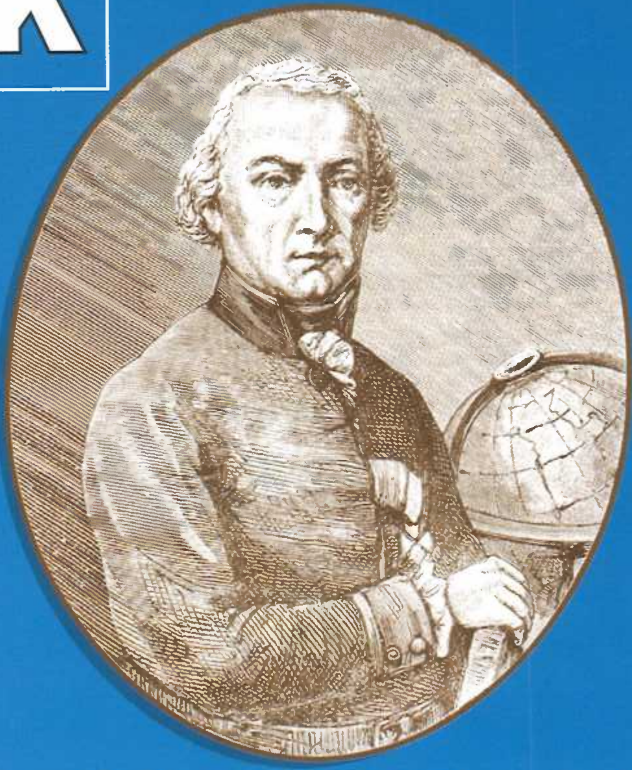
31 (2003 – 04) 4

PRESEK



OB 250-LETNICI ROJSTVA JURIJA VEGE

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, leto 2003/04, številka 4, strani 201–256

VSEBINA

UVODNIK

Pred 250-imi leti se je v Zagorici pri Moravčah rodil Jurij Vega. Ta jubilej bomo počastili z VEGOVIMI DNEVI 2004, ki združujejo več prireditev in posebnih dogodkov. Mednje sodi tudi ta številka Preseka, v celoti posvečena Juriju Vegi.

Čeprav so se veličine Jurija Vege ter njegovega pomena za Slovenijo in za slovenski narod zavedali mnogi že v preteklih 200 letih, pa se je prav v zadnjih desetih letih nekaj premaknilo. Slovenci smo se namreč začeli zavedati, da sodi v nacionalno zgodovino tudi zgodovina znanosti, torej tudi zgodovina slovenske matematike.

Ob tem moramo seveda poudariti, da je matematika izrazito mednarodna in zato ni smiselno govoriti o slovenski, nemški, ruski, ameriški ali francoski matematiki. Čisto drugače pa je, če si za zorni kot jemljemo nacionalno zgodovino.

Jurij Vega se v luči novih spoznanj kaže še bistveno bolj pomemben matematik, kakor smo mislili doslej. Vegovi logaritmovniki so dalj časa veljali za njegovo najpomembnejše delo in vse drugo je ostajalo nekje v ozadju. Ko človek prebira zgodovino računanja decimalk števila π, v knjigi rekordov ostaja zapisano Vegovo ime. Pred kratkim mi je prišla v roke poljudno znanstvena knjiga o enem najslavnejših matematikov 20. stoletja Paulu Erdösu, v kateri je omenjen tudi Vega v zvezi z računanji praštevil; tudi na tem področju je namreč dosegel rekorde. Naračunal je vsa praštevila do 400 031, kar je bilo za tedanje razmere izredno dejanje. Svoje račune je vključil v enega od svojih logaritemskih priročnikov. Prav na osnovi njegove razpredelnice je Gauss lahko postavil sloviti izrek o porazdelitvi praštevil.

Za razliko od prvih, črno-belih opisov Vegovega življenja in dela, ki so Vego prikazovala skoraj v mitskih razsežnostih in so gradila zgolj na njegovih logaritmovnikih, manj pa so poudarjala npr. njegove dosežke v balistiki, dojemamo dandanes Vego večplastno in precej bolj človeško z vsemi njegovimi upi, željami, ambicijami in prizadevanji. Njegov znanstveni opus je veličasten, še posebej če razumemo, da ob matematiki Vega niti najmanj ni zapostavljal svoje osnovne, vojaške službe; ne le varno na dunajski topničarski šoli, kjer je poučeval, ampak tudi tisto aktivno na fronti proti Turkom in Francozom.

Danes dosti bolje razumemo tudi vpetost Vegove življenske poti v tedanje zgodovinske okvire. Tako je npr. dr. Južnič izbrskal arhivske podatke, ki pojasnjujejo Vegovo najmanj znano življensko obdobje, ko je po končanem liceju v Ljubljani deloval kot navigacijski inženir pri reguliranju reke Mure. Zgodovinar dr. Košir je raziskal Vegovo sodelovanje s prostozidarji. Odkrita je korespondenca Jurija Vege z berlinsko akademijo znanosti, katere član je Vega postal leta 1800, le dve leti pred skrivnostno smrtjo. Tudi z nekaterih drugih evropskih akademij prihajajo podatki o Vegovem sodelovanju.

S pripravami na Vegove dneve 2004, ki so se začele že ob dvestoletnici njegove smrti leta 2002, je zaživel tudi nov seminar za zgodovino matematičnih znanosti, ki se srečuje ob ponedeljkih v Vegovi sobi na Fakulteti za matematiko in fiziko. Slovenci imamo namreč kar nekaj matematikov, ki bi jih morali bolj podrobno spoznati in jih na novo umestiti v prostor in čas. Mednje sodijo med drugimi Plemelj, Herman Koroški, Močnik, Hočevar, Zupančič, Lah, Vakselj. Premalo poznamo tudi dela matematikov z roba slovenskega ozemlja, npr. Pirančana Tartinija ali pa Štajerca Frishaufa. Prvi slovi kot glasbenik, drugi kot planinec.

Razmere, v katerih delajo sodobni matematiki, se močno razlikujejo od tistih, v katerih je deloval Jurij Vega. Vega je objavljal sam. Dandanes število objav v soavtorstvu narašča. Slovenci ne le, da objavljajo v uglednih mednarodnih matematičnih revijah, ampak so tudi člani njihovih uredniških odborov. Vse več knjig naših avtorjev je objavljenih v tujini.

Sodobni matematiki pogosto rešujejo probleme v skupinah. Nekateri matematiki si pripravijo potrebna orodja v obliki algoritmov, ki pomagajo pri reševanju problema. V to skupino lahko razvrstimo Jurija Vego. Večino svojega dela je posvetil prav razvoju takšnih orodij, ki so pomagala njemu in drugim pri reševanju še nerešenih problemov. S tem svojim poslanstvom pa je zaradi obsežnosti in temeljitosti svojega dela Vega daleč pred drugimi sodobniki.

Ena od nalog Preseka je vzbujati v mladih zanimanje za matematične znanosti ter tako nevsiljivo pomagati pri njihovi vzgoji in izobraževanju. Vzgoja in izobraževanje na naših tleh imata dolgo in svetlo tradicijo. Ne smemo pozabiti, da je Jurij Vega vso svojo formalno izobrazbo pridobil doma, na jezuitski gimnaziji in liceju v Ljubljani, kjer od 22. marca 2004 stoji spominska plošča.

Tomaž Pisanski

JURIJ VEGA

1754	V Zagorici pri Moravčah se rodi Jurij Vega.
1767	Začne obiskovati 1. razred jezuitske gimnazije v Ljubljani.
1773	Zaključi gimnazijo in začne obiskovati licej v Ljubljani.
1775	Zaključi licej v Ljubljani.
1775	Začne službovati kot navigacijski inženir na Muri.
1780	Se vpiše med topničarje.
1781	Postane profesor matematike na topničarski šoli na Dunaju.
1782	Izide prvi zvezek njegovih učbenikov *Vorlesungen über die Mathematik.*
1783	Izide njegov logaritmovnik *Logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln.*
1784	Izide drugi zvezek njegovih učbenikov *Vorlesungen über die Mathematik.*
1785	Prosi za sprejem v prostozidarsko ložo Zur Wahren Eintracht.
1787	Poroči se z Jožefo, roj. Svoboda.
1788	Izide tretji zvezek njegovih učbenikov *Vorlesungen über die Mathematik.*
1789	Pri Beogradu sodeluje v boju proti Turkom. Predstavi izračun števila π na 140 decimalk.
1793	Izide *Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch.* Sodeluje v bitki pri Lauterbourgu. Sodeluje v bitki pri Fort Louisu.
1794	Izide njegovo glavno delo *Thesaurus Logarithmorum Completus.* Postane član velikobritanske znanstvene družbe v Göttingenu.
1795	Sodeluje v bitki pri Mannheimu.
1796	Prejme viteški red Marije Terezije. Sodeluje v bitki pri Mainzu. Sodeluje v bitki pri Wiesbadnu. Sodeluje v bitki pri Dietzu. Sodeluje v bitki pri Kehlu.
1798	Postane redni član fizikalno-matematične družbe v Erfurtu.
1800	Izide četrti zvezek njegovih učbenikov *Vorlesungen über die Mathematik.* Cesarska pisarna mu podeli baronski naslov. Postane član češke družbe znanosti v Pragi. Postane član pruske akademije znanosti v Berlinu.
1802	Umre na Dunaju.
1981	Izide zadnji ugotovljeni ponatis njegovih logaritmov.

VEGA STRELJA S TOPOM[1]

Vega se je drugo polovico življenja grel v topničarski uniformi. Postal je najuspešnejši slovenski oficir vseh časov; učenjak in vojak obenem. Med vodilnimi znanstveniki ni bilo drugega tako uspešnega častnika, zato bomo z bralci Preseka preleteli okoliščine, ki so omogočile Vegove uspehe.

Balistika v Ljubljani

Vojaške vede so bile pomemben del Vegovega študija pri jezuitih v Ljubljani. Zadnji gimnazijski leti je bil Vegov rektor Dunajčan Kristijan Rieger, ki je pred tem objavil sloviti latinski učbenik o vojni arhitekturi. Knjiga je bila eno temeljnih del na jezuitskih šolah tedanjih dni. Vega jo je uporabljal med študijem in pozneje kot topničar. Riegerjevo delo so študentje vojaških znanosti brali še stoletje po njegovi smrti.

Enaindvajsetletni Vega je z odličnim uspehom končal študij filozofije v Ljubljani. Zagovarjal je teze iz matematike, ki so se končale s sedemnajstimi tezami o balistiki. Poznati je moral parabolo telesa vrženega pod kotom 45° ter določitev najvišje točke meta pod kotom 15°. Moral je izračunati potrebno količino smodnika za izstrelitev z določeno začetno hitrostjo. Temu problemu je Vega dve desetletji pozneje posvetil svoja glavna odkritja v topništvu. Podobne naloge so reševali tudi tedanji študentje na dunajski univerzi.

Topovi in možnarji pred Vego

Vega je postal topničar v času, ko so bili možnarji že nepogrešljiv del artilerije pri obleganjih. Razvili so jih iz posod za mešanje smodnika. Po nekaj slučajnih eksplozijah so ugotovili, da jih lahko uporabijo kot orožje. Možnarje so med prvimi uspešno uporabili Turki med svojim zadnjim obleganjem Carigrada.

