

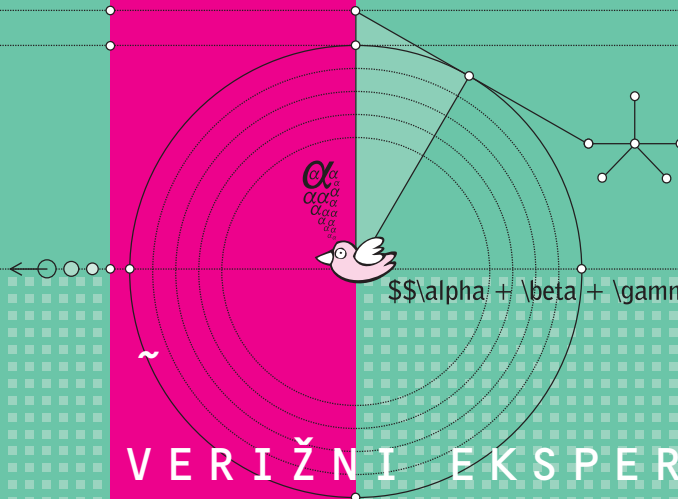
6.

LETNIK 32 (2004/2005) ŠTEVILKA 6

PRESEK

11011011011011011011011

11011011011011011011011



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

matematika

fizika

računalništvo

astronomija

VERIŽNI EKSPERIMENT

NAJVEČJA PRAŠTEVILA

KRIŽANKA Z DELITELJI

LETO FIZIKE 2005

X₀₅



ISSN 0351-6652



9 770351 665265

Uvodnik

Dragi bralci in bralke, pred vami je šesta, zadnja številka Preseka v tem šolskem letu. V njej si lahko preberete zapis o tretjem in četrtem členu verige eksperimentov, katerih avtorji so študentje Oddelka za fiziko Fakultete za matematiko in fiziko. Morda ste se ob predstavitvah demo verzije verižnega eksperimenta tudi sami odločili za sodelovanje v Velikem verižnem eksperimentu. Vabimo vas, da vaše morebitne izkušnje opišete v kateri od številke naslednjega letnika Preseka. V fizikalnem delu revije si lahko preberete tudi zanimiv članek o prožnem trku in urejanju hitrosti.

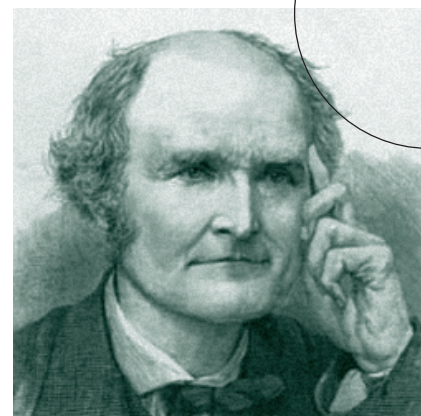
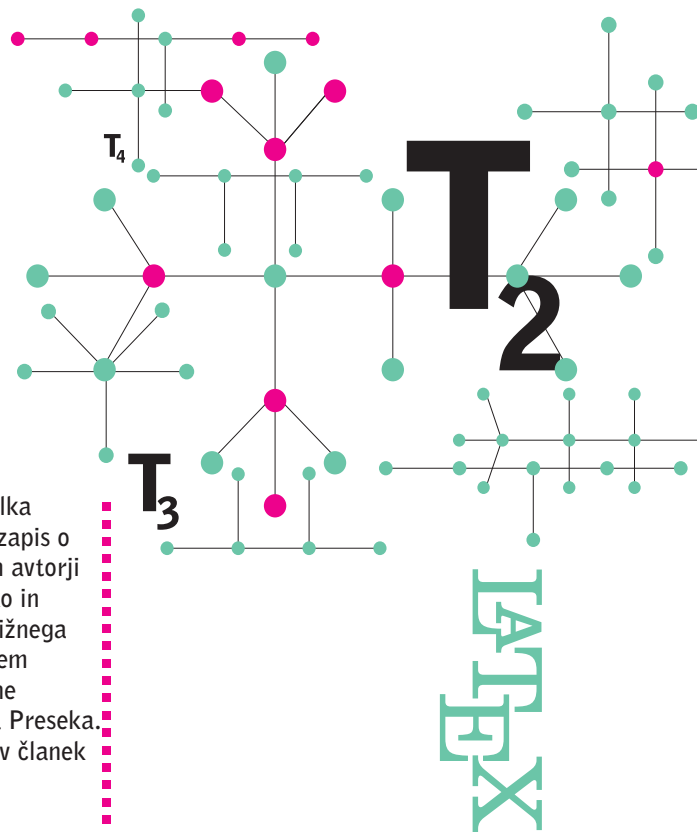
V letošnjem letu so odkrili novo največje Mersennovo praštevilo, praštevilo oblike $2^p - 1$, kjer je p praštevilo. Zapis o tem velikem praštevilu si lahko preberete na strani 9. V tej številki Preseka pišemo še o enem pomembnem matematiku, Arhurju Cayleyu, ki je sodeloval tudi pri razvoju kemijskih znanosti. Zanimiv je tudi članek o elipsi v trikotniku, kjer boste lahko uporabili znanje o linearnih preslikavah, ki ste si ga pridobili v prejšnjih dveh številkah Preseka.

Astronomski del prinaša zanimiva prispevka o merjenju Zemljinega premera in obliki Zemlje. Omenimo tudi zanimivo številsko križanko z delitelji, ki jo objavljamo poleg običajne križanke. Želimo vam veliko zabave in uspeha pri reševanju obeh križank.

Naj se ob tej priložnosti opravičim dvema avtorjema, ki sta v 2/3. in 4. številki sodelovala s svojima prispevkoma, a njuni imeni nista bili zabeleženi. Urška Demšar je bila avtorica dveh gobelinov, objavljenih v 2/3. številki, Bojan Golli pa avtor rešitev nalog s fizikalnih tekmovanj, ki so bile objavljene v prilogi 4. številke Preseka.

Na koncu vas ponovno vabimo k sodelovanju pri nagradnemu fotografskemu natečaju na fizikalno temo, ki je bil objavljen v 1. in 2/3. letošnji številki. Morda boste med prijetnimi poletnimi počitnicami naleteli na zanimivo temo, s katero bi lahko sodelovali v našem natečaju.

Maja Klavžar
odgovorna urednica Preseka



Slika 1.
Arthur Cayley
(1821–1895)

Kazalo

Uvodnik

- Nagovor odgovorne urednice stran 2

1. Matematika

- Elipsa v trikotniku stran 5–6
- Arthur Cayley – pionir kemijske teorije grafov stran 7–8
- Odkriti dve novi Mersennovi praštevili stran 9

2. Fizika

- Tretji in četrti člen verige eksperimentov stran 11–14
- Prožni trk ureja hitrosti stran 15–17

3. Računalništvo

- Mala šola LaTeXa (tretji del) stran 23–25

4. Astronomija

- Kako so ugotovili natančno obliko in velikost Zemlje stran 27–29
- Birunijeva meritev Zemljinega polmera stran 30–31

Razvedrilo

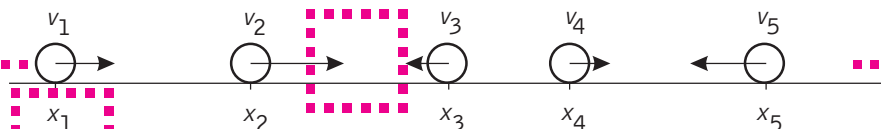
- Križanka stran 18–19
- Številska križanka z delitelji stran 20–21

Letno kazalo

- Letno kazalo stran 31–33

Tekmovanja

- Tekmovanja priloga



T₄

T₂

T₁

T₃

MATE

MAITH

$$(x' - 1/3 y' - 2)^2 + (\frac{2}{\sqrt{3}} y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}.$$

$$(x' - 1/3 y' - 2)^2 + (\frac{2}{\sqrt{3}} y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}.$$

$$(x' - 1/3 y' - 2)^2 + (\frac{2}{\sqrt{3}} y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}.$$

$$= (1 + \sqrt{3}/6) x$$

$$= \sqrt{3}/2 m x.$$

Elipso v trikotniku

Ali trikotniku lahko včrtamo elipso? Prav gotovo. Vsakokrat, ko včrtamo trikotniku krog (in to je vedno mogoče), včrtamo že tudi elipso, saj je krog vendar poseben primer elipse. Zato moramo vprašanje zasukati drugače. Recimo takole: koliko elips lahko včrtamo danemu trikotniku? Glede na to, da ima elipsa dve poljubno dolgi osi, krog pa samo en polmer, slutimo, da je rešitev neskončno. S tem se ne bomo obremenjevali, pač pa bomo od elipse včrtane trikotniku, zahtevali, da izpolni še en pogoj, in sicer tega, da se dotika treh trikotnikovih stranic v njihovih razpoloviščih. Naloga je s tem postala dovolj težka, da je tudi zanimiva. Pa je za poljuben trikotnik rešljiva? In je rešitev, če obstaja, ena sama?

Za zelo poseben trikotnik, enakostranični trikotnik, rešitev obstaja, saj se posebna elipsa – krog, včrtan enakostraničnemu trikotniku, dotika stranic prav v njihovih razpoloviščih. Kako lepo bi bilo, če bi mogli to sliko preoblikovati, transformirati tako, da bi iz enakostraničnega trikotnika nastal drug trikotnik, in to poljubno vnaprej izbran, pri čemer bi razpolovišča stranic postala razpolovišča novih stranic in bi dotikajoči se krog postal dotikajoča se elipsa.

Nekaj preslikav (transformacij) v ravnini poznamo. Na sliki 1 sta prikazana premik (translacija)

$$\begin{aligned} x' &= x + 3 \\ y' &= y + 4 \end{aligned}$$

in zrcaljenje

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y, \end{aligned}$$

na sliki 2 pa zasuk ali rotacija

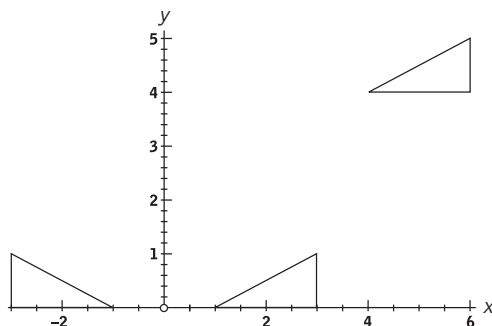
$$\begin{aligned} x' &= 0.6 \cdot x - 0.8 \cdot y \\ y' &= 0.8 \cdot x + 0.6 \cdot y. \end{aligned}$$

In končno nam slika 3 ponazarja razteg

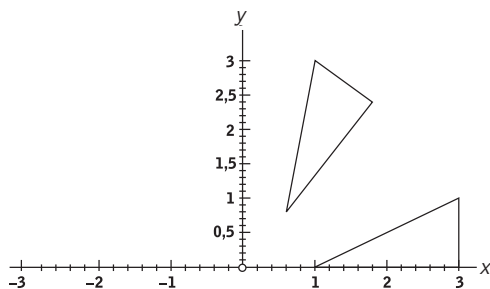
$$\begin{aligned} x' &= 3x \\ y' &= 3y. \end{aligned}$$

Vse te preslikave so zanimive, naše naloge pa ne morejo rešiti, saj se koti pri vseh ohranjajo (pri prvih treh preslikavah se ohranjajo tudi razdalje),

Slika 1.



Slika 2.

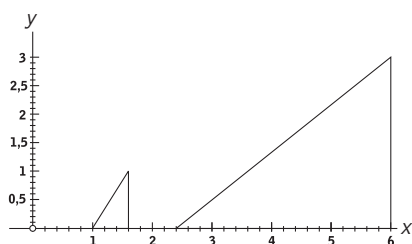


mi pa moramo na splošno kot spremeniti. Namig iz naštetih preslikav pa le dobimo. Vse so namreč linearne transformacije (vse črke spremenljivk so prve stopnje), skratka oblike:

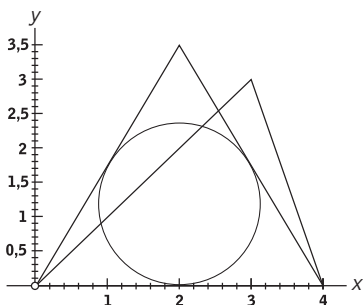
$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x' &= ax + by + c \\ \blacksquare \quad y' &= dx + ey + f. \end{aligned} \quad (1)$$

Tako je za premik $a=1$, $b=0$, $c=3$, $d=0$, $e=1$, $f=4$. Kar pa je s tem v zvezi najvažnejše, prej našteje trans-

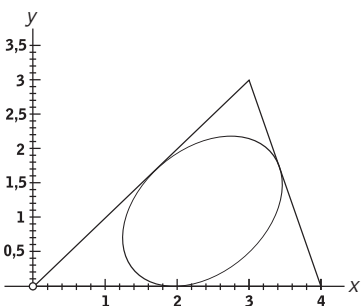
Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.



formacije ne izčrpajo vseh možnosti, ki jih posplošitev enačbe (1) nudi (že primer $x'=x$ in $y'=3y$ je nekaj, česar omenjene štiri transformacije ne krijejo: ni premik ne zrcaljenje ne zasuk ne razteg). Ostalo nam je torej še nekaj maneverskega prostora. Bo ta dovolj velik za to, kar želimo doseči?

Kaj bi bilo sedaj treba storiti? Vzeti bi morali tri oglišča trikotnika v poljubni legi, podana v koordinatnem sistemu s tremi pari števil, dalje tri oglišča enakostraničnega trikotnika, nato dokazati, da se stranice enakostraničnega trikotnika preslikajo v stranice prvega trikotnika, da se enako zgodi z razpolovišči stranic, ki naj se tudi znajdejo v razpoloviščih stranic in da pri tem krog postane elipsa. Vse to za primerne koeficiente $a, \dots, f$ iz enačbe (1). Pravimo »bi«, saj bomo za oglišča vzeli konkretne številske vrednosti. Bralcu bo tako lažje, vseeno pa naj bi – tako upamo – uvideli, kako bi potekal postopek tudi v splošnem primeru.

