obseg deformacij in nepretrgoma prilagajamo deformacijska zrcala, ki preusmerjajo svetlobne žarke nazaj vdolž njihovih pravih poti.

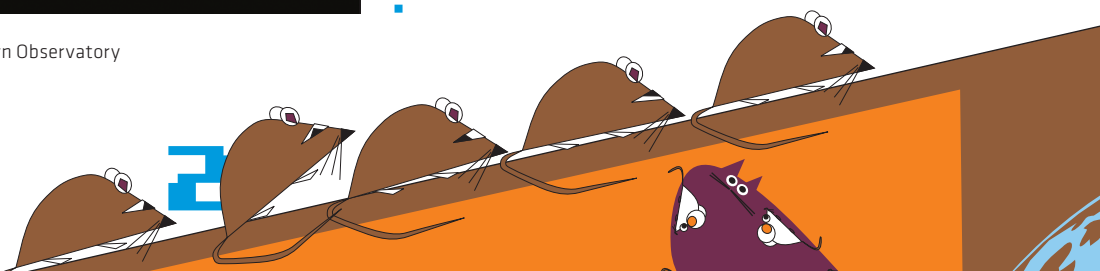
Matematični algoritmi omogočajo v realnem času izvajati izračune, ki so potrebni za očiščene poglede tako onstran zemlje kot tudi pod mikroskopom. Prilagodljiva optika je omogočila raziskovalcem prve poglede v posamezne celice očesa, kar omogoča boljše diagnosticiranje in natančnejšo kirurgijo. Tako lahko znanost, ki je pomagala nekaterim ljudem videti nekaj stvari bolj jasno, milijonom pomaga vse videti bolje.



© European Southern Observatory



POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike »The Mathematical Moments«, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 33, šolsko leto 2005/2006, številka 3

Kazalo**Matematični trenutki**

Videti bolj jasno stran 2

Matematika

Družina Bernoullijev (*Marija Vencelj*) stran 4–7

Ali lahko ukanemo ruleto? (*Aleš Mohorič*) stran 8–9

Ledene gore, padajoče domine in druge prigode iz uporabne matematike (*Petar Pavešič*) .. stran 31

Fizika

Einsteinov prvi prispevek h kvantni mehaniki (*Janez Strnad*) stran 10–13

Deveti in deseti člen verige eksperimentov (*Nataša Vaupotič*) stran 14–15
in 19–20

Računalništvo

Generatorji slučajnih števil (*Aleksander Vesel*) stran 22–25

Astronomija

Profesor Josip Plemelj in komet 1847 I (*Stanislav Južnič in Marijan Prosen*) stran 26–28

Pisec prvega slovenskega učbenika astronomije (*Marijan Prosen*) stran 29

Razvedrilo

Nagradna križanka (*Marko Bokalič*) stran 16–17

Palindromi skriti račun (*Marija Vencelj*) stran 18

Rešitev nagradne križanke Presek XXXIII/2 stran 18

Tekmovanja

Urnik tekmovanj v letu 2006 (*Darjo Felda*) stran 20–21

41. državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje priloga

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – izbirno tekmovanje priloga

Tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje priloga

Družina Bernoullijev

Ob tristoletnici smrti matematika Jakoba Bernoullija

Marija Vencelj

V zgodovini matematike ni iz nobene družine izšlo toliko slavnih matematikov kot iz družine Bernoulli. Tudi v zgodovini znanosti nasploh ni najti rodbine, ki bi dosegla impozantnejši tovrstni rekord.

Trgovska družina protestantskih Bernoullijev se je v času verske vojne v 16. stoletju umaknila iz holandskega Antwerpna v Basel v Švici, ki je bil tedaj že dolgo pomemben znanstveni center (slika 1). Od konca 17. stoletja dalje pa vse do danes daje ta družina znanstvenike različnih zvrsti v vsaki generaciji. Skoraj ducat jih je bilo izjemno uspešnih tudi v matematiki in fiziki, štirje med njimi so bili člani tujih znanstvenih akademij (slika 4).



Dolgo ni bilo jasno, komu pripada prvenstvo pri odkritju metod odvajanja in integriranja ter dejstva, da sta ta dva procesa medsebojno obratna. Dandanes je dokazano, da sta angleški učenjak Isaac Newton in nemški matematik Gottfried Wilhelm Leibniz odkrila svoji metodi neodvisno drug od drugega – Newton nekaj let pred Leibnizom, vendar je svoje odkritje prej objavil Leibniz. Vsekakor pa je bila Leibnizova šola sijajnejša od Newtonove. Z objavo Leibnizovih člankov (1684 – 1686) se je namreč začelo izjemno plodovito obdobje matematične dejavnosti v Evropi. Njena pomembna nosilca sta bila brata Bernoulli, ki sta navdušeno usvojila Leibnizove metode.

Če bi se ravnala po željah in namenih svojega očeta, bi Jakob in Johann Bernoulli nikoli ne postala matematika. Jakob, ki je sedemnajstleten zaključil študij filozofije, dvaindvajsetleten diplomiral iz teologije in naj bi postal duhovnik, je proti očetovi volji študiral tudi matematiko in astronomijo. Mlajši Johann naj bi postal ali trgovec ali zdravnik. Prvi poklic ga ni veselil, je pa triindvajsetleten diplomiral iz medicine in hkrati že tudi objavil prvi znanstveni članek s tega področja. Njegova doktorska disertacija nekaj let kasneje pa je

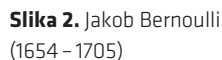
Slika 1. Švicarsko mesto Basel leži ob reki Ren blizu tromeje med Švico, Francijo in Nemčijo. Iz Basla izhaja tudi najplodovitejši matematik 18. stoletja, eden največjih matematikov vseh časov, Leonhard Euler.



Slika 3. Johann Bernoulli (1667 – 1748)

■ Brata Jakob in Johann Bernoulli

Začetnik matematične ere Bernoullijev je bil Jakob Bernoulli (slika 2), od katerega smrti je nedavno minilo 300 let. Z mlajšim bratom Johannom (slika 3) sta živela v času odkritja in razvoja diferencialnega in integralnega računa.



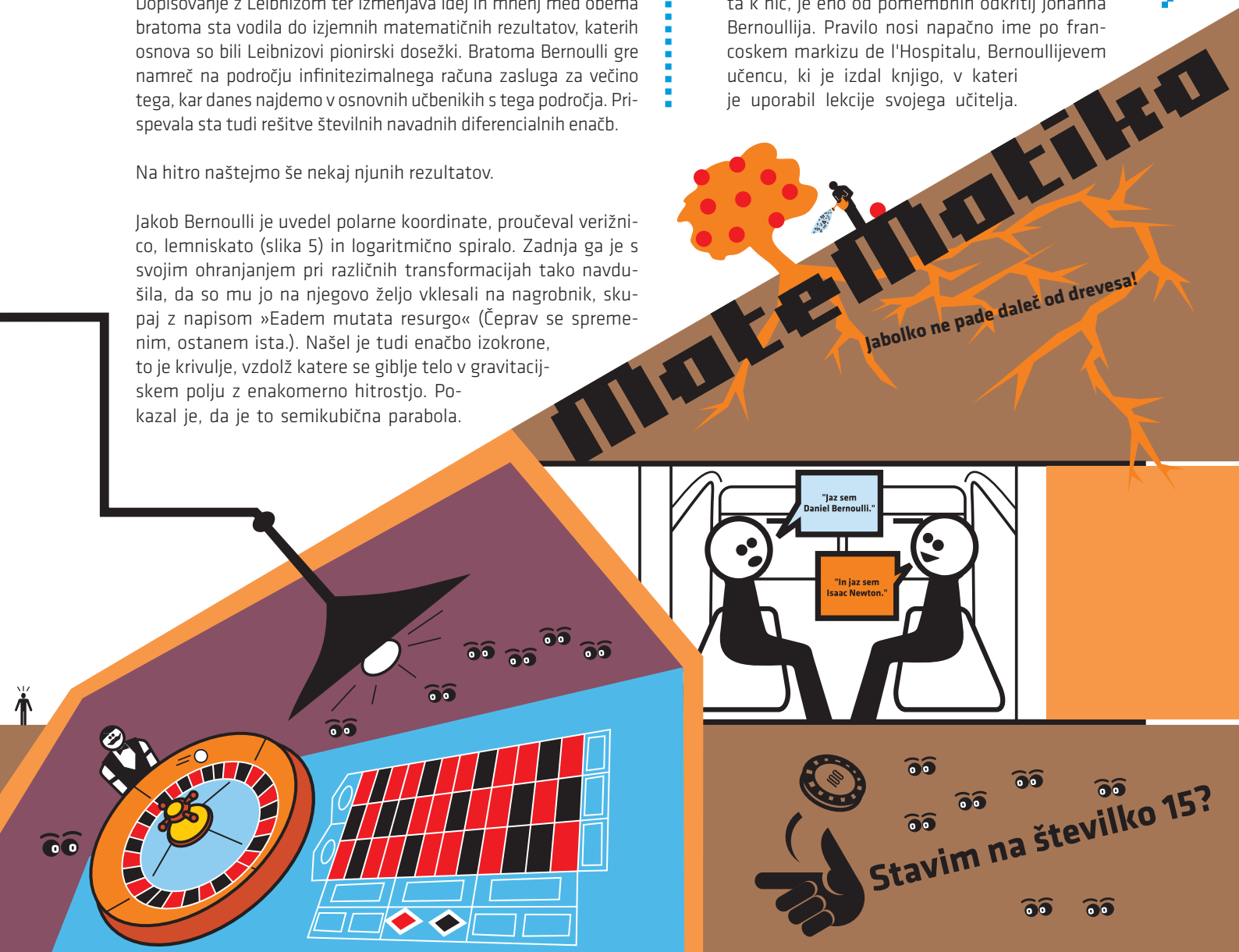
Ko so v reviji *Acta eruditorum* izšli Leibnizovi članki, sta se oba brata odločila, da postaneta matematika. Bila sta prva pomembna Leibnizova učenca. Jakob je leta 1687 prevzel matematično katedro na baselski univerzi in na njej predaval vse do svoje smrti. Vmes je veliko potoval z namenom, da se sreča s tujimi znanstveniki. Johann je leta 1697 postal profesor matematike na univerzi v nizozemskem Groningenu, po bratovi smrti pa je nasledil njegovo katedro v Baslu.

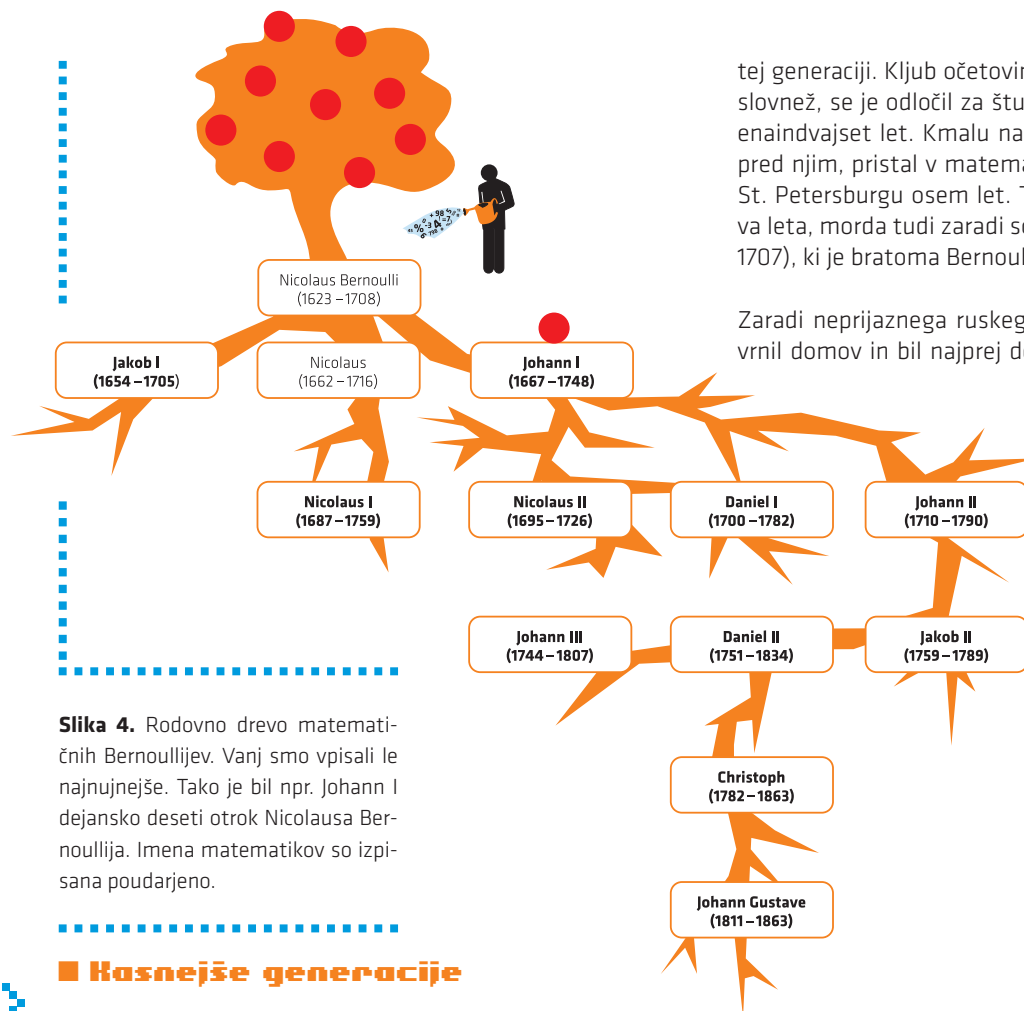
Na hitro naštejmo še nekaj njunih rezultatov.

Jakob Bernoulli je uvedel polarne koordinate, proučeval verižnico, lemniskato (slika 5) in logaritmčno spiralo. Zadnja ga je s svojim ohranjanjem pri različnih transformacijah tako navdušila, da so mu jo na njegovo željo vklesali na nagrobnik, skupaj z napisom »Eadem mutata resurgo« (Čeprav se sprememim, ostanem ista.). Našel je tudi enačbo izokrone, to je krivulje, vzdolž katere se giblje telo v gravitacijskem polju z enakomerno hitrostjo. Pokazal je, da je to semikubična parabola.

Bil je eden prvih, ki so proučevali verjetnostni račun. Njegova knjiga *Ars conjectandi*, ki je izšla osem let po njegovi smrti, obravnava med drugim permutacije in kombinacije ter doseže vrh z Bernoullijevim izrekom o binomskih porazdelitvah.

Delo Johanna Bernoullija je bilo tesno povezano z delom starejšega brata, zato je včasih težko razlikovati med njunimi dosežki. S precejšnjo gotovostjo pa štejejo Johanna za izumitelja variacijskega računa. To sledi iz njegovega načina obravnave brahistokrone (slika 6), krivulje najhitrejšega spusta masne točke med dvema danima točkama v gravitacijskem polju. Tudi široko poznano »l'Hospitalovo pravilo« za iskanje limitne vrednosti kvocienta dveh funkcij, ki teži ta k nič, je eno od pomembnih odkritij Johanna Bernoullija. Pravilo nosi napačno ime po francoskem markizu de l'Hospitalu, Bernoullijevemu učencu, ki je izdal knjigo, v kateri je uporabil lekcije svojega učitelja.





Slika 4. Rodovno drevo matematičnih Bernoullijev. Vanj smo vpisali le najnujnejše. Tako je bil npr. Johann I dejansko deseti otrok Nicolausa Bernoullija. Imena matematikov so izpisana poudarjeno.

■ Kasnejše generacije

Poglejmo v naslednjo generacijo. Znano je, da je bil Jakobov sin Nicolaus mestni svetnik in predstojnik baselskega umetniškega ceha, trije Johannovi sinovi Nicolaus, Daniel in Johann pa so bili briljantni matematiki. Vsi trije so bili profesorji matematike na univerzi, Nicolaus in Daniel v St. Petersburgu, Johann in kasneje tudi Daniel pa v Baslu. Podobno kot njihova stric in oče so tudi oni začeli na napačnem področju.

