

LETNIK 32 (2004/2005) ŠTEVILKA 4

PRESERK

10010010010010010010010

10010010010010010010010

os

$$k = 0,017202099 a^{23} / M^{12} d$$

14966

\LaTeX{}

matematika

fizika

računalništvo

astronomija

= GAUSS

NAGRADNA NALOGA

LETO FIZIKE 2005

KRIŽANKA

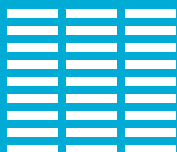
ISSN 0351-6652



9 770351 665241

4444444444444444

100 100 100



Uvodnik



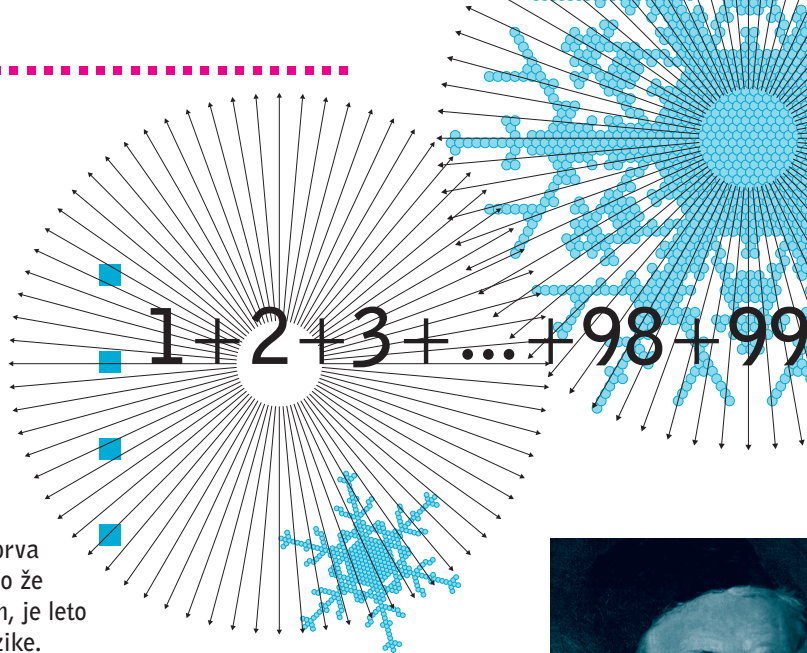
Dragi bralci in bralke, pred vami je prva številka Preseka v letu 2005. Kot smo že večkrat zapisali v prvih treh številkah, je leto 2005 proglašeno za Svetovno leto fizike. Temu dogodku smo posvetili že kar precej pozornosti, v tej številki, ki je pred vami, pa začnemo tudi serijo zapisov o verižnem eksperimentu, ki bo potekal pod okriljem Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Morda se boste tudi sami pridružili temu projektu.

Leto 2005 ni samo leto fizike, pač pa je posvečeno tudi velikemu matematiku, astronomu, fiziku in geodetu Carlu Friedrichu Gaussu. S tem Nemčija in mesto Göttingen obeležujeta 150 letnico smrti velikega vsestranskega znanstvenika. O življenju enega najpomembnejših matematikov vseh časov pišemo v uvodnem članku te revije, Gaussov prispevek k astronomiji pa zaključuje to številko.

Pred vrati so nova tekmovanja iz matematike in fizike. Na njih vam želimo čim več uspeha, če pa rezultat ne bo najboljši, si tega ne želite preveč k srcu. Povsem že zadošča, če ste zaradi tekmovanj osvojili nekaj novega znanja in pridobili veselje do teh temeljnih znanstvenih disciplin.

Za konec naj vas samo še povabimo k reševanju nagradne naloge "Kvadratki v krogu". Vsake vaše ideje in rešitve bomo veselili.

Maja Klavžar
odgovorna urednica

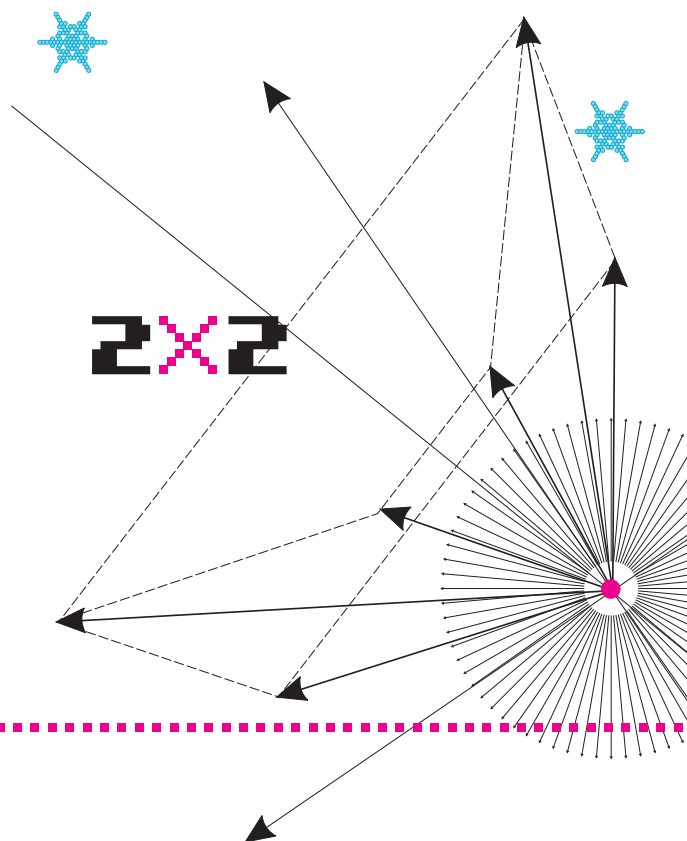


$$1+2+3+\dots+98+99$$

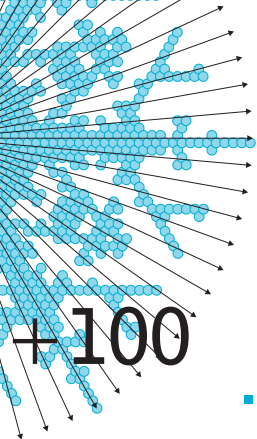


Carl Friedrich Gauss

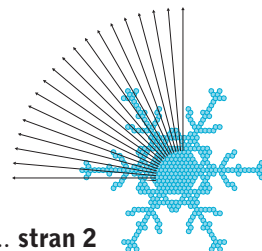
strani 5 do 8 in 35 do 37



$$2 \times 2$$



HAZALO



Uvodnik

- Nagovor odgovorne urednice stran 2

1. Matematika

- Carl Friedrich Gauss – ob 150. obletnici smrti stran 5–8
- Linearne preslikave ravnine in 2×2 matrike stran 9–12
- Kvadratki v krogu – nagradna naloga stran 13

2. Fizika

- Kako rastejo snežinke? stran 15–19
- Verižni eksperiment stran 24–25
- Kvarkadabra: Zakaj je nebo modro? stran 25

3. Računalništvo

- Mala šola LaTeXa (prvi del) stran 27–30
- Brezplačni matematični programi stran 31–33

4. Astronomija

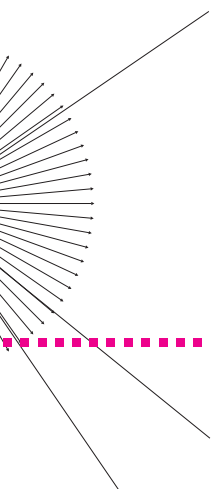
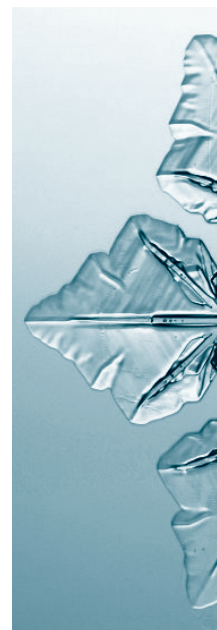
- Gauss in astronomija stran 35–37
- Zanimivost: Gaussovo leto stran 37

Razvedrilo

- Križanka stran 20–21
- Vrste in verige stran 22–23
- Slikovna uganka stran 23

Tekmovanja

- Tekmovanja priloga



[illegible]

$$1+2+3+\dots+98+99+100$$

2x2

1.

Carl Friedrich Gauss – ob 150. obletnici smrti

Letos poteka 150 let od smrti enega največjih matematikov vseh časov, »kneza znanosti« Carla Friedricha Gaussa (slika 1). O vsestranskosti njegove znanstvene vladavine na prehodu iz osemnajstega v devetnajsto stoletje priča tudi napis na spominski plošči v Braunschweigu, vzdani na mestu, kjer je nekoč stala Gaussova rojstna hiša (slika 2). Bil je matematik, astronom¹, fizik in geodet. V prvi vrsti in v največji meri pa je bil Carl Friedrich Gauss matematik.

V Preseku smo Gaussa že večkrat omenili, nazadnje v prispevkih o Abelu (Presek 29, 259–263), Galoisu (Presek 29, 346–349) in Jacobiju (Presek 31, 274–277). Slovenski srednješolci že v prvem letniku spoznajo Gaussovo eliminacijsko metodo za reševanje sistemov linearnih enačb, Gaussovo ime nosijo številni pomembni matematični izreki in pojmi, pa tudi eden od kraterjev na Luni.

Površno gledano, je bilo Gaussovo življenje preprosto. Med trpkim otroštvom v revni in polpismeni družini se je izjemno zgodaj pokazala njegova velika intelektualna nadarjenost. Ko je bilo »čudežnemu otroku« štirinajst let, je začel prejemati štipendijo braunschweiskega vojvode, ki mu je omogočila, da se je naslednjih šestnajst let lahko brez večjih finančnih skrbi posvečal intelektualnemu delu. Že pred svojim petindvajsetim letom je bil slaven ter upoštevan matematik in astronom. Tridesetleten je postal direktor astronomskega observatorija v Göttingenu. Tam je ostal in deloval do svoje smrti v starosti 78 let. Vse svoje življenje je delal praktično sam, brez matematičnih sodelavcev.

V izrazitem nasprotju s to zunanjo preprostostjo je bilo Gaussovo osebno življenje zapleteno in po svoje žalostno. Njegov oče je bil dninar, ki se je trdo prebijal navzgor po družbeni lestvici. Bil je vrtnar, rokodelc, predelavec, trgovski pomočnik in nazadnje blagajnik majhne zavarovalnice. Po Gaussovih besedah je bil sicer spoštovan, a gospodovalen, surov in neotesan človek. Gaussova mati je bila zelo inteligentna, toda polpismena hči vaškega kamnoseka, ki je služila kot dekla, preden je postala druga žena Gaussovega očeta. Kljub nesrečnemu zakonu je ohranila svoj vedri značaj in trdno stala ob strani svojemu edinemu sinu. Umrla je v



Slika 1.

Carl Friedrich Gauss se je rodil 30. aprila 1777 v Braunschweigu in umrl 23. februarja 1855 v Göttingenu. Oba kraja ležita v današnji Nemčiji. Mesto Göttingen, tamkajšnja univerza in Gaussovo društvo so leto 2005 proglasili za Gaussovo leto.

¹ Glej prispevek Marijana Prosenaa na strani 35.

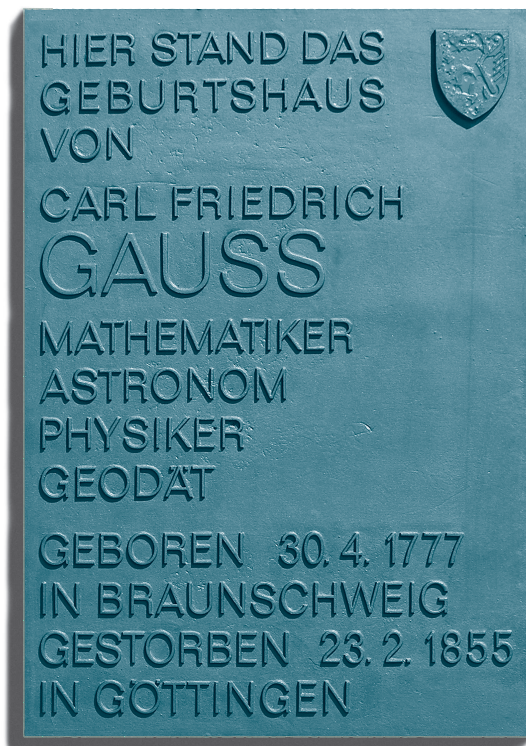
starosti 97 let, potem ko je po moževi smrti zadnjih 22 let živela pri sinu.

Mali Gauss je znal računati, še preden je dobro govoril. Ko mu je bilo tri leta, je svojega očeta opozoril na napako v izračunu tedenske mezde za enega od delavcev. Brati se je naučil sam. Iz ranega otroštva izhaja tudi zgodbica, ki jo o Gaussu največkrat pripovedujejo. Ko mu je bilo osem let, je osupnil svojega učitelja z bliskovitim izračunom vsote prvih sto naravnih števil². Po tem dogodku je učitelj opremil mladega genija s knjigami in ga ob materini podpori, očetovemu nasprotovanju navkljub vzpodbudil k nadaljnjemu izobraževanju.

Do enajstega leta je nad Carlom Friedrichom bedel matematik Martin Bartels, tedanji pomočnik na šoli v Braunschweigu in kasnejši učitelj velikega ruskega matematika Lobačevskega v Kazanu. Leta 1788 je oče Gauss popustil pritiskom z vseh strani in dovolil svojemu sinu, da se vpiše v gimnazijo. V gimnaziji je mali Gauss izredno hitro napredoval v vseh predmetih, najbolj v svojih najljubših, klasiki in matematiki. Na nenavadno nadarjenega dečka so opozorili braunschweškega vojvodo, ki je Gaussa leta 1792 začel štipendirati in mu s tem omogočil neodvisnost. Ko se je Gauss istega leta vpisal na Karlov kolegij v Braunschweigu,

je njegova naravoslovna in klasična izobrazba daleč presegala nivo študentov njegove starosti. Že v tem času je odkril številne pomembne matematične rezultate. Nekatere je »ponovno odkril«, ne da bi vedel, da so pred njim prišli do njih že Euler, Lagrange ali drugi matematiki 18. stoletja (tudi kvadratni recipročnostni zakon v teoriji števil). Veliko rezultatov pa je bilo novih.

Leta 1795 se je vpisal na univerzo v Göttingenu. Tam je imel dostop do literature, ki je v Braunschweigu niso imeli. Dobesedno požiral je klasične mojstrovine in matematične članke v



Slika 2.

Prevod napisa: Tu je stala rojstna hiša Carla Friedricha Gaussa – matematika, astronoma, fizika, geodeta – ki se je rodil 30. 4. 1777 v Braunschweigu in umrl 23. 2. 1855 v Göttingenu.

starih revijah, pri čemer je ugotovil, da številna njegova odkritja niso nova. Razočaranje, ki je sledilo, in dejstvo, da sta ga poučevala briljantni klasik Heine in drugorazredni matematik Kästner, je malodane odločilo, da postane jezikoslovec.

Toda leta 1796 je devetnajstleten prišel do bleščečega odkritja, ki ga je zapisalo matematiki. Že v antiki je bilo znano, da lahko zgolj z uporabo šestila in neoznačenega ravnila konstruiramo enakostranični trikotnik in pravilni petkotnik, niso pa znali konstruirati nobenega drugega pravilnega večkotnika s prašteviliškim številom stranic, niti niso vedeli, če je to sploh možno. Gauss je pri sistematski obravnavi krožnodelitvene enačbe $x^n - 1 = 0$ kot stranski produkt našel pogoj za konstrukcijo pravilnega n -kotnika s šestilom in ravnilom. Pogoj izpolnjuje tudi praštevilo 17 in tako je lahko objavil konstrukcijo pravilnega sedemnajstkotnika, kar je pomenilo prvi napredek na tem področju po več kot 2000 letih. Gauss je odkritje proslavil z začetkom pisanja svojega matematičnega dnevnika, v katerega je v naslednjih osemnajstih letih zapisal veliko svojih odkritij in rezultatov.