Naj bo torej dan trikotnik z oglišči v točkah $(0,0)$, $(4,0)$ in $(3,3)$. Ob njem narišimo (slika 4) še enakostranični trikotnik z oglišči v točkah $(0,0)$, $(4,0)$ in $(2,2\sqrt{3})$ z včrtanim krogom. Ker hočemo s preslikavo doseči $(0,0) \rightarrow (0,0)$, $(4,0) \rightarrow (4,0)$ in $(2,2\sqrt{3}) \rightarrow (3,3)$, nam vstavljanje v enačbo (1) podari vseh šest koeficientov $a, \dots, f$, pri čemer transformacija (1) postane

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x' &= x + \sqrt{3}/6 y \\ \blacksquare \quad y' &= \sqrt{3}/2 y, \end{aligned} \quad (2)$$

Bralec naj to izpelje ali vsaj naredi preizkus!

Dokažimo, da transformacija (2) preslika premice v premice. V kaj se na primer preslika premica $y=mx$ ($m=\text{konst.}$)? Vstavimo v (2) in dobimo

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x' &= (1 + \sqrt{3}/6 m)x \\ \blacksquare \quad y' &= \sqrt{3}/2 mx. \end{aligned}$$

Po deljenju nam to da $x'/y' = \text{konst.}$, kar je seveda enačba premice. Bralec je naprošen, da dokaže, da se tudi splošnejša premica $y=mx+n$ preslika v premico. In prav tako premica $x=k$, ki ni zajeta v tej zadnji enačbi.

Razpolovišče $(2,0)$ se tudi preslika v razpolovišče $(2,0)$ in isto velja za ostali dve razpolovišči $(1,\sqrt{3})$ in $(3,\sqrt{3})$, ki se preslikata v razpolovišči $(1.5, 1.5)$ in $(3.5, 1.5)$. Oboje naj bralec preveri sam.

V kaj se preslika krog, katerega enačba je

$$\blacksquare \quad (x-2)^2 + (y - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3} \quad (3)$$

Dovolj je izraziti x in y z x' in y' ter vstaviti v (3), pa dobimo iskano enačbo. Ta je

$$\blacksquare \quad (x' - \frac{1}{3}y' - 2)^2 + (\frac{2}{\sqrt{3}}y' - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}.$$

Enačba je, čeprav je nismo niti preuredili, očitno druge stopnje, zato je stožnica. Ta ne more biti krog, ker sta koeficienta pri x'^2 in y'^2 različna. Pa tudi hiperbola ali parabola ne, ker iz končnih točk (x,y) lahko iz enačb (2) dobimo le končne točke (x',y') , hiperbola in parabola pa imata tudi točke, ki so poljubno, neskončno daleč. Preostaja le elipsa, tista elipsa, ki smo jo iskali (slika 5). Ker smo tako pri računanju koeficientov kot povsod drugje dobili eno samo rešitev, je tudi dobljena elipsa edina z zahtevanimi lastnostmi. Naloga je torej popolnoma rešena.

Pripis. V enačbah (1) so koeficienti $a, \dots, f$ poljubna realna števila z edino izjemo: $ae - bd$ ne sme biti enako 0. Če se to zgodi, enačbi (1) preslikata celo ravnino v premico. Govorimo o izrojeni linearni transformaciji.

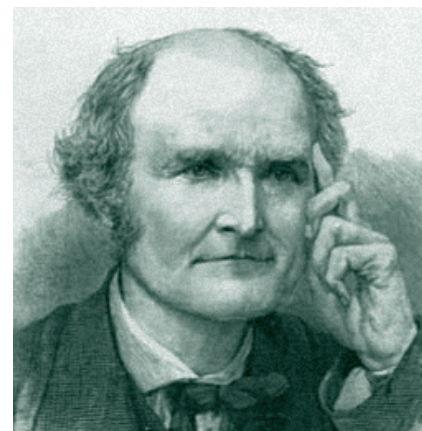
Drago Bajc

Arthur Cayley – pionir kemijske teorije grafov

Arthur Cayley je eden najpomembnejših matematikov 19. stoletja, po številu objavljenih del (okoli 1000) ga uvrščamo med najplodovitejše matematike vseh časov. V krajšem obdobju svojega življenja se je Cayley zanimal tudi za matematične probleme v kemiji in s tega področja objavil (samo) štiri dela. Le-ta predstavljajo le neznaten a zelo pomemben del njegovega znanstvenega opusa, saj je bil Cayley prvi, ki je v kemiji uporabil teorijo grafov. O tem bomo podrobneje govorili v drugem delu članka.

Slika 1.

Arthur Cayley
(1821–1895)



Arthur Cayley je bil rojen leta 1821 v Richmondu v Angliji. V tistem času so njegovi starši živeli v Sankt Petersburgu, v Rusiji, kjer se je Cayleyev oče ukvarjal s trgovino. Cayley se je rodil med krajšim obiskom svojih staršev v domovini. Deček je živel v Rusiji do 1828, ko se je celotna družina vrnila v Anglijo. V osnovni šoli in gimnaziji je bil Arthur najboljši pri vseh predmetih in je osvajal vse mogoče nagrade. Njegov oče nad tem ni bil ravno navdušen, saj je želel, da bi Arthur postal trgovec. Vseeno mu je leta 1838 dovolil vpis na univerzo (Trinity College v Cambridgu). Tam je mladi Cayley študiral matematiko in bil zopet najboljši.

Ko je imel Cayley le 21 let, je bil že izbran za člana na Trinity Collegu (kar je primerljivo s položajem današnjega asistenta na univerzi). Toda že leta 1846 je zapustil univerzo in postal odvetniški pripravnik in od leta 1849 samostojni odvetnik. To mu je seveda

prinašalo mnogo večje prihodke kot delo na univerzi. Kot pravnik je delal do leta 1863. Šele tedaj je sprejel mesto profesorja »čiste matematike« v Cambridgu. Umrl je leta 1895.

Neodvisno od tega, ali je bil asistent, odvetniški pripravnik odvetnik ali univerzitetni profesor, se je Cayley ves čas intenzivno ukvarjal z matematiko in objavljajl članke v matematičnih revijah. Že leta 1852 je bil tudi izbran za člana Kraljevskega društva (Royal Society, ustanove ki ustreza znanstvenim akademijam v drugih državah). Izbran je bil kot »geometer in analitik«, torej kot matematik.

Cayley je bil nizke rasti in suhe postave. Eden njegovih prijateljev je izjavil, da »izgleda tako slabotno, kot da je nesposoben za kakršno koli fizično delo«. Vendar je videz varal, saj je bil Cayley neutruđen, ko je šlo za matematiko. Za druge stvari se je manj zanimal, znan je bil kot sramežljiva in zadržana oseba.

■ Matematik Cayley

Najpomembnejše področje Cayleyevega matematičnega raziskovanja je algebra. Slaven je postal zaradi svojih rezultatov v tako imenovani *teoriji invariant*. To je del algebre, ki se ukvarja z lastnostmi algebrskih funkcij, ki ostanejo nespremenjene, ko se transformirajo njihove spremenljivke.

Poglejmo si enostaven primer.

Bralci Preseka zagotovo vedo, da ima enačba

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

dve enaki rešitvi natanko tedaj, ko je

$$b^2 - 4ac = 0. \quad (2)$$

Uvedimo sedaj novo spremenljivko

$$y = \frac{p - qx}{r - sx},$$



kjer parametri p, q, r, s zadoščajo pogoju

$$\blacksquare \blacksquare \quad ps - rq \neq 0 \quad \text{t. j.} \quad \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \neq 0.$$

S to zamenjavo enačbo (1) transformiramo v obliko

$$\blacksquare \blacksquare \quad Ay^2 + By + C = 0. \quad (3)$$

Dokažemo lahko, da ima tudi enačba (3) dve enaki rešitvi natanko tedaj, ko velja pogoj (2). Bralcem Preseka predlagamo, da to tudi preverijo.

Cayley je prvi pisal matrike (in s tem tudi determinante) v obliki, ki jo uporabljamo še danes, torej v obliki tabele, na primer

$$\blacksquare \blacksquare \quad \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}.$$

Prvi je obravnaval matrike kot samostojne algebrske objekte, povedano enostavneje, Cayley je odkril matrike.

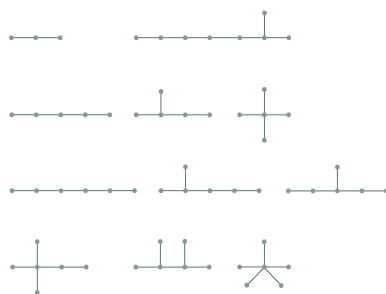
Omenimo še, da je prvi preučeval geometrijske probleme v n -dimenzionalnih prostorih. Cayleyeva števila predstavljajo posplošitev kompleksnih števil, medtem ko je Cayleyeva ploskev ploskev, podana z enačbo

$$\blacksquare \blacksquare \quad z = xy - \frac{1}{6}x^3.$$

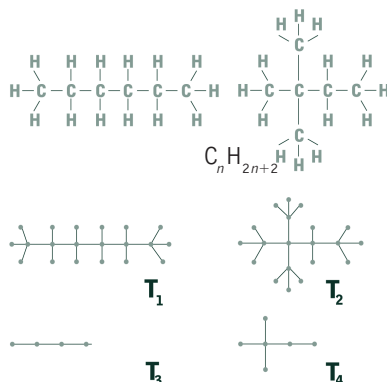
■ Drevesa, plerogrami in kenogrami

Leta 1857 je Cayley v matematiko uvedel pojem *drevesa*. Drevo je povezan graf, ki ne vsebuje ciklov¹. Namesto formalne definicije drevesa, si oglejte prikaz dreves na sliki 2.

Skoraj istočasno, okoli leta 1859, so bile odkrite strukturne formule organskih kemijskih spojin². Potrebno je bilo kar petnajst let, da so strukturne formule v kemiji pritegnile pozornost matematika,



Slika 2. Drevesa s 3, 4, 5 in 6 točkami



Slika 3. Strukturni formuli dveh alkanov in odgovarjajoča drevesa. T_1 in T_2 sta plerograma, T_3 in T_4 pa kenograma. Oba alkana imata formulo C_6H_{14} , zato sta izomeri. Obstaja pet različnih izomer formule C_6H_{14} (poskusite jih narisati), torej $I_6=5$. Cayley je iskal odgovor na vprašanje, koliko je I_n , torej število različnih izomer formule C_nH_{2n+2} , pri čemer je n podano naravno število.

- 1 Obširneje o grafih lahko preberemo v knjigi: R. J. Wilson, J. J. Watkins, Uvod v teorijo grafov, Ljubljana, 1997.
- 2 Odkritje strukturnih formul je bilo rezultat dela več kemikov, Archibald Couper in August Kekulé sta avtorja najpomembnejših prispevkov.

seveda Cayleya. Takoj je dojel, da med njegovimi drevesi in strukturnimi formulami tako imenovanih alkanov (spojine splošne formule C_nH_{2n+2}) obstaja enostavna in očitna podobnost (slika 3).

Cayley je definiral dve vrsti dreves, ki odgovarjata strukturnim formulam, in ju poimenoval *plerogrami* in *kenogrami*. Način njihove konstrukcije je razviden iz primerov na sliki 3. Članek *O matematični teoriji izomer*, ki ga je objavil leta 1874, predstavlja začetek uporabe teorije grafov v kemiji, znanstvene discipline, ki se danes imenuje *kemijska teorija grafov*.

Opazil je, da vsakemu plerogramu s $3n+2$ točkami enolično ustreza kenogram z n točkami in da je veliko lažje delati s kenogrami kot s plerogrami. Od tedaj do danes za skoraj vsa raziskovanja v kemijski teoriji grafov uporabljamo kenograme.

V času, ko se je Cayley zanimal za kemijo, je bilo že dobro znano, da obstaja večje število molekul z isto splošno formulo C_nH_{2n+2} , ki se imenujejo *izomere*. Za prvih nekaj vrednosti števila n lahko število različnih izomer določimo z metodo enostavnega preštevanja. Z večanjem števila n število izomer zelo hitro narašča, njihovo preštevanje pa postane zelo težak problem. Cayley je poskušal poiskati splošno rešitev tega problema, a ni uspel, čeprav je podal nekaj pomembnih rezultatov o preštevanju različnih razredov dreves.

Problem preštevanja izomernih alkanov je bil rešen šele šestdeset let kasneje. Do števila izomernih alkanov sta prva prišla kemika Henze in Blair leta 1931, splošno matematično rešitev problema pa je našel Polya leta 1936. V tabeli je podanih prvih nekaj vrednosti števila I_n izomernih alkanov C_nH_{2n+2} :

n	I_n	n	I_n
5	3	15	4347
6	5	20	366319
7	9	25	36797588
8	18	30	4111846763
9	35	40	62481801147341
10	75	50	1117743651746953270

Ivan Gutman, Branislav Popović
prevod Sandi Klavžar



Odkriti dve novi Mersennovi praštevili

V lanskoletni številki Preseka, v članku C. Petr *Odkrito novo največje (Mersennovo) praštevilo*, Presek 31 (2003/2004), 345–346, smo poročali o tako imenovanem velikem medmrežnem iskanju Mersennovih praštevil (GIMPS – Great Internet Mersenne Prime Search) in o odkritju 40. največjega znanega Mersennovega praštevila. Od takrat sta bili odkriti še dve Mersennovi praštevili. V desetletnem delovanju projekta GIMP je bilo odkritih kar osem največjih znanih Mersennovih praštevil, ki so bila istočasno tudi največja znana praštevila:

zap. št.	Mersennovo praštevilo	število števk	datum odkritja
35.	$2^{1398269} - 1$	420921	12.11.1996
36.	$2^{2976221} - 1$	895832	24.08.1997
37.	$2^{3021377} - 1$	909526	27.01.1998
38.	$2^{6972593} - 1$	2098960	01.06.1999
39.	$2^{13466917} - 1$	4053946	14.11.2001
? 40.	$2^{20996011} - 1$	6320430	17.11.2003
? 41.	$2^{24036583} - 1$	7235733	15.05.2004
? 42.	$2^{25964951} - 1$	7816230	18.02.2005

V okviru projekta GIMP sodeluje na desettisoče prostovoljcev s svojimi računalniki z vseh koncev sveta. Za zadnje odkritje je bilo potrebnih devet mesecev. Če bi opravljeno delo v teh devetih mesecih moral izvesti en sam povprečni osebni računalnik, bi potreboval kar 1500 let.