Najstarejši Nicolaus se je komaj trinajstleten vpisal na univerzo v Baslu, šestnajst let star diplomiral iz filozofije in pri dvajsetih doktoriral iz pravožnanstva. Očetu je pomagal pri matematičnem dopisovanju in se pri tem sam razvil v odličnega matematika, ki je kmalu zabeležil tudi znanstvene rezultate. Skupaj z bratom Danielom so ju 1725. leta povabili za profesorja matematike na akademijo v St. Petersburg, vendar je Nicolaus tam kmalu zbolel za tuberkulozo in že prvo leto umrl.

Medtem ko je Nicolaus umrl mlad, je drugi Johannov sin Daniel (slika 7) doživel častitljivo starost. Je najslavnejši Bernoulli v

tej generaciji. Kljub očetovim pričakovanjem, da bo postal poslovnež, se je odločil za študij medicine, ki ga je zaključil star enaindvajset let. Kmalu nato pa je, kot že nekaj Bernoullijev pred njim, pristal v matematiki. Kljub bratovi smrti je ostal v St. Petersburgu osem let. To so bila najplodovitejša Danielova leta, morda tudi zaradi sodelovanja z mladim Eulerjem (roj. 1707), ki je bratoma Bernoulli sledil v St. Petersburg.

Zaradi neprijaznega ruskega podnebja se je Daniel leta 1733 vrnil domov in bil najprej deset let profesor botanike in anatomije na baselski univerzi, nato sedem let predaval psihologijo, končno pa leta 1750 zasedel fizikalno katedro, ki mu je po pravici pripadala. Na njej je z velikim uspehom predaval skoraj 30 let.

Danielova dejavnost je bila v glavnem posvečena astronomiji, fiziki in hidrodinamiki. Eden od izrekov o hidravličnem pritisku nosi njegovo ime. Položil je tudi temelje kinetični teoriji plinov in skupaj z d'Alembertom in Eulerjem proučeval nihanje strune. Medtem ko sta njegov oče in stric razvila teorijo navadnih diferencialnih enačb, je bil Daniel pionir na področju par-

cialnih diferencialnih enačb. Daniel je bil kar desetkrat dobitnik nagrade pariške akademije znanosti, ki jo je dobil bodisi sam bodisi jo je delil s konkurenti. Nagrada za leto 1734, za katero je kandidiral tudi Danielov oče Johann, dobil pa Daniel, je skarlala odnos med očetom in sinom, ki se je z leti nato samo še slabšal.

Najmlajši Johann (II) je bil v nekem smislu najuspešnejši med brati, saj je nasledil matematično katedro svojega očeta na baselski univerzi. Tudi on je pri sedemnajstih letih najprej končal študij prava in se nato posvetil matematiki. Štirikrat je ali sam ali skupaj z očetom prejel nagrado pariške akademije, kar je bilo nedvomno zadostna kvalifikacija, da je postal očetov naslednik. Po-



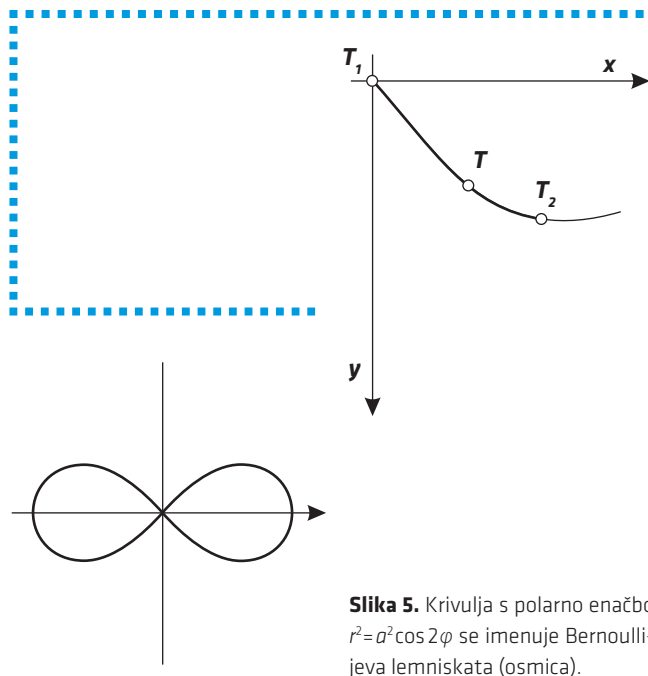
tem pa je njegova matematična aktivnost oslabela in se omejila na občasne članke, čeprav je dosegel enako visoko starost kot oče ali brat Daniel.

Iz te generacije moramo omeniti še enega Bernoullija. To je bil Nicolaus (I), sin mestnega svetnika in slikarja Nicolausa, bratranec Nicolausa (II), Daniela in Johanna (I). Študiral je pri svojih stricah Jakobu in Johannu, hitro napredoval in kmalu dosegel tudi formalno matematično izobrazbo. Pri dvaindvajsetih je doktoriral še iz prava z disertacijo o uporabi verjetnostnega računa pri pravnih vprašanjih. Bil je član berlinske akademije, angleške Kraljeve družbe in bolonjske akademije. Nekaj časa je predaval na katedri za matematiko v Padovi, na kateri je nekoč predaval

tudi Galileo Galilei. Po nekaj letih se je vrnil v Basel, najprej na katedro za logiko in nato nadaljeval kot profesor na pravo. Štiri-krat je bil izvoljen za rektorja univerze v Baslu.

Nicolaus je bil nadarjen, a ne preveč produktiven matematik. Večina njegovih del je neobjavljenih, ostala so prikrita v sicer bogati korespondenci z drugimi matematiki. Ukvarjal se je z verjetnostnim računom, konvergenco binomske vrste, problemom ortogonalnih trajektorij in Riccatijevo diferencialno enačbo.

Tudi kasneje so se pojavljali Bernoulliji, ki so dosegli velik ugled v matematiki. Toda nobeden od njih ni dosegel slovesa, kakršen gre prvima dvema generacijama.



Slika 5. Krivulja s polarno enačbo $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ se imenuje Bernoullijeva lemniskata (osmica).

Slika 7. Daniel Bernoulli
(1700 – 1782)

ANEKDOTA. Okrog slavnih Bernoullijev se je spletlo veliko legend in anekdot. Tako se je menda na nekem potovanju mladi Daniel skromno predstavil slučajnemu sopotniku z besedami: »Jaz sem Daniel Bernoulli.« »In jaz«, je ironično odvrnil sogovornik, »sem Isaac Newton.« Ta dogodek je Daniela zabaval vse življenje. Trdil je, da je bilo to največje priznanje, ki ga je kdajkoli dobil.

Slika 6. Leta 1696 je Johann Bernoulli »cvetu matematike tega sveta« zastavil problem brahistrokrone, to je iskanja krivulje najhitrejšega spusta masne točke (T) v navpični ravnini med danima točkama (od T_1 do T_2) pod vplivom težnosti. Čeprav je bilo na voljo pol leta, je rešilo problem le pet matematikov: oba brata Bernoulli (vsak s svojo metodo), Newton, Leibniz in l'Hospital. Zadnji šele po dopisovanju z Johannom. Iskana krivulja je cikloida.

■ Peterburški paradoks

S soigralcem mečeta kovanec. Igre bo konec, ko prvič pade glava. Če se to zgodi ob prvem metu, ti da soigralec en tolar; če prvič pade glava ob drugem metu, ti da dva tolarja; če pade glava prvič ob tretjem metu, dobiš od njega štiri tolarje itd. Na vsakem kasnejšem koraku se znesek podvoji. Če se igra konča z n -tim metom, dobiš od soigralca 2^{n-1} tolarjev. Koliko si pripravljen plačati za pravico do take igre? (Lahko si mislimo, da gre za nekakšen nakup srečke.)

Po formuli za matematično upanje je pričakovana vrednost pri tej igri enaka

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} + \dots,$$

kar je očitno neskončno. To je skregano z zdravo pametjo, ki se nagiblje k zelo skromnemu znesku okoli nekaj tolarjev (za srečko). Od kod ta prepad med matematiko in našo intuicijo?

Problem je prvi postavil Nicolaus (I) Bernoulli v enem svojih pisem matematiku Montmortu. Z njim so se široko ukvarjali v 18. stoletju, v St. Petersburgu tudi Daniel Bernoulli. Njegov članek o tem je izšel pri tamkajšnji akademiji, kar je verjetno problemu dalo ime.



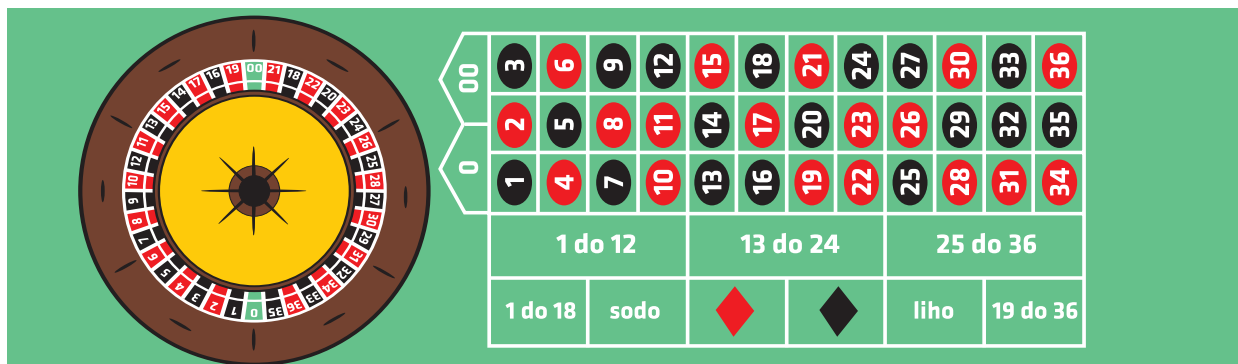
Ali lahko ukanemo ruleto?

Aleš Mohorič

Ruleta je igra na srečo, ki izvira iz Francije in se je prvič pojavila v 17. ali zgodnjem 18. stoletju. Najbolj znan center, kjer igrajo to igro, je Monte Carlo, ki leži v kneževini Monako. Pri igri sunemo kroglico na vrteče se kolo, ki ima po obodu 37 ali 38 enakih predalov, v katere se kroglica lahko ujame (slika 1). Predali so izmenjaje rdeče in črne barve, označeni s števkami od 1 do 36 in ne nujno v pravem vrstnem redu. En od predalov je poseben, označen je z zeleno barvo in nosi številko 0 (predvsem v Ameriki dodajo še en predal z oznako 00). Pri igri stavimo določen znesek na določeno število, množico števil ali pa barvo predalčka, v katerem se bo kroglica ustavila. Igro dobimo, kadar se kroglica ustavi na enem od polj, ki jih naša stava pokrije. Koliko bomo dobili nazaj, je odvisno od zneska, ki ga stavimo, in načina stave.

Kadar stavimo na eno od števil, bomo v primeru, da se kroglica ustavi na tem številu, dobili vrnjen šestinšestdesetkratni znesek stave. Če stavimo na dve sosednji števili, tako da žeton položimo na črto med številoma, dobimo pol manj, če pa žeton položimo na vogal, stavimo na štiri števila naenkrat in dobimo za zmago štiri-krat manjši znesek. Stavimo lahko tudi na množice števil: števila od 1 do 12, od 13 do 24, od 25 do 36 – pri teh stavah dobimo v primeru zmage povrnjeno trojno vsoto, za množice števil od 1 do 18, soda, liha in od 19 do 36 pa dobimo povrnjen dvojni znesek. Stavimo lahko tudi na to, da se bo kroglica ustavila v črnem ali v rdečem predalu. Tudi tu nam vrnejo podvojeno stavo. Če se kroglica ustavi na zelenem polju, dobi vedno našo stavo igralnica. Kolikšen znesek dobimo pri določeni stavi, izračunamo iz verjetnosti, s katero se določen dogodek zgodi. Denimo, da opazujemo številko ena in štejemo, kolikokrat kroglica obstane na tej številki. Število teh dogodkov N_1 bo naraščalo, čimvečkrat bomo zavrteli kolo rulete. Izkaže se, da kvocient števila N_1 in števila zavrtitev kolesa N teži h konstantni vrednosti, ko je N dovolj velik. Ta kvocient imenujemo verjetnost $P_1 = \frac{N_1}{N}$, da pri igri obstane kroglica v predalu z oznako 1. Na enak način lahko poiščemo verjetnost P_i za katerokoli število i . Če je ruleta poštena, so vse verjetnosti enake, in tako sledi $P_i = \frac{1}{38}$ (za ameriško ruleto z dvema zelenima poljema). To ne pomeni, da se bo kroglica ustavila na določeni številki enkrat v 38-ih poskusih, ampak da bo

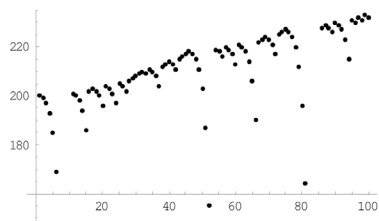
v veliki množici serij po 38-ih poskusih v povprečju po en tak rezultat na serijo – pri nekaterih serijah jih ne bo nič, pri nekaterih pa lahko tudi veliko. Verjetnost, da bo kroglica pri igri obstala na enem od mest iz večje množice, je enaka vsoti verjetnosti za mesta iz te množice. Na obodu kolesa je 18 rdečih polj in pri pošteni ruleti je verjetnost, da se kroglica ustavi na rdečem polju enaka $P_R = 18 \cdot \frac{1}{38} \approx 0,47$. To pomeni, da bi v povprečju v stotih igrah kroglica 47-krat obstala na rdečem polju. Če bi torej ves čas stavili po en tolar na rdečo, bi v povprečju na vsakih sto iger izgubili šest tolarjev. V primeru, da je kroglica pri igri obstala na rdeči, je verjetnost, da bo kroglica v naslednji igri obstala ponovno na rdeči, enaka kot prej, namreč 0,47. To pravilo velja, kadar so meti kroglice med seboj neodvisni (drugače bi denimo veljalo v primeru, ko bi po vsakem metu pokrili tisti predal, na katerem je kroglica obstala). $P_{2R} = P_R \cdot P_R = \frac{18}{38} \cdot \frac{18}{38} \approx 0,22$ je verjetnost, da bo kroglica v naslednjih dveh zaporednih igrah obstala na rdeči. Podobno velja za n ponovitev $P_{nR} = \left(\frac{18}{38}\right)^n$. Ta verjetnost je manjša od enega odstotka šele za n , ki je večji od 6. Vendar pa je ta verjetnost lahko poljubno majhna, če je n poljubno velik. In tu se skriva trik, s katerim bi lahko ukani ruleto. Izkoristimo dogodek, katerega verjetnost je tako majhna, da se skoraj zagotovo ne bo zgodil. Denimo, da tolikokrat zapovrstjo stavimo na rdečo, da kroglica na koncu obstane na rdeči. Razum nam narekuje, da se bo to slej ko prej zgodilo. Razmisliti moramo samo še, kako staviti,



Slika 1.