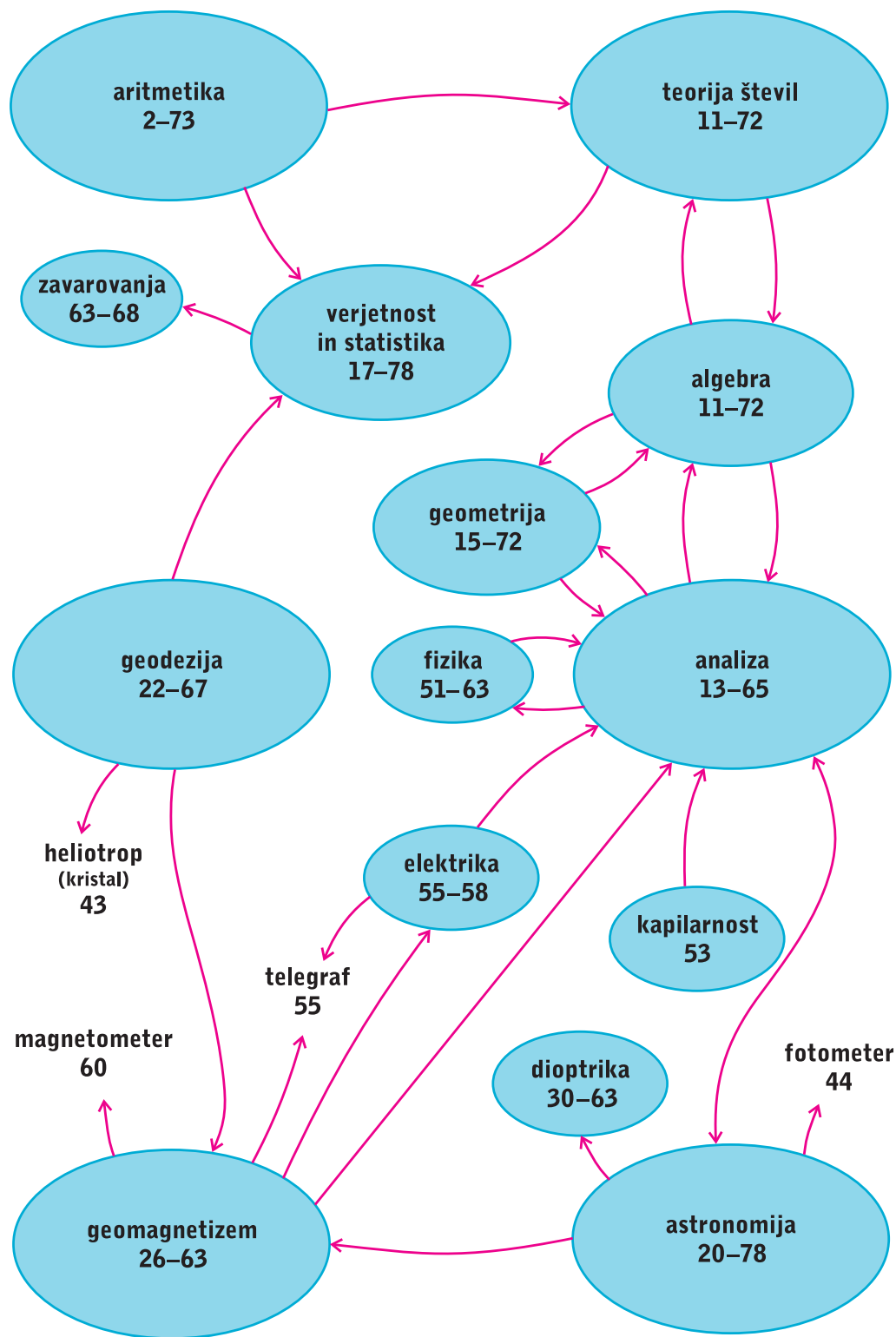
Leta 1798 se je Gauss vrnil v Braunschweig, kjer je v izolaciji intenzivno delal. To je bil začetek obdobja desetih izjemno uspešnih braunschweških let. Leta 1799 je s prvimi od svojih štirih dokazov fundamentalnega izreka algebre³ doktoriral na univerzi v Helmstadtu. Leta 1801 se je ustvarjalnost preteklih let odrazila v dveh izjemnih dosežkih: monografiji *Disquisitiones arithmeticae* s področja teorije števil in natančnem

² Opazil je, da imajo v $1+2+3+\dots+98+99+100$ pari števil: prvo in zadnje, drugo in predzadnje, tretje in predpredzadnje itd. enake vsote, in sicer 101. Takih parov je petdeset, torej je vrednost zapisane vsote 5050.

³ Fundamentalni izrek algebre pravi, da ima vsaka algebrska enačba s kompleksnimi koeficienti vsaj eno kompleksno rešitev. Od tod sledi, da ima vsaka taka enačba stopnje n natanko n kompleksnih rešitev.

Slika 3.

Glavna področja Gaussovega znanstvenega delovanja in njihova medsebojna povezanost. Puščice nakazujejo, kako so Gaussova raziskave na danem področju motivirale oziroma navdihnile za delo na drugem področju. Štirje njegovi najpomembnejši izumi so navedeni zunaj ovalov. Velikosti ovalov približno ustrezajo pomembnosti in vlogi vpisanih področij v celotnem Gaussovem znanstvenem delovanju, vpisana števila pa Gaussovo starost v času ukvarjanja s posameznim področjem.



izračunu orbite na novo odkritega planetoida Ceresa. V delu *Disquisitiones arithmeticae* je Gauss zbral vsa mojstrska dela svojih predhodnikov in ga dodatno tako obogatil, da velja danes za začetek moderne teorije števil.

Astronomija je Gaussu ponudila zanimivo alternativo. Čeprav je bil še vedno deležen vojvodove podpore, celo povečane, si je želel trdnjše položaja. Misel, da bi poučeval matematiko, ga je odbijala. Tedaj je to pomenilo elementarno urjenje slabo pripravljenih in nemotiviranih študentov. Domneval je tudi, da bi mu kot poklicnemu astronomu ostalo več časa za raziskave kot profesorju matematike. Začel se je pripravljati na kandidaturu za direktorja astronomskega observatorija v Göttingenu. S sistematičnim programom teoretičnega dela in opazovanj je kmalu postal najprimernejši kandidat za to mesto. Ko je bil leta 1807 nastavljen, je bil že uveljavljen znanstvenik. O tem priča ponujeno službeno mesto v carskem mestu Petrogradu in članstvo v londonski Kraljevi družbi ter ruski in francoski akademiji znanosti.

Prva leta Gaussovega službovanja v Göttingenu so pomenila drugi veliki val Gaussovih idej in rezultatov na različnih področjih matematike.

Kmalu se je Gauss začel zanimati za perturbacije planetov. Tako so nastala njegova dela: Teorija gibanja nebesnih teles (1809), članek o privlačnosti splošnih elipsoidov (1813), delo o mehanski kvadraturi (1814) in študija o sekularnih perturbacijah (1818). Iz te dobe je tudi Gaussov članek o hipergeometričnih vrstah (1812), ki je pomenil prvo sistematično proučevanje konvergence vrst.

Po letu 1820 se je začel Gauss aktivno zanimati za geodezijo. Svoje teoretične matematične rezultate je uporabljal pri triangulaciji. Za njegov najpomembnej-

V ta čas sodijo tudi edina leta Gaussove osebne sreče. Leta 1805 se je poročil z Johanno Osthoff, ki mu je rodila sina in hčerko ter ustvarila prijazen in vester dom. Umrla je po tretjem porodu leta 1809, kmalu za njo tudi novorojenček. Gauss je »zatisnil angelske oči, v katerih je pet let gledal nebesa« in se potegnil v osamljenost. Izgube ni nikoli zares prebolel. Manj kot leto dni po Johannini smrti se je poročil z Minno Waldeck, najboljšo prijateljico svoje pokojne žene, najverjetneje iz potrebe po urejenem življenju. Imela sta dva sina in hčerko, vendar družina ni bila srečna. Minna je bila večno nezadovoljna in slabega zdravja, Gauss je bil gospodovalen oče svojima hčerama in se grobo prepiral z mlajšim sinom, ki je zato emigriral v Ameriko. Miren in prijazen dom je svojemu očetu ustvarila po smrti svoje matere (1831) najmlajša Gaussova hči Theresa, ki mu je bila tudi zaupna prijateljica zadnjih štiriindvajset let življenja. Carl Friedrich Gauss je umrl v spanju 23. februarja 1855.

ši dosežek iz te dobe bi lahko šteli teorijo ploskev, opisano v delu *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827), kjer so praktična razmišljanja s področja višje geodezije tesno povezana z abstraktno diferencialno analizo.

Toda celo v tej dobi, ko je Gauss vso svojo aktivnost osredotočil na probleme iz geodezije, ni zanemaril svoje prve ljubezni, teorije števil. V letih 1825 in 1831 sta izšla njegova članka o bikvadratnih ostankih, nadaljevanje njegove teorije o kvadratnih ostankih iz *Disquisitiones arithmeticae*. Uporabil je povsem novo metodo, teorijo kompleksnih števil. Nova teorija kompleksnih števil je razjasnila številne nejasnosti v aritmetiki. V delu iz leta 1831 je Gauss podal tako algebro kot aritmetiko kompleksnih števil. Poleg tega je kompleksna števila ponazoril s točkami v ravnini in tako za vedno odstranil misterij, ki jih je obdajal.

V letih 1833 in 1834 je Gaussa začela privlačiti fizika. V tej dobi je opravil veliko poskusov v zvezi z zemeljskim magnetizmom. Toda čas je našel tudi za iz-

redno pomemben teoretični dosežek. V članku iz leta 1840 obravnava teorijo privlačnih in odbojnih sil med telesi, ki so obratno sorazmerne z razdaljami med telesi. To je bil začetek potencialne teorije kot posebne veje matematike.

Gauss je delal vse do svoje smrti. V poznejših letih se je čedalje več ukvarjal z uporabno matematiko.

Žal Gaussove objave ne dajo prave slike o njegovi znanstveni veličini. Iz njegovih dnevnikov in nekaterih pisem vidimo, da je nekatere najpronicljivejše misli obdržal zase. Zdaj vemo, da je Gauss že leta 1800 odkril eliptične funkcije⁴ in zagotovo že okoli leta 1816 obvladal neevklidsko geometrijo⁵, čeprav s teh področij ni nikoli ničesar objavil.

Tudi pričujoči zapis je le blede senca primerne predstavitve Gaussovega dela. Kaj več ne dopuščata ne obseg in ne zahtevnostna raven Preseka. Vsaj malo poskušajmo to nepopolnost popraviti z diagramom na sliki 3.

Marija Vencelj

4 Sloviti dvoboj med Abelom in Jacobijem pri raziskavi eliptičnih funkcij, ki smo ga opisali v članku o Abelu (Presek 29, 359–263), se je odvijal leta 1828.

5 Lobačevski je o Evklidovem 5. aksiomu predaval leta 1826, njegova knjiga o izgradnji neevklidske geometrije pa je izšla 1829/30. V tem času je tudi Madžar Bolyai objavil svoja razmišljanja o tej temi (Presek 21, 186–189).



Linearne preslikave ravnine in 2x2 matrike

■ Uvod

Ta sestavek je namenjen dijakom srednjih šol, ki že poznajo vektorje. Ob reševanju uporabne matematične naloge se bomo seznanili z osnovnimi idejami linearne algebre.

Denimo, da ravnino, opremljeno s pravokotnim koordinatnim sistemom, najprej zavrtimo okoli izhodišča za kot 30° v pozitivni smeri, jo nato pravokotno projiciramo na premico $y = 2x$, potem jo prezrcalimo čez simetralo drugega in četrtega kvadranta ter jo na koncu še zasukamo okoli izhodišča za pravi kot v negativni smeri. Kje konča točka (x, y) , ko opravimo vse štiri opisane transformacije?

Zakaj bi sploh reševali tako zapletene naloge? Pri računalniških igrich je pogosto potrebno zarotirati sliko na zaslonu okoli neke središčne točke ali pa jo prezrcaliti preko premice, ki poteka skozi to središčno točko. Včasih nam koristi tudi projiciranje prostora (ki je na zaslonu predstavljen ravninsko) na kakšno steno (ki je na sliki predstavljen z daljico, ta daljica pa seveda določa premico). In seveda je pogosto potrebno izvesti več takih transformacij zaporedoma. Kaj se potem zgodi s sliko na zaslonu? Pri iskanju odgovora na tako vprašanje nam pomaga, če vemo, kaj se zgodi z vsako točko na zaslonu. To pa pomeni, da moramo rešiti nalogo, podobno zgoraj zastavljenemu problemu. S sorodnimi matematičnimi problemi se srečujejo sestavljenci programske opreme, namenjene arhitektom, oblikovalcem, prodajnim salonom pohištva.

Tako kot pri vsaki zahtevnejši matematični nalogi bomo tudi svoj uvodni problem razbili v manjše, lažje obvladljive naloge. Vprašali se bomo, kaj se zgodi s poljubno točko (x, y) pri rotaciji ravnine okoli izhodišča za kot φ , kaj se zgodi s točko pri zrcaljenju preko premice, ki poteka skozi izhodišče, in še kam se preslika točka (x, y) pri pravokotnem projiciranju na premico skozi izhodišče koordinatnega sistema. Pri tem bomo opazili nekatere podobnosti med navedenimi različnimi problemi in te podobnosti izkoristili pri njihovem reševanju.

To nas bo pripeljalo do osnovnih idej linearne algebre. Končali bomo z nekaj opombami o možnih posplošitvah na trirazsežni prostor in višje dimenzije.

■ Matrike

V tem poglavju si bomo pripravili orodje, ki bo poenostavilo računanje pri reševanju zastavljenega problema.

Matrika je tabela števil. Oglejmo si najprej nekaj primerov:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \pi & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Prva matrika ima dve vrstici in tri stolpce, druga štiri vrstice in štiri stolpce, zadnja pa eno samo vrstico in dva stolpca. Rečemo, da je velikost prve matrike 2×3 , drugi matriki rečemo 4×4 matrika, zadnji pa 1×2 matrika.

V tem članku bomo večinoma potrebovali 2×2 in 2×1 matrike. Matrika velikosti 2×2 je tabela štirih števil, razporejenih v dve vrstici in dva stolpca:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Število a_{ij} imenujemo (i, j) -ti člen matrike. Prvi indeks pove, v kateri vrstici leži ta člen, drugi pa v katerem stolpcu.

Matrika

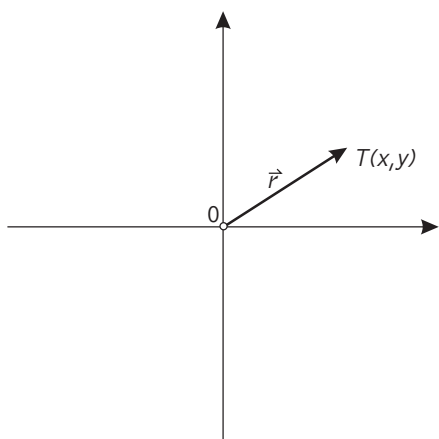
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



je 2×1 matrika s členoma x in y . Taki matriki bomo rekli tudi matrični stolpec.

■ Linearne preslikave ravnine

Naj bo ravnina $\mathcal{R}$ opremljena s pravokotnim koordinatnim sistemom. Potem vsaki točki T v ravnini pripada urejen par koordinat (x, y) . V okviru tega sestavka bomo namesto običajnega zapisa (x, y) koordinati točke T vedno pisali v matričnem stolpcu $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Vektor $\vec{r}$ z začetno točko v izhodišču koordinatnega sistema in končno točko T imenujemo krajevni vektor točke T . Koordinati tega vektorja sta $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (glej sliko 1).



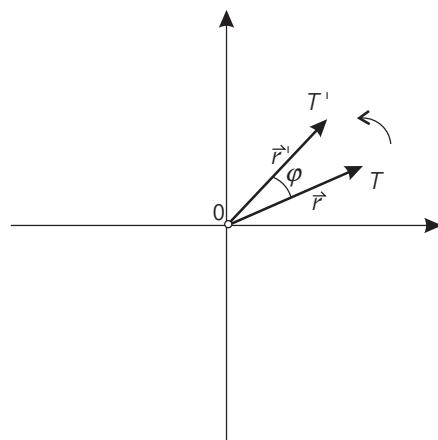
Slika 1.

Najprej obravnavajmo rotacijo ravnine za kot φ okoli koordinatnega izhodišča. Pri tej rotaciji se točka T s koordinatama $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ transformira v točko T' s koordinatama $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Ponavadi si ravnino predstavljamo kot množico točk. Mi pa jo raje obravnavajmo kot množico ustreznih krajevnih vektorjev. Potem je rotacija ravnine za kot φ okoli koordinatnega izhodišča transformacija, ki vsak krajevni vektor zasuka za kot φ (slika 2).

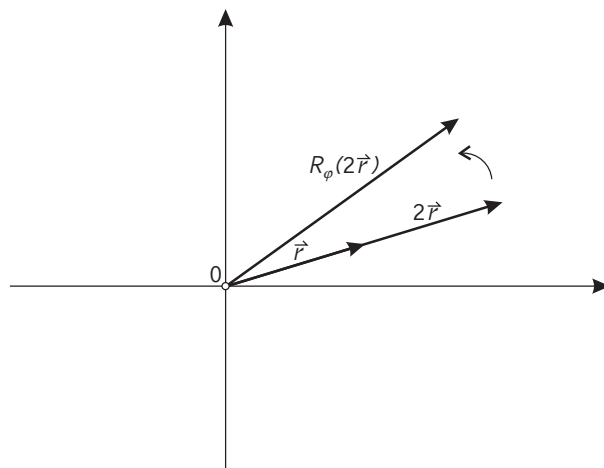
Označimo to rotacijo z R_φ . Potem pišemo $R_\varphi \vec{r} = \vec{r}'$ ali $R_\varphi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. Vektor $\vec{r}$ najprej podaljšamo s faktorjem 2 in ga potem zavrtimo za kot φ (slika 3).

Dobimo enak rezultat kot v primeru, ko vektor $\vec{r}$ najprej zavrtimo za kot φ in ga potem podaljšamo s faktorjem 2 (slika 4).

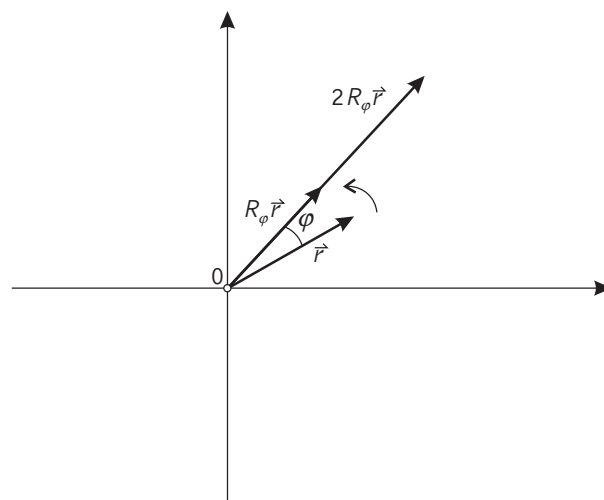
V prvem primeru smo najprej vektor $\vec{r}$ transformirali v vektor $2\vec{r}$ in potem po zasuku dobili vektor $R_\varphi(2\vec{r})$.