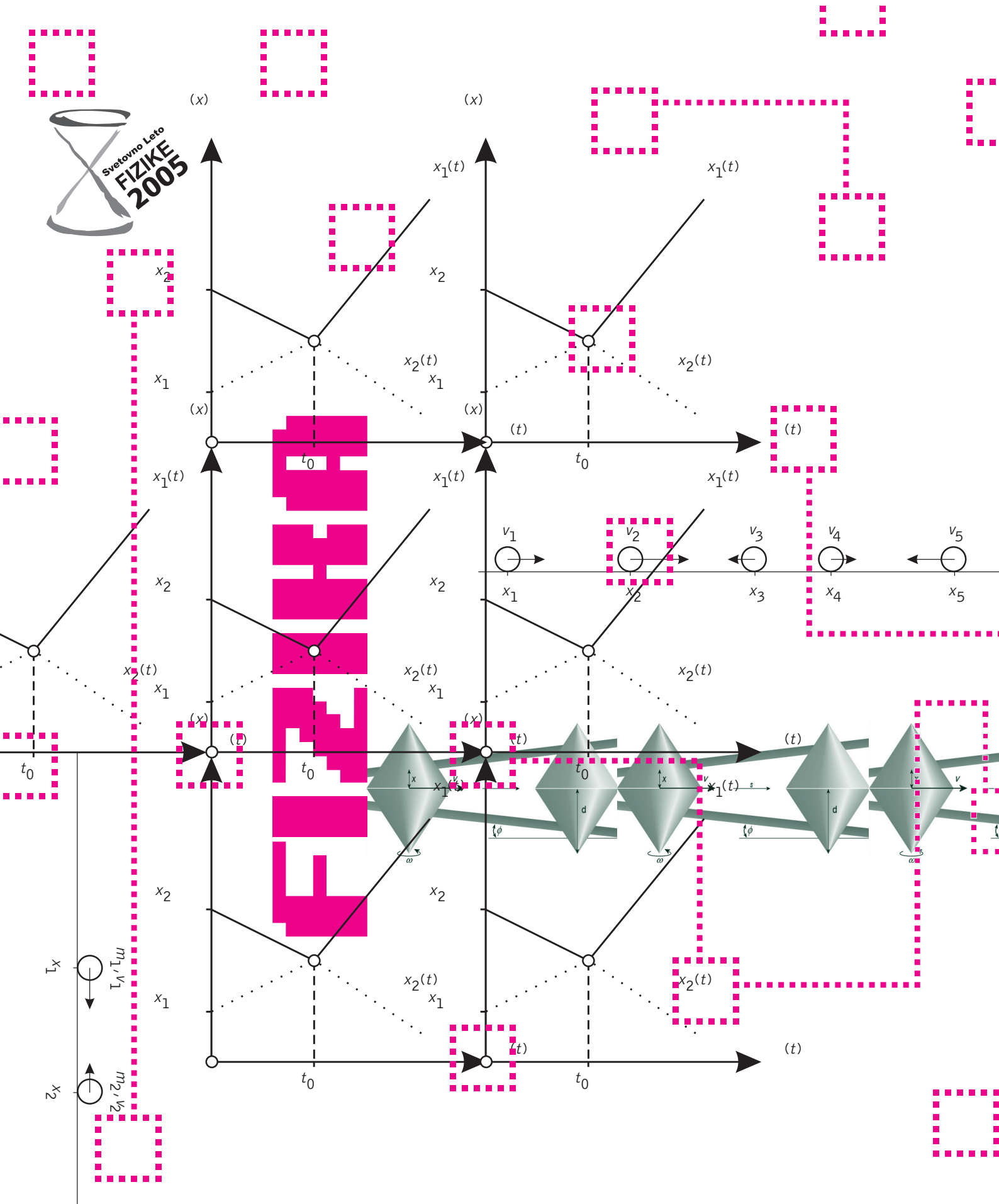
V tabeli je pri 40., 41. in 42. Mersennovem praštevilu vprašaj, ker še niso bile preverjene vse potence do 40. Mersennovega praštevila. Do sedaj so bile dvakrat preverjene vse potence do 9 889 900, vsaj enkrat pa so bile preverjene potence do 15 130 000. Podatke o trenutnem stanju projekta lahko dobimo na naslovu:

<http://www.mersenne.org>

Verjetno ne bo minilo veliko časa, ko se bo našlo praštevilo z vsaj 10 000 000 števki. Zelo verjetno bo to Mersennovo praštevilo. Samostojni najditelj števila bo dobil nagrado v višini 100 000 ameriških dolarjev, najditelj v okviru projekta GIMP pa bo moral pol nagrade prepustiti organizatorjem projekta. Postavlja se še eno zanimivo vprašanje: Koliko časa bo tehnološki razvoj računalnikov še sledil vedno večjim vrzelim med Mersennovimi praštevili?

Ciril Petr





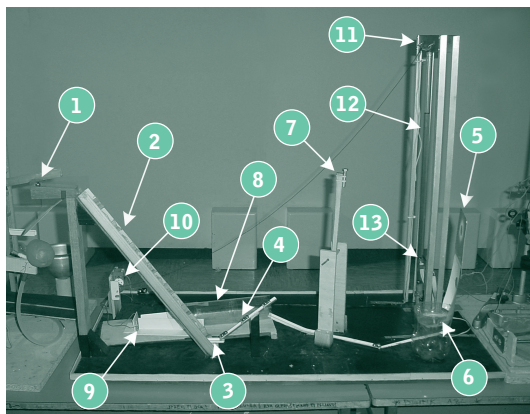
Tretji in četrty člen verige eksperimentov

Samo Lasič
in **Anton**
Potočnik,
Oddelek za
fiziko, FMF

Predstavlja bova tretji in četrty člen demo verižnega eksperimenta. Tretji člen, ki ga proži napihnjen balon na koncu drugega člena, so študentje poimenovali Lunapark. V njem jeklene kroglice delajo akrobacije in potope v olju, vmes pa slišimo zvonkljanje in piskanje. Zanimanje še posebej pritegne magnetni top in gibanje kroglic v različnih vrstah olja. Pri četrtem členu, z imenom Po klanecu navzgor, lahko sledimo dvojnemu stožcu, ki se proti pričakovanjem giblje navzgor in nato sproži nadvse nenavadno električno stikalo, narejeno iz ventilatorja in aluminijastih folij. Člen se konča s plazom podirajočih se domin.

■ TRETJI ČLEN Lunapark

Avtorja eksperimenta: **Peter Mihor** in **Anton Potočnik**, Oddelek za fiziko, FMF.



Slika 1. Tretji člen Lunapark

Napihujoči se balonček iz drugega člena verige dvigne žebelj, ki je podstavljen pod kovinsko kroglico na odskočni mizi (1). Žebelj izrine kroglico iz jamice in Lunapark se prične. Kroglica se po vijugastem klancu kobaca navzdol (2). Pri tem trka ob lesene ovire, zato se upočasni in enakomerno napreduje po klancu navzdol. Njeno hitrost na vznožju klanca dodatno zmanjša plastični dušilec (3).

Počasna kroglica sproži magnetni ali t.i. Gaussov top (4) (podrobnejši opis na naslednji strani), ki ga sestavljajo trije magneti, vpeti na nagnjenem plastičnem vodilu, po katerem se kotalijo kovinske kroglice. Ob vsakem izmed magnetov sta na desni strani »prilepljeni« po dve kroglici. Prva se dotika magnetu, druga pa se dotika prve kroglice. Kroglica na skrajni desni se od kroglice, ki je bližje magnetu, »odlepi«, ko jo preko trka z magnetom sune kroglica, ki prileti z leve strani in ostane po trku »prilepljena« na levi strani magnetu. Ob vsakem ponovnem trku pridobijo kroglice nekaj hitrosti in zadnja kroglica odleti v presenetljivo dolgem paraboličnem letu proti tarči (5).

Kroglica se od tarče neprožno odbije in pade v lijak (6), kjer zakroži v spirali proti ustju, ki jo vodi v žleb, po katerem se zakotali do kladiva (7). Kladivo je narejeno iz vrtljive palice, ki je obtežena na enem koncu. Palica je zataknjena v navpični legi, tako da je obtežitev zgoraj. Ko kroglica zadane ob palico, se ustavi, palica pa zaniha, tako da zamahne kroglico, ki se z veliko hitrostjo zakotali v plastični tunel (8). Ker je tunel postavljen poševno glede na smer kroglice, kroglica zakroži po



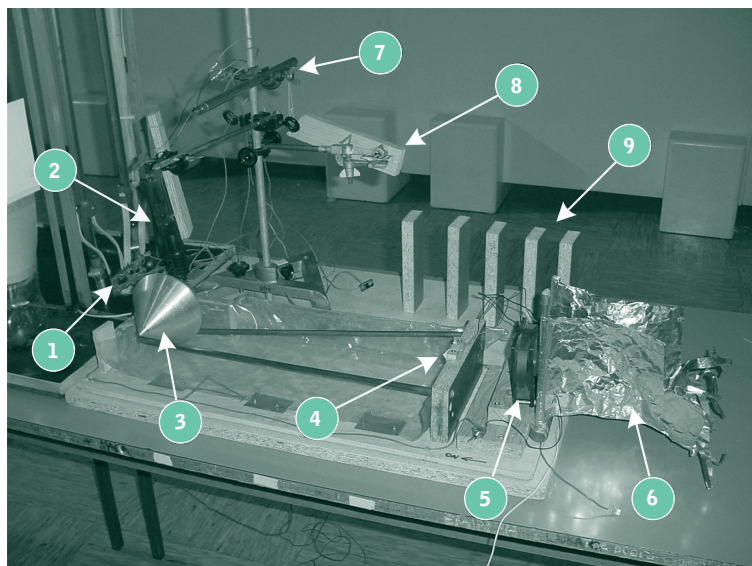
njenem obodu. Na drugem koncu tunela kroglico čakata električna kontakta in magnet, ki je postavljen za njima (9). Slednji privlači kroglico, da »sede« med kontakta in sklene tokokrog.

V tokokrogu je baterija in električni motorček (10), ki navije sukanec. Ko je sukanec dovolj napet, izvleče bakren zatič v obliki črke U (11), ki drži dve enaki jekleni kroglici na vrhu dveh cevi, od katerih je leva napolnjena z motornim, desna pa s parafinskim oljem (12). Preko prevodnega zatiča in kontaktov v luknjicah vodi tudi tokokrog, ki napaja motorček za navijanje sukanca. Zato se navijanje ustavi takoj, ko motorček izvleče zatič. Kroglici na vrhu cevi z oljem se začeta spuščati (podrobnejši opis v razdelku spodaj). Ker je motorno olje bolj viskozno od parafinskega, kroglica v motornem olju pada počasneje kot kroglica v parafinskem olju. Ob dnu cevi so optična vrata (13), ki zaznajo prehod kroglic. Narejena so s parom infrardeče diode (LED) in svetlobno občutljivim tranzistorjem ter z električnim vezjem, ki poskrbi za vklop in izklop zvočila (piezo zvočnik), ko ena ali druga kroglica prekine svetlobni žarek med diodo in tranzistorjem. Tako prva, »parafinska« kroglica vklopi zvočilo, druga, »motorna« kroglica pa nas nato odreši nadležnega piskanja s 1000 Hz. Medtem ko smo čakali na odrešitev, se je že sprožil četrti člen verige.

■ ČETRTI ČLEN Po klanecu navzgor

Avtorji eksperimenta: **Matej Emin, Eva Ribežl**
in **Boštjan Muri**, Oddelek za fiziko, FMF.

Na začetku četrtega člena imamo ponovno opravo z električnim vezjem (1), ki sliši nadležnih 1000 Hz in odklene električno ključavnico. Osnova električnega vezja je kondenzatorski mikrofoni, ki zazna zvok in se mu posledično poveča napetost na priključkih. Ko ta napetost preseže določeni prag, električno vezje spremeni izhodno napetost iz nič na 12V. Tedaj se mehanski zatič (2) na ključavnici (ključ) premakne, tako da sprosti dvojni stožec (3), ki zataknen čaka na vznožju klanca. Stožec se začne navidezno kotaliti navzgor po vodilu iz dveh kovinskih palic (podrobnejši opis v razdelku spodaj). Ko prispe do vrha klanca, pritisne ob stikalo (4), ki sklene električni krog, v katerem sta baterija in ventilator (5). Ob ventilatorju sta dve



aluminijasti foliji (6). Ker je tlak v toku zraka nižji od tlaka v okolici, se foliji stakneta. S tem sklenu tokokrog, v katerem sta baterija in tanka volframova žica (7). Ko steče tok, se žica segreje in zažari. Na žico je s tankim sukanecem privezana viseča domina (8). Ko sukanec pregori, domina zaniha in sproži niz domin (9), ki s podiranjem zaključijo ta člen in sprožijo naslednji člen verige eksperimentov.

■ Podrobnejši opis nekaterih delov eksperimenta

■ Magnetni top

Delovanje magnetnega topa naivnega opazovalca navdahne z zamislijo, da top energijo, ki jo podeli kroglici, ustvarja iz nič. Seveda pa obstaja razumljiva razlaga tega zanimivega pojava.

Ob prožnem trku kroglice z magnetom se praktično vsa kinetična energija kroglice na levi strani magnetu prenese na kroglico na desni strani. Kroglico, ki se z leve približuje magnetu, magnet privlači in jo pospeši, kroglico, ki odleti na desni, pa magnet zavira. Ker je desna kroglica bolj oddaljena od magnetu kot leva, jo magnet manj zavre, kot je levo pospešil. Tako ima kroglica na desni, ko zapusti privlačno polje magnetu večjo hitrost, kot jo je imela kroglica, ki je magnet zadela z leve.

Od kje kroglica pridobi kinetično energijo? Ker magnetna sila opravi delo, se kroglici na levi zmanjša »magnetna« potencialna energija. Po trku kroglica na desni pridobi nekaj »magnetne« potencialne energije, ker jo magnetna sila zavira.

Slika 2. Četrti člen
Po klanecu navzgor

Slika 3.
Potencialna
energija kroglic

Ker pa se začne premikati na večji oddaljenosti od magneta, kot je bila kroglica z leve, ko je trčila v magnet, je magnetna sila manjša, zato opravi manjše delo in kroglica pridobi manj »magnetne« potencialne energije, kot jo je pred trkom izgubila kroglica na levi strani magneta. Ker se kroglice gibajo po klancu navzgor, pridobijo tudi nekaj gravitacijske potencialne energije, vendar je ta prispevek majhen v primerjavi z izgubljen »magnetno« potencialno energijo. Celotna sprememba potencialne energije pri trku je torej negativna (glej sliko 3). Kroglica pridobi kinetično energijo na račun izgubljene potencialne energije.

