

2-3.

®®®®®®®®

XX

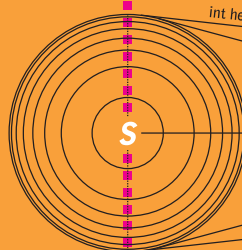
LETNIK 32 (2004/2005) ŠTEVILKA 2-3

X
OS

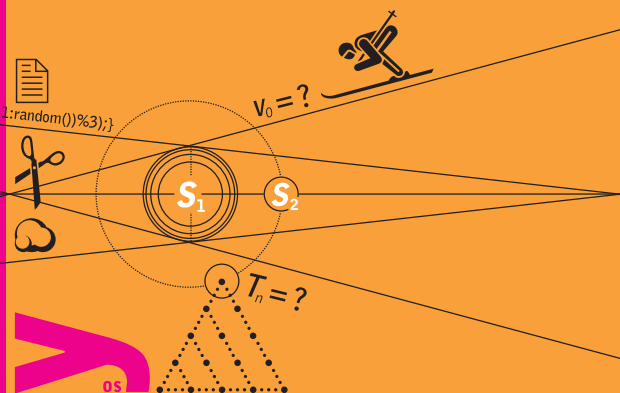
PRESEK

101010101010101010101010101010101
111111111111111111111111111111111

0101010101010101010101010101010101
111111111111111111111111111111111



```
int henny Q { return ((*ZNP?ZNP[random()%*ZNP+1]+1:random())%3);};
```



*

matematika

fizika

računalništvo

astronomija

LETO FIZIKE 2005

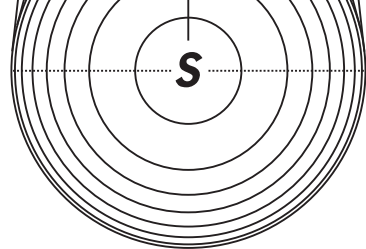
NALOGE

NAGRADNI RAZPIS

KRIŽANKA

ISSN 0351-6652

*



((((šifra?))))

Uvodnik

Dragi bralci in bralke, pred vami je dvojna številka Preseka. Za izdajo le-te smo se izjemoma odločili zaradi zamude pri izdaji prve številke. Zamuda je bila posledica prehoda na popolnoma novo grafično podobo vaše in naše revije. Upamo, da vam je ta nova podoba všeč, veseli pa bomo vseh vaših odzivov nanjo, tudi kritičnih.

Kljub večkratnemu branju tiskarskih korektur je pri tiskanju revije vseeno prišlo do nekaj težav. V zadnjem članku, to je članku iz astronomije, je v prvih dveh odstavkih znak »č« zapisan narobe. Vam in avtorju se iskreno opravičujemo, hkrati pa upamo, da vseeno ni bilo težko prebrati »zakodiranega« besedila.

Na zadnji strani te dvojne številke Preseka ponovno objavljamo razpis Najlepše fotografije za leto fizike in vas hkrati ponovno vabimo k sodelovanju. V razpisu smo dodali še nekatera določila, ki so običajno v fotografskih razpisih. Pri izdelavi fotografij lahko sodeluje tudi več avtorjev, ljubitelji fizike in ljubitelji fotografije skupaj, celoten fotografski kotiček – in še kakšna zanimiva združba. Opogumite se!

Maja Klavžar
odgovorna urednica Preseka

è ≠ č



A je zakodirano?

Kazalo

■ Uvodnik

- Nagovor odgovorne urednice stran 2

1. Matematika

- Poligonska števila stran 5–7
- Popularizacija matematike v srednji šoli stran 8–9
- Pravična delitev stran 10–14
- Praštevski snežaki stran 15
- 45. mednarodna matematična olimpijada stran 16
- Večkotniki na kvadratni mreži stran 17–21
- Catalanova domneva potrjena stran 22–23
- Popravki člankov iz prejšnje številke stran 23–28
- Pólya – matematik, ki je preštel grupe, grafe in kemijske spojine stran 36–37
- Kaj je to matrika? stran 38–41

2. Fizika

- Še enkrat o masi energije stran 43–45
- Smuk stran 46–47
- 24. državno tekmovanje iz fizike za Stefanova priznanja stran 48
- 35. mednarodna fizikalna olimpijada stran 49

3. Računalništvo

- Računalniška miselna igra kamen-papir-škarje stran 51–53

4. Astronomija

- Astronom Janez od Svetega Gozda stran 55–58
- Najdaljši čas trajanja popolnega luninega mrka stran 59–61

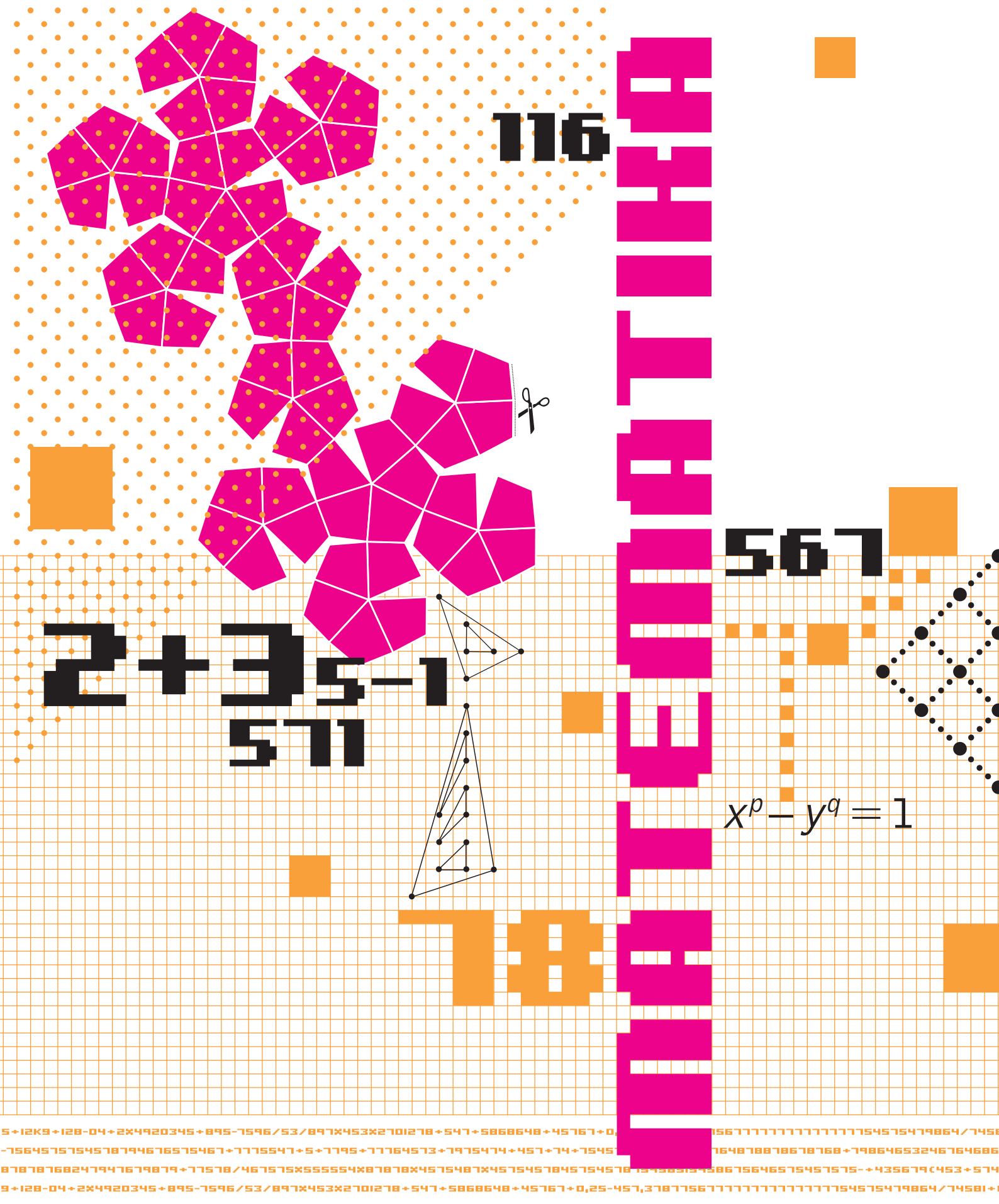
■ Razvedrilo

- Gobelina stran 28–29
- Križanka stran 32–34

■ Tekmovanja

- Urnik tekmovanj v letu 2005 30–31
- Tekmovanja priloga





Poligonsko število

Poligonska števila so pojem, ki je bil znan že v stari Grčiji. Za *pitagorejce* je bil svet števil mistični svet, abstraktnim pojmom so posvečali še več pozornosti, če so se dali nazorno ponazoriti. Verjeli so, da lahko naravo ponazorimo s števili. *Nikomah* omenja poligonska števila v svojem delu *Uvod v aritmetiko*, vendar večine svojih opažanj o poligonskih številih ne dokazuje.

Dejansko gre za naravna števila, ki so določena s številom točk mreže. Točke so razporejene v obliki n -kotnika različnih dimenzij.

Trikotniška števila dobimo s pomočjo vzorca trikotnikov na sliki 1. Dogovorimo se, da za trikotnik dimenzije 1 potrebujemo eno točko. Če želimo skonstruirati trikotnik dimenzije 2, potrebujemo za to tri točke, za trikotnik dimenzije 3 potrebujemo šest točk vzorca, za trikotnik dimenzije 4 pa deset točk itd.

Na hitro bi lahko trikotniška števila strnili v zaporedje naravnih števil

$$T = (T_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 3, 6, 10, 15, \dots).$$

Opazimo, da lahko zaporedje zapišemo kot $T = (1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5, \dots)$, kar pomeni očitno rekurzivno zvezo

$$T_n = T_{n-1} + n, \text{ kjer je } T_1 = 1.$$

Eksplisitne formule tudi ni težko dobiti:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n.$$

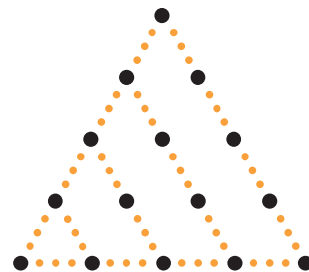
$$T_n = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Enačbi seštejemo

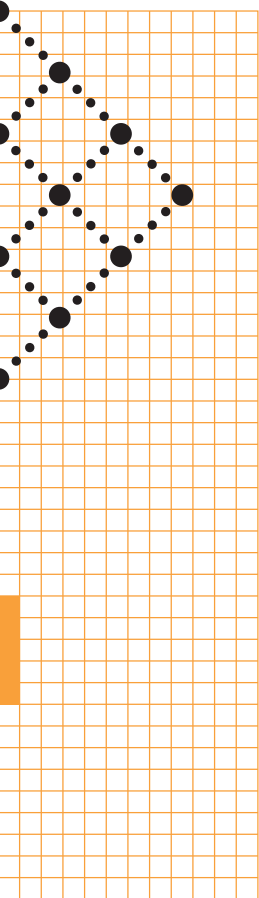
$$2T_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n\text{-krat}}.$$

Sledi

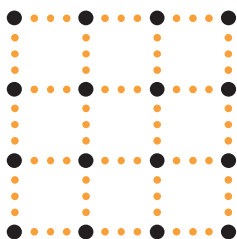
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Slika 1.
Trikotniška števila



31+8659-568-457+568+485+7578+7845+217
4864676467-757547+4579+78787+787878-
74)=345958548484848484674366981+5+12
8659-568-457+568+485+7578+7845+2173-



Slika 2.
Kvadratna števila

Kvadratna števila prikažemo podobno kot trikotniška, s kvadratno mrežo preštejemo točke, potrebne za kvadrat ustrezne dimenzije. Upoštevajoč sliko dobimo zaporedje naravnih števil

$$\blacksquare \blacksquare K = (K_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 4, 9, 16, \dots).$$

Vidimo, da je kvadratu, ki ima na stranici $n-1$ točk, potrebno dodati $2n-1$ točk za kvadrat naslednje dimenzije, zato je

$$\blacksquare \blacksquare K_n = K_{n-1} + (2n-1).$$

S podobnim postopkom kot za člen T_n pridemo do rezultata $K_n = n^2$, kar pomeni, da je K zaporedje popolnih kvadratov.

Podobno ugotovimo rekurzivno zvezo za **petkotniška (pentagonalna) števila** P_n (glej sliko 3) in **šestkotniška (heksagonalna) števila** H_n . Iz rekurzivnih zvez

$$\blacksquare \blacksquare \begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + (3n-2), & P_1 &= 1, \\ H_n &= H_{n-1} + (4n-3), & H_1 &= 1 \end{aligned}$$

s postopkom (1) sledita eksplisitni formuli

$$\blacksquare \blacksquare \begin{aligned} P_n &= \frac{n(3n-1)}{2}, \\ H_n &= n(2n-1). \end{aligned}$$

Kaj pa splošna formula? Poimenujmo zaporedje

$$\blacksquare \blacksquare P^k = (p_n^k)_{n=1}^{\infty}$$

množico poligonskih števil reda k , kjer število k označuje k -kotnik. Na podlagi analize prvih šestih poligonskih števil se hitro pojavi induktivni sklep

$$\blacksquare \blacksquare p_n^k = p_{n-1}^k + ((k-2)n - (k-3)), \quad p_1^k = 1.$$

Označimo drugi sumand z $r_n^k = (k-2)n - (k-3)$. Velja $r_n^k = p_n^k - p_{n-1}^k$, $r_1^k = 1$. Upoštevajoč postopek v (1) sledi

$$\blacksquare \blacksquare \begin{aligned} p_n^k &= r_1^k + r_2^k + \dots + p_{n-1}^k + r_n^k, \\ p_n^k &= r_n^k + r_{n-1}^k + \dots + p_2^k + r_1^k. \end{aligned}$$

Enakosti seštejemo in delimo z 2

$$\blacksquare \blacksquare p_n^k = \frac{r_1^k + r_n^k}{2} = \frac{n((k-2)n - (k-4))}{2}. \quad (2)$$

Naš dokaz pa ima seveda veliko pomanjkljivost. Upoštevali smo, da velja

■ ■ $r_1^k + r_n^k = r_i^k + r_{n-i+1}^k$ za vsak $i=2,3,\dots,(n-1)$,

česar pa nismo dokazali. Rezultat (2) je zatorej le predpostavka, ki jo lahko dokažemo z matematično indukcijo po n .

Za $n = 1$ formula (2) velja, saj z vstavljanjem dobimo $p_1^k = 1$. Privzemimo veljavnost p_{n-1}^k in z indukcijskim korakom dokažimo p_n^k :

■ ■ $p_n^k = p_{n-1}^k + r_n^k = \frac{(n-1)((k-2)(n-1)-(k-4))}{2} + ((k-2)n-(k-3))$.

Člene preuredimo in dobimo

■ ■ $p_n^k = \frac{1}{2} n(k(n-1)-2(n-2)) = \frac{1}{2} n((k-2)n-(k-4))$,

kar smo želeli dokazati.

Poligonska števila so burila duhove tudi v času francoskega matematika *Fermata*, ki leta 1638 postavi trditev, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto največ treh trikotniških števil, največ štirih kvadratnih števil, največ petih petkotniških števil oziroma največ n n -kotniških števil. Njegovega dokaza trditve niso nikoli našli. *Gauss* je pokazal veljavnost za trikotniška števila leta 1796, *Jacobi* in *Lagrange* pa sta kasneje neodvisno dokazala veljavnost za kvadratna števila, *Cauchy* je leta 1813 trditev dokazal v celoti.

Naloge

1. Pokaži, da je vsako trikotniško število tudi število v Pascalovem trikotniku (namig: binomski koeficient).
2. Pokaži, da velja
 - a. zveza med trikotniškimi in kvadratnimi števili: $T_{n-1} + T_n = S_n$;
 - b. zveza med trikotniškimi in petkotniškimi števili: $T_{3n-1} = 3P_n$;
 - c. zveza med trikotniškimi in šestkotniškimi števili: $T_{2n-1} = H_n$.
3. Zapiši:
 - a. število 50 kot vsoto dveh, treh ali štirih kvadratnih števil;
 - b. število 100 kot vsoto dveh ali treh trikotniških števil;
 - c. število 2002 kot vsoto dveh, treh, štirih ali petih petkotniških števil.

4. Z matematično indukcijo pokaži

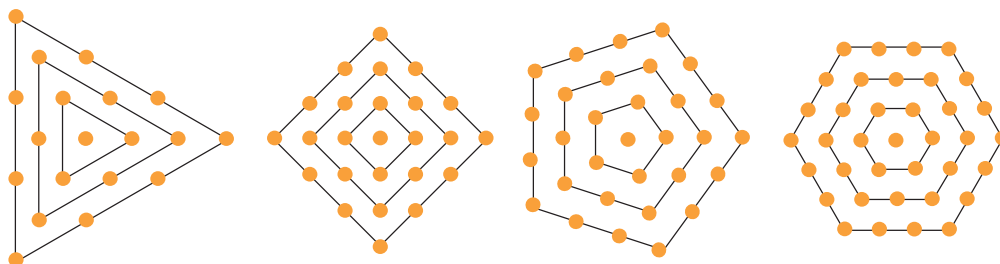
$$(T_n)^2 = 1 + 8 + \dots + (n-1)^3 + n^3.$$

5. S pomočjo slike 4 definiraj središčna poligonska števila c_n^k in pokaži, da velja

$$c_n^k = \frac{kn^2 - kn + 2}{2}.$$

Opomba: na sliki 4 so števila $c_4^3, c_4^4, c_4^5, c_4^6$.

Matej Mlakar



Slika 4.
Središčna
poligonska
števila

Popularizacija matematike v srednji šoli

Kot običajno smo tekmovanja do vključno državnega nivoja organizirali v sodelovanju z *Zavodom Republike Slovenije za šolstvo*. V tem poročilu je zajeto le *matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije*, ki se ga lahko udeleži vsak dijak katerekoli srednje šole in ki odpira vrata v mednarodna matematična tekmovanja.

V mesecu marcu 2004 smo se s šolskim tekmovanjem vključili v vseevropsko tekmovanje *Evropski matematični kenguru*, ki je tekmovanje z nalogami izbirnega tipa, namenjeno najširšemu krogu tekmovalcev. Naloge smo poslali na vse srednje šole, po zbranih podatkih je v tej kategoriji tekmovalo 5984 dijakov, bro-nasta priznanja pa je prejelo 1920 tekmovalcev.

Konec marca se je 2172 dijakov s 76 srednjih šol udeležilo *izbirnega tekmovanja*, srebrna priznanja je prejelo 664 dijakov. Državna tekmovalna komisija je izbrala 164 dijakov za nastop na končni državni preizkušnji, na *Gimnazijo Franca Miklošiča* v Ljutomeru, kjer je 17. aprila potekalo državno tekmovanje, jih je prišlo 160. Sobotno dopoldne je bilo zapolnjeno z reševanjem tekmovalnih nalog, čas po kosilu pa z razvedrilom in izleti. Zvečer je državna tekmovalna komisija objavila neuradne rezultate in se nato posvetila reševanju pritožb, v noči na nedeljo pa objavila še uradne rezultate.

■ Zlata priznanja so prejeli

V prvem letniku:

Aleksander Đurka (Gimnazija Kranj), Jaka Gogala, Tom Primožič, Uroš Marolt, Jaka Sočan in Matija Trampuš (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Martin Hergouth (ŠC Rudolfa Maistra Kamnik – Gimnazija), Blaž Kirn (Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana), Jan Kogoj (Gimnazija Škofja Loka), Ula Kovačič in Živa Jerman (Gimnazija Poljane, Ljubljana), Tadej Stepišnik–Perdih (ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava), Špela Urnaut in Urban Jezernik (I. gimnazija v Celju), Jernej Zupančič (Gimnazija Novo mesto), Tina Ilc (Škofijska gimnazija Vipava), Peter Muršič (Gimnazija Koper), David Zinrajh in Irena Matkovič (II. gimnazija Maribor), Luka Lačan (Gimnazija Brežice), Matic Žirovec in Mojca Pesko (Gimnazija Celje–Center), Nejc Ramovš (ŠC Novo mesto – Srednja elektro šola in tehniška gimnazija), Mateja Pipan (ŠC Nova Gorica – Gimnazija) ter Melita Rutar (Gimnazija Tolmin);

V drugem letniku:

Peter Lendero (ŠC Velenje – Splošna in strokovna gimnazija), Gašper Zadnik (Gimnazija Vič, Ljubljana), Matjaž Berčič in Barja Drnovšek (Gimnazija Škofja Loka), David Gajser (II. gimnazija Maribor), Vasja Susič, Boštjan Kovač, Martin Ambrožič, Simon Jazbec, Primož Koželj, Zala Lenarčič, Matija Vidmar, Špela Špenko, Anže Starič, Dejan Širaj in Nino Bašič (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Matjaž Krnc (ŠC Slovenj Gradec – Gimnazija), Mojca Berden (Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana), Tadej Grobelšek (ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava), Luka Kurnjek (Gimnazija Murska Sobota), Anže Babič (Gimnazija Kranj), Jože Mužerlin (Gimnazija Ce-



lje–Center) ter Blaž Ferjanc in Matej Huš (I. gimnazija Celje);

V tretjem letniku:

Sara Kališnik, Andraž Krajnc, Lucijan Plevnik in Teja Vodlak (ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava), Klavdija Jagar, Tamara Zajc in Katja Kolar (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Jan Lonzarič, Igor Cizerl, Jan Šlamberger in Matej Korošec (II. gimnazija Maribor), Enej Ilievski (SŠ Srečka Kosovela, Sežana), Urša Remžgar (Gimnazija Šentvid, Ljubljana), Matjaž Škorjanc (Prva gimnazija Maribor), Jure Senegačnik (Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana), Matevž Krašna (SŠ Vena Piona, Ajdovščina) ter Neli Blagus (ŠC Velenje – Splošna in strokovna gimnazija);

V četrtem letniku:

Kris Stopar in Nik Stopar (SŠ Vena Piona, Ajdovščina), Maja Štalekar (ŠC Slovenj Gradec – Gimnazija), Janoš Vidali (Gimnazija Koper), Maja Ratej, Blaž Cugmas (Gimnazija Celje–Center), Gregor Posnjak in Matevž Pičman (Gimnazija Kranj), Klemen Žiberna (II. gimnazija Maribor), Zala Epšek (Gimnazija Ravne na Koroškem), Boštjan Hamler (Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer), Peter Nose in Lan Žagar (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Mitja Linec (SŠ Josipa Jurčiča, Ivančna Gorica), Peter Petkovšek (Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana), Damjan Delač (Gimnazija Kočevje), Rok Požar (I. gimnazija, Celje) ter Ruben Sipoš (Škofijska gimnazija Antona Martina Slomška, Maribor).

Darjo Felda

1.

Prvo nagrado so prejeli:

v prvem letniku

- Aleksander Đurka
- Jaka Gogala
- Martin Hergouth
- Blaž Kirn
- Tom Primožič

v drugem letniku

- Peter Lendero
- Gašper Zadnik

v četrtem letniku

- Kris Stopar

2.

Drugo nagrado so prejeli:

v prvem letniku

- Jan Kogoj
- Ula Kovačič
- Uroš Marolt
- Jaka Sočan
- Tadej Stepišnik–Perdih
- Matija Trampuš
- Špela Urnaut
- Jernej Zupančič

v drugem letniku

- Matjaž Berčič
- David Gajser
- Vasja Susič

v tretjem letniku

- Sara Kališnik
- Klavdija Jagar
- Jan Lonzarič

v četrtem letniku

- Nik Stopar
- Maja Štalekar
- Janoš Vidali

3.