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

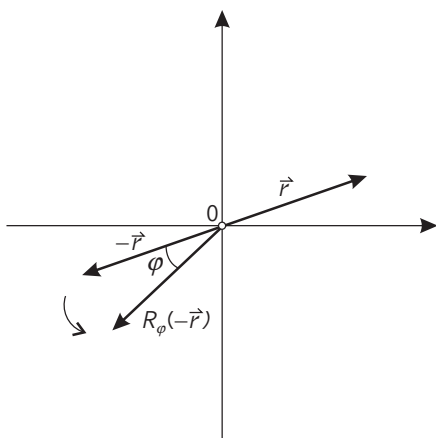
V drugem primeru pa smo v prvem koraku prišli do vektorja $R_\varphi \vec{r}$ in tega potem podaljšali do vektorja $2R_\varphi \vec{r}$. Ker smo obakrat dobili isto, velja

$$\blacksquare \blacksquare R_\varphi(2\vec{r}) = 2R_\varphi \vec{r}.$$

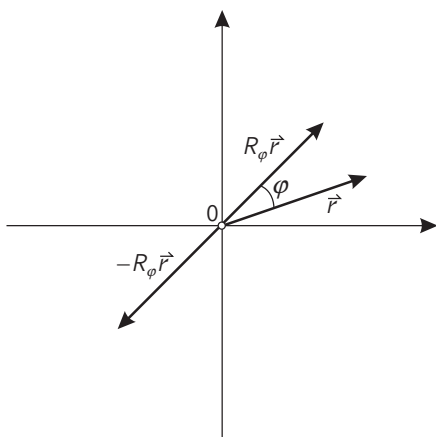
Namesto s skalarjem 2 bi lahko vektor pomnožili s katerimkoli pozitivnim skalarjem t in z enakim razmislekom ugotovili, da velja

$$\blacksquare \blacksquare R_\varphi(t\vec{r}) = t(R_\varphi \vec{r}). \quad (1)$$

Vektor $\vec{r}$ najprej nadomestimo z nasprotnim vektorjem in potem tega zavrtimo za kot φ (slika 5).



Slika 5.



Slika 6.

Dobimo enak rezultat kot v primeru, ko vektor $\vec{r}$ najprej zavrtimo za kot φ in potem dobljeni vektor na-

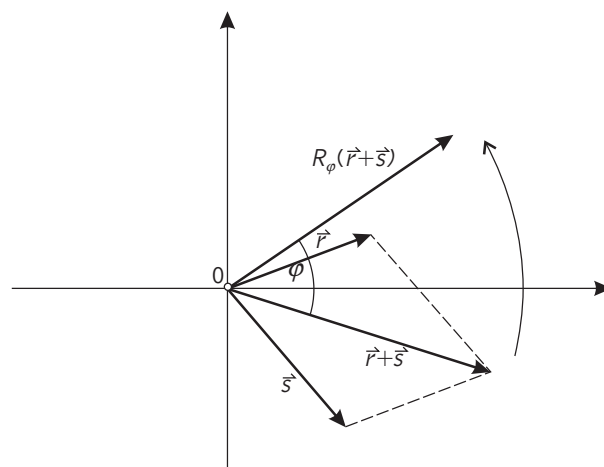
domestimo z nasprotnim vektorjem (slika 6).

Zato velja

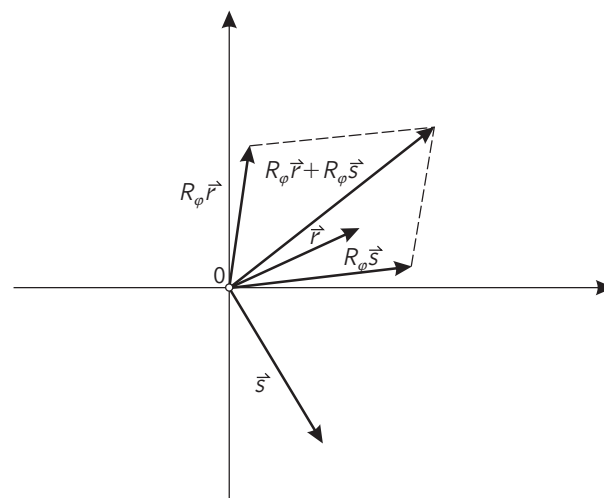
$$\blacksquare \blacksquare R_\varphi(-\vec{r}) = -R_\varphi \vec{r}$$

za vsak vektor $\vec{r}$. Za vsak vektor $\vec{r}$ pa je res tudi $R_\varphi(0\vec{r}) = \vec{0} = 0R_\varphi \vec{r}$. S tem smo dognali, da formula (1) velja za vsako realno število t in vsak vektor $\vec{r}$.

V naslednjem koraku pa premislimo, kako rotacija deluje na vsoto vektorjev $\vec{r} + \vec{s}$. Vektorja $\vec{r}$ in $\vec{s}$ najprej seštejemo in potem njuno vsoto zavrtimo okoli izhodišča za kot φ (slika 7).



Slika 7.



Slika 8.

Dobimo enak rezultat kot v primeru, ko najprej zavrtimo vektorja $\vec{r}$ in $\vec{s}$ in potem zavrtena vektorja seštejemo (slika 8).

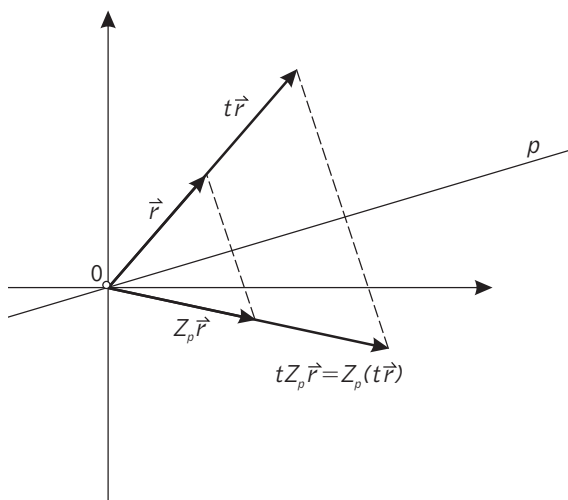
Ugotovili smo, da za poljubna vektorja $\vec{r}$ in $\vec{s}$ velja $R_\varphi(\vec{r} + \vec{s}) = R_\varphi \vec{r} + R_\varphi \vec{s}$.

Transformacijo $A : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ imenujemo linearna preslikava, če za vsako realno število t in vsak par vektorjev $\vec{r}$ in $\vec{s}$ velja

$$A(t\vec{r}) = t(A\vec{r}) \quad \text{in}$$

$$A(\vec{r} + \vec{s}) = A\vec{r} + A\vec{s}$$

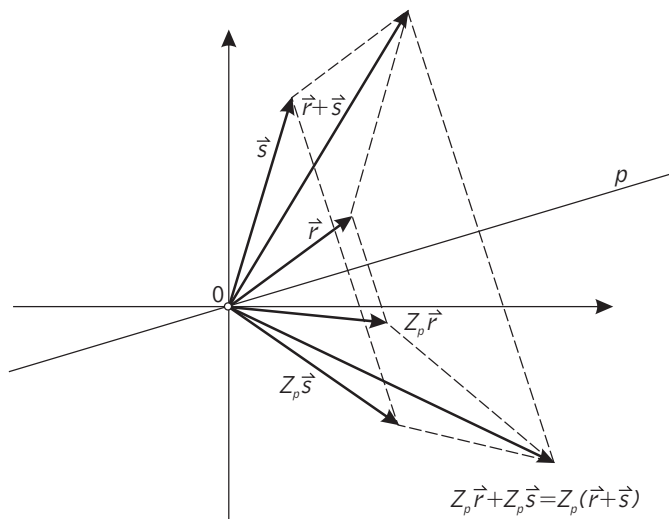
Pravkar smo ugotovili, da je rotacija za kot φ okoli izhodišča linearna preslikava. Naj bo dana premica p , ki poteka skozi izhodišče koordinatnega sistema. Označimo z Z_p transformacijo ravnine, ki vsako točko prezrcali preko premice p . Slika 9 in slika 10 nas prepričata, da je tudi $Z_p : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ linearna preslikava.



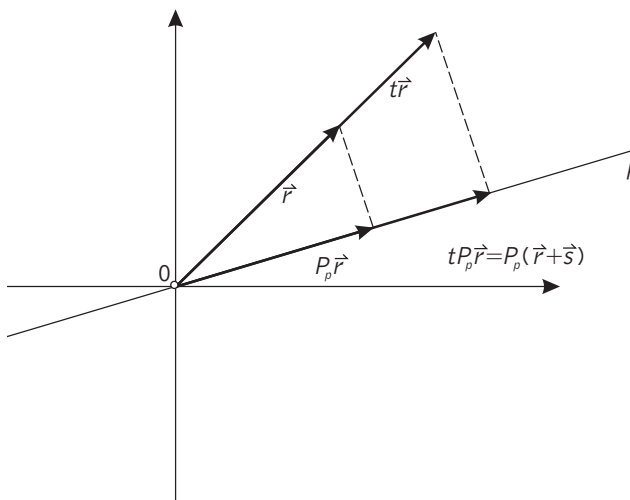
Slika 9.

In končno naj bo $P_p : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ transformacija, ki vsako točko ravnine pravokotno projicira na premico p . Tudi to je linearna transformacija ravnine (slika 11 in slika 12).

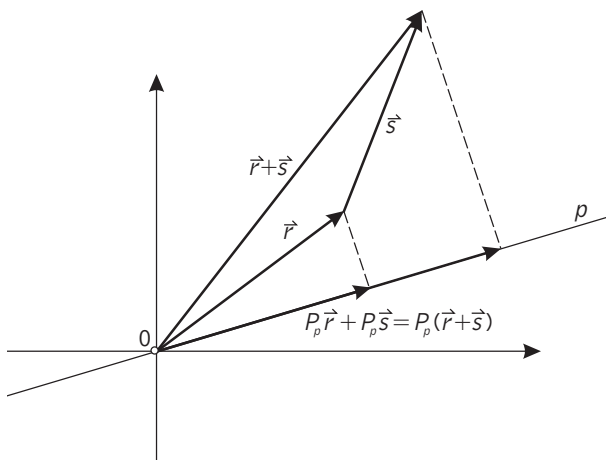
Peter Šemrl



Slika 10.

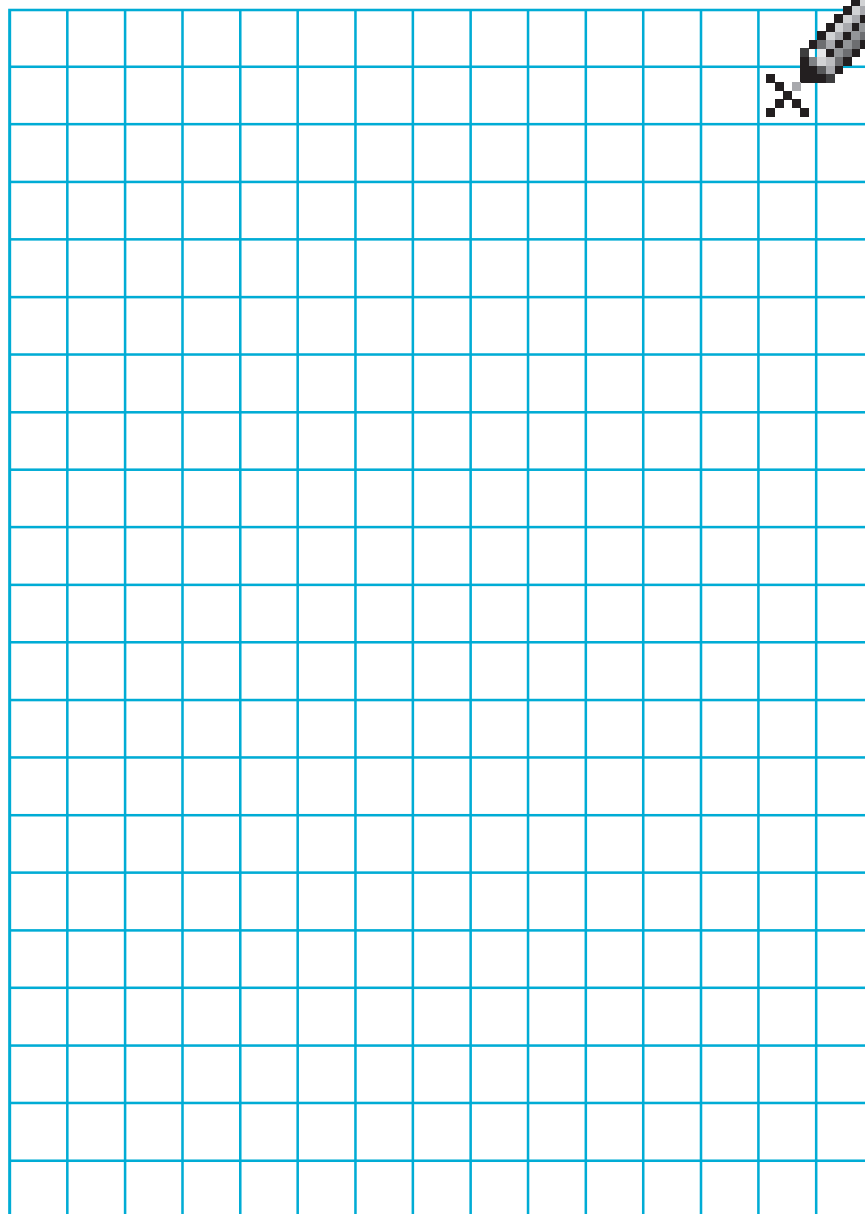


Slika 11.



Slika 12.

Kvadratk̃i v krogu – nagradno nalogo



Na kvadratni mreži narišite krog s polmerom dveh enot tako, da bo v njem čimveč celih kvadratkov. Odgovor utemeljite.

Rešitve pošljite najkasneje do petka, 18. marca 2005, na naš naslov:

■ ■ Presek
Jadranska 19
p.p. 2964
1001 Ljubljana

Izmed reševalcev, ki bodo poslali pravilno rešitev naloge, bomo izžrebali nagrajenca, ki bosta prejela knjižno nagrado.

Peter Petek

Izšle so astronomske efemeride

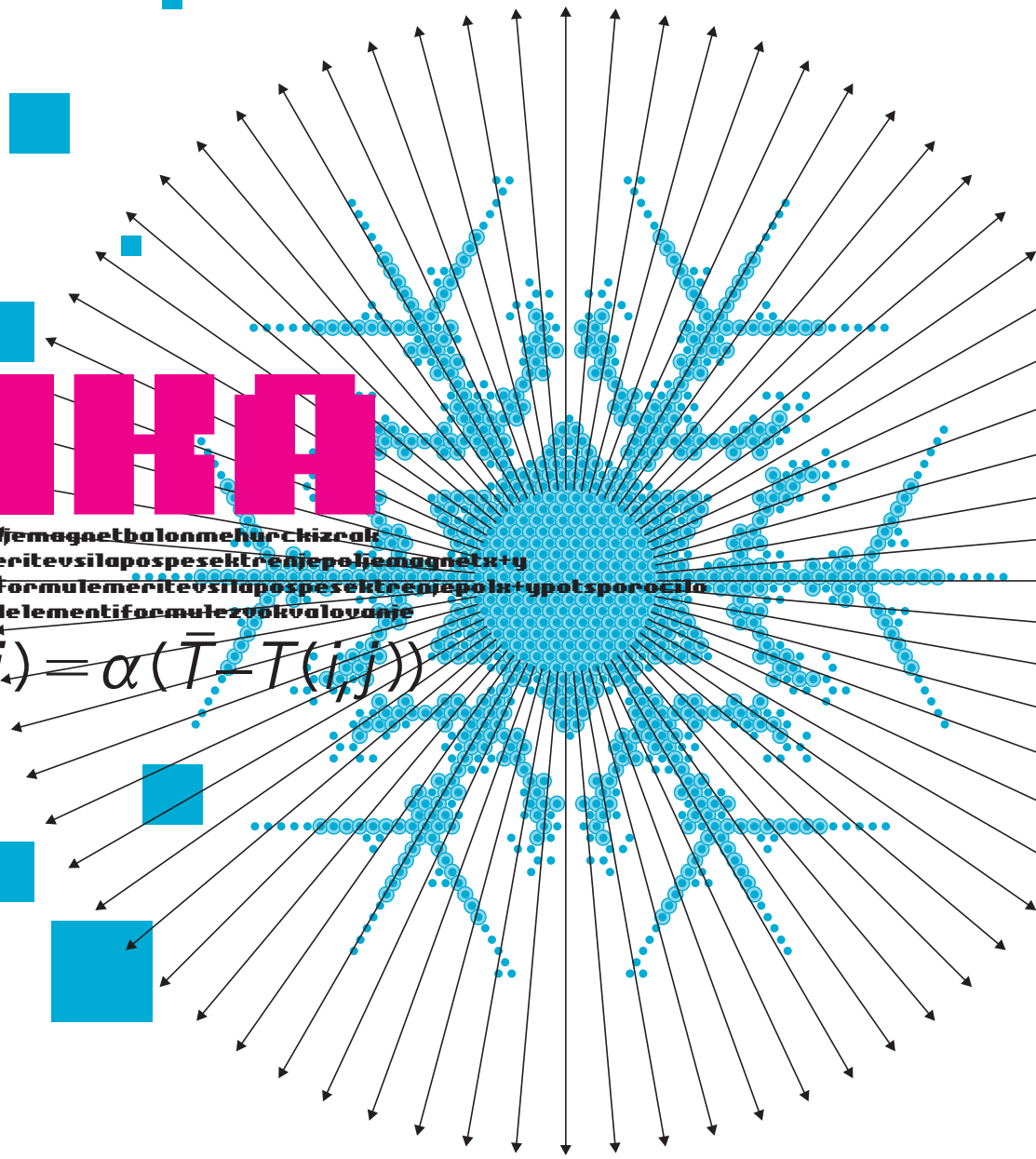
Naše nebo 2005

Naročite jih lahko po telefonu
(01) 4766 553 ali 4232 460
in po elektronski pošti
zaloznistvo@dmfa.si za 1.800 SIT.