Od kje »strelivo« magnetnega topa? Namesto elastike, ki smo je vajeni pri frači, magnetni top uporablja »raztegnjene« magnete. Pred delovanjem so kroglice postavljene tako, da njihova potencialna energija ni najnižja možna. Delo, ki ga moramo opraviti proti magnetni sili, da kroglice postavimo v začetno lego, je večje od dela, ki bi ga opravili, če bi kroglice postavili tako, kot so postavljene po delovanju topa. Na koncu je na obeh straneh magnetov po ena kroglica. Kroglice so se »sprostile«, sistem je na koncu v osnovnem stanju. To, da se je med strelom prva kroglica zamenjala s sedmo, nas pri tem nič ne moti, saj so kroglice enake. Pojav spominja na stimulirano emisijo, ki spremlja delovanje laserjev. Pri tem svetlobni delec (foton) vzdraži atom, da se njegovo energijsko stanje zmanjša, pri tem pa atom izseva dva

svetlobna delca. Kroglica v magnetnem topu ob vsakem magnetu pridobi po en »kvant« energije, skupaj tri kvante.

■ Padanje kroglic v olju

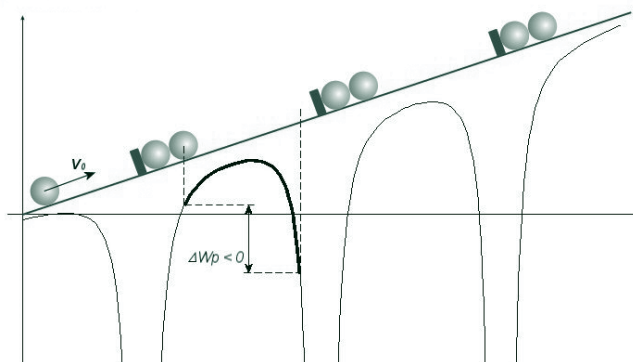
Na kroglico, ki pada v olju, deluje poleg teže in vzgona tudi viskozni upor. Ta je sorazmeren s hitrostjo kroglice. Velja $F_v = 6\pi r\eta \cdot v$, kjer je r polmer kroglice, η pa viskoznost, ki je za parafinsko olje enaka 0,2 Pa·s, za motorno pa 0,5 Pa·s. Za primerjavo, viskoznost vode je 0,001 Pa·s. Ker je razlika gostot olja in jekla velika, lahko vzgon zanemarimo. Na začetku je gibanje pospešeno, saj kroglici padata s težnim pospeškom (malo zmanjšanim zaradi vzgona). Z večanjem hitrosti se večja tudi viskozni upor. Pospešek se manjša vse, dokler sila upora ne izenači teže. Od tedaj naprej se kroglica giblje s stalno hitrostjo, ki je podana z ravnovesjem sil $F_v = F_g$. Sledi asimptotična hitrost $v_\infty = mg/6\pi r\eta$. Iz drugega Newtonovega zakona lahko izračunamo časovni potek hitrosti, saj velja $a = dv/dt = g - 6\pi r\eta v/m$. Z integriranjem dobimo $v(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau})$, kjer je $\tau = m/6\pi r\eta$ čas, v katerem kroglica doseže 63% asimptotične hitrosti.

Pojav je podoben magnetnemu zaviranju, ki ga uporabljajo na primer v lunaparkih. Takšno zaviranje je idealno mehko, brez sunkov. Podoben časovni potek najdemo npr. tudi pri polnjenju kondenzatorja ali merjenju temperature s termometrom.

■ Navidezno kotaljenje po klancu navzgor

Iz izkušenj vemo, da se stvari same ne morejo kotaliti po klancu navzgor. Če pa že vidimo kaj takega, smo prepričani, da gre za trik. Seveda je tudi kotaljenje po klancu navzgor samo navidezno. Trik je v tem, da se med »vzpenjanjem« težišče dvojnega stožca rahlo spušča.

Ker se vodili z naraščajočim premikom s oddaljujeta (slika 4), se radij kroženja, na stiku med stožcem in vodilom, zmanjšuje po enačbi $r(s) = R(1 - s \cdot \tan\varphi/d)$, hkrati pa se dotikališče dvojnega stožca in vodil zvišuje kot $y = s \cdot \tan\varphi$. Višino težišča stožca dobimo, če seštejemo r in y , iz česar izpeljemo enačbo $h_c(s) = ks + R$, kjer je $k = \tan\varphi - R/d \tan\varphi$. Dvojni stožec se bo kotalil po vodilih navzgor, če se bo težišče medtem spuščalo. To se zgodi, ko je k negativen. Iz energijskega zakona





$mgh_t = 1/2mv^2 + 1/2J\omega^2$ lahko izpeljemo še odvisnost hitrosti od lege s

$$v(s) = \sqrt{\frac{2gks}{1 + \frac{3}{10}(1 - s \cdot \tan \varphi / d)^{-2}}}$$

Tu je g težni pospešek, upoštevali pa smo tudi, da je vztrajnostni moment stožca $J_{d.s.} = (3/10)mR^2$. Iz zgornje enačbe lahko izpeljemo še zanimiv potek časovne odvisnosti hitrosti (glej sliko 5.b). Velja opozoriti, da se v našem primeru stožec ne premakne dovolj daleč, da bi bil radij kroženja $r=0$.

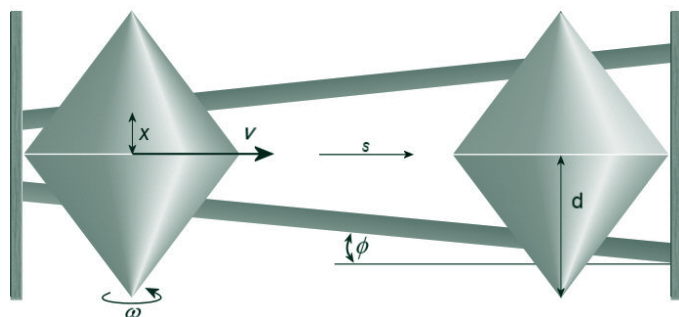
■ Bernoullijevo stikalo

Pihanje ventilatorja povzroči, da se lista aluminiaste folije stakneta in skleneta tokokrog. Čeprav bi pričakovali, da bo ventilator odpihnil foliji narazen, lahko na sorodne pojave naletimo tudi sicer v življenju. Močan veter odnaša strehe tako, da jih posesa kvišku, ponjavi dveh kamionov, ki peljeta drug mimo drugega, se napihneta, pihanje nad kozarcem z vodo povzroči pršenje itd. Poskusi sam: dva lista papirja postavi vštric in pihni mednju. Opazil boš, da jih tvoje pihanje povleče skupaj. Na tem principu delujejo tudi merilci hitrosti v letalih ali na primer vodne črpalke.

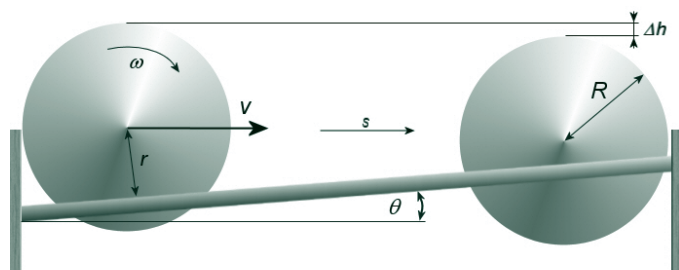
V tekočini si lahko zamislimo »tokovnice«, vzdolž katerih upoštevamo ohranitev energije. Pri tem pa zanemarimo viskoznost in stisljivost tekočine. To je grob približek, vendar je v večini okoliščin sprejemljiv. Dobimo Bernoullijevo enačbo, ki opisuje tok vzdolž tokovnice. Zapišemo jo kot $p + \rho gh + (1/2)\rho v^2 = konst.$ Enačba pravi, da se vsota tlaka, gostote potencialne energije in gostote kinetične energije vzdolž tokovnice ne spremeni.



a)



b)

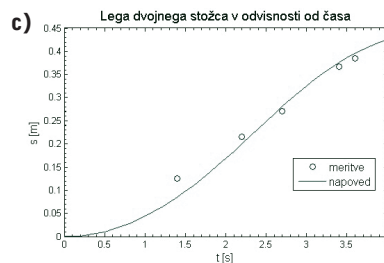
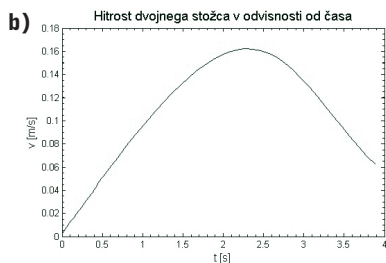
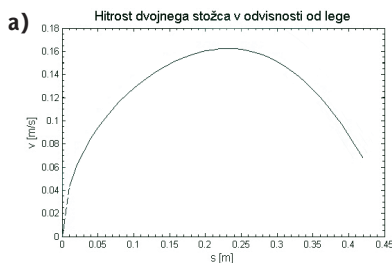


Slika 4. Tloris (a) in naris (b) dvojnega stožca, ki se kotali po vodilu »navzgor«



nja. Razložimo enačbo še drugače. Delo, ki ga povzroča tlačna razlika na dveh delih tokovnice, je enako spremembi mehanske energije tekočine na teh dveh delih tokovnice. Če je tokovnica vodoravna, lahko člen s potencialno energijo izpustimo. Ker se med folijami zrak pretaka hitreje, kot v okolici, je tam tlak manjši in zato foliji okoliški zrak potisne skupaj.

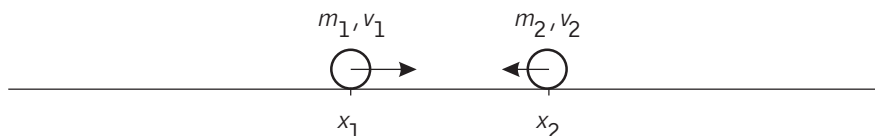
Slika 5. Hitrost v odvisnosti od lege (a), hitrost v odvisnosti od časa (b) in lega v odvisnosti od časa (c). Na grafu (c) so poleg modela prikazani tudi izmerki.



Prožni trk ureja hitrosti

Vzemimo dve masni točki in ju postavimo na premico, ki jo opremimo s koordinatnim sistemom. Točki naj imata masi m_1 in m_2 ter začetni koordinati x_1 in x_2 . Pri tem naj bo $x_1 < x_2$. Nadalje naj imata točki začetni hitrosti v_1 in v_2 , usmerjeni vzdolž premice.

Slika 1. Možno začetno stanje



Opazujemo, kaj se dogaja. Točki se začeta premikati vzdolž premice in morda tudi trčita. Definirajmo dve funkciji, ki opisujeta koordinati obeh točk. Dokler točki ne trčita, se gibljeta premo enakomerno, zato za $i=1,2$ in koordinato $x_i(t)$ ob (dovolj majhnem) času $t \geq 0$ velja

$$x_i(t) = x_i + v_i t. \quad (1)$$

Kakšen je pogoj, da točki trčita? Točki trčita natanko tedaj, ko sta po preteku pozitivnega časa t_0 njuni koordinati enaki, torej je

$$x_1 + v_1 t_0 = x_2 + v_2 t_0. \quad (2)$$

Da bo enačba (2) rešljiva, morata biti hitrosti v_1 in v_2 različni; če sta namreč enaki, sledi iz (2) tudi $x_1 = x_2$, kar pa je v nasprotju s privzetkom $x_1 < x_2$. Rešitev enačbe (2) je čas trka

$$t_0 = \frac{x_2 - x_1}{v_1 - v_2}. \quad (3)$$

Ker mora biti čas trka t_0 pozitiven, mora biti imenovalec ulomka v (3) pozitiven. Torej je potreben in zadostni pogoj za nastop trka neenakost $v_1 > v_2$.

Kolikšni sta hitrosti točk po trku? Predpostavimo, da gre za *prožni trk*, pri katerem se ohranjata skupna gibalna količina in skupna kinetična energija. Ponovimo fizikalno: gibalna količina telesa z maso m in hitrostjo v je produkt mv , njegova kinetična energija pa je $\frac{1}{2}mv^2$. Recimo, da sta hitrosti točk po trku v_1' in v_2' . Potem veljata enačbi za ohranitev gibalne količine

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (4)$$

in kinetične energije (pomnožene z 2)

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2. \quad (5)$$

To sta dve enačbi za neznanki v_1' in v_2' . Rešimo ta sistem. Iz (4) izrazimo člen $m_1 v_1'$ in ga vstavimo v enačbo (5), pomnoženo z m_1 . Dobimo





$$m_1^2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 = (G - m_2 v_2')^2 + m_1 m_2 v_2'^2, \quad (6)$$

kjer smo z G označili skupno gibalno količino $G = m_1 v_1 + m_2 v_2$. To je kvadratna enačba za spremenljivko v_2' , ki se urejena glasi

$$(m_2^2 + m_1 m_2) v_2'^2 - 2G m_2 v_2' + G^2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 = 0. \quad (7)$$

Diskriminanta kvadratne enačbe (7) v spremenljivki v_2' je

$$D = 4G^2 m_2^2 - 4m_2^2 (m_1 + m_2) \cdot (G^2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2). \quad (8)$$

Ko jo uredimo, dobimo

$$D = 4G^2 m_2^2 - 4m_2^2 (m_1 + m_2) (2m_1 v_1 v_2 + m_2 v_2^2 - m_1 v_2^2) \quad (9)$$

in nato še

$$D = 4m_1^2 m_2^2 (v_1 - v_2)^2. \quad (10)$$

Za hitrost v_2' dobimo dve rešitvi:

$$v_2' = \frac{2G m_2 \pm \sqrt{D}}{2m_2 (m_1 + m_2)}. \quad (11)$$

Ker je $v_1 > v_2$, je $\sqrt{D} = 2m_1 m_2 (v_1 - v_2)$ in

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 \pm m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

Če v (12) vzamemo pri znaku $\pm$ minus, dobimo $v_2' = v_2$, to pa je hitrost, ki jo ima točka pred trkom. Tudi pred trkom se namreč gibalna količina in kinetična energija ohranjata. To že vemo. Stanje po trku pa opisuje znak plus: hitrost v_2' je

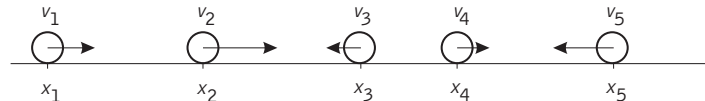
$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}. \quad (13)$$

Hitrost v_1' dobimo najlažje zaradi simetrije v problemu (vlogi točk sta zamenljivi) iz (13) z zamenjavo indeksov ($1 \leftrightarrow 2$):

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (14)$$

Vzemimo sedaj, da sta masi obeh točk enaki, $m_1 = m_2$. Iz (13) in (14) dobimo v tem primeru $v_2' = v_1$ in $v_1' = v_2$. Kaj to pomeni? Na masni točki

lahko gledamo kot na nosilca hitrosti, s katerima se gibljeta. Ker je pred trkom $v_1 > v_2$ in po trku $v_1' < v_2'$, lahko rečemo, da trk obe hitrosti uredi (tako da ima prva točka manjšo hitrost od druge). Pri tem merimo hitrosti z realnimi števili, tako da negativna števila pomenijo gibanje 'v levo', pozitivna števila pa gibanje 'v desno'.