Strelivo možnarjev se je do Vegovih dni le malo spremenilo. Železo so vlivali v votlo kroglo. V luknjo so vstavili smodnik in druge snovi ter jo zaprli z lesenim vžigalnikom. Vžigalnik je bila enostaven zašiljen klin iz bukovega lesa z luknjo, izvrtano v sredi, in vdolbino na vrhu. Luknjo in vdolbino so napolnili s finim suhim smodnikom in vinskim špiritom. Klin so označili s stopnjami in ga skrajšali, da je lahko smodnik dobro gorel. Ko so mino zažgali, je ogenj zajel smodnik v vdolbini glave vžigalnika. Če so dobro izračunali, je mina eksplodirala ravno ob padcu na cilj. Ker

[1]Zahvaljujemo se History of Science Collections univerze v Oklahomi za dovoljenje za objavo nekaterih slik v tem članku.

je bila napolnjena z mešanicami smodnika, so ubogega sovražnika zasuli delci žvepla, smol, terpentina in nitratov.

V času Vegovega rojstva je ves svet občudoval habsburško topništvo, ki ga je vodil knez Liechtenstein, prednik gospodarjev sodobne kneževine sredi Alp. Knez je reformiral habsburško topništvo, tako da so napredek moral priznati tudi sovražniki. Na jugu Češke je organiziral središče topničarjev z letnimi bojnimi vajami, ki sta si jih je nekoč ogledala celo lepa cesarica Marija Terezija in njen mož. Uveljavil je novo generacijo poljskih topov, havbic in možnarjev različnih kalibrov.

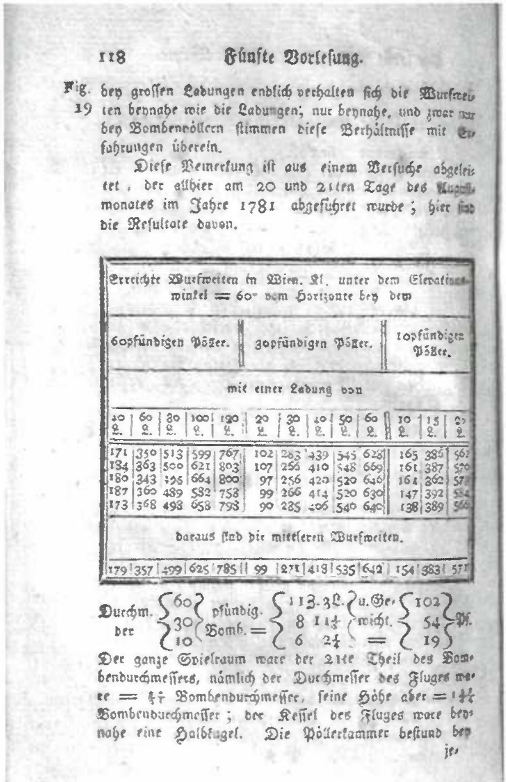
Vegovi topovi

Jožef II., sin Marije Terezije, je po vsej monarhiji iskal primerne strokovnjake za svoj načrtovani topničarski bombardirski oddelek. Lepega dne je videl Vego, kako izračunava in meri teren ob Muri nad Radgono, da bi popravil škodo zaradi zimskih poplav. Petindvajsetletni Slovenec mu je takoj padel v oči, povabil ga je med topničarje na Dunaj, podobno kot njegov prednik nekoč Martina Krpana. Vega seveda ni tovoril soli, je pa znal izračunati vse, kar si je cesar zaželel.

Žal Vegova zgodba ni minila brez cesaričine lipe in ministra Gregorja. Minister Gregor se je v Vegovem primeru pisal Colloredo. Bil je vodja cesarskih topničarjev in je sprva kar rad uporabil pridnega Vego. Ko pa je Vega začel objavljati znamenite knjige in si je na francoskem bojišču prislužil medaljo Marije Terezije, je Colloredo nenadoma pozelenel od zavisti in začel našemu Juriju metati polena pod noge.

Vega je postal učitelj matematike na polkovni šoli v dunajskem garnizijsko-topničarskem okraju. Napredoval je v podporočnika in se takoj udeležil balističnih poskusov. Ugotovil je, da je le pri majhnih nabojih domet sorazmeren kvadratu smodniškega naboja. Pri srednjem polnjenju je sorazmeren s poldrugo potenco naboja, pri velikih polnjenjih pa pride do preme sorazmernosti. Odvisnost se je Vegi zdela prezapletena; rešitev so obetali le poskusi. Vseskozi je streljal pod kotom 60° in uporabljal granate z masami 67, 34 in 6 kg.

Dve leti pozneje je opravil po štiri strele pri vsakem kotu in nalival po 840 g smodnika. Vendar ni opravil vseh poskusov na isti dan in ni opisal morebitnega vetra. Začetne hitrosti so bile zelo blizu hitrosti zvoka, toda Vegovi izstrelki niso prebijali zvočnega zidu. Seveda smo tudi zvočni zid maltene odkrili vrli Kranjci; slavni praški profesor Ernst Mach je odkritje objavil leta 1887, potem ko je dolga leta redno hodil na obisk k svojim staršem v Veliki Slatnik na Dolenjskem. Kranjci smo pač povsod zraven; brez nas se nič večjega ne odkrije v širnem svetu.



118 Fünfte Vorlesung.

Fig. 19 bey grossen Ladungen endlich verhalten sich die Wurfweiten beynahe wie die Ladungen; nur beynahe, und zwar nur bey Bombenröllern stimmen diese Verhältnisse mit Erfahrungen überein.

Diese Bemerkung ist aus einem Versuche abgeleitet, der allhier am 20 und 21ten Tage des Augustmonates im Jahre 1781 abgeführet wurde; hier sind die Resultate davon.

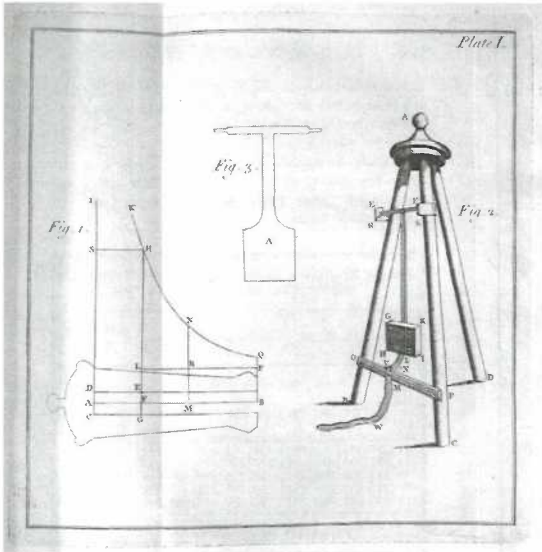
Erreichte Wurfweiten in Wien. Kl. unter dem Elevationswinkel = 60° vom Horizonte bey dem												
60pfündigen Pölter.					30pfündigen Pölter.					10pfündigen Pölter.		
mit einer Ladung von												
40 L.	60 L.	80 L.	100 L.	120 L.	20 L.	30 L.	40 L.	50 L.	60 L.	10 L.	15 L.	[illegible] L.
171	350	513	599	767	102	283	439	545	628	165	386	562
184	363	500	621	803	107	256	410	548	669	161	387	570
180	343	495	664	800	97	256	420	520	646	164	362	[illegible]
187	360	489	582	758	99	266	414	520	630	147	392	[illegible]
173	368	493	658	793	90	285	406	540	640	138	389	[illegible]
daraus sind die mittleren Wurfweiten.												
179	357	499	625	785	99	271	418	535	642	154	383	57[illegible]

Durchm. der {60, 30, 10} pfündig. Bomb. = {11 3. 3 L., 8 1 1/5, 6 2 1/4} u. Gewicht = {102, 54, 19} Pf.

Der ganze Spielraum ware der 21te Theil des Bombendurchmessers, nämlich der Durchmesser des Fluges wäre = 4/7 Bombendurchmesser, seine Höhe aber = 1 [illegible] Bombendurchmesser; der Kessel des Fluges wäre beynahe eine Halbkugel. Die Pöllerkammer bestund bey je-

Slika 1. Vegovi balistični poskusi iz leta 1781 (vir: Vega, Jurij. 1788. Vorlesungen Über die Mathematik. Dritter Band, welcher die Mechanik der festen Punkte enthält. Wien: Trattnern. stran 118).

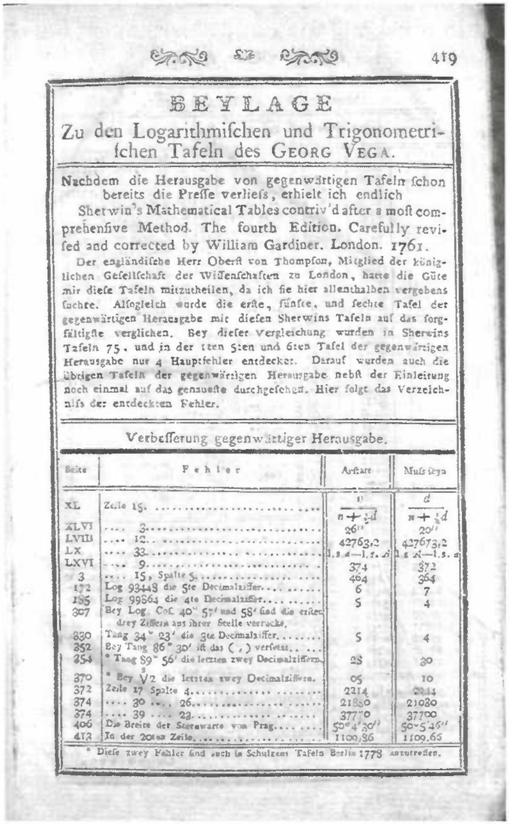
Profesor Vega je takoj začel objavljati logaritmovnike in matematična predavanja. Vsi so mu ponujali starejše tabele logaritmov na vpogled, da je v njih iskal napake. Angleške logaritmovnike mu je dal polkovnik Thompson in Vega se mu je zahvalil na koncu svoje knjige. Kdo je bilo skrivnostni Vegov sodelavec? Nihče drug kot poznejši grof Rumford, ki ga je Vega očitno zelo dobro poznal. Thompson, leto dni starejši od Vege, je pobegnil iz ZDA v Anglijo, saj se je pomotoma bojeval v poraženih kraljevih enotah. Postal je angleški polkovnik; kot podsekretar v preostalih ameriških kolonijah je prosti čas izkoristil za pomembne poskuse s smodnikom. Nato ga je bojna sreča zanesla nazaj na staro celino. Po obisku v Münchnu se je ustavil na Dunaju in kratek čas služil v habsburški



Slika 2. Balistično nihalo, ki ga je Vega uporabljal za merjenje hitrosti svojih izstrelkov (vir: Hugh Brownov prevod prevoda Leonharda Eulerja. 1777. The True Principles of Gunnery Investigated and Explained. Comprehending Translations of Professor Euler's Observations upon the new Principles of Gunnery, published by the late Mr. Benjamin Robins, and that celebrated Author's Discourse upon the Track described by a Body in a resisting Medium, inserted in the Memoirs of the Royal Academy of Berlin, for the Year 1753. London: J. Nourse. Tabla 1).

armadi v vojni proti Turkom, kjer je seveda spoznal Vego. Na Dunaju je bil rade volje predstavljen dvoru in visoki družbi. Ko je ugotovil, da se vojna proti Turkom ne bo nadaljevala, je odpotoval za nekaj tednov v Benetke in nato čez Tirolsko nazaj v München. Mesto se mu je zelo priljubilo, saj je nadvse rad pil pivo in hrustal klobase, čeprav so Oktoberfest uradno ustanovili šele dva ducata let pozneje. V Münchnu je med vrtanjem topov napovedal zakon o ohranitvi energije, ki še danes muči srednješolce. Bavarski knez ga je povišal v grofa Rumforda po kraju blizu njegovega rojstva; seveda je domiselni bodoči plemič lahkovernim Bavarcem pokrajino predstavil kot svojo dedno posest. Bil je to čas domišljije: Hacquet se je med Kranjci prelevil v francosko-ruskega plemiča, Veha v Vego, Thompson pa v Rumforda.