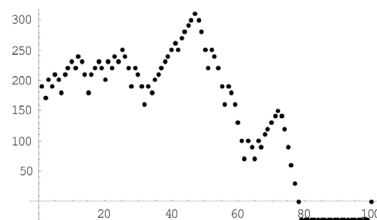
```
In[48]:= vzepu = Table[0, {100}]; stava = 1;
For[t = 1, t < 100, If[Random[] < 0.47, dobiecek = stava;
stava = 1, dobiecek = -stava; stava = 2 * stava];
vzepu[[t+1]] = vzepu[[t]] + dobiecek; t++];
ListPlot[vzepu + 200, PlotStyle -> PointSize[0.015]]
```



Out[48]= - Graphics -

Slika 2.

```
In[210]:= vzepu = Table[0, {100}]; stava = 10;
trenutno = 200; maksimalnastava = 30;
For[t = 1, t < 100, If[Random[] < 0.47, dobiecek = stava;
stava = 10, dobiecek = -stava;
stava = Min[2 * stava, trenutno, maksimalnastava]];
trenutno = trenutno + dobiecek; vzepu[[t]] = trenutno;
If[trenutno < 0, stava = 0]; t++];
ListPlot[vzepu, PlotStyle -> PointSize[0.015]]
```



Out[212]= - Graphics -

Slika 3.

da bomo imeli dobiček. Če prvo stavo dobimo, potem naslednjič stavimo enako, če pa jo zgubimo, naslednjič podvojimo stavo. Če bomo v drugem poskusu zmagali, bomo tako pokrili izgubo prve stave in pridobili znesek ene stave. Če zgubimo tudi vdruogo, moramo v tretjem poskusu staviti toliko, da bomo pokrili izgube od prej (dve izgubljeni stavi – trojni znesek prve stave), trenutno stavo in še zaslužili; torej moramo staviti štirikratno vsoto prve stave. Če zgublamo še naprej, moramo pri vsaki naslednji stavi vložek prejšnje stave podvojiti. Na ta način lahko povečujemo stavo, dokler se nam končno ne nasmehne sreča, ali pa nam prej ne zmanjka denarja. Kadar ruleta ni poštena, se kroglica ustavi na določenih številih pogostejše kot na drugih. To lahko dosežemo z manipulacijo kroglice ali kolesa. Tudi s skrbno analizo meta kroglice in vrtenja kolesa lahko napovemo izid z večjo verjetnostjo kot v primeru, ko igramo na slepo. Seveda je potem pametneje staviti na verjetnejši izid. Strategija igranja je v tem primeru enaka, le zaslužek se hitreje kopiči. In ravno ko pomislimo, da smo odkrili lahek način služenja, je čas, da se spustimo na realna tla. Ves bliščaj igralnic ni poceni, zato lahko mirno sklepamo, da igralnice v povprečju poberejo več denarja, kot pa ga izplačajo. Pravzaprav je sistem podvojevanja (bolj znan kot martingalski sistem) eden najstarejših sistemov igranja iger na srečo in ga dobro poznajo tudi lastniki igralnic, ki zanj poznajo preprost in

učinkovit protiukrep – najvišja stava je namreč omejena. Že z najmanjšim začetnim vložkom bomo hitro prišli do meje in tam se sistem poruši. Denimo, da je najmanjši vložek en žeton, največji pa 200 žetonov. V tem primeru bomo do zgornje meje prišli v devetem zaporednem poskusu. Čeprav je verjetnost za devet zaporednih neuspehov sicer majhna ($(20/38)^9 \approx 0,31$), pa en tak dogodek na večer ni neverjeten. Pri tem lahko zapravimo ves dobiček, ki ga pri takem načinu igranja le počasi nabiramo. Vsekakor je služba boljši način služenja denarja kot pa igranje na srečo. Poleg tega uporabljajo v zadnjem času vse bolj popularne internetne igralnice razne trike in prevare, da namamijo čimveč lahkovernežev. Na eni od internetnih igralnic sem preizkušal sistem in seveda mastno zaslužil. Po krajši analizi sem ugotovil, da sem v dvesto stavah na rdečo 133 krat zmagal, 67 krat pa izgubil. Verjetnost, da v dvesto poskusih vsaj 133 krat pade rdeča, je $1/3788515$. Seveda sem igral v demo načinu, kjer vlagamo virtualni denar in program očitno goljufa. Če bi igral za pravi denar, sem prepričan, da ne bi imel take sreče.

V matematičnem programu Mathematica sem pripravil preprosto simulacijo enega popoldneva za ruleto. Algoritem in rezultat sta prikazana na sliki 2. Na vodoravno os je nanešena zaporedna številka igre, na navpično pa število žetonov, ki jih

imam v žepu. V algoritmu privzamem, da imam v začetku v žepu 200 žetonov in da vedno stavim najmanjši možni znesek enega žetona. Kadar stavo izgubim, podvojim zadnji vložek, dokler stave ne dobim. Slika torej prikazuje martingalsko strategijo. V simulaciji ne upoštevam omejitve največjega možnega vložka. Kot vidimo, znesek v žepu zelo počasi narašča, če zamižimo na eno oko pri dvainpetdeseti igri, kjer bi se moral zadolžiti.

Če tvegamo malo več in stavimo po deset žetonov, stavo omejimo navzgor in ne pustimo zadolževanja (realna slika), se pravljica odvija povsem drugače, kot vidimo na sliki 3. Primeri se med seboj razlikujejo, kot pri vsakem slučajnem procesu, ampak takoj lahko opazimo, da dobiček odhaja igralnici. V konkretnem primeru smo v 78. igri ostali brez denarja.

NAUK. Martingalska strategija deluje, v kolikor imamo na razpolago neomejen kapital in stave niso omejene. Vendar tudi v tem primeru igre ne moremo prekiniti, kadar hočemo, ampak moramo počakati na ugoden trenutek. Tudi matematično je mogoče dokazati, da zmagovite strategije ni. Kadar se že odločite poskusiti svojo srečo v igralnici, to počnite za zabavo in za vnaprej določen znesek, ki ga lahko kar odpisete. Kakršenkoli drugačen odnos do igre vas lahko kaj kmalu zapelje v odvisnost in hude težave. Izbrskal sem podatek, da je bil povprečni odvisnik od iger na srečo v državi New Jersey v ZDA leta 1990 dolžan kar 40 000 \$. Za ta denar si raje kupite stanovanje.



Einsteinov prvi prispevek h kvantni mehaniki

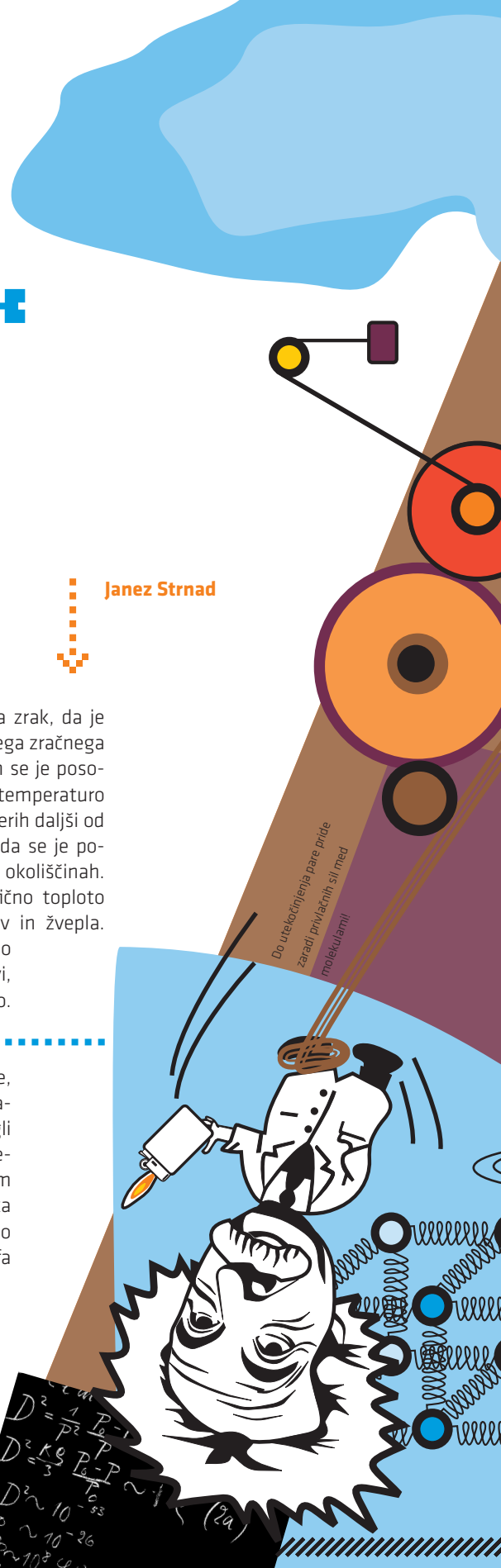
Leto 2005 so razglasili za Svetovno leto fizike v spomin na »čudovito leto«, v katerem je Albert Einstein napisal šest, za fiziko zelo pomembnih del. Leto pozneje je poslal Fizikalnim analom članek *Planckova teorija sevanja in teorija specifične toplote*, ki je izšel leta 1907. Ta članek je vseboval pomembno novost.

Janez Strnad

Zgodba se je začela že leta 1819. Tedaj sta Pierre-Louis Dulong in Alexis-Thérèse Petit v *Kemijskih in fizikalnih analih* objavila članek *Raziskovanja nekaterih zadev, pomembnih za teorijo toplote*. V njem sta poročala o merjenjih, ki sta jih izvajala več let. Merila sta zelo skrbno s trdnimi elementi, ki sta jih zmlela v prah. Tudi pri elementih z največjo gostoto nista uporabila več kot 30 gramov prahu. S prahom sta napolnila valjasto posodico iz srebra, v sredino katere je segal termometer. Posodico sta segrela in dala

v posodo, iz katere sta izsesala zrak, da je tlak padel na 380-ti del navadnega zračnega tlaka. Merila sta čas, v katerem se je posodica ohladila od 10 na 5°C nad temperaturo okolice. Ta čas je bil v vseh primerih daljši od 15 minut. Tako sta zagotovila, da se je posodica vselej ohlajala v enakih okoliščinah. Po tej poti sta izmerila specifično toploto dvanajstih kovinskih elementov in žvepla. Specifična toplota je toplota, ki jo moramo dovesti kilogramu snovi, da ga segrejemo za eno stopinjo.

Z današnjega stališča so bila merjenja po nepotrebnem zapletena. Vse kaže, da sta uporabila merilni način, ki sta ga razvila v drug namen. Merila sta namreč, kako hitro se ohlaja velika bučka živosrebrnega termometra v okrogli posodi s konstantno temperaturo. Iz prostora med bučko in posodo sta izsesala zrak. Mislila sta, da sta se s tem izognila prehajanju toplote s prevajanjem po mirujočem plinu in s konvekcijo s tokom plina. V tem primeru bi se bučka ohlajala samo s sevanjem. Po tej poti sta Dulong in Petit prišla do zakona o sevanju, za katerega sta dobila leta 1817 nagrado. To smo omenili zaradi Jožefa Stefana. Stefan je prvi izmeril toplotno prevodnost plinov in se prepričal, da ta ni odvisna od tlaka. Tako je vedel, da Dulong in Petit nista opazovala ohlajanja samo zaradi sevanja, ampak tudi zaradi prevajanja. Izognila sta se sicer konvekciji, ne pa tudi prevajanju. Zato se je lotil iskanja boljšega zakona in ga leta 1879 tudi odkril. Dotlej je kraljeval Dulong-Petitov zakon o ohlajanju.



Dulong in Petit sta po merjenjih leta 1819 ugotovila, da je produkt kilomola in specifične toplote za vse trdne elemente enak. Relativno atomsko maso dobimo, ko pri kilomolu spustimo enoto kg. Mase atomov sta primerjala z maso atoma kisika in specifično toploto izrazila z enoto, ki je danes ne uporabljamo več. Sklep Dulonga in Petita je bil tedaj zelo pomemben, ker je omogočal, da so po izmerjeni specifični toploti izračunali relativno atomsko maso trdne snovi.

Preglednica vsebuje v drugem stolpcu del Dulongovih in Petitovih rezultatov za produkt specifične toplote c_v in mase mola M v njunih enotah. Tretji stolpec vsebuje Dulongove in Petitove rezultate, preračunane v naše enote, in četrti stolpec, izražene s splošno plinsko konstanto R , ki jo uporabljamo pri opisovanju plinov. Dulong in Petit plinske konstante v članku nista omenila.

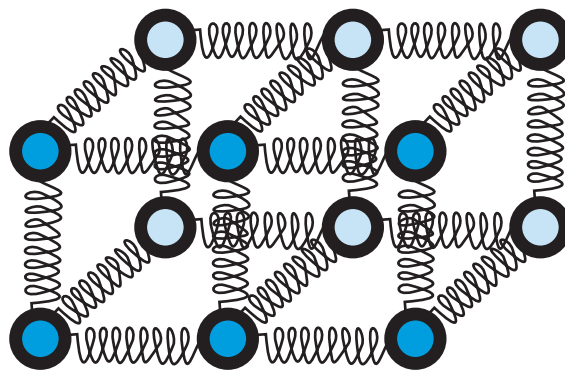
Element	Dulong-Petit	Mc_v	$Mc_v/(3R)$
bizmut	0,3830	25,7 kJ/(K·kmol)	1,03
platina	0,3740	25,0	1,00
cink	0,3736	24,6	0,99
nikelj	0,3819	25,5	1,02
žveplo	0,3780	25,3	1,01

Leta 1833 je Amedeo Avogadro meril specifično toploto ogljika. Čeprav njegova merjenja niso bila zelo natančna, so nedvomno dala manj od Dulongove in Petitove vrednosti. Pozneje so njegove ugotovitve podprli drugi. Leta 1870 je Heinrich Friedrich Weber, poznejši Einsteinov profesor fizike na züriški politehniki, med seboj primerjal prejšnja merjenja diamanta. Ugotovil je, da ni šlo za napake pri merjenju, pač pa je bil produkt odvisen od temperature. Že prej so spoznali, da je specifična to-

plota nekaterih snovi malo odvisna od temperature. Toda pri diamantu je bila ta odvisnost veliko izrazitejša. Weber je pri merjenju ugotovil, da se na območju od 0 do 200°C specifična toplota diamanta trikrat poveča. Pozneje je območje celo razširil in ugotovil, da se na območju od -100 do 1000°C specifična toplota diamanta poveča 15-krat. Podobno, čeprav manj izrazito povečanje je zasedil pri boru in siliciju. Tako se je prepričal, da Dulongova in Petitova zveza velja le pri dovolj visoki temperaturi. »Treh zanimivih izjem [B, C, Si], ki so doslej povzročale obup, ni več. Dulong-Petitova zveza je postala natančen zakon brez izjem.« James Dewar, ki je prvi utekočinil vodik in ki ga je zanimalo vrelišče ogljika, je raztegnil merjenja na območje od -198 do 2000°C.

Ludwig Boltzmann se je ukvarjal s teoretičnim ozadjem Dulong-Petitove zveze in jo do leta 1876 pojasnil. Kristal si je predstavljal kot množico atomov, ki jih na njihove ravnovesne lege vežejo majhne vzmeti (slika 1). Za specifično toploto kristala je izpeljal $c_v = 3R/M$. Pri tem je R splošna plinska konstanta in M masa kilomola. Pripomniti moramo, da sta Dulong in Petit merila specifično toploto pri konstantnem tlaku c_p in je Boltzmann računal s specifično toploto pri konstantni prostornini c_v . Obe toploti se pri trdnih snoveh tako malo razlikujeta, da ju ob natančnosti, ki sta jo dosegla Dulong in Petit, ni treba razločevati.

Leta 1900 je Max Planck upošteval nova merjenja sevanja črnega telesa. Črno telo vse vpadlo sevanje absorbira in od vseh teles pri dani temperaturi najmočnejše seva. Medtem ko Stefanov zakon zajame sevanje v celoti, to je pri vseh mogočih frekvencah ali valovnih dolžinah, je Plancku šlo za odvisnost sevanja od frekvence. Planck je merjenja opisal z novim zakonom, ki velja še danes. Potem je ta zakon pojasnil s privzetkom, da sevanje

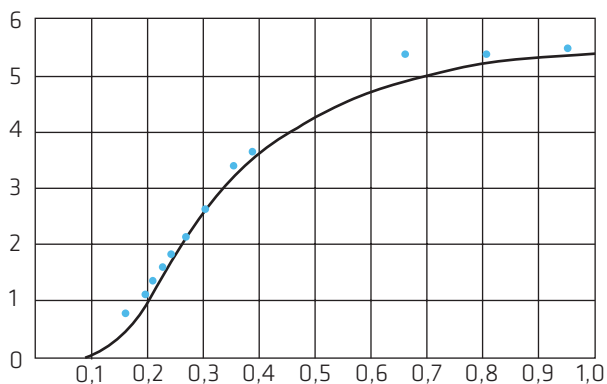


Slika 1. Predstavljamo si, da atome, ki v kristalu nihajo okoli ravnovesnih leg, na sosednje atome vežejo drobne vijačne vzmeti. K energiji kristala prispevata kinetična energija atomov in prožnostna energija vzmeti.