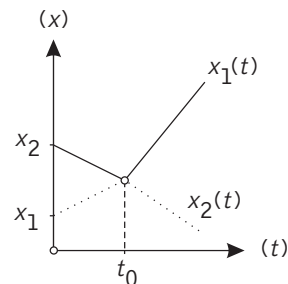


Slika 2. Več masnih točk z enako maso

Vzemimo sedaj n točk z enakimi masami. Točke postavimo na premico, tako da je $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, in jim dodelimo začetne hitrosti $v_1, v_2, \dots, v_n$. Dokler ne pride do trkov, se koordinata i -te točke spreminja po enačbi (1).

Kaj pa se bo zgodilo s temi točkami ob trkih? Najprej ugotovimo, da lahko trčijo samo sosednje točke. Zaporedje trkov, ki bo nastalo, lahko opazujemo kot zaporedje trkov dveh sosednjih točk. Predočimo si dogajanje ob trku dveh točk v koordinatnem sistemu, ki ima za absciso os čas (t), za ordinatno os pa lego (x). Denimo še, da gre kar za prvi dve točki, ki jima pripadata funkciji $x_1(t)$ in $x_2(t)$.

Slika 3 kaže grafa dveh funkcij $x_1(t) = x_1 + v_1 t$ in $x_2(t) = x_2 + v_2 t$. Gre za linearni funkciji; vsaka je predstavljena z enim poltrkom. Pred trkom opisuje lego prve točke funkcija $x_1(t)$, lego druge točke pa funkcija $x_2(t)$. Vemo, da ob trenutku trka točki medsebojno zamenjata hitrosti, njuni legi pa sta za hip enaki. Po trku opisuje lego prve točke funkcija $x_2(t)$, lego druge točke pa funkcija $x_1(t)$. Grafično smo tir prve točke narisali pikčasto, tir druge točke pa s polno črto.



Slika 3. Trk dveh točk

Premišljali smo za dve točki, narisali dva poltraka in dobili dva tira, pri n točkah bi narisali n poltrakov in dobili n tirov (slika n tirov bi bila še bolj zgoščena, zato jo bomo opustili). Ker dobimo tire točk iz n poltrakov in se dva poltraka v ravnini kvečjemu enkrat sekata, lahko ugotovimo, da je vseh trkov kvečjemu toliko, kot je parov poltrakov, teh pa je

$$\blacksquare \blacksquare 1+2+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}. \quad (15)$$

Trkov je torej samo končno mnogo. Omenimo, da je predpostavka enakih mas pomembna, pri izpustitvi tega pogoja pravilo o zamenjavi hitrosti ne velja več, števila trkov pa ne moremo več preprosto omejiti.

Sedaj pa lahko (do neke mere) ugotovimo, kaj se zgodi s točkami. Po preteku nekega časa, v katerem so opravljeni vsi trki, do trkov več ne prihaja. Označimo takratne hitrosti točk z $v_1', v_2', \dots, v_n'$ po vrsti od leve proti desni. Spomnimo se, da je zadostni pogoj za nastop trka med dvema sosednjima točkama (levo in desno) ta, da je hitrost leve točke večja od hitrosti desne točke. Ker do trkov več ne prihaja, velja negacija tega pogoja: hitrost vsake leve točke je manjša ali enaka hitrosti sosednje desne točke, ali formalno:

$$\blacksquare \blacksquare v_1' \leq v_2' \leq \dots \leq v_n'. \quad (16)$$

Povzemimo in upravičimo naslov članka:

Hitrosti točk z enako maso so po koncu trkov naraščajoče urejene.

Za konec pa nekaj nalog.

■ Naloge

1. Na tirnicah se nahajata dva (idealna) vozička z masama $m_1=20\text{kg}$ in $m_2=30\text{kg}$. Prvega porinemo v desno s hitrostjo $v_1=2\text{ms}^{-1}$, drugega pa istočasno v levo s hitrostjo $v_2=-1\text{ms}^{-1}$. Določi hitrosti obeh vozičkov po (prožnem) trku.

2. V drugem poskusu porinemo levi voziček iz prve naloge s hitrostjo $v_1=3\text{ms}^{-1}$ v desno. S kolikšno hitrostjo moramo poriniti desni voziček, da se bo ob (prožnem) trku ustavil

- (a) levi voziček,
- (b) desni voziček?

3. Na vodoravno oporo imamo privezanih n enakih visečih kroglic, ki v začetku mirujejo in se po vrsti dotikajo. Skrajno levo kroglico odmaknemo v levo in jo spustimo. Razloži, kaj se bo zgodilo in zakaj.

4. Dana je permutacija π števil od 1 do n . Permutacija π je sestava samih sosednjih transpozicij. Pri tem je sosednja transpozicija permutacija, ki zamenja sosednji števili i in $i+1$. Dokaži. Sestavi permutacijo

$$\blacksquare \blacksquare \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

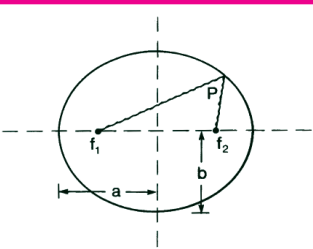
iz samih sosednjih transpozicij.

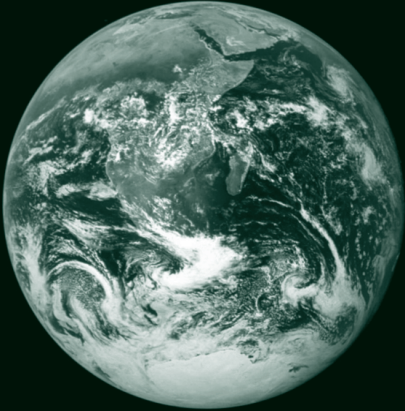
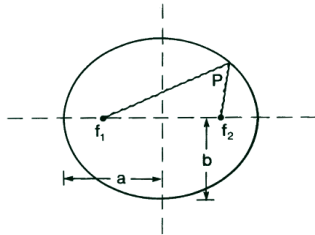
Ivan Lisac

■ Rešitve

1. Uporabimo enakosti (13) in (14). Dobimo $v_1' = -1.6\text{ms}^{-1}$ in $v_2' = 1.4\text{ms}^{-1}$.
2. (a) V (14) postavimo $v_1' = 0$ in rešimo: $v_2' = \frac{m_2}{m_1 - m_2} v_1 = 0.5\text{ms}^{-1}$.
(b) V (13) postavimo $v_2' = 0$ in rešimo: $v_1' = \frac{2m_1}{m_1 - m_2} v_2 = -1.2\text{ms}^{-1}$.
3. Leva kroglica po spustu pridobi hitrost $v_1 > 0$. Začetne hitrosti ostalih kroglic so enake 0. V trenutku prožnih trkov se hitrosti uredijo, kar pomeni, da skrajno desna kroglica dobi hitrost v_1 , vse levo od nje pa ostanejo pri miru.
4. Za dano permutacijo π postavimo na premnico n točk, tako da i -ti točki dodelimo hitrost $\pi(i)$. Trku dveh sosednjih točk ustreza sosednja transpozicija, ki predstavlja ustrezno zamenjavo hitrosti teh točk. Po koncu trkov ima i -ta točka hitrost i , to stanje predstavlja identično permutacijo. Res je torej π sestava samih sosednjih transpozicij. Še primer (= je sestava permutacij): $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (34) \circ (45) \circ (23) \circ (34) \circ (12)$.

Horizontko

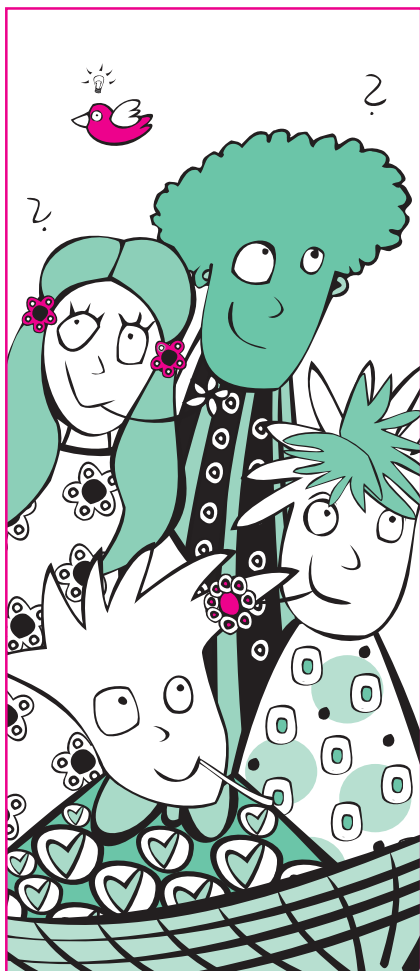


						VIR TRP- LJENJA	ENOTA ZA ELEK- TRIČNO NAPETOST	ELDA VILER	NEMŠKA REVOLU- CIONARKA (KLARA)	NAJNIŽJI DEL GLOBELI	BAYER- JEVO ZDRAVILO	AV MA BOI
											FR FIL (DI NOV P	
						ATLET ALI SMUČAR						
						VINORODNA POKRAJINA NA ŠTAJER. GOSPOD V DALMACIJI						
		NAPAČNO PREPRI- ČANJE, ZABLODA	GRŠKA BOGINJA JUTRANJE ZARJE	NEKD. IZR. DRŽAVNIK (LEVJ) ARKTIČNI TJULENJ				TOPILNO SREDSTVO PRIJAV- LJANJE STORILCEV				
								GIBANJE TEKOČINE ALI DELCEV		IGRALEC GODNIČ		
								ZADNJIK		FR. PEVKA PIAF		
								ITAL. NOGO- METAŠ (CHRIS- TIAN)				
								JUŽNOAM. GORSTVO			EN ZA CITI	
		ŽENSKI PEVSKI GLAS									ČR	
		ŠPORTNIK TEKAČ, SKAKALEC ALI METALEC				ŠUMEVEC IN SIČNIK ZAPOR PRI MIRNI NA DOLENJ.	VITKA PTICA UJEDA PROPA- GANDA		MODRO BARVILO PREBIVA- LEC SL. POKRAJINE			
		GNILO SADJE ALI ZELENJAVA				ZAPORNIK NAPETOST- NI VIR IZ GALVAN. ČLENOV				ISTRSKI BEGUNEC		
										TROJICA, TERCET		
		ZNAKI ZA ZAPIS MELODIJE				NAJDALJŠA REKA V SIBIRIJI	EVGEN CAR	NEKDANJI TUNIŠKI VLADAR	IZRASTEK NA PRSTU KAZALČNI BARO- METER			J ANG TE MA ST
		RAČUNAL- NIŠKI PIONIR ZAKRAJŠEK			PRIPADNIK NARODA V ŠPANJI			ENOTA ZA ZNAK V RAČUNAL- NIŠTVU (8 BITOV)		GONJENJE JELENOV		
					ALUMINIJ					ZATROJINA V LESU		
		ODSEKAN KOS LESA ZA POD- KURITI				TOK ZA PUŠČICE		V FIZIKI JO OZNAČIMO S ČRKO W				
						CIRIL KOSMAČ		NABAVA				
		OBREKO- VANJE								MOJZESOV BRAT BIOLOG IN FOTOGRAF HODALIČ		
		ČE PO ANGLEŠKO			RDEČE- CVETNI POLJSKI PLEVEL	PREKRI- VAJO JIH VEKE	MAZILO ZA NEGO KOŽE KONJSKI TEK		VELIKO POSESTVO V ZDA		NADUHA	
											GRŠKI JONSKI OTOK	
		REKA V VZHODNI SRBIJI, PRITOK DONAVE					DRŽAVA NA BLIŽ. VZHODU NIKOLA TESLA		VELIKAN, GIGANT		RE SU IN E JUPI L	
									PRITR- DILNICA			
		OKRE- PITEV, UTRDITEV							ITAL. IME MESTA VIDEM		MESTO SV OD RIMA V ITALIJI	
		ZAHODNA SOSEDA INDIJE						NEGATIVNA SPRE- MEMBA VREDNOSTI			SVETLOBNI KVANT	

19

Številsko križanko z delitelji

Naslednja križanka se rešuje kot običajna, le da je namesto gesla podano število deliteljev iskanega naravnega števila. Vpisana števila se ne začnejo s števk 0.



■ Koliko deliteljev ima naravno število?

Vsako naravno število n lahko enolično (do vrstnega reda) razcepimo na prafaktorje, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kjer so p_i različna praštevila in α_i naravna števila. Delitelji števila n so oblike $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, kjer je $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Po osnovnem izreku kombinatorike ima število n $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ različnih deliteljev.

Primer. Število $360 = 2^3 3^2 5^1$ ima $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ deliteljev.

■ Kaj lahko sklepamo iz števila deliteljev?

V prejšnji točki smo ugotovili, da je število deliteljev naravnega števila produkt eksponentov, ki nastopajo v razcepu na prafaktorje, povečanih za 1. Število deliteljev torej določa vse možne oblike eksponentov v razcepu na prafaktorje, ne določa pa praštevil samih. Število deliteljev razstavimo na vse možne produkte naravnih števil ter od vsakega faktorja odštejemo 1. Dobljena števila nam predstavljajo eksponente nad različnimi praštevili v razcepu.

Primer. Denimo, da ima neko naravno število 12 deliteljev.

Ker so $12 \cdot 1 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ vsi razcepi števila 12 na produkte naravnih števil, je iskano število oblike p^{11} , pq^5 , p^2q^3 ali pqs^2 (p, q, s so različna praštevila).

■ Kaj, če je število deliteljev enako praštevilu p ?

Praštevilo je deljivo le z 1 in s samim seboj, zato ima p en sam razcep $p = p \cdot 1$. Torej je število s to lastnostjo oblike $n = q^{p-1}$, kjer je q praštevilo.