Medtem je Vega, prijatelj zvitega bavarsko-ameriškega grofa, postal na Dunaju stotnik in prevzel matematična predavanja na novem cesarjevem bombardirskem oddelku. Tam je prvi na svetu bodoče oficirje učil



419

BEYLAGE

Zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tafeln des GEORG VEGA.

Nachdem die Herausgabe von gegenwärtigen Tafeln schon bereits die Presse verliess, erhielt ich endlich

Sherwin's Mathematical Tables contriv'd after a most comprehensive Method. The fourth Edition. Carefully revised and corrected by William Gardiner. London. 1761.

Der engländische Herr Oberst von Thompson, Mitglied der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu London, hatte die Güte mir diese Tafeln mitzutheilen, da ich sie hier allenthalben vergebens suchte. Alsogleich wurde die erste, fünfte, und sechte Tafel der gegenwärtigen Herausgabe mit diesen Sherwins Tafeln auf das sorgfältigste verglichen. Bey dieser Vergleichung wurden in Sherwins Tafeln 75, und in der 1ten 5ten und 6ten Tafel der gegenwärtigen Herausgabe nur 4 Hauptfehler entdecket. Darauf wurden auch die übrigen Tafeln der gegenwärtigen Herausgabe nebst der Einleitung noch einmal auf das genaueste durchgesehen. Hier folgt das Verzeichniss der entdeckten Fehler.

Verbesserung gegenwärtiger Herausgabe.

Seite	Fehler	Anstatt	Muss seyn
XL	Zeile 15.	$\frac{n}{n+\frac{1}{2}d}$	$\frac{d}{n+\frac{1}{2}d}$
XLVI	.... 3.	26''	20''
LVIII	.... 12.	42763,2	427673,2
LX	.... 33.	l. s. a — l. s. A	l. s. A — l. s. a
LXVI	.... 9.	374	372
3	.... 15, Spalte 5.	464	364
172	Log 93448 die 5te Decimalziffer.	6	7
185	Log 99864 die 4te Decimalziffer.	5	4
307	Bey Log. Cos. 40° 57' und 58' sind die ersten drey Ziffern aus ihrer Stelle verrucket.		
330	Tang 34° 23' die 9te Decimalziffer.	5	4
352	Bey Tang 86° 30' ist das (,) versetzt.		
354	* Tang 89° 56' die letzten zwey Decimalziffern.	28	30
370	* Bey $\sqrt[3]{2}$ die letzten zwey Decimalziffern.	05	10
372	Zeile 17 Spalte 4.	2214	[illegible]
374	.... 30 .... 26.	21850	21080
374	.... 39 .... 22.	37770	37700
406	Die Breite der Sternwarte von Prag.	50° 4' 30''	50° 5' 46''
412	In der 20ten Zeile.	1100,86	1109,65

* Diese zwey Fehler sind auch in Schulzens Tafeln Berlin 1778 anzutreffen.

Slika 3. Vegova zahvala polkovniku Thompsonu, poznejšemu slavnemu grofu Rumfordu (vir: Vega, Jurij. 1783. Logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln. Wien: Johann Thomas Edlen von Trattnern. stran 419).

matematično analizo. Učenci so seveda preklinjali, a zaman. Ko so se matematične vede enkrat naselile v topničarskih šolah, so tam ostale za vedno.

Kot vsi nadebudni študentje so se tudi Vegovi kmalu vnesli. Matematika je šla težko v vojaške glave; a kmalu so dojeli, da brez nje topovi pač ne bodo streljali prav. Včasih so med odmori poredni študentje vendarle zabavljali čez Vego; bil je namreč samo matematik in oficir, ognjenega krsta pa še ni doživel. Kmalu so zbadljive zgodbice prišle na uho našemu vrlemu Juriju, ki si ni dal dvakrat reči. Zdajci-takojci se je prijavil med prostovoljce na turško fronto. Z bojnimi izkušnjami si je seveda močno dvignil ugled med dunajskimi študenti, ki so junaštvo v ognju postavljali visoko nad reševanje enačb.


Magazin 2557
für
Ingenieur und Artilleristen,
herausgegeben
von
Andreas Böhm.

VII. Band mit Kupfern.
Gießen, bey Johann Christian Krieger dem jüngern,
1781.

Slika 4. Naslovnica Böhmove topničarske revije, ki jo je s pridom študiral Vega (vir: Böhm, Andreas. 1781. Magazin für Ingenieur und Artilleristen. (Giessen: Johann Christian Krieger) 7: naslovnica).

Novopečeni stotnik Vega je objavil praktični pouk streljanja s topovi. Tam je natisnil svoje prve balistične tabele, odvisnost balistične krivulje od upora zraka pa je v naslednjih letih obravnaval v matematičnih predavanjih o gibanju. Najnatančneje je tabeliral naklonske kote med 80° in 88°, pri katerih je najpogosteje streljal z možnarji. Pri svojem delu je uporabil osnove, ki se jih je naučil pri pouku balistike v Ljubljani.

Ognjeni krst je doživel pri zasedbi našega nekdanjega glavnega mesta Beograda, kjer je poveljeval najtežjim možnarjem. Vega je spremenil naklonske kote obstreljevanja in izboljšal tesnjenje med cevjo in kroglo, da je lahko obstreljeval zgornje dele trdnjave. Ko je nekega večera zadel smodnišnico, je tako preplašil uboge Turke, da so še istega dne pomahali z belimi zastavicami in podpisali vdajo, samo da jih naš Jurij ne bi več tepel.

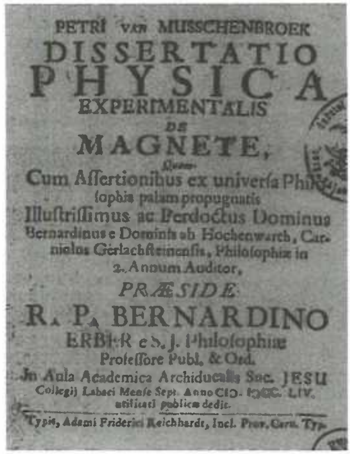
Ko je Vega postal strokovnjak za možnarje, je bila znanstvena revolucija v balistiki že končana. Ob gradnji utrdb je postala prav balistika najbolj matematična vojaška veda in zato paradni konj vseh napredno naravnanih armad med Napoleonovimi vojnami. Izboljševali so vžig smodniškega naboja in zapozneli vžig granate. Prizadevali so si tudi za varno kompenzacijo močne nasprotne sile na podstavek po strelu.

Vojaško življenje je postalo Vegi všeč, še posebno ko je glavni poveljnik armade postal nečak Jožefa II., nadvojvoda Karel. Karel je imel Vego rad, saj ga je kot mladeniča na dvoru vzgajal Vegov rojak, grof Hohenwart s Kolovca. Kadar je nanesla priložnost, je Vego pohvalil in mu preskrbel medalje in napredovanja. Začele so se francoske vojne, v katerih je topničarju Vegi nasproti stal drugi slavni topničarski častnik, sam Napoleon. Karel je bil edini na svetu, ki se je znal Napoleonu vsaj malo upirati; nedvomno predvsem zato, ker je imel ob sebi Vego in njegove možnarje. Seveda ju je minister Colloredo zato oba še bolj črtil. Colloredo se je hotel vojskovati z Napoleonom; Karel in Vega pa sta predobro vedela, da bi bilo bolje skleniti mir s takšnim silakom in ga zapeljati v zakon z lepo dunajsko princeso Lojzko.

Karel je bil vojskovodja stare šole in ni rad sprejel Napoleonovih novotarij. Francoska inačica ljudske vojske ni bila sprejemljiva za habsburško plemstvo. Karel je spoštoval veliko gibljivost nove francoske vojske, vendar je sam prisegal na dolgo manevriranje pred bitko z oviranjem sovražnikove preskrbe. Bolj kot sovražnikove glave si je želel premotiti nasprotnikove želodce s slabo prehrano. Napoleonovo vztrajanje pri hitrem spopadu mu ni bilo po godu. Nadvojvoda Karel je bil gojenec Kranjca Hohenwarta in poveljnik Kranjca Vege; nič čudnega, da bi domala ugnal v kozji rog samega Napoleona.

Ko je na fronti zavladalo zatišje, je Karlov očim ukazal Vegi, naj izdela možnarje daljšega dosega. Končno priložnost, da Vega svoje matematično in inženirsko znanje izkoristi za konstruiranje možnarskih cevi največjega dometa!

Sestavil je dva možnarja za krogle, kot so bile tedaj v navadi. Zgorevalni prostor je izvrtal v obliki prisekanega stožca s koničastim dnom; o tej možnosti je premišljal tudi Rumford. Cev v obliki stožca je bila namenjena predvsem boljšemu tesnjenju smodnika med eksplozijo, saj je Vega kroglo porinil globoko, dokler ni povsem zaprla smodniškega prostora. Starejši možnarji so imeli obliko valja in niso omogočali tako dobrega tesnjenja.


PETRI VAN MUSSCHENBROEK
DISSERTATIO
PHYSICA
EXPERIMENTALIS
DE
MAGNETE,
Quam
Cum Assertionibus ex universa Philosophia palam propugnatis
Illustrissimus ac Perdoctus Dominus
Bernardinus e Dominis ab Hochenwarth, Carniolus Gerlachsteinensis, Philosophiæ in 2. Annum Auditor,
PRÆSIDE
R. P. BERNARDINO
ERBER e S. J. Philosophiæ Professore Publ. & Ord.
In Aula Academica Archiducali Soc. JESU Collegii Labaci Mense Sept. Anno CIↃ. IↃCC. LIV.
[illegible] publicæ dedit.
Typis, Adami Friderici Reichhardt, Incl. Prov. Carn. Typ.

Slika 5. Naslovnica izpitnih tez o magnetizmu, ki jih je v Ljubljani leta 1754 zagovarjal Bernardin Hohenwart (Hohenwarth, ∗ 14. 5. 1734 Ljubljana; SJ 28. 10. 1754 Dunaj; † 3. 10. 1779 Ljubljana), mlajši brat vzgojitelja vojskovodje Karla, Sigmunda Antona Hohenwarta (∗ 2. 5. 1726 Kolovec; SJ 3. 11. 1744 Reka; † 30. 6. 1820 Dunaj).

Osebno je nadzoroval vlivanje, vrtanje in končno obdelavo novega orožja. Za vajo je pri Mannheimu streljal 16.8 kilogramske krogle pod koti 45° do treh kilometrov in čez. Starejšim možnarjem je neslo dober kilometer manj. Komisijo so sestavljali generali in drugi visoki častniki topništva in inženircev. Merili so globino, do katere se je izstrelek zaril v tla po strelu s starim in novim Vegovim možnarjem. Bombe iz Vegovega možnarja so se zakopale 63 do 126 cm globoko. Vega je povečal domet predvsem zato, ker je nalival do 2.25 kg smodnika, medtem ko so v starejše možnarje spravili skoraj kilogram manj.

