

2.

01
10
10
10
01
10
01
10
10
01
10
01
01

os

LETNIK 33 (2005/2006) ŠTEVILKA 2

MATEMATIČNA OLIMPIJADA
ARHIMED IN ASTRONOMIJA
TEKMOVANJA
NAGRADNA KRIŽANKA

PRESERK

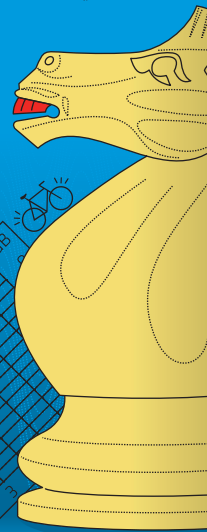
os



30
km/h
100 dB(A)

Noli turbare circulos meos.

$$\frac{1}{720} \cdot 360^\circ = \frac{1}{2}^\circ$$



matematika

fizika

računalništvo

astronomija

ISSN 0351-6652



9 770351 665326

Poslušanje glasbe



Ne glede na to, kako zapletena je glasba (ali podatki), vedno je na diskih shranjena samo z uporabo števil 0 in 1. Da to lahko dosežemo, na vsakem koraku procesa uporabljamo mnoge različne veje matematike, tako zahtevne kot tudi elementarne.

Procesiranje signala. Originalni zvok je vzorčen, zvočni valovi so izmerjeni v pravilnih pogostih intervalih. Kako pogosti so ti intervali, je odvisno od Shannono-vega izreka o vzorčenju.

Binarna aritmetika. Amplitude so predstavljene kot šestnajstbitna zaporedja ničel in enic. Ničle in enice so shranjene na CDju kot gladka območja in izdoline.

Partialne diferencialne enačbe. Enačbe dinamike tekočin upravljajo proces kompresiranja odsevalnih in zaščitnih slojev preko podatkov.

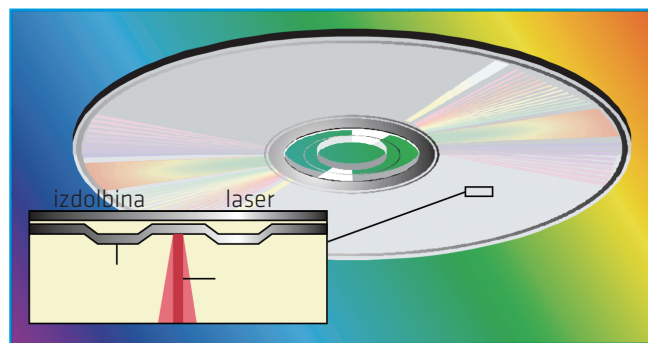
Linearna algebra. Neizogibne popačenosti ničel in enic (na primer zaradi prahu ali prask) so izravnane s pomočjo kod za odkrivanje in popravljanje napak.

Trigonometrija in analiza. Za pridobitev podatkov sledilec premika laser, ki se osredotoči na podatke. Ko laser bere od sredine diska proti njegovemu robu, mora motor premikati CD z vedno manjšo hitrostjo, da ohrani hitrost branja podatkov konstantno.

ARHIMED IN
ASTRONOMIJA,
stran 28



Greva se eno partijo šaha?



© Scientific American, Ken C Polhmann, 1998

POJASNILO: Gornji prispevek je prevod iz rubrike »The Mathematical Moments«, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.

MEDNARODNA MATEMATIČNA
OLIMPIJADA, stran 4



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 33, šolsko leto 2005/2006, številka 2

Kazalo

Matematični trenutki

Poslušanje glasbe stran 2

Matematika

Mednarodna matematična olimpijada strani 4 in 31
S kolesom po hribu navzgor in navzdol stran 5-7
Mednarodna matematična olimpijada, Mehika, Merida, 2005 stran 7-8

Fizika

Hrup stran 9-12
Merjenje zvoka stran 12-15
Razmisli in poskusi – odgovori stran 18-19
Sedmi in osmi člen verige eksperimentov stran 20-24

Računalništvo

Kako delujejo šahovski programi (prvi del) stran 25-27

Astronomija

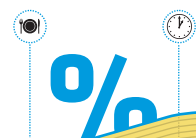
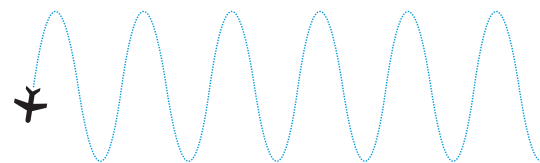
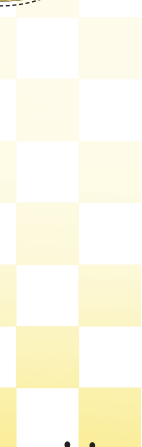
Arhimed in astronomija stran 28-29

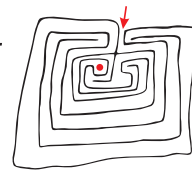
Razvedrilo

Rešitev nagradne križanke Presek XXXIII/1 stran 15
Nagradna križanka stran 16-17
Magična optična prevara? stran 18

Tekmovanja

Evropski matematični kenguru priloga
Tekmovanje za srebrno Stefanovo priznanje priloga
5. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol priloga





Mednarodna matematično olimpijada

■ Pogled v zgodovino

Prvo mednarodno matematično olimpijado so organizirali leta 1959 v Romuniji, kjer so se zbrali predstavniki Madžarske, Bolgarije, Poljske, Češkoslovaške, Vzhodne Nemčije in ZSSR, torej predstavniki držav tedanjega vzhodnega bloka. Za tem so mednarodno matematično olimpijado gostile posamezne države udeleženske.

Gregor
Dolinar,
Darjo
Felda,
Matjaž
Željko

Sčasoma se je število držav, katerih dijaki so tekmovali na olimpijadah, večalo. Najprej se je omenjenim državam pridružila Jugoslavija (SFRJ), katere del je bila tudi Slovenija. To je bilo leta 1963 na 5. MEDNARODNI MATEMATIČNI OLIMPIJADI v Wroclawu na Poljskem, ko so na matematični olimpijadi prvič tekmovali tudi slovenski srednješolci. Skupaj s sovrstniki iz drugih jugoslovanskih republik so tedaj tekmovali Franc Dacar, Peter Petek in Stanko Vrščaj, ki so se odlično odrezali. Franc Dacar je osvojil prvo nagrado, Peter Petek pa drugo.

Naši srednješolci so se v okviru jugoslovanske ekipe udeleževali mednarodnih matematičnih olimpijad vse do leta 1991 v Sigtuni na Švedskem. V tem času je matematično olimpijado dvakrat organizirala Jugoslavija, in sicer leta 1967 v Cetinju ter leta 1977 v Beogradu. Število držav, ki so se vključevale v matematično olimpijado, je vztrajno naraščalo: leta 1963 jih je bilo 8, leta 1967 že 13, leta 1977 se je število povzpelo na 21, do leta 1987 pa na 42. Leta 1993, ko je sodelovalo na 34. MEDNARODNI MATEMATIČNI OLIMPIJADI v Istanbulu v Turčiji že 73 držav, je Slovenija prvič nastopila s svojo ekipo. Mednarodna matematična olimpijada je dandanes najbolj prestižno matematično tekmovanje srednješolcev z vseh koncev sveta.

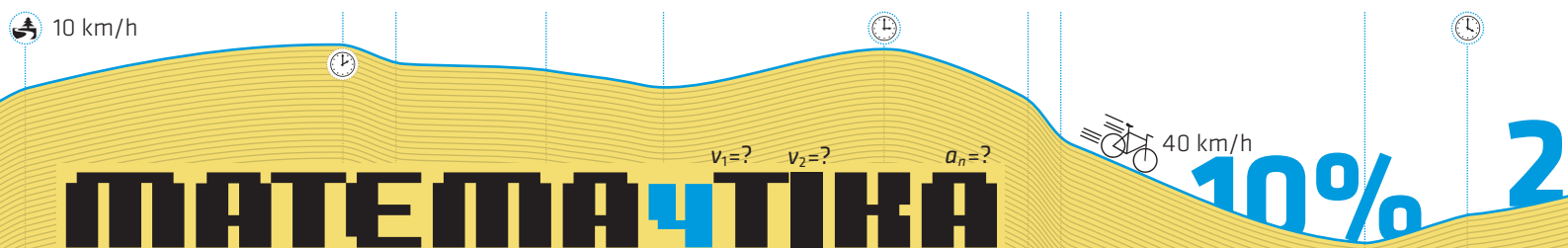
Reševanje matematičnih problemov je kot hoja po labirintu. Stranpoti in slepe ulice otežijo pot do cilja. Labirint simbolizira težko prehodno, kaotično pot, na kateri se človek izgublja po zavitih stezah in ki skriva zaklad pred neposrednim dostopom. Ko pa enkrat dosežemo cilj, nam Ariadnina nit omogoča, da to pot lažje prehodimo in da se izognemo stranpotem. S sprehodom po matematičnem labirintu spoznamo čar matematičnih stezic in zank. Prav zato je logotip 47. MEDNARODNE MATEMATIČNE OLIMPIJADE labirint. Oblikoval ga je arhitekt Janez Suhadolc.

V začetnih letih je lahko v ekipi vsake sodelujoče države tekmovalo do osem srednješolcev. Leta 1982 so to število znižali na štiri, a so ga že leto za tem zvišali na šest in ta odločitev še zmeraj velja. Tekmovalec ne sme biti starejši od 20 let in ne sme obiskovati izobraževanja, višjega od ravni srednje šole. Posamezen dijak lahko večkrat tekmuje na mednarodni matematični olimpijadi, vse dokler ustreza predvideni starostni omejitvi in šolski izobrazbi.

■ Kako poteka matematična olimpijada?

V delegaciji vsake sodelujoče države sta poleg ekipe z največ šest tekmovalci še član mednarodne tekmovalne komisije, ki je hkrati vodja delegacije, in vodja ekipe. Država gostiteljica mednarodne matematične olimpijade je dolžna povabiti vse države, ki so se udeležile predhodnih olimpijad. Vsaka vabljen država lahko predlaga do šest predlogov nalog. Država gostiteljica ne sme predlagati nalog, pač pa sestavi posebno skupino strokovnjakov, ki pregleda prispele predloge in pripravi primeren izbor približno 30 nalog.

■ Nadaljevanje na strani 31 >>



\$ kolesom po hribu novzgor in novzdol

»Nič hudega,« pravi, »če gre pot do tja skoraj ves čas precej v hrib. Saj gre zato pa nazaj toliko lažje navzdol.«

Oni dan se je A spet odpravil na to pot. Ko se je kasneje doma ob pijači o tem pogovarjal v svoji družbi, ga je eden od prijateljev vprašal, s kolikšno hitrostjo je vozil. A je povedal, da je prvo polovico poti iz svoje vasi do sosednje prevozil s povprečno hitrostjo **10 km/h**, drugo polovico od tam nazaj pa s povprečno hitrostjo **30 km/h**. Pa prijatelji še zmeraj niso bili zadovoljni z odgovorom. Opozorili so ga, da so ga vendar vprašali za povprečno hitrost na celotni poti, ne pa za hitrosti na tem ali onem odseku. A jim je odvrnil, da jim je vsekakor povedal dovolj, da si jo lahko izračunajo kar sami.

In tako so se oglasili drug za drugim.

B: »To je vendar dokaj preprosto. Tvoja povprečna hitrost na celotni poti je povsem očitno kar povprečje obeh delnih hitrosti. To pomeni, da znaša $(10 \text{ km/h} + 30 \text{ km/h})/2$ oziroma **20 km/h**. No, če že hočete ob tem še razlago: kolikor je A

glede na povprečje sprva na poti navzgor izgubil, prav toliko je kasneje pridobil na poti navzdol. Mar ni osnovna lastnost povprečja prav v tem, da nekako uravnovesi odklone navzgor in navzdol?»

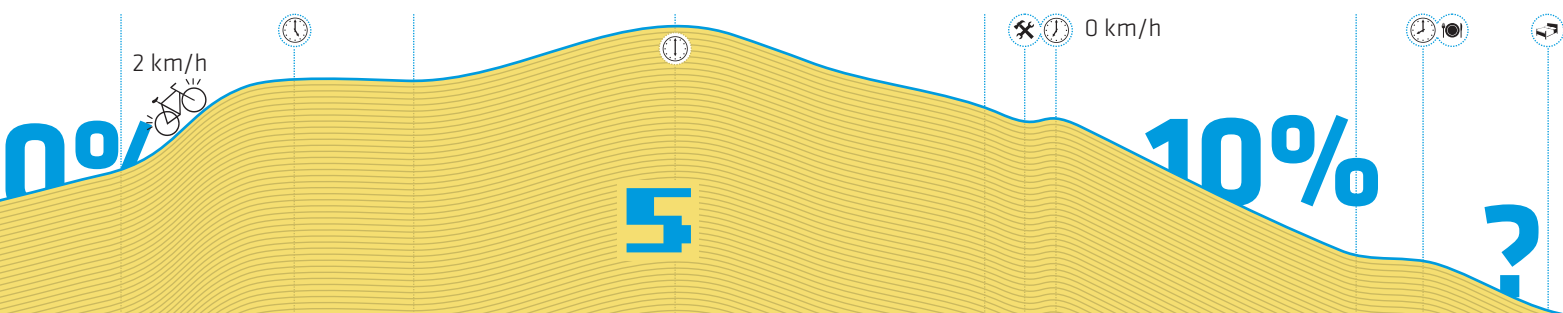
C: »Hm, tako preprosto in očitno pa vse skupaj vendarle ni. Če je bila A-jeva hitrost na drugem delu poti trikratnik hitrosti na prvem delu, je ta del poti opravil v tretjini časa, ki ga je porabil za prvo polovico do vrha. Celotno pot je torej prevozil v $4/3$ časa, ki ga je potreboval samo za prvo polovico.

Če bi A vozil ves čas, torej po hribu navzgor in navzdol, z enako hitrostjo, bi prvi del prevozil v samo $\frac{2}{3}$ časa, ki ga je sicer v resnici potreboval od začetka do vrha hriba. Njegova hitrost bi bila v tem namišljenem primeru torej $\frac{3}{2}$ -kratnik njegove, v prvem delu, resnične hitrosti. Hitrost in čas sta si namreč v obratnem sorazmerju: kolikorkrat se ena količina poveča, tolikokrat se druga zmanjša. In glej, prav to je tedaj že tista hitrost, ki jo iščemo. S hitrostjo $(\frac{3}{2}) \cdot 10 \text{ km/h} = 15 \text{ km/h}$ je torej A v povprečju prevozil vso svojo pot. «

D: »Ne, ne. Mislim, C, da se motiš in da ima prav B. No, vsaj delno, kajti meni se namreč zdi njegova »metoda« kar nekam za lase privlečena. Ne vem, za kaj bi naj

bilo kar tako samo po sebi umevno, da se povprečna hitrost na vsej poti računa preprosto kot povprečje delnih hitrosti. A zgolj zato, ker se tako lepo sliši? Poglejte, jaz trdim, da je B sicer povedal pravi odgovor, vendar pa imam v nasprotju z njim za to še pravilno razlago. Torej. Če bi A vozil navzgor natanko eno uro, bi prevozil tudi natanko 10 kilometrov. Ne vemo sicer, kako dolgo je v resnici vozil tja gor, a v eni minuti je glede na svojo hitrost iz prvega dela zagotovo prevozil natanko 10/60 kilometrov. Podobno lahko sklepamo, da je na poti navzdol, ne glede na to, kako dolgo je vozil, v eni sami minuti prevozil 30/60 kilometrov. Če vzamemo torej dve minuti, po eno iz prvega in iz drugega dela poti, je v njiju prevozil $10/60 + 30/60$ oziroma 40/60 kilometrov. To pomeni, da bi v eni uri, ki ima 30 krat po 2 minuti, prevozil 30 krat toliko, oziroma 20 kilometrov. To pa seveda že pove tudi vse o njegovi povprečni hitrosti na celotni poti. Ta je torej zares **20 km/h**.«

E: »No, to, dragi moj, si pa res zapletel. Pravzaprav močno dvomim, ali sploh sam razumeš, kaj si povedal. Poglej, saj se da vendar povsem preprosto razložiti. A bi s hitrostjo, ki jo je imel na poti navzgor, v eni uri prevozil 10 kilometrov, s hitrostjo z drugega dela poti pa bi v eni uri prevozil 30 kilometrov? V dveh urah bi torej tako pre-



vozel vsega skupaj 40 kilometrov. Kar pomeni, da bi v eni sami uri prevozil polovico tega, oziroma 20 kilometrov. Torej je njegova povprečna hitrost na celotni poti zares **20 km/h**, le da je bilo tokrat to povsem preprosto a hkrati natančno razloženo.»

F: »Hm, marsikdo med vami ima marsikaj prav. In če od vsega tega vzamem samo najboljše, dobim tudi najboljšo zmes. Menim torej, da B-jeva ideja o uporabi povprečja sploh ni tako napačna. Le zgrabiti jo je treba s prave strani.