Primer. Število s tremi delitelji je lahko le kvadrat praštevila.

■ Postopek reševanja naloge

Edino petmestno število s 17 delitelji je $2^{16} = 65536$, edino šestmestno s sedmimi delitelji pa $7^6 = 117649$. Kvadratu praštevila v zadnjem stolpcu tedaj ustreza le $13^2 = 169$. Tako dobimo tri možnosti za število v prvi vrstici: $11^4 = 14641$, $13^4 = 28561$ in $17^4 = 83521$. Vendar ima število 634 štiri delitelje, število 234 pa 12 deliteljev, zato je v prvi vrstici 14641. Edino tromestno število s 27 delitelji je $900 = 2^2 3^2 5^2$, saj sta večmestni tako 2^{26} kot 2^{832} . Obstajata dve devetmestni števili s 77 delitelji, to sta $2^{1076} = 120472576$ in $3^{1056} = 922640625$, vendar v prvo vrstico ustreza slednje, saj je število $5^{10} = 9765625$ edino sedemmestno število z 11 delitelji. Podatki, da sta le 25 in 49 dvomestna kvadrata praštevil, da je 529 edini tromestni kvadrat praštevila, ki se začne s 5 in da je 625 edino tromestno število s petimi delitelji, nam dajo presek zadnjih treh stolpcev s peto, šesto in sedmo vrstico. Nadaljujemo z dejstvi, da so 64, 15625 in 729, edina števila dolžine dva, pet in tri, ki imajo sedem deliteljev. Velja tudi, da je 4096 edino število dolžine štiri s 13 delitelji, da ima enega samega delitelja le število 1 in je edino trimestno število z 28 delitelji 960. Tako smo rešili desni spodnji del križanke. Ostane še levi. Najprej ugotovimo, da je le $89^2 = 7921$ štirimestni kvadrat praštevila s prvo

števk 7 in da je izmed vseh tromestnih števil, ki se začnejo s števčkama 2 in 9, le 293 praštevil. Ker je 2401 edino štirimestno število s petimi delitelji ter 81 in 16 edini dvomestni s to lastnostjo, lahko izmed njiju izberemo prvega. Ugotovimo pa tudi, da je trimestno število z 21 delitelji eno samo $2^6 3^2 = 576$. Oglejmo si sedaj dvomestno število v deveti vrstici s štirimi delitelji. Ker ima štiri delitelje, je bodisi produkt dveh praštevil bodisi tretja potenca nekega praštevila. Ker je zadnja cifra 8, je število sodo in vsebuje število 2 v razcepu. Ker je število dvomestno, ne more biti $2^3 = 8$, torej je produkt dveh praštevil. Lihi faktor se mora končati z 9. To število je bodisi 38 bodisi 58. Ker pa ima $1306 = 2 \cdot 653$ le štiri delitelje, ustreza število 58.

■ Rešitev najdeš na strani 29.

[illegible]

L^AT_EX

Prvih n števil lahko izračunamo na naslednji način:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ lahko dokažemo s popolno

Indeks kvadratni koren $\sqrt{b^2 - 4ac}$ in ostale korene $\sqrt[3]{2}$.

Primer
Prvi primer prika-
zuje, kaj se zgodi, \
v če dalj\ v se eks-
ponente in indek-
se pozabimo za-
pisati med zaviti-
mi oklepaji:

$\$ x^1 \quad x^{12}$

$\$ x_1 \quad x_{12}$

Sledi primer pra-
vilne in napa\
v cne postavitve o-
klepajev pri
gnezdenju eks-
ponentov in indek-
sov.

$\$ e^{x^2} \quad e^{\{x\}^2}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

In \ v se nekaj pri-
merov kombini-
ranih eksponen-
tov in indeksov:

$\$ A_{ij}^3 \quad A^3_{ij} \quad 3^{P_0}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

$\$ P_{a_0} \quad P_{\{a\}_0}$

Indeks kvadratni koren $\sqrt{b^2 - 4ac}$ in ostale korene $\sqrt[3]{2}$.

Mala šola LaTeXa (tretji del)

L^AT_EX

V prvem in drugem delu Male šole LaTeXa smo si ogledali osnovne elemente vsakega dokumenta, napisanega s pomočjo LaTeXa ter nekaj ukazov za oblikovanje besedila. Omenili smo tudi, da je LaTeX zelo primeren za pisanje matematičnih formul in besedil, zato se bomo v tem delu posvetili prav temu.

■ Matematično načina

V LaTeXu poznamo dva načina izpisovanja matematičnih formul in izrazov. Prvi je izpisovanje le-teh znotraj običajnega besedila (t.i. *vrstični način*), drugi pa jih izpiše izpostavljeno od običajnega besedila, v svoji vrstici (t.i. *prikazni način*). Za določitev okolja pisanja vsakega od teh načinov imamo na voljo več različnih ukazov, in sicer je lahko matematični izraz, ki naj bo izpisan v vrstičnem načinu, podan med ukazoma `\(` in `\)`, med `$` in `$` ali med `\begin{math}` in `\end{math}`. V kolikor želimo, da se matematični izraz izpiše v prikaznem načinu, ga zapišemo med enega od naslednjih parov ukazov: `\[` in `\]`, ali med `$$` in `$$` ali med `\begin{displaymath}` in `\end{displaymath}`.

Primer

Zapišimo in z LaTeXom prevedimo naslednji dokument:

```
\documentclass[12pt, a4paper]{article}
\usepackage[slovene]{babel}
\usepackage[cp1250]{inputenc}
\begin{document}
  Vsoto prvih  $n$  naravnih  $\backslash$ v števil lahko izra $\backslash$ v cuna-
  mo na naslednji na $\backslash$ v cin:  $1+2+\cdots+(n-1)+n =$ 
 $\frac{n(n+1)}{2}$ . $\backslash$  Veljavnost ena $\backslash$ v cbe
 $1+2+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$  lahko
  doka $\backslash$ v zemo s popolno indukcijo.
\end{document}
```

Rezultat izgleda takole:

V tem primeru smo za določitev prikaznega načina želeni izraz zapisali med `$$...$$`, za izpis znotraj besedila pa med `$...$`. Ključna razlika med obema načinoma matematičnega izpisa je velikost izpisa in njegova postavitve glede na običajno besedilo. Obstajajo še razlike pri zapisovanju določenih simbolov, kar bomo pokazali tudi v nadaljevanju.

V prvem stavku primera lahko opazimo, da je spremenljivka n postavljena v matematični zapis. LaTeX črke zapisane znotraj matematičnega okolja izpiše nagnjeno in jih zato lažje ločimo od preostalega besedila. Tako je stavek »Vsoto prvih n naravnih ...« lažje čitljiv kot »Vsoto prvih n naravnih ...«.

Pri pisanju v matematičnem načinu se moramo zavedati naslednjih treh lastnosti: presledki se ne izpišejo in moramo zanje uporabiti posebne ukaze (npr. `\,`, `\quad`, `\qquad`), ne smemo imeti praznih vrstic in vsaka črka se obravnava kot ime spremenljivke, zato imamo za zapise imen funkcij posebne ukaze ali pa povemo, kateri del besedila naj bo izpisan pokončno (glejte primere v članku).

■ Pogosti matematični elementi

■ Ulomki

V prejšnjem primeru lahko vidimo tudi, kako v LaTeXu zapisujemo ulomke. Ulomek zapišemo v matematičnem načinu z ukazom `\frac{...}{...}`, kjer med prva zavita oklepaja zapi-

Vsoto prvih n naravnih števil lahko izračunamo na naslednji način:

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Veljavnost enačbe $1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ lahko dokažemo s popolno indukcijo.

V poljubnem trikotniku z notranjimi koti α , β in γ velja, da je

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Primer

V poljubnem trikotniku z notranjimi koti α , β in γ velja, da je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Rezultat izgleda takole:

Standardne funkcije

Za določene matematične funkcije imamo definirane ukaze, saj se v matematičnem okolju izpišejo drugače od spremenljivk in so zato izrazi lažje čitljivi. Seznam najpogostejših matematičnih funkcij najdete v programu TeXnicCenter v meniju *Math*, so pa običajno sestavljeni tako, da poševnici sledi oznaka oziroma ime funkcije.

Primer

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Rezultat izgleda takole:

simbol	ukaz
α	<code>\alpha</code>
β	<code>\beta</code>
χ	<code>\chi</code>
δ	<code>\delta</code>
ϵ	<code>\epsilon</code>
ϕ	<code>\phi</code>
φ	<code>\varphi</code>
γ	<code>\gamma</code>
η	<code>\eta</code>
ι	<code>\iota</code>
κ	<code>\kappa</code>
λ	<code>\lambda</code>
μ	<code>\mu</code>
ν	<code>\nu</code>
o	<code>o</code>
π	<code>\pi</code>
ϖ	<code>\varpi</code>
θ	<code>\theta</code>
ϑ	<code>\vartheta</code>
ρ	<code>\rho</code>
σ	<code>\sigma</code>
ς	<code>\varsigma</code>
τ	<code>\tau</code>
υ	<code>\upsilon</code>
ω	<code>\omega</code>
ξ	<code>\xi</code>
ψ	<code>\psi</code>
ζ	<code>\zeta</code>

Integrali, vsote, produkti

Poglejmo še, kako v LaTeXu zapisujemo formule s simboli za vsote, produkte in integrale. Meje vsot, produktov in integralov zapišemo s pomočjo eksponentov in indeksov. Simbol za vsoto izpišemo z ukazom `\sum`, simbol za produkt zapišemo z ukazom `\prod` in simbol za integral z ukazom `\int`. Poglejmo vse skupaj na spodnjem primeru.

Primer

$\int_0^\infty \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\infty = 1$

$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$

Vsote (produkti in določeni integrali), npr. $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$, v vrstici izlegajo drugače.

Rezultat izgleda takole:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \quad \int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1) \quad \prod_{k=1}^n P_k = 1$$

Vsote (produkti in določeni integrali), npr. $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$, v vrstičnem načinu izgledajo drugače.

Oštevilčevanje enačb

LaTeX nam lahko enačbe samodejno oštevilči in omogoča, da se kasneje na njih sklicujemo. V tem primeru moramo enačbo zapisati znotraj okolja `\begin{equation}...\end{equation}`, oznako za kasnejše sklicovanje določimo z ukazom `\label{ime}`, sklic pa izvedemo z ukazom `\ref{ime}`, pri čemer mora biti ime oznake enolično določeno znotraj celotnega dokumenta.

Primer

Ploščino kroga s polmerom r izrazimo po formuli $A = \pi r^2$.

Rezultat izgleda takole:

Ploščino kroga s polmerom r izračunamo po formuli

$$A = \pi r^2$$

Iz enačbe 1 izrazite polmer r .

LaTeX s svojim matematičnim okoljem in ukazi nudi še veliko več od povedanega. Dodatne možnosti najdete na spodnjih spletnih straneh in tudi v urejevalniku TeXnicCenter (menu *Math*). V kolikor se pojavijo kakšna vprašanja, ali pa bi želeli izvedeti še več, lahko pišete tudi v uredništvo Preseka in odgovorili bomo na vaša vprašanja.

Dodatne informacije ter omenjene programe lahko najdete na straneh:

- <http://www.miktex.org> – domača stran projekta MikTeX
- <http://www.toolscenter.org> – domača stran programa TeXnicCenter
- <http://www.adobe.com> – domača stran pregledovalnika PDF datotek
- <http://www.cs.wisc.edu/~ghost> – domača stran programov za pregledovanje PS datotek
- <http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/LaTeX/short.ps> – slovenski prevod knjige za LaTeX z naslovom *Ne najkrajši uvod v LaTeX2e*
- <http://home.amis.net/trata/index.htm> – spletna stran v slovenščini za LaTeX v okolju Windows

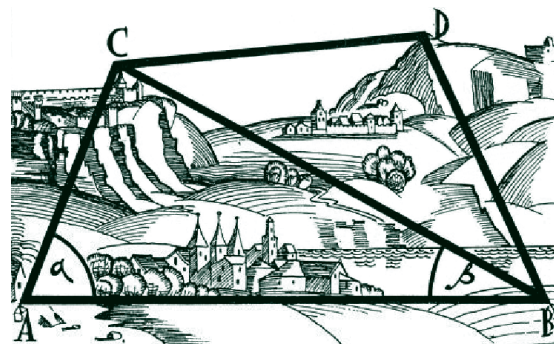
Andrej Taranenko

Kako so ugotovili natančno obliko in velikost Zemlje

Po Eratostenu (2. st. pr. n. št.) se dolga stoletja ni nihče od učenjakov ponovno upal lotiti dovolj natančnega merjenja obsega Zemlje¹. V 17. stoletju pa so odkrili zelo zanesljiv način merjenja velikih oddaljenosti na površju Zemlje, t.j. *triangulacijo*, imenovano po latinski besedi triangulum – trikotnik. Ta način je predvsem primeren za ravno zemljišče, kjer je manj naravnih preprek (hribi, gozdovi, reke, močvirja), ki ovirajo izvedbo natančnih meritev velikih razdalj (slika 1).

Merjenje poteka takole: Na površju Zemlje izberemo primerno (ne preblizu in ne predaleč) razmaknjeni točki-opazovališči A in B, iz katerih dobro vidimo oddaljene visoke predmete, npr. vrhove hribov, razne stolpe, cerkvene zvonike in drugo. Najprej natančno izmerimo oddaljenost med opazovališčema A in B. To razdaljo navadno imenujemo *osnovnica* ali *baza*.