Tretjo nagrado so prejeli:

v prvem letniku

- Tina Ilc
- Urban Jezernik
- Peter Muršič
- David Zinrajh
- Irena Matkovič

v drugem letniku

- Matjaž Krnc
- Mojca Berden
- Boštjan Kovač

v tretjem letniku

- Enej Ilievski

Pravično delitev

Prispevek prinaša 7 nalog, ki se nanašajo na prispevek z istim naslovom iz prejšnje številke. Naloge s pravičnimi delitvami smo v prejšnji številki razdelili v tri tipe:

- Pravična delitev je vsaj načelno jasno razvidna, a je pot do nje otežena zaradi različnih ovir (1. in 2. naloga).
- Že od samega začetka ni jasno, kakšna naj bi bila v danem primeru ta pravična delitev (3. do 5. naloga).
- Pravičnost delitve je le izgovor bodisi za šalo ali celo za duhovito prevaro (6. in 7. naloga).

Naloge

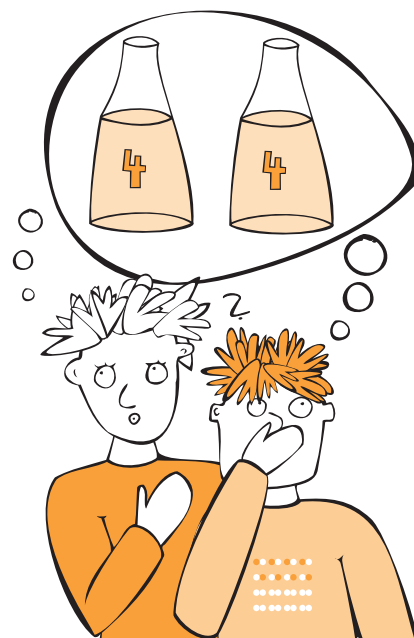
1. Dva roparja sta izmaknila trgovcu sodček z osmimi litri žlahtnega vina. Med begom sta srečala lončarja in mimogrede še njega olajšala za dve posodi. Ko sta prišla na varno, sta se ustavila, da bi razdelila plen. Odkrila sta, da ukradeni posodi držita pet oziroma tri litre. Kako naj si s tema posodama pravično razdelita vino, tako da bo vsak dobil po štiri litre?

Nalogo običajno pripisujemo italijanskemu matematiku **Niccolu Tartaglii** (1500–1557), čeprav je skoraj zagotovo starejšega izvora.

2. Matematika je imela v pravu že od vsega začetka opazno vlogo. Primeri v zvezi z razdelitvijo zapuščine so bili za uradnike, nevešče matematike, še posebej trd oreh. Med matematiki, ki so se s tovrstnimi problemi še zlasti zavzeto ukvarjali, je nemara najbolj znan arabski učenjak **Al Hvarizmi** (780–850) iz Bagdada. V zgodovino se je sicer zapisal predvsem z nazornimi opisi učinkovitih postopkov računanja s števili in reševanja enačb. Tako ostaja manj znana Al Hvarizmijeva obravnava problemov dedovanja v okviru muslimanskega prava. Oglejmo si eno od nalog iz njegovega učbenika za to področje.

V družini je umrl mož in zapustil ženo, s katero nista imela otrok, ter mater, brata in dve sestri. Ti so sklenili, da si razdelijo njegovo zapuščino, 135 zlatnikov. Vendar so morali pri tem upoštevati, da se je družina pred časom zadolžila pri trgovcu v vrednosti devetine sedanjega premoženja. Zakon pravi, da je treba v takem primeru najprej izplačati vse dolgove, zatem pa dobi mati šestino preostanka, žena četrtno, brat pa dvakrat toliko kot sestra.

Pravičnost v zapuščinskih primerih razumemo kot dosledno spoštovanje

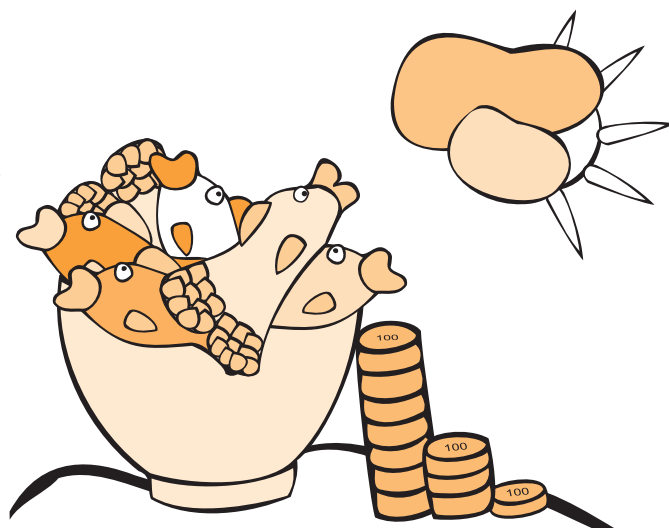


zakona oziroma oporoke, če je bila sestavljena. Kako si naj torej teh pet ljudi razdeli zapuščino? Koliko dobi vsak?

3. Po naslednji zgodovinski zgled iz zapuščinskih delitev sezimo še globlje v zgodovino. Pozornost vzbuja predvsem nenavadna naloga iz spisov rimskega pravnikarja **Juventiusa Celsusa** iz 1. stoletja.

Mož, čigar žena je bila že v stanju visoke nosečnosti, je tik pred smrtjo sestavil oporoko. Glede svojega premoženja, ki je bilo takrat ocenjeno na 2100 zlatnikov, je določil, da pripadata otroku v primeru, če se mu bo rodil sin, dve tretjini celotnega premoženja, ženi pa preostala tretjina. Če se bo rodila hči, ji pripada tretjina premoženja, ženi pa preostali dve tretjini.

Kasneje je žena rodila dvojčka, sina in hčer. Kako naj si omenjene tri osebe razdelijo dediščino, da ne bo v nasprotju z očetovo oporoko?



4. Ribiča, ki sta se z morja vračala z ribolova, sta bila že na daleč videti slabe volje. Tistega dne jima je namreč muhasto in deževno vreme tako grdo zagodilo, da je bil njun ulov resnično komaj omembe vreden. Prvi je ulovil le sedem majhnih ribic, drugi pa celo samo pet. Pa še tako presneto majhne so bile, vse, komajda, za ped velike.

Ko sta ribiča svoje ribice pripravljala za kosilo, se jima je pridružil še prijatelj. Kot po navadi so si ulov povsem samoumevno razdelili med seboj na tri enake dele. A tretjemu je bilo vendarle ves čas nerodno, ker ni šel že prej z njima na morje, kot so se spočetka domenili. Naposled se je poskušal izvleči iz zadrege

s predlogom, da jima tokrat svoj delež pri kosilu preprosto plača. In zares jima je po kosilu položil na mizo 1200 tolarjev.

Prijatelja sta ga le nemo pogledala in brezbržno skomignila z rameni. Zdelo se jima je prav. Že sta hotela samoumevno pograbit tistih nekaj bankovcev, ko se je enemu od njiju nenadoma v misel prikradel sum: »Hm, ... ali res tako?«

In v skorajda istem hipu je razumel tudi njegov prijatelj. Kako si naj torej ribiča razdelita prijateljevih 1200 tolarjev, da bosta pravično poplačana?

5. Italijanski renesančni matematik **Luca Pacioli** (1445–1514) iz Benetk je zastavil med drugim tudi naslednji problem.

Prijatelja sta metala kovanec. Prvi je zabeležil točko zase, če je padla cifra, drugi pa spet zase, če je padel grb. Domenila sta se, da bosta metala toliko časa, dokler ne bo eden od njiju zbral šest točk. Ta bo dobil tudi 1000 ducatov, ki sta jih skupaj

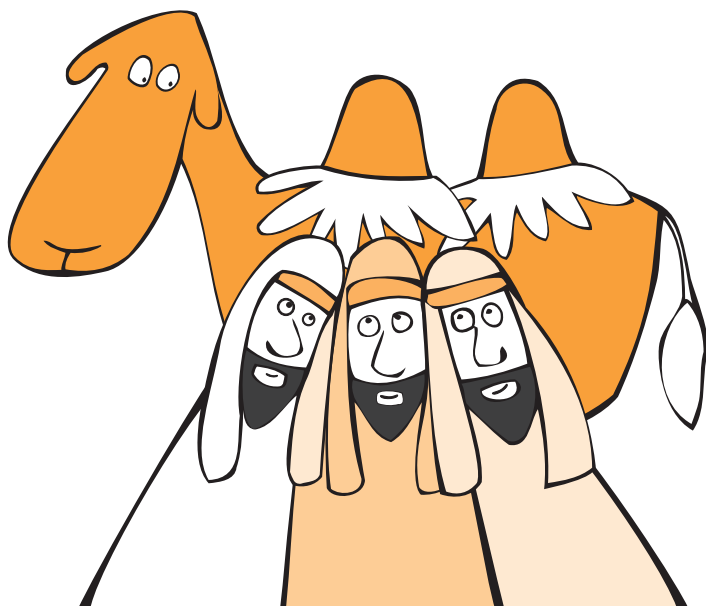
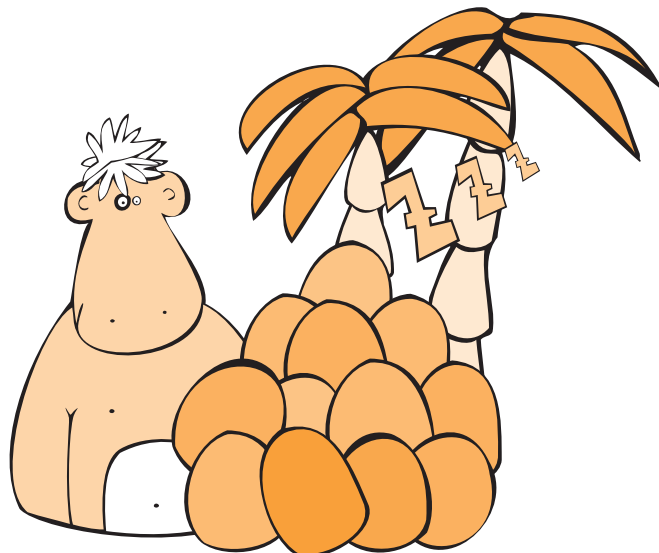
vložila v igro. Žal pa je nekdo njuno igro prekinil še pred koncem. Prvi je imel tedaj zbranih že pet točk, drugi pa šele tri. Kako naj si sedaj razdelita vloženi denar?

6. Štirje prijatelji so z dresirano opico na daljnem otoku ves dan nabirali kokosove orehe. Zvečer so orehe zložili na kup in vsi razen opice zaspali. Ponoči se zbudi prvi, da en oreh opici, razdeli ostale orehe na štiri enake dele, en del skrije zase, preostale orehe pa spet zloži na kup in zaspi. Čez čas se zbudi tudi drugi, da en oreh budni opici, razdeli ostale orehe na štiri enake dele, en del skrije zase, zloži ostanek na kup in zaspi. Zatem storita enako drug za drugim še preostala dva med prijatelji. Zjutraj se vsi zbudijo, dajo dobrodušno najprej en oreh opici, zatem pa razdelijo preostale orehe na štiri enake dele.

Koliko je najmanjše število orehov, pri katerem se zgodba sploh lahko odvija, kot je napisano?

Simpatična naloga, ki je dobro znana, izhaja bržkone iz Indije. Prvič jo najdemo zabeleženo v zbirki tamkajšnjega matematika **Mahavire** (okoli 850).

7. Naslednjo staro arabsko nalogo o zapuščinski delitvi črede kamel med sinove srečamo v matematični literaturi čestokrat in je najbrž tudi slovenskemu bralcu dodobra znana.



Arabski trgovec je imel tri sinove. Ko je umrl, jim je zapustil vseh svojih 11 kamel. Najstarejšemu jih je namenil polovico, srednjemu četrtno, najmlajšemu pa šestino.

Sinovi so bili s takšno zapuščino seveda v nemajhni zadregi, saj črede v nobenem primeru niso hoteli razdeliti, tako, da bi kakšno od kamel razrezali. Naпослед so se odpravili k sodniku in mu potožili o svojih težavah. Mož je bil bistre glave in je predlagal, da jim začasno posodi eno od svojih kamel. Tako so jih sinovi imeli 12 in najstarejši jih je vzel šest, srednji tri, najmlajši pa dve. Nazadnje jim je ostala še ena kamela, prav tista, ki jim jo je bil sodnik začasno posodil. Ta jo je vzel spet nazaj in problem je bil s tem na zadovoljstvo vseh rešen.

Toda, ali so bratje res razdelili zapuščino pravično, v skladu z očetovo željo v oporoki?

Vilko Domajnko

Rešitve

Samo zadnji med navedenimi je torej ugoden za zmago B-ja, vseh ostalih sedem pa pomeni zmago A-ja. Poleg tega je pomembno, da so med osmimi navedenimi izidi vsi med seboj enako verjetni. Pri metu kovanca namreč zmeraj padeta z enako verjetnostjo tako cifra kot grb. Pravično je torej, da si igralca razdelita vložen denar v razmerju 7 : 1. A-ju tako

CCC, CCG, CGC, CGG, GCC, GCG, GGC, GGG.

5. Vzemimo, da je A prvi igralec, B pa drugi. Kakšne možnosti je imel B za zmago pred prekinitvijo igre? Zmagal bi samo v primeru, če bi v nadaljevanju trikrat zapored padel grb. V vseh ostalih primerih bi zmagal A. Pri metu kovanca trikrat zapored je možnih osem različnih izidov:

naloga smiselna za vsak a in b ? delita plačilo tretjega v razmerju $(2a - b) : (2b - a)$. Ali je pa b rib ($a \geq b$). Pokažite, da si prijatelj v tem primeru raz- ko prispeva prvi prijatelj k skupnemu kosilu treh a rib, drugi Poskusite sami obravnavati še posplošen primer te naloge, pada prvemu 900 tolarjev, drugemu pa 300 tolarjev.

3 : 1. Ker jima je prijatelj skupaj pustil 1200 tolarjev, pri- Ribiča si morata torej denar tretjega razdeliti v razmerju kosilu le pet, pa je pojedel $5 - 4 = 1$ ribo.

val h kosilu sedem rib, od drugega ribiča, ki jih je prispeval h tretjino vseh dvanaestih rib, torej štiri ribe. Pri tem je tretji prijatelj pojedel $7 - 4 = 3$ ribe od prvega ribiča, ki je prispe- Iz besedila razberemo, da je vsak od treh prijateljev pojedel merju 7 : 5.

seveda tudi ne bi bilo prav, če bi si denar razdelila kar v raz- v svoj žetodec, mu vsekakor ne moreta zaračunati. Zato bi prijatelj obrok pri kosilu. Tistih rib, ki sta jih spravila vsak upoštevati samo to, koliko rib je vsak od njiju prispeval za 4. Ribiča morata pri razdelitvi denarja svojega prijatelja

številni znani matematiki (omenimo le **Girolama Cardana**). njo oziroma z različnimi posplošitvami še zmeraj ukvarjali angleški matematik **Alcuin**. Kasneje so se v srednjem veku z svojo znamenito zbirko *Problemi za bistritev uma* uvrstili tudi znana in priljubljena še zlasti potem, ko jo je v 8. stoletju v no zanimivo zgodovinsko ozadje. Med matematiki je postala Po vsem povedanem se ne gre čuditi, da ima naloga izjem- razmerju 2 : 1.

oziroma 700 zlatnikov, ostanek pa si sin in mati razdelita v ju 1 : 2. Če pa je prvorojena deklica, dobi ta 1/3 dediščine 1400 zlatnikov, ostanek pa si hči in mati razdelita v razmer- gim. Če je bil to deček, mu pripada 2/3 dediščine oziroma tevamo, da se je eden od dvočkov zagotovo rodil pred dru-

3. Ne da bi se spuščali v različne razlage problema z vidika rimske- ga prava, lahko vendarle rečemo, da povsem enoznačnega odgovora na vprašanje v nalogi v tem primeru žal ni. Zaplet je namreč mogoče tol- mačiti na več različnih načinov. Najsporejmljivejša in tudi najbolj pogosta je razlaga, da je oče z oporoko hotel, da dobi sin dvakrat toliko kot mati, ta pa dvakrat toliko kot njena hči. Nalogo v tem primeru najlažje rešimo, če najprej razdelimo celotno 1/7. V denarju to pomeni, da pripada sinu 1200 zlatnikov, materi 600 zlatnikov, hčeri pa 300 zlatnikov. Toda gledano z drugega zornega kota bi lahko sklepali, da je oče z opo- roko želel, da mati v vsakem primeru dobi vsaj tretjino premoženja. V zgornjem primeru ji ga je pripadlo le 2/7. Če ga torej dobi tretjino, ozi- roma 700 zlatnikov, razdelimo ostalih 1400 zlatnikov med sina in hčer v skladu z oporoki opisanim razmerjem ($4 : 1$). Sin dobi tedaj 4/5 tega oziroma 1120 zlatnikov, hči pa petino oziroma 280 zlatnikov. In nenazadnje ne gre kar tako spregledati niti tretje možnosti, kjer upoš-

Iz enačbe dobimo $x = 17\frac{1}{2}$. Tako dobi brat 35 zlatnikov, vsaka sestra pa pol tega.

2x + x + x = 70.

2. Ko družina vrne dolg devetine zapuščine, ji ostane še 120 zlatnikov. Mati jih dobi $120/6 = 20$, žena pa $120/4 = 30$. Označimo z x delež, ki ga v zapuščini dobi vsaka od dveh sester. Nastavimo račun za brata in obe sestri:

	posoda za osem litrov	posoda za pet litrov	posoda za tri litre
1.	8	0	0
2.	3	5-3=2	0+3=3
3.	3+3=6	2	3-3=0
4.	6	2-2=0	0+2=2
5.	6-5=1	0+5=5	2
6.	1	5-1=4	2+1=3
7.	1+3=4	4	3-3=0

1. Nalogo lahko rešimo na več načinov. Ogledimo si rešitev s samo sed- mimi pretakanji. 1. Iz posode z 8 litri prelijemo vino do vrha v posodo s 5 litri. 2. Iz posode s 5 litri prelijemo vino do vrha v posodo s 3 litri. 3. Iz posode s 3 litri prelijemo vse v posodo z 8 litri. 4. Iz posode s 5 litri prelijemo tista 2 litra v posodo s 3 litri. 5. Iz posode z 8 litri prelijemo vino do vrha v posodo s 5 litri. 6. Iz posode s 5 litri prelijemo vino do vrha v posodo s 3 litri. 7. Iz posode s 3 litri prelijemo tiste 3 litre v posodo z 8 litri. Tako imamo v vsaki od posod za 8 oziroma 5 litrov po 4 litre vina. In še ponazoritev s tabelo.

Rešitve

$$\blacksquare \quad 6 > \frac{11}{11}, \quad 3 > \frac{4}{11}, \quad 2 > \frac{6}{11}.$$

Toda pri tem neizogibno pride do »krvave« delitve ene od živali. Z nalogo je torej že v njeni začetni zastavitvi marsikaj hudo narobe. Zastavlja praznaprav problem, ki je nerešljiv. Zaradi tega tudi pomoč dobrohotnega sodnika ni bila povsem v skladu z zahtevami v oporoki. Čeprav so si sinovi razdelili kamele v razmer-ju, ki ga določa oporoka, je vsak od njih dobil večji delež, kot mu htevali v oporoki. Čeprav so si sinovi razdelili kamele v razmer-ju, ki ga določa oporoka, je vsak od njih dobil večji delež, kot mu

$$\blacksquare \quad \frac{2}{1} : \frac{1}{1} = 2 : 1.$$

Opazimo, da vsota v nasprotju z morebitnim pričakovanjem ni sinovi razdelili kamele v ustreznih razmerjih: 1. To pomeni, da oporoke dosledno po zapisani zahtevi v resnici sploh ni mogoče izpolniti – in to ne glede na število kamele v zapuščini. Posamezni deleži skupaj namreč ne sestavljajo celo-te. Očetovi želji bi bilo mogoče pogojno ugoditi le tako, da bi si

$$\blacksquare \quad \frac{2}{1} + \frac{4}{1} + \frac{6}{1} = \frac{12}{1}.$$

posamezne deleže, ki pripadajo sinovom v skladu z oporoko: skimi ulomki in nalogo o kameleh pridemo že, če zgolj seštejemo pred več tisoč leti pred našim štejem. Do povezave med egiptčan-in ulomek $2/3$. Uporabljali so jih že staroegipčanski matematiki označujemo ulomke oblike $1/n$, kjer je n poljubno naravno število, mivo ilustracijo k uporabi egiptčanskih ulomkov. S tem imenom Danes nalogo o delitvi črede kamele običajno srečamo kot zani-vpliva.

7. Natančnega izvora naloge o delitvi črede kamele danes ne po-znamo ne časa ne kraja njenega nastanka. Ne poznamo pa smemo reči vsaj to, da prihaja z Bližnjega vzhoda, o čemer je mogoče sklepati že na podlagi kamele, ki nastopajo v njem. Kasneje se je v Evropi pojavilo tudi več privrjenih verzij te naloge, najpogostejša je tista, kjer namesto kamele srečamo ko-nje, ki pa na potek reševanja osnovne verzije nimajo bistvenega

Številili 52 in 81 sta tuji, zato bo zgornje število celo le tedaj, če bo $n + 1$ naravni večkratnik števila 81. Najmanjše bo seveda v primeru $n + 1 = 81$ (da $n + 1 = 0 \cdot 81$ ni mogoče, se naj prepiča bralec sam). Tako izvedmo, da je bilo na začetku v kupu $12 \cdot 80 + 9 + 52 = 1021$ kokosovih orehov.

$$\blacksquare \quad \frac{1024n+781}{81} = 12n + 9 + 52(n+1).$$

orehov. Ker je $1024 = 12 \cdot 81 + 52$ in $781 = 9 \cdot 81 + 52$, lahko začetno število orehov zapišemo takole:

$$\blacksquare \quad 4 \cdot \frac{256n+175}{3 \cdot 27} + 1 = \frac{1024n+781}{81}$$

kupu orehov. Prvi si je vzel tretjino tega, pred tem pa je bilo v

$$\blacksquare \quad 4 \cdot \frac{64n+37}{3 \cdot 9} + 1 = \frac{256n+175}{27}$$

bilo v kupu orehov. Drugi po vrsti si je vzel tretjino tega in pred tem je

$$\blacksquare \quad 4 \cdot \frac{16n+7}{3 \cdot 3} + 1 = \frac{64n+37}{9}$$

tem v kupu orehov. Tudi predzadnji si je vzel tretjino, tako da je bilo pred

$$\blacksquare \quad 4 \cdot \frac{4n+1}{3} + 1 = \frac{16n+7}{3}$$

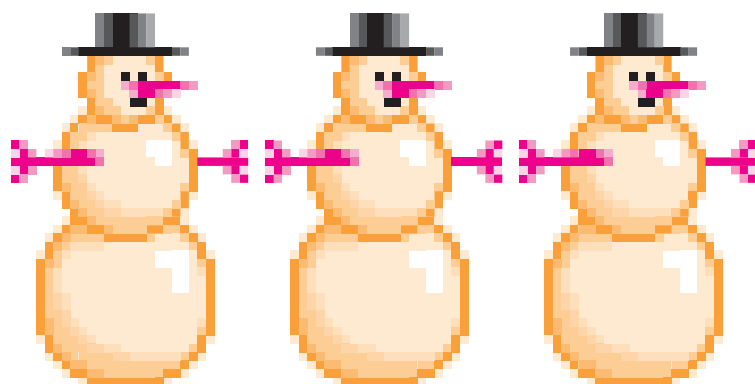
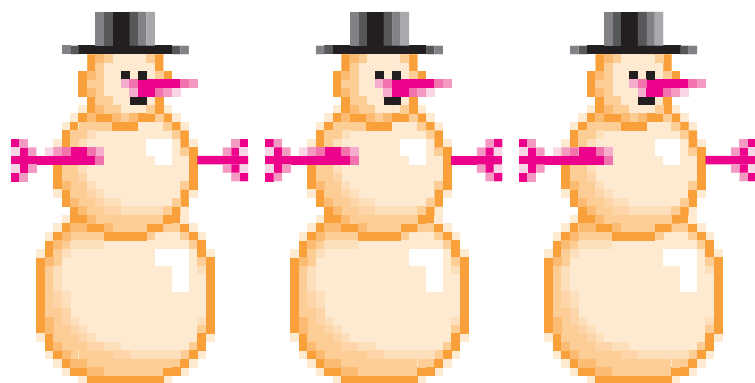
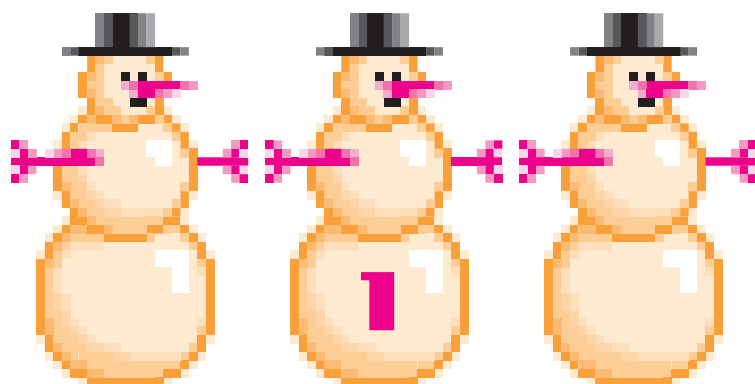
tega, zato je bilo pred tem v kupu orehov. Četrti med prijatelji si je vzel tretjino v kupu $4n + 1$ orehov. Tedaj je bilo pred zadnjo jutranjo delitvijo štirih prijateljev. Tedaj je bilo pred zadnjo jutranjo delitvijo 6. Naj bo n število orehov, ki jih je zjutraj dobil vsak od

pravične delitve. Seveda možnih dilem o pravični delitvi denarja v Paciolijevi nalogi tudi s tem še ni konec. Nenazadnje lahko razmišljamo tudi takole: prvenmu igralcu manjka do zmage še ena točka, drugemu pa manjkajo še tri. Zakaj bi si tedaj zastavljenega denarja ne razdelila kar v razmerju $3 : 1$? Ali bi ne bilo naj-bolj pravično prav to?