Torej. Očitno je A en kilometer na poti navzgor napravil v $1/10$ ure, en kilometer na poti navzdol pa v $1/30$ ure. In tedaj je vendar jasno, da je en kilometer, vzeto na celotni poti, opravil v povprečju v $(1/10 + 1/30)/2$ ure oziroma, preračunano, v $1/15$ ure. To pa že pomeni, da je bila tudi njegova povprečna hitrost na poti **15 km/h**.»

G: »Tak, dajte no! Jasno je, da se v tej nenavadni »zdravorazumski« razpravi prav vsi motite. Poglejte. Če bi A ves čas vozil tako, kot je na drugem delu, bi bila njegova pov-

prečna hitrost kar tistih 30 km/h. Ker pa je bil v prvem delu tako zelo počasen, bo njegova povprečna hitrost na celotni poti zagotovo manjša od te, ki jo je zmožal na drugem delu po hribu navzdol. In jasno – ker je z manjšo hitrostjo vozil samo na polovici poti, bo tudi njegova povprečna hitrost manjša samo za polovico hitrosti na tem delu. Torej bo znašala $30 \text{ km/h} - (10 \text{ km/h})/2 = 25 \text{ km/h}$.«

H: »Da, G, menim, da imaš v osnovi prav ti prav. Le da bi jaz račun zastavil raje nekoliko bolj pozitivistično. Že načelno pač



Resnično preveč bi se že ponavljali, če bi še to zapisali z ulomki. Saj je navsezadnje »že skorajda« kar dvakrat zapisano v zgornjih enakostih. Tisto, kar pritegne pozornost, pa je razmislek, čes, ali ni natančno tako sklepal tudi prijatelj F.

In poleg tega lahko harmonično sredino dveh števil definiramo kar kot OBRAVNO VREDNOST ARITMETIČNE SREDINE NJUNIH OBRAVNIH VREDNOSTI.

$$v = \frac{\frac{t_1 + t_2}{s}}{\frac{t_1 + t_2}{s} + \frac{t_1 + t_2}{s}} = \frac{\frac{t_1 + t_2}{s}}{\frac{t_1 + t_2}{s} + \frac{t_1 + t_2}{s}} = \frac{t_1 + t_2}{2s} = \frac{1}{\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}} = \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

poti namreč v resnici računamo na podlagi aritmetične sredine obeh delnih časov: razberemo, da je aritmetična sredina v računu vendarle prisotna! Povprečno hitrost na Marsičesa pa se lahko naučimo tudi iz odgovorov v nalogi. Tako iz odgovora prijatelja F

V resnici, kot kaže tudi račun, jo dobimo z njuno HARMONIČNO SREDINO: $2v_1v_2/(v_1 + v_2)$. polovico poti s hitrostjo v_1 , drugo pa s hitrostjo v_2 , kar z njuno ARITMETIČNO SREDINO (v_1 nekoliko nepremišljeno odgovoril, da dobimo povprečno hitrost kolesarja, ki prevozi prvo poučen zaplet okrog njega. Marsikdo bi namreč na podobno vprašanje vsaj v prvem hipu Najbrž se boste strinjali, da problem ni posebej zahteven. Zato pa je toliko bolj zanimiv in

rej problem pravilno razrešila C in F.

= 15 km/h. Med A-jevimi prijatelji sta to- $v_1 = 10 \text{ km/h}$ in $v_2 = 30 \text{ km/h}$, dobimo še toliko iskani rezultat v

$$v = \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{30}} = \frac{1}{\frac{3}{30} + \frac{1}{30}} = \frac{1}{\frac{4}{30}} = \frac{30}{4} = 7.5$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v}{s} + \frac{v}{s} = \frac{v}{s} + \frac{v}{s} = \frac{2v}{s}$$

težav: v istem času, kot je sicer, izpeljemo brez čas enakomerno hitro, da bi pripel na cilj) trost, s katero bi moral kolesar voziti ves čna hitrost na poti. To je seveda tista hi- vajo na hribu. Nadalje naj bo v povpre- bo dolžina poti med njegovo in sosednjo v_1 in v_2 pripadajoči hitrosti vožnje, s pa naj zatem od tam spustil nazaj v svojo vas, kolesar pripel najprej na vrh hriba in se poti. Naj bosta t_1 in t_2 časa, v katerih je Rešimo problem po »klasični« algebrasti

raje dodajam, kakor odvezemam. Sicer pa je vse skupaj v podrobnostih precej podobno tvojemu sklepu. Če bi A ves čas vozil tako, kot je na prvem delu, bi bila njegova povprečna hitrost kar tistih 10 km/h. Ker pa je v drugem delu krepko pospešil, bo njegova povprečna hitrost na celotni poti zagotovo večja od te, ki jo je zmožgal na prvem delu po hribu navzgor. In jasno – ker je z večjo hitrostjo vozil samo na polovici poti, bo tudi njegova povprečna hitrost večja samo za polovico hitrosti na tem delu. Torej bo znašala $10 \text{ km/h} + (30 \text{ km/h})/2 = 25 \text{ km/h}$.«

Kdo ima torej prav? In kolikšna je bila Ajeva povprečna hitrost na poti do sosednje vasi in nazaj?



Mednarodna matematična olimpijada Mehiko, Merida, 2005

Prizorišče letošnje mednarodne olimpijade je bila Merida v Mehiki. Predvidenih držav udeleženk je bilo 93, a zaradi težav z vizami Mongolija in Čile nista prišla.

Irena
Majcen



Na dolgo pot v Mehiko sva se najprej podala član tekmovalne komisije dr. Gregor Dolinar s Fakultete za elektrotehniko in uradna opazovalka Irena Majcen, študentka Fakultete za matematiko in fiziko. Člani tekmovalne komisije in opazovalci smo bili nameščeni v samotnem hotelu približno 100 kilometrov severno od Meride.

Nekaj dni kasneje so v Merido prileteli dijaki drugega letnika Urban Jezernik iz I. gimnazije v Celju, dijaki tretjega letnika Matjaz Berčič iz Gimnazije Škofja loka, David Gajser iz II. gimnazije Maribor, Špela Špenko iz Gimnazije Bežigrad in Gašper Zadnik iz Gimnazije Vič ter dijakinja četrtega letnika Sara Kališnik iz ŠC Celje – Gimnazije Lava.

Spremljal jih je vodja ekipe dr. Matjaz Željko s Fakultete za matematiko in fiziko.

Tekmovalci so bili nameščeni v Meridi in tako imeli priložnost spoznati tamkajšnji način življenja. Zaradi dodatne zaposlitve, ki nam jo nalaga organizacija olimpijade naslednje leto v Sloveniji, o Meridi spremljevalci težko povemo kaj več, zato je nekaj vrstic dodal David Gajser.

»V Mehiki je bilo odlično! Tekmovalci smo bili razdeljeni v več hotelov in z nastanitvijo smo bili zelo zadovoljni. V hotelu smo imeli bazen, avlo s fotelji in bazenčki, v sobi hladilnik, televizijo, likalnik z likalno mizo, povrhu pa je bilo osebje izjemno prijazno. V jedilnici smo imeli stole in mize v belem ter samopostrežbo; ko smo šli po več hrane, pa so nam umazan krožnik odnesli. Luksus! V tem delu sveta imajo Evropejci lahko težave s pitjem vode iz pipe. Zato je priporočljivo vodo kupiti. Zanimivo je, da če kupiš dva litra vode v plastični steklenici, plačaš približno toliko, kot če kupiš 20 litrov vode v plastičnem kanistru – če le-tega prineseš nazaj. Lahko imaš sicer težave, če ob vračanju kanistra nimaš računa in če ob sebi nimaš vodiča.

Nakupovanje v Meridi je umetnost. Veliko je namreč pogajanj za ceno in zato je priporočljivo imeti s seboj kakega domačina (ki vsaj približno oceni vrednost izdelka). Nekega lepega popoldneva se je naša ekipa odpravila v center po velike mehiške klobuke (som-



bre). Naleteli smo na trgovino, kjer je bila cena sombrera 190 pesov. Vodička nam je (sicer ne samoiniciativno) povedala, da v drugi trgovini dobimo sombrero za 50 pesov. In začelo se je nižanje cene, ki je trajalo kar nekaj časa. Medtem si je en član ekipe kupil prečudovito denarnico za 60 pesov (na začetku je stala 90). Kot da bi prodajalec že imel izdelan sistem za pogajanja, nam je najprej ponudil ocenitev izdelka. Seveda smo rekli, da več kot 50 pesov ne damo. In tako se je vlekle: s 190 na 100, 80, ... pesov. Tik pred odhodom se je cena znižala kar na 60 pesov, in ko so bili že nekateri zunaj, je prodajalec ponujal znižanje iz 190 na kar 55 pesov (le kako se je počutil kupec denarnice – povrhu ni kupil le ene, pač pa dve). Sombrero smo seveda kupili v drugi trgovini za 50 pesov.«



Tekmovanje je bilo 13. in 14. julija, med drugim so tekmovalci reševali naslednji dve nalogi.

1. Zaporedje $a_1, a_2, \dots$ je definirano s predpisom

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Poišči vsa naravna števila, ki so tuja vsem členom zaporedja.

2. Naj bo $a_1, a_2, \dots$ tako zaporedje celih števil, da je neskončno členov zaporedja negativnih. Denimo, da za vsako naravno število n pri deljenju števil $a_1, a_2, \dots, a_n$ s številom n dobimo n različnih ostankov. Dokaži, da je potem vsako celo število enako natanko enemu členu zaporedja.

Skupinski izlet, ki je vsako leto en dan pred podelitvijo medalj, je bil tokrat zaradi bližajočega se orkana Emily za nekaj ur skrajšan. V kraju Chitzen Itza smo si ogledali ostanke majevske civilizacije. Nato smo se vrnili v hotele, kjer so še posebej poskrbeli za varnost tekmovalcev. Nameščeni so bili v ogromnih sobah brez oken in tako so noč preživel na tleh. K sreči je orkan Emily ob stiku s kopnim izgubil moč in v Meridi smo bili priča zgolj neurju.

Kljub težavam, ki jih je povzročila Emily, so organizatorji uspeli izvesti zaključno prireditev. Gašper Zadnik je prejel srebrno medaljo, ki je za Slovenijo šele druga, David Gajser in Špela Špenko pa sta prejela pohvali.

Kot že rečeno, bo naslednje leto olimpijada na domačih tleh. Naši tekmovalci tako ne bodo pridobivali novih izkušenj na tujem, a vseeno upamo, da se bodo tudi doma izkazali.

Rešitev

Naj bo sedaj x poljubno število. Ker je $a^k > 0$ za neskončno in deksov k in so členi v zaporedju različni, obstaja tak i , da je $a_i > x$. Podobno obstaja tak j , da je $x < a_j$. Potem za $n < \max\{i, j\}$ sledi, da je vsako število med a_i in a_j torej tudi x , vsebovano v $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Za poljuben $n \geq 1$ označimo z $f(n)$ in $j(n)$ takšna indeksa, da sta $a^{f(n)}$ in $a^{j(n)}$ najmanjše in največje število izmed $a_1, \dots, a_n$. Po zgornjem tedaj sledi, da je $|a^{f(n)} - a^{j(n)}| = n - 1$, zato so v množici $\{a_1, \dots, a_n\}$ vsa cela števila med $a^{f(n)}$ in $a^{j(n)}$.

$$|a_i - a_j| \leq n - 1.$$

pri deljenju z m enaka ostanke, kar je v nasprotju s pogoji na-

2. Naj bo $i < j$. Tedaj je $a_i \neq a_j$, saj v nasprotnem primeru števila $a_1, a_2, \dots, a_j$ ne dajo različnih ostankov pri deljenju z j . Vzemimo sedaj $i < j \leq n$ in ocenimo razliko $a_j - a_i$. Če je $|a_j - a_i| \geq n$, potem za $m = |a_j - a_i|$ množica $\{a_1, \dots, a_m\}$ vsebuje dve števili, ki dasta

torej d deli a^{p-z} .

$$6a^{p-z} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Naj bo $p > 3$ dano praštevilo. Po Malem Fermatovem izreku je $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ za število a , ki je tuje s p , torej tudi za $a = 2, a = 3$ in $a = 6$. Potem je

$$a_2 = 48, \text{ sta } 2 \text{ in } 3 \text{ delitelja } a_2.$$

1. Trdimo, da je 1 edino takšno število. Zato je dovolj pokazati, da je vsako praštevilo delitelj nekega člena zaporedja a_n . Ker je



Hrup

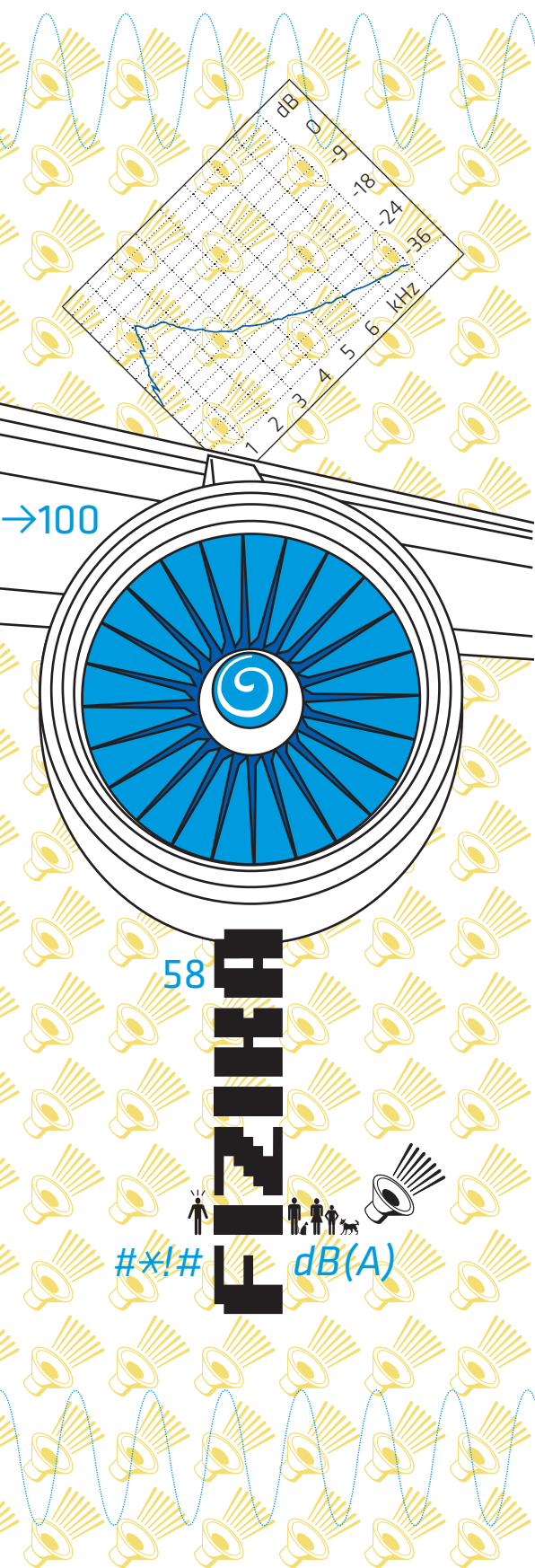
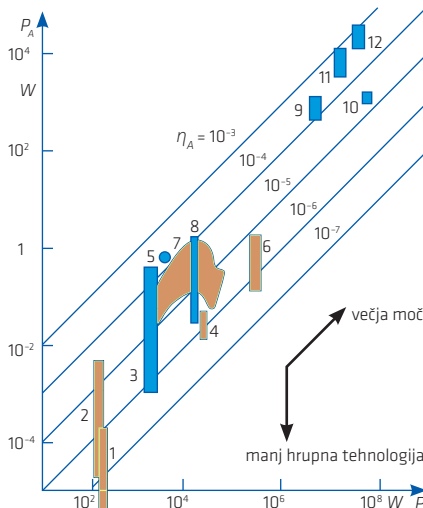
Kaj pride z avtom in gre z njim, ni za rabo, vendar avto brez tega ne more voziti?

Janez Strnad

Rešitev uganke je *hrup*, ki ga opredelijo kot »kateri koli glasni, neubrani in moteči zvok«. Hrup je ena od neprijetnosti našega časa. Onesnaževanje s hrupom obravnavamo kot druge vrste onesnaževanja okolja. Zanima nas, kaj je mogoče narediti za zmanjšanje hrupa. Zato se je smiselno pogovoriti o hrupu in njegovem fizikalnem ozadju.