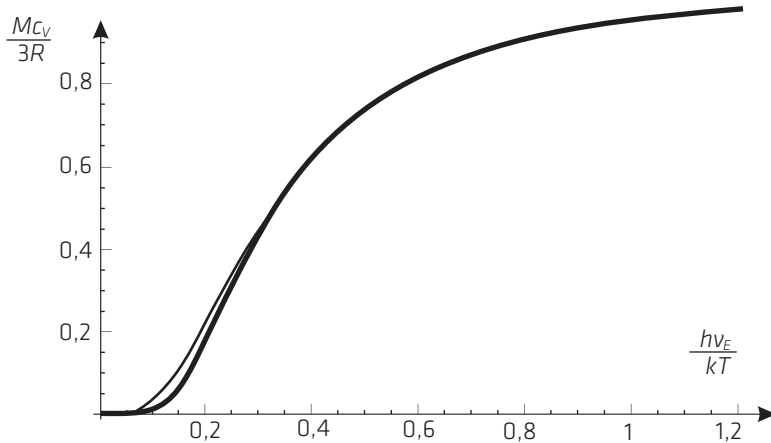
izmenjuje energijo z okolico v obrokih – *kvantih*. Energija kvanta je $h\nu$, če je ν frekvenca sevanja in h konstanta, imenovana po Plancku. Danes za kvant uporabljamo ime *foton*. Einstein je v čudovitem letu Planckovo zamisel razširil: energija v sevanju tudi po praznem prostoru potuje v kvantih. Planckova zamisel je bila zelo nenavadna, zato je tedaj fiziki niso sprejeli. Einsteinova zamisel se jim je zdela še manj sprejemljiva, ker se ni skladala z Maxwelllovimi zakoni za električno in magnetno polje, ki so jih šele pred kratkim usvojili.

V omenjenem članku je Einstein pojasnil, zakaj specifična toplota trdnih snovi narašča z naraščajočo temperaturo in pri dovolj visoki temperaturi doseže Dulongovo in Petitovo vrednost. Pri tem je zamisel o kvantih prvič uporabil za atome v kristalu, torej za delce z maso. Dotlej so razmišljali o kvantih samo v zvezi s svetlobo. Fiziki so Einsteinovo razlago specifičnih toplot sprejeli brez oklevanja, medtem ko se zamisel o svetlobnih kvantih ni uveljavila vse do leta 1923.

Einstein je gradil na zamisli Paula Drudeja iz leta 1904, da vsi atomi v kristalu nihajo s frekvenco svetlobe ν_E , ki jo kristal najmočnejše absorbira. Pri tem gre za infrardečo svetlobo s precej manjšo frekvenco od vidne svetlobe ali precej večjo valovno dolžino. Kristal lahko sprejme ali odda le energijo $h\nu_E$, $2h\nu_E$, $3h\nu_E$, ... Po letu 1930 so imenovali kvant $h\nu_E$ *fonon*, češ da je povezan z zvokom, podobno, kot je kvant svetlobe, foton, povezan s svetlobo. Na podlagi te zamisli je Einstein izpeljal odvisnost specifične toplote trdne snovi od temperature. Po Webrovih podatkih za specifično toploto diamanta je izračunal frekvenco $\nu_E = 2,7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$, ki ji ustreza valovna dolžina svetlobe $11.000 \text{ nm} = 11 \mu\text{m}$. S to frekvenco je narisal diagram za odvisnost specifične toplote diamanta od temperature in pripomnil, da Webrovi izmerki »zares domala ležijo na krivulji« (slika 2). Specifična toplota



Slika 2. Diagram iz Einsteinovega članka kaže krivuljo in Webrove merske točke za diamant. Ujemanje je dokaj dobro.



Slika 3. Specifična toplota po Debyeju (tanka krivulja) se le pri nizki temperaturi razlikuje od specifične toplote po Einsteinu (odebeljena krivulja). Pri tem smo v Debyejevem primeru upoštevali povprečno frekvenco $\frac{3}{4} \nu_D = \nu_E$. Boltzmannova vrednost je narisana črtkano.

ta je pri absolutni ničli, -273°C , postala enaka 0. Natančnejšega ujemanja z merjenji ni pričakoval. »Navsezadnje je privzetek, da atomi nihajo z določeno frekvenco, ki je neodvisna od energije (temperature), nedvomno nezadosten.« Peter Debye je leta 1912 izpopolnil Einsteinov račun v nakazani smeri. Privzel je, da nihajo atomi z vsemi mogočimi frekvencami od 0 do ν_D . Njegova odvisnost specifične toplote od temperature je bila v začetnem delu nekoliko manj strma od Einsteinove in je bolje ustrezala merjenjem (slika 3).

Spoznanje, da gre specifična toplota kristala proti 0, ko gre temperatura proti absolutni ničli, je imelo pomembno vlogo pri nastanku *tretjega zakona termodinamike* ali *Nernstovega zakona*. Ta zakon po domače pove, da se absolutni ničli lahko približamo, doseči pa je ne moremo. Že leta 1905 je Walther Nernst raziskoval vedenje specifične toplote trdnih snovi pri zelo nizki temperaturi in je menil, da bi bilo pomembno zvedeti več o tem. S svojimi sodelavci je ponovil Dewarjeva merjenja z boljšo natančnostjo. Leta 1910 je Nernst zapisal, da kažejo merjenja, »da specifične toplote postanejo nič ali vsaj zelo majhne pri zelo nizki temperaturi; to se kvalitativno ujema s teorijo, ki jo je razvil gospod Einstein«. Nernst je izkoristil svoje zveze s poslovnim svetom in spodbudil podjetnika Ernesta Solvaya, da je podprl prvo *Solvayevo konferenco* leta 1911. Na njej so Einsteina počastili s tem, da so mu namenili zadnje predavanje z naslovom *Sedanje stanje problema specifičnih toplot*.

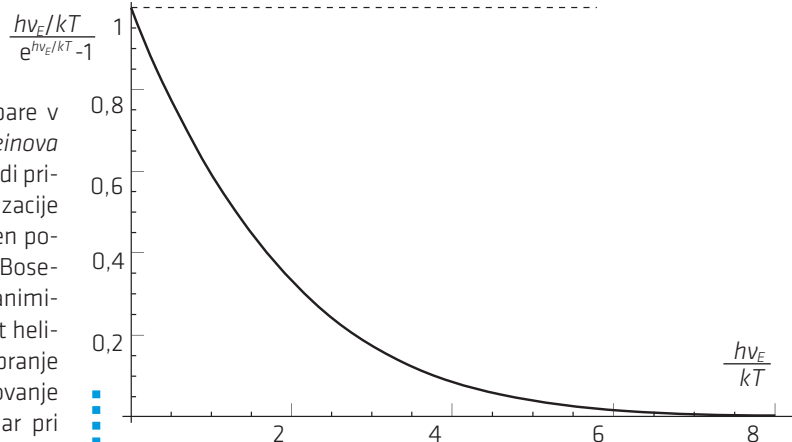
Einstein se je leta 1913 zanimal za specifično toploto plinov. Leta 1924 je obravnaval pline v kvantni mehaniki na način, ki ga je predlagal Satyendra Nath Bose. Enačbe so mu pokazale, da pri ohlajanju pri konstantnem tlaku gostota plina narašča, dokler temperatura ne doseže mejne vrednosti, po tem pa se

ne spreminja več. Pojav je podoben *faznemu prehodu* pare v tekočino, utekočinjenju ali kondenzaciji. To je *Bose-Einsteinova kondenzacija*. Medtem ko pride do utekočinjenja pare zaradi privlačnih sil med molekulami, pa Bose-Einsteinove kondenzacije ne povzročajo sile med molekulami, ampak gre za značilen pojav z množico atomov v kvantni mehaniki. Dolgo časa je Bose-Einsteinova kondenzacija veljala za nerabno teoretično zanimivost. Potem pa so leta 1938 z njo pojasnili supertekočnost helija. Pri zelo nizki temperaturi se tekoči helij skozi tanke špranje pretaka brez upora. V zadnjem času je zelo plodno raziskovanje Bose-Einsteinove kondenzacije razredčenih alkalijskih par pri skrajno nizki temperaturi.

Einsteinov korak je zajel atome v kristalu in je vodil v kvantno mehaniko, ki obravnava delce z maso. Fiziki so ga takoj sprejeli. To je prispevalo leta 1913 k nastanku modela vodikovega atoma Nielsa Bohra, iz katerega je zrasla kvantna mehanika. Presenetljivo je, da se je pozneje pokazalo, da je treba fononu enako kot fotonu prirediti maso 0.

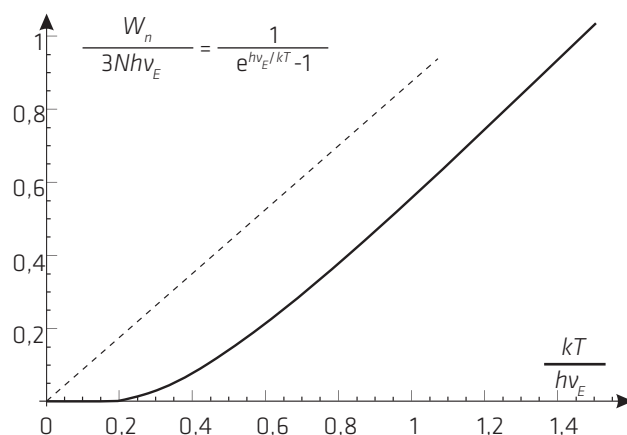
Boltzmann je obravnaval atome, ki v kristalu nihajo okoli ravnovesnih leg. Po *izreku o enakomerni razdelitvi* (ekviparticijskem izreku) vsakemu kvadratnemu členu v izrazu za energijo atoma v povprečju ustreza energija $\frac{1}{2} kT$. Pri tem je k Boltzmannova konstanta, to je »na atom preračunana plinska konstanta« $k = R/N_A$ in T absolutna temperatura, to je temperatura, merjena od absolutne ničle. N_A je Avogadrovo število, to je število atomov v kilomolu. Pri atomu, ki niha v smeri osi x , se pojavita dva kvadratna člena: kinetična energija atoma $\frac{1}{2} m v_x^2$ in prožnostna energija vzmeti $\frac{1}{2} K x^2$, če je K koeficient vzmeti. Vsakemu od njiju ustreza v povprečju energija $\frac{1}{2} kT$, torej skupaj $2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$. Atomi nihajo v treh med seboj pravokotnih smereh, zato imamo tri take prispevke, torej $3kT$. Vsak atom prispeva k specifični toploti $3k$, kar za kristal z maso m in N atomi da $3Nk/m = 3R/M$.

Če se ne oziramo na številski koeficient, nihanju atomov v kristalu ustreza energija kT . Ta energija je značilna za vsako toplotno gibanje atomov ali molekul. Po Einsteinovem privzetku pa je energija kristala zaradi nihanja atomov lahko $h\nu_E$, $2h\nu_E$, $3h\nu_E$, ... Mislimo pri dani temperaturi na kristale z različno energijo $h\nu_E$. Če je ta energija precej manjša od značilne energije kT , so razmere take kot v Boltzmannovem primeru in je povprečna energija atoma, ki niha v dani smeri, enaka kT . Pri vse večji energiji $h\nu_E$ ob dani značilni energiji kT so energije $n h\nu_E$ tem manj zastopane, čim večji je n . Zaradi tega je povprečna energija manjša od kT . Z naraščajočim razmerjem $h\nu_E/kT$ povprečna energija pojenja proti 0 (slika 4).



Slika 4. Povprečna energija atoma v kristalu pri dani temperaturi. Boltzmannova vrednost je narisana črtkano. Einstein je za povprečno energijo atoma v kristalu navedel $3kT \cdot (h\nu_E/kT) / (e^{h\nu_E/kT} - 1)$.

Zdaj se omejimo na kristal z določeno energijo $h\nu_E$ in premislimo o odvisnosti od temperature T . Pri visoki temperaturi imamo take razmere kot v Boltzmannovem primeru in energija atomov v kristalu enakomerno narašča z naraščajočo temperaturo. Pri nizki temperaturi, ko gre razmerje $h\nu_E/kT$ proti 0, pa energija atomov v kristalu s temperaturo najprej sploh ne narašča in potem začne počasi naraščati (slika 5). Strmina te krivulje z naraščajočo temperaturo narašča najprej počasneje, potem hitreje in nazadnje sploh ne narašča več. Tej strmini, deljeni z maso kristala, ustreza specifična toplota. Ta je pri zelo nizki temperaturi enaka 0, pri dovolj visoki temperaturi pa naraste proti Dulongovi in Petitovi vrednosti $3R/M$: $c_V = (3R/M) \cdot (h\nu_E/kT)^2 e^{h\nu_E/kT} / (e^{h\nu_E/kT} - 1)^2$.



Slika 5. Pri dani energiji $h\nu_E$ notranja energija kristala narašča z naraščajočo temperaturo najprej počasi, potem pa kot v Boltzmannovem primeru (črtkano). Za notranjo energijo kristala z N atomi je Einstein navedel $W_n = 3N h\nu_E / (e^{h\nu_E/kT} - 1)$.

Deveti in deseti člen verige eksperimentov

Nataša Vaupotič



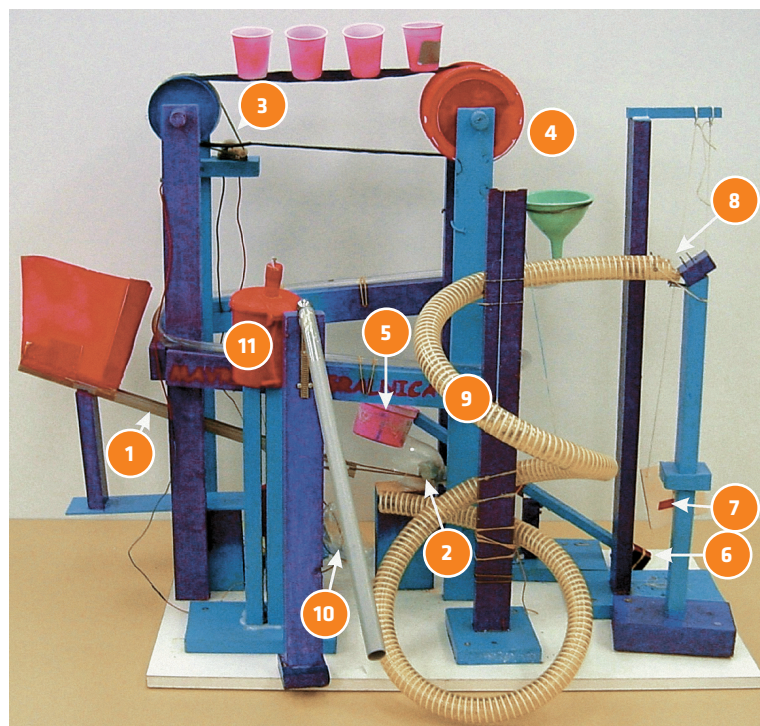
Svetovno leto fizike 2005 se bliža koncu in tako tudi pričujoči članek poroča o zadnjih dveh členih demo verige verižnega eksperimenta. Vendar pa to ne pomeni, da se aktivnosti v zvezi z verižnim eksperimentom končujejo. Nasprotno! Skupina študentov, ki so bili gonilna sila pri ustvarjanju in predstavljanju demo verige, se je septembra 2005 vključila v evropsko mrežo EUROPHYSICSFUN, v okviru katere pričakujemo, da bomo demo verigo v bližnji prihodnosti lahko razstavili in predstavili tudi na različnih srečanjih v tujini.

Verižni eksperiment bo naslednje leto potekal v okviru dni fizike 20. maja 2006 v TEHNIŠKEM MUZEJU v Bistri. Prijave smo že začeli zbirati in podrobnosti najdete na spletnih straneh muzeja na www.tms.si. Vezni element bo ostal enak, kot smo ga vpeljali letos – kovinska kroglica s premerom 20 mm. Vse bralce vabimo k sodelovanju, saj poleg zanimivega in zabavnega druženja organizatorji obljublajo tudi lepe nagrade.