Vega je tik pred smrtjo napredoval v podpolkovnika, enega najvišjih častnikov v prestolnici. Če bi živel še deset let, bi gotovo postal prvi general slovenskega rodu.

Ko si je Vega oblekel uniformo, je zavrgel stari priimek Veha in se z vsemi silami pognal navzgor v najvišje dunajske kroge. Pri tem ni zatajil svojega kmečkega slovenskega rodu, seveda pa si je moral uspehe priboriti tudi s komolci in s kakšnim sovražnim truplom. Prevelika vnema mu je nakopala vplivne nasprotnike in grob v mrzli Donavi. Morda bi moral iz vojske in politike pravočasno prestopiti v akademske znanstvene kroge in – preživeti. Kakor koli že, bili so hudi časi, doba nestrpnih ljudi in revolucij. Vega ni mogel ubežati usodnim nasprotjem in je v zadnjih mesecih očitno igral na napačno karto. Dve desetletji strmega vzpona sta se končali na dnu deroče jesenske reke. Arhimed je nekoč zaman prosil rimskega vojaka, naj ne pohodi njegovih geometrijskih skic v mivki; tudi Vegov matematični genij je ostal nem ob grobi sili sovražnikov, ki sploh niso znali logaritmirati, da o višji matematiki niti ne izgubljamo besed.

Stanislav Južnič

ŠTEVILO π IN JURIJ VEGA

Če brskamo po svetovnem spletu, se na tujih straneh ime Jurija Vege pogosto pojavlja v povezavi z računanjem decimalk števila π. Število π, določeno kot razmerje med obsegom in premerom kroga, je namreč eno od tistih števil, ki že več tisočletij burijo človeško domišljijo. Ljudje so že zgodaj ugotovili, da je razmerje med obsegom in premerom kroga konstantno, torej neodvisno od premera kroga. Zdi pa se, da je ugotovitev, da je to razmerje enako tudi razmerju med ploščino in kvadratom polmera kroga, precej mlajša, saj se v nekaterih virih iz starih kultur za ti dve razmerji uporabljata različna približka. Sicer pa je oznako π za to število s svojo matematično avtoriteto leta 1737 dokončno vpeljal Euler, pri čemer se je zgledoval po nekaterih starejših objavah.

V nadaljevanju bomo povzeli nekaj najpomembnejših mejnikov v spoznavanju števila π in na kratko opisali vlogo, ki jo je pri tem imel Jurij Vega. Nekoliko obširnejšo različico zgodovine števila π lahko bralec najde na naslovih [1] in [2], izčrpen opis pa je podan v knjigi [3].

Najstarejši pisani viri o številu π so iz starega Egipta in iz Babilona. Tako iz naloge v Rhindovem papirusu, ki ga običajno datirajo v 17. stoletje pred našim štetjem, sledi, da so Egipčani v tistem času za π uporabljali približek

$$4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \doteq 3.16049\,.$$

V približno istem obdobju so v Babilonu, kjer so računali v šestdesetiškem sistemu, za π uporabljali približek

$$3\,\frac{1}{8} = \frac{25}{8} = 3.125\,.$$

Zgornja približka sta bila najverjetneje dobljena s kombinacijo merjenja in preprostega geometrijskega sklepanja.

Naslednji mejnik v poznavanju števila π je postavil najznamenitejši znanstvenik Antike, Arhimed iz Sirakuz na Siciliji. Sredi 3. stoletja pred našim štetjem si je zamislil geometrijski postopek, s katerim lahko vsaj načeloma izračunamo število π poljubno natančno. Arhimedov postopek temelji na aproksimaciji kroga z včrtanimi in očrtanimi pravilnimi mnogokotniki. Tako je s primerjavo obsegov kroga ter krogu včrtanega in očrtanega pravilnega 96-kotnika ocenil, da velja

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{10}{70} = \frac{22}{7}\,.$$

Natančneje se številu π verjetno ni približal, saj Grki še niso poznali mestnega zapisa števil, tako da je bilo obsežnejše računanje zelo zapleteno. Nekaj podrobnosti in pripadajoče matematične formule za računanje približkov za π s pomočjo pravilnih mnogokotnikov lahko bralec najde npr. na spletnem naslovu [1] ali pa v članku [4].

Arhimedova metoda in njene različice (npr. primerjava ploščin namesto obsegov) so ostale glavno orodje za računanje približkov za π več kot 1500 let. Se je pa v tem času izpopolnila tehnika računanja in povečala vztrajnost računarjev. Tako je Kitajec Chang Hong v prvem stoletju našel približek

$$\sqrt{10} \doteq 3.1623\,,$$

v petem stoletju pa je Zu Chongzhi (pisano tudi kot Tsu Ch'ung Chi) že poznal vrednost

$$\frac{355}{113}\,,$$

ki se s številom π ujema na 7 desetiških mest,

$$\pi - \frac{355}{113} \doteq -2.67 \cdot 10^{-7}\,.$$

Med neevropskimi računarji naj omenim še Al-Kashija iz Samarkanda, mesta v današnjem Uzbekistanu. V prvi polovici 15. stoletja je v šestdesetiškem sistemu izračunal

$$2\pi \doteq 6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9}\,,$$

kar da vrednost, ki je od π večja za manj kot $4 \cdot 10^{-18}$.

Med evropskimi računarji z Arhimedovo metodo je najbolj znan Ludolph van Ceulen (1540–1610). Po rodu Nemec, se je iz verskih razlogov zatekel na Nizozemsko in tam večji del življenja posvetil poučevanju matematike, sabljanju ter računanju števila π. Opravil je več računov, nazadnje je s pomočjo 2^{62}-kotnika izračunal 35 decimalk (torej mest za decimalno piko). Bil je eden zadnjih, ki je še računal podobno kot Arhimed, zaradi njegove zavzetosti pa so v mnogih nemško govorečih deželah število π poimenovali tudi Ludolfovo število.

Sredino in konec 17. stoletja v zgodovini matematike zaznamuje začetek razvoja infinitezimalnega računa. Predhodnik mnogih, s pomočjo integriranja in odvajanja dobljenih izražanj za število π, je Viètov neskončni produkt iz leta 1593:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\ldots$$

Zgornji zapis je sicer zanimiv, ni pa primeren za izračun približkov za π. Podoben je tudi Wallisov neskončni produkt iz leta 1656, odkrit ob poskusu izračuna ploščine kroga s pomočjo "integrala" funkcije $\sqrt{1-x^2}$:

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots$$

Za našo zgodbo precej pomembnejša pa je potenčna ("Taylorjeva") vrsta za zapis vrednosti funkcije arkus tangens, ki sta jo v letih 1671–1674 neodvisno drug od drugega odkrila Gregory in Leibniz. Prvi jo je objavil slednji leta 1682:

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\cdots \quad \text{za} \quad -1\le x\le 1\,.$$

Novejše raziskave kažejo, da je podobno vrsto že okoli leta 1400 odkril doslej malo znani indijski matematik Madhava, vendar njegovo odkritje ni opazneje vplivalo na kasnejši razvoj. Do podobnih ugotovitev je nekaj let pred Gregoryjem in Leibnizem prišel tudi Newton, vendar jih je objavil šele precej kasneje.

Če v gornjo vrsto vstavimo $x=1$, dobimo Leibnizov obrazec

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots\,.$$

Ta ni primeren za numerično računanje, saj gredo členi vrste bistveno prepočasi proti 0. Nekoliko primernejšo vrsto dobimo, če vzamemo $x = \sqrt{3}/3$. Z njo je Sharp leta 1699 izračunal 71 decimalk števila π. Še primernejšo formulo je leta 1706 našel Machin:

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1 = 4\cdot\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}\,.$$

Uporabil jo je za izračun 100 decimalk števila π. Dobrih deset let kasneje, leta 1719, je Francoz de Lagny uporabil kar isto formulo kot Sharp in z veliko vztrajnosti izračunal 127 decimalk. Kasneje se je izkazalo, da je 113. decimalka napačna, preostale decimalke do 127. pa so bile pravilne.

Osrednja matematična osebnost 18. stoletja je Leonhard Euler. Z računanjem decimalk števila π se ni ukvarjal, je pa odkril kopico zvez, v katerih nastopa π. Tako je izračunal vsoto recipročnih vrednosti kvadratov naravnih števil,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

in našel vrsto adicijskih izrekov za funkcijo arkus tangens, s katerimi je lahko posplošil Machinovo formulo.

Leta 1783 je izšel Vegov prvi logaritmovnik. Ta je napisan v nemščini, naslovi poglavij pa so tudi v latinščini. V njem na straneh 380 in 381 obravnava število π. Prikaz se začne s potenčno vrsto za funkcijo arkus sinus (ta je zapisana kot razvoj števila z po potencah $\sin z$). Vanjo je vstavljena vrednost $\sin z = \frac{1}{2}$ oz. $z = \frac{\pi}{6}$, nato pa je na 11 decimalk natančno izračunanih prvih 15 členov te vrste. Od tod Vega dobi prvih 10 decimalk števila π (dodatno mesto je porabljeno za pravilno zaokroževanje). V nadaljevanju je opisana vrsta za funkcijo arkus tangens, prikazan pa je tudi že omenjeni izračun $\frac{\pi}{6}$ z vstavitvijo vrednosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sledi izpeljava zveze

$$\pi = 8\cdot\arctan\frac{1}{3}+4\cdot\arctan\frac{1}{7}\,. \tag{1}$$

Nazadnje je navedenih 127 decimalk števila π. Gre za prepis vrednosti, ki jo je izračunal de Lagny, saj je 113. decimalka napačna.

Leta 1789 je Vega akademiji v Sankt Petersburgu predložil v objavo razpravo z naslovom *Détermination de la demi-circonférence d'un cercle, dont diamètre est = 1, exprimée en 140 figures décimales.* V njej je natančno opisal metodo in prikazal račune, s katerimi je prišel do 140 decimalk števila π. Vendar se urednikom obsežni računi niso zdeli dovolj zanimivi, tako da so v objavo sprejeli le štiri strani dolg izvleček z opisom metode in prikazom končnega rezultata. Ta je izšel leta 1795 (tako dolg zamik med predložitvijo in objavo sicer ni nič zelo nenavadnega).

Že prej, leta 1794, pa je Vega izdal svoj veliki logaritmovnik. V njem je o številu π pisal na strani 633 (glej sliko). Logaritmovnik je večinoma dvojezičen, npr. uvodna navodila so napisana v nemščini in v latinščini, stran 633 pa je napisana le v latinščini. Opisana sta dva načina, s katerima lahko določimo decimalke števila π.

Najprej je π zapisan kot kombinacija treh vrst. Gre za zvezo

$$\pi = 20 \cdot \arctan \frac{1}{7} + 8 \cdot \arctan \frac{3}{79},$$

kjer je prvi sumand zapisan z vrsto, v kateri sta sešteta po dva zaporedna člena vrste za arkus tangens, drugi sumand pa je razbit na dve vrsti, pri čemer prva vsebuje pozitivne, druga pa negativne člene iz razvoja arkus tangensa. Posamezni členi v vrstah niso zapisani z uporabo potenc (čeprav je sodobni zapis s potencami Vega že uporabil v logaritmovniku iz leta 1783), ampak so njihovi deli označeni s črkami, te pa se potem pojavijo v naslednjih členih. Vega je izračunal 143 decimalk prve ter 144 decimalk druge in tretje vrste. Od tod je dobil 140 decimalk števila π. Pri tem je popravil napako de Lagnyja, ki je za 113. decimalko dobil števko 7, pravilna vrednost pa je 8. Žal tudi Vegov račun ni brez napak, saj so zadnje štiri decimalke napačne (tako je npr. 137. pri Vegi 6, pravilna vrednost pa je 3). Vzrok za napako je verjetno napačna ocena vrednosti izpuščenih členov oz. izračun uporabljenih členov na premajhno število mest.