Za zdaj se zadovoljimo z ugotovitvijo, da hrup merimo z merilnikom, ki pokaže *glasnost* (glejte članek Iva Verovnika *Merjenje zvoka* v tej številki Preseka). Glasnost je tem večja, čim glasnejši se nam zdi hrup. Merimo jo v enotah **dB(A)**, kar preberemo »decibel A«, menda pomeni A »avdio« – audio – slišim, v latinščini. Dokaj zapleteno ozadje te količine bomo poskusili pojasniti pozneje. Navrzimo le misel, da je hrup zvok. Zvok je *longitudinalno valovanje*. V njem okoli dane točke nihajo deli snovi, na primer zraka, v smeri potovanja valovanja. V tej smeri po snovi potujejo zgoščine in razred-

Slika 1. Na vodoravno os nanese (mehanično) moč P nekaterih strojev, na navpično pa njihovo zvočno moč P_A . Za določeno vrsto strojev je odvisnost približno linearna. Vzporodnice ustrezajo enakemu »zvočnemu izkoristku« $\eta_A = P_A / P$. Nižje vzporodnice z manjšim zvočnim izkoristkom so delno plod novih prijemov pri izdelavi strojev in obetajo manj hrupa. Po dogovoru upoštevajo pri letalih hrup pri vzletanju, ko je letalo 300 m visoko, in hrup avtomobilov pri hitrosti 100 km/h v tretjem nadstropju bližnje hiše. Sliki sta posneti po članku E. A. G. Shawa, *Noise pollution – what can be done?*, Physics Today 28 (1975) 46 (1) in ne vsebujeta novih podatkov. Znaki pomenijo 1 pomivalni stroji, 2 mikserji, 3 motorne kosilnice, 4 osebni avtomobili pri 100 km/h, 5 motorne žage, 6 traktorji s prikolicami pri 90 km/h, 7 motorna kolesa, 8 motorne sani, 9 turbopropellerska letala, 10 letala DC 10, 11 letala B727 in DC9, 12 letala B707 in DC8.



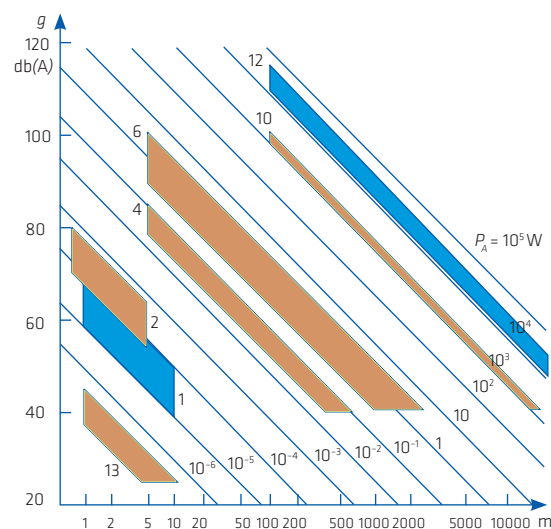
čine s *hitrostjo zvoka*. Ta meri pri sobni temperaturi v suhem zraku približno 340 metrov na sekundo. Slišimo zvok s frekvenco med 16 nihaji na sekundo in približno 20 tisoč nihaji na sekundo. (Drugo ime za nihaj na sekundo, s^{-1} , je 1 Hz, hertz.) V zraku ustrezata navedenima mejama valovni dolžini 21 metrov in 1,7 centimetra.

V zadnjem času je več hrupa, ker uvajajo delovne in prometne stroje z vse večjo močjo in ker je takih strojev vse več. Stroj majhen del svoje mehanične moči odda kot zvok. *Zvočna moč* določene vrste strojev je tem večja, čim večja je mehanična moč. Odvisnost je približno linearna (slika 1). Hrup, ki ga povzroča stroj, je odvisen tudi od razdalje od stroja. Z naraščajočo razdaljo od stroja se večja ploskev, na katero se zvok razširi. Ploskev se večja sorazmerno s kvadratom razdalje, tako da hrup pojema obratno sorazmerno s kvadratom razdalje. Pri večjih razdaljah pride do izraza absorpcija zvoka v zraku, ki je nekoliko odvisna od frekvence (slika 2).

Najprej se poskusimo navaditi na količino glasnost. Zvoku, ki ga komaj slišimo, ustreza glasnost 0 dB(A). Zvoku, ki povzroča v ušesih bolečino, ustreza glasnost 120 dB(A). Če namesto enega zvočila vzamemo dve enaki zvočili v enaki razdalji, se glasnost poveča za 3 dB(A). Če namesto enega zvočila vzamemo 10 enakih zvočil v enaki razdalji, se glasnost poveča za 10 dB(A). Hrup z glasnostjo 70 dB(A) lahko povzroči resne motnje v počutju ljudi, hrup s še večjo glasnostjo pa lahko pripelje do trajne poškodbe sluha. Nemoteno se lahko pogovarjamo na razdalji treh metrov, če hrup ne preseže 55 dB(A). Manjših sprememb glasnosti kot 1 dB(A) uho ne zazna. Zato glasnost navedemo s celim merskim številom v dB(A) brez mest za decimalno vejico. Že po teh nekaj izkušnjah uvidimo, da je glasnost dokaj nenavadna količina, če jo primerjamo s fizikalnimi količinami, s katerimi se srečujemo v vsakdanjem življenju. Na izbranem kraju se hrup navadno spreminja s

časom. Zato z enim samim podatkom ni mogoče izraziti neugodja, ki ga hrup povzroča v daljšem časovnem obdobju. Povprečna vrednost glasnosti v 24-ih urah je smiselni podatek, a ne pove vsega. Poleg dokaj stalnega hrupa, na primer ob avtocesti, zelo motijo kratkotrajni ponavljajoči se izbruhi hrupa, na primer med vzletom letal ob letališču. Ugotovili so, da se različni ljudje na hrup različno odzivamo. Na splošno hrup ponoči teže prenašamo kot podnevi. Poskusi so pokazali, da se prebudimo štirikrat pogosteje, če hrup od 40 dB(A) naraste na 80 dB(A). To lahko upoštevamo tako, da hrupu v nočnem času med 22. in 7. uro priredimo koeficient 10, hrupu v dnevnem času med 7. in 22. uro pa koeficient 1. Značilne vrednosti tako izračunanega povprečja so na primer: 86 dB(A) na balkonu v tretjem nadstropju nad prometno avtocesto, 83 dB(A) kilometer od velikega mednarodnega letališča, 60 dB(A) v starem središču velikega mesta. V ZDA to povprečje za večino prebivalcev preseže 55 dB(A). Uporabljajo še več drugih količin, ki zajamejo ta ali oni vidik neugodja zaradi hrupa. Z njimi pogosto omejijo dopustni hrup v predpisih in zakonih. V nekaterih državah so na primer za hrup na delovnem mestu postavili zgornjo mejo 90 dB(A).

Eden od uspešnih ukrepov proti hrupu je zmanjšanje zvočne moči stroja. V nekaterih primerih so dosegli lepe uspehe. Tako so na primer letalski motorji novih modelov letal Airbus in Boeing precej manj hrupni od prejšnjih. Ta korak zahteva uporabo novih prijemov in je pogosto zvezan z dodatnimi stroški. Pomaga tudi, če delovanje strojev omejimo na dnevni čas. Hrup pri sprejemniku zmanjšamo tako, da povečamo razdaljo od stroja. Hrup v delovnih prostorih zmanjšamo s stenami, ki slabo odbijajo zvok. Hrup v čolnih s krminim motorjem je manjši kot v čolnih z enako močnim vgrajenim motorjem. Pogosto rešujejo težave s posebnimi prijemi (zmanjšanje hrupa klimatskih naprav v koncertni dvorani).



Slika 2. Glasnost g strojev s slike 1 pojema približno obratno sorazmerno s kvadratom razdalje l . Na vzporednicah je navedena zvočna moč P_A strojev. 13 zaznamuje hladilnike, drugi znaki imajo enak pomen kot na sliki 1.

Povejmo še nekaj besed o *prometnem hrupu*, ki moti veliko ljudi. Nanj vplivajo gostota prometa, hitrost vozil in delež velikih tovornjakov. Velik tovornjak pri hitrosti 90 km/h v povprečju povzroči približno toliko hrupa kot 28 osebnih avtomobilov pri enaki hitrosti. K hrupu vozil prispevajo stroj, izpuh in kolesa. Hrup se precej poveča, če stroj ali dušilec ne delujeta neporečno. Hrup se zveča tudi na klancu ali pri speljevanju. Prometni hrup zmanjšamo, če povečamo razdaljo od ceste, na primer vsaj na 150 m od avtoceste ali vsaj na 50 metrov od manj prometne ceste. Hrup lahko zmanjšamo z uporabo manj hrupnih strojev, na primer tako, da stroj zapremo v zvočno izolirano ohišje, z omejitvijo hitrosti in skrbnimi načrti za ceste. Vendar so po načrtu pogosto gradili ceste na nenaseljenem območju, pa so se jim pozneje naselja približala. Smiselno je ceste umakniti vsaj od bivalnih naselij. Po enem od ukrepov ob cestah postavijo trgovske zgradbe in tovarne, naselja pa od njih bolj odmaknejo. Pomagajo tudi cestni useki, nasipi ter umetne in naravne ovire, zadnje posebno na hribovitem zemljišču. Dobre umetne ovire, ki dosežejo višino do osem metrov, zmanjšajo hrup za 10 do 15 dB(A) (slika 3). K zmanjšanju hrupa prispeva tudi goste gr-

movje ali drevje. 70 m širok pas grmovja ali drevja zmanjša hrup za 10 dB(A). Hrup v mestih zmanjša tudi zeleni val na semaforjih, s katerim dosežejo, da avtomobili manj zavirajo in speljujejo. Precej obetajo tudi »tihe ceste« s plastjo asfalta, ki je bolj luknjičav od običajnega. S tem so na Nizozemskem dosegli zmanjšanje hrupa za 4 dB(A) pri potovalni hitrosti. Približno enako zmanjšanje pri manjši hitrosti je bilo teže doseči – z dvema takima plastema. Smiselno je uporabiti velikost zrn asfalta, pri kateri je v danem primeru hrup najmanjši. Tlakovanje s kockami je neugodno za prometni hrup. Celó v tem primeru pa so razvili posebno vrsto tlakovanja, ki povzroča manj hrupa. Proti hrupu se ni mogoče boriti z enim samim ukrepom. Smiselno je uporabiti vse mogoče ukrepe in pri tem upoštevati tudi njihovo ceno.



Slika 3. Betonska (zgoraj) in lesena (spodaj) ograja kot zaščita pred hrupom.



Prinasa za zaščito pred hrupom skrbijo med drugimi Agencija Republike Slovenije na Ministrstvu za okolje in prostor in v glavnem mestu tudi Zavod za varstvo okolja Mestne občine Ljubljana. Na njunih spletnih naslovih <http://www.arso.gov.si/podrocja/hrup/podatki> in <http://www.ljubljana.si/zvo/groups> izve mo marsikaj zanimivega. V podobni smeri delujejo tudi Inštitut za varovanje zdravja in nekaj nevladnih organizacij.

Zvok. Za izvir zvoka ali *zvočilo* je značilna zvočna moč ali energijski tok, ki ga oddaja. *Jakost zvoka* vpeljemo kot gostoto energijskega toka, to je energijo, ki jo zvok v 1 s prenese skozi okvir s ploščino 1 m^2 pravokotno na smer potovanja. Gostoto energijskega toka dobimo, ko povprečno gostoto energije v zvoku pomnožimo s hitrostjo zvoka.

Zaradi nihanja imajo deli zraka kinetično in prožnostno energijo. Gostota kinetične energije je enaka gostoti prožnostne energije. V sinusnem valovanju je povprečna gostota energije enaka polovici njene največje vrednosti. Tako sta povprečna gostota kinetične in povprečna gostota prožnostne energije skupaj enaki največji gostoti kinetične energije:

$$\blacksquare \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{1}{2} \rho (2\pi v s_0)^2$$

Upoštevali smo, da je največja hitrost ali *amplituda hitrosti* pri nihanju $v_0 = 2\pi v s_0$, če je v frekvenca ter ρ gostota snovi in s_0 največji odmik delov snovi od ravnovesne lege ali *amplituda odmika*.

Zdravo uho je najbolj občutljivo pri frekvenci okoli 2000 s^{-1} – včasih navedejo 3000 s^{-1} , včasih 1000 s^{-1} . Pri tej frekvenci na *slišni meji* slišimo še zvok z jakostjo 10^{-12} W/m^2 . Za *zgornjo mejo* vzamemo zvok z jakostjo 1 W/m^2 , ki v ušesu povzroča bolečine.

Zanimivo je vedeti, kakšen občutek zbudi zvok, se pravi, kako glasen se zdi. Občutka ne moremo izmeriti, kakor smo vajeni meriti v fiziki. Zato so zbrali subjektivne podatke skupine ljudi z zdravim sluhom in dobljeno povprečje sprejeli kot dogovor. Na slišni meji je glasnost enaka 0 dB(A). Desetkrat večji jakosti ustreza glasnost 10 dB(A), stokrat večji jakosti glasnost 20 dB(A), tisočkrat večji jakosti glasnost 30 dB(A) in tako naprej, 10^{12} -krat večji jakosti na zgornji meji pa glasnost 120 dB(A). Glasnost narašča sorazmerno z *logaritmom* razmerja jakosti in najmanjše jako-

sti, ki jo v tistih okoliščinah še zaznamo. Enota bel, po Alexandru Grahamu Bellu, izumitelju telefona, je na splošno določena z desetiškim logaritmom razmerja, decibel je desetina bela.

Zvok, v katerem nihajo deli zraka z določeno frekvenco, je *ton*. Ton oddajajo na primer nihajoče glasbene vilice. Mešanica dveh ali več tonov je *zven*. Zven oddaja večina glasbil. V zvenu je zastopan ton z najnižjo, to je *osnovno*, frekvenco, ton z dvojno, ton s trojno ... osnovno frekvenco. Zveni, ki jih dobimo, ko na različnih glasbilih zaigramo isto noto, se ujemajo po osnovni frekvenci, a razlikujejo po deležih tonov z višjimi frekvencami. Pravimo, da se razlikujejo po *barvi*. Zven nastane tudi, ko zapojemo katerega od samoglasnikov. Omeniti velja, da v nauku o glasbi uporabljajo drugačno poimenovanje: v njej ton, ki ga zaigramo na glasbilo, ustreza fizikalnemu zvenu. Bolj zapleten zvok je *šum*, na primer, ko izgovorimo katerega od šumnikov ali sičnikov, ploskemo z rokami, trgamo papir.

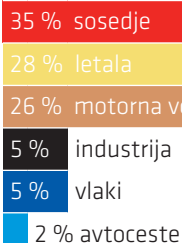
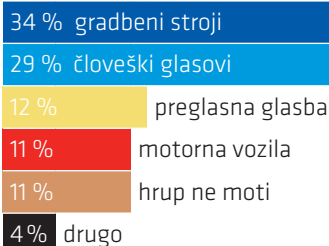
Spekter pokaže, kateri toni sestavljajo zvok (slika 1 v Verovnikovem članku, glejte tudi članek *O spektrih*, Presek 1985/86, str. 322). Spekter tona vsebuje eno samo *črto* pri frekvenci tona. Spekter zvena vsebuje več črt. Višina črt se ravna po jakosti zvoka, ki ustreza tem tonom. Spekter tona in spekter zvena sta *črtasta*. V šumu so zastopani vsi toni na določenem frekvenčnem območju. Spekter šuma je *zvezen*. Hrup je šum, ki se mu spekter s časom neurejeno spreminja.

Glasnost tona z določeno frekvenco vpeljemo kot

$$\blacksquare g = 10 \log \frac{j}{j_0} = 10 \log \left(\frac{s_0}{s_{00}} \right)^2 = 20 \log \frac{s_0}{s_{00}}$$

j je jakost zvoka pri tej frekvenci in j_0 slišna meja, to je jakost zvoka, ki ga pri tej frekvenci komaj še slišimo. s_0 je amplituda delov zraka in s_{00} amplituda na slišni meji. Amplituda delov zraka na slišni meji

s_{00} meri samo 10^{-11} m, manj od premera molekule, na zgornji meji pa milijonkrat več. log je logaritem z osnovo 10. Velja na primer $\log 1 = \log 10^0 = 0$, $\log 10 = \log 10^1 = 1$, $\log 100 = \log 10^2 = 2$. Merilnik glasnosti v dB(A) upošteva, da je uho bolj občutljivo za tone s frekvenco 1000 s^{-1} in manj za tone z večjo ali manjšo frekvenco. Tukaj smo zvok v fiziki opredelili z amplitudo odmika delov zraka od ravnovesne lege. Podobno je mogoče zvok opredeliti tudi z amplitudo odmika tlaka od ravnovesnega tlaka. Ta meri pri zvoku s frekvenco 1000 s^{-1} na slišni meji $2,8 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$.



Slika 4. Razvrstitev 9828 odgovorov na vprašanje »Kakšen hrup vas najbolj moti?«, ki ga je v okviru »ankete informativno-zabavne narave« postavila na spletu Najdi.si 28.1.2004 (zgoraj). Razvrstitev odgovorov nizozemske ankete iz leta 2003 se precej razlikuje (spodaj). Zaradi zaokrožitvenih napak je vsota malo večja kot 100%.



Merjenje zvoka

Toni, zveni in šumi predstavljajo pomemben del našega vsakdanjega okolja. Ljudje se običajno sporazumevamo tako, da govorimo in se poslušamo. Tudi mnoge živali komunicirajo med seboj z zvočnimi sporočili. Glasba pa najbrž že od človeške prazgodovine predstavlja najpogostejše sredstvo za zadovoljevanje potreb po zabavi in umetnosti.