Če iz A in B z daljnogledom vidimo predmet, ki leži v točki C, lahko v toč-



ki A izmerimo kot med smerema AB in AC, t.j. kot $\alpha = \angle CAB$, v točki B pa kot med smerema BA in BC, t.j. kot $\beta = \angle ABC$. Iz znane (izmerjene) osnovnice $c = |AB|$ in znanih (izmerjenih) kotov α in β lahko narišemo $\triangle ABC$, torej ugotovimo stranici $|AC|$ in $|BC|$, t.j. razdalji od A do C in od B do C. Takšno konstrukcijo trikotnika je mogoče izdelati na papirju v zmanjšanem merilu in

Slika 1. Star prikaz določevanja oddaljenosti težko dostopnega kraja

¹ Poskusila sta Arabec Biruni v času kalifa Al Mamuna v 9. stol. (glej članek na strani 30 v tej številki Preseka) in francoski zdravnik Jean Fernel, ki je leta 1528 določil razdaljo med Parizom in Amiensom in je za dolžino kvadranta (1/4) celotnega meridijana dobil številčno vrednost 9954 km. Natančnejši rezultat je pozneje dobil s triangulacijsko metodo Nizozemec Willebrord Snellius leta 1617, ko je meril razdaljo med Alkmarom in Bergenom. Med tema dvema mestoma so niz točk (opazovališč) oblikovala oglišča trikotnikov, vezanih drug na

drugega s po eno stranico. Snellius je izmeril vse kote in samo eno stanico, nato pa izračunal ostale stranice. S tem je dobil za dolžino kvadranta meridijana približno današnjo dolžino (10000 km). Francoska akademija znanosti se je nato odločila, da z novim merjenjem pridobi podatke o velikosti Zemlje, kakršne so potrebovali pri nadaljnjem znanstvenem delu. To delo so poverili Auzoutu in Picardu. Leta 1671 so zaključili z meritvami in računi, po katerih se je dobljeni rezultat samo nekaj metrov razlikoval od prave vrednosti.



v tem merilu dolžini stranic tudi izmeriti, lahko pa dolžino stranic izračunamo po trigonometričnih obrazcih². Ko poznamo $|BC|$, usmerimo merilni daljnogled (teodolit) iz točk B in C proti predmetu, ki leži v novi dobro vidni točki D in na enak način izmerimo razdalji $|BD|$ in $|CD|$. Če s tem postopkom nadaljujemo, lahko pokrijemo določeni del Zemljinega površja z mrežo trikotnikov ABC , BCD itn. V vsakem od njih je možno zaporedoma določiti vse tri stranice in kote (slika 2).

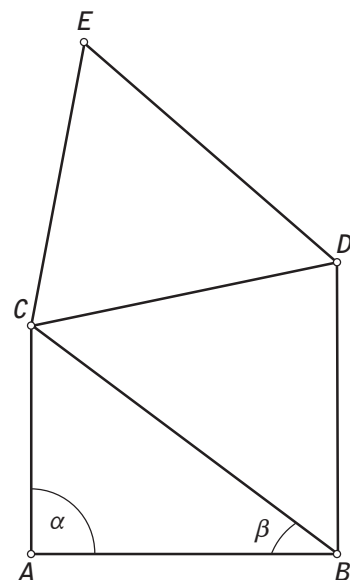
Ko izmerimo osnovnico $|AB|$ prvega trikotnika, se vse nadaljnje delo osredotoči na merjenje kotov med dvema smerema. S sestavljeno mrežo trikotnikov lahko izračunamo po trigonometričnih pravih razdaljo od oglišča enega trikotnika do oglišča poljubnega drugega trikotnika, ne glede na to, koliko sta drug od drugega oddaljena oz. ne glede na to, ali sta med seboj vidna. Tako triangulacija rešuje naloge meritev zelo velikih razdalj na površju Zemlje.

Teoretične osnove triangulacije so preproste, njena praktična uporaba, t.j. delo na terenu pa je daleč od preprostega opravila. To delo lahko opravljajo le izkušeni opazovalci, ki morajo dobro obvladati metodo triangulacije in tehniko merjenja z zelo natančnimi

kotomernimi inštrumenti (zdaj uporabljajo že laser). Za opazovališča običajno uporabljajo posebne opazovalne stolpe. Delo tako velike zahtevnosti naročajo in zaupajo za ta namen posebno izurjenim odpravam, katerih terenke meritve trajajo nekaj mesecev ali tudi let.

S triangulacijsko metodo so znanstveniki posredovali natančnejše podatke o obliki in velikosti (razsežnosti) Zemlje. V 17. stoletju je prišlo do velikega in dolgotrajnega spora, ki so ga rešili prav z uporabo triangulacijske metode: angleški fizik I. Newton (1643 – 1727) je namreč izrekel mnenje, da Zemlja ne more imeti natančne oblike krogle, ker se vrti okrog svoje vrtilne osi. Zaradi vrtenja je ob ekvatorju nekoliko nabrekli, ob polih pa sploščena. Trdil je, da ima obliko pomaranče in ne limone, kakor so mislili na pariškem observatoriju. Newton je pojasnjeval, da so kraji na Zemljinem ekvatorju bolj oddaljeni od središča Zemlje, kakor sta oddaljena severni ali južni Zemljin pol, ali tudi Pariz in London.

Francoska akademija znanosti se je odločila, da preveri pravilnost Newtonovega mišljenja. Če naj bi imela Zemlja obliko pomaranče, bi morala biti tedaj dolžina poldnevniškega loka, ki pripada središčnemu kotu 1° , blizu Zemljinega



pola daljša od ustrezne dolžine poldnevniškega loka ob ekvatorju. To pa je seveda mogoče ugotoviti s triangulacijo. Izmeriti je treba dolžino poldnevniškega loka, ki pripada središčnemu kotu 1° , na površju Zemlje v različnih oddaljenosti od ekvatorja. Na severu in jugu Francije so dolžino 1° loka izmerili pod vodstvom direktorja pariškega observatorija, J. D. Cassinija. Ugotovili so, da je lok na jugu Francije večji od loka na severu Francije. Meritve so kazale v prid Cassiniju. Že se je zdelo, da se je Newton zmotil, da Zemlja ni sploščena kakor pomaranča, ampak ukrivljena kakor limona. Toda Newton ni in ni popustil. Ni se odpovedal svojemu mišljenju. Neusmiljeno je trdil, da Cassini nima prav, da se je zmotil pri meritvah.

Da bi spor, ali ima Zemlja obliko pomaranče ali limone, končno le zaključili, je francoska akademija znanosti poslala leta 1735 eno znanstveno odpravo k ekvatorju, drugo pa v kraje severnega polarnega kroga. Južna odprava je izvedla meritve v Peruju, za meritev je bil izbran lok poldnevnik z dolžino okoli 3° (330 km). Ta je presek ekvator in prečkal vrsto gorskih dolin in najvišjih gorskih hrbtov Amerike. Delo odprave je trajalo osem let; spopadala se je z velikimi težavami in nevarnostmi, toda znanstveniki so izpolnili svojo nalogo. Dolžino stopinjskega poldnevniškega loka ob ekvatorju so izmerili z veliko natančnostjo. Podobno delo je opravila severna odprava znanstvenikov na Laponskem.

Po primerjavi rezultatov meritev obeh odprav se je pojasnilo, da je »polarna dolžina stopinjske-

² Po sinusnem izreku sledi $a = c \cdot \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta)$, $b = c \cdot \sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$, če je c osnovnica itn. Nadalje lahko uporabimo tudi kosinusni izrek. So pa še druge možnosti. Navedli smo samo temeljne poteze meritev na ravnem delu Zemlje. V resnici je Zemlja ukrivljena in je treba uporabiti obrazce sferne trigonometrije. Do sredine 20. stoletja so dolžino osnovnice izbirali od 5 do 10 km, njeno dolžino pa izmerili z merilno žico iz invarja (zlitine železa in niklja z zelo majhnim koeficientom toplotnega raztezanja), ki so jo enakomerno napeli preko posebnih stojal. Danes takšno merjenje dolžine izvedejo z laserji ali radarji, s čimer so povečali dolžino osnovnice do 30 km in povišali natančnost meritev do ± 1 mm na 10 km dolžine. Zgrajene so triangulacijske mreže z zapleteno radiolokacijsko aparaturo, postavljeno na vrhu opazovalnih stolpov nad Zemljinim površjem in z odbijalci na geodetskih satelitih okrog Zemlje. To omogoča hkratna merjenja oddaljenosti satelitov od opazovališč in oddaljenosti opazovališč med seboj.

Slika 2. Shema triangulacije – zgled: $|AB|$ – osnovnica ali baza, $|AD|$ – izmerjena razdalja (glej še sliko 1). Če želimo izmeriti razdaljo od A do D , pri čemer iz A točka D ni vidna, najprej v trikotniku ABC izmerimo osnovnico $|AB|$ in kota α in β ob osnovnici. Iz znane stranice in njej priležnih kotov ugotovimo razdalji $|AC|$ in $|BC|$ (načrtovalno ali trigonometrično). Nadalje iz točke C z merilnim daljnogledom določimo točko D , vidno iz točk C in B . V trikotniku BCD poznamo stranico $|CB|$. Preostane nam, da izmerimo priležna kota ob stranici $|CB|$ in potem določimo razdaljo $|DB|$. Pri znanih $|DB|$, $|AB|$ in kotu med tema smerema lahko določimo razdaljo od A do D . Kako pa bi določili razdaljo med B in E ? Razmišljanje o tem je prepuščeno bralcu.

ga loka« daljša od »ekvatorske«. Znanstveniki so končno priznali pravilnost Newtonove teorije – Zemlja ima približno obliko rotacijskega elipsoida. Tako se je končal zoporni in dolgotrajni spor o obliki Zemlje.

Posebna znanost, ki se ukvarja z določevanjem oblike in velikosti Zemlje, in to z zelo natančnimi meritvami razdalj na delih njenega površja, se imenuje *geodezija*. Šele s podatki geodetskih meritev lahko dovolj natančno povemo, kakšna je resnična oblika Zemlje. Meritve dolžin poldnevniških lokov (ki pripadajo središčnemu kotu 1°), v različnih predelih Zemljinega površja imajo velik praktičen pomen za sestavljanje natančnih geografskih kart (zemljevidov). Na geografski karti je kakor na globusu vidna mreža poldnevnikov (krožnice, ki gredo skozi Zemljina pola) in vzporednikov (krožnice, ki so vzporedne z ravnino Zemljinega ekvatorja). Natančnih kart našega planeta ni mogoče izdelati brez poprejšnjih dolgotrajnih in skrajno skrbnih in garaških meritev geodetov, ki so določali in še vedno določajo korak za korakom v časovnem obdobju številnih let lego različnih krajev na Zemljinem površju, kar potem po dobljenih računih vnašajo v mrežo poldnevnikov in vzporednikov. Da bi imeli natančne karte, je treba poznati resnično obliko Zemljinega površja. To pa posreduje le geodet, ki mu v zadnjem času izdatno pomagajo tudi umetni zemeljski sateliti (geodetski sateliti).

Do danes so geodeti z veliko natančnostjo izmerili številne dolžine lokov poldnevnikov in vzporedni-

kov na različnih predelih Zemljinega površja. Po teh računih so lahko natančno določili premer Zemlje v ekvatorski ravnini (*ekvatorski premer*) in premer Zemlje v smeri Zemljine vrtine osi (*polarni premer*). Pokazalo se je, da je ekvatorski premer približno 42,5 km daljši od polarnega. To ponovno potrjuje Newtonovo mnenje, da je Zemlja stisnjena ob polih.

Recimo, da bi želeli prikazati, kako se dejanska oblika Zemlje razlikuje od idealne krogle, ki naj jo predstavlja globus s premerom 1 m. Če naj ima ta krogla ekvatorski premer 1 m, je tedaj njen polarni premer komaj za 3,3 mm krajši. To je tako malo, da s preprostim očesom tega ne moremo zaznati.

Razsežnost naše Zemlje tako opredelujeta dva osnovna podatka:

ekvatorski premer 12756 km in polarni premer 12714 km.

Oblika Zemlje se torej zares zelo malo razlikuje od krogle. Lahko bi si celo mislili, da neravnost oziroma razgibanost ali razbrazdanost Zemljinega površja, posebno kar se tiče visokih gorskih vrhov, od katerih doseže Mt. Everest višino skoraj 9000 m, zelo iznakažajo Zemljino obliko. Pa ni tako. Na omenjenem globusu s premerom 1 m prikažemo 9000 m visoko goro kakor prilepljeno zrnce drobne mivke s premerom okoli $3/4$ mm, kar je komaj opazna izboklinica.

V astronomiji obravnavamo Zemljo kar kot kroglo. Za polmer te krogle pogosto uporabljamo približek 6370 km, v računskih nalogah pa celo 6400 km.

Marijan Prosen

■ Rešitev križanke s strani 21.

7					*	32	18	10	8	3
					5	1	4	6	4	1
					4 17	6	5	5	3	6
					1	1	7	6	4	9
*	11	2	4	27	9	0	0	5	3	3
77	9	2	2		6	4	0	6	2	5
3	7	9	2		1	7	7 18	2	5	2
6	6	3	8		8	6	1	5	13 3	9
2	5	1	1	5 6	4	5	7 3	4		28
4	6	2 4	5		8	2	6	7	0	9
5	2	4	0		1	1 16	2	2	9	6
21	5	7	6		64	1	5	9	6	0

Birunijevo meritev Zemljin polmera



V srednjem veku so vzhodne dežele precej prehitale Evropo v razvoju znanosti. Tako je na primer v Indiji in arabskem kalifatu astronomija žela velike uspehe in po natančnosti opazovanj prekosila nivo, ki so ga svoj čas dosegli starogrški astronomi.

Arabski astronomi so bili neutrudni opazovalci zvezdnega neba, bili so dobesedno pravi astronomski garači. V navideznem gibanju Sonca, Lune in planetov so že ugotavljali značilnosti, ki se niso skladale s Ptolemajevim geocentričnim sistemom iz 2. st. n. št. Čeprav so prišli v protislovje s Ptolemajevim naukom, pa ga niso ovrgli. Dopolnjevali so ga

in ga tako naredili še natančnejšega. Na žalost so privzeli napačno mnenje, da Zemlja leži v središču vesolja.

Pri opazovanju vesoljskih teles so dosegli veliko popolnost. Manj znano pa je, da so se ukvarjali tudi z določitvijo polmera oziroma obsega Zemlje, približno na podoben način, kakor je to storil Eratosten v 2. st. pr. n. št.