FIZIKA

ljemagnetix+ypotsporocilovalovanjemagnetbalonmehurckizrak
elementiformulemerjenjekrivuljameritevsilapospesektrenjepoljemagnetix+y
itiskzvokvalovanjeslika4elementiformulemeritevsilapospesektrenjepolix+ypotsporocila
ckizrakpritiskzvokvalovanjeslika4elementiformulezvokvalovanje

$$\Delta T(i, j) = \alpha(\bar{T} - T(i, j))$$



Kako rastejo snežinke?

V zelo hladnem zraku padajo snežinke v obliki majhnih šestkotnih zvezdic. Nekatere imajo nazobčane krake, druge spet dolge drevesaste izrastke (glej sliko 1). Zvezdice se močno razlikujejo med seboj, skoraj ne najdemo dveh povsem enakih. Rast snežink v oblakih je očitno zelo zapletena. Ali jo lahko vsaj v grobem pojasnimo? Pokazali bomo, da lahko s preprosto predstavo o primrzovanju vodnih molekul na ledeno površino in z upoštevanjem zakona o prevajanju toplote presenetljivo dobro opišemo ta pojav.

Obravnavali bomo kar se da preprost model zmrzovanja. Vodne molekule bomo postavili v vozlišča šesterokotne mreže v ravnini. Najprej bomo privzeli, da vse molekule, razen ene na sredi, tvorijo tekočo fazo. Nato bomo začeli tekočino ohlajati tako, da bomo hladili podlago. Ko bo temperatura v vozlišču padla pod ledišče, bo molekula primrznila, vendar le, če ima kakšnega sosedo. Ker se pri primrzovanju sprošča toplota, bomo v vozlišču dvignili temperaturo. Seveda ne bomo dovolili, da bi molekula zaradi tega spet prešla v tekočino, saj bi za to potrebovala talilno toploto, ki jo je pri primrznitvi oddala, del te toplote pa je že odtekel drugam. Na vsakem vozlišču bomo morali računati temperaturo, saj se voda ohlaja, pa tudi segreva, in sicer tem bolj, čim bliže smo vozliščem, kjer so molekule pred kratkim prešle v led. Temperatura zato ne bo enaka v vseh vozliščih, opraviti imamo s *temperaturnim poljem*.

Da pridemo do šesterokotne mreže, tvorimo najprej pravokotno mrežo, kamor bomo postavili molekule vode. Ker bomo rast snežink spremljali z računalnikom, si bomo omislili polje vozlišč in vsakemu vozlišču priredili par naravnih števil (i, j). Temperaturno polje bomo predstavili z

matriko $T(i, j)$, prav tako tudi agregatno stanje molekul z matriko $p(i, j)$, ki ji bomo rekli matrika stanja. Na posameznem mestu bo njena vrednost lahko le 1 ali 0. Enica bo pomenila, da je na danem mestu molekula del kristala, ničla pa, da je molekula še del tekočine. Na sliki 2 je predstavljena osnovna pravokotna mreža in sosedje vozlišča (i, j). Vidimo, da so osnovna vozlišča, ki ležijo levo ali desno, precej bližje kot tista nad ali pod. (Kolikšno je razmerje med stranicama osnovnega pravokotnika?) Tako bodo sosedje vozlišča (i, j) tvorili šestkotnik, snežinke bodo imele tako simetrijo, ki jo opazimo v naravi. To bomo upoštevali, ko bomo matriko $p(i, j)$ prikazovali na zaslonu. Morda bi koga skrbelo, da smo z izbiro sosedov vozlišča (i, j) prezrli tista, ki so mu zares najbližja. A v teh molekule nikoli ne primrznejo, saj nimajo svojih sosedov. Tako z zvijačo in malo truda pridemo do šestkotne mreže.

Na vsakem koraku računa bomo pregledali vsa vozlišča (i, j) in zabeležili, če se je agregatno stanje molekule morebiti spremenilo, če je torej temperatura $T(i, j)$ pod lediščem in ima molekula vsaj enega, že primrznjenega sosedo. Vrednost $p(i, j)$ bomo tedaj spremenili od vrednosti 0 na vrednost 1.

Pri vsaki spremembi matrike stanja bomo dano mesto segreli za ΔT , saj se ob zmrzovanju sprosti talilna toplota. Hitro lahko izračunamo velikost ΔT , saj vemo, koliko toplote se sprosti, ko zmrzne 1 kg vode; $q_t = 80.4200 \text{ J/kg}$. Toliko toplote bi segrelo 1 kg vode za 80 K. Seveda moramo pri zmrzovanju to toploto odvesti, da ima mešanica vode in ledu ves čas temperaturo ledišča. Toplota zato odteče v hladno okolico, s katero sta zmrzu-



Slika 1. Fotografije snežink, ki jih včasih opazimo v naravi. Večinoma so snežinke nepravilnih oblik, mnoge so v obliki paličic in stebričkov, ki jih naš račun ne zajema. Slike posameznih snežink smo našli na spletni strani <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/photos>.

joča voda in nastali led v stiku. Pri nas pa bomo za toliko segreli vozlišče, v katerem je molekula primrznila.

Zaradi gretja bomo morali po nekem pravilu obnavljati temperature vozlišč $T(i,j)$. Tako bomo upoštevali toplotne tokove od mest, kjer so molekule primrznila, na sosednja vozlišča in v hlajeno podlago s stalno temperaturo T_p . Do enačbe, ki bo opisovala temperaturne spremembe, pridemo po temle preprostem premisleku. Denimo, da merimo temperaturo valjastega merjenca, ki je v toplotnem stiku z dvema velikima telesoma s temperaturama T_1 in T_2 . Če je toplotni stik z obema telesoma enak, bo njegova končna temperatura na sredi ravno povprečna temperatura $\frac{1}{2}(T_1+T_2)$. Podoben premislek velja, če je zvezdasto oblikovan merjenec v stiku z več telesi z različnimi temperaturami. Temperaturno spremembo vozlišča (i,j) pri majhnem časovnem koraku Δt bomo zato določili kot

$$\Delta T(i,j) = \alpha (\bar{T} - T(i,j)),$$

kjer smo s $\bar{T}$ označili povprečno temperaturo najbližjih sosedov, s katerimi je vozlišče v toplotnem stiku

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k.$$

S slike 2 razberemo, da je povprečna temperatura najbližjih šestih sosedov vozlišča (i,j) in podlage podana takole:

$$\bar{T} = \frac{1}{7} T(i+2,j) + T(i+1,j-1) + T(i+1,j+1) + T(i-1,j-1) + T(i-1,j+1) + T(i-2,j) + T_p.$$

Poleg temperatur sosednjih vozlišč smo upoštevali še temperaturo podlage, s katero je vsako vozlišče v stiku. Koefficient α je povezan s časovnim korakom Δt , toplotno prevodnostjo, gostoto in specifično toploto ledu ali vode ter razdaljo med najbližjimi sosedi. Spet



bomo privzeli, da so lastnosti ledu in vode povsem enake. Čim manjši α izberemo, tem natančnejši bo račun. Seveda se bo s tem podaljšal skupni čas računanja, zato ne kaže pretiravati z natančnostjo, še posebno ne, ker smo v našem preprostem računanju marsikaj zelo poenostavili. Prevelike vrednosti $\alpha \gg 1$ pa vodijo do nesmiselnih rezultatov. Priporočljivo je izbrati časovni korak Δt tako, da je na primer $\alpha = 0.25$.

Program, s katerim smo sledili rasti snežink, je zelo preprost. Priporočljivo je delati z dvema temperaturnima matrikama $T_s(i,j)$ in $T_n(i,j)$ ter dvema matrikama stanja $p_s(i,j)$ in $p_n(i,j)$. Indeks s in n označujeta staro stanje, ki ga moramo obnoviti, in obnovljeno novo stanje. Za naslednji korak prepišemo novo stanje temperatur in agregatnih stanj v staro.

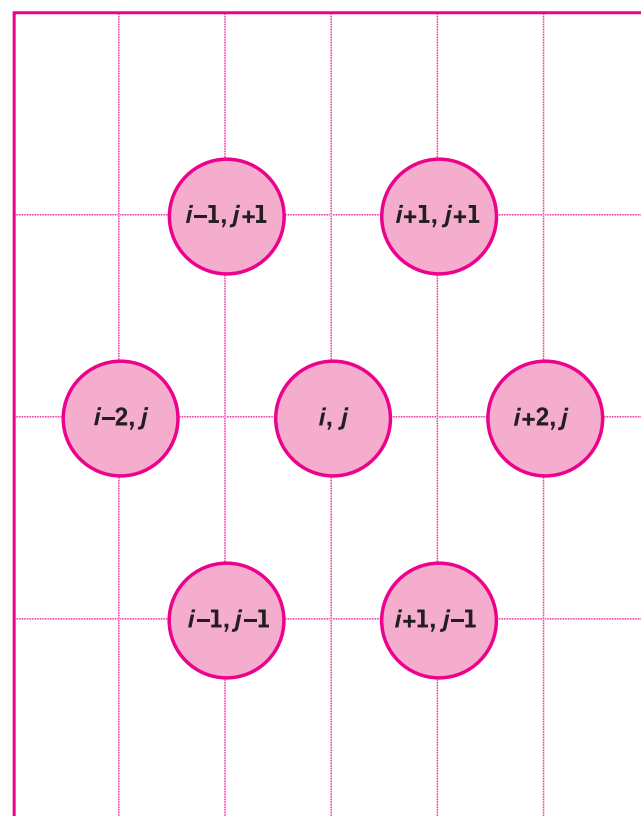
Na sliki 3 je prikazana hitra rast snežinke, ko je bila temperatura podlage za 0,7 K pod lediščem, na sliki 4 pa po-

časna rast, ko je bila ta temperatura le 0,1 K pod lediščem. S spreminjanjem temperature podlage med rastjo se lahko tvorijo tudi drugačne oblike. Skupno vsem snežinkam s te slike so dolgi zvezdasti izrastki. Nastanejo zato, ker se vozlišča blizu izrastkov najhitreje ohlajajo. To je posebno pomembno pri rasti blizu ledišča. Na sliki 5 vidimo nekaj razvojnih stopenj snežink, ki so nastajale pri temperaturi 0.025 K pod lediščem. Na tretji sličici sta prikazani dve snežinki na istem mestu, mlajša s krožci, starejša s pikami. Tako vidimo, na katerih mestih snežinka najhitreje raste.

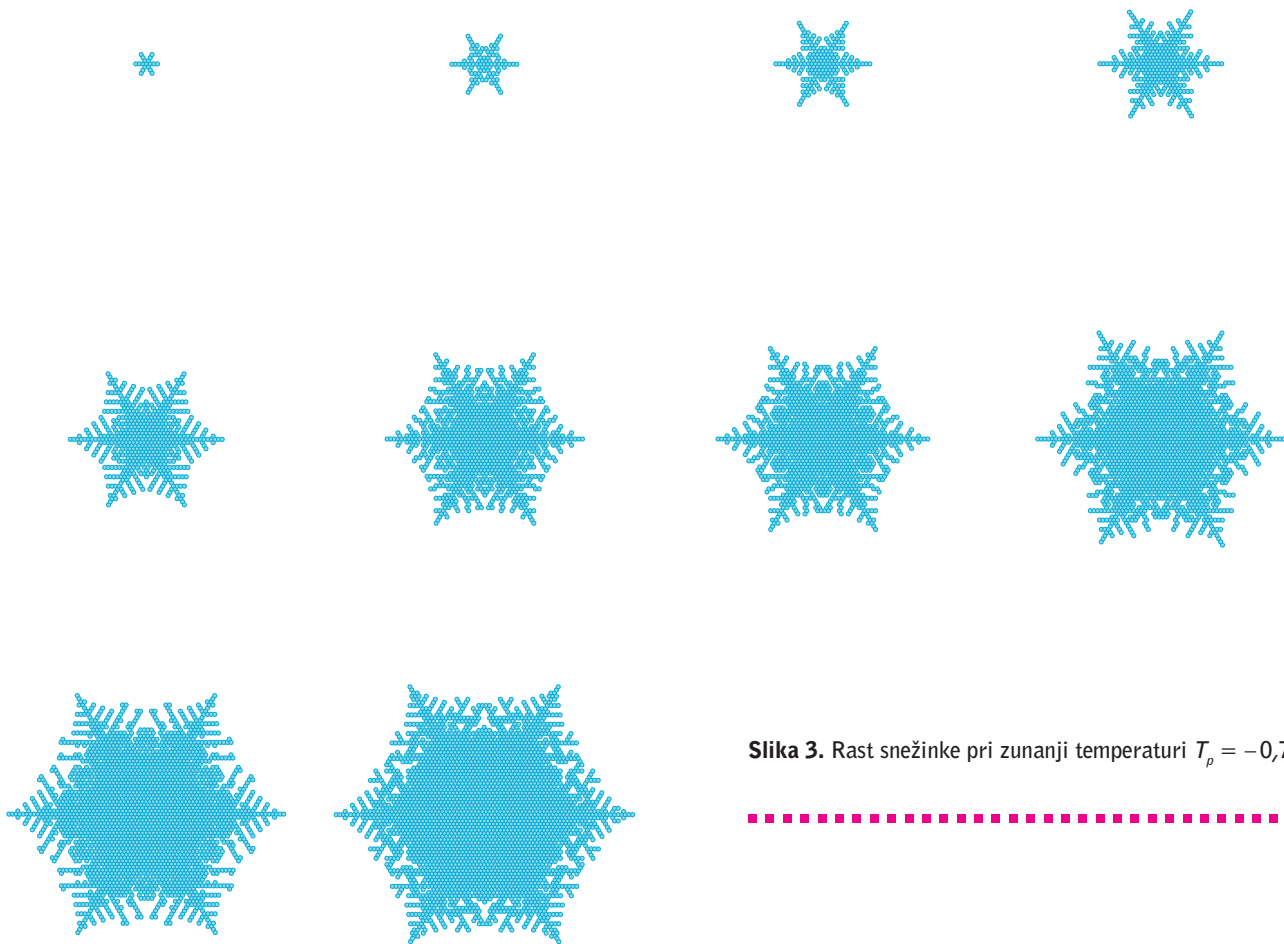


Zanimivo je, da lahko tako zapleten pojav, kot je rast snežink, kar dobro pojasnimo z zelo preprostim računanjem. Naše snežinke so seveda zelo majhne, saj jih sestavlja le nekaj sto molekul. Tudi če si namesto molekul mislimo mikroskopske kapljice, bo primrzovanje kazalo enake značilnosti. Zapleten vzorec nastane zaradi zelo preprostih zakonitosti, ki uravnavajo zmrzovanje. V naravi so seveda razmere precej bolj zapletene, posebno zato, ker snežinke rastejo tudi v debelino. Razmere so v oblakih lahko precej drugačne kot na našem polju vozlišč. Zato najdemo v naravi snežinke, ki jih z našim računom ne moremo pričarati. Na spletni strani <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals> najdemo poleg lepih posnetkov snežink tudi nekaj razlage o njihovi rasti.

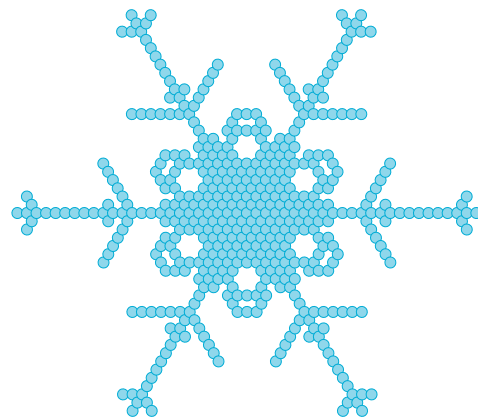
Andrej Likar



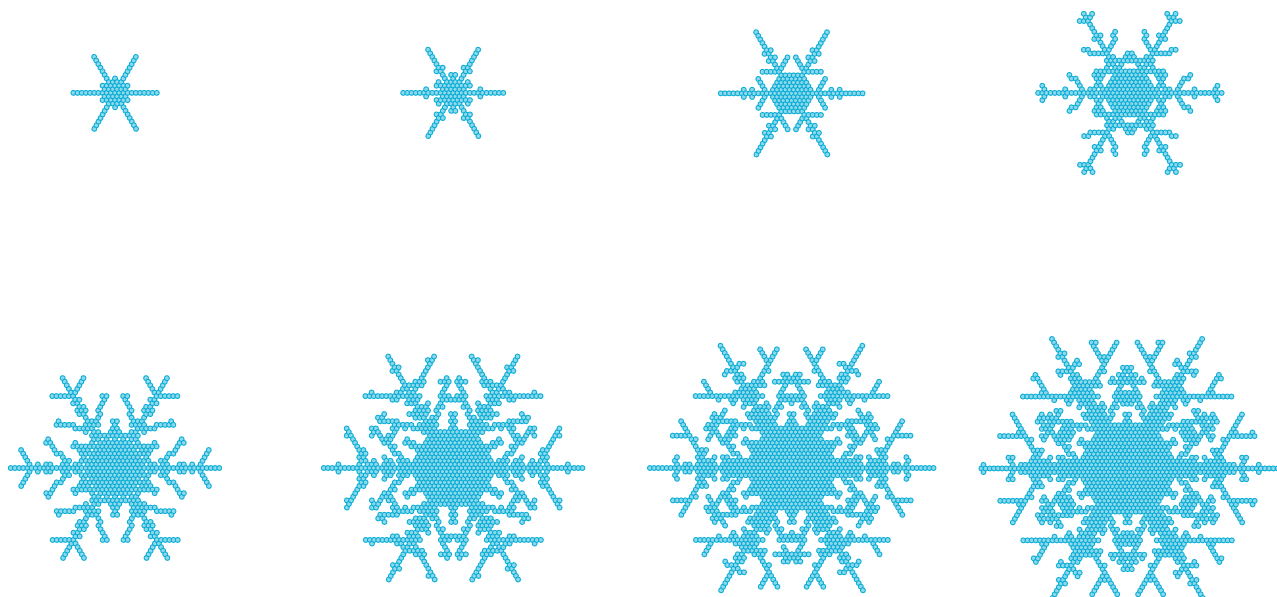
Slika 2. Šestkotna mreža, kamor postavimo molekule vode. Prikazano je vozlišče (i, j) in sosednja vozlišča, ki tvorijo šestkotno mrežo.