Ivo Verovnik

Iz zgodovinskih virov je razvidno, da so zvočne pojave raziskovali že v antiki, vendar je bil pomembnejši napredek na tem področju dosežen šele v 19. stoletju. Takratni raziskovalci pa so slej ko prej naleteli na nepremagljivo oviro. Njihove merske naprave niso mogle slediti hitrim spremembam količin, s katerimi opišemo zvok. Če želimo podrobneje analizirati nihanje delov glasbenega instrumenta, ki igra, denimo, komorni ton a^1 , potrebujemo napravo s časovno ločljivostjo okoli desettisočinke sekunde.

Z razvojem elektronskih naprav, posebej še z razvojem računalnikov, ki zadoščajo zahtevanim lastnostim časovne ločljivosti, so se odprle povsem nove možnosti raziskovanja zvočnih pojavov.

V nadaljevanju si bomo ogledali možnosti merjenja in rezultate analize zvoka z osebnim računalnikom, na koncu pa še šolski merilnik hrupa ter nekaj rezultatov merjenja s takim merilnikom. Tu naj omenimo, da najde bralec dodatna pojasnila o tej temi v članku z naslovom *Hrup* avtorja Janeza Strnada v tej številki Preseka.

Diagrami zvočnega nihanja in spektri

Osebni računalniki so danes opremljeni z zvočno kartico, ki omogoča priključitev mikrofona

za snemanje zvoka in priključitev slušalk ali zvočnikov. Z ustreznim računalniškim programom pa lahko zvočne zapise tudi analiziramo. Uporabimo brezplačni, a kljub temu razmeroma zmogljivi program Audacity, ki ga najdemo na spletnem naslovu <http://audacity.sourceforge.net/>. Ogledali si bomo preprosto analizo treh osnovnih tipov zvoka: tona, zvena in šuma.

Na sliki 1 si od leve proti desni sledijo diagrami tona, zvena in šuma. Oglejmo si podrobneje diagrame na levi strani slike, ki predstavljajo potek nihanja zvočnega izvira. Z mikrofoni mehanična nihanja pretvorimo v električna. Na vodoravni osi so v našem primeru časovne enote milisekunde (tisočinke sekunde). Na navpični osi pa so enote poljubne in sorazmerne s tlačno razliko med obema stranema membrane mikrofona. Odmiki so lahko pozitivni (nad sredinsko črto) ali negativni (pod črto). Vidimo, da zapletenost krivulj narašča od diagrama, ki ustreza tonu, proti diagramu, ki ustreza šumu. Krivulja, ki predstavlja ton, ki ga oddaja npr. glasbene vilice, je najpreprostejša. Pravimo ji tudi sinusna krivulja. Iz diagrama razberemo, da se po vsaki tisočinki sekunde časovni potek nihanja natančno ponovi. S tem je določena frekvenca tona, ki je v našem primeru 1000 nihajev

na sekundo ali 1000 hertzov, kar zapišemo krajše kot 1 kHz (en kilohertz).

Srednji del slike prikazuje zven trobente. Vidimo, da je časovni potek nihanja sedaj zapletenejši v primerjavi s tonom. Krivulja je še vedno periodična (ponavljajoča se), vendar pa ima lahko pri zvenih znotraj posamezne periode poljubno obliko. S to obliko je določena barva zvenov, s katero razlikujemo npr. igranje iste note z različnimi glasbili. Z dolžino periode je določen občutek višine tona.

Na desnem diagramu je prikazan šum vodnega slapa, ki za razliko od prejšnjih dveh periodičnih nihanj prikazuje naključna nihanja. Tu ne najdemo nobene periodičnosti. To je tudi razlog, da ne moremo poznati višine šumenja slapa.

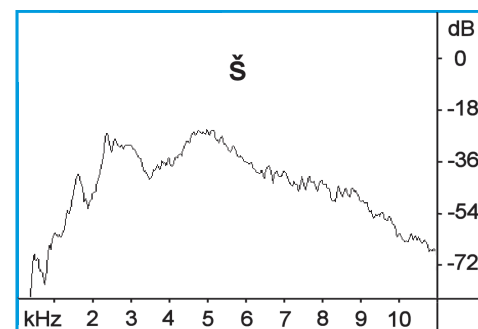
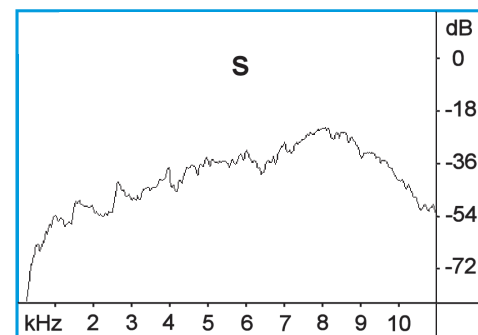
Posebno uporabni so diagrami na desni strani slike. Imenujemo jih spektri. Ti pokažejo, kateri toni sestavljajo zvok. Vodoravna os sedaj predstavlja frekvenco, na navpični osi pa je skala označena v decibelih (dB). Te enote nimajo neposredne zveze z enotami za merjenje hrupa dB(A), opisanimi v že omenjenem članku o hrupu. V našem primeru nam skala v decibelih omogoča primerjavo moči različnih frekvenčnih sestavin zvoka. Če v določenem delu spektra razberemo npr. za 10 dB večjo vrednost kot v drugem, pomeni to, da je pri tisti frekvenci moč zvočila 10 krat večja kot v drugem. Tako skalo imenujemo logaritemska in jo običajno uporabimo za diagrame z zelo velikim razponom prikazanih vrednosti.

V spektru tona vidimo le eno samo črto. Njena lega na frekvenčni osi pokaže frekvenco, s katero je določen občutek višine tona. Višina črte pa je sorazmerna z logaritmom amplitude električnih signalov mikrofona, s katerim smo posneli zvok. Tu moramo omeniti, da imamo v našem spektru namesto črte le njen približek, namreč zelo ozko zvonasto krivuljo. Tak prikaz je posledica posebnega načina računalniškega izračunavanja spektralnih sestavin zvoka.

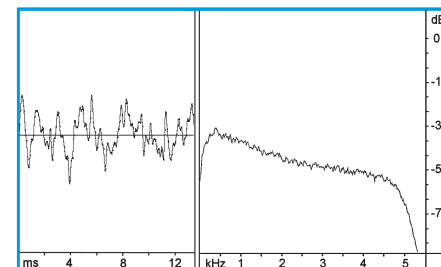
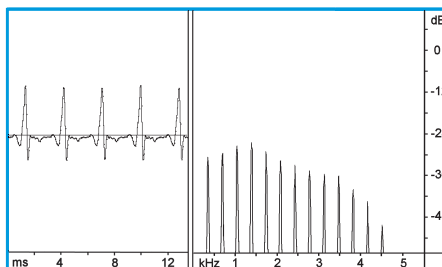
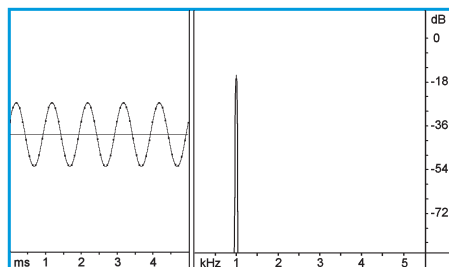
V spektru zvena trobente vidimo mnogo črt v enakih frekvenčnih razmikih. Tem zvočnim sestavinam pravimo delni toni ali harmoniki, v glasbi pa uporabljajo tudi izraz alikvotni toni. Vidimo, da v primeru trobente vsi delni toni nimajo enake moči. Razporeditev moči delnih tonov določa barvo zvena. Tako npr. da analiza zvena klarineta bistveno drugačno porazdelitev moči po delnih tonih, kot jo vidimo pri trobenti.

Zanimiv je tudi spekter šuma vodnega slapa. Spektralna analiza v tem primeru ne pokaže posameznih tonskih sestavin, temveč je krivulja razpotegnjena črta preko širokega frekvenčnega intervala. Tak spekter imenujemo, za razliko od prejšnjih dveh, ki sta črtasta, zvezni spekter. V spektru šumov so zastopane vse tonske sestavine znotraj nekega frekvenčnega intervala.

Ker se bomo v nadaljevanju posvetili merjenju hrupa, ki je običajno šum, si oglejmo še primer



Slika 2. Glasova s in š se razlikujeta po tem, da je pri prvem največji delež moči pri frekvenci okoli 8 kHz, pri drugem pa pri okoli 5 kHz.



Slika 1. Diagrami predstavljajo rezultat analize tona (levo), zvena trobente (sredina) in šuma vodnega slapa (desno). Na levi strani slike so časovni poteki nihanja, na desni pa odgovarajoči spektri.

dveh šumov, ki predstavljata glasova iz našega govora. To sta glasova s in š (slika 2). Glasova nastaneta s tem, ko pihnemo zrak skozi zožen predel ustne votline v bližini ustnic. Tam vrtničasti tok povzroča naključne spremembe zvočnega tlaka, ki se pri obeh glasovih nekoliko razlikujejo zaradi različne oblike ustne votline. Vidimo, da se tudi šumi razlikujejo po različnih frekvenčnih porazdelitvah moči zvoka. Zaradi tega povzročajo različne slušne občutke in jih lahko prepoznavamo. Tako lahko že v primeru vodnega slapa (slika 1) ugotovimo, da ima zvok tam največji delež moči pri okoli 500 Hz, pri glasu s je vrh pri 8 kHz, pri š-ju pa je ta premaknjen k nižjim frekvencam.

■ Merjenje cestnega hrupa

Cestni hrup bomo izmerili na dva načina. Najprej nas zanima njegova frekvenčna struktura. Meritev izvedemo na podoben način, kot smo to naredili s šumom vodnega slapa in z glasovoma s in š. Ob prometni cesti posnamemo zvok, posnetek prenesemo v računalnik in ga z računalniškim programom analiziramo. Za cest-

ni hrup je značilno, da ni ves čas enak. Po svoji glasnosti in spektralni strukturi se časovno spreminja, odvisno od tega, kakšna vozila in koliko vozil trenutno vozi mimo. V tem primeru je smiselno, da naredimo daljši zvočni posnetek (nekaj minut) in nato izračunamo povprečni spekter. Rezultat tega je prikazan na sliki 3.

Poleg spektra nas pri hrupu zanima tudi glasnost, ki jo izmerimo s posebnim merilnikom. Naj na kratko ponovimo nekatera osnovna dejstva v zvezi z enotami za merjenje glasnosti. Najtišji, komaj še slišni zvok, ima glasnost 0 dB(A). Povprečna glasnost zvoka med običajnim razgovorom je okoli 60 dB(A), močan hrup, ki že povzroča bolečine v ušesu in resne poškodbe sluha, pa meri 120 dB(A).

Merilnik glasnosti podjetja Vernier (www.vernier.com), prikazan na sliki 4, ima poseben filter, ki pri zvenu ali šumu upošteva, da je spodnja slišna meja najmanjša pri frekvenci okoli 2000 Hz in da je pri manjši in večji frekvenci večja. Merilnik kaže glasnost v dB(A), če je ta filter vključen. S tem dosežemo, da se glas-

nost tona približno ujema z glasnostjo zvena ali šuma, če slišimo zven ali šum enako močno kot ton.

Tudi pri merjenju glasnosti cestnega hrupa s tem merilnikom je smiselno upoštevati povprečje daljšega časovnega obdobja. V približno enakomernih časovnih presledkih ročno beležimo prikazane vrednosti in kasneje izračunamo povprečje.

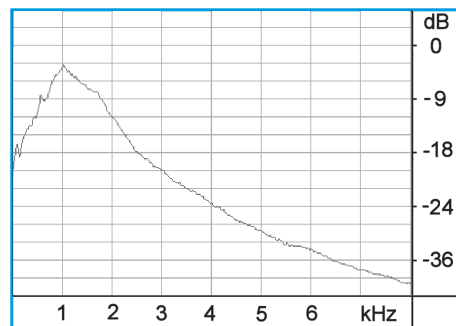
Nekoliko manj naporne možnosti pa nam ponuja uporaba računalniškega vmesnika, ki avtomatizira opisani postopek. To je prikladno predvsem, če meritve izvajamo dalj časa, npr. nekaj ur ali preko celega dne. Uporabimo lahko npr. vmesnik LabPro podjetja Vernier, s katerim je opremljena večina slovenskih srednjih šol (slika 5).

Ustrezno programiran vmesnik lahko uporabljamo kot samostojno enoto, ki samodejno beleži izmerke iz priključenega merilnika glasnosti. Na terenu na ustreznem mestu sprožimo meritve in jih kasneje »pretočimo« v računalnik.

Druga možnost pa predstavlja neposredno priključitev merilnika glasnosti na vmesnik,



Slika 3. Spekter cestnega hrupa. Meritev je bila narejena ob prometni cesti (levo). Rezultat spektralne analize (spodaj) kaže, da je največji delež zvočne moči hrupa pri frekvenci 1 kHz, torej blizu tistega frekvenčnega območja, pri katerem je človeško uho najbolj občutljivo.



tega pa na računalnik. Na tak način lahko na zaslonu računalnika tekoče spremljamo nastajajoče diagrame časovne odvisnosti glasnosti in podatke tudi shranjuje mo za kasnejšo rabo.

Naj na koncu navedemo nekaj rezultatov meritev povprečne glasnosti, med njimi tudi ob ljubljanski obvoznici, pri srednje gostem prometu (slika 3).

Meritve so bile izvedene 20. januarja 2005 ob 11.30:

- Na nadahu za pešce nad sredino ceste: 79 dB(A).
- Na sredini med cesto in okoli 100 m oddaljenim stanovanjskim blokom: 66 dB(A).
- Ob vhodnih vratih v stanovanjski blok okoli 100 m od ceste: 58 dB(A).

- Znotraj avtomobila na avtocesti pri hitrosti okoli 120 km/h: 67 dB(A).
- Vključen radio v avtomobilu med vožnjo (glasba pri normalni glasnosti): 80 dB(A).
- Vključen avtomobilski radio (zelo na glas): 92 dB(A).
- Prenosni predvajalnik glasbe, zelo na glas, merjeno direktno na slušalki: do 100 dB(A).

Vidimo lahko, da z oddaljenostjo od ceste glasnost hrupa pojema. Posebej opozorilno pa lahko jemljemo rezultat meritve dB(A), ko smo mikrofona merilnika direktno prislonili ob slušalko prenosnega predvajalnika glasbe pri polni glasnosti. Tak zvok lahko pri daljšem poslušanju povzroči resne poškodbe sluha.

Slika 4. Šolski merilnik glasnosti SLM (Sound Level Meter) podjetja Vernier. Vgrajen mikrofona M usmerimo proti izviru zvoka. Zaslon prikazuje glasnost hrupa.



Slika 5. Računalniški vmesnik podjetja Vernier, ki lahko služi tudi kot samostojna enota za avtomatsko beleženje podatkov iz merilnika glasnosti.

Rešitev nagradne križanke Presek XXXIII/1

Nagradno križanko




AVSTRALJA INDIJSKI OCEAN					RAČUNAL. OBLIKOV. MATEVŽ BOKALIČ POKRAJINA OKOLI RIMA FRANČ. IGRALKA (ANNA)	MAJHEN ARKTIČNI GLODALEC 1	SLOVNIČAR BOHORIC	NEKDANJA STANOVSKA ORGANIZACIJA OBRTNIKOV	SLOVESNA UMES-TITEV	ENAKI ČRKI		
KMEČKO POSLOPJE												
JAPONSKA ZNAMKA GLASBIL					NAJVEČJA JUPIT-ROVA LUNA							
NAJVEČJA REKA V ALBANIJ				RIMSKA 6 NOGO-METAŠ ŠILJAK								
MESTECE PRI ZADRU KLOŠAR	8		NOTRANJ JAZ DEL KONJSKE OPREME									
AVTOR MARKO BOKALIČ	GLAVNO MESTO QUEENS-LANDA	LUTKOVNA UMETNICA	IGRALKA MIRANDA	NAŠA MLADA PEVKA 2. OSEBA EDNINE		DEL HLA-DILNIKA S TEMPE-RATURO POD NIČLO						
PESÍ PODOBNA VRTNINA Z UŽITNIMI LISTI						GRAF RIBIŠKA VRVICA	10				DEL STOPALA	
STROKOV-NJAK ZA RUSKI JEZIK		24			NEKRŠ-ČANSKO SVETIŠČE					PROVINCA V KANADI ŽGANA PIJAČA ZA V ČAJ		
IGRALKA RINA				REDKO TKANA TKANINA ZA PLENICE	15		ZNIŽANI TON A	KNEZ IZ BORODI-NOVE OPERE			GR. LJUD-SKI PEVEC, AED ANTON ASKEREC	
AVTOMO-BILSKA OZNAKA SLOVAŠKE			STOLP ZA HRANJENJE SILAŽE	ZGODNJA HRUŠKA, RZIŠNICA DO, ?, MI		20	STARO SLOVEN. IME ZANJ JE PROSINEC			26		
MESTO V JUŽNEM IRAKU			6		ZMAGO-VALKA LEPOT. TEKMO-VANJA			100 m²		ZMAGOVIT KONEC ŠAHOVSKE IGRE		
IZRAEL. DRŽAVNIK ŠARON					PLAVALNI KLUB JURČIČ JE PISAL O SOSEDOVEM							
NAJVEČJI PRITOK SREDOZEM. MORJA	18			JEZERO V SEVERNI ITALIJ		21						
AVTOR ROMANA IME ROŽE (UMBERTO)				IGRALKA IRELAND								
VIOLINISTKA BUKOVEC												



Med poslanimi praviilnimi rešitvami bomo izžrebali 3 reševalce, ki bodo prejeli naslednje tri nagrade:

- NAGRADA: **Evropski matematični kenguru 1996-2001 in Evropski matematični kenguru 2002-2004**
- NAGRADA: **Evropski matematični kenguru 2002-2004**
- NAGRADA: **Evropski matematični kenguru 1996-2001**

Kupon z nagradnim geslom in svojim naslovom in priimkom pošljite na naslov: DMFA - Založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, najkasneje do petka, 2. decembra 2005.