Vega je naredil tudi kontrolni račun. Zanj je uporabil že omenjeno zvezo (1). V njej je drugi sumand že poznal iz prvega računa, prvega pa je določil na 128 decimalk. Končni rezultat se je ujemal s prvim do 126. decimalke.

Kasneje so Vegov rezultat seveda še izboljšali. Tako je Rutherford leta 1824 izračunal 208 decimalk, a je bilo pravilnih le prvih 152. Najdlje je v 19. stoletju prišel Shanks, ki je v letih 1873–74 izračunal in objavil 707 decimalk. Šele leta 1945 je Fergusson ugotovil, da je pravilnih le 527. Prva sta prek 1000 decimalk leta 1949 prišla Smith in Wrench. S pomočjo namiznega računala sta naračunala 1120 decimalk. Še istega leta so ljudi pri računanju povsem nadomestili računalniki (med njimi tudi znameniti ENIAC).

Postopki, s katerimi so računali decimalke števila π, pa so vse do sredine sedemdesetih let prejšnjega stoletja ostali enaki. Šlo je za različne izpeljanke vrst za funkcijo arkus tangens ali za katero od sorodnih funkcij. Leta 1976 pa sta Salamin in Brent neodvisno drug od drugega objavila učinkovitejši iterativni postopek, ki z uporabo aritmetične in geometrijske sredine generira zaporedje, katerega členi se zelo hitro bližajo številu π. Kasneje so njune ideje še nadgradili in izboljšali. Pregled novejših metod je podan npr. v [5].

APPENDIX

continens

Longitudines arcuum circuli pro radio = 1,

et

Formulas nonnullas trigonometricas refolutioni triangulorum infervientes.

Pofita ratione diametri ad peripheriam = 1 : π, eft

$$\pi = 40 \times \left[\frac{73}{1.3}\overset{a}{\left(\frac{1}{343}\right)} + \frac{169}{5.7}\overset{b}{\left(\frac{a}{2401}\right)} + \frac{265}{9.11}\overset{c}{\left(\frac{b}{2401}\right)} + \frac{361}{13.15}\overset{d}{\left(\frac{c}{2401}\right)} + - - - - - -\right]$$

$$+ 8 \times \left[\overset{A}{\left(\frac{3}{79}\right)} + \frac{1}{5}\overset{C}{\left(\frac{9B}{6241}\right)} + \frac{1}{9}\overset{E}{\left(\frac{9D}{6241}\right)} + \frac{1}{13}\overset{G}{\left(\frac{9F}{6241}\right)} + \frac{1}{17}\overset{I}{\left(\frac{9H}{6241}\right)} + - - - - - -\right]$$

$$- 8 \times \left[\frac{1}{3}\overset{B}{\left(\frac{9A}{6241}\right)} + \frac{1}{7}\overset{D}{\left(\frac{9C}{6241}\right)} + \frac{1}{11}\overset{F}{\left(\frac{9E}{6241}\right)} + \frac{1}{15}\overset{H}{\left(\frac{9G}{6241}\right)} + \frac{1}{19}\overset{K}{\left(\frac{9I}{6241}\right)} + - - - - -\right]$$

Subducto calculo obtinetur valor

1mae feriei = 0, 07094 85273 02081 96140 64258 08551 27654 15038 90879 36423 20361 89065
01468 17208 13379 96558 04720 95930 81712 32590 58761 34143 70305 49182
61908 76054 31188 37724 563

2dae feriei = 0, 03797 46993 38637 68249 79766 44999 62194 72684 78657 48534 34135 78427
16640 42595 65035 91548 66445 86207 18103 12260 26717 99560 30171 88649
90643 55589 68054 16596 3360

3tiae feriei = 0, 00001 82541 50323 33472 22752 64846 06679 42632 86879 38461 53669 01884
16577 43865 81149 96726 41765 61508 09888 28878 22756 19197 40096 46232
11514 30099 30173 26952 0996

Diff. 3 et 2 fer. = 0, 03795 64451 88314 34777 57013 80153 55515 30051 91778 10072 80466 76543
00062 98729 83885 94822 24680 24699 08214 83382 03961 80362 90075 42417
79129 25490 37880 89644 2364

hujus 8plum = 0, 30365 15615 06514 78220 56110 41228 44122 40415 34224 80582 43734 12344
00503 89838 71087 58577 97441 97592 65718 67056 31694 42903 20603 39342
33034 03923 03047 17153 8912

40plum 1 fer. = 2, 83794 10920 83278 45625 70323 42051 06166 01556 35174 56928 14475 62600
58726 88325 35198 62321 88838 37232 68493 03623 50453 65748 12219 67304
76350 42172 47535 08982 5200

π = 3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944
59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32(8)23 06647
09384 46095 50582 26136

ubi nota decimalis 113tia eft 8, et non 7, ut alias ubique typis impreffum reperitur; id quod calculo fequenti confirmatum fuit.

$$\pi = 8 \times \left\{\begin{array}{l} \frac{73}{1.3}\overset{a}{\left(\frac{1}{343}\right)} + \frac{169}{5.7}\overset{b}{\left(\frac{a}{2401}\right)} + \frac{265}{9.11}\overset{c}{\left(\frac{b}{2401}\right)} + \frac{361}{13.15}\overset{d}{\left(\frac{c}{2401}\right)} + - - - - - - \\ + \frac{26}{1.3}\overset{A}{\left(\frac{1}{27}\right)} + \frac{58}{5.7}\overset{B}{\left(\frac{A}{81}\right)} + \frac{90}{9.11}\overset{C}{\left(\frac{B}{81}\right)} + \frac{122}{13.15}\overset{D}{\left(\frac{C}{81}\right)} + - - - - - - \end{array}\right\}$$

Subducto enim calculo inventus eft in hac ultima formula valor

2dae fer. = 0, 32175 05543 96642 19340 14046 14358 66131 90207 55295 55765 61914 32803 05935
67562 37405 81054 43564 08422 35064 13744 39007 16937 71297 39148 26764 295

Series haec addita feriei primae formulae praecedentis, et harum fumma ducta in 8 dedit valorem π usque ad notam decimalem 126tam exacte congruentem valori fuperius expofito.

Med novejšimi odkritji je eno bolj presenetljivih leta 1996 objavljena zveza

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right),$$

ki nam omogoča izračun posamezne šestnajstiške (ali pa dvojiške) števke števila π, ne da bi poznali prejšnje števke. Podobni, a bolj zapleteni postopki so znani tudi za izračun posameznih števk pri drugih osnovah.

Kolikor vem, je zadnji "rekord" pri računanju decimalk števila π iz decembra leta 2002 (glej [6]). Takrat je Kanada s sodelavci z uporabo superračunalnika naračunal prek 1,24 bilijona decimalk. Seveda pa taki izračuni nimajo nobenega večjega pomena. Služijo lahko le za preverjanje nekaterih domnev o porazdelitvi posameznih števk v zapisu števila π, morda za preverjanje obnašanja računalnikov, ali pa so še najverjetneje "reklamna" poteza. Sicer pa je že dolgo znano, da število π ni racionalno, torej da se decimalke ne bodo začele ponavljati. To je leta 1761 "dokazal" Lambert, njegov ne povsem popolni dokaz pa je leta 1794 dopolnil Legendre. Lindemann je leta 1882 celo dokazal, da je π transcendentno število, torej da ni ničla nobenega polinoma s celoštevilskimi koeficienti.

Za konec še opozorilo. Prispevek ni nastal na osnovi vpogleda v originalne vire (od originalov sem imel v rokah le oba Vegova logaritmovnika), pač pa sem uporabil različne sekundarne vire. Žal pa se ti pri opisih nekaterih dogodkov med seboj nekoliko razlikujejo. Tako včasih ni jasno, ali avtorji mislijo na desetiška mesta ali na decimalke, pa tudi letnice se vedno ne ujemajo.

Izbrani viri:

[1] A history of Pi, `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html`

[2] The Pi pages, `http://www.cecm.sfu.ca/pi/pi.html`

[3] P. Beckmann, *A History of Pi*, The Golem Press, 1971 (ponatis Barnes & Noble Books, 1993)

[4] T. Pisanski, *Računanje razmerja med obsegom in premerom kroga*, Obzornik za matematiko in fiziko **31** (1984), str. 44–48

[5] D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein, S. Plouffe, *The Quest for Pi*, Math. Intelligencer **19** (1997), str. 50–57

[6] Kanada Laboratory Homepage, `http://pi2.cc.u-tokyo.ac.jp/`

Martin Juvan

RAZSTAVA O JURIJU VEGI V TEHNIŠKEM MUZEJU SLOVENIJE

Uvod

Razstavo o Juriju Vegi s prikazom trinajstih modelov, narejenih po originalnih načrtih, je Tehniški muzej Slovenije pripravil leta 2002 ob 200-letnici Vegove smrti. Čeprav je Vega slovenski javnosti najbolj znan po svojih logaritmih, smo se odločili prikazati predvsem manj znano plat njegovega dela. Kot artilerijski častnik in pedagog se je Vega ukvarjal z balistiko in s preučevanjem mehanskih naprav za manevriranje s težkim orožjem. Precej takšnih naprav je narisal v svojem učbeniku in te slike smo uporabili kot predloge za trinajst modelov, prikazanih na razstavi. Avtor razstave je bil dr. Sandi Sitar, modele pa je izdelal g. Janko Samsa.

Nekaj fizikalnih osnov

Prikazani modeli so v svoji osnovi zelo enostavni, da pa bi lažje razumeli njihovo delovanje in učinkovitost, se moramo na kratko seznaniti z nekaterimi fizikalnimi pojmi in količinami. Besedilo v nadaljevanju ni fizikalni učbenik, pač pa le povzetek tistega, kar smo se vsi nekoč že učili v šoli, povedano na malce drugačen način.

Sila

V vsakdanjem življenju izraz sila pogosto uporabljamo. V fiziki je sila povezana z znamenitim drugim Newtonovim zakonom gibanja. Sila povzroča spremembe v gibanju, pri čemer sta mišljeni hitrost ali smer gibanja ali oboje. Poleg tega lahko sila povzroči tudi deformacije telesa. V naravi so sile zelo različnih vrst. Nekatere med njimi znamo zelo dobro opisati. Oglejmo si nekatere od njih.

Sila težnosti je posledica privlačnosti med masami in je odgovorna za večino dogajanja v vesoljskih razsežnostih. Na zemeljskem površju je posledica privlačnosti ogromne Zemljine mase. Po domače jo imenujemo sila teže ali enostavno teža (seveda se meri v newtonih in ne kilogramih, kot pogosto napačno mislimo). Silo težnosti med drobnima telesoma je enostavno izračunati, saj je sorazmerna obema masama in obratno sorazmerna kvadratu razdalje med njima.

Sila trenja se pojavi, kadar se dve površini gibljeta ena proti drugi. Je posledica mikroskopske razčlenjenosti površin in sil med gradniki snovi. Sila trenja nasprotuje gibanju ter je odvisna od snovi in sile, s katero ploskvi pritiskata ena ob drugo. Da bi si olajšali trud pri premikanju večjih bremen, so naši predniki že pred davnimi časi izumili kolo.