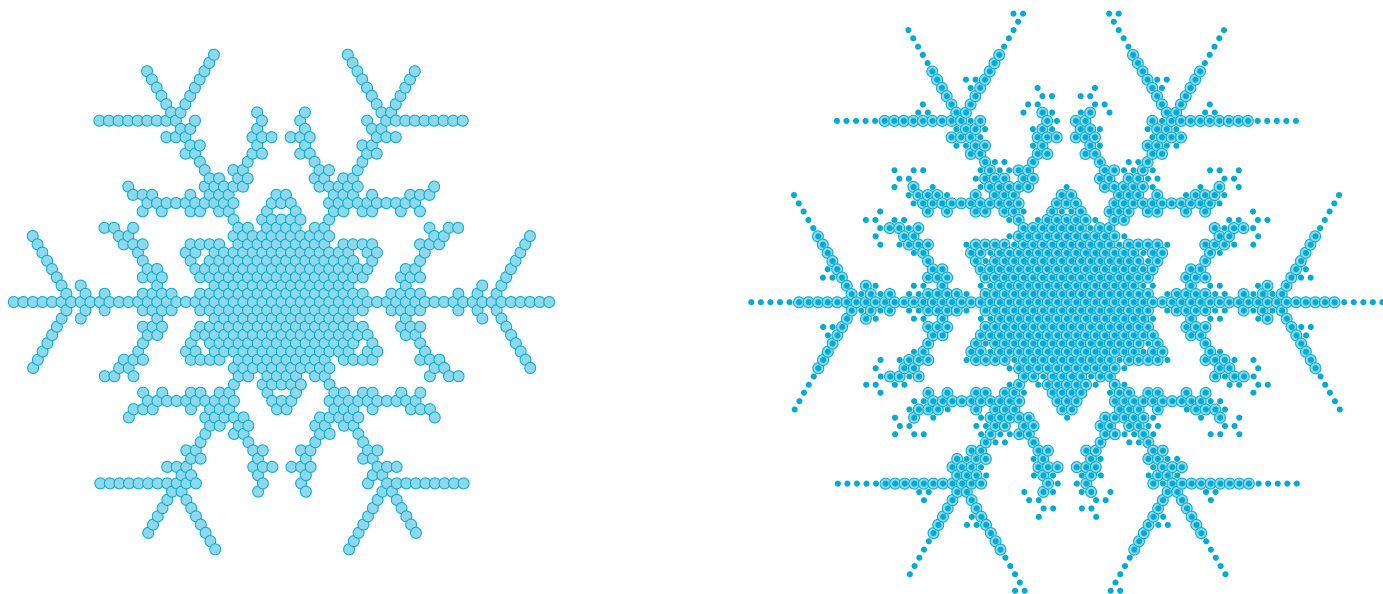
Slika 3. Rast snežinke pri zunanji temperaturi $T_p = -0,7$ K



Slika 5. Rast snežinke pri zunanji temperaturi $T_p = -0.025$ K. Največji snežinki sta narisani na istem mestu, manjša s krožci, večja s pikami, da se vidijo mesta najhitrejše rasti.



Slika 4. Počasnejša rast snežinke pri zunanji temperaturi $T_p = -0,1$ K



100

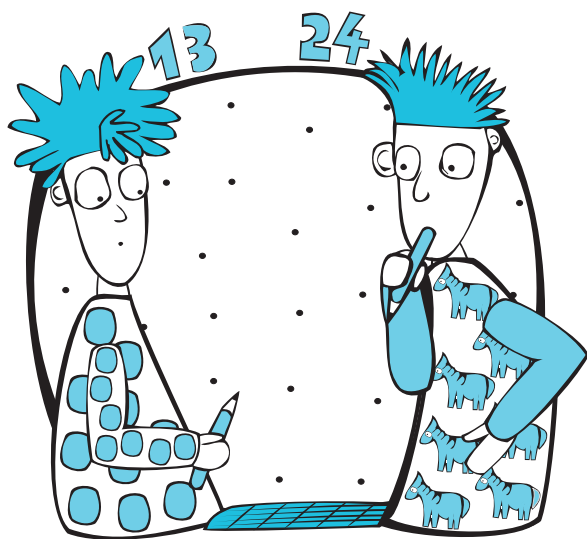


100

BELI PRI ARANU	ITAL. SKLADA- TELJ (GAETANO)	NAJVEČJI DESNI PRITOK VOLGE	Theoremata de numeris primis. hypo. est factor numerorum b, c etc. Quare p bit a nobis, factorem, m vero p nobis etc hypotheses adeoque $\sqrt[n]{a} = l^{\frac{1}{n}} m^{\frac{k}{n}} p^{\frac{r}{n}}$ etc. et reliquis b, c etc.									
TV NARKA ENKA) IKAZ ODRU		GORA NAD ŽELEZNO KAPLO	VISOKA PARKOVNA SMREKA S TOPIMI IGLICAMI, PANČIČEVKA	IGRALNA KARTA Z ŽENSKO PODOBNO	LOJZE LEBIČ	STARA MATI, BABICA						
			PODALJ- ŠANJE PRVOTNEGA ROKA				DRŽAVA V JUŽNI AMERIKI	HLAPLJIVA TEKOČA ORGANSKA SPOJINA	VZDEVEK POKOJNEGA ŠPORTNIKA FRANČA PRIBOŠKA	ANTON NANUT	OPLETENA TREBU- ŠASTA 2-LITRSKA STEKLENKA	
			MESTO NA JUGU ŠVEDSKE				VOJAK PEHOTE					
			LISTOPAD				FRANKOV- SKI KRALJ					
						TEKAČICA STELJIVO OKOLI SADNEGA DREVJA						
		NASPROTJE ZMAGE										
		SREDIŠČE POSAVJA					PUSTNI DAN ZLATO, SREBRO, ?			ANICA KUMER OBRAMBNI MINISTER (KARL)		
	NOVOZE- LANDSKI PTIČ					ABSOLVENT SREDNJE ŠOLE						
	ZLATO					GOZDNA ŽIVAL SL. UMET. ZGODOVINAR (FRANCE)			USTVAR- JALEC UMSKEGA DELA	ITAL. SKAKALKA V DALJAVO MAY	? DOBRE NADE HE, SHE, ?	RAČUNAL. OBLIKOV, MATEVŽ BOKALIČ
RAZIT OLAKI KON PRI RENJ- I HIŠI		RENTGEN DOJK, MAMO- GRAFIJA INTELEKT										ANGLOAM. PLOŠČIN. MERA, PŘIBLIŽNO 40 AROV
	TRETJA POTENCA				FILLOZOF HRIBAR			SUZUKIJEV TERENEC				
	PEVEC KING COLE				TRENJE			ŠKOTSKA REKA				
						NASPROTJE OD BRUTO				? IN KRIK		
						ZNAK ZA ALUMINIJ				ČEDOMIR JOVANOVIČ		
							SIJE NA PLANINCAH					
							STAR AVSTRIJ. KOVANEC					



Vrste in verige – igra za dva



Eden od igralcev v kvadratke izmenoma vpisuje števili 1 in 3, zato ga bomo imenovali **lihi igralec**. Drugi, **sodi igralec**, izmenoma vpisuje števili 2 in 4. Igra poteka takole:

Lihi igralec vpiše v poljubnega od petindvajsetih kvadratkov število 1. Nato vpiše sodi igralec v enega od preostalih kvadratkov število 2. Nadaljuje lihi igralec, ki vpiše število 3, za njim sodi število 4. Na petem koraku vpiše lihi igralec spet število 1, na šestem sodi igralec število 2, nato lihi število 3 itd. Števila vpisujeta seveda le v prazne kvadratke. Nadaljujeta tako

dolgo, da ostane od začetnih petindvajsetih kvadratkov prazen en sam. V ostalih kvadratih so vpisana števila 1, 2, 3 in 4, vsako šestkrat. Možen zaključek vpisovanja števil prikazuje slika 1.

3	3	2	2	1
4	4	3	3	2
3	4	2	2	3
1	4	1	1	1
4	1	4		2

Nato je na vrsti točkovanje. Točke pri-
našajo ustvarjene **vrste** in **verige**. Vrsta
je zaporedje treh ali več kvadratkov z
enakimi številkami, ki si neposredno
sledijo v vodoravni, navpični ali diagonal-
ni smeri. Veriga je poljubna povezana

množica štirih ali več kvadratkov z ena-
kimi številkami. Pri tem imata sosednja
(povezana) kvadratka ali skupno strani-
co ali skupno oglišče. Vrednost vrste ali
verige podaja naslednja tabela:

5 kvadratkov v vrsti	6 točk
4 kvadratki v vrsti	5 točk
3 kvadratki v vrsti	4 točke
6 kvadratkov v verigi	3 točke
5 kvadratkov v verigi	2 točki
4 kvadratki v verigi	1 točka

Vrsti, ki potekata v različnih smereh,
točujemo ločeno, čeprav imata mor-
da skupen kvadrateg. Ločeno točkujemo
tudi verigo in vrsto, četudi je vrsta
del verige. Nekaj možnih porazdelitev
s pripadajočimi točkami prikazuje sli-
ka 2.

	1			
	1		1	
1	1	1		

■ ■ 11 točk

2				
2		2	2	
	2		2	

■ ■ 2 točki

			3	
		3	3	
3				
	3	3		

■ ■ 0 točk

	4	4	4	
		4	4	4

■ ■ 8 točk

Igrico Tri v vrsto verjetno vsi pozna-
te. Pred številnimi drugimi igrami ima
prednost, da za igranje ne potrebujemo
posebnih rekvizitov, zadoščata pisalo in
papir. Ima pa tudi veliko hibo; če igre ne
igramo povsem na slepo, hitro spregleda-
mo preprostost strategije igranja in nas
ne privlači več.

Tokrat si oglejmo njeno zanimivejšo
sorodnico, ki si jo je pred približno 40-
timi leti izmislil tedanji študent William
McGrail iz Massachusettsa. Njen opis
sem našla v knjižici Madachy's Mathe-
matical Recreations avtorja Josepha S.
Madachyja. Imenovali jo bomo Vrste in
verige.

Najpreprostejša oblika je igra za dva
igralca na polju s 5×5 kvadratki.

Za vajo točkujmo še izid na sliki 1. Lihi igralec ima tri enke v vrsti in pet enk v verigi, kar mu prinese 6 točk, ter pet trojk v verigi za 2 točki, skupaj torej 8 točk. Sodi igralec ima pet dvojk v verigi, tri štirice v vrsti in šest štiric v verigi, kar skupaj da 9 točk.

Igro je dobil sodi igralec.

Običajno velja dogovor, da prvi igralec ne sme začeti igre v srednjem kvadratu igralnega polja. V nasprotnem je drugi igralec že na začetku v rahlo slabšem položaju. Dodatno poslabša njegov položaj še dejstvo, da mora odigrati zadnje potezo igre, ki je pogosto nepomembna za končni izid.

Strategija igranja igre Vrste in verige je precej bolj zapletena kot pri igri Tri v vrsto. Seveda lahko igramo tudi bolj ali manj 'na slepo'. Dosedanje izkušnje kažejo, da prinaša v takih primerih obrambna igra statistično več točk kot napadalna. Preverite, če je to res!

Opombe

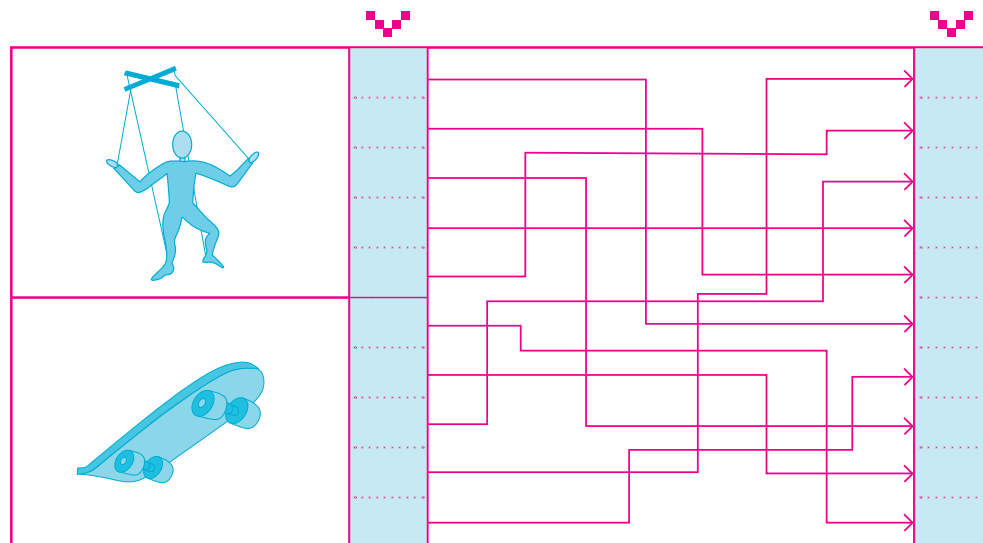
1. Namesto pisanja številčk na papir lahko polagate na igralno ploščo dimenzije 5×5 kartončke s številčkami ali figuricami. Le pripraviti jih morate.
2. Seveda se lahko spoprimate tudi s študijem igralne strategije.
3. Igra je gotovo zanimiv izziv za tiste, ki radi programirajo.

Marija Vencelj

Slikovno uganke

Uganite, kaj predstavljata risbici in prenesite črke s pomočjo nitk v desni stolpec. Rešitev je znani pojem s področja računalništva.

Jože Berdon



Rešitev križanke

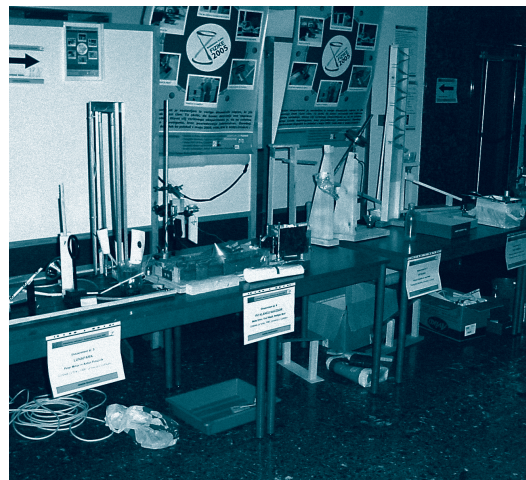


Verižni eksperiment

Zagotovo ste že kdaj razmišljali o čisto svojevrstni napravi - posebnem stroju, ki bi zjutraj namesto vas pospravil posteljo ali preveril, če se v šolski torbi nahaja vse, kar potrebujete za tisti dan. Lahko bi vam, denimo, tudi poiskal copate in pripravil zobno pasto na zobno krtačko. Najbrž si takšno napravo v mislih že kar predstavljate: brcnete v prečko ob robu postelje in iz stropa se, kot rolo na oknu, spustijo posebne ročke, ki zagrabijo odejo, jo dvignejo visoko v zrak in z nje stresejo vse papirčke. Morda ste že celo poskušali skicirati načrt, kako naj bi taka naprava delovala. Ali ste premislili, kako naj bo izdelan mehanizem, ki bo zagotavljal, da bo zravnana odeja lepo padla nazaj na posteljo? Mogoče ga lahko izdelate s pomočjo nekaj vrvic in drugih stvari, ki jih najdete v domači garaži. Povabite še sošolce in prijatelje, da se pridružijo izdelovanju čudežne naprave in prispevajo svoje ideje. Skupaj se prijavite kot ekipa za sodelovanje v Verižnem eksperimentu!

Projekt Verižni eksperiment je ena od pomembnejših aktivnosti namenjenih obeležitvi Svetovnega leta fizike 2005 v Sloveniji. Gre za organizacijo dogodka, podobnega akcijam podiranja dolge kolone domin, le da pri njem namesto padanja domin aktiviramo različne naprave, ki zapovrstjo prožijo ena drugo in tvorijo verigo zanimivih fizikalnih eksperimentov. Kotalijo se kroglice, prelivajo tekočine, nihajo palice, pregorevajo žičke. Vse skupaj ustvarja dramatično vzdušje svojevrstne gledališke predstave o prenosu energije. Veriga je sestavljena iz poljubno izdelanih naprav, ki morajo imeti le to skupno lastnost, da se vsaka izmed njih konča tako, da sproži delovanje naslednje.