ITAL. PRISTANIŠČE V GENOVSKEM ZALIVU		SKLADAT. SLOV. ZABAVNE GLASBE (BOJAN)	AVSTRAL. SOPRANISTKA (NELLIE)	TOVARNA OLJ	KRATICA NEMŠKE NACIST. VOJAŠKE FORMACIJE	NEHOTEN TRZAJ OBRAZNE MIŠICE	KLICANA BARVA PRI KARTANJU	KAPITAN PODMORNICE NAUTILUS
ZAVOD ZA REDOVNIKE			9					
GLAVNO MESTO JUŽNE AVSTRALIJE						16		
GEOMETR. TELO VALVA-SORJEV PRIIMEK	2				NAJVIŠJI VRH V POŠAVJU			13
					GR. ČRKA	11	TERITORIALNA OBRAMBA	
BLONDAHLOVA OPERA						PARTIZAN. NAČIN BOJEVANJA	AMERIŠKI FILMSKI REŽISER (WOODY)	NANJO PIŠE PROFESOR, KO PREDAVA
NEMŠKI PREDLOG	PREMIK NIHALA							
			17	LEŠNIKOVO POLNILO ZA SLADICE		23		
				GR. ČRKA				
		7	ZNAK ZA NIKELJ	4. SOLMIZ. ZLOG FINSKA ZNAMKA MOBITELOV		TIRNO VOZILO TELEFON ZA RAČUNALNIK		
SMUČARKA WENZEL					GLAVNO MESTO VIKTORIJE DOLENJSKA REKA			
TOLE								
14				MEDSEBOJNA ODVISNOST IGRALKA MARGRET			12	
			CERKVENI DOSTOJANSTVENIK		25			
			KOPER				RAHEL GIB	19
NEKDANJI NEMŠKI ZUN. MINISTER (KLAUS)							GREGOR URBAS	
		5						
								
							PLANET ZA SATURNOM	22





Kupon

Ime in priimek: _____

Naslov: _____

E-pošta: _____

Geslo

1	2	3	4	5	6	7	8		
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26		19	

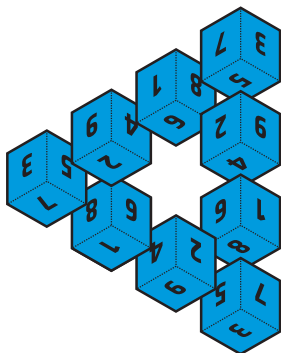
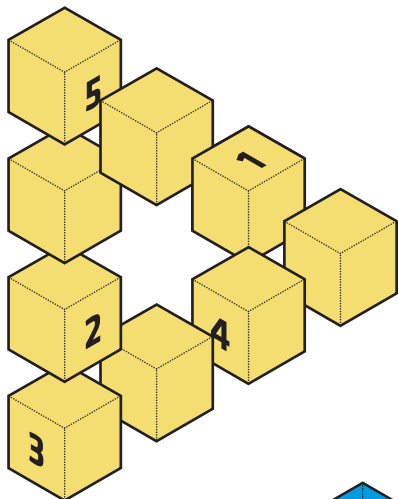


Magično optično prevaro?

Mirko Dobovišek

Števila od ena do devet napiši na prazne ploskve (vidne na sliki) kock tako:

- da se bo vsako število pojavilo trikrat
- da bo vsota števil na vsaki kocki enaka 15
- da bo v vsaki od šestih vrst stranskih ploskev, ki gledajo v isto smer, vsota enaka 20.



Razmisli in poskusi – odgovori!

Mitja Rosina



1. Ali lahko premakneš roko z večjim pospeškom, kot je pospešek prostega pada?

Da. Če spustiš svinčnik, da prosto pada, ga še lahko ujameš.

ZGLED. Recimo, da začneš loviti svinčnik desetinko sekunde potem, ko si ga spustil. Želiš ga ujeti na razdalji pol metra, roko pa premikaš enakomerno pospešeno. Svinčnik potrebuje za pol metra $t_{\text{svin}} = \sqrt{2x/g} = 0,316 \text{ s}$, torej preostane tebi $t = 0,216 \text{ s}$. Da ga ujameš, potrebuješ pospešek $a = 2x/t^2 = 21,4 \text{ ms}^{-2} \approx 2g$.

Če imaš na voljo štoparico s fotocelico, lahko poskušaš, koliko zamude si še lahko privoščiš, da boš ujel svinčnik na pol metra. Iz tega lahko izračunaš, kolikšen pospešek zmore tvoja roka.

2. Ali lahko brez opeklin zamahneš skozi plamen, ki ima temperaturo nad 1000°C?

Da, če je čas dovolj kratek, da je prejeta toplota neznatna.

ZGLED: Predpostavimo, da večino toplote dobiš s sevanjem plamena. Če v desetinki sekunde zamahneš s prstom skozi plamen sveče s temperaturo 2000 K, prejme po Stefanovem zakonu vsak cm^2 kože $Q = \sigma T^4 S t = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4} \cdot 2000^4 \text{ K}^4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,1 \text{ s} = 9 \text{ J}$. (Pravzaprav še manj, ker plini v plamenu niso črno telo.) Tanka plast kože, recimo 1 mm, se segreje za $\Delta T = Q/mc_p = 9 \text{ J} / 10^{-4} \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 21 \text{ K}$. Pri tem smo za kožo predpostavili enako gostoto in specifično toploto, kot ju ima voda.

Če prst prej osliniš, se toplota porabi za izporeenje vlage in je koža prejme še manj.

■ Rešitev

3. Kdaj te napetost 10000 V ne ubije?



Če se naelektrimo s statičnimi naboji, tako da je tok neznaten.

ZGLED. Počesi se in iz nagiba las sklepaj na naboj ter napetost. Misli si, da sta glavnik ($S = 10^{-3} \text{ m}^2$) in šop las plošči kondenzatorja, razmaknjeni za 5 mm, sila med njima pa je enaka teži las (z maso kakega grama). Sila $\epsilon_0 S U^2 / 2d^2 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 10000^2 \text{ V}^2 / 2 \cdot 0,005 \text{ m} \approx 10^{-4} \text{ N}$ ustreza masi 10^{-5} kg . Da se dvignejo lasje, potrebujemo pri našem zgledu večjo napetost, 100000 V, pa nas nič ne stresa.

4. Ali v jasni noči vidiš svečo (ali žarnico) na Krvavcu, ki je oddaljen kakih 30 km? Kateri magnitudi zvezde ustreza?

Najšibkejšje zvezde, ki jih vsaj nekateri vidijo, so šeste magnitude in obsevajo Zemljo z gostoto svetlobnega toka $j = 10^{-9} \text{ lx}$. Temu ravno ustreza sveča na Krvavcu: $j = I/r^2 = 1 \text{ cd} / 30^2 \text{ km}^2 \approx 10^{-9} \text{ lx}$. Vendar je zaradi motenj in prahu v ozračju najbrž nikoli ne vidimo. Pač pa bi morali videti stosvečno žarnico, ki ji ustreza zelo svetla zvezda prve magnitude (za vsako magnitudo manj se poveča svetlobni tok za faktor $\sqrt[4]{100}$; faktorju 100 torej ustreza pet magnitud manj).

5. Aleksander Veliki je v puščavi razlil vrč težko priborjene vode z besedami »Zame je je preveč, za vse pa je je premalo«. Voda je izhlapela in se porazdelila po vsem ozračju in morjih in vodotokih. Koliko molekul te vode je v kozarcu jabolčnega soka, ki si ga ravnokar spil?

Več tisoč molekul, tako veliko je Avogadrovo število!

ZGLED. Recimo, da je držal vrč 18 kg (1 kilomol) vode, torej je imel $n_{\text{vrč}} = n_{\text{Avogadro}} = 6 \cdot 10^{26}$ molekul. Predpostavimo enakomerno porazdelitev po vseh oceanih, ki zavzemajo tri četrtine zemeljske površine ($\frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 10^8 \text{ km}^2$) in so globoki v povprečju 5 km, torej imajo volumen $2 \cdot 10^9 \text{ km}^3$. V kozarec z 2 decilitroma pride potem $n_{\text{kozarec}} = n_{\text{vrč}} (V_{\text{kozarec}} / V_{\text{ocean}}) = 6 \cdot 10^{26} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 / 2 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 = 60000$ molekul.

6. V Blejskem Vintgarju sem opazoval ribo, ki je v hitrem toku, ki se je razširil po ožini med skalama, popolnoma mirovala glede na breg. Kako ribi to uspe?

Riba je navajena plavati s konstantno hitrostjo (tudi človeku prija plavati z avtomatskimi gibi, s precej konstantno hitrostjo). Ker se naprej od ožine širina struge večja, se hitrost vode manjša, saj je pretok stalen. Če se riba ožini malo približa, jo

hirejši tok odnese nazaj. Če se od ožine oddalji, pa prehití počasnejši nasprotni tok.

7. Ali se les močno poda pri tlaku 1000 atmosfer (10^8 Pa)?

Ne. Les zbadimo s šivanko s premerom dobre tretjine milimetra (prerez konice naj bo $S = 0,1 \text{ mm}^2 = 10^{-7} \text{ m}^2$). Za tlak 10^8 Pa potrebujemo silo $F = Sp = 10 \text{ N}$, ki jo dosežemo z utežjo 1 kg. V srednjem ali trdem lesu to ne povzroči vidnega vboda.

8. Ali lahko napihneš balon na tlak, ki je za 0.1 bar = 10000 Pa višji od zunanjega? Ali lahko za tolikšno razliko tlakov izsesaš posodo?

Da. O tem se prepričamo, če pihamo navzgor v cev z vodo, ki sega 1 m nad naša usta, oziroma če s cevjo sesamo sok iz plastenke 1 m pod našimi usti. Enemu metru višinske razlike namreč ustreza tlačna razlika $\Delta p = \Delta h \rho g = 1 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} = 10^4 \text{ Pa}$. Lahko tudi piháš s cevjo z brega v globoko vodo.

9. Ali lahko poženeš zrak na nadzvočno hitrost?

Zaploskaj! Ko roki približuješ, zraku med njima dovajaš delo. Zadnji trenutek, preden se roki skleneta, pobegne še nekaj zraka. Ta mali delež zraka prevzame večino dovedene energije in zato doseže veliko hitrost, ki se manifestira s pokom. (Sunek zvočnih valov dojemamo kot pok in vsebuje širok pas frekvenc.) Vendar hitrost zraka ne doseže zvočne. Izrazitejši pojav je pok z bičem. Pri zamahu dovajamo delo, znaten del energije na koncu prevzame konica biča, običajno je tam vozal ali majhna kroglica. Spreten kočijaž lahko preseže zvočno hitrost (seveda ne pri ročaju, temveč na konici biča).

10. Zakaj se oblak ali megla ne spuščata k tlom, saj ima voda večjo gostoto kot zrak?



Saj se, vendar zelo počasi. Če je megla do tal, so zato tla mokra. Če je ozračje zelo mirno, se megla spusti v eni uri le za nekaj metrov.

ZGLED. Predpostavi, da imajo kapljice polmer $3 \mu\text{m}$ in da je viskoznost zraka $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$. Pri enakomernem gibanju je sila viskoznosti $F = 6\pi\eta r v$ po velikosti enaka teži kapljice. Hitrost je torej

$$v = \frac{(4\pi/3)r^3\rho g}{6\pi\eta r} = \frac{4r^2\rho g}{18\eta} = \frac{4 \cdot (3 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2 \cdot 1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ ms}^{-2}}{18 \cdot 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}} = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} = 4,2 \text{ m/h}.$$

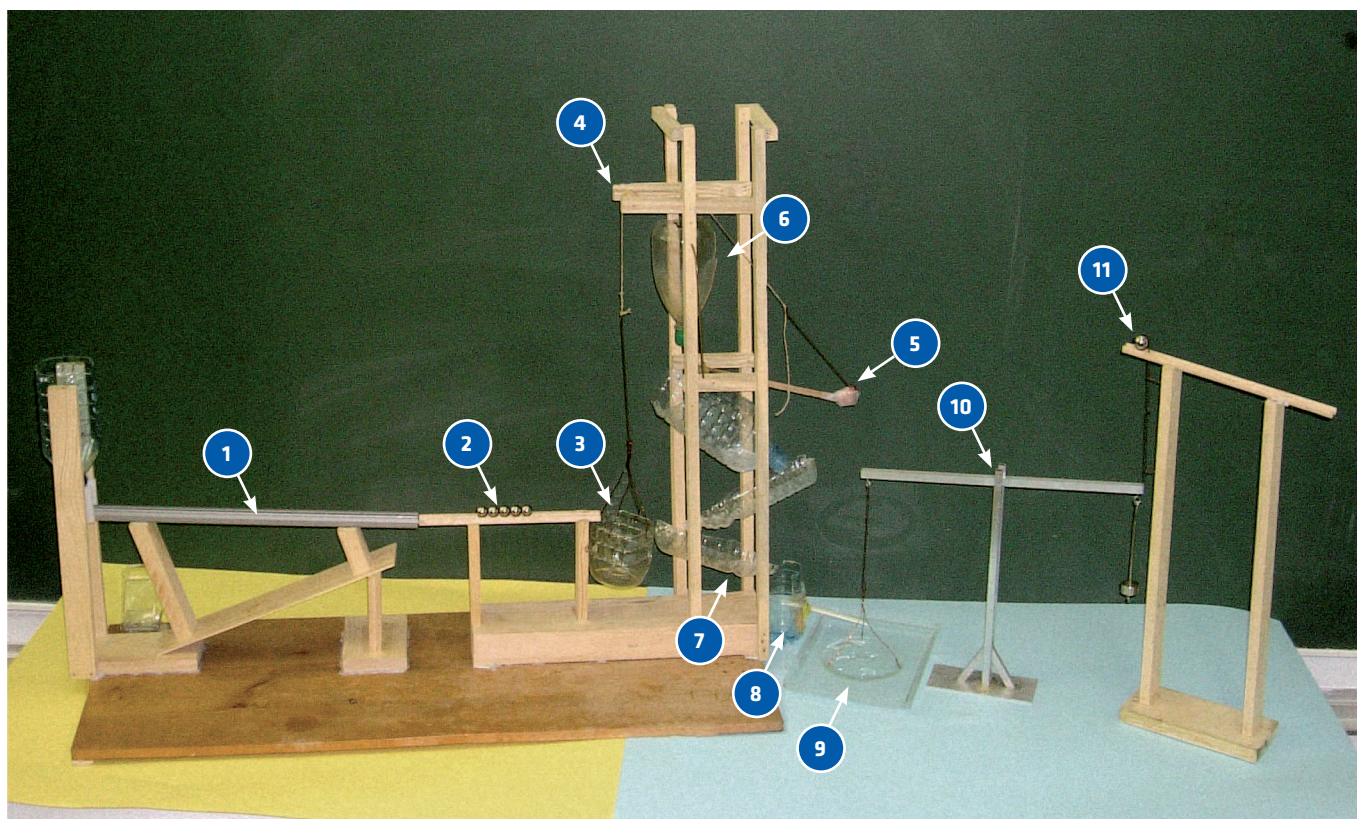


Sedmi in osmi člen verige eksperimentov

Barbara Rovšek
in Tomaž Kušar

Sedmi in osmi člen demonstracijske verige verižnega eksperimenta so si zamislili in sestavili bodoči učitelji in učiteljice fizike, študentje in študentke Pedagoške fakultete Univerze v Ljubljani. V obeh členih prevladujejo pojavi iz mehanike: prožni trki kroglic med seboj in neprožni trki kroglic z drugimi telesi, ravnovesje vzvoda, prenos sil preko vrvic in škripcev ter sklopljeno nihanje. Poleg teh v obeh členih domiselno nastopajo tudi »mokri« pojavi, povezani s pretakanjem kapljev, difuzijo in površinsko napetostjo. Brez elektrike in magnetkov pa tudi tu ne gre.

Slika 1. Avtorja poskusa *Vodni svet* sta TOMAŽ KUŠAR in GREGOR UDOVČ, Oddelek za fiziko in tehniko, Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani.



■ SEDMI ČLEN

Vodni svet

Kaj se godi v sedmem členu, ki sta ga avtorja poimenovala *Vodni svet*? Tudi tega sproži kroglica, ki se prikotali po žlebu (1) iz prejšnjega poskusa ter na vodoravnem lesenem tiru trči v prvo od enakih mirujočih petih kroglic (2), postavljenih na tiru tesno druga ob drugo. Peta kroglica se odkotali po tiru naprej. S tira pade v lovilno košarico (3), ki je preko vrvice in škripca (4) povezana s prvim vzvodom (5). Ta se prevesi in pri tem odmaši luknjico na dnu z vodo napolnjenega kozarčka (6). Voda iz kozarčka odteka in se pretaka navzdol po sistemu žlebov (7) do spodnjega kozarčka, v katerem je nekaj kapljic koncentriranega mila (8). Ko v spodnji kozarček pri-teka voda, nastaja v njem milnica, njena gladina se počasi dviguje.