Zamislimo si človeka, ki stoji na tleh. Nanj deluje sila teže, ker pa človek miruje, mora biti vsota vseh sil, ki delujejo nanj, enaka nič. Torej se nekje skriva še neka sila. Najdemo jo v sili, s katero podlaga, na kateri stoji, nasprotuje sili teže in preprečuje, da ne bi naš prijatelj zgrmel nižje proti tlom. To je tudi vsebina zakona o akciji in reakciji (tudi tega se je domislil Newton), ki pravi, da če neko telo deluje na drugo telo z določeno silo, potem tudi drugo telo na prvo deluje z enako veliko in nasprotno usmerjeno silo.

Podobna zgodba, kot smo jo spoznali pri premem gibanju, se ponovi pri vrtenju, le da hitrost zamenja kotna hitrost, na mestu sile pa nastopa navor. Pomemben pojem pri vrtenju je še os vrtenja, to je navidezna črta, okrog katere se telo vrti. Kotna hitrost pove, za kolikšen kot se telo zavrti v časovni enoti. Če nanj ne deluje noben navor, se vrti enakomerno (ali miruje). Navor povzroči spremembe v vrtenju in je tesno povezan s silo. Ročico imenujemo pravokotno razdaljo med smerjo sile in osjo. Navor je enak produktu med velikostjo sile in ročico.

Delo in energija

Tudi o delu in energiji v vsakdanjem življenju pogosto razglabljamo, prvega je vedno preveč, druge pa nam neprestano primanjkuje. V fizikalnem smislu pa imata obe količini precej drugačen pomen. Delo pomeni premagovanje sile na določeni poti, pri čemer je potrebno poudariti, da morata biti sila in premik v isti smeri. V tem primeru je delo enostavno enako produktu sile in poti. Če ni nobene sile ali se nič ne premika, ni opravljeno nič dela. Če je smer sile pravokotna na smer gibanja, prav tako ni nobenega dela. Slišati je zelo enostavno, a pogosto ni v skladu z vsakodnevnim pojmovanjem. Pomislimo, da moramo ves delovni čas stati pri miru z dvignjeno vrečo cementa nad glavo. Fizikalno gledano nismo opravili nobenega dela, saj smo mirovali, a kljub temu bi bila večina normalnih Zemljanov po takšnem delovniku pošteno utrujena.

Zelo sorodna količina je energija. Energija ima nakaj zelo koristnih lastnosti, zaradi katerih jo zelo pogosto uporabljamo. Vsako vrsto energije (poznamo jih precej različnih vrst) je mogoče izračunati. Druga pomembna značilnost energije je, da je ne moremo niti uničiti niti ustvariti iz nič. Lastnost, da se pri procesih ohranjajo, imajo le redke količine in so zato toliko bolj pomembne. Energije, ki jo neko telo ima, ni mogoče uničiti, lahko pa jo prenese na drugo telo z delom. Energija se lahko tudi pretvarja iz ene oblike v drugo in ljudje smo si izmislili kopico bolj ali manj domiselnih naprav za dosega tega cilja.

V nadaljnjem besedilu najpogosteje nastopa potencialna energija, ki jo ima telo zaradi svoje lege. Potencialna energija je posledica privlačne sile težnosti, ki vlada na površju Zemlje. Le-ta s svojo ogromno maso privlači vse, kar je v njeni bližini. Dokler smo dovolj blizu površine, je kar enaka produktu sile teže in višine, ali, natančneje, višinske razlike. Če stvar dvignemo, smo opravili delo. Stvar je pridobila potencialno energijo. Ko stvar zopet spustimo, je delo opravila, njena potencialna energija pa se je zmanjšala.

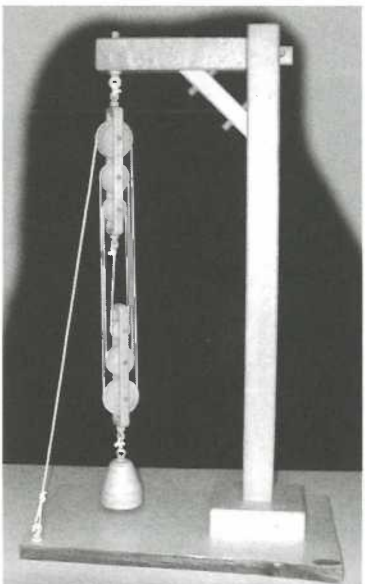
Posebno učinkovita pri opravljanju dela so telesa, ki se gibljejo. Energijo, ki jo ima telo zaradi svojega gibanja, imenujemo kinetična.

Dandanes ne bi mogli živeti brez električne energije, ki je v zadnjih sto letih dodobra spremenila svet. Kemična energija se sprošča ob mnogih kemijskih reakcijah in je vir zalog, iz katerih črpamo ljudje in živali energijo, potrebno za preživetje. Rastline so v tem pogledu drugačne, saj večino energije, potrebne za preživetje, pridobijo od Sonca. Kemična energija se sprošča tudi pri izgorevanju fosilnih goriv, ki poganjajo večino prevoznih sredstev, brez katerih mnogi izmed nas prav tako ne bi mogli več živeti. Žal se pri tej obliki pretvorbe pojavijo stranski učinki, ki pretijo, da se bomo prav kmalu vsi zadušili v preobilici toplotne energije. Hudo nevarna, če se znajde v napačnih rokah, je lahko tudi jedrska energija, dolgoročno pa lahko prav ta oblika zadosti vsem potrebam hitro se razvijajoče civilizacije. Da se bo to res zgodilo, pa se bo morala raven modrosti naših voditeljev prav kmalu dvigniti na bistveno višjo raven, kot je danes. Različnih oblik energije je še več, a za nadaljnje razmišljanje niso bistvenega pomena.

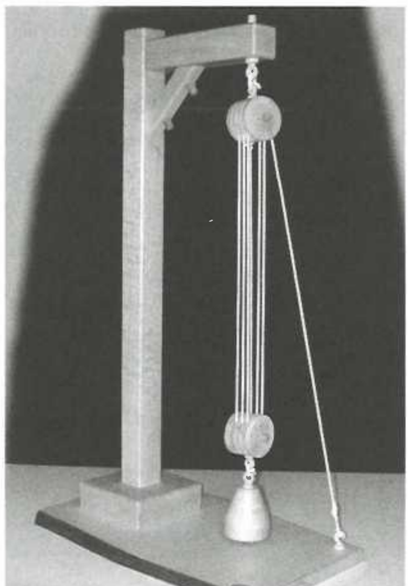
Večina razstavljenih naprav je videti precej enostavnih, saj izvirajo iz Vegovih časov pred več kot dvema stoletjema, ko so naprave uporabljali predvsem za pomoč pri dviganju in vleki. Takrat je bila namreč na voljo le mišična sila ljudi ali delovnih živali. Za premike velikih bremen so zato morali uporabljati zelo domiselne naprave, katerih namen je bil predvsem, da bi zmanjšali silo, potrebno za določeno opravilo. Upoštevajoč enostavno povezavo med silo in delom, je to mogoče le ob povečevanju poti. Vsa prikazana orodja izkoriščajo ta princip.

Škripec

Škripec je eno najosnovnejših orodij, ki se uporablja predvsem za dviganje bremen. V pritrjeni izvedbi škripec ne zmanjša sile potrebne za dvig, temveč le spremeni njeno smer. Vrv vlečemo navzdol, medtem ko se breme na nasprotni strani škripca dviga. Tak način je za ljudi manj škodljiv, ker ne obremenjuje hrbtenice, in je učinkovitjši, saj lahko za dviganje izkoristimo silo lastne teže. Pritrjen škripec omogoča enostavno dviganje do višin, ki znatno presegajo velikost človeka. Z njim lahko dvigamo le bremena, katerih masa ne presega mase delavca. Gibljivi škripec visi na dveh vrveh in teža bremena se nanju enakomerno porazdeli. Za dvig bremena je potrebna pol manjša sila, kot je teža bremena, zato pa moramo za dvig na določeno višino izvleči dvakrat več vrvi. Nerodno pa je tudi to, da je sila, potrebna za dvig, usmerjena navzgor. S kombinacijo obeh škripcev dobimo dvojni škripec, ki združuje prednosti obeh: sila je usmerjena navzdol in je pol manjša od teže telesa, za dvig pa moramo še vedno izvleči dvakrat več vrvi. Z združitvijo dveh dvojnih škripcev lahko dodatno prepolovimo silo, potrebno za dvig bremena. Tretji par škripcev prispeva naslednjo razpolovitev, tako da lahko 100 kilogramski možak dviguje bremena do 800 kg. Z dodajanjem naslednjih parov škripcev v sistem razmerje sil lahko postane še ugodnejše. Vendar sistem postaja vedno bolj zapleten, pa tudi dodatne izgube hitro rastejo zaradi trenja v ležajih in precejšnje mase škripčevja. V zbirki so trije sistemi trojnega škripčevja. Pri zaporedni legi (slika 1) ima vsak škripec svojo os, po trije pa so povezani v dve celoti, ena je pritrjena, druga pa gibljiva. Drugo škripčevje (slika 2 na III. strani ovitka) se od prvega razlikuje v tem da, je pritrjen škripec le en sam, zaradi česar se zmanjšajo izgube v ležaju, je pa zato ta škripec znatno bolj obremenjen. Gibljivi škripci v tem sistemu med sabo niso povezani, saj se ob premikanju razdalja med njimi spreminja. Tretji sistem (slika 3) je povsem podoben prvemu, le da po trije škripci ležijo vzporedno na isti osi. V vseh primerih je razmerje med silo teže in silo, potrebno za dvig 8 proti 1.



Slika 1.

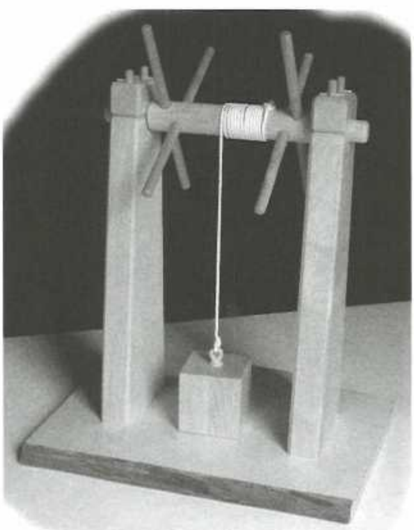


Slika 3.