Seveda možnih dilem o pravični delitvi denarja v Paciolijevi nalogi tudi s tem še ni konec. Nenazadnje lahko razmišljamo tudi takole: prvenmu igralcu manjka do zmage še ena točka, drugemu pa manjkajo še tri. Zakaj bi si tedaj zastavljenega denarja ne razdelila kar v razmerju $3 : 1$? Ali bi ne bilo naj-bolj pravično prav to? ralec zmago že tako rekoč v žepu? torej vsakemu približno pol vsote, pa čeprav je imel prvi ig-tedaj zastavljeni denar zares razdelila v razmerju $59 : 49$, trenutku, ko je prvi zbral 59 točk, drugi pa 49. Ali bi si naj-ne zbereta 60 točk. Denimo, da nekdo prekine njuno igro vlimo primer, ko igralca mečeta kovanec toliko časa, dokler-glede na nasprotnika. Da bo povedano še jasneje, si zamis-ralec bo pač toliko verjetneje zmagal, kolikor bližje je cilju skrijava v nadaljevanju igre in ne v njeni »preteklosti«. Ig-namreč treba, da se možnosti posameznega igralca za zmago prednosti še zdaleč ne upoštevata v pravi meri. Upoštevati je nasprotnikom obiljubljene denar v razmerju, ki te njegove lepe igri zmaga tako rekoč že na dosegu roke, bi si naj razdelil ztem predlogom nekaj ni v redu. Kljub temu, da je bila A-ju v tudi Paciolii. A vendar že zdrava pamet zlahka pokaže, da s ob prekinitvi igre. Zanimivo je, da je takšno rešitev predlagal razdeliti kar v razmerju $5 : 3$, torej v razmerju doseženih točk namreč ljudje trde, da bi si morala igralca zastavljeni denar Marsikdo bi ob tej nalogi prišel do drugačne rešitve. Pogosto preostane $1/8$ oziroma 125 dukatov.

pripada $7/8$ začetnega vlozka, oziroma 875 dukatov, B-ju pa

Proštevilski snežaki



15

Oštevilčite snežake s praštevili tako, da boste dobili magični kvadrat. Pri tem naj bo vsota v vsaki vrstici, vsakem stolpcu in na obeh diagonalah enaka 111. En snežak je že oštevilčen s še bolj elitnim številom 1.

Priredil *Mirko Dobovišek*

■ Rešitev

Pravilna rešitev
je seveda tudi
prezrcaljen kvadrat.

31	73	7
13	37	61
67	1	43

45. mednarodna matematična olimpijada



Na petinštirideseti mednarodni matematični olimpijadi, ki je bila med 6. in 18. julijem 2004 v Atenah (Grčija), so Slovenijo zastopali: Matjaž Berčič z Gimnazije Škofja Loka, David Gajser z II. gimnazije Maribor, Peter Lendero s ŠC Velenje – Splošne in strokovne gimnazije, Kris Stopar in Nik Stopar s SŠ Vena Pilona Ajdovščina in Gašper Zadnik z Gimnazije Vič, Ljubljana. *Komisija* DMFA je slovensko olimpijsko ekipo izbrala na podlagi rezultatov obeh izbirnih testov, reševanja domačih nalog in državnega tekmovanja. Olimpijsko ekipo je vodila Irena Majcen s Fakultete za matematiko in fiziko, član mednarodne tekmovalne komisije je bil Gregor Dolinar s Fakultete za elektrotehniko.

Nik Stopar in **Gašper Zadnik** sta za dosežen uspeh prejela bronasti medalji, **Matjaž Berčič** in **Kris Stopar** pa pohvali.

Vseh šest naših olimpijcev si zasluži priznanje, saj so že z uvrstitvijo v olimpijsko ekipo dokazali, da sodijo v vrh med kolegi, ki so se borili za nastop na olimpijadi. Seveda si še marsikateri dijak zasluži priznanje za svoje delo in znanje, le tekmovalne sreče ni imel takrat, ko bi moral znanje pokazati.

Zahvala za uspehe naših olimpijcev in tekmovalcev na tekmovanjih gre predvsem učiteljem-mentorjem, ki mladim pomagajo pri spoznavanju matematike. Zahvala gre tudi članom *Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli*, ki so vodili priprave na olimpijado.

Matjaž Željko

Večkotniki na kvadratni mreži

V uredništvu Preseka smo se odločili, da bomo pobrskali po starih Presekih in za nove in stare bralce izbrali nekatere najzanimivejše prispevke. Članek o Pickovi formuli je bil objavljen v 18. letniku Preseka 1990/91. Ker se je originalni članek skliceval na nek drug članek v tej stari številki Preseka, je avtor članek za novo objavo dopolnil tako, da tega sklicevanja ne potrebujemo več.

Na mreži iz kvadratkov ploščine 1 leži večkotnik, ki ima oglišča v križiščih te mreže. Koliko meri njegova ploščina? Nekaj spretnosti zadostuje, da jo določimo brez večjih težav; formula, ki jo nameravamo obravnavati v tem prispevku, pa nam delo zelo olajša. Ploščina je namreč enaka:

$$p = r/2 + k - 1$$

kjer je r število križišč mreže, ki leže na robu lika, k pa število križišč v notranjosti večkotnika.

Zapisano enakost je odkril leta 1899 matematik Pick in se zato imenuje *Pickova formula*. Pred leti je to formulo angleški dijak Skevington z majčkeno pomočjo svojega učitelja matematike posplošil na večkotnike z večkotniškimi luknjami. Ugotovil je, da ploščina večkotnika z l luknjami meri

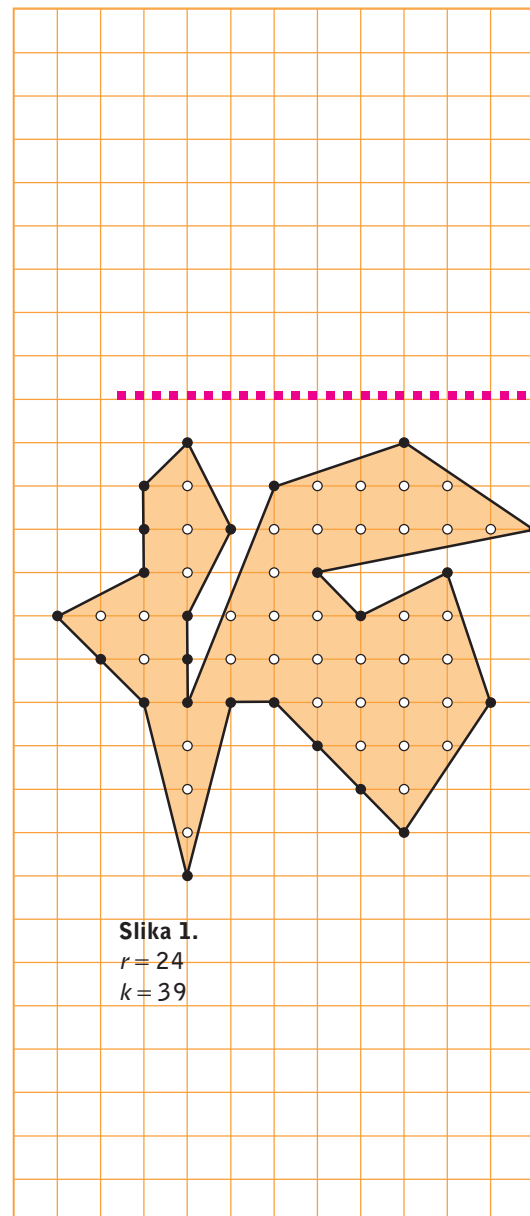
$$p = r/2 + k + l - 1.$$

Najprej bomo postopoma dokazali Pickovo formulo, do posplošitve pa bo potem potreben le še korak.

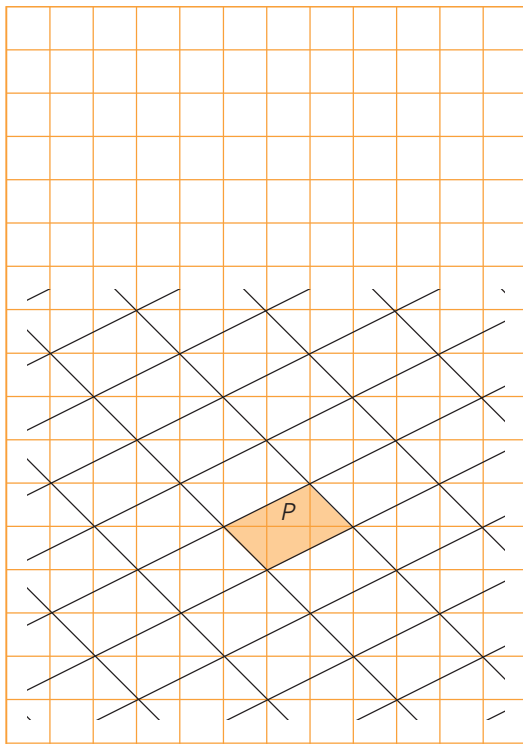
■ Enostavni paralelogrami in večkotniki

Na obravnavano kvadratno mrežo položimo ravnino $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tako, da bodo točke s celoštevilskimi koordinatami pokrile točno vsa križišča mreže. Seveda tedaj križišča tvorijo množico $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

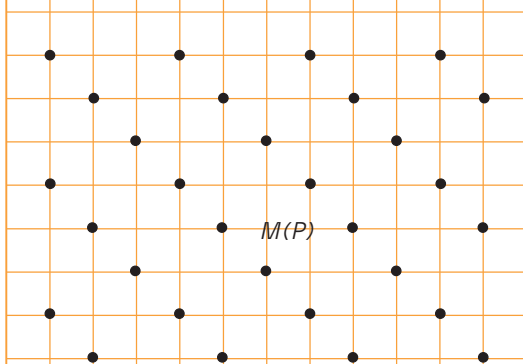
Namenimo zdaj nekaj besed paralelogramom z oglišči v $\mathbb{Z}^2$. Naj bo P takšen paralelogram. Ta določa novo mrežo,



Slika 1.
 $r = 24$
 $k = 39$



Slika 2.



Slika 3.

sestavljeno iz skladnih paralelogramov, ki jih dobimo z vzporednimi premiki paralelograma P (glej sliko 2).

Označimo z $M(P)$ množico vseh križišč te mreže (Slika 3) in povabimo bralca, da dokaže naslednji trditvi.

Trditev 1. Množica $M(P)$ je vsebovana v $\mathbb{Z}^2$.

Trditev 2. Tri različne točke iz $\mathbb{Z}^2$ so oglišča treh različnih paralelogramov P_1, P_2 in P_3 . Vsi trije določajo mreže z istimi križišči, torej $M(P_1) = M(P_2) = M(P_3)$.

Naj ima paralelogram P eno oglišče v točki $O = (0,0)$, dve drugi pa v točkah A in B . Z uporabo rezultata druge trditve vidimo, da se celoštevilski večkratniki vektorja $\overrightarrow{OA}$ končajo v tistih točkah množice $M(P)$, ki ležijo na nosilki daljice OA . Podobno velja za celoštevilске večkratnike vektorja $\overrightarrow{OB}$. Od tod hitro sledi, da konci vektorjev oblike

$$\blacksquare \blacksquare m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

tvorijo množico $M(P)$.

Naslednja definicija nam bo skrajšala nadaljnje pisanje.

Paralelogram (oziroma trikotnik) z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ je *enostaven*, če razen oglišč ne vsebuje nobene točke iz $\mathbb{Z}^2$.

Bralec se bo brez težav prepričal o naslednjih lastnostih enostavnih paralelogramov in trikotnikov.

Trditev 3. Če je trikotnik z oglišči $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ enostaven, so vsi paralelogrami z oglišči v točkah A, B in C enostavni.

Trditev 4. Paralelogram P z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ je enostaven natanko takrat, kadar množica $M(P)$ sovпада z $\mathbb{Z}^2$.

Ploščino p trikotnika z oglišči $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ lahko izračunamo po znani formuli

$$\blacksquare \blacksquare 2p = |a_1(b_2 - c_2) + b_1(c_2 - a_2) + c_1(a_2 - b_2)|. \quad (2)$$

Če oglišča leže v množici $\mathbb{Z}^2$, je na desni strani formule celo število, torej ploščina takšnega trikotnika meri vsaj $1/2$. Kateri trikotniki imajo ploščino enako $1/2$? Odgovor da naslednji izrek.

Izrek 1. Trikotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ ima ploščino enako $1/2$ natanko takrat, kadar je enostaven.

Dokaz. Denimo, da trikotnik z oglišči $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ ni enostaven. Potem vsebuje vsaj eno točko $D \in \mathbb{Z}^2$, ki ni njegovo oglišče. Če D leži v notranjosti trikotnika ABC , ta razpade na trikotnike ABD , BCD in CAD ,

zato meri njegova ploščina vsaj $3/2$. Če pa D leži na stranici trikotnika ABC , je ta sestavljen iz dveh manjših, zato njegova ploščina meri vsaj 1. Torej je trikotnik ABC s ploščino $1/2$ nujno enostaven.

Naj bo zdaj trikotnik z oglišči $A, B, C \in \mathbb{Z}^2$ enostaven in P paralelogram z oglišči A, B, C in D . Po trditvi 3 je tudi paralelogram P enostaven, torej trditev 4 pove, da velja $M(P) \in \mathbb{Z}^2$.

Brez škode za splošnost dokaza smemo privzeti, da oglišče C leži v izhodišču $O = (0,0)$. Ker konci vektorje oblike (1) tvorijo $\mathbb{Z}^2$, obstajata taki celi števili m in n , da velja

$$m\vec{OA} + n\vec{OB} = \vec{OS}, \quad (3)$$

kjer je $S = (1,0)$. Za $A = (a_1, a_2)$ in $B = (b_1, b_2)$ je zato

$$ma_1 + nb_1 = 1$$

$$ma_2 + nb_2 = 0.$$

Od tod brez težav dobimo enakosti

$$m(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2$$

$$n(a_1b_2 - a_2b_1) = -a_2,$$

ki povesta, da celo število $d = a_1b_2 - a_2b_1$ deli b_2 in a_2 . Če namesto točke S vzamemo točko $T = (0,1)$, na enak način kot prej vidimo, da d deli tudi a_1 in b_1 . Potem pa je $d = a_1b_2 - a_2b_1$ deljiv z d^2 in zato enak $-1, 0$ ali 1 . Ploščina trikotnika ABC je različna od nič po formuli (2) meri

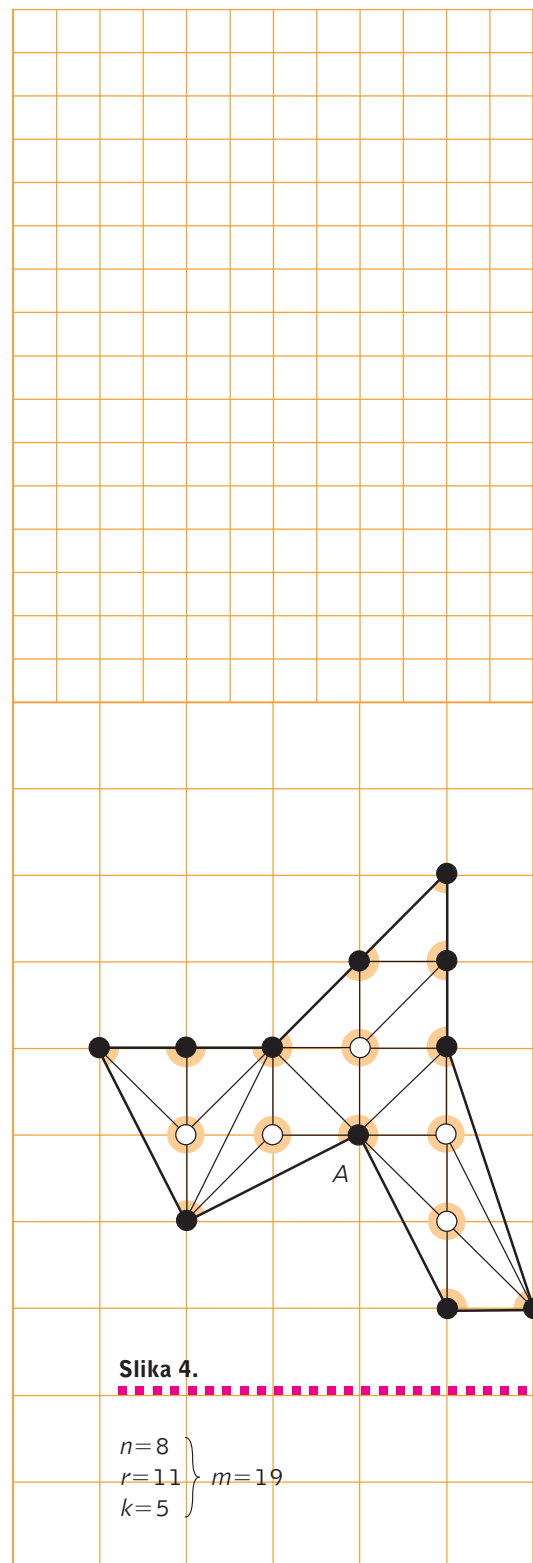
$$p = (1/2) |a_1b_2 - a_2b_1| = |d|/2,$$

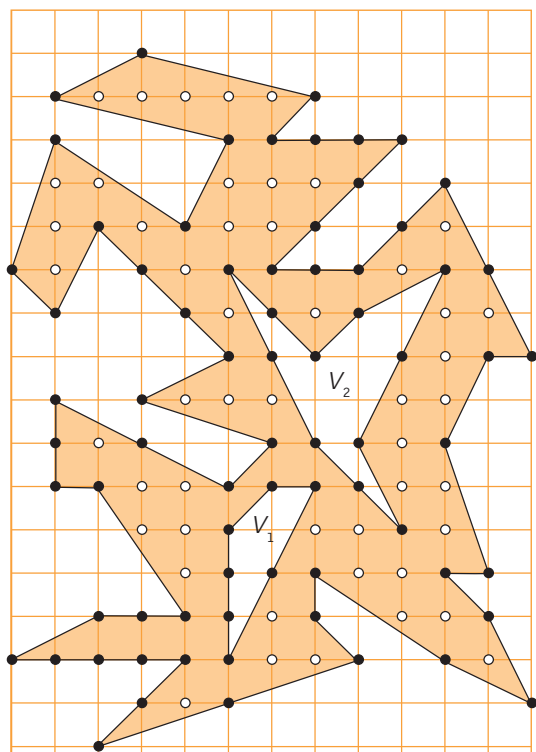
torej je enaka $1/2$. S tem je dokaz sklenjen.

Pickova formula in njena posplošitev

Najprej bomo dokazali Pickovo formulo, pri čemer si bomo pomagali s prvim poglavjem.

Naj bo r točk iz $\mathbb{Z}^2$ na robu n -kotnika V z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ (zato velja $r \geq n$), k pa v njegovi notranjosti. Razkosajmo večkotnik V na trikotnike z oglišči v vseh teh $r + k$ točkah, tako da poljubna dva trikotnika razkosanja bodisi nimata nobene skupne točke bodisi imata skupno le oglišče ali le stranico. Najprej izberimo oglišče večkotnika V ob njegovem največjem notranjem kotu in ga zaznamujmo z A . Brž se lahko prepričamo, da vsaj ena od diagonal (večkotnika V) s krajiščem A razdeli V na dva večkotnika z manjšim številom stranic. Na podoben način se nato lotimo teh dveh večkotnikov in tako nadaljujemo, dokler ne dobimo razkosanja večkotnika V na same trikotnike. Trikotnik iz dobljenega razkosanja ima lahko v svoji notranjosti ali na robu še kako od oglišča različno točko iz $\mathbb{Z}^2$,





Slika 5.

$$r = 72$$

$$k = 49$$

$$l = 2$$

ki leži v notranjosti ali na robu večkotnika V . Takšno točko povežemo z oglišči (ali ogliščem) trikotnika, ki jo vsebuje, nato postopek ponovimo na novo dobljenih trikotnikih in podobno nadaljujemo, dokler se da. Vsak trikotnik na koncu dobljenega razkosanja ima samo oglišča v $\mathbb{Z}^2$, torej je enostaven. Po izreku 1 ima ploščino enako $1/2$, zato ploščina p večkotnika V meri $m/2$, kjer je m število trikotnikov razkosanja. Dokažimo, da je $m = r + 2k - 2$, saj od tod takoj sledi Pickova formula $p = r/2 + k - 1$.

Vsota vseh notranjih kotov trikotnikov razkosanja je enaka $m180^\circ$. Enako vsoto dobimo, če seštejemo notranje kote n -kotnika V (dobro je znano, da je ta vsota enaka $(n - 2)180^\circ$), polne kote ob točkah iz $\mathbb{Z}^2$ v notranjosti V (teh je k) in iztegnjene kote ob vseh točkah iz $\mathbb{Z}^2$ na robu V , ki niso oglišča večkotnika V (teh je $r - n$). Torej velja

$$m180^\circ = (n - 2)180^\circ + k360^\circ + (r - n)180^\circ,$$

od koder sledi iskana enakost $m = r + 2k - 2$.

Dokazali smo Pickovo formulo, njeno posplošitev pa strnimo v naslednji izrek.

Izrek 2. Večkotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ naj ima l večkotniških lukenj, ki se ne dotikajo ena druge ali roba večkotnika in imajo oglišča v $\mathbb{Z}^2$. Če je r točk množice $\mathbb{Z}^2$ na robu preluknjane večkotnika, k pa v njegovi notranjosti, meri njegova ploščina

$$p = r/2 + k + l - 1.$$

Dokaz. Označimo večkotniške luknje z $V_1, V_2, \dots, V_l$, nepreluknjani večkotnik pa z V_0 . Naj r_i točk iz $\mathbb{Z}^2$ leži na robu večkotnika V_i ($i = 1, 2, \dots, l$), k_i točk iz $\mathbb{Z}^2$ pa v njegovi notranjosti. Preštejmo točke iz $\mathbb{Z}^2$ na robu preluknjane večkotnika:

$$r = r_0 + r_1 + \dots + r_l,$$

nato pa še vse točke iz $\mathbb{Z}^2$, ki ležijo v notranjosti nepreluknjane večkotnika V_0 :

$$k_0 = k + (r_1 + k_1) + \dots + (r_l + k_l).$$

Po Pickovi formuli je ploščina V_i enaka $p_i = r_i/2 + k_i - 1$, zato ploščina preluknjane večkotnika meri

$$\begin{aligned} p &= p_0 - (p_1 + \dots + p_l) \\ &= r_0/2 + k_0 - 1 - (r_1/2 + \dots + r_l/2 + k_1 + \dots + k_l) + l \\ &= r_0/2 + k + (r_1 + \dots + r_l) + (k_1 + \dots + k_l) \\ &\quad - (r_1 + \dots + r_l)/2 - (k_1 + \dots + k_l) + l - 1 \\ &= (r_0 + r_1 + \dots + r_l)/2 + k + l - 1 \\ &= r/2 + k + l - 1. \end{aligned}$$

Izrek je dokazan, bralca pa čaka še nekaj nalog.