Nekaj centimetrov nad dnom spodnjega kozarčka je luknjica s slamico. Ko se gladina milnice dvigne do slamice, milnica odteče v pladenj s čisto vodo.

Globina vode v pladnju je približno 1 cm. Preden pri-teče v pladenj milnica, na gladini miruje zgoščanka

(9). Visi na vrvicah, pritrjenih na en konec enakoročnega vzvoda (10). Na drugem koncu vzvoda skrbi za ravновesje utež s primerno izbrano maso. Ko v pladenj po slamici priteče milnica, se zmanjša površinska napetost vode, zgoščanka (9) se odlepi od gladine in utež prevesi vzvod. Ob tem vzvod izmakne zatič, ki v končnem tiru zadržuje zadnjo kroglico (11). Kroglica ima prosto pot in se odkotali k osmemu členu.

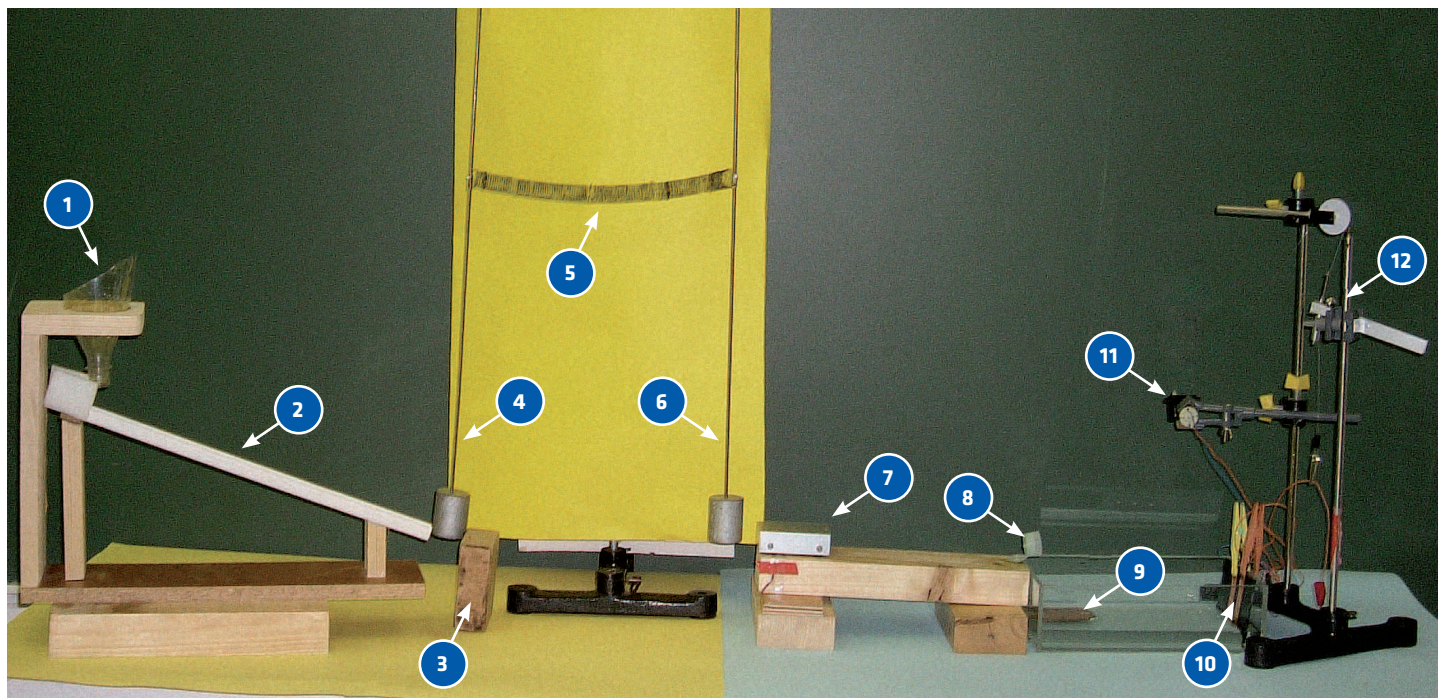
■ OSMI ČLEN

Svet gibanja

Od sedmega člena se kroglica prikotali v lijak v osmem členu, ki se imenuje *Svet gibanja*. Iz lijaka (1) pade na nagnjeno drčo (2) in se po njej odkotali navzdol.

Ko se kroglica prikotali do konca drče, trči v mirujočo klado (3), ta se ob trku prevrne. Klada je pred trkom s kroglico zadrževala v mirovanju prvo nihalo (4), že odklonjeno iz mirovne lege. Ko se klada prevrne, sprosti prvo nihalo, ki zaniha. Ker je prvo nihalo preko vzmeti (5) povezano z drugim nihalom (6), se nihanje sčasoma prenese k drugemu nihalu. Ampli-

Slika 2. Avtorici poskusa *Svet gibanja* sta
BERNARDA URANKAR IN
JERNEJA PAVLIN, Oddelek
za fiziko in tehniko,
Pedagoška fakulteta
Univerze v Ljubljani.



tuda nihanja prvega nihala se počasi manjša, amplituda drugega pa se večja.

Če bi nihali opazovali še naprej, bi videli, da se nihanje kar naprej prenaša od enega nihala k drugemu in nazaj. Temu pojavu pravimo utripanje.

Ko drugo nihalo niha z dovolj veliko amplitudo, trči na drugi strani ob voziček (7). Nihalo sune voziček čez nizko oviro, ki je pred tem zadrževala voziček na vrhu klanca. Voziček se zapelje po klanecu in na koncu trči ob posodico, v kateri je nekaj kapljic detergenta za pomivanje posode (8). Posodica se nagne in iz nje se prelije kapljica detergenta v posodo s čisto vodo na mesto, kjer ob steni posodice miruje čolniček (9). Ko kane kapljica detergenta v vodo, se na tistem delu zelo hitro močno zmanjša njena površinska napetost.

Zaradi razlike med površinsko napetostjo čiste vode na eni strani in milnice na drugi strani čolnička deluje nanj sila, ki ga potisne stran od roba posode proti nasprotni steni posode.

Čolniček, ki nosi na svojem kljunu železno prečko, pripluje do nasprotne stene posode. Tam ga magnetki, pritrjeni na steno posode (10), potegnejo v pravilno pristajalno lego: z železno prečko, ki jo prisloni na dve elektrodi (10), sklene električni krog.

Po sklenjenem krogu baterija požene tok in elektromotor (11) prične navijati vrvico, na katero je pritrjena utež. Utež se dviguje in skozi odprtino v žlebu zadene kroglico (12), ki se odkotali iz zagozde in sproži naslednji, deveti člen (beri o njem v naslednji številki Preseka).

■ Pojavi

Malce podrobneje se bomo posvetili dvema pojavoma, udeleženi v opisanih členih, in sicer površinski napetosti ter sklop-ljenemu nihanju.

■ Površinska napetost

Kot slutimo po imenu, je pojav vezan na površine, natančneje, površine kapljev. Kapljevine se od plinov ločijo med drugim tudi po tem, da plini nimajo površin in zato tudi površinske napetosti ne. Plini ne tvorijo kapelj. Obstoj površinske napetosti v kapljevinah ima mnoge zanimive posledice, povezane s prav vsakdanjimi pojmi in pojavi. V kozarec lahko nalijemo vodo malo višje od njegovega roba, pa se ne prelije iz kozarca. Opazimo, da se majhne kapljice rade zlivajo v večje in da jutranja rosa na listih oblikuje skoraj okrogle kapljice. Dva suha lista papirja zlahka spravimo narazen, če pa sta mokra, ju voda zlepi. Goto-vo si že opazil, da včasih reči, za katere bi pričakoval, da v vodi

potonejo, na njeni gladini plavajo. Kovinske sponke za papir in šivanke, ki jih previdno položimo na vodno gladino, ne potonejo, če jih prej ne zmočimo. Bivalni prostor nekaterih žuželk je gladina mlak in ribnikov, po njej se zaradi površinske napetosti vode sprehajajo kot bi se mi po napeti ponjavi trampolina.

Od običajnih kapljev in ima voda največjo površinsko napetost, večjo ima le živo srebro (glej tabelo). Površinska napetost je posledica privlačnih sil med polarnimi molekulami kapljevine. Posamezna molekula vode je rada v družbi drugih molekul (fizikalno korektno bi rekli, da je to zanj energijsko ugodneje). Molekule na površini imajo manj sosedov kot molekule v notranjosti, zato so molekule na površini v energijsko manj ugodnem položaju. Čim večja je pri dani prostornini vode njena površina, tem večjo energijsko ceno plačamo.

Najmanjšo površino ima dana količina vode tedaj, ko je omejena v kroglo. Razmerje med površino in prostornino krogle je, $\frac{S}{V} = \frac{3}{R}$ kjer je R polmer krogle, določen s količino vode. Pri kocki je na primer to razmerje večje,

$$\frac{S}{V} = \frac{6a^2}{a^3} = \frac{6}{R} \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = \frac{3,72}{R}$$

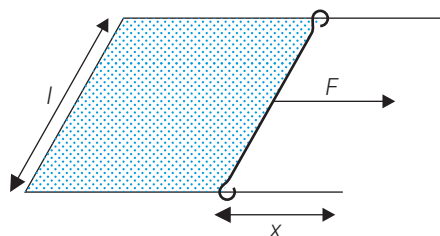
(pri enaki prostornini, $a^3 = \frac{4\pi}{3} R^3$). Kapljice so zato bolj ali manj okrogle, kot so zaradi istega vzroka okrogli tudi mehurčki CO_2 v mineralni vodi. Hkrati pa vidimo, da je razmerje $\frac{S}{V}$ odvisno tudi od količine vode: čim več je vode, tem večji je R in tem manjše je $\frac{S}{V}$. Majhne kapljice se zato rade zlivajo v večje.

Za povečanje površine za ΔS je potrebno delo, ki je premo sorazmerno z ΔS , $A = \gamma \Delta S$. Sorazmernostni koeficient γ je lastnost snovi in pove, ali moramo za povečanje površine opraviti veliko ali malo dela. Koeficient γ imenujemo kar površinska napetost, merimo jo v $\text{J/m}^2 = \text{N/m}$.

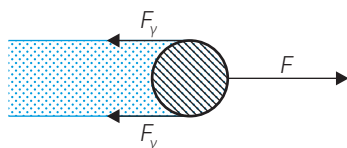
V pravokotno žično zanko, ki ji eno stranico lahko premikamo, ujamemo membrano iz milnice (z vodo se nam ta poskus ne po-

snov	γ [N/m]
čista voda	0,073
živo srebro	0,44
milnica	$\approx 0,025$
kri (37°)	0,058
olje	0,032
acetone	0,025
etanol	0,023

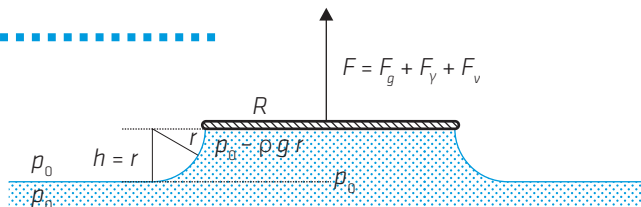
Tabela 1. Površinska napetost nekaterih kapljev pri temperaturi 20°C. Vir: *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, D. C. Giancoli, Prentice Hall, 1988.



Slika 4. Sila F uravnovesi težo ploščice, silo površinske napetosti vode in težo vode, ki jo zgoščenko dvigne nad gladino vode v pladnju.



Slika 3. Prečko vlečemo s silo F , opna jo vleče v nasprotni smeri s silo $2F_y$.



sreči, ker ima preveliko površinsko napetost in se vodna opna hitro strga). Če gibljivo stranico premaknemo za x , povečamo površino membrane za $2lx$ (2-krat, ker ima opna dve površini, zgornjo in spodnjo). Pri tem opravimo delo $A = Fx = 2\gamma lx$, od koder vidimo, da smo prečko vlekli s silo $F = 2\gamma l = 2F_y$, kjer je $2F_y$ sila milnice na prečko zaradi površinske napetosti milnice (spet 2-krat, ker ima dve površini, glej sliko 3).

Če imamo namesto zanke ploščo, prijemlje sila površinske napetosti le po njenem obodu (glej sliko 4).

Pri poskusu *Vodni svet* uporabimo zgoščenko s polmerom $R = 6,0$ cm. Največja sila uteži na drugi strani enakoročnega vzvoda, ki še ne prevesi vzvoda, uravnovesi težo zgoščenske, silo površinske napetosti vode in težo vode, ki jo zgoščenska dvigne nad gladino vode v pladnju. Sila površinske napetosti je $F_y = \gamma 2\pi R$, teža zgoščenske in žic, na katerih visi, je $F_g = 0,21$ N. Teža dvignjene vode je $F_v = \rho g \pi R^2 h$, kjer je ρ gostota vode $1,0$ kg/dm³, g je težni pospešek $9,8$ m/s² in $h \approx 2,5$ mm je največja višina, do katere nam uspe dvigniti vodo pod zgoščenko. Izmerili smo, da je največja sila F , ki še ne odlepi zgoščenske od gladine čiste vode, $0,54$ N. Kratek račun da oceno za površinsko napetost vode $\gamma \approx 0,14$ N/m, kar je dvakrat prevelika vrednost. Napaka lahko izvira iz težko merljivega dviga vode h nad gladino. Če se voda dvigne za $2,6$ mm (in ne $2,5$ mm, kot smo upoštevali prej), je ocena za $\gamma \approx 0,011$ N/m; če se dvigne za $2,7$ mm, je $\gamma \approx 0,08$ N/m, kar je zelo blizu dejanski vrednosti.

Ko vodi dodamo milo, se njena površinska napetost zmanjša. Največja izmerjena sila, ki ne odlepi plošče od gladine milnice, je zdaj $0,32$ N, največja višina vode pa je $\approx 1,5$ mm. Ker je sila na ploščo zaradi površinske napetosti milnice zdaj še manjša kot pri vodi in je podana kot razlika dveh precej večjih sil (teže

uteži in teže plošče in dvignjene milnice pod njo), zagrešimo pri oceni velikosti parametra γ_{mil} še večjo napako.

Kot si gotovo že opazil, je gladina vode ob stenah posode ukrivljena. Če voda stene omoči, je ukrivljena navzgor, če sten ne omoči, pa navzdol. Za približno oceno bo dovolj dobro, če si mislimo, da se gladina ob plošči prilega krožnici s polmerom r (glej sliko 4). Ker velja $r \ll R$, lahko drugo ukrivljenost gladine po obodu zaradi okrogle oblike plošče (s polmerom R) zanemarimo. Gladina je ukrivljena, ker tlaka na obeh njenih straneh nista enaka. Na zunanji strani je tlak povsod enak zračnemu tlaku $p_0 = 1$ bar. V vodi je na vodoravnici, vzporedni z ravnim delom gladine, in tik pod njo tlak enak zunanjemu tlaku 1 bar. Tik pod ploščo, je tlak v vodi enak $p_0 - \rho g r$. Ukrivljenost površine je povezana z njeno površinsko napetostjo in razliko tlakov z zvezo $\Delta p = \gamma/r$. Razlago zakaj je tako, najdemo v kakšnem učbeniku fizike. Ker je pri nas $\Delta p = p_0 - (p_0 - \rho g r) = \rho g r$, izenačimo $\gamma/r = \rho g r$ in izrazimo $\gamma = \rho g r^2$. Ocenili smo, da se čista voda pod zgoščenko dvigne za največ $2,5$ mm, od koder sledi $\gamma \approx 0,062$ N/m. Milnica se dvigne kvečjemu $1,5$ mm in od tod $\gamma_{mil} \approx 0,022$ N/m.

■ Sklopljeno nihanje

V poskusu *Svet gibanja* sta dve enaki nihali med seboj povezani z vzmetjo. Vsako nihalo posebej bi nihalo s svojim lastnim nihajnim časom t_0 . Ker sta nihali enaki, sta tudi njuna lastna nihajna časa enaka. Ko pa sta nihali med seboj povezani, nihata povezano, sklopljeno. V splošnem je nihanje sklopljenih nihali kar zapleteno, razen če jih zanihamo na poseben način. Ker sta v našem primeru nihali dve, ju lahko zanihamo na dva posebno enostavna načina, ki ju imenujemo lastni nihanji. Prvo lastno nihanje vzbudimo, če obe nihali enako izmaknemo v isto stran (obe enako v desno ali obe enako v levo) in hkrati spustimo. Pri



takem nihanju se vzmet, ki ju povezuje, nič ne razteza in krči ter nič ne vpliva na nihajni čas, ki je zato enak nihajnemu času enega nihala, $t_1 = t_0$.