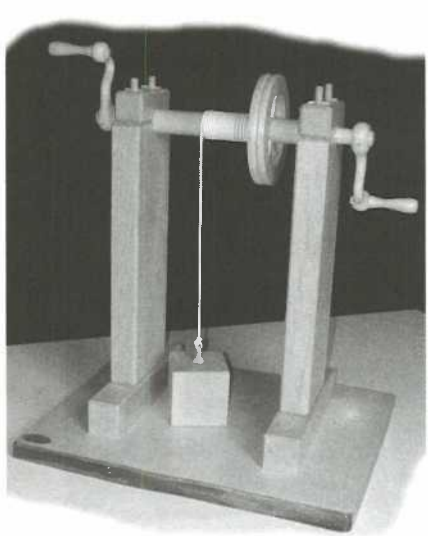
Vitel

Vitli in vretena so enostavna orodja za pretvorbo sil, s katerimi lahko dosežemo še višja razmerja kot pri škripcih. Lahko jih uporabljamo za dvigovanje bremen ali pa za vleko. V prvem primeru premagujemo silo teže telesa, v drugem pa se spopadamo s trenjem. Vitli se med seboj razlikujejo tudi po smeri osi, ki je lahko vodoravna ali navpična. Predvsem v slednje so pogosto vpregli živali ali ljudi. Kako je s silami pri vitlu, najlaže pojasnimo z navori, ki morajo biti pri enakomernem gibanju bremena (dviganje ali vleka) v ravnovesju. Vreteno, na katerega se navija vrv, ima znatno manjši premer kot pogonsko kolo, ročaj ali prečke. Iz definicije navora sledi, da je pogonska sila manjša od sile v vrvi za toliko, kot je premer vretena manjši od premera pogona (kolo, ročaj ali prečka). Z dovolj dolgim ročajem lahko torej pogonsko silo poljubno zmanjšamo, kar velja seveda le v teoriji, v praksi smo namreč omejeni s trdnostjo snovi, iz katere je naprava narejena. Slabost vitla je, da je za dviganje bremen najprej potrebno na želeno višino dvigniti ponavadi zelo težko konstrukcijo, zato so vitel pogosteje uporabljali za dviganje iz globin ali za vleko.

Vitel na zanko (slika 4 na III. strani ovitka) je služil dvigovanju s tal. Da delavcu ni bilo potrebno plezati na višino vretena, je na vitlu kolo z utorom, skozi katerega je napeljana zanka iz vrvi. Zanka sega do tal in delavec lahko za dviganje izkoristi vso svojo težo, kot pri škripcu.



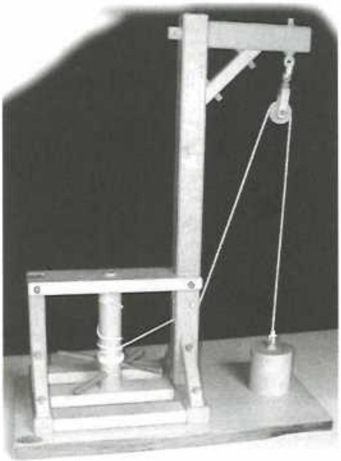
Slika 5.



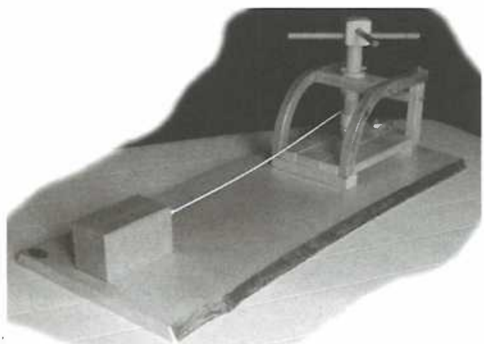
Slika 6.

V primeru, da je vitel opremljen z več prečkami, kot prikazuje model na sliki 5, lahko uporabimo večje število delavcev, kar skupno zmogljivost še poveča. Podobno velja za model 6 z dvema ročicama. V obeh primerih pa mora biti delovna sila na višini, kamor breme dvigamo, torej gre za navpični dvig iz globine.

Pogosto je potrebno breme dvigniti navzgor in je celoten mehanizem skupaj z delavci težko postaviti na višino. V tem primeru vitle združimo s škripci, kar prikazuje model številka 7. Navpična os vrtenja omogoča med drugim tudi koriščenje delovnih živali. Na podobnem principu deluje model na sliki 8, le da gre tu za vodoravno vleko. Tu namesto teže teles premagujemo silo trenja med bremenom in podlago, ki pa jo lahko še znatno zmanjšamo z uporabo koles ali valjev.



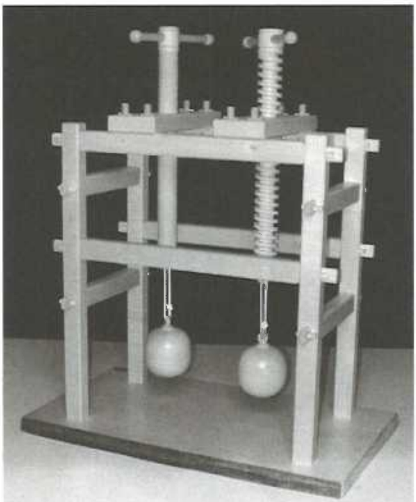
Slika 7.



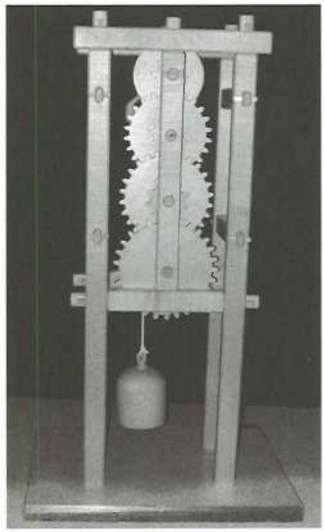
Slika 8.

Vijak

Delovanje vijaka temelji na principu strmine. Dvig bremena na določeno višino si lahko olajšamo s strmino. Manjši kot je naklon strmine, manjšo silo potrebujemo, a moramo opraviti ustrezno daljšo pot, tako da je skupno opravljeno delo v vseh primerih enako. Vijak je v osnovi klanec, vrezan v plašč valja. Z vrtenjem se vijak premika vzdolž svoje osi. Premik je tem manjši in sila, ki jo vijak ustvari, tem večja, čim manjša sta debelina in naklon navoja vijaka. Pretvorbo sile še povečamo, če na vrh vijaka dodamo ročice. Ob metrski ročici je pot enega obrata 6.14 metra. Če je razmik med navojema 1 mm, se ob enem obratu vijak ravno za toliko premakne. Razmerje med silo, s katero vrtimo ročico, in silo, s katero pritiska vijak na podlago, je torej 6140. Tako lahko dosežemo zelo velika razmerja sil, ki jih v praksi pogosto uporabljamo pri stiskalnicah, kjer so potrebne ogromne sile ob majhnih premikih. Za dviganje vijakov ne uporabljamo prav pogosto, razen v kombinaciji z zobniki, kot prikazuje model 11 na III. strani ovitka. Model 9 prikazuje dva vijaka, ki se med seboj razlikujeta le po obliki navojev, razmerje sil pri dvigu pa je še dodatno okrepljeno z uporabo prečke.



Slika 9.

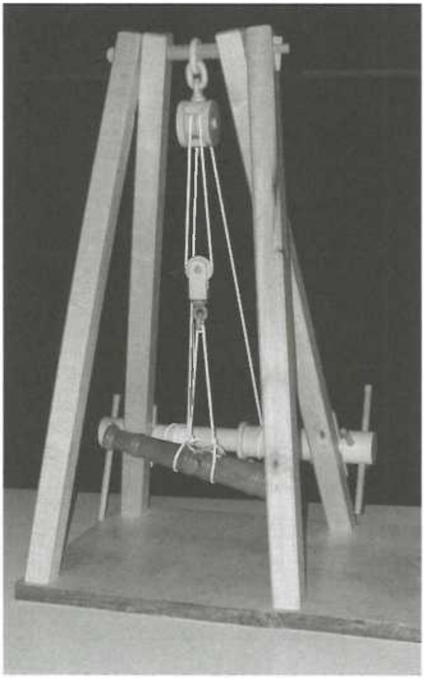


Slika 10.

Zobniki

Zobnike pogosto srečujemo tudi danes, ko v avtomobilih in na kolesih skrbijo za prenos pogonske sile ter prilagajanje voznim razmeram. Tudi v tem primeru je razmerje sil enostavno izračunati, odvisno je od razmerja števila zob na obeh zobnikih. Ker morajo biti zobje na obeh zobnikih enakih velikosti, je to razmerje enako tudi razmerju polmerov zobnikov. Zobnike lahko enostavno sestavljamo (slika 10), pri čemer se razmerja posameznih prenosov množijo, kombiniramo pa jih lahko tudi z vijaki (model 11 na III. strani ovitka). Na ta način je moč doseči zelo velika razmerja sil.

Posebnost med razstavljenimi modeli je klecni zobnik (model 12 na III. strani ovitka), ki nihajoče gibanje vzvoda najprej pretvori v vrtenje zobnika in nato preko vitla v dviganje bremena. Enak princip srečamo v urnem mehanizmu, le da v tem primeru zobnik potencialno energijo dvignjene uteži postopoma prenaša na nihalo, ki meri čas.



Slika 13.

Zadnji model (številka 13), prikazuje zakaj so tovrstne naprave v Vegovih časih resnično uporabljali. Topovi, možnarji in različne druge artilerijske naprave so bili zelo veliki in predvsem težki. V vojnah jih je bilo potrebno prevažati in pred bitko tudi primerno utrditi. Za dvigovanje in premikanje so uporabljali podobne priprave, kot jih je v svojem učbeniku prikazal Jurij Vega.

Orest Jarh

KRIŽANKA

OSENČENI POJMI SE NANAŠAJO NA MOŽA NA SLIKI

KRIŽANKO SESTAVIL: MARKO BOKALIČ

ROMANA JANEZA JALNA

ZNAK ZA SREBRO

FLOTA

IME DRAMATURGINJE RATEJ IZ MGL

NAŠ SLIKAR MORSKIH MOTIVOV (ALBERT)

ENAKI ČRKI

VEDA O GIBANJU IZSTRELKOV, S KATERO SE JE UKVARJAL

KRAJ, V KATEREM JE OBISKOVAL GIMNAZIJO

GLAVNO NJEGOVO DELO (TABELE)

JOHANNES BRAHMS

SPOMLADI POSEJANO ŽITO

NADARJENOST, TALENT

IVAN LEVAR

NAUK C SVETLOE V FIZIKI

SL. EFIK (ANTON

SAMOKOLNICA (LJUDSKO)

KLAVDIJA PO FRANC.

TOPOVSKI IZSTRELEK, NAPOLNJEN S KROGLICAMI IN EKSPLOZIVOM

VABITELJ

NAJBOLJ TIPIČNA AVSTRAL. ŽIVAL

NEKD. NOT. MINISTER (ANDREJ)

ANDREJ PEČENKO

LETA 2002 UMRLI SL. SKLADATELJ (DANE)

VAJA IZ MEDITACIJE V JOGI

GOZDNE POTI ZA VLAČENJE LESA DO CESTE

PODROČJE, OBMOČJE

SLOV. NABOŽNI PISATELJ, JANZENIST (JURIJ)

TROPSKI SADEŽ

EVROPSKA UNIJA

KUNI POD. ŽIVAL, NERC

LAT. POET (JANIS)

WOLFGANG ??? MOZART

PAVEL GOLIA

PRVI MOŽ OZN (KOFI)

SKUPEK ORG. POVEZ. OSEBKOV

DAVŠČINA V STARI AVSTRIJI

ŽIVČNA CELICA

NARODNA IN UNIVERZITETNA KNJIŽNICA

PISEC, KI SE POD SVOJE PISANJE NE PODPIŠE

Z NJIM POK DRESER KONJ

GOTOVČEV OPERNI JUNAK Z ONEGA SVETA

IMETJE, KI GA NEVESTA PRINESE V ZAKON

OKROGLO PRIZORIŠČE V CIRKUSU

AUGUST ŠENOA

IT. PISATELJICA MORANT

ROMARSKO MESTECE V FRANCIJI

PRIPRAVA ZA PEKO ČEVAPČIČEV

SL. PISATELJICA (ZOFKA)

ORGAN ZA VONJANJE

RAČJA ZEL (IZ LATIN.)