Naloge

1. Dokaži, da enakostranični trikotnik ne more imeti vseh treh oglišč v $\mathbb{Z}^2$.
2. Naj ima daljica le krajišči A in B v $\mathbb{Z}^2$. Potem obstaja tak $C \in \mathbb{Z}^2$, da je trikotnik ABC enostaven.
3. Poišči vsaj en preluknjani večkotnik z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ in s ploščino $p = 3$.
4. Dokaži, da meri ploščina preluknjane večkotnika z l večkotniškimi luknjami in z oglišči v $\mathbb{Z}^2$ vsaj $(5+l)/2$ in da te ocene ni mogoče izboljšati.

Boris Lavrič

Rešitve

torej ocene ni mogoče izboljšati.

$$p = (5/l + 1)/2$$

Na sliki 7 je načrtan trikotnik z l luknjami in s ploščino

$$p = l/2 + k + l - 1 \geq (3/l + 3)/2 + l - 1 = (5/l + 1)/2.$$

4. Vsaka luknja ima vsaj tri oglišča, zato ima preluknjani večkotnik na robu vsaj $3l + 3$ točke iz $\mathbb{Z}^2$. Po izreku 2 tedaj za njegovo ploščino velja

3. Glej sliko 6.

torej je trikotnik $A'B'C'$ po izreku 1 enostaven. Premaknimo zdaj $A'B'C'$ nazaj, tako da $A'B'C'$ preide v ABC , in iskana točka C je tu.

$$p = (1/2) |pm + qn| = 1/2,$$

Po formuli (2) ploščina trikotnika $A'B'C'$ meri

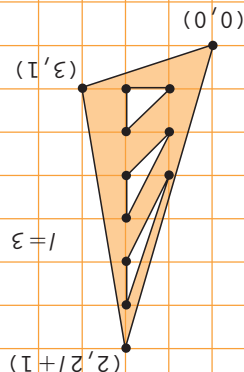
$$+qn = 1. \text{ Postavimo } C = (-q, p).$$

Ker sta števil m in n tuj, obstajata taki celi števil p in q , da velja pm največji skupni delitelj števil m in n .

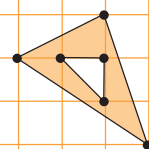
2. Vzporedno premaknimo daljico AB , tako da A preide v $A' = (0, 0)$, B pa v $B' = (m, n)$. Seveda sta m in n celi števil. Razen krajišč na daljici $A'B'$ ni točk iz $\mathbb{Z}^2$, zato sta števil m in n tuj. Res, v nasprotnem primeru bi namreč na $A'B'$ ležala tudi točka $(m/d, n/d)$, kjer je d največji skupni delitelj števil m in n .

1. Kvadrat dolžine vsake daljice s krajišči v $\mathbb{Z}^2$ je po Pitagorovem izreku celo število. Denimo, da ima enakostranični trikotnik s stranico dolžine a vsa oglišča v $\mathbb{Z}^2$. Potem je njegova ploščina $p = a^2\sqrt{3}/4$ iracionalno število, ker velja $a^2 \in \mathbb{Z}^2$. Toda po formuli (2) je dvakratnik ploščine p celo število. Oboje hkrati ni mogoče, torej trditev velja.

Slika 7.



Slika 6.



Catalanovo domnevo potrjeno



Belgijski matematik Eugene Charles Catalan je živel v letih od 1814 do 1894. Študiral je v Parizu, od leta 1856 je bil profesor na univerzi v Liegeu. Udejstvoval se je na različnih področjih matematike: v kombinatoriki, geometriji, teoriji števil.

Potenco a^b , kjer sta a , b naravni števili večji od 1, imenujmo *prava*. Kvadrati 2^2 , 3^2 , 4^2 , ..., kubi 2^3 , 3^3 , 4^3 , ..., bikvadrati 2^4 , 3^4 , 4^4 , ... so že zgledi pravih potenc. Pravo potenco, pri kateri je eksponent sestavljeno število, lahko napišemo kot pravo potenco s praštevilskim eksponentom, npr. $2^4 = (2^2)^2$, $3^{15} = (3^5)^3 = (3^3)^5$ in podobno v drugih primerih; eksponent nad oklepajem je praštevilo.

Leta 1844 je Catalan objavil domnevo: $8 = 2^3$ in $9 = 3^2$ sta *edini zaporedni naravni števili, ki sta obenem pravi potenci*. Domnevo so natisnili v eni, tiste čase redkih, matematičnih revij. Catalan je pripomnil, da za domnevo še nima dokaza. Tudi pozneje o tem ni priobčil kaj bistvenega.

Da Catalanova domneva drži, je leta 2002 dokazal Preda Mihailescu. Ta je bil rojen leta 1955 v Romuniji, matematiko je študiral v Zürichu, sedaj deluje v Nemčiji. Dokaz, ki ga je Mihailescu podal, gradi na izvirnih idejah in se naslanja na globoke izsledke teorije števil. (Seveda ni preprost.)

Catalanovo domnevo je mogoče povedati v obliki: *Edina naravna števila x , y , p , q , ki so večja od ena in izpolnijo enačbo*

$$x^p - y^q = 1, \quad (1)$$

so $x = q = 3$, $y = p = 2$.

Enačba (1) je dobila ime Catalanova. Omenili smo že, da je prava potencia zmeraj izrazljiva tako, da je eksponent praštevilo. Bralec se sam lahko prepriča, da enačba (1) nima rešitve v naravnih številih, če sta praštevili p in q enaki. Zato se omejimo na primer, ko sta praštevili p in q v enačbi (1) različni.

Ko je $p = 2$, $q = 3$ in $p = 3$, $q = 2$, iz (1) dobimo enačbi

$$\begin{aligned} x^2 - y^3 &= 1 \text{ in} \\ x^3 - y^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Obravnaval ju je že Leonhard Euler (1707–1783); dognal je: Edini naravni števili, ki ustrezata prvi enačbi, sta $x = 3$, $y = 2$; druga enačba takšnih rešitev nima. S tem je Euler dokazal, da sta med kvadrati in kubi 8 in 9 edini zaporedni naravni števili. Morda je to Eulerjevo dognanje nagnilo Catalana, da je postavil svojo domnevo.

Ker je $x = 3$, $y = 2$ edina rešitev prve enačbe v (2), enačba

$$x^2 - (y^t)^3 = 1$$

pri naravnem $t > 1$ ne premore rešitve v naravnih številih x , y ; saj mora biti

$x = 3$, $y^t = 2$, zaradi $t > 1$ pa y ni naravno število.

Za različna praštevilska eksponenta v enačbi (1) so tako ostale možnosti: p liho praštevilo, $q = 2$; nato $p = 2$, q liho praštevilo in $q > 3$; končno p, q sta različni praštevili.

Če je p liho praštevilo, $q = 2$, enačba (1) nima rešitve v naravnih številih (V. A. Lebesgue leta 1850); isto velja, če je $p = 2$ in q liho praštevilo nad 3 (Chao Ko leta 1961). Ostane še možnost, ko sta p, q različni lihi praštevili. Mihailescu in pred njim že nekateri drugi so našli pogoje, ki jih morajo izpolnjevati x, y, p in q , če naj dajejo rešitev enačbe (1). Mihailescu je pokazal, da se ti pogoji ne dajo izpolniti, ker pripeljejo do protislovja. Tudi pri različnih lihih praštevilih enačba (1) ni rešljiva v naravnih številih.

Iz vsega povedanega izhaja, da je $x = q = 3$, $y = p = 2$ edina rešitev enačbe (1) v naravnih številih, večjih od ena. Catalanova domneva je resnična.

Nalogi

1. Če sta praštevili p in q enaki, enačba (1) ni rešljiva v naravnih številih. Pokaži.
2. Če dopustimo, da je od eksponentov v enačbi (1) eden enak 1 ali oba enaka 1, ima enačba neskončno rešitev. Pokaži.

Literatura

1. Turno Metsankyla, Catalan's conjecture: another old Diophantine problem solved, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (2004) 43–57.
2. Paulo Ribenboim, Catalan's Conjecture, Clarendon Press, Oxford University Press, Boston, 1994.

Josip Grasselli

Koliko prstov imajo na rokah Venerani?

Na straneh do 28 objavljamo naloge iz prejšnje številke in njihove rešitve, v katere so se prikradle takšne ali drugačne netočnosti.

Raziskovalni robot Razkopač, ki ga je z raketnega izstrelišča na Volovji rebri poslala na Venero Agencija RS za Vesolje, je posredoval na Zemljo tudi fotografijo kamna, na katerem je narisana naslednji vzorec:

	\$	†
	\$	†
	\$	†
\$	\$	\$

Ena od možnih domnev je, da je na fotografiji račun seštevanja. Dodatno predpostavimo, da Venerani uporabljajo pozicijski številski zapis, ki je analogen našemu desetišskemu zapisu (tudi glede izbire osnove številskega sistema).

Ali lahko iz zapisa na kamnu ugotovimo, koliko prstov je na Veneranovih rokah?

Marija Vencelj

Rešitev

Poiskati moramo osnovo številskega sistema, v katerem bo rešljiv skriti račun, ki ga prikazuje narisani vzorec. Izkaže se, da ob-
staja rešitev le v številskem sistemu z osnovo 4, in tudi v tem sistemu ena sama. To je

$$13^4 + 13^3 + 13^2 + 13 = 111^4. \quad (1)$$

Ker je $\dagger$ števka v številskem sistemu z osnovo a , je $\dagger \leq a-1$ in zato $3 \geq a-1$. Sledi $a \leq 4$. Osnovi $a=2$ in $a=3$ z vstavljanjem v (2) izločimo, za $a=4$ pa dobimo rešitev (1). Za $\$ = 2$ dobimo enačbo

$$3\dagger = 2(a-1)^2. \quad (3)$$

Zaradi $\dagger \leq a-1$ sledi iz nje $2a \leq 5$, čemur ustreza le osnova $a=2$. Vstavljanje v (3) izloči tudi to možnost.

torej je $\$ = 1$ ali $\$ = 2$. Če je $\$ = 1$, velja $3a+3\dagger = a^2+a+1$. Od tod sledi

$$3\dagger = (a-1)^2. \quad (2)$$

Trakovi in premice preko kroga

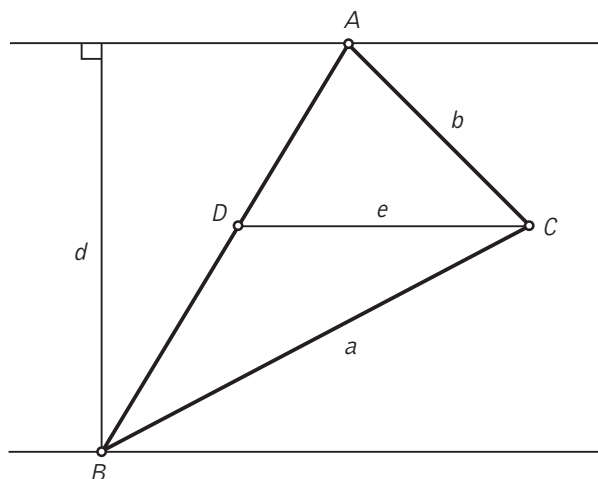
Naloge

1. Koliko trakov širine 3 cm potrebujemo, da z njimi pokrijemo kvadrat z 10 cm dolgo stranico?
2. Koliko je širok najožji trak, ki pokriva dani trikotnik ABC ?
3. Pravokotnik s stranicama dolžine 20 cm in 14 cm razdelimo s šestimi premicami na manjše dele. Koliko meri polmer največjega kroga, ki ga zagotovo vsebuje vsaj eden od teh delov?
4. Pravični n -kotnik s stranico a razdelimo z daljico na dva dela. Koliko meri polmer največjega kroga, ki ga neodvisno od razdelitve vsebuje vsaj eden od obeh delov?

Rešitve

1. Za pokritje kvadrata potrebujemo vsaj štiri trakove, saj z njimi pokrijemo tudi kvadratu včrtani krog.
2. Denimo, da oglišči A in B ležita vsako na eni od robnih premic traku širine d , ki vsebuje trikotnik ABC . Zaznamujmo z e dolžino tiste zveznice CD oglišča C s točko D na AB , ki je vzporedna traku.

Slika 1.



Iz slike vidimo, da je de dvakratnik ploščine trikotnika ABC , zato velja $de = av_a = bv_b$. Dokažimo, da velja $d \geq v_a$ ali $d \geq v_b$. Če je $d < v_a$ in $d < v_b$, iz zgornjih enakosti sledi $e > a$ in $e > b$. Od tod dobimo $\angle CBD > \angle CDB$, $\angle CAD > \angle CDA$ in zato

$$\angle CAD + \angle CBD > \angle CDA + \angle CDB = \pi.$$

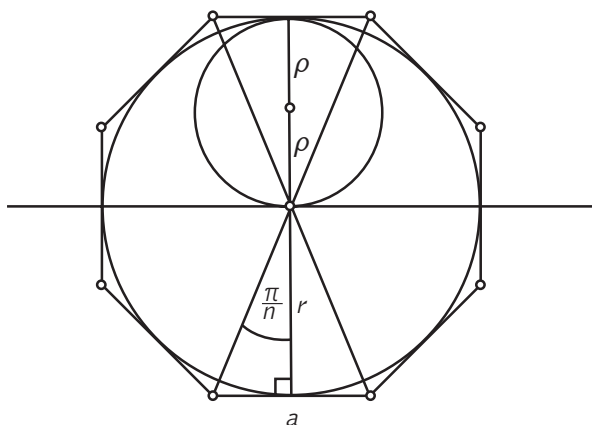
To je seveda protislovno, torej je res $d \geq v_a$ ali $d \geq v_b$. Od tod brž sledi, da je najožji trak, ki pokriva trikotnik, širok toliko, kot meri najkrajša višina trikotnika.

3. Iskani polmer je enak 1 cm. Po eni strani delitev na enake dele z vzporednicami k daljši stranici pravokotnika ne dopušča večjega polmera, po drugi strani pa v vsakem krogu polmera 7 cm, ki leži v pravokotniku, najdemo parcelo, ki vsebuje krog polmera 1 cm.

4. Najprej rešimo problem za pravilni n -kotnik s sodim n . Razpolovimo n -kotnik s premico, ki je vzporedna nosilki ene od stranic n -kotnika. Oba dela n -kotnika vsebujeta krog s premerom r , enakim polmeru n -kotniku včrtanega kroga. Iskani polmer ρ torej ne presega $\frac{1}{2}r$.

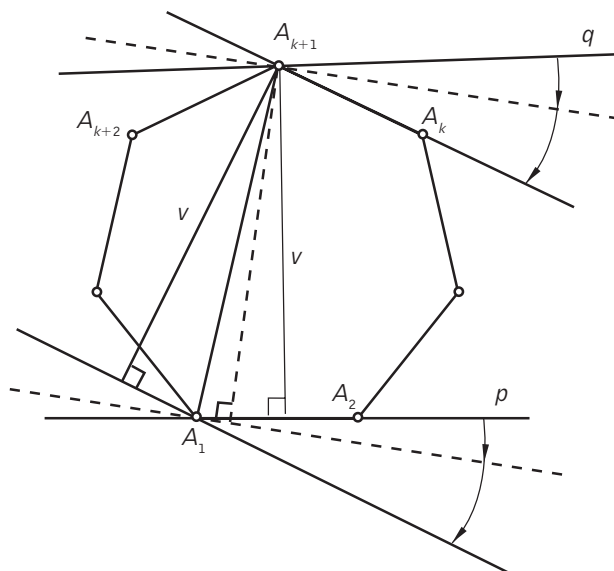
Ker v n -kotnik včrtani krog vsebuje krog s polmerom $\frac{1}{2}r$, ki leži v enem od obeh delov, na katera premica razdeli n -kotnik, za sodi n velja $\rho = \frac{1}{2}r$. Po kratkem računu lahko ρ izrazimo s stranico a in dobimo $\rho = \frac{a}{4} \cotg \frac{\pi}{n}$.

Slika 2.



Na vrsti je n -kotnik z lihimi $n = 2k - 1$, $k > 1$. Najprej dokažimo, da je ena od robnih premic najožjega traku, ki vsebuje n -kotnik $M = A_1 A_2 \dots A_{2k-1}$, nosilka ene od njegovih stranic. Začnimo z robno premico p , ki vsebuje stranico $A_1 A_2$. Druga robna premica traku tedaj poteka skozi A_{k+1} , širina traku pa je enaka višini na osnovnico $A_1 A_2$ enakokrakega trikotnika $A_1 A_2 A_{k+1}$. Zdaj sukajmo p okrog A_1 v smeri urinega kazalca, dokler vzporednica q , ki naj se pri tem suče okrog A_{k+1} in je vzporedna zasukani premici p , ne preide v nosilko stranice $A_k A_{k+1}$.

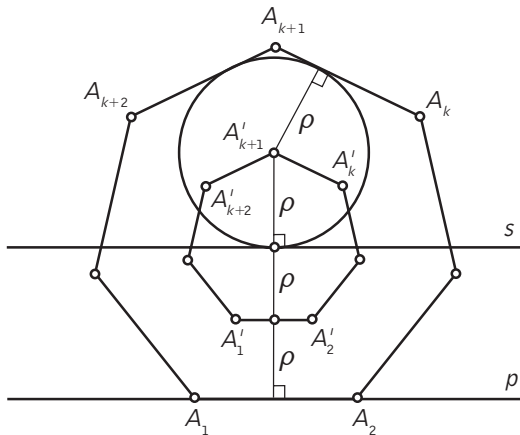
Slika 3.



V končni legi je širina traku spet taka kot na začetku, v vseh vmesnih legah pa je večja, kar lahko ugotovimo s primerjavo pravokotnih trikotnikov s hipotenuzo $A_1 A_{k+1}$ (glej sliko 3). Rob najožjega traku, ki vsebuje večkotnik M , torej res poteka skozi eno njegovih stranic.

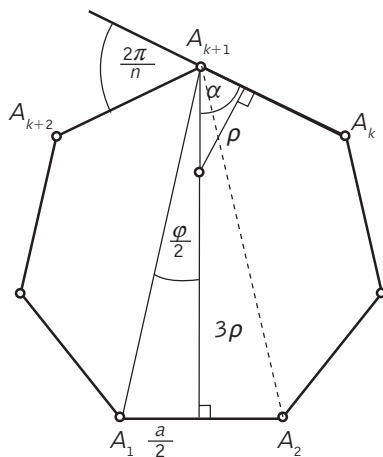
Naj bo premica s vzporedna nosilki p stranice $A_1 A_2$ in naj preseka M na dva dela, tako da je razdalja med p in s enaka premeru 2ρ kroga K , ki se dotika s in stranic $A_k A_{k+1}$, $A_{k+1} A_{k+2}$. Oba dela večkotnika M tedaj vsebujeta krog s polmerom ρ , večjega pa nobeden. Torej iskani polmer ne presega ρ . Dokažimo, da je enak ρ .

Slika 4.



Izračunajmo zdaj p . Oglejmo si višino vna osnovnico A_1A_2 enakokrakega trikotnika $A_1A_2A_{k+1}$.

Slika 5.



Boris Lavrič



Krog v trikotniku

Naloga

Trikotnik s stranicami dolžine 39, 42 in 45 centimetrov razdelimo z daljico na dva dela. Pri vsaki taki razdelitvi vsaj eden od obeh delov vsebuje krog polmera r . Kolikšen je največji možni r ?

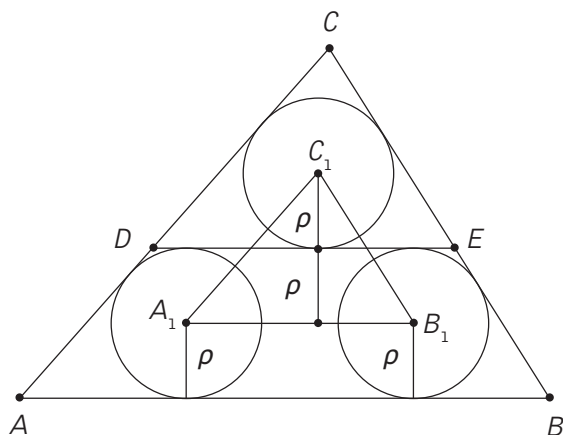
Rešitev

Naj bo ABC trikotnik s stranicami a , b in c , kjer je $c \geq a$ in $c \geq b$. Razdelimo ga z daljico DE , vzporedno z AB , tako da je premer 2ρ trikotniku DEC včrtanega kroga enak višini trapeza $ABED$. Pri tej razdelitvi trikotnika ABC očitno oba dela vsebujeta krog s polmerom ρ , nobeden pa kroga z večjim polmerom. Iskani polmer r torej ne presega ρ . Dokažimo, da pri vsaki razdelitvi trikotnika ABC z daljico vsaj eden od obeh delov vsebuje krog s polmerom ρ , od koder seveda sledi, da je $r = \rho$.

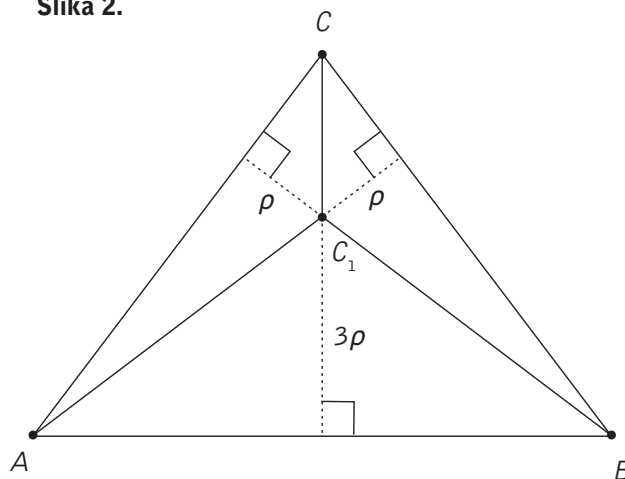
Najprej v kote CAB , ABC in BCA včrtajmo kroge s polmerom ρ , njihova središča pa v istem zaporedju zaznamujmo z A_1 , B_1 in C_1 (zadnji od teh krogov je včrtan trikotniku CDE).

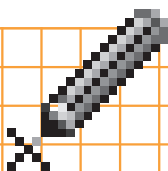


Slika 1.



Slika 2.



[illegible]

Dopolni račune

■ Rešitev nagradne naloge iz Preseka XXXI/3

Naloga ima štiri različne rešitve. Če manjkajoča števila označimo, kot kaže slika 1, je pri vseh štirih rešitvah $c=5$, $d=1$, $e=3$ in $f=6$. Možne vrednosti preostalih števil prikazuje tabela na sliki 2.

Slika 1.

3	+	a	−	b	=1
×		×		−	
c	×	d	+	e	=8
−		+		+	
f	+	g	−	h	=5
=9		=5		=5	

Slika 2.

	1. reš.	2. reš.	3. reš.	4. reš.
a	1	2	3	4
b	3	4	5	6
g	4	3	2	1
h	5	4	3	2

Urniki tekmovanj v letu 2005

V nadaljevanju članka boste našli nekaj osnovnih informacij o posameznih tekmovanjih. Vabimo vas tudi, da obiščete spletno stran **DMFA Slovenije** (<http://www.dmfa.si/>), kjer boste našli več podatkov o posameznem tekmovanju. Mentorje prosimo, da sledijo tudi novicam, ki jih objavljamo na informacijskem strežniku.

■ Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila dobite pri gospe Klavdiji Mlinšek na OŠ Cvetka Golarja, Frankovo naselje 51, Škofja Loka, tel. (04) 51-30-400, elektronski naslov »klavdija.mlinsek@siol.com«.

Matematika – srednja šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*. **Olimpijska ekipa** bo izbrana na podlagi rezultatov domačih nalog, izbirnega testa in državnega tekmovanja. Datum izbirnega testa bo objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije*. Podrobnejše informacije dajeta gospod Darjo Felda, Pedagoška fakulteta Koper, Cankarjeva 5, Koper, tel. (05) 66-31-260, elektronski naslov »darjo.felda@pef.upr.si«, in gospod Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (01) 47-66-500, elektronski naslov »matjaz.zeljko@fmf.uni-lj.si«. **Dijaki srednjih poklicnih šol** se lahko udeležijo matematičnega tekmovanja v posebni kategoriji. To



področje	šola	tekmovalje	datum
matematika	osnovna	šolsko področno državno	17. marec 30. marec 16. april
	srednja	šolsko izbirno državno sredozemsko olimpijada	17. marec 30. marec 16. april april julij
	za dijake srednjih poklicnih šol	šolsko področno državno	17. marec 30. marec 16. april
	za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol	šolsko področno državno	17. marec 30. marec 16. april
fizika	osnovna	šolsko področno državno	10. marec 22. marec 9. april
	srednja	regijsko državno izbirno olimpijada	18. marec 9. april 6. maj 3. do 12. julij
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	24. september
poslovna matematika	srednja	šolsko državno	22. marec 15. april
podelitev priznanj nagrajencem na državnih tekmovaljih v organizaciji DMFA Slovenije			19. maj

tekmovalje ureja *Pravilnik o tekmovalju dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike*. Več informacij dobite pri gospe Dušanki Vrenčur, Živilska šola Maribor, Park mladih 3, Maribor, tel. (02) 32-08-600, elektronski naslov »dusanka.vrencur@guest.arnes.si«. Tudi **dijaki srednjih tehniških in strokovnih šol, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa**, se lahko udeležijo tekmovalja v posebni kategoriji. Tekmovalja v tej kategoriji ureja *Pravilnik o tekmovalju dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike*. Informacije dobite pri gospe Darinki Žižek, Srednja ekonomska šola, Trg B. Kidriča 3, Maribor, tel. (02) 25-13-461, elektronski naslov »darinka.zizek@guest.arnes.si«.

www.dmfa.si

Naj poudarimo, da se matematičnih tekmovalj srednješolcev, ki jih podrobno ureja *Pravilnik o tekmovalju srednješolcev v znanju matematike*, lahko udeležujejo vsi srednješolci ne glede na vrsto šole, ki jo obiskujejo. Ta tekmovalja so podvržena mednarodni primerljivosti zaradi končnega izbora ekip, ki sodelujejo na mednarodnih tekmovaljih.

Fizika – osnovna šola

Tekmovalja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovalju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Dodatne informacije dobite pri gospe Jelislavi Sakelšek, tel. (01) 54-13-541 (med 8. in 9. uro), elektronski naslov »jelislava.sakelsek@guest.arnes.si«.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovalja v znanju fizike je objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije*. Informacije dobite pri gospodu Cirilu Dominku na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, elektronski naslov »ciril@gimb.org«.

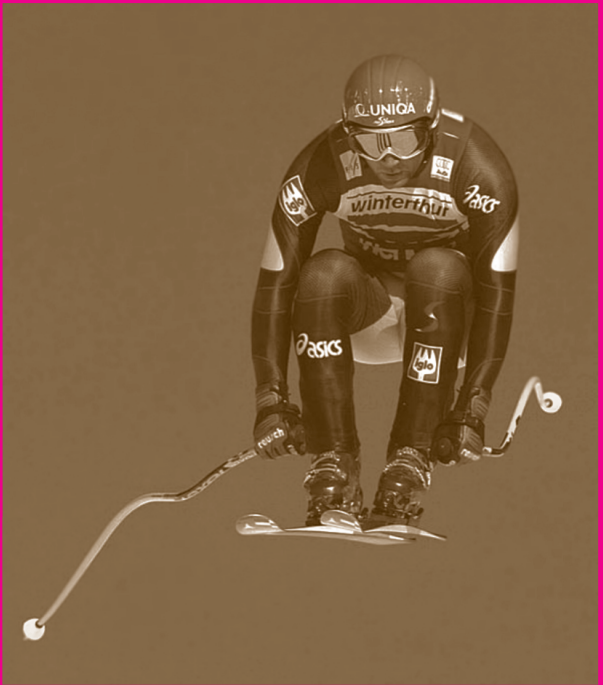
Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrila matematika*.

Poslovna matematika

Podrobne informacije o tekmovalju dobite pri gospodu Darku Rupretu, Šolski center za pošto, ekonomijo in telekomunikacije, Celjska 16, Ljubljana, tel. (01) 23-42-440, fax. (01) 23-42-424, elektronski naslov »darko.rupret@s-scpet.lj.edus.si«.

Darjo Felda

DO DITEV, EPTIEV	DOBIMO GA PRI BLAGAJNI										
		S ŠMARJEM ZDRUŽENO NASELJE PRI GROSUPLJEM					TOMISLAV NERALIC	NEPRI- JETEN IZPUŠČAJ, MOZOLJ			
		MAJHNO PLOVILO	URŠKA BOŽIČ							PESNIŠKI IZRAZ ZA VEČNOST	
	MANJŠA SOBA V GORENJSKI KMEČKI HIŠI										
	JENKOV PESNIŠKI CIKEL ZNAK ZA ZLATO										
			IZREDNA LEPOTA, PRIVLAČ- NOST ČO - ? - SAN				POUDARJEN OSTRŽKOV ORGAN OZNAKA TUNIZIJE				
UTEŽ- MERA AVNAVA LESA PASU					PESNIK VRAZ POKRAJINA V JZ SRBIJI					ODKRITELJ AVSTRALIJE (JAMES) SOPOMENKA, SOZNAČNICA	
	SKRITO BOGASTVO	IGRALEC WELLES DELOVA PRILOGA OB TORKIH					DOLOČITEV KAZNI V SODNEM POSTOPKU				
			NEKDANJI MONGOLSKI VLADAR SL. PESNIK (IVO)			ALUMINI- JEVA RUĐA LEPOREČNA BESEDNA ZVEZA					PIVO STARIH SLOVANOV JURIJ GAGARIN
					ENOTA ZA GLASNOST ADAM BOHORIČ				ENKA		
			PEVKA ŠVAJGER BIATLONEC BJÖRN- DALEN						UGLAŠENA KOVINSKA PLOŠČA NASPROTJE SINA		AVTOMOB. OZNAKA MADŽARSKE IGLASTO DREVO
		ZAHTEVA ZA REŠITEV SPORA NA SODIŠČU SELEN					ZNAK ZA TORIJ KRATICA HUMANIT. ORGANIZ.			ZNAK ZA NOBELIJ MEDMET PRIGA- NJANJA	ZNAK ZA BARIJ PAVEL KUNAVER
					PRI MAJHNI HITROSTI JE ZANE- MARLJIV						
TRK ŠKEGA POLA					TEMEJNA MATEMAT. RESNICA					TEKOČINA, KI SE DARUJE	

Rešitvi krížank

Presek
Letnik 32
(2004/2005)
številka 1

Rešitev
križanke
iz te številke

																	
				AVTOR JAVNO ROVALE	STRO IZDA ZA JA STAVLJE	SEKUNDNO UTRNO NIENJE	DVO POLNOST	CRVA P	PRIST KOTIČNA HOBPA	ČETRTNA DESETA	PRICEN OBARCO DO SODALI	NAVEDNO PRE TENDU	POVRNO DNEK JA NEVARNOST				
				AMERISKA TILIMSKA FIRKALNA LOKALNA													
				ENOTNO SADRŽANO DVA-ALICE													
				KODI IMA NALO HUMANNA					PLAST FIRMA, IMA LEŽE SODIČNO								
				PLUTISKA DOLLA SODIČNO													
				NOVATI NAVEDNO NEČNO					ŠLOH ALFONDO SODIČNO DOLLA IMA SODIČNO								
				TEČNO TENDIČNO													

WORD SEARCH

Horizontal words:

1. SKALNI
2. ZOB
3. SVETLANA
4. MESANCA
5. CESTNI
6. POSP
7. NERADO
8. ZAK
9. NERADO
10. NERADO
11. NERADO
12. NERADO
13. NERADO
14. NERADO
15. NERADO

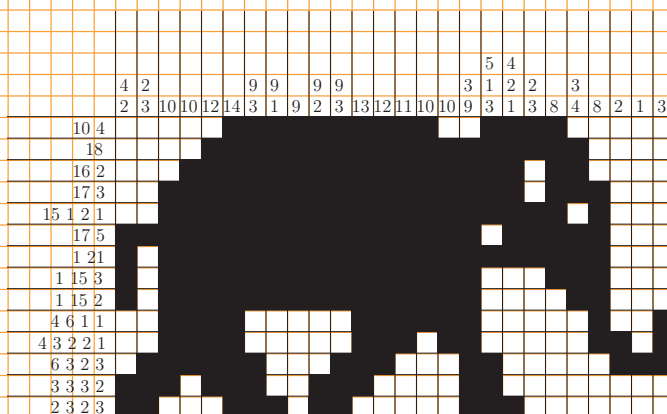
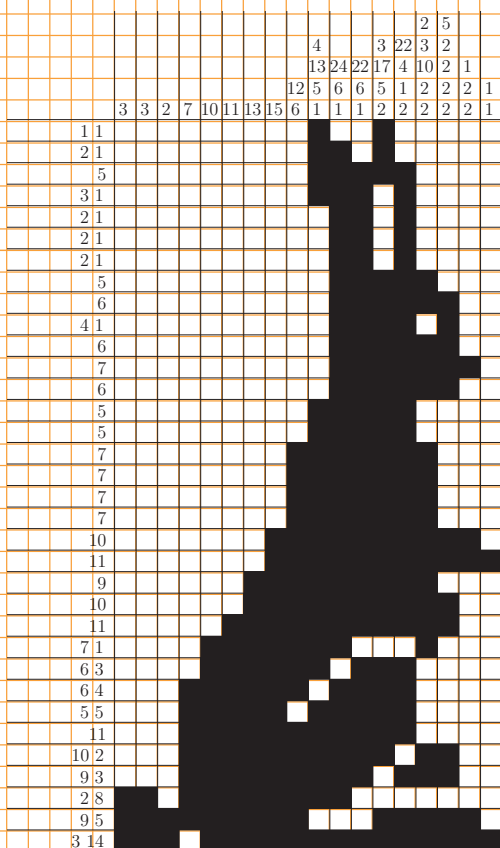
Vertical words:

1. SVETLANA
2. MESANCA
3. CESTNI
4. POSP
5. NERADO
6. ZAK
7. NERADO
8. ZAK
9. NERADO
10. NERADO
11. NERADO
12. NERADO
13. NERADO
14. NERADO
15. NERADO

Diagonal words:

1. SVETLANA
2. MESANCA
3. CESTNI
4. POSP
5. NERADO
6. ZAK
7. NERADO
8. ZAK
9. NERADO
10. NERADO
11. NERADO
12. NERADO
13. NERADO
14. NERADO
15. NERADO

Rešitvi gobelinov s strani 28 in 29



Pólya – matematik, ki je preštel grupe, grafe in kemijske spojine

Predstavili vam bomo matematika s priimkom Pólya. Ime mu je bilo najprej György, kasneje George. Rodil se je v Budimpešti leta 1887, umrl pa je v Palo Altu v Kaliforniji leta 1985. Njegovi starši so bili Židje, ki so leto pred njegovim rojstvom prestopili v krščanstvo. Tedaj so priimek Pollák spremenili v Pólya. Sin, ki se jim je rodil leta 1887, je dobil značilno madžarsko ime György.

György Pólya se je šolal v Budimpešti. Leta 1905 je na univerzi v Budimpešti začel s študijem prava, kasneje ga je zamenjal s študijem književnosti in jezikov, iz česar je tudi diplomiral. Pritegnila ga je tudi filozofija. Njegov profesor mu je svetoval, naj obiskuje še tečaj iz matematike in fizike, ker mu bo to pomagalo pri razumevanju filozofskih problemov. In tako se je György srečal z matematiko, ter ji ostal zvest do konca življenja. V šali je dejal: *Ni sem bil dovolj dober za fiziko, toda bil sem predober za filozofijo. Matematika je bila vmes.*

Pólya je iz Budimpešte odšel na Dunaj, Göttingen ter Pariz, kjer je spoznal vodilne matematike tistega časa. Nazadnje je dobil zaposlitev na Eidgenössische Technische Hochschule v Zürichu v Švici, kjer je deloval med letoma 1914 in 1940; redni profesor je postal

leta 1928, med leti 1938 in 1940 je bil tudi dekan. Leta 1940 se je zaradi politične situacije v Evropi izselil v ZDA, kjer je postal George. Najprej je bil zaposlen na univerzi Brown (v mestu Providence, Rhode Island), od leta 1942 pa na univerzi Stanford v Kaliforniji. Tam se je leta 1953 upokojil, vendar je nadaljeval s predavanji do pozne starosti; še leta 1978, ko je bil star več kot 90 let, je imel predavanja iz kombinatorike.

Pólya je bil vsestranski matematik. Njegova raziskovanja obsegajo teorijo števil, funkcionalno analizo, matematično statistiko, geometrijo, matematično fiziko in kombinatoriko, ukvarjal se je tudi z matematičnimi problemi v astronomiji in kemiji, pomeben pa je tudi njegov prispevek k metodiki matematike.

Članek, ki ga je objavil leta 1937 in ki vsebuje tisto, kar danes običajno imenujemo *teorija Pólya*, predstavlja enega od osrednjih dosežkov kombinatorike.¹

Ne glede na pomen svojega odkritja (ki so ga sodobniki takoj razumeli in privzeli) se je Pólya s to temo ukvarjal zelo kratek čas. Skupaj je objavil šest člankov, vse v obdobju 1936–1937. Od teh člankov se jih kar pet nanaša na preštevanje izomer kemijskih spojin, samo eden (katerega naslov smo navedli) pa je objavljen v matematični reviji.



Slika 1.
George Pólya (1887–1985)

1 »Kombinatorische Abzählbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen (Kombinatorično preštevanje grup, grafov in kemijskih spojin).

Mnogo več pozornosti in časa je Pólya je posvetil metodi-ki matematike. Že med bivanjem v Švici je napisal knjigo o splošnih metodah, s pomočjo katerih rešujemo matematične probleme in prihajamo do novih matematičnih odkritij. Ven-dar so mu založniki eden za drugim odklanjali objavo te knji-ge. Šele v Ameriki je našel založnika, tako da je bila knjiga »How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method« objavljena šele leta 1945. Knjiga je doživela nesluten uspeh: prodano je bilo preko milijon izvodov in prevedena je bila v preko dvajset jezikov, med drugim tudi v slovenščino.²

V zvezi z matematičnimi raziskovanji velja omeniti naslednji Pólya-jev nasvet: *Če ne moreš rešiti nekega problema, obstaja enostavnejši problem, ki ga lahko rešiš: poišči ga!* V zvezi s poučevanjem matematike pa je izjavil: *Poučevanje ni znanost, temveč je umetnost.* Zagovarjal je (danes zelo zaželen) pouk z aktivnostmi, sklicujoč se na kitajski pregovor: »Ko slišim, pozabim; ko vidim, si zapomnim; ko naredim, razumem.«

■ Teorija Pólya

Pólya je odkril splošno metodo za reševanje problema pre-števanja, to je, za določanje števila različnih (končnih) grup in grafov. Postopek je prezapleten, da bi ga opisali. Na tem mestu naredimo le primer.

Drevo je povezani graf brez ciklov. Na sliki 2 so prikazana vsa drevesa z $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ točkami. Označimo šte-vilo medsebojno različnih dreves z n točkami s t_n . Na sliki 2 vidimo, da je $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, $t_6 = 6$. Definirajmo funkcijo

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n.$$

Iz navedenih primerov vidimo, da je $t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + \dots$. Če uspemo določiti funkcijo $t(x)$, tedaj za vsako število n vemo, koliko je t_n .

S pomočjo teorije Pólya lahko dokažemo, da velja

$$t(x) = T(x) - \frac{1}{2} [T^2 - T(x^2)],$$

kjer je $T(x)$ neka zapleteno podana funkcija.

S pomočjo teh relacij lahko izračunamo (kar pa ni lahko in za kar se danes uporabljajo računalniki), da je

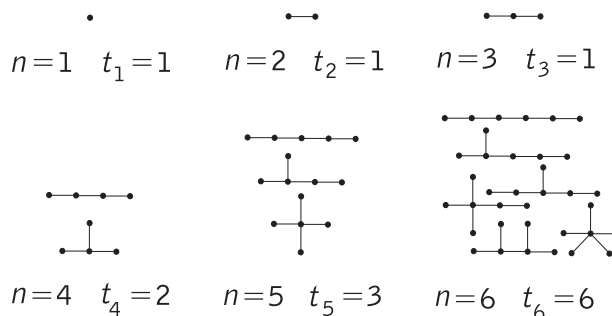
² G. Pólya: Kako rešujemo matematične probleme, DMFA, Knjižnica Sigma 40, Ljubljana, 1989.

$$\begin{aligned} t_7 &= 11 \\ t_8 &= 23 \\ t_9 &= 47 \\ t_{10} &= 106 \\ t_{20} &= 823065 \\ t_{30} &= 14830871802 \\ t_{40} &= 363990257783343 \\ t_{50} &= 10545233702911509534 \end{aligned}$$

Uporaba teorije Pólya pri kemijskih spojinah omogoča, da lahko (v nekaterih ugodnih primerih) določimo število možnih izomer. Poglejmo si tipičen rezultat: z α_n označimo število strukturnih izomer alkohola formule $C_n H_{2n+1} OH$.

n	α_n	n	α_n
1	1	16	124906
2	1	17	321198
3	2	18	830219
4	4	19	2156010
5	8	20	5622109
6	17	21	14715813
7	39	22	38649152
8	89	23	101821927
9	211	24	269010485
10	507	25	712566567
11	1238	26	1891993344
12	3057	27	5034704828
13	7639	28	13425117806
14	19241	29	35866550869
15	48865	30	95991365288

Ivan Gutman, Branislav Popović
prevod Sandi Klavžar



Slika 2. Drevesa z n točkami, $n \leq 6$

Kaj je to matrika?

V tem prispevku bomo na preprost način vpeljali matrike ter podali nekaj osnovnih pojmov, povezanih z njimi: red matrike, ničelno matriko, seštevanje matrik in množenje matrik. Besedilo je zasnovano kot uvod v prispevek, ki bo objavljen v prihodnji številki Preseka in bo govoril o linearnih preslikavah ravnine.

	jan	feb	mar	apr	maj	jun	jul	avg	sep	okt	nov	dec
Berlin	-0.9	0.6	3.5	8.4	13.5	17.0	18.6	17.9	14.3	9.0	3.9	1.0
Kairo	12.4	13.9	16.9	20.8	24.4	27.2	28.1	27.8	25.2	22.8	18.5	14.4
London	3.9	4.2	5.7	8.5	11.9	15.2	17.0	16.6	14.2	10.3	6.6	4.8
Moskva	-10.2	-8.9	-4.0	4.5	12.2	16.3	18.5	16.6	10.9	4.3	-2.0	-7.5
San Francisco	10.6	12.4	12.7	13.3	13.6	14.6	15.0	15.6	16.8	16.6	14.0	10.9
Tokio	3.6	4.3	7.4	13.0	17.3	20.8	24.7	26.1	22.4	16.5	11.1	6.1

V zgornji tabeli so podane povprečne temperature po posameznih mesecih za šest velikih svetovnih mest.

Podobnih tabel smo tako vajeni, da za njihovo razumevanje ne potrebujemo dodatne razlage. Namen tega prispevka pa je dokazati, da je smiselno take sheme opazovati kot matematične objekte in z njimi računati. Zato pravimo, da je **matrika** pravokotna shema števil oblike

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Poljubni element v matriki smo označimo z a_{ij} . Pri tem nam indeks i označuje **vrstico**, v kateri se nahaja element a_{ij} , indeks j pa pove, v katerem **stolpcu** je a_{ij} . Na primer, a_{24} je element matrike, ki se nahaja v drugi vrstici in v četrtem stolpcu.

Zgornja matrika ima m vrstic in n stolpcev, zato pravimo, da je to matrika **reda** $m \times n$. Na primer, matrika

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 0 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

je reda 4×2 , medtem ko je matrika, ki ustreza temperaturam iz našega uvodnega primera, reda 6×12 . Če ima matrika en sam stolpec, ji rečemo tudi **vektor stolpec**.



In kaj potem? Samo od tega, da na levi in na desni strani tabele števil postavimo oklepaja, res nimamo kaj dosti koristi. Tisto, kar naredi matrike uporabne, je računanje z njimi. V nadaljevanju bomo zato povedali, kako matrike seštevamo in množimo.

Najprej se dogovorimo, kdaj sta dve matriki enaki. Matriki A in B sta **enaki**, $A = B$, če imata enako število vrstic in enako število stolpcev ter se ujemata v vseh elementih. Natančneje, če je A matrika reda $m \times n$ z elementi a_{ij} , B matrika reda $p \times q$ z elementi b_{ij} in velja $A = B$, potem je $m = p$, $n = q$ in za vse indekse i in j velja $a_{ij} = b_{ij}$.

Seštevaje matrik je preprosto. Seštejemo lahko matriki, ki imata enako število vrstic in stolpcev. To naredimo tako, da seštejemo isto-ležne elemente matrik. Na primer,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+4) & (-3+7) \\ (4-2) & (5+2) \\ (1+0) & (0-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Pri seštevaju števil igra posebno vlogo število 0. Če 0 prište-
jemo številu a , je vsota a . Tako odlikovan element lahko naj-
demo tudi pri matrikah. To je matrika, ki ima vse elemente
enake 0 in jo imenujemo **ničelna matrika**.

Množenje matrik je nekoliko bolj zapleteno. Če sta A in B dani matriki, lahko izračunamo njun produkt $A \cdot B$ samo v primeru, ko ima matrika A enako število stolpcev, kot ima matrika B vrstic. Če je A matrika reda $m \times n$ in B matrika reda $n \times p$, bo njun produkt $C = A \cdot B$ matrika reda $m \times p$, kjer element c_{ij} iz i -te vrstice in j -tega stolpca produkta C izračunamo takole. Naj bodo

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$$

elementi i -te vrstice matrike A ter

$$b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$$



elementi j -tega stolpca matrike B . Tedaj je

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Na primer,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 7) & (3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3) \\ (1 \cdot (-3) + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 7) & (1 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 29 \\ 41 & 24 \end{bmatrix}.$$

In zakaj matrike množimo na tako zapleten način, če bi jih lahko preprosteje? Zakaj ne bi, recimo, množili tako, da bi pomnožili istoležna elementa, torej podobno, kot to delamo s seštevanjem? Glavni razlog je, da želimo z matrikami opisovati linearne preslikave (glej naslednjo številko Preseka).

Tu si oglejmo uporabo matrik in njihovega množenja na sistemih linearnih enačb. Imejmo, na primer, naslednji sistem treh linearnih enačb za tri neznanke:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 11 \\ 2x - y + 2z &= 4 \\ -x + 3y - z &= 3. \end{aligned}$$

Če definiramo matriko A in vektorja stolpca X in B z

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

se gornji sistem enačb na kratko zapiše $A \cdot X = B$. To je zelo kratek zapis sistema enačb, ki nam omogoča preprosto manipulacijo s splošnimi sistemi enačb. V praktičnih primerih, recimo pri izračunavanju statike konstrukcij, pogosto naletimo na sisteme enačb z nekaj tisoč neznankami in tedaj postane matrični zapis nepogrešljiv.