Slika 1. Predstavitve Demo verižnega eksperimenta na srečanju DMFA novembra 2004 v Cerknem.



Tovrstnega zabavnega druženja na temo fizike so se pred nekaj leti domislili na Massachusetts Institute of Technology (MIT) v ZDA in je kmalu preraslo v enega izmed najbolj priljubljenih in obiskanih dogodkov na tej univerzi. Leta 2003 je v verigi na MIT sodelovalo 30 skupin, ki so za svoje naprave uporabile raznovrstne predmete: frnikule, mišolovko, punčko Barbie in celo živega zajca. V Sloveniji bomo pod okriljem Društva za matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA) podobno srečanje organizirali 14. maja 2005 v Ljubljani. Projekt je namenjen vsem, ki jih veseli eksperimentiranje s fiziko. Pri udeležbi ni omejitev. Pričakujemo pa, da se bodo odzvali predvsem učenci in dijaki. V skupinah po dva do pet članov z mentorjem, ki je nujen vsaj za osnovnošolce, naj bi pripravili inovativne eksperimente, posamezne člene omenjene verige. Zamisel za potek eksperimenta je prepuščena domišljiji vsake skupine posebej, vezni člen med eksperimenti pa bo kovinska kroglica, ki mora pasti z neke predpisane višine.

Za sodelovanje v verigi se je potrebno prijaviti najkasneje do 28. 2. 2005. Prijavni obrazec in druge koristne informacije se nahajajo na spletni strani Svetovnega leta fizike: <http://www.fizika2005.net>.

Prijavljeni udeleženci bodo po registraciji na dan prireditve izžrebali številko, ki bo pomenila zaporedno mesto njihovega eksperimenta v celotni verigi. S tem bomo dosegli, da bo dogodek čimbolj družaben in vznemirljiv tako za konstruktorje naprav kot za druge obiskovalce prireditve. Najbolj originalne in zanimive eksperimente bomo nagradili.

Vzdušje pred zagonom verige bo zagotovo dramatično. Misliš, da si bo kdo upal staviti, da bo vsa veriga stekla brez posredovanja nepretrgoma od začetka do konca? Verjemi ali ne, bolj kot bo neka skupina napredovala v izdelovanju svojega eksperimenta, manj bo prepričana, da bo šlo vse kot po maslu. Od osnutka do zanesljivo delujoče naprave je namreč precej bolj zahtevna pot, kot si predstavljamo. A ravno v tem je izziv: poskušanje, izkušnje, učenje in spet poskušanje ter končno napredovanje do dovršenega izdelka. Potrebno je vztrajati in verjeti, da fizikalni zakoni zares »delujejo«. To so spoznanja, do katerih se je dokopala večina konstruktorjev, ki so sodelovali pri izdelovanju naprav za tako imenovani Demo verižni eksperiment. Gre za verigo desetih naprav, ki so jih izdelali študentje Fakultete za matematiko in fiziko ter Pedagoške

fakultete Univerze v Ljubljani ter študentje Pedagoške fakultete Univerze v Mariboru. Namen Demo verižnega eksperimenta je s prikazom na javnih mestih pritegniti k opisani aktivnosti čim več ljudi. Njegova prva predstavitev je bila oktobra 2004 v Ljubljani v okviru desetega Slovenskega festivala znanosti. Kasneje si ga je bilo možno ogledati še na občnem zboru DMFA novembra 2004 v Cerknem ter na prireditvi Mladi umi decembra 2004 v Mariboru. Posamične naprave iz Demo verižnega eksperimenta bomo natančneje predstavili v naslednjih številkah Preseka. Dodali bomo tudi podrobnejši opis nekaterih zanimivih fizikalnih pojavov, ki so bili vključeni v njih.

V začetku mednarodnega leta fizike si je Demo verižni eksperiment mogoče ogledati na javni predstavitvi od 7. do 18. marca 2005 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani in od 28. januarja do 23. februarja 2005 na Pedagoški fakulteti v Mariboru. V okviru slednje se je možno dogovoriti tudi za vodene skupinske ogleda (pišite na elektronski naslov: natasa.vaupotic@uni-mb.si). Vse, ki Demo verige še niste uspeli videti, vabim na ogled na eno izmed omenjenih ustanov. Prepričana sem, da vas bodo rezultati študentske fizikalne domišljije prijetno presenetili in da se boste navdušeni nad projektom tudi sami lotili dela ter se zagnali v že dolgo odlašano izdelavo vašega čisto posebnega »stroja za ...«. Nato ga bo potrebno le še dopolniti z veznimi členi in že se lahko 14. maja 2005 uspešno vključite v veliki Verižni eksperiment. Vabljeni k sodelovanju!

Irena Drevenšek-Olenik



Slika 2. Ena od študentskih skupin pred svojo »napravo«.

Kvarkadabra: Zakaj je nebo modro?

Pri Založbi Krtina je v knjižni zbirki KRT izšel zbornik Kvarkadabra: Zakaj je nebo modro? Začasni odgovori na večna vprašanja, v katerem so zbrani prispevki skupine znanstvenikov mlajše generacije, ki raziskovalno delujejo na področju fizike in matematike.

Knjiga je sestavljena kot zbirka odgovorov na preprosta in na prvi pogled celo naivna vprašanja o fizičnem svetu in naravnih pojavih (zakaj je nebo modro, kako nastane plimovanje, kako se lahko neskončno vesolje še naprej širi, ali je mogoče z jedrnico pluti hitreje od vetra). Avtorji v osmih poglavjih z vso resnostjo odgovarjajo na vprašanja in jih interpretirajo kot prave teoretske probleme, pri tem pa se izognejo strogo znanstvenemu jeziku; uporabljajo jezik in slog, ki je razumljiv tudi za bralca brez poglobljenega naravoslovnega znanja. Posebna privlačnost knjige je ta, da so vprašanja, na katera so v zborniku podani znanstveni odgovori, zastavili bralci spletne revije Kvarkadabra – časopisa za tolmačenje znanosti (www.kvarkadabra.net).

Da bi bili odgovori na zastavljena vprašanja še jasnejši in nazornejši, je knjiga, ki vsebuje več kot 320 strani, obogatena s skicami, fotografijami in podrobnim stvarnim kazalom. Podrobnejše informacije o knjigi so predstavljene na spletni strani Založbe Krtina (www.zalozbakrtina.si).

Daniel Svenšek

Pozdrav

Mala šola LaTeXa (prvi del)

L^AT_EX

■ V naslednjih nekaj lekcijah si bomo pogledali, kako napisati dokument s pomočjo LaTeXa. LaTeX je ukazni urejevalnik besedil, kar pomeni, da izgled besedila določamo v samem besedilu s pomočjo ukazov, ne pa vizualno kot v znanih urejevalnikih besedil, npr. Microsoft Word ali OpenOffice.org Writer. Vrsti slednjih urejevalnikov pravimo tudi WYSIWYG (angl. *What You See Is What You Get*), torej »to kar vidiš, to dobiš«, saj izgled besedila določamo kar v programu, ki nam že med urejanjem besedila izpisuje njegov končni izgled. No, z LaTeXom temu ni tako. Kljub temu, da moramo v LaTeXu besedilo urejati s pomočjo ukazov, ima svoje prednosti. Ena ključnih prednosti dokumentov napisanih v LaTeXu je ta, da bo dokument na vseh računalnikih izgledal popolnoma identično, ne glede na to, v katerem operacijskem sistemu si ga ogledujemo, kar je pri urejevalnikih tipa WYSIWYG včasih problematično. Z LaTeXom ne bo teh težav!

■ Kratka zgodovina LaTeXa

Vse se je začelo v poznih 70-ih letih prejšnjega stoletja, ko se je Donald Knuth, profesor računalništva na ameriški univerzi v Stanfordu in med drugim tudi avtor zbirke knjig pod naslovom *The Art of Computer Programming*, odločil, da bo razvil svoje okolje za pisanje strokovnih dokumentov. Poimenoval ga je TeX. Razvil ga je zato, ker ni bil zadovoljen z izgledom in obliko prvih treh knjig prej omenjene zbirke.

TeX je imel in še vedno ima nekaj zelo zanimivih lastnosti, zaradi katerih se je zelo razširil in je še danes med najbolj uporabljenimi načini pisanja dokumentov. Naj omenim samo nekaj teh lastnosti:

- namenjen je bil temu, da ga uporabljajo avtorji sami,
- prišel je iz akademskih krogov in je bil na voljo brezplačno ter
- postal primeren za različne računalniške in operacijske sisteme.

Kot zanimivost povejmo, da ima TeX poseben način označevanja različic, saj se od tretje različice dalje posodobitve označijo z dodajanjem novega decimalnega mesta na koncu, tako da se število asimptotično približuje številu π . Trenutna različica je 3.141592.

LaTeX je posebna različica Knuthovega TeXa, saj ga dopolni z zbirko makrojev in predlog, ki zelo poenostavijo pisanje dokumentov, tako da omogočijo uporabniku, da se bolj osredotoči na strukturo dokumenta kot na pravilno oblikovanje ukazov. To pomeni, da LaTeX še vedno uporablja TeX, sama uporaba njegovih makrojev pa je uporabniku veliko prijaznejša. Tako lahko npr. z enim ukazom zapišemo naslov razdelka v dokumentu, kjer bi v TeXu morali spremeniti velikost pisave, obliko pisave, razmak pred in za naslovom ter verjetno še kaj.



Donald
E. Knuth

$$\frac{1}{A(-\psi, t)} - 1 \int_{-\infty}^0 V^{-1} f \frac{\partial W_0}{\partial \tau} d\tau$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{1+i^2}$$

LaTeX se veliko uporablja v matematičnih, fizikalnih in računalniških krogih za pisanje raznih dokumentov, od člankov do knjig, saj lahko z njim pregledno zapišemo tudi najzapletenejše formule (slika 1).

■ Kaj potrebujem za pisanje dokumentov v LaTeXu

Za pisanje dokumentov v LaTeXu potrebujemo naslednje programe:

- navadni urejevalnik besedil,
- prevajalnik za LaTeX datoteke in
- vsaj enega od programov za pregledovanje izhodnih datotek tipa .dvi, .ps ali .pdf.

Za urejevalnik besedil zadostuje v operacijskih sistemih Windows že program Beležnica. Najdemo pa tudi mnoge brezplačne programe, namenjene pisanju LaTeXovih dokumentov, saj vsebujejo bližnjice za vstavljanje večine osnovnih LaTeXovih ukazov. Osebno uporabljam in priporočam program TeXnicCenter, ki ga najdemo na eni od straneh, naštetih na koncu članka. Program ne le da vsebuje mnoge bližnjice do ukazov, omogoča tudi samodejno nastavitve prevajalnika in pregledovalnikov datotek.

Prevajalnik, ki je najpogosteje uporabljan med uporabniki v Windows okolju, se nahaja v brezplačnem paketu MikTeX, ki ga najdemo na internetni strani, zapisani na koncu besedila. Na voljo je več paketov različnih velikosti, za povprečnega uporabnika zadostuje manjši paket, kar je ugodno tudi za uporabnike s počasnim dostopom do interneta.

Slika 1. Z LaTeXom lahko zapišemo najzapletenejše matematične formule.

Za pregledovanje .dvi datotek paket MikTeX že vsebuje pregledovalnik z imenom Yap. Za datoteke tipa .ps potrebujemo dva brezplačna programa, ki ju prav tako najdemo na internetu. Prvi je GhostScript, drugi je GhostView. Brez prvega drugi ne deluje. Datoteko tipa .dvi pretvorimo v .ps datoteko z dodatnim programom dvips.exe, ki je priložen v paketu MikTeX.

Datoteke tipa .pdf lahko gledamo s pomočjo prav tako brezplačnega programa Adobe Reader. PDF format datotek je dandanes med najbolj priljubljenimi formati za prenašanje besedilnih in podobnih dokumentov med računalniki, kot tudi med različnimi operacijskimi sistemi.

V kolikor želimo uporabljati LaTeX s prej omenjenim urejevalnikom TeXnicCenter, je priporočljivo, da najprej namestimo paket MikTeX, nato pregledovalnike datotek .ps in .pdf (v kolikor jih želimo uporabljati) in na koncu namestimo še omenjeni urejevalnik besedil. Z namestitvijo programov v tem vrstnem redu lahko izkoristimo možnost samodejne nastavitve povezav s prevajalnikom in pregledovalniki.

■ Potek urejanja besedila v LaTeXu

V LaTeXu urejamo besedilo tako, da vključimo ukaze, ki določajo izgled besedila, kar v samo besedilo. Zato poteka pisanje dokumentov v LaTeXu v naslednjih korakih:

1. Ustvarimo LaTeX vhodno datoteko. Le-ta vsebuje besedilo ter ukaze za oblikovanje in mora biti navadna tekstovna datoteka s pripono .tex.
2. Izvorno datoteko prevedemo z ukazom **LaTeX.exe datoteka.tex**, kjer je **datoteka.tex** ime datoteke, v kateri je shranjen naš dokument. Datoteko v programu TeXnicCenter prevedemo preko menuja *Build*, nato *Current File* in *Build Output*, za kar imamo v orodni vrstici tudi bližnjico. Prevajalnik, če v dokumentu ni napak, tvori izhodno datoteko z imenom **datoteka.dvi**; v primeru, da se napake pojavijo, jih moramo odpraviti ter datoteko ponovno prevesti. Prevajalnik javi, kje in kaj je napaka, vendar se je na javljanje napak potrebno malo navaditi.
3. Izhodno datoteko si ogledamo z ustreznim programom (Yap), kar naredimo z ukazom **yap.exe datoteka.dvi**¹. V programu TeXnicCenter si lahko izhodno datoteko ogledamo preko menuja *Build* in nato *View output*.

¹ Programa LaTeX.exe in yap.exe morata biti nastavljena v poti okolja, da ju operacijski sistem lahko najde, v kolikor ju izvajamo preko konzolnega okna.

■ Moj prvi dokument

Poglejmo si naslednjo vhodno LaTeX datoteko:

- `\documentclass[12pt, a4paper]{article}`
`\begin{document}`

Pozdravljen svet! To je naš prvi dokument v LaTeXu.
`\end{document}`

Kar v končni .dvi datoteki izgleda kot

Pozdravljen svet! To je naš prvi dokument v LaTeXu.

Dokument v LaTeXu ima natančno določeno strukturo vhodne datoteke. Oglejmo si jo kar na prejšnjem primeru.

Vsaka vhodna datoteka se začne z vrstico `\documentclass[...]{...}`. Med zavita oklepaja `{}` zapišemo vrsto dokumenta, ki ga ustvarjamo. Osnovni tipi LaTeX dokumentov so: **article** za strokovne članke, predstavitev, kratka poročila; **report** za poročila z več poglavji, manjše knjige, seminarske in raziskovalne naloge; **book** za knjige; **slides** za prosojnice in **letter** za pisma. Med oglatima oklepajema `[ ]` zapišemo dodatne nastavitve za vrsto dokumenta, ki ga želimo uporabljati. Nastavitve zajemajo velikost osnovne pisave (npr. 10pt, 11pt, 12pt), velikost papirja (npr. a4paper, a5paper, letterpaper) ter še mnoge druge.

Telo besedila se prične z `\begin{document}`, ki mu sledi celotno besedilo prepleteno z LaTeXovimi ukazi. Na koncu dokumenta moramo imeti ukaz `\end{document}`.

Poglejmo še telo dokumenta na prejšnjem primeru. Le-to je vsebovalo naslednjo vrstico:

- Pozdravljen svet! To je naš prvi dokument v LaTeXu.

Na primeru lahko vidimo, da šumnikov v osnovnem LaTeXu ne moremo pisati direktno, podamo pa jih lahko z določenim ukazom. Vsi ukazi v LaTeXu se pričnejo z znakom `\`, ki mu sledi ime ukaza. V primeru šumnikov je to ukaz `\v`, ki mu sledi ime črke, nad katero naj se izpiše strešica. Strešico lahko v LaTeXu zapišemo nad poljubnim znakom oz. črko, ne samo nad c, s in z.

Naslednje zaporedje ukazov:

- `\v c, \v s, \v z, \v C, \v S, \v Z, \v a, \v V`

v končni .dvi datoteki izgleda kot

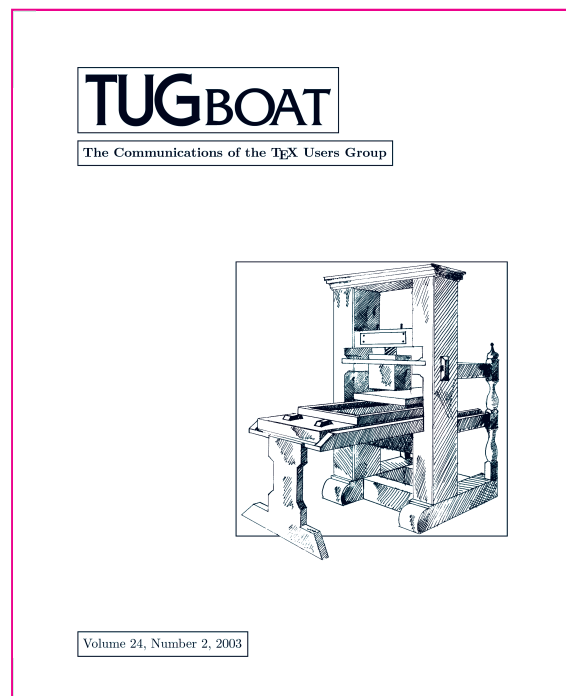
- č, š, ž, Č, Š, Ž, ā, V

Ukaz `\LaTeX{}` izpiše besedo latex v posebni obliki (kot LaTeX), pri čemer doda pripono, ki je med zavitimi oklepaji.