Drugo lastno nihanje pa vzbudimo, če obe nihali izmaknemo v nasprotnih smereh (na primer prvo v desno, drugo v levo) ter ju hkrati spustimo. Ker sta nihali povezani z vzmetjo, se ta pri nihanju razteza ter s tem vpliva na nihanje in tudi na nihajni čas t_2 , ki je v tem primeru krajši od nihajnega časa enega nihala, $t_2 < t_0$.

Če zanimamo nihali tako, da vzbudimo bodisi prvo bodisi drugo lastno nihanje, nihata na tak način kar naprej (dokler se sčasoma zaradi upora zraka in trenja ne ustavita). Lahko pa seveda nihanje vzbudimo še drugače, na primer tako, kot pri poskusu *Svet gibanja*. Prvo nihalo izmaknemo, drugo pa pridržimo v mirovni legi. Hkrati ju spustimo in opazujemo nihanje. Najprej niha le prvo nihalo, potem zaniha še drugo nihalo. Prvo niha z vedno manjšo amplitudo, drugo pa z vedno večjo. Prvo nihalo se v nekem trenutku ustavi, niha le drugo. Potem se zgodba ponovi še večkrat, nihanje se med nihalom preko vzmeti prenaša sem in tja, pojavu pravimo utripanje.

Ob utripanju se vzmet neprestano razteza in krči ter ob tem deluje na nihali s spreminjajočo se silo. Čas od trenutka, ko eno od nihali obmiruje, do trenutka, ko obmiruje naslednjič, imenujemo utripalni čas t_u . Zanj velja zveza $\frac{1}{t_u} = \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}$, ali, če jo zapišemo raje s frekvenco, ki je obratna vrednost nihajnega časa, $\nu_u = \nu_2 - \nu_1$. Število utripov v sekundi ν_u je kar enako razliki med številoma nihajev v sekundi pri prvem in drugem lastnem nihanju. Utripanje lepo opazimo, če je utripalni čas dovolj dolg oziroma utripalna frekvenca ν_u majhna. Ta pogoj je izpolnjen, ko se lastni frekvenci malo razlikujeta, to pa je tedaj, ko je vzmet, ki ju povezuje, šibka in ju zato le malo moti. Tedaj rečemo, da sta nihali šibko sklopljeni.

■ Dodatno branje

Veliko zanimivih posledic površinske napetosti in poskusov, ki kažejo nanje, je opisanih (v angleščini) na številnih spletnih straneh, na primer:

- http://www.funsci.com/fun3_en/exper2/exper2.htm
- http://www.online-tensiometer.com/oberfl/experiments_st.html
- http://www.woodrow.org/teachers/bi/1998/waterstrider/student_lab.html

in še množici drugih. O nihanju, sklopljenem nihanju in posledicah površinske napetosti vode si lahko prebereš tudi v Veselih šolah v 21. številki revije Pil Plus in 9. številki revije Pil, oboje letnik 2004/05. O površinski napetosti piše A. Kodre v 4. številki Preseka, letnik 1996/97, v članku z naslovom *Milni mehurčki na snegu*.



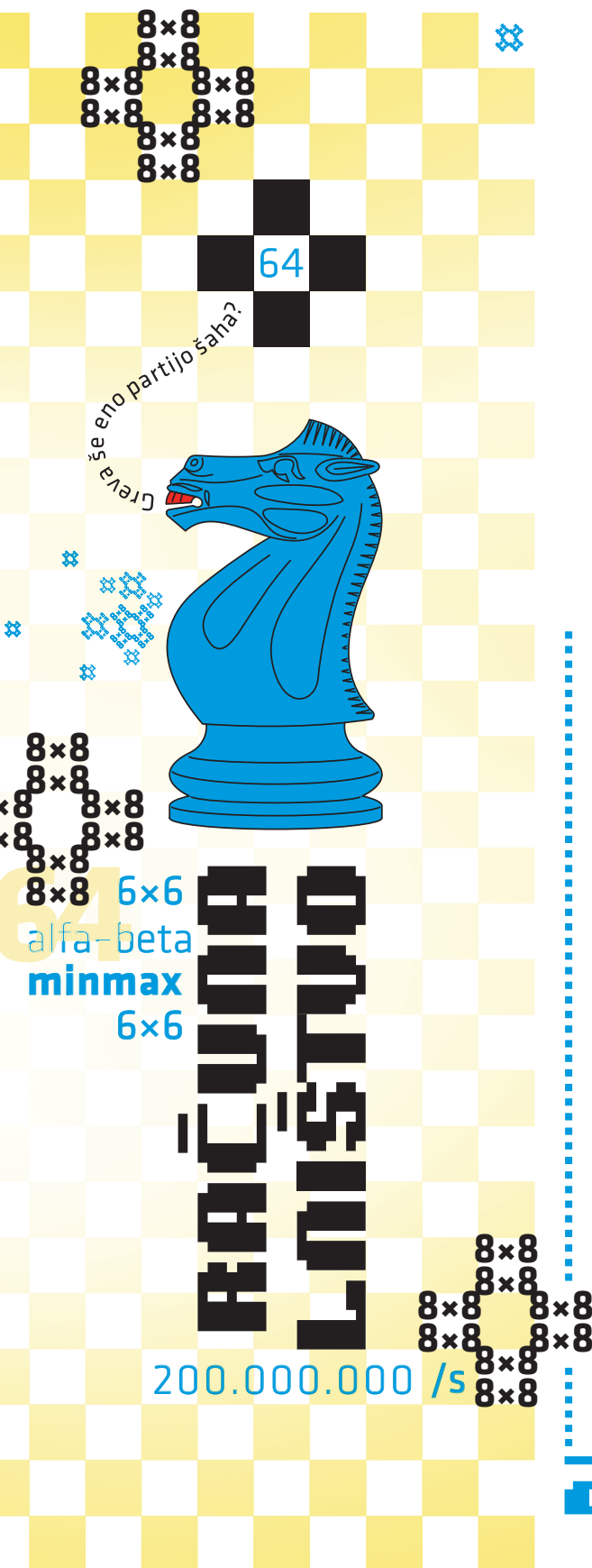
Kako delujejo šahovski programi (prvi del)

Branko Kaučič

»Greva še eno partijo šaha?« Nekako tako je zvenelo iz ust mojega očeta, ko me je v osnovni šoli učil te kraljevske igre. Nekaj let intenzivnega igranja, polna glava miselnih vzorcev, uporaba računalnika in predvsem dejstvo, da očeta nikakor nisem uspel premagati, me je sčasoma privedlo do razmišljanja, kako napisati svoj šahovski program. Morda so podobno razmišljali tudi ljudje, ki so se podobnega podviga lotili že leta pred mano, zagotovo pa so se soočili s spoznanji, ki sledijo.

Šah je igra s »popolno informacijo«, ker sta oba igralca seznanjena s celotnim stanjem igre ves čas igranja. Že s pogledom na igralno ploščo je namreč razvidno, katere figure so še prisotne in kakšen je njihov položaj. Takšnih iger je še več (križci-krožci, go, backgammon), a igre, kot so poplavanje ladij in poker, ne sodijo v to kategorijo.

Pred vami je prvi prispevek iz serije prispevkov o računalniških programih za igranje šaha in strategij za podobne igre s popolno informacijo. Opisane bodo najpomembnejše tehnike, ki jih uporabljajo nekateri od najboljših šahovskih programov, vključno z legendarnim Deep Blue (več o tem v nadaljevanju). Večina tehnik, ki bodo omenjene, so namenjene skoraj vsem igram s popolno informacijo, čeprav se podrobnosti seveda razlikujejo od igre do igre. Poteze igralcev in ovrednotenje položaja so





namreč odvisni od pravil igre, ki jo igramo (oziroma poskušamo napisati računalniški program zanjo).

■ Pomembnejši mejniki zgodovine šahovskih programov

Ideja stroja, ki obvlada šah, presenetljivo ne sovпада z začetki računalništva, temveč sega precej nazaj, v osemnajsto stoletje, povezana je z eno večjih prevar človeštva. Okoli leta 1776 je za zabavo cesarice Marije Terezije madžarski baron Wolfgang von Kempelen skonstruiral mehanski stroj. V njem se je skrival človek, večč mojstrov in šaha, ki je preko vzvodov premikal lutko Turka in s tem figure. Stroj je menjal lastnike, njegova skrivnost pa je dolgo ostala neodkrita.

Med prve stroje, ki so dejansko znali odigrati vsaj del partije šaha, štejemo mehanski stroj Ajedrecista Španca Torresa y Queveda. Stroj je znal odigrati končnico (zaključek igre) s kraljem in trdnjavo proti kralju. Leta 1912 je Torres y Quevedo predstavil prvo in leta 1920 izboljšano verzijo stroja. Stroja še danes delujeta v madridskem muzeju.

Prvi šahovski program je leta 1947 napisal matematik Alan Mathison Turing, čeprav zgolj na papirju. Moč računalnika je nadomestil kar sam in za izračun ene poteze porabil več kot pol ure. Leta 1949 je prav tako znamenit matematik Claude Shannon opisal, kako razviti šahovski program. Ugotovil je, da težavo predstavlja izredno veliko število izračunov položajev figur. Ločil je strategijo A, kjer pregledamo »vse« možne poteze (osnova algoritmu minmax), in strategijo B, kjer pregledamo le določene poteze. Na ta način tudi danes ločimo šahovske programe. S šahovnico velikosti 6×6 polj in brez lovcev so se na računalniku MANIAC ukvarjali tudi ameriški znanstveniki. Leta 1958 beležimo prvi pomembnejši dosežek treh znanstvenikov iz univerze Carnegie-Mellon (Newell, Shaw in Simon). Predlagali so postopek, imenovan algoritem alfa-beta, s katerim se je možno izogniti velike-

mu številu nepotrebnih izračunov. Podrobneje si ga bomo ogledali drugič. Istega leta je s pomočjo tega algoritma računalnik, s programom NSS, prvič premagal človeka.

Sledila je vrsta dosežkov, seznam nekaterih najde bralec v [1]. Med najodmevnejše med njimi sodi partija takratnega svetovnega šahovskega prvaka Garija Kasparova z računalnikom Deep Blue. Leta 1997 je računalnik zmagal z rezultatom 3,5:2,5, medtem ko je leto prej slavil Kasparov. Deep Blue je predstavljal paralelni računalnik s 30 vozlišči s skupaj 480 posebej namenskiimi šahovskimi čipi. V tistem času je bil 259-ti najboljši računalnik na svetu. Šahovski program je bil napisan v programskem jeziku C in je zmozel izračunati približno 200.000.000 položajev v sekundi, pri izboljševanju delovanja programa pa je sodelovalo kar nekaj vele-mojstrov.

■ Zgradba šahovskih programov

Uspešen šahovski program sestavljajo naslednje, med seboj tesno prepletene komponente:

- način, kako v pomnilniku računalnika predstavimo igralno ploščo (šahovnico), ki predstavlja stanje igre;
- pravila, ki določajo dovoljene poteze, da igramo brez goljufanja (in da preverjamo, da nasprotnik ne goljufa);
- tehniko, ki med vsemi dovoljenimi potezami izbere neko potezo (potezo raje izberemo po nekem ključu, kakor naključno);
- način primerjave različnih potez in položajev figur med seboj in
- uporabniški vmesnik.

V prispevkih bomo obravnavali vse zgoraj naštet, razen uporabniškega vmesnika.

■ Predstavitev igralne plošče

V zgodnjem obdobju računalniških šahovskih programov je bila količina pomnilnika izredno omejena (programi so smeli uporabiti največ 8K pomnilnika) in najpreprostejše predstavitev šahovnice so bile najučinkovitejše. Le-ta je bila običajno kar polje velikosti 8×8 zlogov: prazno celico (brez figure) je



predstavljala vrednost 0, črnega kralja vrednost 1, črno kraljico vrednost 2. Z uvedbo 64 bitnih računalnikov so v takratni Sovjetski zvezi iznašli učinkovitejšo predstavitev, t. i. »bitne plošče«. Gre za 64 bitno besedo (1 bit za eno celico), ki vsebuje informacijo enega vidika stanja igre. Na primer, ena bitna plošča vsebuje »množico celic, ki jih zasedajo črni kmetje«, druga vsebuje »množico celic, kamor se lahko prestavi črna kraljica«, tretja vsebuje »množico celic, ki jih trenutno napadajo črni konji«. Bitne plošče so vsestranske in omogočajo hitrejšo računanje položajev. Mnoge operacije, ki se med igro zelo pogosto ponavljajo, se namreč lahko implementirajo kot preproste logične operacije nad bitnimi ploščami.

Premikanje figur

Pravila igre določajo, katere poteze sme opraviti beli in katere črni igralec. V nekaterih igrah je že s pogledom na igralno ploščo možno določiti dovoljene poteze. Pri igri križci-krožci, na primer, vsaka prazna celica predstavlja dovoljeno potezo. Pri šahu, žal, ni tako preprosto. Vsaka figura ima svoja pravila premikanja in zajemanja drugih figur, prepovedano je pustiti kralja v šahu, poznamo tudi »en passant« poteze, promoviranje kmetov v višje figure, rokade, ki morajo ustrezati še dodatnim pogojem. Izkaže se, da je generiranje potez figur pravzaprav eden najtežjih vidikov (računsko zahtevnih in kompleksnih zaradi samih pravil) šahovskega programiranja. Pravila igre k sreči omogočajo, da nekatere operacije pripravimo vnaprej.

Iskalne tehnike

V šahovski program je treba zapisati tudi najbolj očitno. Računalnik namreč sam od sebe ne zna določiti, katera od dovoljenih potez je »dobra« in katera »slaba«. Velja preprosto razmišljanje: najlažje jih med seboj razlikujemo, če poznamo njihove posledice. Tvorimo zaporedje potez, na primer štiri za vsako igralno stran (skupaj torej osem) in pogledamo stanje igralne plošče. To je tudi osnovni princip algoritma minmax, ki predstavlja korenine vsakega šahovskega programa. Njegova učinkovitost je na žalost odvisna od povprečnega števila dovoljenih potez in števila potez, ki jih generiramo (imenovan tudi globina). Število možnih položajev tako raste izredno hitro in vloženega je bilo precej truda

v algoritme, ki zmanjšajo število računanih položajev. Tak je na primer prej omenjeni algoritem alfa-beta.

Vzrok mnogih glavobolov šahovskih programerjev je tudi t. i. »problem horizonta«. Zamislite si, da vaš program išče osem potez vnaprej in ugotovi, da vam bo nasprotnik v osmi potezi vzel kraljico. Slabo stanje igre torej. Žal pa ne vidi, da bi to pravzaprav bila zvita poteza, s katero bi nasprotnik umaknil eno od svojih figur in vam v deveti potezi omogočil matiranje. Najboljše možno stanje igre torej. Namesto da bi izkoristil to priložnost, se bo program odločil raje za drugo potezo in tako »obvaroval« kraljico. Izkaže se, da je primerno število preverjenih potez težko določiti in uporaba vedno istega števila potez zelo verjetno vodi do slabe igre.

Ovrednotenje položaja figur

Program potrebuje tudi možnost ocenjevanja, ali določeni položaj figur vodi v zmago ali ne. Ovrednotenje je v veliki meri odvisno od pravil igre, najpomembnejše v šahu pa predstavlja število in tip figur na plošči. Že en kmet več lahko za dobrega igralca pomeni zagotovljeno zmago. Razviti uporabno funkcijo ovrednotenja položaja figur je težka naloga in predvsem to loči dobre šahovske programe od slabih.

Sedaj, ko v grobem poznamo vse komponente šahovske sestavljanke, se bomo v naslednjih prispevkih vsake od njih lotili nekoliko podrobneje.

Viri

- <http://www.geocities.com/SiliconValley/Lab/7378/comphis.htm>
- http://en.wikipedia.org/wiki/sahovski_racunalniski_programi
- <http://www.cs.biu.ac.il/~davoudo/tutorials.html>



V ASTRONOMIJI SE NAM VELIKI UM ČLOVEŠTVA PREDSTAVLJA KOT PRAKTIK, TO JE

Arhimed in astronomija

Arhimedova slava je večna. O življenju največjega matematika starega veka vemo razmeroma malo. Ohranilo se je le nekaj nametanih podatkov. Dosti več vemo o njegovem delu. Arhimed se je rodil v me-

Marijan Prosen

stu Sirakuze na otoku Sicilija, kjer je bil njegov oče astronom. Šolal se je v Aleksandriji. Tu se je npr. srečal z astronomom, matematikom in geografom Eratostenom, ki je prvi izmeril obseg Zemlje. V rodno mesto se je vrnil kot zrel matematik. Od tedaj dalje in vse do svoje smrti je tam deloval tudi kot gradbeni inženir – izumitelj oziroma konstruktor vojaških naprav (katapultov). Najbolj zanesljivi podatek, ki ga poznamo iz Arhimedovega življenja, je njegova smrt. Umrl je na koncu druge punske vojne, ko je branil mesto pred Rimljani in ga je ubil rimski vojak. Ob koncu svojega življenja se je Arhimed ukvarjal tudi z astronomijo, vendar so se njegova astronomska dela izgubila. Ohranjena so le po pripovedih oziroma zapisih poznejših znanstvenikov.



Slika 1. Arhimed (okoli 287–212 pr.n.št.)