In kako bi lahko uporabili matriko povprečnih temperatur šestih svetovnih mest? Recimo, da imamo matriko temperatur shranjeno v računalniku. (Pri takih podatkih, kot so v tem primeru, si praviloma pomagamo z računalnikom in z enim izmed mnogih programov za simbolno računanje.) Naj bo T matrika povprečnih temperatur, torej T je reda 6×12 . Naj bo $X = [1, 0, 0, 0, 0, 0]$ matrika reda 1×6 in izračunajmo $X \cdot T$. Rezultat je matrika reda 1×12 , ki ima za elemente prvo vrstico matrike T . Sedaj dobljeno matriko pomnožimo z matriko reda 12×1 , torej z vektorjem stolpcem, katerega vsi elementi so enaki 1. Dobili smo matriko reda 1×1 , ki jo lahko interpretiramo kot število. Kakšno informacijo dobimo, ko to število delimo z 12? Da boste lažje odgovorili, zapišimo celotni račun.

Seveda bi to lahko naredili »peš«, vendar nam matrični račun omogoča avtomatizacijo postopka. Na podoben način, kot smo izračunali povprečno letno temperaturo za Berlin (ups, izdal sem odgovor na zastavljeno vprašanje), lahko izračunamo ustrezen podatek tudi za preostala mesta. Bi znali z matričnim računom izračunati tudi povprečno mesečno (recimo januarsko) temperaturo?

$$\frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.9 & 0.6 & 3.5 & 8.4 & 13.5 & 17.0 & 18.6 & 17.9 & 14.3 & 9.0 & 3.9 & 1.0 \\ 12.4 & 13.9 & 16.9 & 20.8 & 24.4 & 27.2 & 28.1 & 27.8 & 25.2 & 22.8 & 18.5 & 14.4 \\ 3.9 & 4.2 & 5.7 & 8.5 & 11.9 & 15.2 & 17.0 & 16.6 & 14.2 & 10.3 & 6.6 & 4.8 \\ -10.2 & -8.9 & -4.0 & 4.5 & 12.2 & 16.3 & 18.5 & 16.6 & 10.9 & 4.3 & -2.0 & -7.5 \\ 10.6 & 12.4 & 12.7 & 13.3 & 13.6 & 14.6 & 15.0 & 15.6 & 16.8 & 16.6 & 14.0 & 10.9 \\ 3.6 & 4.3 & 7.4 & 13.0 & 17.3 & 20.8 & 24.7 & 26.1 & 22.4 & 16.5 & 11.1 & 6.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 8.9.$$

Ko vstopimo v svet matrik, kmalu ugotovimo, da je to zanimiv in po svoje tudi zabaven svet, saj niso vse stvari take, kot bi jih morda pričakovali. Če sta x in y dve števili, tedaj vemo (in to pri računanju samodejno uporabljamo), da velja $x \cdot y = y \cdot x$. Naj bosta sedaj dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Če izračunamo

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 19 & 28 \end{bmatrix},$$

opazimo, da je $A \cdot B \neq B \cdot A$. Nadalje, naj bo dana matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in izračunajmo

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zopet presenečenje, saj smo pri številih navajeni, da iz enakosti $x \cdot x = 0$ sledi $x = 0$.

Matrike so izjemno uporabno matematično orodje, ki je nepogrešljivo ne samo na mnogih področjih matematike, temveč tudi na drugih znanstvenih področjih, recimo v računalništvu in medicini. Naj naštejemo samo nekatera taka področja: najprej seveda algebra, potem teorija iger, numerična matematika, teorija fraktalov, teorija grafov, teorija kodiranja, računalniška grafika, tomografija.

Kot smo že omenili, bo v prihodnji številki Preseka podrobneje razložena uporaba matrik pri linearnih preslikavah ravnine, kot orodje (za zapis temperaturnega polja) pa bodo uporabljene tudi v fizikalnem prispevku iz iste številke o rasti snežink. Če imate dostop do starejših številke Preseka, si lahko preberete članek Olge Arnuš iz 23. letnika Preseka (1995/1996, strani 65–69) ter članek Antona Suhadolca iz 15. letnika Preseka (1987/1988, strani 2–7 in 104–111), kjer so iz različnih zornih kotov obravnavane matrike reda 2×2 .

Naloge

Podane imamo naslednje matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Katere izmed vsot $A+A$, $A+B$, $A+C$, $B+C$ in $C+C$ lahko izračunamo?
2. Katere izmed produktov $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$ in $C \cdot C$ lahko izračunamo?
3. Izračunaj $(A \cdot B) \cdot C$ in $A \cdot (B \cdot C)$. Kaj opaziš?

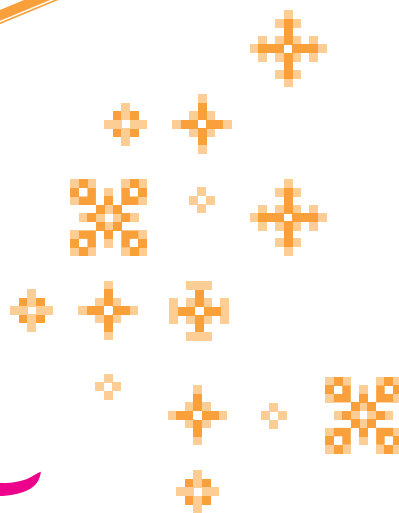
Sandi Klavžar

Rešitve

1. Izračunamo lahko vsote $A+A$, $A+C$ ter $C+C$.
2. Izračunamo lahko samo produkt $A \cdot B$ in $B \cdot C$.
3.

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 44 & 40 \\ 13 & 20 & 16 \end{bmatrix}.$$

Če izračunamo še $A \cdot (B \cdot C)$, dobimo isti rezultat. V resnici vedno velja: če lahko izračunamo $A \cdot B$ in $B \cdot C$, je $A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (B \cdot C)$.



FIZIKA

os pesektrenjepoljemagnetx+ypotsporocilovalovanjemagnetbalonmehurckizrak
alovanjeslika4elementiformulemerjenjekrivuljameritevsilapospesektrenjepoljemagnetx+y
mehurckizrakpritiskzvokvalovanjeslika4elementiformulemeritevsilapospesektrenjepolk+ypotsporocilo
magnetbalonmehurckizrakpritiskzvokvalovanjeslika4elementiformulezvokvalovanje



2.

Še enkrat o masi energije

Albert Einstein je veliko razmišljal o ugotovitvi, da energiji W ustreza masa W/c^2 , ki jo je izpeljal v »čudežnem letu« 1905. Izpeljavi te zveze iz prejšnjega Preseka dodajmo še eno Einsteinovo izpeljavo iz leta 1906. V članku z naslovom *Načelo o ohranitvi gibanja težišča in vztrajnost energije* je opisal *namišljeni poskus*.

Daleč od drugih teles imejmo votel valj K z maso m (slika 1). Na njegovem levem delu naj bo pritrjena naprava A, ki izseva kratkotrajen blisk, in na njegovem desnem delu naprava B, ki blisk absorbira. Med napravo A in napravo B v razdalji α blisk prenese energijo W . Spomnimo se, da sevanje z energijo W prenese gibalno količino W/c . Po izreku o gibalni količini deluje sevanje na napravo A in preko nje na valj s sunkom sile W/c proti levi. Po tem izreku valj prejme gibalno količino mv proti levi. V času t , ki ga blisk porabi za pot od A do B, to je $t = \alpha/c$, se valj giblje proti levi s hitrostjo $v = W/(mc)$. Zato se valj premakne za $s = vt = (W/mc) \cdot \alpha/c = \alpha W/(mc^2)$ proti levi. Potem zadene blisk napravo B in ta naprava ter preko nje valj prejme sunek sile, to je gibalno količino W/c , proti desni, ter obmiruje. Zamislimo si majhnega robota z zanemarljivo majhno maso, ki od naprave B prejme energijo W , jo prenese in jo preda napravi ter se nazadnje vrne do naprave B. Bistveno je, da robot ostane v valju. Potem je v valju vse tako, kot je bilo spočetka. A valj se je premaknil za s proti levi. To pa nasprotuje izkušnjam. Valj, v katerem se nič ne spremeni, se ne premakne, če nanj ne deluje telo iz okolice.

Kateri del sklepanja je bil napačen? Vse kaže, da šepa misel, da lahko drobno telo z zanemarljivo maso prenese energijo. Energijo W prenese lahko samo telo z maso vsaj W/c^2 ! Ponovimo drugi del poskusa s telesom s tolikšno maso. Po izreku o gibalni količini se valj z maso m premakne za s proti desni, ko se v njem telo z maso W/c^2 premakne od

B do A za α proti levi. Velja zveza $ms = (W/c^2)\alpha$ (glejte okvirček). Valj se premakne za s proti desni potem, ko se je naprej premaknil za toliko proti levi. Nazadnje je vse tako, kot je bilo spočetka in je tudi valj na prvotnem mestu. To smo dosegli, ko smo upoštevali, da energiji W ustreza masa W/c^2 .

V sistemu dveh teles z masama m_1 in m_2 velja izrek o ohranitvi gibalne količine v obliki $m_1 v_1 = -m_2 v_2$, če sta najprej obe telesi mirovali, pa se potem prvo giblje s hitrostjo v_1 in drugo s hitrostjo v_2 v nasprotno smer. Enačbo pomnožimo s časom gibanja t in dobimo zvezo $m_1 s_1 = -m_2 s_2$ s premikoma $s_1 = v_1 t$ in $s_2 = v_2 t$.

Opisani poskus si lahko samo zamislimo. Na težave bi naleteli že, če bi hoteli doseči, da naprava A vso energijo, ki jo odda, izseva v blisku. Težko bi bilo tudi doseči, da naprava B absorbira vso energijo bliska in se ji za toliko poveča njena energija. Še na večje težave bi naleteli, ko bi naj robot prenesel vso to energijo od B do A in jo oddal A. A od namišljenega poskusa ne zahtevamo, da bi ga lahko izvedli v opisani obliki, zato pa je »namišljen«. Vseeno si ga mislimo sestavljenega iz pojavov, ki potekajo po zakonih narave. Einsteinov namišljeni poskus je le zastopnik svoje vrste. Na papirju je vse v redu. Ko pa pomislimo na to, kako bi ga zares izvedli, se zatakne. Težava je, da je kvadrat hitrosti

svetlobe zelo velik. Če bi naprava A izsevala energijo 1 J, če bi valj imel maso 1 kg in bi razdalja med napravama A in B merila 1 m, bi se valj proti levi premaknil samo za $1,1 \cdot 10^{-17}$ m, kar ustreza nekaj tisočinam premera atomskega jedra srebra. Tako natančno lege valja ne bi mogli izmeriti niti v sanjah. Zato tudi ne bi dosti pomagalo, če bi, na primer, v prvem delu namišljenega poskusa vzeli drobno telo z malo večjo maso. Vseeno je morda namišljeni poskus koga prepričal, da moramo energiji W prirediti maso W/c^2 . To je le eden od poskusov, s katerimi je Einstein sebi in drugim pomagal sprejeti zvezo med maso in energijo.

Pravo nasprotje namišljenega poskusa je poskus, ki ga izvedemo v laboratoriju. Einstein je v članku leta 1905, v katerem je prvič izpeljal zvezo med maso in energijo, zapisal: »Ni izključeno, da bo pri telesih, katerih energija se močno spreminja (na primer pri radijevih soleh), uspel preizkus teorije.« Do prvih takih poskusov je preteklo trideset let. Najprej so morali izdelati *masne spektrometre*, s katerimi so dovolj natančno izmerili maso ionov. Ione so pospešili z določeno napetostjo in jih speljali v prečno magnetno polje. V njem so se ioni z manjšo maso odklonili bolj kot ioni z večjo.

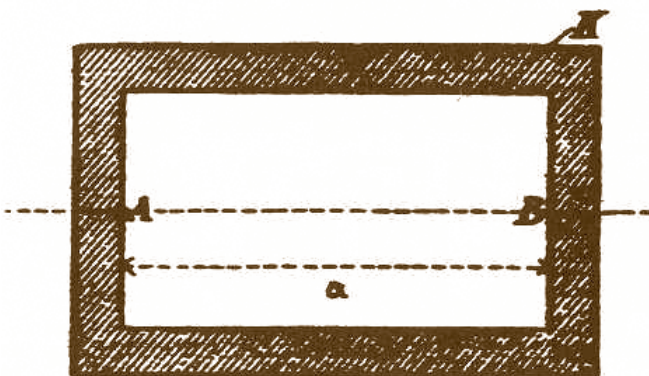
Namesto radioaktivnega razpada opazujemo jedrske reakcije. Pri eni od njih vodikov ion zadene jedro težjega izotopa litija v litijevi tarči in nastane dve jedri helija (slika 2):



Kot zgornje indekse smo zapisali do celih števil zaokrožene relativne atomske mase. Atom vodika ima maso 1,0078 u, atom litija maso 7,0160 u in atom helija maso 4,0026 u. Pri tem merimo maso atomov z atomsko enoto mase $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Atom litija pred reakcijo miruje, ion vodika pa pospeši napetost okoli sto tisoč voltov. S fotografije reakcije v meglični celici po dosegu v zraku ugotovimo, da imata helijeva iona kinetično energijo po 8,7 MeV. Pri tem je megaelektronvolt enota,

Slika 1.

Valj K z napravo A, ki izseva blisk, in napravo B, ki ga absorbira (iz Einsteinovega članka).



s katero merimo energijo pri jedrskih reakcijah. Kinetično energijo 1 elektronvolt pridobi delec z enim osnovnim nabojem, ko preleti napetost 1 volt: $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Megaelektronvolt je milijonkrat toliko, $1 \text{ MeV} = 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J}$.

Skupna masa se pri reakciji zmanjša za $(1,0078 + 7,0160 - 2 \cdot 4,0026) \text{ u} = 0,0186 \text{ u} = 0,0186 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3,09 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$. Skupna kinetična energija pa se poveča za $2 \cdot 8,7 \text{ MeV} = 17,4 \cdot 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,78 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Pri tem nismo upoštevali začetne kinetične energije vodikovega iona. Ni se težko prepričati, da velja enačba $W = mc^2$ za razliko. Razliko mas pomnožimo s kvadratom svetlobne hitrosti: $3,09 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}^2) = 2,78 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Rezultat se ujema z razliko energij. Preveč pa se s tem ne smemo ponašati, saj je zadnje mesto negotovo zaradi zanemarljive začetne kinetične energije. Vseeno lahko rečemo, da opisano merjenje dobro podpira zvezo med maso in energijo.

Slika 2.

Reakcija med vodikovim ionom in jedrom litija v litijevi tarči. Reakcijo so posneli v meglični celici. Curek vodikovih ionov je vpadal od zgoraj. Vidni sta sledi dveh parov helijevih ionov, ki sta odletela v nasprotnih smereh. Po tem sklepamo, da smemo zanemariti gibalno količino vodikovega iona. Po dolžini sledi helijevih ionov v zraku ugotovimo, da je njuna kinetična energija 8,7 MeV. Eden od obeh helijevih ionov ima malo krajšo sled od drugega iona, ker ga je dodatno zadržala litijeva tarča. To je bila prva jedrska reakcija z ioni, ki so jih pospešili s pospeševalnikom. Prej so uporabljali le helijeve ione iz radioaktivnih izvirov.



Ugotovili smo še nekaj več. Zaradi zveze preneha veljati zakon o ohranitvi mase in se vgradi v zakon o ohranitvi polne energije, h kateri štejemo tudi energijo mase.

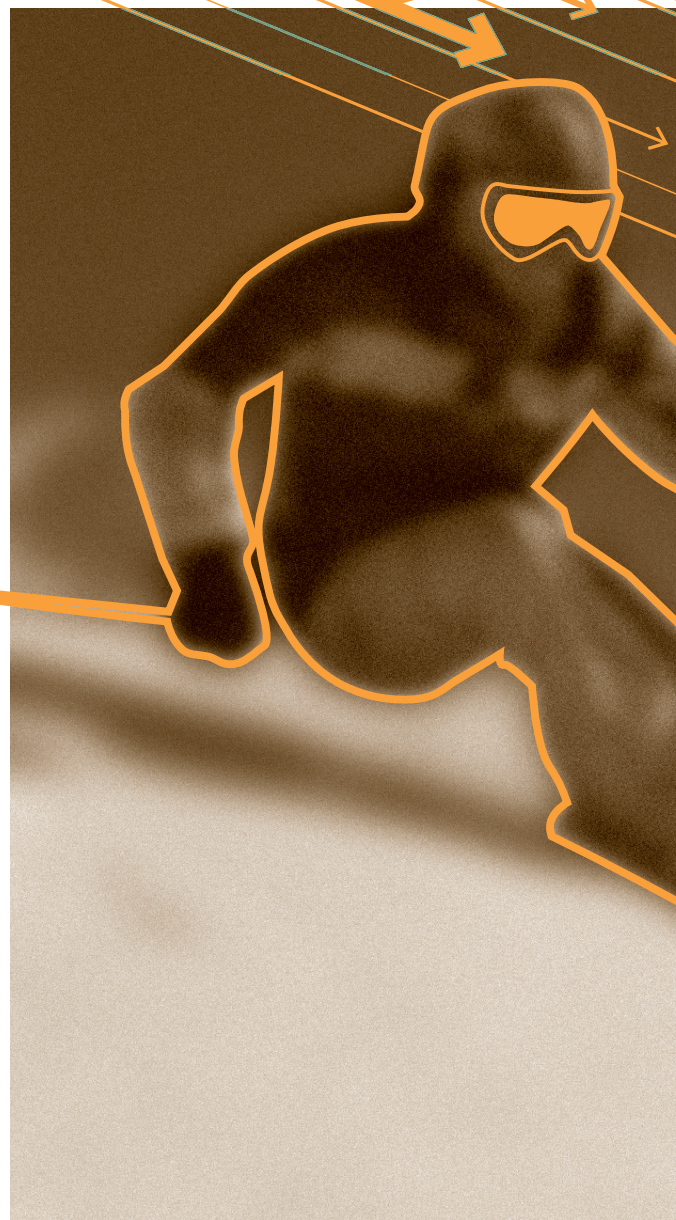
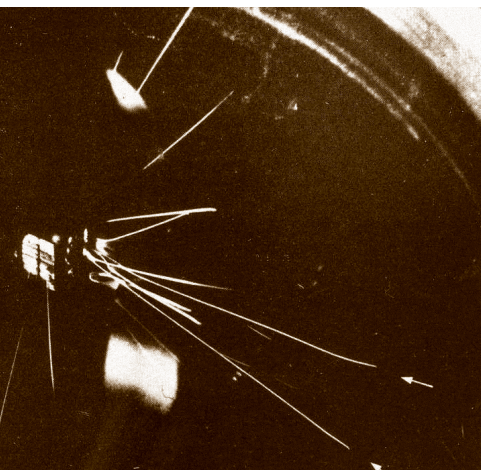
Navajali smo mase atomov, čeprav se reakcije dogajajo v atomskih jedrih. Maso atoma dobimo, ko masi iona, ki ga izmerijo z masnim spektrometrom, dodamo maso elektrona. Električna vezavna energija je tako majhna, da ni treba upoštevati njene mase. Medtem ko navadno podajamo številske podatke s tremi mesti, smo podali mase s petimi mesti. Tako smo morali ravnati, ker je c^2 tako velik. Iz tega tudi sledi, da je bilo treba meriti mase zelo natančno, preden je bilo mogoče zvezo med maso in energijo potrditi z merjenjem pri jedrskih reakcijah. Masni spektrometri so postali dovolj ločljivi šele v letih pred drugo svetovno vojno.

Gotovo je zanimivo poznati zamišljeni in izvedeni poskus. Oba podpirata »najbolj razvpito enačbo fizike« $W = mc^2$.

Janez Strnad

<http://zaloznistvo.dmfa.si/presek/>

Smuk



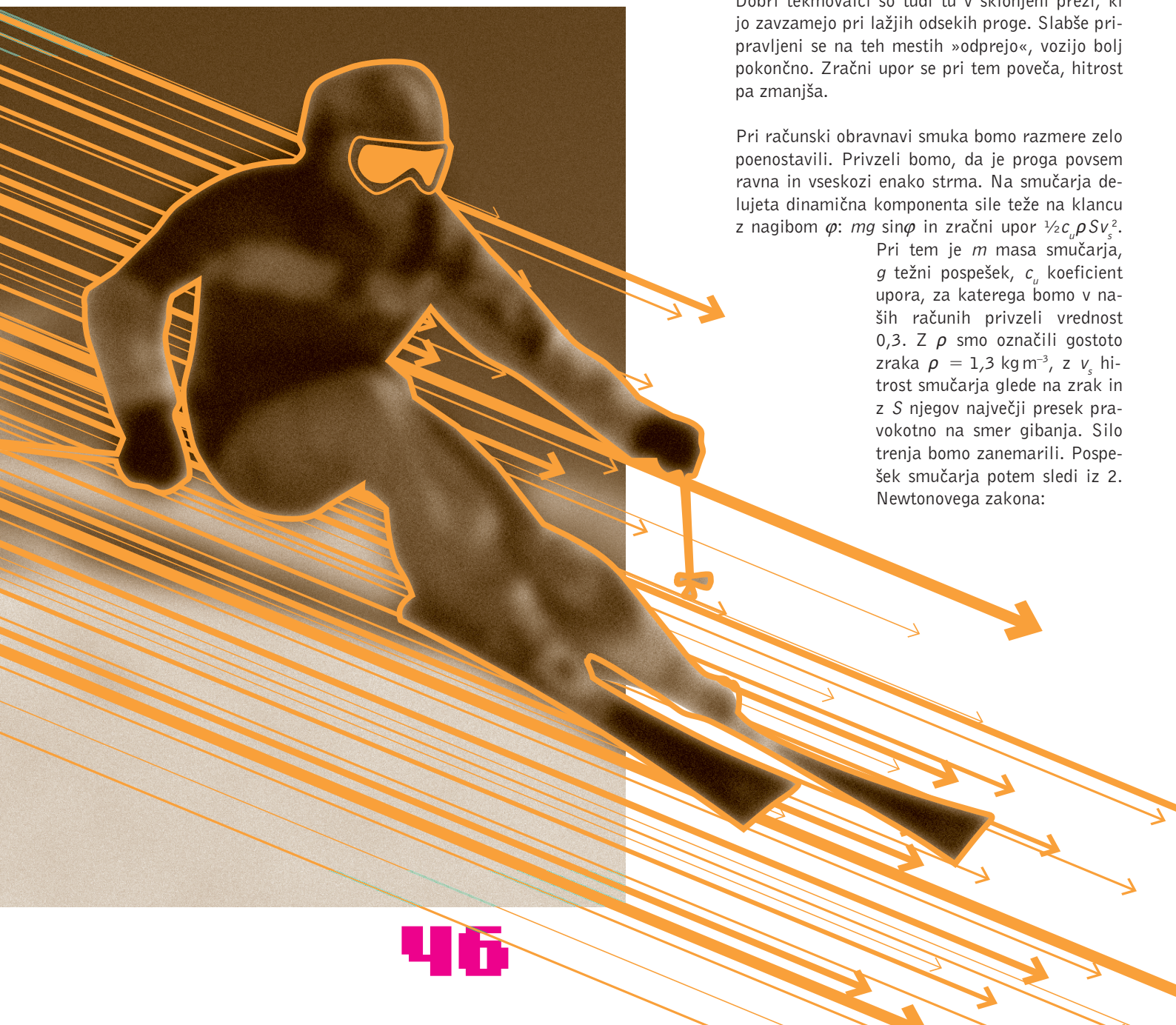
Smuk

Televizijski prenosi smuka so izredno mikavni. Spust traja kaki dve minuti, denimo 100 sekund, pri hitrosti nekaj nad 100 km/h, denimo 30 m/s. Razlike med vodilnimi tekmovalci niso prav velike, znotraj sekunde se zvrsti kar nekaj njih. Na rezultat vpliva veliko stvari. Gotovo je pomembno, kakšno pot tekmovalec ubere skozi zahtevne ovinke, kako premaguje dolge skoke, morda tudi kako so namazane drsne ploskve smuči, kako je tekmovalec oblečen, kolikšna je njegova masa in s tem povezana telesna pripravljenost, kakšni so pogoji na progi, ali mu pri vožnji pomaga veter ipd. Fizikalna obravnava gibanja tekmovalca pri smuku je gotovo zapletena. Zato se bomo osredotočili le na vpliv zračnega upora na končni izid tekme. Komentatorji, ki spremljajo vožnje tekmovalcev, so posebej pozorni na držo

tekmovalca pri skokih in na zahtevnih delih proge. Dobri tekmovalci so tudi tu v sklonjeni preži, ki jo zavzamejo pri lažjih odsekih proge. Slabše pripravljeni se na teh mestih »odprejo«, vozijo bolj pokončno. Zračni upor se pri tem poveča, hitrost pa zmanjša.