Skratka, verižni eksperiment se je v Svetovnem letu fizike 2005 uspel uveljaviti kot splošni pojem, ki asociira na inovativne konstrukcije in zabavno fiziko. Zato

si, še zadnjič letos, oglejmo dva člena demo verige. Deveti člen demonstracijske verige sta sestavili študentki Pedagoške fakultete v Ljubljani, bodoči učitelji fizike. Deseti člen je delo učitelja veččin z Oddelka za fiziko na Pedagoški fakulteti v Mariboru, z idejami pa so mu pomagali tudi študentje fizike in dijaki,

ki smo jim osnutek naprave prikazali na fizikalnem taboru. Obe napravi sta izrazito mehanski in v njunem delovanju opazujemo naslednje pojave: ravnotežje vzvoda, zobniški prenos, prenos sile preko vrvice in škripca. Deveta naprava, imenuje se Mavrična igralnica, navduši že s svojo barvitostjo, deseta naprava, Ro-

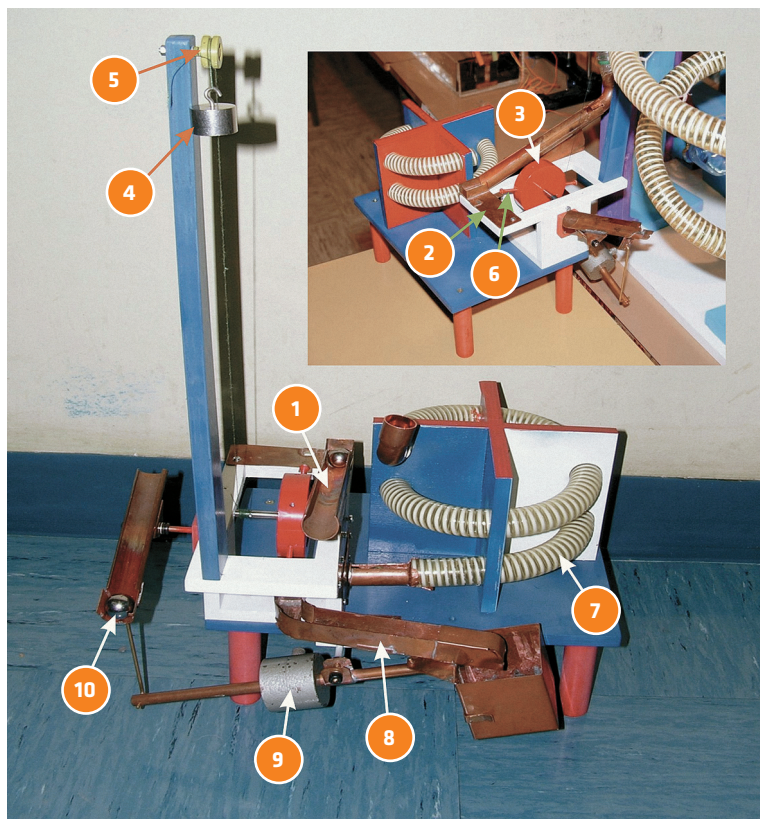


Slika 1. Mavrična igralnica. Avtorici poskusa sta SAŠA ZIHERL in MOJCA ČAD z Oddelka za fiziko in tehniko, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani.

potulja, pa je edina naprava v demonstracijski verigi, ki jo tudi slišimo. Mnogi so menili, da bi se ji bolje podalo ime Kurent.

■ DEVETI ČLEN Mavrična igralnica

Kot vsak člen v verigi tudi mavrično igralnico (slika 1) sproži kroglica, ki se prikotali po žlebu (1) s prejšnjega poskusa. Na dnu žleba (2) se ustavi na dveh žeblih in tako sklene električni tokokrog. Elektromotorček se prične vrteti. Zobnik elektromotorčka je povezan z valjem (3), na katerega je vpet tekoči trak. Na traku so posodice, napolnjene z vodo. Ko se posodice pripeljejo do rdečega zobnika, se voda prelije v lijak (4) in po prozorni cevki odteče do posodice (5), ki je pritrjena na eni strani gugalnice (vzvoda). Na drugi strani gugalnice je pritrjen magnet (6). Ko je navor teže vode enak ali večji od navora teže magnetu, se gugalnica prevesi. Magnet na gugalnici se s tem približa drugemu magnetu (7), ki je pritrjen na vrvi, in ga pritegne. Na drugem koncu vrvice je palčka (8), ki zastavlja pot kroglici. Ko se magnet na vrvi premakne, potegne s sabo palčko in kroglica se odkotali po plastični cevi (9) do posodice (10), ki je pritrjena na sto-



■ DESETI ČLEN Ropotulja

Ropot ropotulje (slika 2) je napovedal konec demonstracijske verige verižnega eksperimenta. Na nekaterih predstavitvah smo sicer za konec dodali še kaj »udarnega«. Tako smo na prireditvi Mladi UM v UŠC-ju v Mariboru dodali na koncu še rahel pok, malo ognja in razvili plakat oddelka, na enomesečni predstavitvi verige na Pedagoški fakulteti v Mariboru smo razvijali znamenito Einsteinovo skuštrano fotografijo, v Cankarjevem domu smo po obiskovalcih posipali konfete. Vendar je v vseh primerih ropotulja naznanila bližajoči se konec.

Z Mavrične igralnice se kroglica po žlebu (1) prikotali do mehanskega stikala (2) in ga odrine. Vreteno (3) se prične vrteti, ker je na os navita nitka z utežjo (4). Nitka je obešena preko škripca (5). Žebelja (6), ki sta pritrjena na kolut, udarjata po kroglicah, ki se po cevi (7) pomikajo do ležišča pod kolutom. Ko žebelj odrine eno kroglico, se na njeno mesto prikotali naslednja kroglica. Kroglice se po žlebu (8) odkotalijo v posodico, ki je pritrjena na eni strani vzvoda. Ko je navor teže kroglic večji od navora teže uteži (9), se vzvod prevesi in potisne žleb (10) navzgor. Kroglica, ki leži v žlebu, se odkotali in demonstracijska veriga eksperimentov je končana.

■ Pojavi

Pri Mavrični igralnici bomo podrobneje razložili delovanje stopalke na miniaturnem košu in tudi, kako elektromotorček poganja tekoči trak. V obeh napravah so vzvodi, zato bomo obravnavali delovanje vzvoda. Ob koncu bomo še poglobljeno pogledali, kako deluje sistem vreteno – škripec – utež pri ropotulji.

Delovanje koša razložimo ob sliki 3a. Kroglica se prikotali po cevki in pade v posodico (1). Posodica je pritrjena na kolut (2) in kolut se zaradi navora teže kroglice zavrti. Pri tem se vrstica (3) navije na kolut in potegne stopalko (4) navzdol. Zato se drugi konec stopalke (5) zavrti navzgor in navzgor potisne palčko (6), ki dvigne pokrov (slika 3b). Elektromotorček vrti kolesce, ki je z vrvi-

Slika 2. Ropotulja. Avtor poskusa je ZMAGO CIRINGER, učitelj veščin z Oddelka za fiziko, Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru.

A large iceberg floating in the ocean. The visible tip is small and jagged, while the submerged portion is massive and complexly shaped, illustrating the concept of hidden dangers or risks.

A large, jagged iceberg floats in the ocean. The iceberg is composed of various shades of blue and white ice, with a prominent, sharp peak. The water is dark blue, and the sky is filled with heavy, grey clouds. The overall scene conveys a sense of isolation and the vastness of the ocean.

Kupon z nagradnim geslom in svojim naslovom in priimkom pošljite na naslov DMFA – Založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, najkasneje do petka, 27. januarja 2006.

AMERIŠKI KEMIČ, NOBELOVEC 1968 (LARS)	MERILNIK MOČI ELEKTR. TOKA	SAMO, ZGOLJ	ZADNJI	NASLADILO ARABCEV IN ETIO- PIJCEV	 SKUPINA ŽIVALI NAPRAVA	
				1		
		PULZ			7	
		SREDO- ZEMSKO DREVO				
			10	IGRALKA LONGORIA IZ RAZO- ČARANIH GOSPODINJ		
12			ŽARGON. IZRAZ ZA NEMŠKO NOGOM. REPREZ.	TALENT		
				STARO BABILON. MESTO SLONOVI ZOBJE	9	
	24			NEPOKRIT	PLAČILO ZA PREVOZ BLAGA	
PEVEC IRGOLIČ					S 482 km NAJVEČJI PRITOK RONE	TAKTOMER
ZNAK ZA ASTAT						
	TEHNIČNO ODKRITJE, IZNAJDBA	DIHANJE; TUDI ŠIBKEJŠI VETER	NAJVEČJA OPOZICIJ. STRANKA OBSEKANO DEBLO			PISATELJA ŠORLI IN ZORMAN
		28				NIKALNICA IZJAVA, KI IMA KRATKE NOGE
OBLAČILO MUSLI- MANK KAZAH- STAN				ČEVLJI S KOLESCI ŠUMEVEC IN SIČNIK		27
					11	STOPNJA TISKAR- SKIH ČRK
	25		PRIPRAV- NIŠKA DOBA			5
						NAGLAS, POUDAREK



	KNJIŽNI IZRAZ ZA VEVERICO	PEVEC PESTNER	ENAKI ČRKI	LJUDSKO OBLAČILO	ČEŠ. GLED. REŽISER PRED 100 LETI (RUDOLF)	NAJVAŽ- NEJŠA POSTRAN. STVAR NA SVETU	UMETEN DRAG KAMEN, ZELENI KORUND
							18
				LJUDSKI OBIČAJ			
		TOČENJE SOLZ	RIM. BOG LJUBEZNI KUJARICA VENDELINA (MARJA)				
				STAREJŠI CITROENOV AVTO			
				ČRKA Ő			
					20		
							RAČUNAL. OBLIKOV. MATEVŽ BOKALIČ

Kupon

Geslo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30												

Ime in priimek:

Naslov:

E-pošta:

Palindromi skriti račun



Marija Vencelj

Zadnje čase je posebej imenitno dodati med svoje ime in priimek še eno črko. Po navadi je to začetnica očetovega imena.

Meta Atem, Petrova hči, je že brez tega ponosna na svoje ime, saj se bere enako naprej ali nazaj, torej je pravi palindrom. Pa jo je le zanimalo, kako bi bilo videti, če bi ga dopolnila z očetovo začetnico. Najprej je napisala META P. ATEM, zadovoljno ugotovila, da se je palindromost ohr-

nila, potem pa še malo čakala po listu in pred njo se je pojavil palindromi skriti račun množenja

$$\bullet \bullet \text{ META} = \text{P} \cdot \text{ATEM}.$$

Meta bi ne bila Atemova Meta, če bi skriti račun pustila vnemar. Stalo jo je sicer nekaj napora, da je račun razvozlala, a je bilo vredno truda. Odkrila je, da je skriti račun rešljiv in, kar je še posebej lepo, na en sam način.

Nato je Meta črko P zamenjala z začetnico

imena svoje mame Mojce in dobila še en skriti račun

$$\bullet \bullet \text{ META} = \text{M} \cdot \text{ATEM},$$

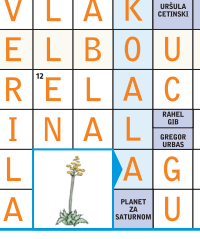
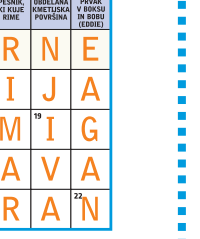
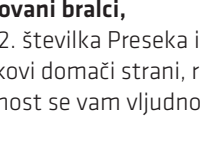
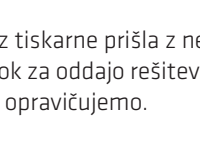
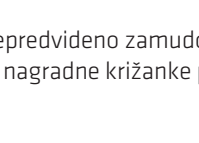
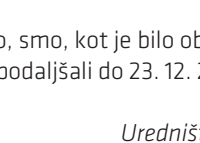
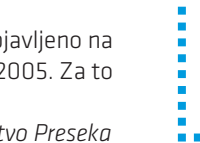
v katerem črka M, oziroma števka, s katero jo moramo zamenjati, nastopa kar trikrat.

Kako je bilo z Metinim reševanjem tega palindromega skritega računa, vam ne bomo izdali. Pač pa vam zastavljam nalogo:

Rešite oba skrita računa. To je, v vsakem od računov zamenjajte različne črke z različnimi desetiški števki tako, da bosta računa pravilna. Pri tem naj bodo nastopajoča štirimestna števila zares štirimestna, torej naj se ne začenjajo z 0.

Do rešitve lahko sicer pridemo z metodo »surove sile«, to je, z računalnikom pregledamo produkte vseh štirimestnih števil z enomestnimi, vendar je lepše in prinese več zadovoljstva, če nalogo rešimo s čistim premislekom. Pa še kakšno zanimivost odkrijemo spotoma.

Rešitev nagradne križanke Presek XXXIII/2

Spoštovani bralci,
ker je 2. številka Preseka iz tiskarne prišla z nepredvideno zamudo, smo, kot je bilo objavljeno na Presekovi domači strani, rok za oddajo rešitev nagradne križanke podaljšali do 23. 12. 2005. Za to nerodnost se vam vljudno opravičujemo.

Uredništvo Preseka

Nadaljevanje s strani 15

co povezano z večjim kolesom (slika 4). Večje kolo se vrti bistveno počasneje kot majhno. Poglejmo, zakaj. V kolikor vrvice ne zdrsi, je hitrost točke (v) na obodu kroga enaka za obe kolesi. Kolo s polmerom R_1 se enkrat zavrti okoli osi v času

$$T_1 = 2\pi R_1 / v, \quad (1)$$

kolo s polmerom R_2 pa se zavrti v času $T_2 = 2\pi R_2 / v$. Če združimo oba izraza, dobimo

$$R_1 / T_1 = R_2 / T_2. \quad (2)$$

Zvezo (2) lahko zapišemo še drugače, če vpeljemo kotno hitrost (ω). Kotna hitrost je razmerje med kotom zasuka kolesa in časom, v katerem se ta zasuk dogodi. Prvo kolo se zavrti za polni kot, torej 2π , v času T_1 , zato je kotna hitrost $\omega_1 = 2\pi / T_1$, za drugo kolo pa velja $\omega_2 = 2\pi / T_2$. Zvezo (2) lahko tako zapišemo v obliki

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2, \quad (3)$$

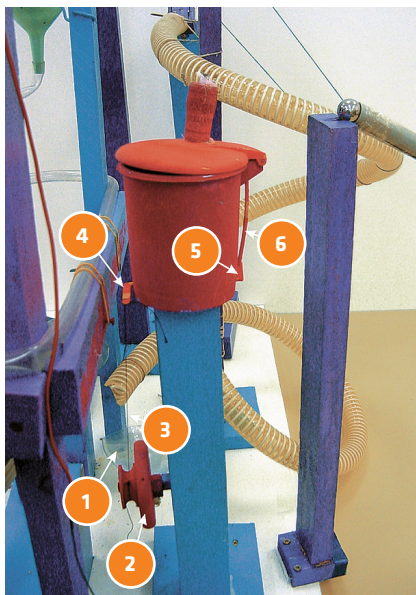
torej, večji kot je polmer kolesa, manjša je kotna hitrost. Zato se valj (3) vrti veliko počasneje od kolesca na elektromotorčku (slika 1).