Dobro se je ohranil zapis rimskega pisatelja Tita Livija (59 pr.n.št. – 17 n.št.) o zadnjih dogodkih pri obleganju Sirakuz, ki so jih v naskoku zavzeli Rimljani. Livij piše, da je bil Arhimed eden od vodij obrambnega sistema (v dolžini 18 km) rodnega mesta in da je neposredno sodeloval pri obrambi. Verjetno je bilo nekaj dni silovitega obleganja, zadnja noč brez spanca, zadnji napad in vdor Rimljanov v mesto ter njegov padec najbolj napet in pretresljiv del Arhimedovega življenja. Zaradi zelo pomembne vloge pri obrambi mesta se zdi malo verjetno, da bi ga rimski vojak ubil ob zatopljenem študiju v pesku zarisanih krogov (pogosto navajajo stavek *Noli turbare circulos meos* – *Ne dotikaj se mojih krogov*, ki naj bi ga Arhimed izrekel tik pred smrtjo), ampak raje pri dejanskem odporu, v neposrednem boju s sovražnikom.



Arhimed se je lotil in tudi rešil številne matematične, fizikalne in astronomske probleme. Tu se bomo omejili le na njegovo astronomsko delo.

Slika 2. Arhimedova smrt – freska iz Pompejev

V astronomiji se nam veliki um človeštva predstavlja kot praktik, to je iznajdljiv in izvrsten opazovalec (na duhovit način je npr. izmeril zorni kot Sonca), kot teoretik (navajal je rezultate meritev glede na središče Zemlje), kot računar (izračunal je nekaj razdalj med planeti in že uporabil način za zapis zelo velikih, tako imenovanih astronomskih števil), kot mehanik in izumitelj (izdelal je model nebesnega globusa). Bil je izredno močna osebnost raziskovalca, v katerem sta se tesno prepletali teorija in praksa, velika ljubezen do opazovanja naravnih pojavov in njihovih posnemanj. Njegov nebesni globus je imel pravzaprav en sam osnovni namen – jasno in učinkovito prikazati gibanja nebesnih teles (planetov). Tako je Arhimed deloval tudi kot posredovalec astronomije širokemu krogu ljudi, danes bi rekli popularizator astronomije.

Tit Livij piše, da je bil Arhimed enkrat opazovalec neba. To najbrž ni naključje. Na Arhimeda se sklicuje veliki astronom antike Klavdij Ptolemaj (70–147), in sicer v zvezi z določitvijo trajanja leta. To vendar-

nomiJA 36'#

$\frac{1}{720} \cdot 360^\circ = \frac{1}{2}^\circ$

Noli turbare circulos meos. →→→



IZNAJDLJIV IN IZVRSTEN OPAZOVALEC, KOT TEORETIK, KOT RAČUNAR, KOT MEHANIČAR IN IZUMITELJ.

le pomeni, da je bilo Arhimedovo astronomsko delo široko znano. Arhimeda omenja v svojih delih tudi starogrški astronom Hiparh. Poleg tega v enem od svojih del o določitvi razmerja oddaljenosti Sonca in Lune od Zemlje med astronomi Arhimed omenja tudi svojega očeta Fidija. Prav po tem je možno trdno sklepati, da je bil njegov oče zares astronom.

Oglejmo si le odlomek iz njegovega astronomskega delovanja, kakor se je ohranilo po pripovedih. Ob tem si lahko mislimo, da je v astronomiji najbrž naredil še dosti več. Natančneje bomo prikazali njegovo merjenje zornega kota Sonca.

Arhimed takole opisuje svoj način merjenja zornega kota Sonca: »Aristarh je ugotovil, da je zorni kot Sončeve okrogle ploskvice približno 720-del zodijskega kroga (če preračunamo, dobimo $\frac{1}{720} \cdot 360^\circ = \frac{1}{2}^\circ$; op. pisca). V svojih raziskavah sem poskusil z opisanim načinom, to je s pomočjo opazovalnih naprav najti kot, v katerega je mogoče namestiti Sonce, če je vrh kota v očesu. Ugotoviti natančno vrednost tega kota je zelo zahtevno delo, ker niti oko niti roka in niti opazovalna naprava ne zagotavljajo dovolj velike natančnosti.« Tu gre za zelo redek primer meritve, ohranjene iz antike, kjer se Arhimed celo ukvarja z natančnostjo meritev. To je pomembna pripomba, saj takratni grški astronomi kljub zavidanju vrednim

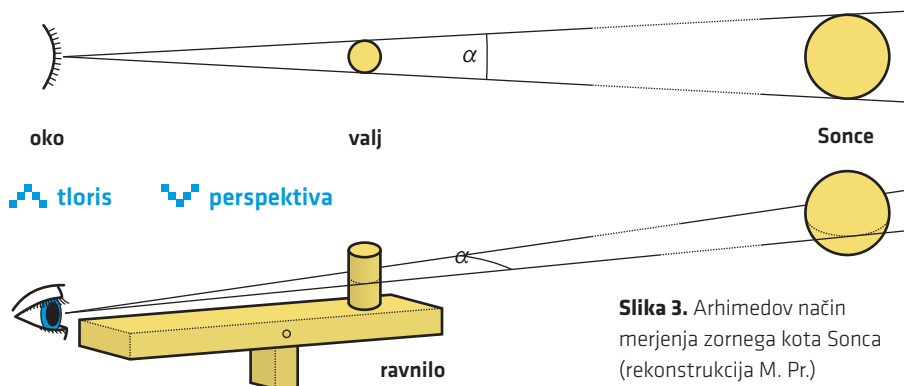
opazovalnim napravam in bistroumnim izračunom niso dajali poudarka natančnosti.

Arhimed je približno takole izmeril zorni kot Sonca. Na ravnilo s podstavkom je v določeni razdalji od očesa postavil pokončen valj. Takoj po Sončevem vzhodu je usmeril ravnilo proti Soncu. (POZOR! Le ko je Sonce zelo blizu obzorja, ga je mogoče včasih neposredno gledati, pa še takrat moramo biti skrajno previdni, saj sončna svetloba lahko poškoduje mrežnico našega očesa. Arhimedovo meritev lahko izvedete le ob skrajni zaščiti oči. Vendar jo odsvetujem, ker je dosti drugih povsem varnih načinov.) Opazoval ga je z enega konca ravnila. Najprej je valj namestil tako, da je pri gledanju popolnoma zakril Sonce. Potem je valj odmikal od očesa toliko časa, da je pri določeni razdalji od očesa ravno še zaznal Sončevo svetlobo hkrati z leve in desne strani valja. Če si predstavljamo oko kot točko, lahko v tem primeru iz očesa narišemo tangenti na valj. Za zorni kot Sonca je ocenil, da je nekoliko večji od kota med tako dobljenima tangentama.

Izmeril je dve vrednosti za zorni kot Sonca: $\frac{1}{164}$ in $\frac{1}{200}$ pravega kota (kar je preračunano 36' in 27'; op. pisca), med katerima naj bi ležala iskana vrednost zornega kota Sonca. Rezultat Arhimedovih meritev je sijajen, če samo pomislimo, da je dejanska vrednost zornega kota Sonca 32' (v šoli navadno vzamemo kar 0,5°) in torej leži med obema mejnima vrednostma.

Arhimed nadalje ugotavlja, da popolnoma natančno tega kota ni mogoče izmeriti. Upošteva celo, da je opazoval Sonce s površja Zemlje in ne njenega središča. Pri izračunu razdalje med središčema Sonca in Zemlje zato vnese ustrezne popravke. Ta novost se je pozneje prenesla v astronomsko prakso.

Način merjenja zornega kota Sonca in razpravljanje o rezultatu meritev nam veliko povesta o Arhimedu kot opazovalcu in o napravah, ki so jih uporabljali astronomi tedanjega časa. Hitro ugotovimo, da je bil Arhimedov »kotomer« primitten inštrument, način merjenja pa je bil neoporečen. V primeru, da bi povečal razsežnosti valja in ravnila, bi bilo mogoče precej zblížiti mejni vrednosti izmerjenega zornega kota Sonca. Zelo poučno je, da je za masko, ki zasloni Sonce, Arhimed uporabil valj in ne pravokotniške deščice. Očitno je velik učenjak hotel na ta način odpraviti napake, ki bi lahko nastale pri nepravokotni legi deščice glede na zorno smer. Pokončni valj pa zagotavlja pravokotnost in s tem stalnost navidezne oblike maske neodvisno od smeri gledanja.



Slika 3. Arhimedov način merjenja zornega kota Sonca (rekonstrukcija M. Pr.)

■ Navodila sodelavcem Preseka za oddajo prispevkov

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželen velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.



Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA-založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

.tex

■ Kolofon

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

letnik 33

šolsko leto 2005/2006

številka 2

Uredniški odbor

Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Marijan Prosen (astronomija), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine

DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19,
p. p. 2964, 1001 Ljubljana,
telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 2517 281.

Naročnina za šolsko leto 2005/2006 je za posamezne naročnike **4.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol **3.500 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, dvojna številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino pa znaša **25 EUR**.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana,
Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana,
SWIFT (BIC): SKBASIZX, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancirata javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA-založništvo

Oblikovanje Polona Šterk in Matjaž Čuk

Ilustracija Polona Šterk, Matjaž Čuk, Nina Rupel

Tehnično urejanje Matjaž Čuk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

© 2005 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1615

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

Mednarodna matematična olimpijada, nadaljevanje s strani 4

Končno besedo pri izboru tekmovalnih nalog ima mednarodna tekmovalna komisija, ki jo sestavlja po en član iz vsake sodelujoče države. Predsednika tekmovalne komisije imenuje država gostiteljica. Odločitve komisije se sprejemajo z navadno večino pri glasovanju. Uradni jeziki mednarodne matematične olimpijade so angleščina, francoščina, nemščina, ruščina in španščina. Zadnja leta potekajo vse seje mednarodne tekmovalne komisije v angleščini, ostali jeziki se uporabljajo le, če je to potrebno zaradi odpravljanja morebitnih nesoglasij.

Ker mora mednarodna tekmovalna komisija izbrati tekmovalne naloge, se sestane nekaj dni pred uradnim začetkom olimpijade, odmaknjena od mesta, kjer poteka olimpijada sama. Člani komisije prejmejo izbor predlogov tekmovalnih nalog in ga pregledajo še pred sejami komisije, na katerih bodo dokončno izbrali tekmovalne naloge. Častna dolžnost vsakega člana komisije je, da opozori na predloge nalog, ki so širše znani, objavljeni v revijah ali knjigah oziroma uporabljeni na pripravah v posameznih državah. Nekateri predlogi nalog so zavrženi, ker so po mnenju članov komisije bodisi prelahki bodisi pretežki. Ko je šest tekmovalnih nalog izbranih, se pripravi besedilo le-teh v angleškem jeziku, nato v preostalih uradnih jezikih in končno še v vseh drugih jezikih držav udeleženk. Člani mednarodne tekmovalne komisije pregledajo zapise nalog v vseh jezikih, da bi se prepričali o ustreznosti prevodov.

Ko so naloge praktično nared, prispejo ekipe sodelujočih držav skupaj s svojimi vodji. Olimpijada se tedaj uradno začne s posebno otvoritveno slovesnostjo, v naslednjih dveh dneh pa se tekmovalci spopadejo z nalogami. Naloge rešujejo vsak v svojem jeziku, in sicer po tri naloge v dveh zaporednih dneh. Za reševanje imajo vsak dan po štiri ure in pol. Naloge so res zahtevne, saj se nemalokrat zgodi, da nihče izmed tekmovalcev ne reši vseh nalog.

Za tekmovalce sledijo dnevi z bolj razvedrilno vsebino, kot so izleti, ogledi in športna tekmovalja. Tekmovalci se družijo, poklepetajo o tem in onem, se zabavajo in sklepajo prijateljstva. V tem času član mednarodne tekmovalne komisije in vodja ekipe iz vsake države pregledata izdelke svojih dijakov ter za vsako nalogo predlagata število točk glede na pripravljen točkovnik. Vsaka naloga je vredna 7 točk, izdelek pa se točkuje s celim številom točk. Vsak izdelek gre nato skozi temeljit pregled mednarodnih ocenjevalcev, ki jih izberejo organizatorji in ki skrbijo za pošteno in korektno vrednotenje. Število točk, ki ga dobi tekmovalec posamezne države pri vsaki nalogi, se namreč določi na koordinaciji med mednarodnimi ocenjevalci ter članom mednarodne tekmovalne komisije in vodjem ekipe iz te države. Pri koordinaciji oziroma določanju števila točk, ki ga pri posamezni nalogi dobi dijak države gostiteljice, sodelujeta član mednarodne tekmovalne komisije in vodja ekipe iz države, ki je predlagala to nalogo.

Pri nagrajevanju dijakov oziroma dodeljevanju medalj se spoštuje dolgoletna tradicija. Mednarodna tekmovalna komisija formalno razglasi uradne rezultate in odloči, kdo bo prejel medaljo ustrezne žlahtnosti oziroma pohvalo. Medalje prejme kvečjemu polovica vseh nastopajočih srednješolcev. Števila podeljenih zlatih, srebrnih in bronastih medalj so približno v razmerju 1 : 2 : 3. To pomeni, da zlato medaljo dobi približno dvanajstina vseh tekmovalcev, srebrno medaljo približno šestina, bronasto medaljo pa približno četrtnina vseh tekmovalcev. Da bi motivirali čim več tekmovalcev in jih vzpodbudili k popolnemu reševanju posameznih nalog, dobi posebno pohvalo vsak dijak, ki je v celoti rešil vsaj eno nalogo, a ni prejel medalje.

Mednarodna matematična olimpijada se izteče z zaključno slovesnostjo, na kateri

se najboljšim tekmovalcem podelijo zlate, srebrne in bronaste medalje. Država gostiteljica preda olimpijsko zastavo predstavnikom države, ki bo gostila matematično olimpijado naslednje leto.

■ Kako bo pri nas?

Dolžnost in čast vsake države, ki se udeležuje mednarodnih matematičnih olimpijad, je, da olimpijado tudi sama organizira. Že leta 1998 se je porodila ideja o organizaciji olimpijade v Sloveniji v letu, ko bomo izvedli jubilejno 50. matematično tekmovalje srednješolcev Slovenije. Ta ideja se bo uresničila: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije bo organiziralo 47. MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIJADO od 6. do 18. julija prihodnje leto ob podpori Ministrstva za šolstvo in šport ter Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo. Častni pokrovitelj matematične olimpijade bo dr. Janez Drnovšek, predsednik Republike Slovenije.

Pričakujemo, da se bo mednarodne matematične olimpijade udeležilo rekordno število držav, najverjetneje jih bo med 95 in 100. Gotovo bo to veličasten in organizacijsko izjemno zahteven dogodek. Nanj se v ožjem krogu pripravljamo vsaj od leta 2002, ko je bila Sloveniji uradno zaupana organizacija 47. MEDNARODNE MATEMATIČNE OLIMPIJADE, že prej pa smo natančno spremljali podrobnosti in zakulisja na matematičnih olimpijadah.

Sedaj nas čaka obdobje, ko bomo morali zamisliti, želje in načrte tudi udejaniti. V organizacijo dogodka je vključenih vedno več ljudi. Ocenjujemo, da jih bo pri izvedbi matematične olimpijade sodelovalo več kot 200. Marsikaj se bo dalo spremljati tudi na spletni strani 47. MEDNARODNE MATEMATIČNE OLIMPIJADE: http://imo2006.dmfa.si/index_SL.html.



Matematična tekmovanja

Vsako leto več kot 3 milijone mladih matematikov iz več kot 30 držav sočasno rešuje naloge na tekmovanju Evropski matematični kenguru, med njimi jih je že več kot 80 tisoč iz Slovenije, od prvega razreda devetletne osnovne šole do zaključnega letnika srednje šole. To tekmovanje je postalo najbolj množično preskušanje znanja matematike, zaradi igrivo in zabavno zastavljenih matematičnih problemov pa zagotovo sodi tudi med najbolj priljubljena. Za lažjo pripravo na hitro bližajoča se tekmovanja vam ponujamo različne zbirke tekmovalnih nalog z rešitvami.

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU



1996–2001

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

1996–2001

več kot 900 nalog
+ dodane naloge z
dijaških šolskih
tekmovanj 1993–1995

264 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

3.250 SIT

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU



2002–2004

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

2002–2004

več kot 500 nalog s
tekmovanja

+ dodanih še 160 novih
nalog

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

2.450 SIT

MATEMATIČNA TEKMOVANJA V REVJI PRESEK

tematske številke revije Presek
z rešenimi matematičnimi
tekmovalnimi nalogami
za osnovnošolce in srednješolce
so še vedno na voljo
(za leta 2001, 2002 in 2003)

format 14 × 20 cm
mehka vezava

vsaka številka: 1.500 SIT



Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce in srednješolce s tekmovanj v znanju matematike, fizike, razvedrilne matematike, logike in računalništva. Naročite jih lahko s popustom na naslovu:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/>

Individualni naročniki revije Presek imajo pri naročilu izdaj DMFA–založništvo 20 % popusta!
Dodatne informacije dobite v uredništvu Preseka po telefonu: (01) 4766 553 ali 4232 460