Pri računski obravnavi smuka bomo razmere zelo poenostavili. Privzeli bomo, da je proga povsem ravna in vseskozi enako strma. Na smučarja delujeta dinamična komponenta sile teže na klancu z nagibom φ : $mg \sin \varphi$ in zračni upor $\frac{1}{2} c_u \rho S v_s^2$.

Pri tem je m masa smučarja, g težni pospešek, c_u koeficient upora, za katerega bomo v naših računih privzeli vrednost 0,3. Z ρ smo označili gostoto zraka $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$, z v_s hitrost smučarja glede na zrak in z S njegov največji presek pravokotno na smer gibanja. Silo trenja bomo zanemarili. Pospešek smučarja potem sledi iz 2. Newtonovega zakona:



$$\blacksquare \blacksquare \quad ma = mgsin\varphi - \frac{1}{2}c_v\rho S v_s^2.$$

Pospešek je takoj po startu enak $gsin\varphi$, potem pa z naraščajočo hitrostjo pojemoma, dokler se smučar ne pelje enakomerno navzdol s hitrostjo v_0 :

$$\blacksquare \blacksquare \quad v_0 = \sqrt{\frac{2mgsin\varphi}{c_v\rho S}}.$$

Smučar želi seveda doseči največjo hitrost v_0 , to pa lahko stori le tako, da z ustrezno držo, kar se da, zmanjša produkt $c_v S$. Med vožnjo ga dolgi skoki in ostri ovinki na strmini prisilijo, da vozi bolj pokončno in tako zmanjša hitrost. Ocenimo, koliko časa smučar izgubi pri skoku, ki traja tri sekunde in se na njem odpre toliko, da se produkt $c_v S$ med skokom poveča na dvojno vrednost, torej za 100%. Po skoku smučar ponovno zavzame lego, pri kateri je najhitrejši. Hitrost se mu začne na skoku zmanjševati, po skoku pa se ponovno povečuje do v_0 .

Najprej izračunajmo, za koliko se smučarju hitrost zmanjša glede na v_0 . Pospešek med skokom, ko zavzame produkt $c_v S$ dvojno vrednost, je $a = -gsin\varphi$ in zato hitrost po skoku $v = v_0 - g_0\Delta t$, kjer smo z g_0 označili $gsin\varphi$ in z Δt čas skoka, pri nas 3 s. Kako pa se po skoku hitrost veča do v_0 ?

Ker se hitrost v_s le malo spreminja glede na v_0 , se preselimo v opazovalni sistem, ki se s konstantno hitrostjo v_0 giblje navzdol po progi. V tem sistemu bi smučar, ki se nikjer ne odpre, miroval. Ostali smučarji bi s hitrostjo v zaostajali. Do enačbe za pospešek v tem sistemu ni težko priti, saj se pri preselitvi v novi sistem pospešek nič ne spremeni. Zapisali ga bomo tako, da bomo zapisali hitrost smučarja glede na zrak takole:

$$\blacksquare \blacksquare \quad v_s(t) = v_0 + v(t).$$

Pri kvadriranju hitrosti v_s dobimo $v_0^2 + 2v_0v + v^2$ in za pospešek

$$\blacksquare \blacksquare \quad a = -2\frac{g_0}{v_0}v(t).$$

V zadnji enačbi smo zanemarili člen z v^2 , ker je hitrost v zelo majhna v primeri z v_0 . Pospešek je torej sorazmeren s hitrostjo v , znak minus pa nas spomni, da je gibanje smučarja pospešeno, ko je hitrost v negativna, torej je hitrost smučarja $v_s(t)$ manjša kot v_0 . Pospešek pa se hitro zmanjšuje, ko se velikost hitrosti $|v(t)|$ zmanjšuje in se hitrost smučarja glede na zrak $v_s(t) = v_0 + v(t)$ bliža največji vrednosti v_0 .

Pri gibanju, kjer je pospešek sorazmeren s hitrostjo, velja:

$$\blacksquare \blacksquare \quad v(t) = v(0)e^{-t/\tau},$$

kjer je čas τ podan kot $\frac{v_0}{2a_0}$. V času dveh ali treh τ se torej hitrost povrne na začetno vrednost. Ta čas je presenetljivo dolg. Če vstavimo za $g_0 = 2 \text{ ms}^{-2}$ in $v_0 = 30 \text{ ms}^{-1}$, dobimo $\tau \approx 8 \text{ s}$. To pomeni, da se hitrost povrne na začetno vrednost šele približno po 20 sekundah.

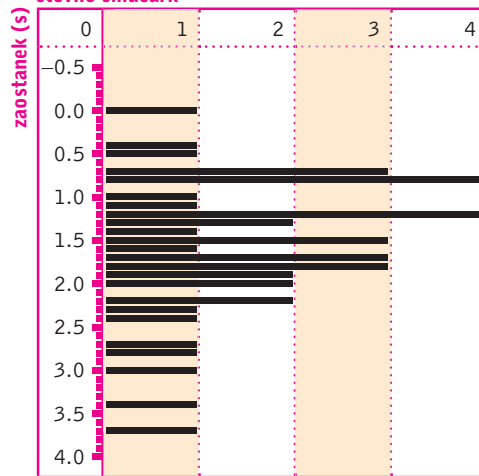
Koliko krajšo pot pa pri tem opravi smučar v primeri s potjo, pri kateri bi bila hitrost ves čas enaka v_0 ? Izkaže se, da je njegov zaostanek kar

$$\blacksquare \blacksquare \quad \Delta s = g_0 \Delta t^2 / 2 + g_0 \Delta t \tau.$$

Po vstavitvi podatkov dobimo $\Delta s \approx 9 \text{ m} + 48 \text{ m} = 57 \text{ m}$. Smučar bo na cilju skoraj dve sekundi za časom zmagovalca, ki si pri skoku ni zmanjšal hitrosti. Na sliki 1 najdemo porazdelitev zaostankov smučark pri tekmovanju v smuku (Cortina d'Ampezzo, 17. 1. 2004). Vidimo, da je povprečni zaostanek okrog 1,5 sekunde, kar se glede velikostne stopnje dobro ujema z našimi računi.

Pri računih gre seveda le za grobe ocene. Ker nimamo na voljo natančnejših podatkov, je tako ocenjevanje na mestu. Poleg zračnega upora je pri smuku pomemben tudi način izpeljave ovinkov. Pri hitrosti 30 m/s je centripetalna sila v ovinku s sto metrskim radijem, ki jo mora zdržati tekmovalca ($\approx 600 \text{ N}$),

■ število smučark



Slika 1.

Porazdelitev zaostankov smučark pri tekmovanju v smuku (Cortina d'Ampezzo, 17. 1. '04). Ker je zaradi preglednosti ločljivost grafa le 0,1 sekunde, je v nekatere intervale prispelo tudi več smučark. Zmagovalka je progo prevozila v 77,57 sekunde.

nekajkrat večja od zračnega upora ($\approx 140 \text{ N}$). Zato je pomembno, da je ta sila čim bolj pravokotna na njegov tir. Odmik od idealne drže smuči sicer lahko zavre tekmovalca s silo, ki je primerljiva z zračnim uporom, a se večje tovrstne napake končajo s padcem. Na vrstni red tekmovalcev gotovo najbolj vpliva odprta drža telesa.

V enem prejšnjih prispevkov smo v Preseku obravnavali kolesarjenje po klancu navzdol. Videli smo, da imajo pri taki vožnji težji kolesarji glede hitrosti prednost pred lažjimi. Tudi pri smuku imajo glede zračnega upora prednost težji tekmovalci. Kljub temu na startu smuka ne vidimo debeluhov. Ti bi si morali za premagovanje zahtevnih delov proge prehudo naprezati svoje mišice in sklepe, poškodbe, ki bi se pri tem pojavile, pa bi pretežke tekmovalce kmalu povsem izločile iz tekmovanj.

Andrej Likar

24. državno tekmovanje iz fizike za Stefanova priznanja

Oddelek za fiziko Pedagoške fakultete v Ljubljani, DMFA ter Zavod Republike Slovenije za šolstvo so v soboto, 8. maja 2004, organizirali 24. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce. Tekmovanje je potekalo v predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Ljubljani. Za zlata Stefanova priznanja se je pomerilo 48 dvočlanskih ekip 8. razredov in 52 dvočlanskih ekip 9. razredov. Tekmovalci so posamično reševali tri teoretične naloge in ekipno dve eksperimentalni nalogi. Teoretične in eksperimentalne naloge so prispevali sodelavci Oddelka za fiziko in tehniko Pedagoške fakultete v Ljubljani, pri izvedbi tekmovanja pa so pomagali tudi študentje dvopredmetnega študija fizike iste fakultete.

Pred državnim tekmovanjem so bila 13. aprila področna tekmovanja v dvanajstih mestih, kjer so tekmovanja organizirali in vodili: Rajko Đudarić (Celje), Nataša Mikolavčič (Krško), Sergeja Miklavc (Kamnik), Milan Bohinc (Naklo), Mitja Ledinek (Mežica), Vesna Harej (Ljubljana), Silvo Muršec (Maribor I), Alenka Samec (Maribor II), Simona Zupan (Sečovelje), Stan-ka Rajner (Beltinci), Stanko Čufer (Dobravlje), Branko Kastelic (Hrastnik). Tekmovalo je 824 učencev 8. razredov in 833 učencev 9. razredov. Na šolskem tekmovanju pa je tekmovalo 4991 učencev 8. razredov in 4561 učencev 9. razredov.

Na državnem tekmovanju je bilo podeljenih 162 zlatih Stefanovih priznanj in nagrade.

Jelislava Sakeššek

1.

Prva nagrada

v osmem razredu

- Ivan Kukuljan, OŠ Trnovo, Ljubljana

v devetem razredu

- Aleš Srna, OŠ Antona Tomaža Linhart, Radovljica
- Matej Drame, OŠ Šmarje pri Jelšah, Šmarje pri Jelšah

2.

Druga nagrada

v osmem razredu

- Blaž Rugelj, OŠ Mengeš, Mengeš
- Anja Komatar, OŠ Domžale, Domžale
- Niko Pintar, OŠ Naklo, Naklo

v devetem razredu

- Luka Jeraj, OŠ Ledina, Ljubljana
- Ambrož Bizjak, OŠ Trnovo, Ljubljana

3.

Tretja nagrada

v osmem razredu

- Žiga Glavan, OŠ Ig, Ig
- Štefan Markič, OŠ Naklo, Naklo
- Primož Pušnik, OŠ Franja Malgaja, Šentjur pri Celju

v devetem razredu

- Miha Čančula, OŠ Božidarja Jakca, Ljubljana
- Ambrož Homar, OŠ Frana Albrehta, Kamnik
- Tom Slejko, OŠ Miroslava Vilharja, Postojna
- Gal Šmidovnik, OŠ Šentvid, Ljubljana
- Katja Vozel, OŠ Domžale, Domžale

35. mednarodna fizikalna olimpijada

35. mednarodna fizikalna olimpijada je potekala med 15. in 23. julijem 2004 v Pohangu, v Južni Koreji. Naša ekipa je osvojila dve bronasti medalji in eno pohvalo.

Člani slovenske olimpijske ekipe so bili: Simon Čopar, Gimnazija Litija; Klemen Žiberna, II. gimnazija Maribor; Peter Jakopič, Gimnazija Želimlje; Klemen Blokar, Gimnazija Šentvid Ljubljana in Simon Jesenko, Gimnazija Škofja Loka.

Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sva bila Jure Bajc s *Pedagoške fakultete v Ljubljani* in Ciril Dominko, *DMFA Slovenije*. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili *Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport* ter *DMFA Slovenije*.

Ekipa je imela petdnevne priprave konec junija in v začetku julija na Oddelku za fiziko FMF. Pri pripravi tekmovalcev smo sodelovali člani *DMFA Slovenije*, *Pedagoške fakultete v Ljubljani*, *Inštituta Jožefa Stefana* ter bivši tekmovalci, sedaj študentje fizike. Ker so se pri tekmovalcih pokazale večje vrzeli v teoretičnem znanju, predpisanem v katalogu za fizikalno olimpijado, smo



večino časa med pripravami posvetili temu. Eksperimentalnemu delu je bil namenjen manjši del priprav.

Na olimpijadi je sodelovalo 331 tekmovalcev iz 71 držav. Dve državi sta sodelovali kot opazovalki. Bronasti medalji sta v naši ekipi osvojila **Klemen Žiberna** in **Simon Čopar**, pohvalo pa **Peter Jakopič**. Osvojena priznanja nas na neuradni lestvici držav uvrščajo točno na sredino. Izkazalo se je, da nam je v teoretičnem delu tekmovanja zmanjkalo nekaj matematičnega znanja iz snovi, ki je žal naši tekmovalci po prenovi pouka matematike v srednji šoli ne predelajo dovolj temeljito. K sreči smo primanjkljaj nadomestili v eksperimentalnem delu, ki je bil relativno zelo uspešen.

Naslednja mednarodna fizikalna olimpijada bo od 3. do 12. julija 2005 v Salamanci, Španija.

Slika 1.

Slovenska olimpijska ekipa na 35. mednarodni fizikalni olimpijadi. Stojijo od leve proti desni: Simon Jesenko, Klemen Žiberna (bronasta medalja), Simon Čopar (bronasta medalja), Peter Jakopič (pohvala) in Klemen Blokar. Čepijo od leve proti desni: Ciril Dominko, Jung Min Kim (vodička tekmovalcev), Jure Bajc.

Ciril Dominko

RACUNAL LISTVO

```
int henny() { return((*ZNP?ZNP[random()]*ZNP+1]+1:random
```





Računalniško miselna igra kamen-papir- -škarje



())%3);}



Katera miselna igra na svetu je najenostavnejša? Orientalška igra *go*? Ali pa morda *štiri v vrsto*? Kaj pa vsem dobro poznani *križci in krožci*? Vse imajo dokaj enostavna pravila, vendar zanje potrebujete tudi papir in pisalo ali druge pripomočke. Še enostavnejša igra od naštetih pa potrebuje le dva igralca z vsaj eno roko in nobenega drugega pripomočka. Pa tudi omejitve z rokami ni dokončna, saj je improvizacija vedno možna. Ta še enostavnejša in po vsem svetu razširjena igra se imenuje *kamen-papir-škarje*, v filmskem svetu je poznana kot *rock-paper-scissors*, verjetneje najpogosteje pa se pojavlja francoska fonetična izpeljanka *RoShamBo*.

Ne glede na ime igre in ugibanja, da so jo morda igrali že v Egiptu 2000 let pred našim štetjem, so pravila povsod ista. Igralca štejeta do tri in takrat z roko pokažeta gesto: stisnjena pest predstavlja kamen, vodoravno iztegnjena dlan predstavlja papir, medtem ko proti nasprotniku iztegnjena kazalec in sredinec predstavljata škarje. Kamen zmaga nad škarjami, ker jih otopi, škarje nad papirjem, ker ga prerežejo, papir pa nad kamnom, ker ga lahko pokrije. Ostale kombinacije predstavljajo izenačen rezultat (tabela 1).

Tabela 1.
Rezultati
kombinacij v igri

	kamen (K)	papir (P)	škarje (Š)
kamen (K)	½	0	1
papir (P)	1	½	0
škarje (Š)	0	1	½

■ Tekmovanja

Igra je sčasoma postala tako popularna, da po celem svetu prirejajo razna tekmovanja; oktobra 2004 je bilo svetovno prvenstvo v Torontu v Kanadi. Napisali so celo nekaj knjig na temo, kako zмести nasprotnika in ga po možnosti prepričati, kakšno gesto naj naredi. Ne manjkajo niti nasveti s pomočjo provokacij.

Velik izziv predstavlja tudi pisanje računalniškega programa, ki bi nadomestil igralca in celo zmagal. Tudi na tem področju so se pojavila tekmovanja. Prvega je leta 2001 organiziral Darse Billings iz univerze v Alberti: iz desetih držav je prišlo 39 tekmovalcev, ki so predstavili 45 različnih računalniških programov. Tekmovanje je predstavljalo tako velik izziv, da so se prijaviili tudi dobitniki najvišjih nagrad iz reševanja miselnih problemov in Loebnerjevih nagrad. Predlagane računalniške rešitve so se delile na dve kategoriji: na programe z največ 40 ukazi in na poljubno velike programe. V želji po izboljšavi

svojih programov so jih mnogi avtorji javno objavili na svetovnem spletu, načrtujejo pa že nova tekmovanja, tudi na Mind Sport Olympics.

■ Programske rešitve

Pri pisanju tekmovalnih programov se moramo zavedati, da nasprotnik ne bo podvržen slabostim človeškega faktorja, zaradi česar ne bo tako predvidljiv. Pri razvijanju učinkovitih programov proti programom je tako še večji izziv napisati zares učinkovito strategijo.

V nadaljevanju si oglejmo nekaj objavljenih strategij in morda se vam bo utrnila kakšna ideja za vaše lastne strategije. Ogleдали si bomo le enostavnejše ideje, obstajajo pa tudi precej kompleksnejši pristopi s tisočimi vrsticami programske kode in ogromno porabo pomnilnika, ne manjkajo niti nevronske mreže. Naj pa poudarimo, da takšni pristopi na tekmovanju niso bili pretirano uspešni.

Konstantna izbira

V igralnem žargonu velja rek, da nič ne premaga kamena (angl. »nothing beats the rock«). Posledica je preprosta strategija imenovana *Good Ole Rock*, ki vedno izbere kamen (K). Brez težav si lahko zamislimo tudi strategiji, ki izbereta ali samo papir (P) ali samo škarje (Š).

Proporcionalna izbira

Vsaki izbiri (K, P ali Š) dodelimo določeno verjetnost, da jo izberemo. Najbolj znana strategija je *20-20-60*, ki z verjetnostjo 0.2 (približno 20% od vseh izbir) izbere K ali P, z verjetnostjo 0.6 pa izbere Š.

Naključna izbira

Popolnoma naključno (z enako verjetnostjo vseh izbir) izberemo K, P ali Š. Teoretiki iger so analizirali takšno strategijo in prišli do zaključka, da predstavlja optimalno strategijo med človeškimi igralci. Zmagali in izgubili bomo približno enako število iger oziroma v povprečju igrali izenačeno vse igre. Za programe to ne velja popolnoma, kljub temu pa kompleksnejši programi, ko ugotovijo, da izgubljajo, uporabljajo to strategijo, da popravijo svoj izid.

Krožna izbira:

Izbire se ciklično pojavljajo, najprej K, zatem P, temu pa sledi Š. Zgodba se nato spet ponovi. Brez težav bi lahko imeli tudi drugačen vrstni red izbir.

Vnaprej predpisano zaporedje izbir

Med strategijami so se pojavile tudi inačice, za katere že vnaprej poznamo predmet ob določeni igri, npr. pri 515-i pono-

vitvi igre. Nekateri so predlagali, da v i -ti igri po modulu 3 gledamo i -to decimalno število π . Drugi so poskusili z generiranjem znanih zaporedij, kot je npr. de Bruijnovo zaporedje ali pa s pretvorbo nekega besedila po različnih metodah v zaporedja znakov K, P in Š.

Zmaga nad zadnjo izbiro

Strategija vrne predmet, ki bi zmagal nad prejšnjo nasprotnikovo izbiro. To je tudi najenostavnejša izbira, ki beleži zgodovino igranja.

Nikoli zadnja izbira

Vedno si zapomnimo svojo prejšnjo izbiro in zatem z enako verjetnostjo izberemo enega izmed preostalih dveh predmetov. Tudi ta strategija deluje na podlagi zgodovine igranja.

Najpogostejša nasprotnikova izbira

Beležimo si nasprotnikove izbire, poiščemo izbiro, ki jo je iz-



bral največkrat in izberemo predmet, ki jo premaga. V primeru človeškega nasprotnika bo namreč nasprotnik neizogibno dajal prednost enemu od treh predmetov. Strategija se dobro obnese pri nasprotniku, ki konstantno izbira vedno isti predmet, in solidno pri strategijah, ki občasno dajejo prednost določenemu predmetu.

Težava strategije je ta, da nasprotnik med igranjem rad spremeni strategijo. Zato je bolje, če si zapomnimo samo nekaj zadnjih izbir nasprotnika. Program, ki je zmagal na prvem tekmovanju, si je zapomnil 1000, 100, 10, 5 in zadnji dve izbiri.

Vzorec iz zgodovine

Ponovno si beležimo vse izbire nasprotnika in vrstni red, kako so si sledile. Nasprotnik morda igra tako, da ponavlja kak vzorec, npr. KKŠPŠPK. Če ugotovimo, da rad izbira ista zaporedja izbir, lahko to s pridom izkoristimo.



Kombinirane strategije

Kompleksnejši (in recimo tudi inteligentnejši) program je lahko sestavljen iz večjega števila strategij. Vsaka od njih izračuna najboljšo potezo in jo sporoči glavnemu programu, ta pa se nato odloči za potezo, ki jo je predlagala večina strategij. V nadaljnjem poteku iger lahko vsaki strategiji dodatno določimo oceno, kolikokrat je predlagana izbira bila dober ali slab nasvet. Povejmo še, da program, ki je na drugem tekmovanju vseboval kopije vseh prejšnjih programov, kljub temu ni zmagal.

■ V razmislek

Predstavili smo le nekaj strategij, na svetovnem spletu jih bralec lahko zasledi še več. Strategije s pomočjo zgodovine se dokaj dobro obnesejo proti slabšim nasprotnikovim strategijam, vendar, kot že rečeno, nasprotniki so programi, ki težijo k temu, da bi bili čim manj predvidljivi. Dober program bi morda lahko vseboval tudi neke vrste slepilen faktor, s katerim bi namenoma zavedel nasprotnika, ki se prav tako trudi, da bi ugotovil našo strategijo.

Poraja se logično vprašanje ali je sploh možno napisati še boljše strategijo, ali pa, kako napisati čim preprostejšo strategijo s čim manj programske kode. Omenjeni kratki programčki so na tekmovanjih posebna kategorija in odlično se je obnesel naslednji enovrstični programček (pisan v programskem jeziku C):

```
■ ■ int henny() { return((*ZNP?ZNP[random()]%
                        *ZNP+1]+1:random())%3);}
```

Bralcu za vajo prepuščamo, da se poigra s pomenom programa, povejmo le da *ZNP* predstavlja zgodovino nasprotnikovih potez.

■ Literatura

1. Iona Opie, Peter Opie, Children's Games in Street and Playground, Oxford University Press, 1969.
2. www.worldrps.com
3. www.cs.ualberta.ca/~darse/rsbpc.html
4. www.rpsgame.com

Branko Kaučič

ASTRONOMY

POPOLNI LUNIN M

LUNA

S_2

S_1

RA

S

SOLNCE

zenith

horizon

E_0

NULLA
SINE

DIES
LINEA

Astronom Janez od Svetega gozda

Kdaj in kdo je prvi sestavil vrtljivo zvezdno karto ali kaj podobnega? Po naključju sem »odkril«, da je nekaj takega naredil Sacrobosco že v 13. stoletju.