Ker se kolesce vrti s konstantno kotno hitrostjo, je navor rotorja elektromotorja enak navoru vrvice na kolesce. Delo, ki ga navor vrvi opravi na časovno enoto, je enako moči motorja (P_e). Delo navora na časovno enoto je produkt navora vrvi na kolesce (M_1) in kotne hitrosti (ω_1) kolesca, velikost produkta pa je, v primeru, ko je trenje v ležajih zanemarljivo majhno, enaka moči elektromotorja:

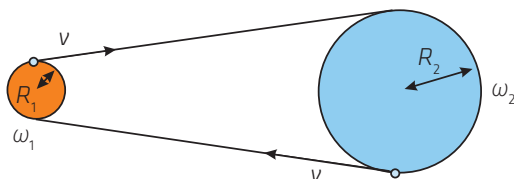
$$P_e = M_1 \omega_1.$$

V idealnem primeru, ko ni izgub, se z manjšega kolesa na elektromotorčku na večje kolo (valj (3) na sliki 1) prenese vsa moč, zato velja

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2,$$



Slika 4. Prenos moči z zobniki

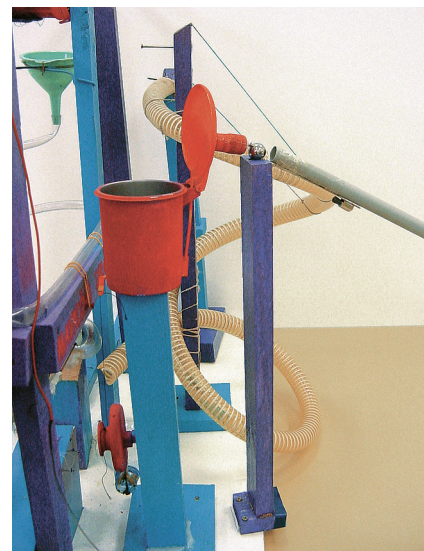


Slika 5. Vzvod

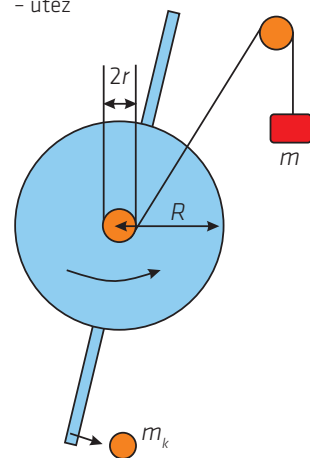
kjer je M_2 navor vrvi na večje kolo. Ker se le-to vrti z manjšo kotno hitrostjo kot manjše, je navor na večje kolo večji in zato lahko slednje poganja tekoči trak. Pogosto je slišati, da je moč večjega kolesa večja, kar ni res. Moč se ne more povečati, saj energija ne more nastati iz nič. Poveča se le navor.

Delovanje vzvoda bomo razložili na pri-

Slika 3. Delovanje miniaturnega koša



Slika 6. Sistem vreteno – škripec – utež



meru vzvoda pri ropotulji. Na prečko, ki je vrtljiva okoli osi O (slika 5), je na eni strani pritrjena utež z maso m_u , na drugi strani pa posodica z maso m_p . V posodico padajo jeklene kroglice z maso m_k . Recimo, da je vzvod v ravnovesju, ko v posodico pade N kroglic. Takrat je navor teže kroglic in posode enak navoru teže uteži (prečke ne upoštevamo, ker je vpeta na polovici, torej v težišču). V ravnovesju velja

$$\blacksquare (Nm_k + m_p)L = m_p x. \quad (4)$$

Ko vpade v posodico še ena kroglica, se vzvod zavrti v smeri urnega kazalca in potisne prečko, ki je pritrjena na levi strani, navzgor ter kroglici odpre pot v naslednji eksperiment. Iz enačbe (4) razberemo, da je število kroglic, ki jih potrebujemo, da se vzvod prevesi, odvisno od tega, kam pritrdimo utež (od razdalje x). Ker smo pri eksperimentu vztrajno izgubljali kroglice, smo torej morali utež pri vsaki novi postavitvi bolj približati osi vrtenja.

Kako dolgo ropotulja ropota, je možno določiti na dva načina. Ena možnost je ta, da imamo veliko kroglic in potem lahko utež postavimo na skrajni levi konec vzvoda. Ker je za preves potrebni več kroglic, bo ropotalo dalj časa. S spreminjanjem mase uteži na vrvi (slika 6) pa lahko vplivamo na časovni interval med dvema zaporednima udarcema žebja po kroglici. Kako povečanje mase uteži na vrvi vpliva na hitrost vrtenja koluta, bomo razložili s privzetkom, da je trenje v osi pri vrtenju koluta zanemarljivo majhno in da ima škripec zanemarljivo majhno maso.

Med dvema zaporednima udarcema po kroglici se kolut zavrti za pol obrata. Pri tem se utež na vrvi spusti za pol obsega osi vretena, torej za πr , če je r polmer osi. Potencialna energija uteži se zmanjša za $\Delta W_p = -mg\pi r$, kjer je m masa uteži. Če ni izgub, se za toliko, kolikor se zmanjša potencialna energija uteži, povečata kinetična energija uteži in vretena. Kinetično energijo uteži in vretena zapišemo kot

$$\blacksquare W_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kjer je v hitrost uteži, ω je kotna hitrost vretena in J vztrajnostni moment vretena (skupaj z osjo in vijaki). Ker se točka na obodu osi giblje z enako hitrostjo kot utež, velja $v = \omega r$ (primerjaj z enačbo (1)) in kinetično energijo lahko zapišemo kot

$$\blacksquare W_k = \frac{1}{2}(mr^2 + J)\omega^2 \approx \frac{1}{2}J\omega^2,$$

saj je masa uteži veliko manjša od mase vretena, pa tudi polmer vretena je bistveno večji od polmera osi. Sedaj upoštevamo izrek o ohranitvi vsote kinetične in potencialne energije ($\Delta W_k + \Delta W_p = 0$) in dobimo

$$\blacksquare mg\pi r = \frac{1}{2}J(\omega_1^2 - \omega_0^2), \quad (5)$$

kjer sta ω_0 in ω_1 kotni hitrosti na začetku in koncu polovice obrata. Prirastek h kvadratu kotne hitrosti je torej premo sorazmerno z maso uteži. Če maso uteži povečamo, bo kotna hitrost naraščala hitreje, kar seveda pomeni, da se bo kolut hitreje vrtel in čas med zaporednima udarcema po kroglici bo manjši. Izračunajmo še, kolikšen je kotni pospešek, s katerim se vrti vreteno. Spomnimo se zveze med hitrostjo, pospeškom ter premikom pri premem gibanju in zapišimo enako zvezo za kotne količine: hitrost nadomestimo s kotno hitrostjo, premik z zasukom (π) in pospešek s kotnim pospeškom (α):

$$\blacksquare \omega_1^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\pi.$$

To združimo z enačbo (5) in dobimo

$$\blacksquare \alpha = \frac{mgr}{J}.$$

Gibanje je enakomerno pospešeno, kotni pospešek pa se linearno povečuje z večanjem mase uteži.

Za konec omenimo samo še to, da pri vsakem udarcu po kroglici vreteno nekaj energije prenese na kroglico. Vreteno se rotacijska kinetična energija zmanjša vsaj za toliko, kolikor je začetna kinetična energija kroglice, ki odleti. V kolikor trk ni prožen, pa se nekaj energije pretvori še v notranjo energijo. Če je masa uteži dovolj velika, so izgube zanemarljivo majhne. Če pa je masa uteži premajhna, se lahko zgodi, da se vreteno po trku kar ustavi. Frekvenca ropotanja takrat ni kaj preveč atraktivna in ne spominja na kurenta, no morda na kurenta, ki je zelo utrujen...



Darjo Felda

V nadaljevanju je nekaj osnovnih informacij o posameznih tekmovanjih. Vabimo vas, da obiščete spletno stran **DMFA Slovenije** (<http://www.dmfa.si/>), kjer boste našli več podatkov o posameznem tekmovanju. Mentorje prosimo, da sledijo novicam, ki jih objavljamo na informacijskem strežniku.

■ Nekaj informacij o tekmovanjih

■ Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila dobite pri gospe Klavdiji Mlinšek na elektronskem naslovu »klavdija.mlinsek@siol.com«.

■ Matematika – srednja šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*. Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov domačih nalog, izbirnega testa in državnega tekmovanja. Datum izbirnega testa bo objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije*. Podrobnejše informacije dajeta gospod Darjo Felda na elektronskem naslovu »darjo.felda@pef.upr.si« in gospod Matjaz Željko na elektronskem naslovu »matjaz.zeljko@fmf.uni-lj.si«.

Dijaki srednjih poklicnih šol se lahko udeležijo matematičnega tekmovanja v posebni kategoriji. To tekmova-

Urnik tekmovalni v letu 2006

področje	šola	tekmovalje	datum
matematika	osnovna	šolsko področno državno	16. marec 29. marec 22. april
	srednja	šolsko izbirno državno sredozemsko olimpijada	16. marec 29. marec 22. april april 6. do 18. julij
	za dijake srednjih poklicnih šol	šolsko področno državno	16. marec 29. marec 22. april
	za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol	šolsko področno državno	16. marec 29. marec 22. april
fizika	osnovna	šolsko področno državno	7. marec 21. marec 1. april
	srednja	regijsko državno izbirno olimpijada	10. marec 1. april 12. maj 8. do 17. julij
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	30. september
poslovna matematika	srednja	šolsko državno	22. marec 21. april
podelitev priznanj nagrajencem na državnih tekmovaljih v organizaciji DMFA Slovenije			18. maj

nje ureja *Pravilnik o tekmovalju dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike*. Več informacij dobite pri gospe Dušanki Vrenčur po elektronski pošti »dusanka.vrencur@guest.arnes.si«.

Tudi dijaki srednjih tehniških in strokovnih šol, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa, se lahko udeležijo tekmovalja v posebni kategoriji. Tekmovalja v tej kategoriji ureja *Pravilnik o tekmovalju dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike*. Informacije dobite pri gospe Darinki Žižek po elektronski pošti »darinka.zizek@guest.arnes.si«.

Naj poudarimo, da se matematičnih tekmovalj srednješolcev, ki jih podrobno ureja *Pravilnik o tekmovalju srednješolcev v znanju matematike*, lahko udeležujejo vsi srednješolci ne glede na vrsto šole, ki jo obiskujejo. Ta tekmovalja so podvržena mednarodni primerljivosti zaradi končnega izbora ekip, ki sodelujejo na mednarodnih tekmovaljih.

▪ Fizika – osnovna šola

Tekmovalja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovalju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Dodatne informacije daje gospod Saša Kožuh na elektronskem naslovu »sasa.kozuh@guest.arnes.si«.

▪ Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovalja v znanju fizike je objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije*. Informacije dobite pri gospodu Cirilu Dominku na elektronskem naslovu »ciril@gimb.org«.

▪ Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrilna matematika*.

▪ Poslovna matematika

Podrobne informacije o tekmovalju dobite pri gospodu Darku Rupretu po elektronski pošti »darko.rupret@s-scpet.lj.edus.si«.

Generatorji slučajnih števil

Aleksander Vesel

■ Uvod

An ban, pet podgan. Tako se začne zelo znana *izštevanka*. Kot vemo, je to pesem oz. ritmizirano besedilo, s katerim se na začetku igre na »slučajen« način določijo udeležencem vloge v igri. Še bolj očitno se s slučajnim dogajanjem, velikokrat temelji to na zaporedju slučajnih števil, srečamo pri igrah na srečo. Igra *Človek ne jezi se* je seveda zelo znan in očiten primer.

S pojavom računalnikov se je zelo kmalu pojavila potreba, da se slučajnost prenese tudi v računalniški program. Pri tem ne gre samo za programe, ki oponašajo igre na srečo, ampak tudi za zelo resne programe. Programi za urejanje in programi za kriptografijo podatkov so samo majhen del sodobne programske opreme, pri kateri si lahko pomagamo z generiranjem slučajnih števil. Zanimivo je tudi, da so zaporedja slučajnih vrednosti zelo učinkovito orodje v programih, s katerimi rešujemo najtežje probleme. Običajno pravimo, da je težek problem tisti, za katerega ne znamo napisati uporabnega računalniškega programa, ki bi tak problem popolnoma rešil. Pri teh problemih se zato zadovoljimo s približkom rešitve, pri reševanju pa pogosto pomembno vlogo igrajo generatorji slučajnih števil.

Če se slučajna števila tvorijo znotraj računalniškega programa, seveda niso v resnici slučajna. Velikokrat jih program izračuna na podlagi matematičnih formul, včasih pa jih preprosto vzame iz prej izračunanega seznama. Tako generirana števila bi zato pravzaprav morali imenovati *pseudoslučajna* števila. Prava slučajna števila so običajno generirana s pomočjo izvora zunaj računalnika. To je mogoče napraviti razmeroma preprosto tudi tako, da nekdo meče kovanec ali kokco in vnaša podatke v računalnik. Seveda ima opisani način nekaj očitnih pomankljivosti. Zato pa obstaja nekaj drugih uporabnih slučajnih procesov, kot sta npr. radioaktivno sevanje in atmosferski šum, ki se tudi v resnici uporabljajo kot izvor za generiranje slučajnih števil. Na ta način

pridobljena zaporedja slučajnih števil najdemo tudi na nekaterih specializiranih spletnih straneh (glej npr. www.random.org).

V praksi večinoma še vedno uporabljamo predvsem slučajna števila, ki jih tvori računalniški program oz. podprogram. Ker ne moremo generirati resnično slučajnega zaporedja, poskušamo generirati zaporedje, ki je po svojih lastnostih čim bližje pravemu slučajnemu zaporedju. Precej presenetljivo je, da je to zelo težaven problem, ki ga popolnoma verjetno ne bomo nikoli rešili. Precej težavna je že definicija lastnosti slučajnega zaporedja, saj intuicija pri tem marsikdaj odpove. Pri metanju kovanca tako ne pričakujemo, da se bo desetkrat zapored pojavila številka. Če vržemo kovanec desetkrat, je to v resnici zelo malo verjetno. Nasprotno pa je pri velikem številu metov zelo verjetno, da se nekje pojavi zaporedje desetih zaporednih števk, čeprav nam intuicija pravi drugače.

Generiranje posamičnega slučajnega števila v računalniškem programu ni posebno težavno. Ker se izvaja program na računalniku, lahko v tem primeru za generator uporabimo sistemsko uro in iz časovnega zapisa izluščimo »slučajno« zaporedje bitov. Do pravega problema pride, ko želimo pridobiti *zaporedje* slučajnih števil. Postopek s sistemsko uro v tem primeru seveda odpove, saj se v kratkem časovnem intervalu časovni zapis zelo malo ali celo nič ne spremeni. Tako bi npr. na raču-

nalniškem sistemu, ki meri čas v stotinkah sekunde, algoritem general dve isti zaporedni slučajni števil, če bi prišli zahtevi po generiranju dveh slučajnih števil znotraj tega časovnega intervala. Sistemska ura pa je zelo uporabna za določitev začetne vrednosti slučajnega zaporedja, ki ga imenujemo tudi *seme*.

Programski jeziki običajno generator slučajnih števil že vsebujejo. Še zdaleč pa ni nujno, da je v programski jezik vgrajeni generator tudi v resnici kakovosten. Leta 1988 sta tako Park in Miller objavila članek, v katerem ugotavljata, da je dobrih generatorjev malo, nekateri pa so celo zelo slabi. Tudi avtor tega prispevka ima zelo slabe izkušnje z enim od starejših pascalskih prevajalnikov. Kot bomo videli v nadaljevanju, pa lahko le z osnovnim znanjem programiranja sami napišemo spodoben generator.

Lehmerjeva metoda

Večina sodobnih programskih jezikov za generiranje slučajnih števil uporablja metodo, ki jo je leta 1951 predstavil Lehmer. V principu metoda deluje podobno kot izštevanke: neko (ponavadi veliko) število najprej pomnožimo z drugim številom. Dobimo vrednost, ki ustreza številu zlogov izštevanke. Dobljeni vrednosti nato prištejemo število, ki ustreza začetni točki izštevanja. Na koncu izračunamo ostanek pri deljenju s tretjo vrednostjo, ki ustreza številu otrok, ki sodelujejo v izštevanke.

Formalno Lehmerjevo metodo zapišemo na naslednji način. Zaporedje vrednosti $x_1, x_2, x_3, \dots$ dobimo z enačbo

$$x_{i+1} := (Ax_i + B) \bmod M.$$

Pogosto postavimo kar $B=0$, kar olajša generiranje zaporedja. V nasprotnem primeru je generator zahtevnejši, zaradi česar mogoče intuitivno pričakujemo boljše rezultate. V resnici je prej obratno; tako definirani generatorji so zelo občutljivi, kar bomo v nadaljevanju ilustrirali s primerom.

Če velja $B=0$, je zaporedje generiranih števil odvisno od začetne vrednosti x_0 ter parametrov A in M . Začetna vrednost $x_0=0$ je seveda vedno slaba. Če pa sta A in M dobro izbrana, je lahko katerakoli vrednost z intervala med 1 in M dobra.

Ugodno je, če je M praštevilo. Na ta način zagotovimo, da so vse vrednosti x_i zanesljivo različne od 0.

PRIMER. Naj bo $M=7$, $A=5$ in $x_0=2$. Dobimo zaporedje

3, 1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6, 2, ...