Pri urejanju dokumentov z LaTeXom se moramo zavedati naslednjih nekaj pravil:

- Ne glede na to, koliko presledkov (tabulatorjev ali prelomov vrstic) si sledi v vhodni datoteki, jih LaTeX obravnava enako, kot če bi jih zapisali enkrat samkrat.
- Ena ali več praznih vrstic v LaTeXu prične nov odstavek.
- LaTeX razlikuje med velikimi in malimi črkami, npr. ukaz `\V` c ni enak ukazu `\v c`.
- Nekateri simboli imajo v LaTeXu poseben pomen, zato jih ne smemo neposredno dodajati v besedilo. Ti simboli so: `# % & { } \` in jih vse, razen poševnice nazaj, v LaTeXu zapišemo tako, da pred njimi zapišemo simbol `\`, npr. simbol

Tugboat, revija za uporabnike TeX-a izhaja od leta 1980



% izpišemo z ukazom \%. Poševnico nazaj izpišemo z ukazom `\backslash$`.

Za konec pogledjmo še en primer in njegov izpis (slika 2).

```
\documentclass[12pt, a4paper]{article}
\begin{document}
```

Ne glede na to koliko presledkov
zapišem med posameznimi
besedami,
v končnem dokumentu je
vedno izpisan samo en.

Ena ali več praznih vrstic pa prične nov
odstavek,
kjer je na začetku
vedno prva beseda zamaknjena.

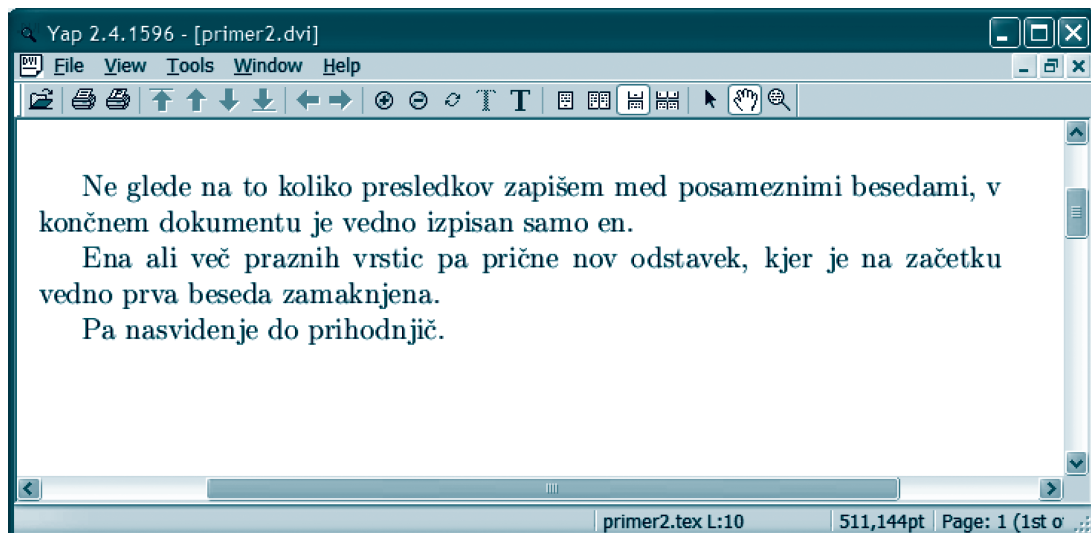
Pa nasvidenje do prihodnjič.
`\end{document}`

V drugem delu si bomo pogledali nekaj podrobnosti urejanja besedila. Dodatne informacije za prvi in ostale dele ter omenjene programe lahko najdete na straneh:

- <http://www.wikipedia.org> – spletna enciklopedija
- <http://www.miktex.org> – domača stran projekta MikTeX
- <http://www.toolscenter.org> – domača stran programa TeXnicCenter
- <http://www.adobe.com> – domača stran pregledovalnika PDF datotek
- <http://www.cs.wisc.edu/~ghost> – domača stran programov za pregledovanje PS datotek
- <http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/LaTeX/lshort.ps> – slovenski prevod knjige za LaTeX z naslovom *Ne najkrajši uvod v LaTeX2e*

Andrej Taranenko

<http://zaloznistvo.dmfa.si/presek/>



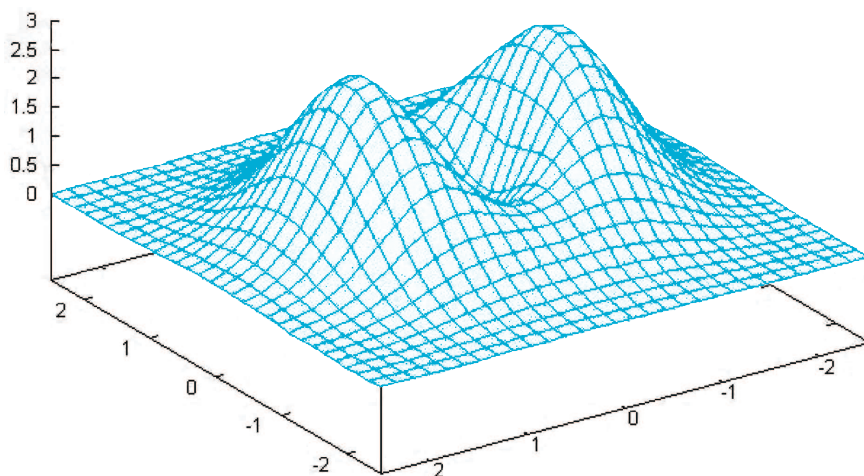
Slika 2. Izgled izhodne datoteke zadnjega primera v programu YAP.

Brezplačni matematični programi

V računalništvu se pogosto srečamo z vezavo strojna-programska oprema. Dejstvo je, da je strojna oprema brez programske ravno toliko kot avtomobil brez motorja. Torej brez programske opreme nikakor ne moremo uresničiti svojih idej. To pa ni edini problem, saj vemo, da je programska oprema lahko zelo draga in si je velikokrat ne moremo privoščiti. Na srečo nas vseh obstajajo tudi prosto dostopni (angl. *freeware*) programi, ki jih lahko uporabljamo za delo. Žal si ne vzamemo dovolj časa, da bi preiskali svetovni splet, ki nam ponuja brezplačne programe. Običajno se odločimo za nakup dragih programov, ki so »bolj znani«.

Risanje grafov in računanje

Področje matematike in računalništva zahteva veliko računanja in risanja grafov raznih funkcij. Pogosto je to zelo zahtevno opravilo za človeka, zato se radi poslužujemo programov, ki nam to delo olajšajo. V nadaljevanju si bomo ogledali dva zelo priročna programa, namenjena operacijskemu sistemu Windows, ki zmoreta prav to. Povezave do predstavljenih in mnogih drugih brezplačnih programov lahko najdete na naslovih, podanih ob koncu članka.



Slika 1. Graf funkcije $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-(x^2+y^2)}$ narisana z GnuPlotom

GnuPlot

GnuPlot je program, ki odlično obvlada risanje ravninskih grafov, omogoča pa tudi risanje prostorskih ploskev. Na prvi pogled je precej neprijazen do uporabnika. Marsikoga bo odvrnilo tudi dejstvo, da gre za program, ki zahteva pisanje ukazov. Vsi ukazi pa so prav tako shranjeni v orodni vrstici, tako da jih lahko enostavno vstavljamo v ukazno polje s klikom na miško.

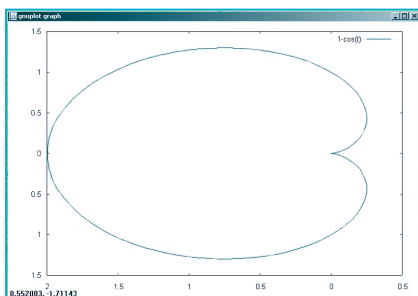
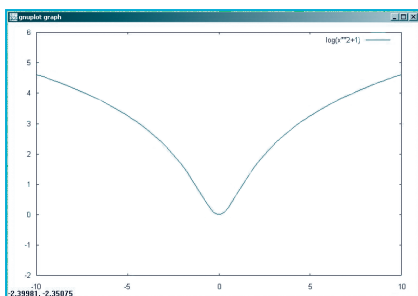
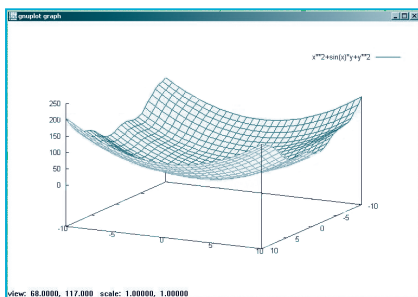
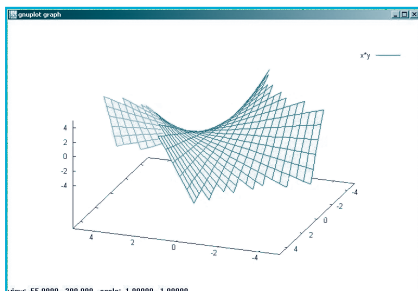
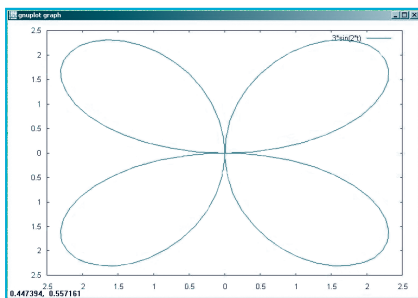
Pa si pogledjmo, kako uporabljamo osnovne funkcije. Program operira z osnovnimi operatorji za seštevanje (+), odštevanje (−), množenje (*), deljenje (/) in potenciranje (**). Za zapisovanje funk-

cij ene spremenljivke uporabljamo spremenljivko x , za zapisovanje funkcij dveh spremenljivk pa spremenljivki x in y .

Program uporablja naslednji nabor osnovnih funkcij:

- trigonometrične funkcije $\sin$, $\cos$, $\tan$,
- krožne funkcije asin , acos , atan ,
- eksponentno in logaritemsko funkcijo z osnovo e $\exp$, $\log$,
- hiperbolične funkcije $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$.

S pomočjo teh funkcij lahko zapišemo poljubno sestavljeno funkcijo.



Primer. Funkcijo ene spremenljivke $\log \frac{x^2-4}{x+1}$ bi zapisali z ukazom

■ ■ `log((x**2-4)/(x+1)).`

Graf funkcije ene spremenljivke narišemo z ukazom `plot f(x)`, npr. `plot sin(x)`. Za risanje grafa funkcije dveh spremenljivk uporabimo ukaz `splot f(x,y)`, npr. `splot (x**2+3*y**2)*exp(1-(x**2+y**2))` (slika 1).

Kadar želimo, da program nariše funkcijo le na določenih intervalih, zapišemo pred funkcijo ene spremenljivke ukaz `[x1:x2][y1:y2]`, pred funkcijo dveh spremenljivk pa ukaz `[x1:x2][y1:y2][z1:z2]`, kjer so `[x1:x2]` interval za spremenljivko `x`, `[y1:y2]` interval za spremenljivko `y` in `[z1:z2]` interval za spremenljivko `z`.

Primer. Ukaz `plot[-pi/2:pi/2][-10:10] tan(x)` bo narisal funkcijo $f(x)=\tan(x)$ le na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ z zalogo vrednosti `z` intervala `[-10, 10]`.

Program lahko riše tudi grafe funkcij, ki so podane v polarnem zapisu. Preden to storimo, moramo programu povedati, da rišemo v polarnem načinu. Polarni način omogočimo z ukazom `set polar`. Izključimo ga z ukazom `set nopolar`. Neodvisna spremenljivka `x` se nadomesti s spremenljivko `t`. Pri polarnem zapisu gledamo odvisnost razdalje od izhodišča, ko kot preteče 360° .

Primer. Narisati želimo krožnico, podano v polarnem zapisu. Razdalja od

izhodišča je pri krožnici vedno konstanta, ker so na krožnici točke, ki so enako oddaljene od izhodišča. Če želimo narisati krožnico s polmerom 1, bomo izvedli naslednje ukaze:

`set polar`

`plot 1`

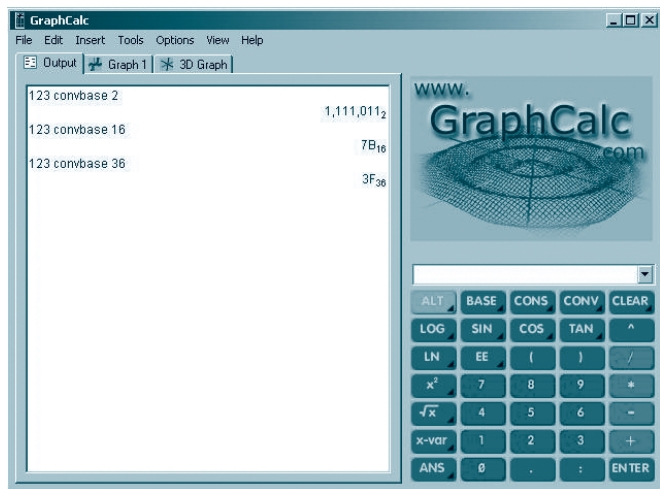
Kot rezultat dobimo krožnico s polmerom 1.

Pogledali smo si nekaj preprostih primerov z GnuPlotom. Program ponuja tudi druge uporabne funkcije (npr. numerično računanje podatkov, parametrično risanje grafov). Predstavljeno programsko orodje je zelo dobra izbira in olajša delo tudi pri najzahtevnejših primerih.

GraphCalc

Prav gotovo ni nikogar izmed nas, ki ne bi poznal namiznega računalja, vključnega v okolju Windows. Gre za uporaben program, vendar, kot bomo videli, ga GraphCalc prekaša v vseh pogledih. Poleg tega, da je brezplačen, je zelo uporaben in uporabniku prijazen. Že na prvi pogled GraphCalc naredi na nas lep vtis, ko pa z njim začnemo računati, ga ni več mogoče izpustiti iz rok.

Kaj pravzaprav GraphCalc je? Povedali smo že, da vsebuje podobne funkcije kot Windows računaljo. Ob tem omogoča še zapisovanje funkcij, katerih grafe lahko tudi narišemo. V svoji osnovi deluje program kot čisto navadno računaljo. Vse osnovne operacije so podobne kot v drugih podobnih programih. Operatorje preprosto vnašamo preko tipkovnice ali s klikom na ustrezen gumb v programu. Program vsebuje tudi nabor elementarnih matematičnih funkcij, ki jih lahko vnašamo preko orodne vrstice v programu. Kliknemo **Insert** in izberemo funkcijo. Med funkcijami, ki so na voljo, najdemo trigonometrične, potenčne, korenske, logaritemske in eksponentne funkcije.



Grafe funkcij si lahko ogledamo pod zavihki **2D Graph** in **3D Graph**. Ko želimo ponovno delati v numeričnem načinu, prekllopimo na zavihek **Output**.

Pomembna funkcija GraphCalca je pretvorba številskih sistemov. Tako lahko število zapisano v desetiškem sistemu pretvorimo bodisi v število zapisano v binarnem (dvojiškem) bodisi v katerem koli drugem številskem sistemu z osnovno med 2 in 36.

Primer. V oknu **Output** vnesimo število 123, ki bi ga radi izpisali v dvojiškem sistemu. Kliknemo na gumb **Base**, nato na **Convert To Base** in izberemo binarno bazo. Program izpiše v oknu **123 convbase2**. Če pritisnemo **enter**, dobimo zapis števila 123 v dvojiškem sistemu, in sicer 1111011₍₂₎.

Ker se pogosto ukvarjamo tudi z ravninskimi liki ali prostorskimi telesi in nas zanimajo njihove ploščine oziroma prostornine, je GraphCalc priročen za računanje le-teh. To naredimo tako, da pokličemo določeno skripto, ki je programirana za računanje posamezne lastnosti objekta (ploščina lika, volumen in površina telesa). Skripte kličemo tako, da v programu kliknemo na **Tools** in izberemo **Script Library**. Nato izberemo lastnost, ki jo želimo izračunati.

Nazadnje omenimo še reševanje enačb. GraphCalc je priročen tudi pri reševanju tega problema. Rešuje algebrske enačbe z eno spremenljivko.

Primer. Rešiti želimo enačbo $x^2 - 4 = 0$. V orodni vrstici kliknemo na **Tools** in nato **Equation Solver**. Odpre se nam novo okno, kjer v polje **Expression** vnesemo našo enačbo. V polje **Initial guess** pa vnesemo rešitev enačbe, ki je po naši oceni najbolj verjetna. S pritiskom na gumb **Solve** dobimo rešitev enačbe. Kot vemo, ima naša enačba dve rešitvi, in sicer -2 in 2 . Če za verjetno rešitev vnesemo 1 , nam bo program vrnil rezultat 2 (slika 2), zato ker je izračunana rešitev najbližja ver-

jetni rešitvi. Če bi ugibali rešitev bližje -2 , bi program vrnil slednjo.

Kot smo videli, ima GraphCalc nekaj zanimivih funkcij. Na voljo so še mnoge druge funkcije, ki jih lahko preiskusite sami. Program je enostaven za uporabo in predstavlja solidno programsko rešitev za računanje in risanje grafov. Težave nastopijo le pri risanju težkih grafov, saj potrebuje več časa.