Izum tiska je pospešil tudi izdajanje astronomskih besedil. Ena prvih astronomskih tiskanih knjig, ki jo je okoli 1470 napisal in izdal v Nürnbergu Regiomontanus (1436 do 1476), vsebuje zloženko z vrtljivima ploščama iz lepenke za določanje gibanja Lune. Šele po letu 1530 so na univerzi v Wittenbergu začeli izdajati astronomske knjige manjšega formata, ki so bile za študente dovolj poceni, da so si lahko privoščili svoj izvod. Knjige tega časa so prodajali kar na listih – papirjih. Ve-zavo so prepustili lastniku.

Standardni astronomski učbenik, danes bi rekli osnove astronomije, pa je vendar napisal že *John iz Holywooda*, angleški matematik in astronom iz 13. stoletja. Šolal se je v Oxfordu, večino svojega življenja pa je preživel v Parizu. Tam je bil bolj znan po svojem latiniziranem imenu *Johannes de Sacrobosco*, po naše *Janez od Svetega gozda* ali pa *Janez Svetogozdni(ški)*.

Sfera je naslov učbenika, astronomskega dela, po katerem je avtor postal slaven daleč naokrog. To je bila majhna knjiga, objavljena okoli leta 1220 ter osnovana na Ptolemejevem geocentričnem sestavu in njegovih razlagah arabskih astronomov. Na splošno so jo sprejeli za temeljno astronomsko knjižno besedilo, ki je snov pojasnjevalo jasno in kratko.

V srednjem veku je bila *Sfera* pomemben učbe-





Slika 1.

Morda je Sacrobosco takole predaval študentom – risba iz 13. stoletja. Rojen je bil v Holywoodu (Yorkshire, Anglija) konec 12. stoletja, izobraževal se je na Oxfordu, po študiju je stopil v red svetega Avguščina, okoli 1220 je šel v Pariz in tam umrl okoli 1250. Sprva je bil profesor matematike na oxfordski univerzi. Njegov nagrobni kamen v Parizu krasí astrolab, astronomska opazovalna naprava, ki simbolizira vedo, ki ji je bil najbolj predan.



nik. Od sredine 13. stoletja so se iz nje učili v vseh evropskih visokih šolah. Prvič so jo uporabili na pariški univerzi že okoli 1230, tudi filozofska fakulteta na Dunaju je leta 1309 zahtevala znanje iz *Sfere*, prav tako leta 1409 oxfordska univerza. Do 17. stoletja so jo uporabljali kot osnovni astronomski učbenik, toda po letu 1700 se o njej ne sliši več, njen avtor pa je potonil v pozabo.

Sfera je bila tudi prva tiskana astronomska knjiga (Ferrara, 1472). Od 1500 do 1547 je doživela več kot 40 izdaj. Za nekatere pomeni knjiga le opis osnovnih idej Ptolemeja in arabskih astronomov, vendar pa je vsebinsko bogatejša.

Vsebovala je štiri poglavja in nekaj vrtljivk (vrtljivih zvezdnih kart). Prvo poglavje je obravnavalo nebesno kroglo, njeno razdelitev in navidezno gibanje. Nebo se vrti od vzhoda proti zahodu. Osnovna ugotovitev je: **Zemlja je okrogla**, leži v središču nebesnega oboka (glavna točka) in je nepremična. Drugo poglavje je vključevalo različne kroge ter točke Zemlje in neba (nebesni ekvator, ekliptiko, meridian, obzorje – horizont, točke enakonočja, severni in južni zemeljski pol, zodiak, arktični in antarktični krog). Tretje poglavje je razlagalo vzhajališča in zahajališča zodijskih ozvezdij ter trajanje dnevov za različne zemeljske podnebne pasove od ekvatorja proti poloma. Četrto poglavje je pojasnjevalo gibanje Sonca in planetov ter vzroke za Lunine in Sončeve mrke.

Seveda je knjiga razlagala gibanja planetov in mrke po Ptolemeju. Razlaga pa je bila preskromna. Zato so študentje 16. stoletja, ki so hoteli izpopolniti svoje znanje astronomije, posegali po naprednejših in boljših besedilih.

Kar želimo poudariti, je predvsem to, da sta v *Sferi* kar dve vrtljivki prepričevali, da je Zemlja okrogla, da je ukrivljena vzdolž zemljepisne dolžine (v smeri vzhod – zahod) in vzdolž zemljepisne širine (v smeri sever – jug). V knjigi piše: *Da je Zemlja izbočena od severa proti jugu in obratno, kaže naslednje: Za tiste, ki živijo proti severu, so določene zvezde vedno vidne, namreč tiste okrog Severnice.*

Slika 2.

Sfera, natisnjena leta 1570.

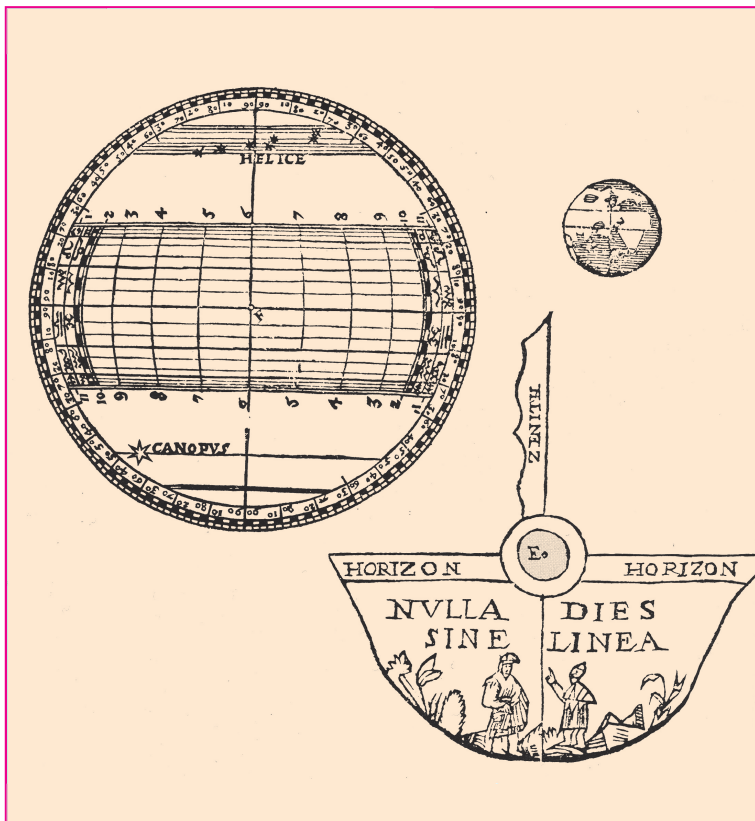


Slika 3.

Sestavni deli ene od zvezdnih vrtljivk; iz Sfere, natisnjene v Wittenbergu leta 1557.

Tisti, ki so blizu južnega pola, teh zvezd nikdar ne vidijo. Če bi šli od severa proti jugu bi zahajale tudi zvezde, ki so bile prej ves čas vidne. Bolj proti jugu bi šli, več zvezd bi zahajalo. Vzrok temu je okroglost Zemlje.

Če pa bi bila Zemlja ravna od vzhoda do zahoda, bi za vzhodnjake in zahodnjake zvezde vzhajale istočasno, kar pa ni res. Če bi bila Zemlja ravna od severa proti jugu, bi vedno videli nadobzornice, kar tudi ne drži. Človeku se zdi Zemlja ravna, ker je tako zelo obsežna.



Ilustracija iz Sfere še ponazarja, kako se z vrtljivko pojasni dnevno gibanje Velikega voza (Helice) in južne zvezde Kanop(us), pa tudi poti Sonca za različne dni. Na vrtljivem delu vzbuja pozornost latinski rek *Nulla dies sine linea* (Noben dan brez črtice), kar naj bi po razlagi pomenilo, da pot Sonca – črtico – lahko določimo za vsak dan v letu.

Sacroboscovo besedilo so na široko uporabljali celo pred njegovo prvo natisneno verzijo 1472. Izobraženi ljudje v Kolumbovem času in že dosti prej so se jasno zavedali, da je Zemlja okrogla.

Marijan Prosen

Najdaljši čas trajanja popolnega luninega mrka

V astronomskih efemeridah *Naše nebo* lahko preberemo, da sta bila v letošnjem letu dva popolna Lunina mrka in sicer 4. maja in 28. oktobra. Oba sta bila vidna tudi pri nas, torej smo imeli zopet priložnost, da se posvetimo astronomskemu opazovanju. Preskočimo tehnične priprave na opazovanje in se ustavimo ob vprašanju, koliko časa traja popolni Lunin mrk. V efemeridah preberemo, da traja majski popolni Lunin mrk 1h in 16,3 minute, jesenski pa 1h in 21,2 minute. Ker vemo, da je gibanje Lune veliko bolj zapleteno od tistega, o katerem se učimo v šoli, ne vprašujemo, zakaj nastajajo časovne razlike med trajanji posameznih popolnih Luninih mrkov. Če si predstavljamo Lunin mrk tako, kakor je opisan v osnovnošolskih učbenikih fizike, pa se lahko vprašamo, koliko časa t najdalj traja popolni Lunin mrk.

Lunin mrk nastane, ko pride Luna na svoji poti okrog Zemlje v njeno senco. To se zgodi le ob polni luni ali ščipu, ko je Luna na nasprotni strani Zemlje kakor Sonce. Zaradi nagnjenosti ravnine Luninega tira okrog Zemlje glede na ravnino gibanja Zemlje okrog Sonca, pa Lunin mrk ne nastopi ob vsakem ščipu. Ob ščipu je Luna večinoma nad ali pod Zemljino senco. Popolni Lunin mrk je takrat, ko pride vsa Luna v Zemljino senco. Najdaljši čas popolnega Luninega mrka se dogodi, ko prečka Luna Zemljino senco po premeru kroga, ki je presek Zemljine sence z ravnino, ki je v oddaljenosti Lune pravokotna na premico skozi središči Zemlje in Lune.

Označimo z $x = |S_1T|$ dolžino Zemljine sence, z R_s polmer Sonca, z R_L polmer Lune, z R_z polmer Zemlje in z d_{zs} razdaljo Zemlja-Sonce. Računanje poenostavimo, če izrazimo vse potrebne podatke s polmerom Zemlje. Polmer Lune je $0,27 R_z$, polmer Sonca je $109 R_z$, razdalja Zemlja-Luna je $60 R_z$, razdalja Zemlja-Sonce pa $23400 R_z$. Polmer Zemlje je $R_z = 6370$ km. Iz podobnih trikotnikov zapišemo sorazmerje (slika 1): $R_s : R_z = (d_{sz} + x) : x$, od koder izračunamo dolžino Zemljine sence:

$$x = \frac{R_z \cdot d_{sz}}{R_s - R_z}.$$

V dobljeni izraz za dolžino sence vstavimo vrednosti za R_s in d_{sz} . Tako dobimo $x = 217 R_z$. Vzemimo idealni primer, da se giblje Luna okrog



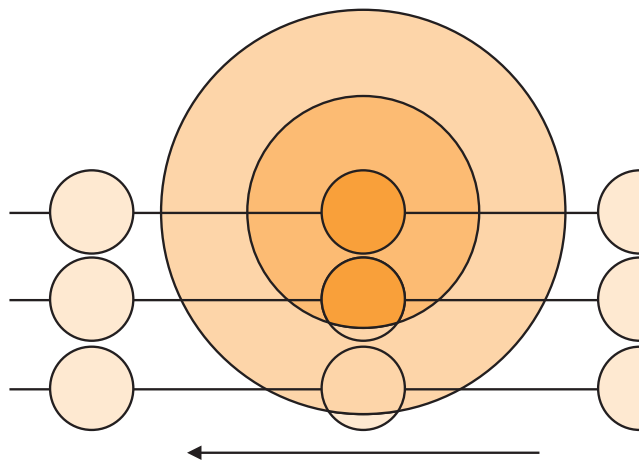


Zemlje po krožnici, da je Lunina pot znotraj Zemljine sence tetiva tega kroga in da je ta tetiva hkrati tudi premer kroga (širina) Zemljine sence, skozi katero potuje Luna pri popolnem središčnem Luninem mrku. Iz podobnih trikotnikov na sliki 1 izračunamo za pot s Lune v Zemljini senci:

$$s = 2R_z \left(1 - \frac{d_{zL}}{X} \right) = 1,44 R_z.$$

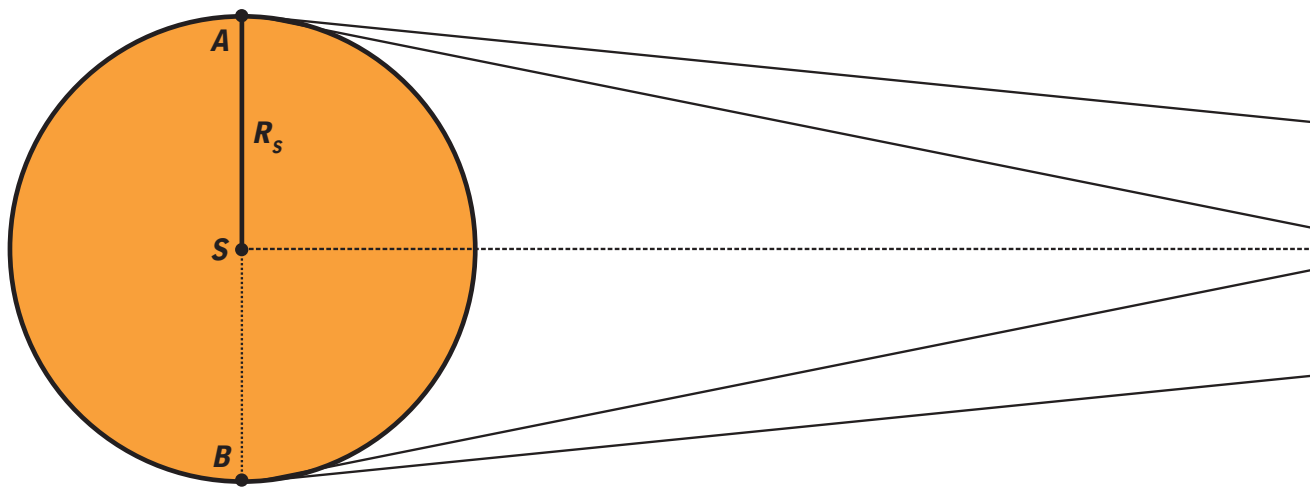
Pri popolnem središčnem Luninem mrku torej potuje Luna čez premer s kroga Zemljine sence. Popolni Lunin mrk traja toliko časa, kolikor se Luna giblje znotraj tega kroga. V tem času napravi pot $s_1 = s - R_L = 1,17 R_z$, če upoštevamo številčni vrednosti za s in R_L . Najdaljši čas trajanja t popolnega Luninega mrka dobimo tako, da pot s_1 delimo s povprečno hitrostjo v_L gibanja Lune okrog Zemlje, ki je približno 1 km/s. Izračunana vrednost za čas t je dve uri, kar se razmeroma dobro ujema s podatki v literaturi.

Karel Šmigoc



Slika 2. Navidezna oziroma kotna razsežnost Lune ter Zemljine sence in polumesce na povprečni razdalji Lune od Zemlje, tj. $60 R_z$. Skica shematično prikazuje premikanje Lune skozi Zemljino senco pri popolnem središčnem (a), delnem (b) in polsenčnem (c) Luninem mrku.

Sonce



■ Še opomba uredništva!

V prispevku je izračunana neka povprečna vrednost trajanja popolnega središčnega Luninega mrka. Ker je ob ščipu Luna enkrat bolj, drugič pa manj oddaljena od Zemlje in ker se spreminja tudi širina s Zemljine sence, v katero pride Luna ob mrku, trajajo mrki različno dolgo, tj. od kratkega trenutka do okoli 2 ur. Nazorno je podana geometrijska oziroma fizikalna razlaga mrka. Astronomi pa tak mrk raje pojasnjujejo takole.

Ker se pojav dogaja na nebu, vse podatke izrazimo s kotnimi enotami. Povprečni kotni premer ali zorni kot β širine Zemljine sence na povprečni razdalji Lune od Zemlje, tj. v oddaljenosti $60 R_Z$, izračunamo iz enačbe: $\beta/360^\circ = s/2\pi \cdot 60 R_Z$, od koder sledi $\beta = 1,4 R_Z \cdot 360^\circ/2\pi \cdot 60 R_Z = 1,3^\circ$. Povprečni zorni kot Lune je nekoliko večji od $0,5^\circ$, torej za navidezni ali kotni polmer Lune lahko vzamemo približno vrednost $\rho_L = 0,3^\circ$.

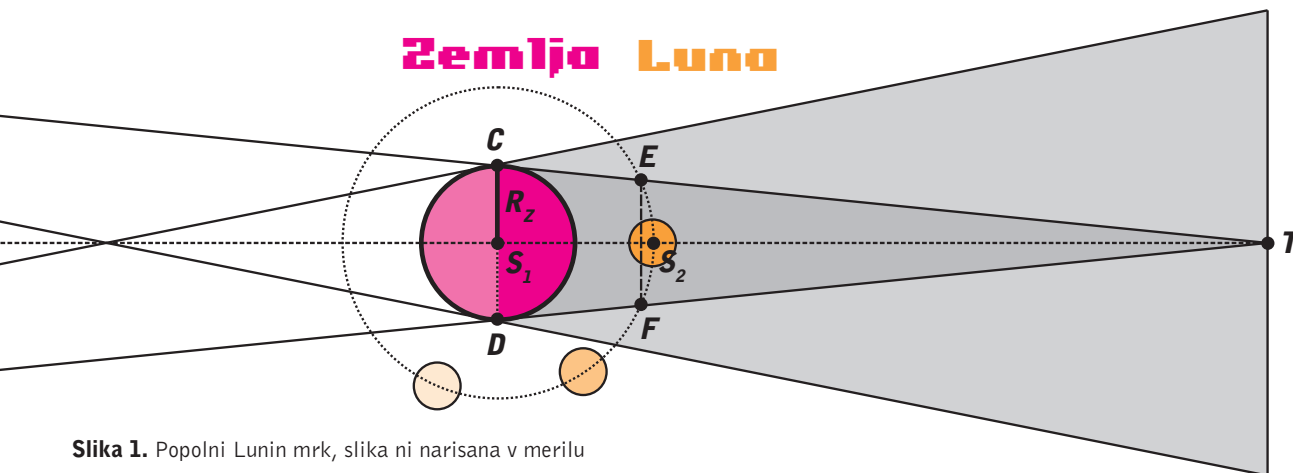
Na nebu potuje Luna navidezno hitreje kakor Sonce oziroma Zemljina senca. Luna navidezno preide Zemljino senco z desne proti levi (slika 1). Glede

na Zemljino senco se giblje s kotno hitrostjo $\omega_L = 360^\circ/t$, če je $t = 29,5$ dneva, kar je trajanje sinodskega meseca, tj. obhodnega časa Lune glede na Sonce, npr. čas med dvema zaporednima prvima krajcema. Za t vzemimo kar okroglo vrednost 30 dni. Tako je $\omega_L = 360^\circ/30 \text{ dni} = 12^\circ/\text{dan}$.

Pri vseh teh poenostavitvah izračunamo, da je povprečno trajanje popolnega središčnega Luninega mrka $(\beta - \rho_L)/\omega_L = (1,3^\circ - 0,3^\circ)/(12^\circ/24 \text{ ur}) \approx 2$ uri.

S tem dopolnilom smo želeli le pokazati, da trajanje takega mrka lahko izračunamo še na drug način, hkrati pa smo tudi potrdili rezultat v prispevku.

Marijan Prosen



Slika 1. Popolni Lunin mrk, slika ni narisana v merilu

- ■ $|SS_1| = d_{SZ}$ $|S_1S_2| = d_{ZL}$ $|S_1T| = x$ - dolžina zemljine sence
- ■ $|EF| = s$ - širina Zemljine sence na oddaljenosti Lune od Zemlje

■ Navodila sodelavcem Preseka za oddojo prispevkov

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštivilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

■ Kolofon

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

letnik 32

šolsko leto 2004/2005

številka 2–3

Uredniški odbor

Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosen (astronomija), Marko Razpet, Andrej Taranenko (računalništvo), Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine

DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, 4232 460, telefaks (01) 2517 281.

Naročnina za šolsko leto 2004/2005 je za posamezne naročnike **4.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol **3.500 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, dvojna številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino pa znaša **25 EUR**.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT: SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

Sponzor



List sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Polona Šterk in Matjaž Čuk

Ilustracija Polona Šterk, Matjaž Čuk, Nina Rupel

Tehnično urejanje Matjaž Čuk

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

© 2004 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1589

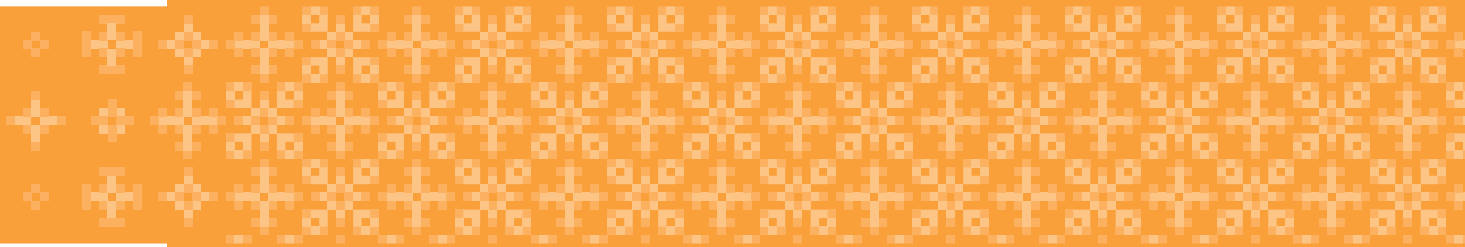
Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja izdajatelja ni dovoljeno.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



.tex

2+3+2+3+2+3+2+3+2+3+2+3+2+3+2+3+2+3+2+3+2



3+2+3+2+3+2+3+?

Najlepše fotografije za leto fizike



Presek objavlja ob vstopu v leto 2005, ki je po vsem svetu izbrano za leto fizike, nagradni fotografski natečaj na fizikalno temo. Vabimo vas, da sodelujete s svojimi fotografijami!

Posneti motiv mora imeti zanimivo fizikalno vsebino, nagradili pa bomo tiste fotografije, ki bodo po mnenju Presekove umetniške ekipe najbolj zanimive in najlepše. Vsakdo lahko sodeluje z največ petimi fotografijami, posnetimi po objavi tega natečaja, vsaka od teh pa je lahko

- originalni diaposnetek s priloženo povečavo na papirju, približne velikosti 13×18 cm,
- povečava (13×18) z negativa (avtorje izbranih fotografij bomo naknadno prosili, da nam pošljejo negative)
- originalna nepopravljena datoteka iz digitalnega fotoaparata, posneta z vsaj dvema milijonoma točk in shranjena na elektronskem mediju, prav tako s priloženo povečavo na papirju (13×18).

K vsaki fotografiji priložite spremno besedilo v primerni obliki, da bo lahko objavljeno skupaj s fotografijo. Besedilo naj pove, kje in kdaj ste sliko posneli, s kakšno fotografsko opremo in drugimi pripomočki ter kakšne so bile pri posnetku nastavitve na fotoaparatu. V nekaj stavkih lahko komentirate tudi fizikalno vsebino slike.

Slike pošljite na naslov *Uredništvo Preseka*, Jadranska 19, 1000 Ljubljana. Svetujemo vam, da na ovojnico dopišete »FOTOGRAFIJE – NE PREPOGIBAJ« in vanjo za oporo vstavite še kos tršega kartona. Ne pozabite priložiti svojega imena in poštne naslova. Pred izidom vsake številke Preseka bomo med vsemi na novo prispelimi fotografijami izbrali najboljše, jih objavili v Preseku in nagradili avtorje.

Razpis iz prejšnje številke dopolnjujemo še z naslednjim:

- opomba o nastavitvah ostane, če so te zanimive in ste si jih zapisali
- avtorske pravice ostanejo avtorju
- originalne diapositive in negative bomo vračali
- nagrajenci pristanejo, da njihove slike enkrat objavimo v Preseku ali Obzorniku za matematiko in fiziko.

Uredništvo Preseka



**Uredništvo Preseka
Jadranska 19**

1000 Ljubljana