Števila v zaporedju se ponovijo po šestih generiranih številih. Pravimo, da ima generirano zaporedje *periodo* dolžine šest. Pravo slu-





čajno zaporedje števil v resnici nima periode, pri Lehmerjevi metodi pa se periodi ne moremo izogniti. Ali je zato Lehmerjeva metoda neuporabna? Teoretično seveda je, v praksi pa ne nujno. Pomagamo si tako, da izberemo čim večji M in definiramo zaporedje s periodo, ki je tako dolga, kot je to le mogoče. Ponavadi to pomeni, da smo zadovoljni s periodo, ki je blizu velikosti množice celih števil v danem računalniku oz. programskem jeziku.

V zgornjem primeru je dolžina periode enaka $M-1=6$, kar je največja možna dolžina za dani M . Če je M praštevilo, lahko vedno najdemo tak A , da dobimo zaporedje s periodo največje dolžine. Nekatere vrednosti konstante A pa povzročijo zaporedja s precej krajšo periodo, kar kaže naslednji primer.

PRIMER. Naj bo $M=7$, $A=4$ in $x_0=2$. Dobimo zaporedje

■ ■ 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, ...

Vrednosti v zaporedju se ponovijo že po treh generiranih številih, čeprav je v primerjavi s prejšnjim primerom edina razlika spremenjena vrednost konstante A .

Kot smo že povedali, si želimo generirati zaporedja s čim večjo periodo. Glede na zgornja primera je torej potrebno določiti čim večje praštevilo M in ustrezno vrednost konstante A . Zaradi zaželenosti čim večje hitrosti delovanja generatorja pa je smiselno, da izberemo praštevilo M v okviru velikostnega reda besede centralne procesne enote. (Spomnimo se, da velikost besede, poenostavljeno povedano, označuje največje število bitov, s katerimi lahko procesor naenkrat računa.)

Večina današnjih osebnih računalnikov in delovnih postaj ima 32 bitne procesorje. To nam omogoča, da izberemo praštevilo M iz intervala $0 \dots 2^{32}-1$. Že Lehmer je predlagal izbiro $M=2^{31}-1$ oz. $M=2147483647$. Za to praštevilo je konstanta $A=48271$ ena od vrednosti, pri kateri dobimo zaporedje vrednosti z največjo dolžino periode. Nekateri avtorji priporočajo konstanto $A=16807$, ki naj bi tudi dala še sprejemljive rezultate.

Za veliko večino verjetnostnih problemov perioda z dolžino več kot dve milijardi povsem zadostuje, pri

predlagani konstanti $A=48271$ pa zaporedje zadovoljuje tudi večino drugih kriterijev za uspešnost generatorja. Zato je Lehmerjeva metoda pri tako določenih parametrih v večini primerov najboljša izbira in jo je smiselno uporabljati, razen če ni zares nujno uporabiti generatorja z drugačnimi lastnostmi (npr. z daljšo periodo).

Marsikateri (posebej starejši) prevajalnik žal nima takokakovostnega generatorja. Pogosto je vzrok neničelna konstanta B , zaradi česar postane generator zelo občutljiv.

PRIMER. Da bo primer bolj nazoren, vzemimo že znana parametra $M=2147483647$ in $A=48271$, namesto $B=0$ pa vzemimo $B=1$. Dobimo zaporedje določeno z enačbo

■ ■ $x_{i+1} := (48271 x_i + 1) \bmod 2147483647$.

Konstantama, ki definirata dobro slučajno zaporedje, smo torej dodali še konstanto, ki naj bi omogočila, da bo zaporedje »še bolj« slučajno. Pa je to tudi res?

Če postavimo $x_0=179424105$, dobimo

■ ■ $x_1 := (48271(179424105) + 1) \bmod 2147483647 = 179424105$.

Z majhno spremembo smo dober generator tako pokvarili, da lahko obtiči v ciklu s periodo ena.

■ Realizacija Lehmerjeve metode

Podprogram, ki temelji na tako preprosti enačbi, kot jo definira Lehmerjeva metoda, bi moral biti zelo enostaven. Ko pa gre za realizacijo na računalniškem sistemu, kar nas seveda tudi najbolj zanima, pa je potrebno precej previdnosti.

Običajno uporabimo za zaporedje slučajnih vrednosti $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ globalno spremenljivko. Tej spremenljivki je potrebno najprej določiti začetno vrednost x_0 . V času pisanja oz. testiranja programa je ugodno, da je začetna vrednost vedno enaka, saj na ta način pri vsakem zagonu programa dobimo isto zaporedje vrednosti. Ko program deluje, pa začetno vrednost ponavadi slučajno določimo s pomočjo sistemske ure, lahko pa jo določi tudi sam uporabnik.

Kot smo že povedali, Lehmerjeva metoda za zgoraj izbrani vrednosti M in A , vrne vrednost med 1 in $M-1=2147483646$. Običajno je uporabnejše zaporedje vrednosti iz intervala med 0 in 1, ki ga lahko zelo hitro pretvorimo v zaporedje s poljubnega intervala. S tem razmislekom dobimo naslednji pascalski podprogram, ki pa je, kot bomo videli kasneje, napačen.



```

■ ■ Function random (var x: Longint): real;
const
    M=2147483647;
    A=48271;
begin
    x := (A * x) mod M;
    random := x / M;
end;

```

Težava zgornjega podprograma je, da lahko izraz $A * x$ preseže največjo vrednost, ki jo lahko predstavimo z 32 biti oz. s podatkovnim tipom Longint (s katerim v pascalskih prevajalnikih običajno predstavimo 32 bitno celo število). V tem primeru se bo ta podprogram bodisi predčasno zaključil bodisi, če prevajalnik dovoli prekoračitev, bo zaporedje drugačno od željenega.

Rešitev ponuja spodnji podprogram. Podrobnosti izračuna zahtevajo nekaj matematične spretnosti in presegajo namen tega prispevka. Povejmo le, da si pomagamo z dvema novima konstantama:

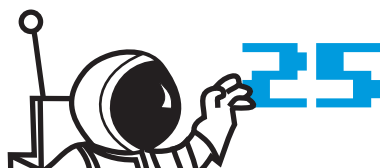
- ■ Q , ki je rezultat celoštevilskega deljenja M z A , in
- ■ R , ki je ostanek celoštevilskega deljenja M z A .

Pri izračunu potem uporabimo dejstvo, da lahko ostanek pri deljenju celega števila z M izračunamo tudi tako, da najprej celoštevilsko delimo to število z M , nato rezultat pomnožimo z M in dobljeni produkt odštejemo od prvotnega števila.

```

■ ■ Function random(var x: Longint): real;
{Funkcijski podprogram vrne slučajno
vrednost iz intervala (0,1)}
const
    M=2147483647;
    A=48271;
    Q=44488;
    R=3399;
var y: Longint;
begin
    y := A * (x mod Q) - R * (x div Q);
    if y > 0 then x := y else x := y + M;
    random := x / M;
end.

```



Profesor Josip Plemelj in komet 1847



Stanislav Južnič in
Marijan Prosen

Veliko prvovrstnih matematikov se je ukvarjalo z astronomijo, tako ljubiteljsko kakor tudi poklicno. Moč svojega matematičnega znanja so najraje preskušali pri reševanju najrazličnejših astronomskih nalog, predvsem zahtevnejših. Takšni matematiki so bili Johannes Kepler, Leonhard Euler, Alexis Claude Clairaut, Carl Friedrich Gauss, tudi naš Jurij Vega. Nekateri so imeli radi astronomijo že v mladosti in so jo želeli študirati na univerzi, a so jim to odsvetovali. Med take bi lahko prištevali tudi našega svetovno znanega matematika, prof. dr. Josipa Plemlja (Bled 1873–1967 Ljubljana).

Ljubljanska univerza se je s Plemljem zarisala na svetovni matematični zemljevid. Plemljevo raziskovalno in organizacijsko delo je opredelilo in še določa sodoben razvoj slovenske matematike. Oče Urban, mizar in mali kmet, se je kar trikrat poročil. Žal je umrl, še preden je Josip dopolnil drugo leto. Revščina tako ni obetala, da bi Josip po osnovni šoli lahko posegel po znanju v mestnih šolah. Mati ga je vendarle poslala na pripravljavnico v Grabnu in nato na ljubljansko klasično gimnazijo. Podpore dobrih ljudi so omogočale Plemljevo študij.

V tretjem razredu gimnazije je Plemlja poučeval matematiko razmeroma nov profesor Avgust Wester, s katerim se je kmalu sprl. Profesor namreč ni hotel priznati Plemljeve pravilne rešitve šolske naloge in popravljenih pisnih nalog sploh ni pokazal dijakom.

Wester je študiral matematiko in fiziko na Dunaju in prejema Knafljevo štipendijo. Ta štipendija je bila kruh kranjskih študentov številnih rodov. Westru nekako ni šlo v račun, da je Plemelj že v tretjem razredu obvladal vso gimnazijsko matematiko in se je lahko že sam vzdrževal z inštrukcijami sošolcev. Po drugi strani pa je

samemu Plemlju že nekoliko zrasel griben. Nepravilno rešena šolska naloga bi utegnila okrniti njegov ugled med sošolci in s tem morda celo znižati ceno njegove ure pri učencih, ki jih je inštruiral.

Od četrtega razreda dalje je Plemlja matematiko poučeval Westrov štajerski vrstnik, Slovenec Vincent Borštner, ki se je seveda zavedal daru svojega učenca, a mu je komaj znal pomagati. Plemlja ni nikoli vprašal za oceno. Zadostovale so kar odlično napisane pisne naloge. Pred tablo ga je klical le tedaj, ko nihče od sošolcev ni znal rešiti naloge. Vsekakor se je profesor Borštner do mladega Josipa vedel kakor do povsem odraslega matematika. V petem razredu je Borštner Plemlju in njegovim sošolcem dal za na-

logo narisati trikotnik z znano stranico, višino nanjo in razliko kotov ob stranici. Plemelj je nalogo najprej rešil trigonometrijsko in nato za dobljeno rešitev poiskal še geometrijsko razlago.

»Neverjetna rešitev,« je vzkliknil prese- nečeni profesor Borštner. Sam je imel v vadnici drugačno, lažjo izpeljavo in se kar ni mogel dovolj načuditi iznajdljivosti svojega varovanca. Malo se je pomiril šele, ko je Josip pojasnil, da je nalogo sprva rešil trigonometrijsko in šele nato poiskal geometrijsko pot do rezultata.

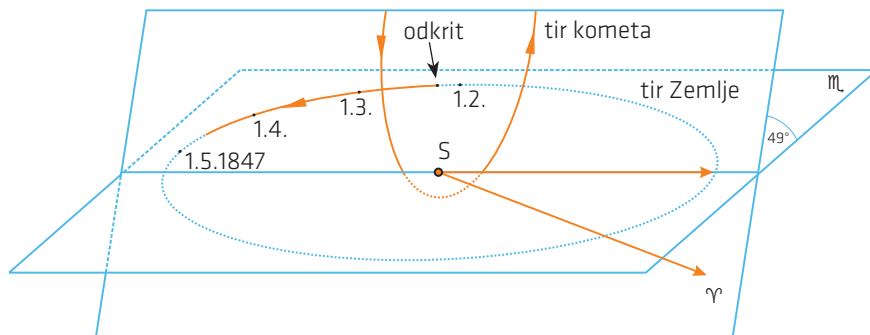
S to konstrukcijsko nalogo trikotnika se je Plemelj še kasneje zelo rad in pogosto ukvarjal. Zadnjo rešitev zanj je našel skoraj pol stoletja po Borštnerjevi razlagi. Vendar je objavil le enostavno rešitev problema. Morda brez sodobnih medmrežnih povezav niti ni mogel zlahka ugotoviti, v kolikšni meri je njegova rešitev novost.

V šestem razredu je Plemelj našel rešitev za konstrukcijo pravilnega sedmerokotnika s trisekcijo kota, ki jo je objavil šele dve desetletji pozneje. Vsekakor je Borštner znal v Plemlju zbuditi vero v matematično nadarjenost. Tako sta Karel Robida in Borštner, ki sta zaporedoma poučevala na celovški gimnaziji, drug za drugim med svojimi dijaki našla dva največja ta-



Slika 1. Plemelj med študijem na Dunaju

$t_0 \sim 10^4$ let
 $a \sim 460$ a.e.
 $S \sim$ Sonce



Slika 2. Tir gibanja kometa 1847 I glede na tir gibanja Zemlje okrog Sonca; γ – pomladišče ali točka Gama, to je lega točke na nebu, v katero pride Sonce ob spomladanskem enakonočju (21. 3.) in v današnjem času leži v ozvezdju Rib. S polno črto je označen tisti del Zemljinega tira, ko je bil komet opazovan, to je od njegovega odkritja do izginotja.

lenta slovenskih matematično-fizikalnih ved, Jožefa Stefana in Josipa Plemlja. Žal se ta dva moža nista nikoli srečala, saj je Stefan umrl nekaj mesecev pred Plemljevim prihodom na dunajske študije.

Že kot profesor na gimnaziji v Celovcu je Borštner veliko pisal v slovenske poljudnoznanstvene revije, predvsem v Kres. Opisal je spektralno analizo kot pripomoček pri astronomskih meritvah. O Kirchhoffovem in Bunsenovem odkritju spektralne analize je za slovenske bralce pri Matiči poročal tudi Maks Samec, za hrvaške bralce pa Slovenec Josip Križan. Borštner je predvsem poročal o merjenju hitrosti zvezd iz Dopplerjevih premikov v njihovih spektrih. Tako je poznejša Hubblova ideja o rdečem premiku oddaljujočih se zvezd že nekaj generacij »visela v zraku«.

Ko se je Borštner vrnil v Ljubljano, je ob fiziki poučeval še matematiko in vzgajal svojega najboljšega učenca – Plemlja. Med drugim ga je navdušil tudi za astronomijo. Plemelj se je pozneje Borštnerja in drugih svojih profesorjev s hvaležnostjo spominjal.

Pri drugih predmetih Plemelj ni bil tako zelo dober, čeravno se je naučil dovolj dobro latinščine, da je v pozni starosti lahko bral matematična dela Gausa. Za-

radi razposajenosti v zvezi z neko klopco v tivolskem parku v družbi nemških prijateljev pa se ni smel več redno vpisati v gimnazijo. Tako je maturiral privatno, z dodatnimi stroški vendar brez zamude. Ravnatelj Andrej Senekovič je bil resda matematik in fizik, moral pa je ukrepati zaradi poročila Slovenskega naroda o metanju klopce v tivolski ribnik, pri katerem je ob nemških dijakih slovenske barve zastopal le Plemelj.

Plemelj je na Dunaju študiral matematiko, fiziko in astronomijo s pomočjo Knafljeve štipendije. Med Plemljevim sošolci – Knafljevimi štipendisti – je bil nekoliko starejši Jakob Zupančič, študent matematike in fizike, pozneje gimnazijski profesor in končno ravnatelj Državne realke v Mariboru, znan kot sodelavec v številnih matematičnih učbenikih. Leto dni pred Plemljem je Knafljevo štipendijo prejel tudi študent matematike Ivan Zupanec, poznejši gimnazijski profesor v Brnu na Moravskem. Dunajska univerza je bila polna slovenskih talentov.

Plemelj je poslušal astronomijo pri Edmundu Weissu, ki je zamenjal Karla von Littrowa in je sprva predaval tudi teorijo enačb višjih stopenj. Weiss je v Plemljevih gimnazijskih letih prevzel katedro za astronomijo in dokončal zidavo dunajske zvezdarne.

Plemelj je imel izjemno dober vid in je sprva hotel postati kar astronom. Predstojnik katedre za matematiko Gustav von Escherich je že prvi mesec na seminarju odkril izredno Plemljevo nadarjenost. Vprašal ga je po dotedanjih študijah in mu odsvetoval astronomski poklic, češ da tam ne bo kruha. Pozorno je sestavil Plemljev delovni načrt in program podiplomskega študija ter mu pogosto pomagal.

Plemelj se je tako velikokrat v svojem življenju vračal k svoji ljubezni – astronomiji. To je na začetku vsakoletnih predavanj skoraj vedno povedal svojim študentom.