■ Uporabiti ali ne uporabiti

To je vprašanje, ki si ga postavi vsak, ki se sreča z računalnikom. Dejstvo je, da brez nekaterih programov ne moremo, pa naj se še tako trudimo. Toda veliko plačljivih programov je nadomestljivih s povsem preprostimi in brezplačnimi programi, ki jih lahko najdemo na internetu, npr. na straneh projektov **SourceForge** in **Ofset**. Res je, da so manj kompleksni po zgradbi in da morebiti nudijo manj funkcij, toda še vedno jih je dovolj, da pomagajo uresničiti željeno idejo. Torej, kaj še čakamo?

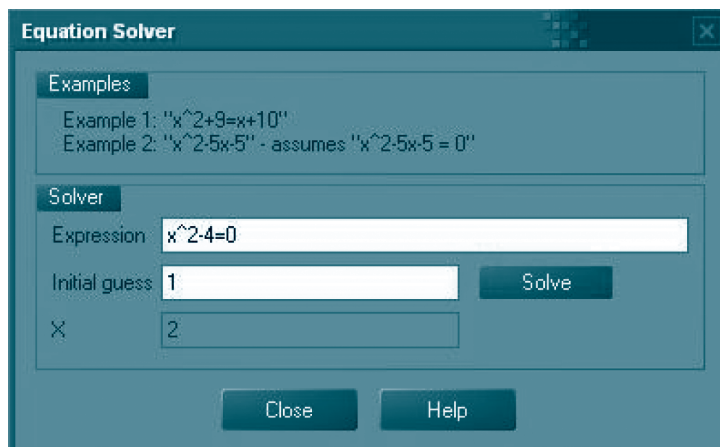
■ Povezave

- <http://gcalc.sourceforge.net/index.shtml>
- <http://www.gnuplot.info>
- <http://www.ofset.org>
- <http://www.sourceforge.net>

Marko Jakovac



Slika 2. Reševanje enačbe v GraphCalcu





Gauss in astronomija

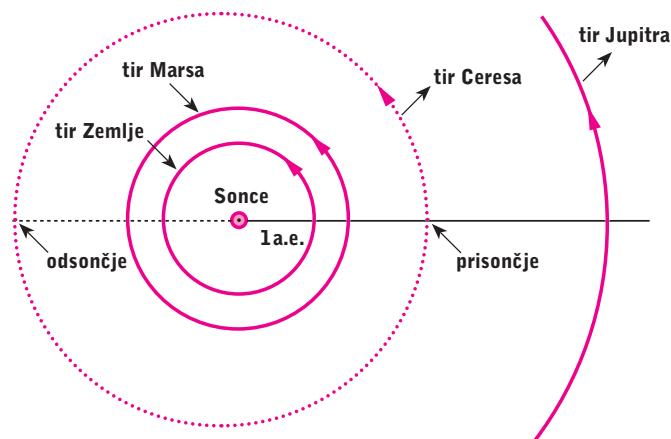
Zakaj in kdaj se je Gauss (1777 – 1855) začel zanimati za astronomijo, so raziskovalci njegovega življenja in dela razpravljali v veliki meri. Z deli Keplerja, Galileja in Newtona je astronomija postala tista veja znanosti, kjer je bilo moč uporabljati znanje matematike. Ta tradicija se je nadaljevala v delih Eulerja, d'Alemberta, Clairauta, Lagrangea, Laplacea. Matematiki so torej lahko računsko ugotavljali določena dogajanja v vesolju, jih potrjevali in celo napovedovali nebesne dogodke in pojave, kot so mrki, navidezna srečanja planetov, prihodi kometov v bližino Sonca.

Gauss se je zgodaj začel zanimati tudi za astronomijo. Nekaj astronomskih opazovanj je opravil že v svojem rojstnem kraju Braunschweigu. Del svoje denarne podpore, ki jo je dobival od deželnega kneza, je porabil za nakup sekstanta, s katerim je opravil nekaj meritev. Ko je bil v Göttingenu, je dalj časa iskal računsko nalogo, v kateri bi obravnaval primerno zahteven astronomski problem. Tedaj je objavil način, kako izračunamo čas nastopa velike noči in drugih verskih praznikov.

Prilika za reševanje dosti zahtevnejše naloge se je pokazala leta 1801. Dne 1. januarja 1801 je v Palermu astronom Piazzi (1746 – 1826) pri sestavljanju svojega zvezdnega kataloga odkril do tedaj neznano zvezdo 8. magnitude. Po 40-dnevnem sistematičnem opazovanju pa jo je nenadoma »izgubil«. Piazzi se je obrnil na najpomembnejše evropske astronome tedanjega časa s prošnjo, da bi mu pomagali najti »izgubljeno zvezdo«. Njegova prošnja je na začetku naletela na gluha ušesa.

V mesecu juniju 1801 pa je ta vest prišla do astronoma von Zacha (1754 – 1832), ki je v tem času izdajal edino evropsko astronomsko revijo. Zach je takoj pograbil vest in izrekel hipotezo, da »gre za davno domnevan planet med Marsom in Jupitrom in, kot se zdi, je zdaj ta novi veliki planet odkrit«. Da bi se Zachova hipoteza izkazala za pravilno, bi morali na vsak način poiskati ta »izgubljeni« planet. Da pa bi ga ponovno našli, bi bilo treba ugotoviti njegov tir gibanja v prostoru. Izračunati elemente eliptičnega tira iz Piazzijevih opazovanj navideznega tira v kotni dolžini 9, je bila naloga, ki je daleč presejala računske sposobnosti astronomov tedanjega časa. Tega preprosto ni znal nihče.

Septembra 1801 je Gauss pustil vne-
mar vsa svoja druga opravila. Začel je z računanjem tira »izgubljenega planeta«. Novembra so bili računi zaključeni, objavljeni pa že v decembrski števil-



Slika 1. Tir gibanja planetoida Ceresa; Gauss je prvi izračunal elemente njegovega tira. Med elemente tira štejemo npr. veliko polos (pri Ceresu znaša 2,8 a.e.) in ekscentričnost (0,08) eliptičnega tira, obhodni čas okrog Sonca (1681 dni), čas prihoda planetoida v perihelij, dolžino dvižnega vozla, argument perihelija, naklonski kot (10,6).

ki Zachove astronomske revije. V noči od 31. decembra 1801 na 1. januar 1802, natanko eno leto po Piazzijevem odkritju, je znani nemški astronom Olbers, ki se je opiral na Gaussove podatke, na predvidenem mestu na nebu našel iskani »planet«, pozneje imenovan Ceres (Cerera). To je bila prvovrstna senzacija (slika 1).

Dne 25. marca 1802 je Olbers nato odkril še en tak »planet«, imenovan Palas (Palada). Spet je Gauss na hitrico izračunal njegov tir in dokazal, da tudi ta leži med Marsovim in Jupitrovim tirom. S tem je bil odkrit drugi mali planet (planetoid, asteroid).

Gaussova računska metoda, po kateri iz opazovanj navideznega tira »planeta« dooločimo resnični tir v prostoru, je tako postala za astronome učinkovita in nesporna. Gaussov sloves je s tem dodatno zrasel. Eden od znakov priznanja je bil, da so ga takoj izbrali za dopisnega člana peterburške Akademije nauk. Pripravljali so mu tudi mesto direktorja Peterburškega observatorija. Gaussu se je zdelo imenitno, da so ga povabili v kraj, kjer je nekoč delal znameniti Euler, in je že mislil na preselitev. Ta čas pa si je Olbers tudi zelo prizadeval, da bi obdržali Gausso v Nemčiji. Že leta 1802 je predlagal kuratorju göttingenske univerze, da povabi Gausso na službeno mesto pravkar postavljenega tamkajšnjega observatorija. Tja je Gauss potem tudi odšel. Sprejel je mesto direktorja astronomskega observatorija ter hkrati profesorja matematike in astronomije na univerzi v Göttingenu, kjer je ostal do konca svojega življenja.

Leta 1809 je izšlo v izpiljeni obliki njegovo slavno, v latinščini napisano delo Teorija gibanja nebesnih teles, ki kroži

jo po stožnicah okrog Sonca (Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium). V njem je Gauss natančno podal in pojasnil svojo metodo izračunavanja elementov planetnih tirov. Da bi bralce prepričal o učinkovitosti oziroma o matematični moči svoje metode, je za zgled ponovil izračun tira kometa iz leta 1769, ki ga



je svoj čas v treh dneh neprestanega težavnega računanja določil Euler. Gauss je za izračun elementov istega tira kometa potreboval eno uro. V tem delu je Gauss tudi pojasnil svojo znamenito metodo najmanjših kvadratov.

Posebna zanimivost v zvezi s to knjigo pa je naslednja. Knjigo je napisal že leta 1807. Do zamude je deloma prišlo zaradi bojazni izdajatelja, da v nemškem jeziku napisana knjiga ne bo našla dovolj odjemalcev, deloma pa tudi zato, ker jo je Gauss iz domoljubnih nagnjenj zavrnil tiskati v francoščini. Tako so našli kompromis, knjigo so izdali v latinščini. Poleg nekaj tiskanih prispevkov je to edina Gaussova knjiga o astronomiji.

Leta 1810 je dobil Gauss premijo pariške akademije znanosti, zlato medaljo londonskega Kraljevega društva in bil izbran v nekoliko akademij. Dovolj posla z astronomijo je imel do konca svojega življenja. Tako so tir znamenitega in množično opazovanega kometa

iz leta 1812, ki naj bi napovedal požar Moskve, izračunali po Gaussovi metodi. Dne 28. 8. 1851 je Gauss opazoval tudi Sončev mrk.

Gauss je imel številne učence, ki so postali znani astronomi. Med njimi so bili Schumacher, Gerling, Nikolai, Struve. Tudi dopisoval se je z vrsto pomembnih astronomov, imel redna predavanja iz astronomije (čeprav ni preveč rad predaval), natisnil je tudi številne recenzije.

■ Še tri naloge o planetoidu Ceresu

1. Obhodni čas Ceresa okrog Sonca je 1681 dni. Izračunaj dolžino velike polosi njegovega eliptičnega tira okrog Sonca in jo izrazi v astronomskih enotah (a.e.), t. j. razdaljah Zemlja-Sonca. S to nalogo preveriš pravilnost zapisa pod sliko 1.

2. Izračunaj največjo in najmanjšo oddaljenost planetoida od Sonca, če je ekscentričnost njegovega tira gibanja $e = e/a = 0,08$, kjer e pomeni dolžinsko ekscentričnost (oddaljenost gorišča elipse od njenega središča).

3. Izračunaj povprečno hitrost Ceresa na njegovem tiru. Kolikokrat je hitrost planetoida v priončju večja od njegove hitrosti v odsončju (glej sliko 1)? Za astronomsko enoto vzemi kar okroglo vrednost 150 milijonov km.

Marijan Prosen

Slika 2. Tir planetoida Jurijvega (zaporedna številka 14966), ki ga je 30. 7. 1997 na Observatoriju Črni Vrh odkril naš astronom Herman Mikuž. Obhodni čas planetoida je približno 3,5 leta, premer pa okoli 5 km. Črtkani del tira leži pod ekliptiko (ravnina tira gibanja Zemlje okrog Sonca) ostali del tira pa nad njo. Naklonski kot ravnine tira planetoida na ekliptiko pa je blizu 9.

Rešitve

Hitrost planetoide v prisojstvu je približno 1,2-krat večja od njegove hitrosti v odsvoju.

$$\frac{v_{pr}}{v_{od}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1-0,08}{1+0,08} = 1,2.$$

$$v_{pr} \cdot \Delta t(a-a\varepsilon) = v_{od} \cdot \Delta t(a+a\varepsilon), \text{ pa sledi}$$

Po drugem Keplerjevem zakonu, ki pravi, da zveznica Sonce-planet opiše v enakih časih enake ploščine, da sta torej ploščini v prisojstvu in odsvoju enaki,

$$v = \frac{\text{čas}}{\text{pot}} = \frac{t}{2\pi a} = \frac{1681 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}}{2\pi \cdot 2,8 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ km}} = 18 \text{ km/s}$$

Povprečna hitrost planetoide je 3. Ker se tir planetoide zelo malo razlikuje od krožnice, bomo zaradi preprostosti pri računanju upoštevali kar gibanje po krožnici s polmerom a . manjša (prisojstvo) pa $a-a\varepsilon=2,6 \text{ a.e.}$

Sonca je $a+a\varepsilon=2,8 \text{ a.e.}$, $0,2 \text{ a.e.}$, naj- Največja oddaljenost (odsojstvo) planetoide od

$$e = \varepsilon \cdot a = 0,08 \cdot 2,8 \text{ a.e.} = 0,2 \text{ a.e.}$$

2. Sonce leži v gorišču eliptičnega tira planetoide. Od središča elipse je gorišče pomaknjeno za dolžinsko ekscentričnost

$$\text{Čas } t \text{ pretvorimo v leta in dobimo } a = (4,6)^{2/3} \text{ a.e.} = 2,8 \text{ a.e.}$$

$$a = (t/\text{leto})^{2/3} \text{ a.e.}$$

$$a^3/t^2 = \text{konstantno} = (1 \text{ a.e.})^3/(\text{leto})^2, \text{ sledi}$$

1. Iz tretjega Keplerjevega zakona, ki pravi, da je količnik kuba velike polosi a^3 njegovega eliptičnega tira in kvadrata obhodnega časa t^2 planeta za vse planete konstantno število, torej

Leto 2005 so fiziki razglasili za leto fizike, matematiki bi ga lahko za Gaussovo leto, v astronomiji pa ima Gaussovo leto že povsem opredeljen pomen. To je čas 365,2568983 dneva in zelo spominja na trajanje enega leta, tako da je nekako povezan z gibanjem Zemlje okrog Sonca.

In prav zares. Če brezmasni delec obkroži telo ene Sončeve mase po nemojenem eliptičnem tiru z glavno polosjo enako eni astronomski enoti, tj. razdalji Zemlja-Sonce, tedaj je njegov obhodni čas enak Gaussovemu letu. Njegovo vrednost izračunamo iz Gaussove gravitacijske konstante $k = \sqrt{G}$, kjer je G splošna gravitacijska konstanta $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$, in tretjega Keplerjevega zakona takole:

$$\text{Gaussovo leto (v dnevih)} = 2\pi/k,$$

če je k izražen v sistemu enot: masa Sonca M , trajanje srednjega Sončevega dne d in astronomska enota a , tako da je

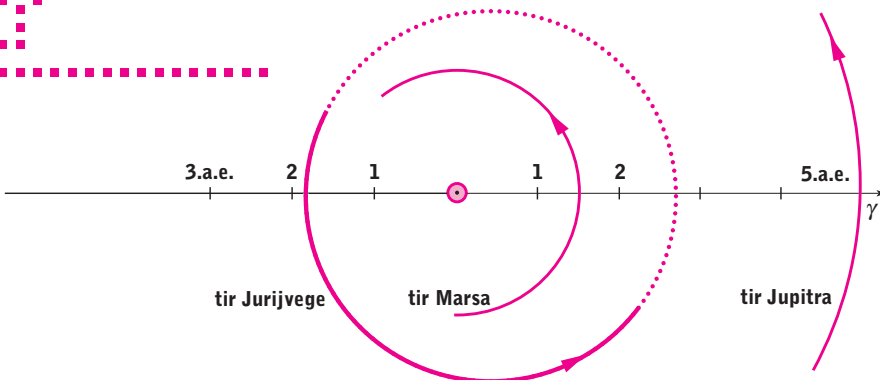
$$k = 0,017202099 \text{ a}^{3/2}/M^{1/2} \text{ d.}$$

Leta 1976 je Mednarodna astronomska zveza (IAU) na ta način natančneje določila vrednost astronomske enote.

Ker je ta sestavek mišljen le kot zanimivost, sem podrobnosti izpustil, prav tako se ni treba preveč ukvarjati z enotami. Pri izračunu Gaussovega leta vzamemo k kar brez enot, čeprav to fizikalno ni povsem v redu. Vendar če upoštevamo vse enote, se izkaže, da je izračun pravilen.

Naj omenimo, da je Gaussovo leto daljše od tropskega leta 365,2422 dneva, ki je osnovna enota za kateri koli koledar. Daljše je tudi od trajanja leta v julijanskem koledarju 365,25 dneva in našem gregorijanskem koledarju 365,2425 dneva in torej v teoriji koledarja nima nobene vloge, ne pomeni prav nič, pa saj gre za neko navidezno ali izmišljeno časovno enoto.

Marijan Prosen



LE

Izšle so astronomske efemeride

Naše nebo 2005

Naročite jih lahko po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460 in po elektronski pošti zaloznistvo@dmfa.si za 1.800 SIT.

■ Navodila sodelavcem Preseka za oddajo prispevkov

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštetičene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

■ Kolofon

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

letnik 32

šolsko leto 2004/2005

številka 4

Uredniški odbor

Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovalna), Bojan Golli, Marjan Hribar, Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosen (astronomija), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine

DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19,
p. p. 2964, 1001 Ljubljana,
telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 2517 281.

Naročnina za šolsko leto 2004/2005 je za posamezne naročnike **4.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol **3.500 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, dvojna številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino pa znaša **25 EUR**.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana,
Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana,
SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

Sponzor

SRCSI

List sofinancirata Agencija za raziskovalno dejavnost ter Ministrstvo za šolstvo in šport

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Polona Šterk in Matjaž Čuk

Ilustracija Polona Šterk, Matjaž Čuk, Nina Rupel

Tehnično urejanje Matjaž Čuk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

© 2005 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
– 1593

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja izdajatelja ni dovoljeno.

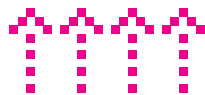
Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



.tex


 Twente University
 Enschede, The Netherlands
 www.utwente.nl

PRESEK št.4 PRESEK št.4



100100100100100100100100



444444444444444444 444444444