V srednjem veku je astronomija dosegla največji razvoj v deželah srednje Azije. Nekaj stoletij je v nižinah reke Amu-Darje cvetela kultura Horezmske države. V prvi polovici 9. st. je tam deloval znameniti učenjak al-Horezmi, veliki matematik svoje dobe, eden začetnikov algebre, bil pa je tudi pomemben astronom. Izboljšal je tabele o gibanju planetov (seveda sestavljene po Ptolemaju) in tudi merilno napravo astrolab, ki so jo Ptolemaj in vsi astronomi za njim uporabljali za do-

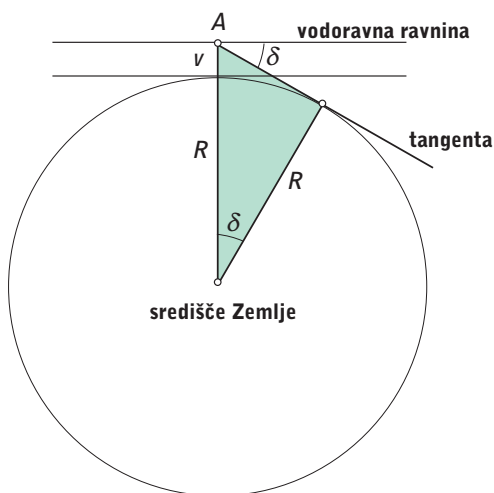
Slika 1. Biruni je določil polmera R Zemlje iz meritev velikosti depresijskega kota horizonta (dipa), to je kota δ med vodoravno ravnino in tangentno ravnino na horizont (oziroma idealno zemeljsko kroglo) iz točke A na vrhu visokega hriba z višino v – shematični prikaz. Iz osenčenega pravokotnega trikotnika sledi $\cos \delta = R/(R+v)$, od koder izračunamo polmer $R = v \cdot \cos \delta / (1 - \cos \delta)$. Pri izmerjenih v in δ iz enačbe izračunamo R .

ločanje zemljepisne širine in dolžine iz opazovanj zvezd.

Ob koncu 10. in prvi polovici 11. st. pa je deloval najvidnejši horezmski učenjak Biruni. Živel je v času, ko se je utrjevala muslimanska vera. Bil je zelo izobražen človek. Boril se je proti vraževerju, ki ga prinaša slepo versko mišljenje. Ni sprejel, da se vera lahko vmešava v delo znanosti. Zanj se vse, kar obstaja v naravi, spreminja po naravnih zakonih in ne po božjih zapovedih. Bil pa je tudi zelo znan astronom svojega časa. Menil je, da ima Zemlja obliko krogle. Če ne bi bila okrogla, ne bi mogli pojasniti precej naravnih pojavov, med njimi tudi trajanja dneva in noči ter njuno spreminjanje v različnih letnih časih. Veliko novega je Biruni vnesel tudi v zgodovino, geografijo in celo mineralogijo.

Ko je izhajal iz pravilnega mišljenja, da je Zemlja velika krogla, je določil njen obseg oziroma polmer skoraj tako natančno kakor pred njim Eratosten in veliko bolje kakor drugi arabski astronomi. Iz meritev velikosti kota znižanja (angl. dip) horizonta, ki ga je opazoval z zvišanega mesta (vrha zelo visoke gore), je za obseg Zemlje ugotovil 41 500 km (današnja vrednost 40 000 km).

Biruni se je veliko ukvarjal z astronomskimi opazovanji. Zelo se je trudil, da znanstveno pojasni določene naravne pojave, ki so bili uganka njemu in



njegovim sodobnikom. Kritično je govoril o Ptolemajevem svetovnem sistemu in dopuščal možnost, da se Zemlja giblje okrog Sonca. Tako si je že 500 let pred Kopernikom pravilno zamišljal zgradbo našega Osončja.

■ Ob koncu pa še tri naloge

1. Biruni je za obseg okrogle Zemlje ugotovil vrednost 41 500 km. Pravilna vrednost pa je 40 000 km. Izračunaj: a) polmer Zemlje po Biruniju, b) relativno napako njegove meritve.
2. Vzemimo, da je Zemlja idealna krogla s polmerom $R=6400\text{ km}$. Kako daleč vidimo z vrha našega Triglava z nadmorsko višino okoli 2860 km?
3. Kolikšna je bila višina znamenitega morskega svetilnika, ki so ga postavili okoli leta 320 pr. n. št. na otoku Faros pred Aleksandrijo, če se je z njegovega vrha videlo okoli 40 km daleč?

Marijan Prosen

1. a) Polmer Zemlje po Biruniju je $R=41\,500\text{ km}/2\pi=6600\text{ km}$;
b) relativna napaka njegove meritve je $1500\text{ km}/40\,000\text{ km}=0,0375$, t.j. okoli 3,7%.
2. Z vrha Triglava vidimo v idealnih razmerah do približno $\sqrt{2 \cdot 2860 \cdot 6400}\text{ km} \approx 191\text{ km}$.
3. Njegova višina je bila okoli $(40\text{ km})^2/2 \cdot 6400\text{ km} \approx 120\text{ m}$.

Letno kazalo

PRESEK – list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje – letnik 32, šolsko leto 2004/05, številke 1–6

■ MATEMATIKA

- Koliko prstov imajo na rokah Venerani? (Marija Vencelj) št. 1, str. 5
- Trakovi in premice preko kroga (Boris Lavrič) št. 1, str. 6–9
- Dopolni račune – Rešitev nagradne naloge iz 3. številke XXXI. letnika Preseka, str. 138 (Marija Vencelj) št. 1, str. 9
- Krog v trikotniku – Rešitev nagradne naloge iz 5. številke XXXI. letnika Preseka, str. 288 (Boris Lavrič) št. 1, str. 10
- Gobelini (Urška Demšar) št. 1, str. 11
Rešitvi str. 24
- Johan Peter Gustav LeJeune Dirichlet (1805–1859) (Matej Mlakar) št. 1, str. 12–13
- Pravična delitev (Vilko Domanjko) št. 1, str. 13–14
- Ulamova spirala (Vladimir Batagelj) št. 1, str. 15
- 40. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) št. 1, str. 17
- Poligonska števila (Matej Mlakar) št. 2–3, str. 5–7
- Popularizacija matematike v srednji šoli (Darjo Felda) št. 2–3, str. 8–9
- Pravična delitev (Vilko Domanjko) št. 2–3, str. 10–14
- Praštevski snežaki (Mirko Dobovišek) št. 2–3, str. 15
- 45. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko) št. 2–3, str. 16
- Večkotniki na kvadratni mreži (Boris Lavrič) št. 2–3, str. 17–21
- Catalanova domneva potrjena (Josip Grasselli) št. 2–3, str. 22–23

- Popravki člankov iz prejšnje številke
št. 2–3, str. 23–28
- Polya – matematik, ki je preštel grupe, grafe in kemijske spojine
(Ivan Gutman, Branislav Popović) št. 2–3, str. 36–37
- Kaj je to matrika?
(Sandi Klavžar) št. 2–3, str. 38–41
- Carl Friedrich Gauss – ob 150. obletnici smrti
(Marija Vencelj) št. 4, str. 5–8
- Linearne preslikave ravnine in 2×2 matrike
(Peter Šemrl) št. 4, str. 9–12
- Kvadratki v krogu – nagradna naloga
(Peter Petek) št. 4, str. 13
- Linearne preslikave ravnine in 2×2 matrike (drugi del)
(Peter Šemrl) št. 5, str. 5–8
- Pierre Simon Laplace – kemik
(Ivan Gutman, Branislav Popović) št. 5, str. 8–9
- Z barvanjem hišk do formul za vsoto potenc
(Matej Mlakar) št. 5, str. 10–11
- 4. tekmovanje dijakov srednjih tehniških šol v znanju matematike – tekmovanje B
(Darinka Žižek) št. 5, str. 12–13
- 4. tekmovanje dijakov ter dijakinj srednjih poklicnih šol v znanju matematike
(Dušanka Vrenčur) št. 5, str. 13
- Elipsa v trikotniku
(Drago Bajc) št. 6, str. 5–6
- Arthur Cayley – pionir kemijske teorije grafov
(Ivan Gutman, Branislav Popović) št. 6, str. 7–8
- Odkriti dve novi Marsennovi praštevili
(Ciril Petr) št. 6, str. 9

■ FIZIKA

- Hitrost svetlobe je meja
(Janez Strnad) št. 1, str. 19–22
- 42. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije
(Ciril Dominko) št. 1, str. 23–24
- Najlepše fotografije za leto fizike
(Uredništvo Preseka) št. 1, str. 25
- Še enkrat o masi energije
(Janez Strnad) št. 2–3, str. 43–45
- Smuk
(Andrej Likar) št. 2–3, str. 46–47
- 24. državno tekmovanje iz fizike za Stefanova priznanja
(Jelislava Sakelšek) št. 2–3, str. 48
- 35. mednarodna fizikalna olimpiada
(Ciril Dominko) št. 2–3, str. 49
- Kako rastejo snežinke?
(Andrej Likar) št. 4, str. 15–19

- Verižni eksperiment
(Irena Drevenšek–Olenik) št. 4, str. 24–25
- Kvarkadabra: Zakaj je nebo modro?
(Daniel Svenšek) št. 4, str. 25
- Vzoredno parkiranje
(Aleš Mohorič) št. 5, str. 15–17
- Verižni eksperiment
(Damjan Štrus) št. 5, str. 21–23
- Tretji in četrti člen verige eksperimentov
(Samo Lasič, Anton Potočnik) št. 6, str. 11–14
- Prožni trk ureja hitrosti
(Ivan Lisac) št. 6, str. 15–17

■ RAČUNALNIŠTVO

- Je vaš računalnik staknil virozo?
(Andrej Taranenko) št. 1, str. 27–29
- Računalniška miselna igra kamen–papir–škarje
(Branko Kaučič) št. 2–3, str. 51–53
- Mala šola LaTeXa (prvi del)
(Andrej Taranenko) št. 4, str. 27–30
- Brezplačni matematični programi
(Marko Jakovac) št. 4, str. 31–33
- Mala šola LaTeXa (drugi del)
(Andrej Taranenko) št. 5, str. 25–27
- Digitalni video
(Marjan Krašna) št. 5, str. 28–29, 33
- Mala šola LaTeXa (tretji del)
(Andrej Taranenko) št. 6, str. 23–25

■ ASTRONOMIJA

- Najdaljše trajanje popolnega sončevega mrka
(Marijan Prosen) št. 1, str. 31–32
- Marijan Prosen: Imena nebesnih teles
(Sandi Klavžar) št. 1, str. 33
- Astronom Janez od Svetega gozda
(Marijan Prosen) št. 2–3, str. 55–58
- Najdaljši čas trajanja popolnega luninega mrka
(Karel Šmigoc) št. 2–3, str. 59–61
- Še opomba uredništva
(Marijan Prosen) št. 2–3, str. 61
- Gauss in astronomija
(Marijan Prosen) št. 4, str. 35–37
- Zanimivost: Gaussovo leto
(Marijan Prosen) št. 4, str. 37
- Mlada in stara Luna
(Marijan Prosen) št. 5, str. 31–33
- Kako so ugotovili natančno obliko in velikost Zemlje
(Marijan Prosen) št. 6, str. 27–29

- Birunijeva meritev zemljinega polmera
(Marijan Prosen) št. 6, str. 30–31

■ TEKMOVANJA

- Urnik tekmovanj v letu 2005
(Darjo Felda) št. 2–3, str. 30–31

■ RAZVEDRILO

- Križanka
(Marko Bokalič) št. 1, str. 16–17
Rešitev št. 2–3, str. 34
- Gobelina
(Urška Demšar) št. 2–3, str. 28–29
Rešitev št. 2–3, str. 35
- Križanka
(Marko Bokalič) št. 2–3, str. 32–33
Rešitev št. 2–3, str. 34
- Križanka
(Marko Bokalič) št. 4, str. 20–21
Rešitev št. 4, str. 23
- Vrste in verige – igra za dva
(Marija Vencelj) št. 4, str. 22–23
- Slikovna uganka
(Jože Berdon) št. 4, str. 23
- Križanka
(Marko Bokalič) št. 5, str. 18–19
Rešitev št. 5, str. 20
- Mala številka križanka
(Marija Vencelj) št. 5, str. 17
Rešitev št. 5, str. 20
- Križanka
(Marko Bokalič) št. 6, str. 18–19
Rešitev št. 6, str. 22
- Številka križanka z delitelji
(Uroš Kuzman) št. 6, str. 20–21
Rešitev št. 6, str. 29

■ PRILOGE

- Evropski matematični kenguru / marec 2004, 8/9 razred OŠ št. 1, str. 1–4
Rešitve št. 1, str. 4
- Evropski matematični kenguru / marec 2004, 3/4 razred SŠ št. 1, str. 5–8
Rešitve št. 1, str. 8
- Tekmovanje za Srebrno Stefanovo priznanje, 7. razred osemletne osnovne šole in 8. razred devetletne osnovne šole
št. 2–3, str. 1–4

Rešitve št. 2–3, str. 9–10

- Tekmovanje za Srebrno Stefanovo priznanje, 8. razred osemletne osnovne šole in 9. razred devetletne osnovne šole št. 2–3, str. 5–8
Rešitve št. 2–3, str. 11–12
- Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2003/04
(Ciril Dominko) št. 4, str. 1–3
Rešitve (Bojan Golli) št. 4, str. 9–15
- Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2003/04
(Ciril Dominko) št. 4, str. 4–8
Rešitve (Bojan Golli) št. 4, str. 16–24
- 48. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
št. 5, str. 1–3
Rešitve št. 5, str. 14–17
- Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije, Izbirno tekmovanje
št. 5, str. 4–6
Rešitve št. 5, str. 18–24
- Tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje, 7. razred osemletne osnovne šole in 8. razred devetletne osnovne šole
št. 5, str. 7–10
Rešitve št. 5, str. 24–26
- Tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje, 8. razred osemletne osnovne šole in 9. razred devetletne osnovne šole
št. 5, str. 10–13
Rešitve št. 5, str. 27–28
- 4. državno tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
št. 6, str. 1–4
Rešitve št. 6, str. 16–20
- Državno tekmovanje iz matematike za dijake poklicnih šol
št. 6, str. 4–7
Rešitve št. 6, str. 20–22
- 4. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
št. 6, str. 8–14
Rešitve št. 6, str. 22–26
- 4. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol
št. 6, str. 14–16
Rešitve št. 6, str. 27–28

■ Navodila sodelavcem Preseka za oddajo prispevkov

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštete, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

■ Kolofon

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

letnik 32

šolsko leto 2004/2005

številka 6

Uredniški odbor

Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Primož Potočnik (novice), Marjan Prosen (astronomija), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine

DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19,
p. p. 2964, 1001 Ljubljana,
telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 2517 281.

Naročnina za šolsko leto 2004/2005 je za posamezne naročnike **4.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol **3.500 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, dvojna številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino pa znaša **25 EUR**.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana,
Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana,
SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

Sponzor

SRCSI
sistemske integracije

List sofinancirata Agencija za raziskovalno dejavnost ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Polona Šterk in Matjaž Čuk

Ilustracija Polona Šterk, Matjaž Čuk, Nina Rupel

Tehnično urejanje Matjaž Čuk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

© 2005 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
– 1605

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja izdajatelja ni dovoljeno.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



.tex

?