Pred kratkim sva avtorja imela priliko, da sva lahko pobrskala po pisni zapuščini tega zapisa profesorja Plemlja. Nanjo, predvsem na astronomske zapiske v tej zapuščini, naju je povsem po naključju v lanskoletnem razgovoru na občnem zboru DMFA Slovenije v Cerknem opozoril profesor Anton Suhadolc. Pri pregledu zvezkov z astronomsko vsebino naletimo na Plemljeve zapiske predavanj o sferni astronomiji na dunajski univerzi, kar dva zvezka pa sta popisana z računi, ki se nanašajo na Komet 1847 I (I pomeni, da je bil to prvi komet, odkrit leta 1847).

Ta komet, ki ga je 6. 2. 1847 odkril angleški astronom John Russel Hind (1823–1895), je bil viden 77 dni, torej do 24. 4. 1847. Konec meseca marca tega leta se je v prostoru najbolj približal Soncu, in sicer kar na 0,04 astronomske enote, to je razdalje Zemlja–Sonce. Menda ga je Hind tedaj lahko opazoval v neposredni bližini Sonca celo sredi belega dneva na nebu.



Osnovne podatke o tiru tega kometa je prvi izračunal praški astronom Karl Hornstein (1824–1882). Svoje izračune je objavil leta 1870 v akademski reviji na Dunaju.

Zakaj naj bi se Plemelj posebno posvetil prav temu kometu, ni jasno. Morda zato, ker so bili natančni podatki o njem prvič objavljeni prav na Dunaju, morda pa tudi zaradi govoric, da je bil komet viden podnevi, kar je nenavadno. Po vsej verjetnosti pa gre za kakšno študentsko seminarsko nalogo iz sferne astronomije oz. nebesne mehanike. Natančnejše pregledovanje teh zapiskov namreč pove, da je Plemelj na osnovi že danih podatkov o tiru tega kometa izračunal sedem njegovih navideznih leg, to je leg na nebu, torej je ugotovil, v katerih ozvezdjih je bil takrat (spomladi 1847) komet viden. V glavnem se je premikal v ozvezdjih Andromede in Rib.

Plemelj je tudi izračunal enačbo ravnine gibanja kometa 1847 I v prostoru in glede na lege na nebu vsakokratno oddaljenost kometa od Zemlje in od Sonca. To je kar precej računskega dela. Vsi računi so opravljeni z logaritmi na deset decimalnih mest, kar pomeni z največjo natančnostjo.

Podrobnosti o teh izračunih bova seveda izpustila. Kot zanimivost pa prilagava sliko, ki prikazuje tir gibanja kometa 1847 I in nekaj tipičnih leg Zemlje v času vidnosti tega kometa na nebu.

■ Tri naloge o kometu 1847 I

Pogled na goro računov, ki jih je v zvezi s kometom 1847 I opravil profesor Josip Plemelj, me je naravnost prevzel. To me je spodbudilo, da sem za Presek sestavil tri preproste in, upam, da, tudi zanimive naloge o tem kometu. Pri reševanju nalog sem se zgledoval po vsebini, ki jo najdemo v učbeniku France Avsec in Marijan Prosen: *Astronomija za 4. r. gimn.*, DMFA Slovenije.

1. Obhodni čas kometa 1847 I okrog Sonca je približno $t = 10^4$ let. Oцени veliko polos a eliptičnega tira tega kometa.
2. Dne 30. 3. 1847 se je komet 1847 I najbolj približal Soncu na razdaljo $d = 0,04$ astronomske enote. Koliko je bil komet oddaljen od Sonca na nebu, če vzamemo, da je zorna smer pravokotna na zveznico Sonce–komet (pravzaprav jedro kometa)? 1 astronomska enota (a.e.) meri $1,5 \cdot 10^{11}$ m.
3. S kolikšno hitrostjo v se je gibal komet 1847 I, ko je bil najbližje Soncu?

Komet se je gibal z nekoliko manjšo hitrostjo od 210 km/s.



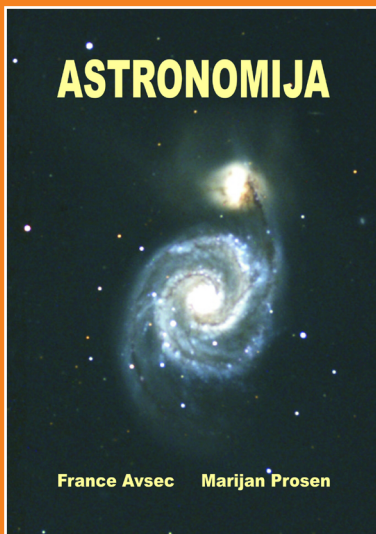
Vstavimo podatke in dobimo $v \approx 210 \text{ km/s}$.
gravitacijsko konstanto, $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ pa maso Sonca.
dišča je $v = \sqrt{GM/d}$, kjer pomeni $d = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ lek» oz. vesoljsko telo na razdalji d od Sončevega sre-
gibal skoraj po paraboli. Parabolična hitrost za »izstre-
3. Privzamemo lahko, da se je komet 1847 I v tem času

astronom Hind, pa se zdi nemogoče.
den, dejansko, in to še sredi belega dne, kakor je navajal
svoje iztegnjene roke. Teoretično bi bil torej komet vi-
izračunali smo malo večji kot, v katerem vidimo palec

$2\pi \approx 2,3$.
Zemlje in je približno 1 a.e. iz enatbe sledi $\phi = 360^\circ \cdot 0,04 /$
enačbo $\phi/d = 360^\circ / 2\pi r$, če je r oddaljenost kometa od
središča Sonca. Ker gre za majhen kot, lahko uporabimo
2. Recimo, da je bilo jedro kometa oddaljeno za kot ϕ od

$(10^4)^{2/3} \text{ a.e.} \approx 460 \text{ a.e.}$
1 astronomska enota in $t_0 = 1$ leto, sledi $a = t_0^{3/2} \text{ a.e.} =$
1. Po III. Keplerjevem zakonu $a^3/t_0^2 = t^2/t_0^2$, kjer je $a_0 =$

■ Rešitve



Kmalu bo pri DMFA
- založništvo
na voljo ponatis
učbenika
ASTRONOMIJA
avtorjev Franceta
Avsca in Marijana
Prosen

Pisec prvega slovenskega učbenika astronomije

Letos mineva 25 let od smrti našega pomembnega matematika, fizika in publicista, profesorja dr. Lavo Čermelja, ki je veliko naredil tudi za slovensko astronomijo.

Prve, v slovenskem jeziku poljudno napisane spise iz astronomije zasledimo z narodnim preporodom po letu 1848, in sicer v časopisu Kmetijske in rokodelske novice, ki jih je urejal dr. Janez Bleiweis. Takrat so začeli tudi oblikovati slovensko astronomsko izrazoslovje. Kar do leta 1934 pa smo morali Slovenci čakati, da smo dobili prvi uradni in po sprejetem učnem načrtu napisan srednješolski slovenski učbenik astronomije. Njegov naslov je bil *Kozmografija za višje razrede srednjih šol*, spisal pa ga je profesor L. Čermelj.



Marijan Prosen

Profesor Čermelj je bil rojen leta 1889 v Trstu. Na dunajski univerzi je doktoriral iz fizike in matematike. Ta dva predmeta je nato poučeval v srednjih šolah v Trstu. Kot zavednega Slovenca ga je italijanska oblast zelo preganjala. Zato je leta 1929 prebегnil v Jugoslavijo, v Ljubljano. Tu je sprva nadaljeval svojo učiteljsko pot kot profesor na srednjih šolah (1930–1937), pozneje pa je bil tudi v drugih službah, predvsem v tistih, povezanih z manjšinskimi vprašanji, saj je bil znan družbeni delavec, velik bореc za pravice slovenske in hrvaške manjšine v Italiji. Bil pa je tudi slovenski partizan in diplomat, ki je kot izvedenec za manjšinska

vprašanja sodeloval na mirovnih konferencah v Londonu (1945) in Parizu (1946). Umril je leta 1980 v Ljubljani.

Profesor Čermelj je poleg astronomskega napisal tudi vrsto geometrijskih učbenikov za srednje šole (v soavtorstvu z Vladimirjem Lapajnetom). Vsi ti so lahko še danes zgled, kako naj bi bili učbeniki oblikovani glede metodičnega, sistematičnega pa tudi likovnega posredovanja učne snovi.

Toda ustavimo se za hipec le pri astronomskem učbeniku. Ta je obravnaval vse bistvene poteze klasične astronomije: zvezdno nebo (orientacija in koordinatni sistemi), navidezno in pravo gibanje nebesnih teles, metode za proučevanje nebesnih teles, Osončje, zvezde in galaksije ter nekaj malega kozmogonije (Kantova, Laplaceova in Jeansova hipoteza). Učbeniku je bila priložena še vrtljiva zvezdna karta.

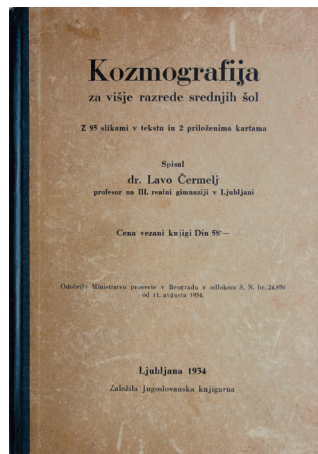
Čermeljeva *Kozmografija* je bil edini učbenik, na katerega smo se v Sloveniji do leta 1970 lahko zanesli pri pouku astronomije. Še danes ga z veseljem vzamemo v roke, ga prelistavamo, občudujemo in ugotavljamo, kako bogato vsebino je prinesel, kako spretno je bil napisan in kako dobro oz. elegantno je bil oblikovan.

Profesor Čermelj je napisal kar 80 knjig različnih vsebin, od tega okoli 60 lastnih, ostalo pa so prevodi oz. priredbe v glavnem naravoslovnih vsebin drugih avtorjev. Napisal je več knjig o življenju in delu znamenitih fizikov, matematikov in naravoslovcev, med njimi Ruđerja Boškoviča, Jožefa Stefana, Jurija Vege, Ignaca Klemenčiča, Mihajla Pupina, Nikole Tesle, Josipa Resslera. Svoj čas smo posebno radi brali Čermeljevi izvirni knjigi *Z raketo v vesolje* (MK, Ljubljana 1959) in *Človek v vesolju* (MK, Ljubljana 1961), med prevodi oz. priredbami pa je še danes nepozabna knjiga *Astronomija* Freda Hoyla.

Profesor Lavo Čermelj je bil dolgoletni urednik revije *Proteus*. Uredil je kar 23 letnikov in vanj napisal okoli 200 prispevkov samo o astronomiji in astronautiki, o drugih vejah naravoslovja in tehniki pa še dosti več. Za svoje delo je prejel več odlikovanj in priznanj, med drugim kar dvakrat Levstikovo nagrado. Postal pa je tudi častni član Prirodoslovnega društva Slovenije in Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.



Slika 1. Prof. dr. Lavo Čermelj (1889–1980)



Slika 2. Naslovnica prvega slovenskega učbenika astronomije (Ljubljana, 1934) izpod peresa profesorja Čermelja



■ Navodila sodelavcem Preseka za oddajo prispevkov

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.



Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA-založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

.tex

■ Kolofon

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

letnik 33

šolsko leto 2005/2006

številka 3

Uredniški odbor

Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marijan Prosen (astronomija), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine

DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19,
p. p. 2964, 1001 Ljubljana,
telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 2517 281.

Naročnina za šolsko leto 2005/2006 je za posamezne naročnike 4.000 SIT (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol 3.500 SIT, posamezna številka 900 SIT, dvojna številka 1.650 SIT, stara številka 650 SIT, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana,
Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana,
SWIFT (BIC): SKBASIZX, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Polona Šterk in Matjaž Čuk

Ilustracija Polona Šterk

Tehnično urejanje Matjaž Čuk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

© 2005 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1625

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

Ledene gore, padajoče domine in druge prigode iz uporabne matematike

Petar Pavešić

Opisal vam bom tipično družabno izkušnjo profesionalnega matematika: v družbi spoznaš nekoga, po krajšem vljudnostnem klepetu te vpraša: »Kaj pa ti počneš v službi?« »Sem matematik (ali učitelj matematike, ali kaj podobnega),« mu poveš. Tišina. Potem pa izdavi: »Ee, meni pa matematika ni nikoli šla.« Potem spet tišina, ali pa pogovor, pri katerem se s sogovornikom pretvarjata, da mu nisi izdal te nerodne podrobnosti iz svojega življenja. Čez čas zadrega popusti, sogovornik se ojunči in skuša popraviti prvi vtis: »Pa je mogoče to matematiko kje uporabiti,« te vpraša. Pa si tam, žogica je na tvoji strani in praviloma imaš le eno priložnost za prepričljiv odgovor. Lahko rečeš: »Seveda, matematika je uporabna vsepovsod.« Lahko tudi opišeš svoj najljubši primer uporabe matematike (ali bo tudi sogovorniku tako zanimiv?). Če želiš obdržati družbo, pa lahko previdno poskusiš izvedeti, s čim se sogovornik ukvarja in se nato hitro spomniti primera uporabe, ki bi ga pritegnila.

V Knjižnici SIGMA je izšla knjiga, ki ponuja kar nekaj možnih odgovorov na vprašanje o uporabnosti matematike. Že naslov je zgovoren: *Ledene gore, padajoče domine in druge prigode iz uporabne matematike*. Avtor Robert B. Banks nam razloži matematično ozadje vrste praktičnih problemov: kako z neba padajo majhne reči, npr. krogle ali padala, kako pa velike, npr. meteorji; kako ledeno goro z Antarktike privlečemo do sušnega predela, kako jo stalimo, da pridemo do sladke vode, in kako ugotovimo, ali se to splača; kako opišemo gospodarsko moč neke države in kako zaježimo naraščanje javnega dolga; kakšna je podobnost med vodometi in izvajanjem prostih metov pri košarki, kakšna pa med podiranjem domin in cunami. Pove nam nekaj tudi o smučarskih skokih, o krmiljenju cestnega prometa, o vrednotenju športnih rezultatov na velikih tekmovanjih, o gradnji visečih mostov. V knjigi je uporabljena matematika različnih težavnostnih stopenj, od elementarnega računstva in geometrije do odvodov in integralov, vendar so vsa poglavja napisana tako, da lahko osnovni zgodbi sledimo tudi bolj površno, brez popolnega razumevanja formul in izpeljav.

Dobili smo torej knjigo, ki na živ in zanimiv način ponazori vso širino uporabe matematike. Kdo ve, morda se boste potem, ko jo preberete, tudi vi znali obraniti pred tistimi, ki pravijo, da je matematika najbolj dolgočasna in neuporabna stvar na svetu?



Knjižnica Sigma

Od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov znanih tujih avtorjev. V reviji Presek ste si že lahko prebrali veliko predstavitev Sigminih izdaj, najnovejši izlet na področje uporabne matematike najdete tudi v tej številki.



Robert B. Banks:
**LEDENE GORE, PADAJOČE
DOMINE in druge prigode iz
uporabne matematike**

1. in 2. del

skupaj 348 strani
format 14×20 cm
mekha vezava

cena kompleta: 5.000 SIT



Stephen W. Hawking:
**KRATKA ZGODOVINA
ČASA**

Prenovljena in
razširjena ob deseti
obletnici

192 strani
format 14×20 cm
mekha vezava

3.000 SIT

Ciril Dominko in Bojan Golli:
**REŠENE NALOGE IZ FIZIKE Z
DRŽAVNIH TEKMOVANJ – 3. del**

Prva knjiga: **VADEMEKUM IN NALOGE**
Druga knjiga: **NAMIGI IN REŠITVE**

skupaj 424 strani
format 14×20 cm
mekha vezava

cena kompleta: 5.000 SIT



Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še več kot 40 drugih del. Podrobnejše predstavitve najdete na spodnjem naslovu, kjer lahko vse knjige tudi naročite s popustom:

<http://www.knjiznica-sigma.si/>

Individualni naročniki revije Presek imajo pri naročilu izdaj DMFA–založništvo 20 % popusta!
Dodatne informacije dobite v uredništvu Preseka po telefonu: (01) 4766 553 ali 4232 460