MALI AVTO ZNAMKE FORD

TEMELJNI POJEM KITAJSKE RELIGIJE

LASTNOST DOBRE JEDI

LATINSKI IZRAZ ZA UMETNOST

AMERIŠKA UPRAVA ZA RAZISKOVANJE VESOLJA

CVETLICA Z NEVENLJIVIMI CVETI, SUHA ROŽA

KONIČASTO ATLETSKO ORODJE

TVOREC UMSKEGA DELA

MAJHNO OKROGLO MESTO DRUGAČNE BARVE NA POVRŠINI

SOVICA IZ PRAVLJICE SVETLANE MAKAROVIČ

REKA PAD PO ITAL.

NAJDALJŠA REKA NA SVETU

ROBERT ZEMECKIS

ENAKOMEREN KONJSKI TEK

SAMO, ZGOLJ

ORIENTAL. RIŽEVO ŽGANJE

NAŠ LITERARNI KRITIK (BOJAN)

AVSTRAL. MEDVEDEK VREČAR

MANJŠE NASELJE

ŽIDOVSKI JEZIK NA NEMŠKI OSNOVI

SLOV. PEVKA (DARJA)

MOZOLJ

IT. PESNIK (TORQUATO)

NEVTRAL ZA SEŠTEVANJE

OČE V DRUŽINSKEM OKOLJU

OZNAKA TURČIJE

NAJVEČJI JADRANSKI OTOK

ZLOMEK, ŠMENT

ELEMENT DIHANJA

NJEGOV PLEMIŠKI NAZIV

NADEVANA TELEČJA SO KUHAR. SPECIALITETA

MESTO V JUŽNI SRBIJI

ČEBULA (NAREČNO)

ZNAK ZA KOSITER

SL. PISATELJICA (LELA)

POSTELJICA V MATERNICI

PREPROSTA HIŠA

POVRAČANJE

ROMAN DOSTOJEVSKEGA

ZEMLJEPISNI POJEM

NAROD V SEVERNI ŠPANIJI

BIVALNA USTANOVA

VOJAŠKO VOZILO

DROG NA VOZU

ČRKI S STREŠICO

KRIVULJA GIBANJA TELESA

NATAŠA URBANČIČ

IGRALKA FARROW

GLAVNO MESTO AVSTRIJE

RAČUNANJE Z LOGARITMI

Uvod

Letos praznujemo 250-letnico rojstva našega velikega rojaka barona Jurija Vege (1754 – 1802). O njem je bilo že veliko napisanega, zato se bomo tu omejili le na tisti del njegovega dela, po katerem je bil najbolj znan doma in v svetu. Njegovi logaritmovniki so namreč eno najbolj razširjenih matematičnih del, kajti doživeli so prek 300 izdaj v osmih svetovnih jezikih, in to od leta 1783 do druge polovice prejšnjega stoletja. Prvi logaritmovnik (sedemmestni) je izdal leta 1783, drugega leta 1793. Najbolj znano je Vegovo delo *Thesaurus Logarithmorum Completus* iz leta 1794, v katerem so desetmestni logaritmi števil od 1 do 101 000 in logaritmi trigonometričnih funkcij. Zadnji logaritmovnik je izšel leta 1797, pozneje pa le še ponatisi in predelane izdaje. Logaritmovniki ali logaritemske tabele so za tiste čase predstavljali edini računski pripomoček, ki pa je bil pozneje pozabljen, saj so ga nadomestili najprej inženirska logaritmična računala, nato mehanski in kmalu za njimi električni računski stroji, po drugi svetovni vojni pa elektronska računala in računalniki. Danes si brez zadnjih numeričnega računanja ne moremo več predstavljati.

V srednji šoli dijaki spoznajo pojem logaritma, z eksponentno in njej inverzno logaritemsko funkcijo, in seveda osnovne lastnosti, ki omogočajo tudi enostavno numerično računanje. Samo računanje z logaritmi pa je sedaj opuščeno, saj nima več praktičnega pomena. V tem sestavku bomo najprej ponovili definicijo logaritma in osnovna pravila za računanje z logaritmi ter na nekaterih zgledih ponazorili uporabo teh pravil. Pred pol stoletja smo v srednji šoli uporabljali petmestne logaritme. Ti so bili pozneje zamenjani s štirimestnimi (Stanko Uršič, *Logaritmi in druge tabele*, DMFA, Ljubljana 1983). V tem sestavku pa bomo pri vseh zgledih uporabljali le poenostavljeni tabeli trimestnih logaritmov in antilogaritmov, ki sta navedeni v Dodatku. Za razumevanje računanja z logaritmi bosta ti tabeli popolnoma zadoščali, prihranjeno pa nam bo neudobno iskanje po obširnejših tabelah.

Definicija logaritma in antilogaritma

Logaritem števila a pri osnovi b je tisti eksponent x, ki da pri osnovi b število a, torej

$$\log_b a = x, \quad \text{če je} \quad b^x = a\,.$$

Število a je tedaj *antilogaritem* števila x.

Ker se bomo omejili samo na realna števila, morata biti število a, ki ga imenujemo tudi *logaritmand*, in osnova b pozitivni števili. Tedaj je logaritem x z a enolično določen in seveda velja tudi obratno: antilogaritem a je z logaritmom x enolično določen. Logaritem x je potemtakem lahko poljubno realno število. Dodajmo še, da je

$$\log_b 1 = 0$$

pri poljubni osnovi b.

Pravila za logaritmiranje

Iz definicije logaritma neposredno sledijo pravila za logaritmiranje, ki jih navajamo skupaj. Dokazovanje njihove veljavnosti je koristna vaja. Naj bosta A in B poljubni pozitivni števili. Tedaj velja pri poljubni osnovi b:

$$\log_b(AB) = \log_b A + \log_b B\,, \tag{1}$$

$$\log_b(A/B) = \log_b A - \log_b B\,, \tag{2}$$

$$\log_b A^B = B\,\log_b A\,. \tag{3}$$

Tako lahko zamenjamo operacije množenja, deljenja in potenciranja s preprostejšimi operacijami seštevanja, odštevanja in množenja z eksponentom. Seveda pa moramo pri tem znati poiskati logaritme operandov in antilogaritme dobljenih poenostavljenih računov. Opomnimo, da današnja računala pri operacijah x^y in $\sqrt[y]{x}$ uporabljajo prav pravilo (3) in ustrezno eksponentno funkcijo.

Ker v praksi računamo v desetiškem sistemu, se pri uporabi logaritmov za računanje omejimo na t.i. *desetiške* ali *Briggsove* logaritme, to je logaritme pri osnovi $b = 10$, zato po dogovoru pisanje osnove 10 pri desetiških logaritmih opuščamo. Tako npr. neposredno iz definicije logaritma sledi

$$\log 10 = 1, \quad \log 100 = 2, \quad \log 0.1 = -1, \quad \log 0.01 = -2.$$

Na teh zgledih lahko tudi preverjamo pravila (1), (2) in (3). Za nadaljnjo ilustracijo teh pravil povzemimo iz prvega stolpca Tabele 1 tele podatke:

$$\log 2 = 0.301, \quad \log 4 = 0.602, \quad \log 8 = 0.903.$$

Hitro se lahko prepričamo, da res veljajo zgornja pravila pri računih

$$2 \times 4 = 8, \quad 8/4 = 2, \quad 2^3 = 8, \quad \sqrt[3]{8} = 2.$$

Opozorimo naj, da v višji matematiki raje uporabljamo t.i. *naravne* ali *Napierove* logaritme, ki so logaritmi pri osnovi e = 2.718281828459045…, zaradi ugodnih lastnosti eksponentne funkcije e^x pri odvajanju in integriranju. Naravni logaritem števila a ponavadi označujemo z $\ln a$.

Določevanje logaritmov in antilogaritmov iz tabel

Ker je logaritmand lahko poljubno pozitivno število, logaritem pa poljubno realno število, tabele, naj bodo še tako natančne, ne morejo zajeti vseh argumentov. Pri logaritmih ta problem enostavno rešimo. Če poznamo vse logaritme s polodprtega intervala [1,10), lahko določimo logaritem poljubnega pozitivnega števila a, če to število najprej zapišemo v t.i. *premični piki* (angl. *floating point*), ki je znana iz računalništva,

$$a = m \times 10^k, \quad m \in [1, 10), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Tedaj je po pravilih (1) in (3)

$$\log a = \log m + k\,.$$

Število $\log m$ imenujemo *mantisa* in k karakteristika števila $\log a$. Karakteristiko k določimo sami, mantiso pa najdemo v tabeli. V Tabeli 1 so logaritmi dvomestnih števil od 1.0 do 9.9 na tri decimalna mesta natančno. Napaka je torej kvečjemu 0.0005. Karakteristiko vodimo posebej kot sumand pri mantisi. Če želimo najti logaritem števila, ki ima več kot dve mesti, pa določimo logaritem s t.i. linearno interpolacijo, saj je tabela dovolj gosta, da to omogoča. To bomo ilustrirali na spodnjem zgledu.

Prve tri logaritme prečitamo iz Tabele 1, pri četrtem pa uporabimo interpolacijo:

$$\log 2 = 0.301, \ \log 20 = 0.301 + 1, \ \log 0.2 = 0.301 - 1, \ \log 213 = 0.328 + 2.$$

Zadnji logaritem dobimo s sklepanjem takole. Graf logaritemske funkcije lahko na zelo kratkem intervalu dobro aproksimiramo s premico. Ker je razlika med $\log 2.1 = 0.322$ in $\log 2.2 = 0.342$ enaka 20 tisočink, to pomeni, da je za vsako stotinko logaritmanda treba k logaritmu prišteti 2 tisočinki. V našem primeru je treba k logaritmu prišteti $3 \times 2 = 6$ tisočink.

Podobno velja za antilogaritme, ki so v Tabeli 2. V njej so navedeni antilogaritmi dvomestnih števil od 0.00 do 0.99 na tri mesta natančno. To pomeni, da je napaka kvečjemu 0.005. Ko poiščemo antilogaritem mantise, moramo še postaviti decimalno piko na pravo mesto. Piko, ki je v Tabeli 2 za prvim mestom, premaknemo za toliko mest v desno, kot pove karakteristika. Pri negativni karakteristiki seveda velja, da premaknemo piko za toliko mest v levo, kot pove absolutna vrednost karakteristike.

Npr. antilogaritmi števil

$$\log x = 0.45 + 2, \quad \log y = 0.83 - 1, \quad \log u = 0.59 + 0, \quad \log v = 0.215 + 1$$

so

$$x = 282, \quad y = 0.676, \quad u = 3.89, \quad v = 16.4\,.$$

Zdaj pa se lahko lotimo nekaterih zgledov za računanje z logaritmi. Vse rezultate moremo preveriti z računalom. Upoštevati pa moramo, da s trimestnimi logaritmi zaradi zaokrožitvenih napak rezultati ne morejo biti natančni na vsa tri mesta.

Numerični zgledi

Najprej si oglejmo za ogrevanje nekaj osnovnih operacij.

Naj bosta podani števili

$$a = 0.361, \quad b = 56.7.$$

Z logaritmi izračunajmo števila

$$x = ab, \quad y = a/b, \quad u = a^3, \quad v = \sqrt[3]{b}.$$

V tabeli najdemo

$$\log a = 0.557 - 1, \quad \log b = 0.754 + 1.$$

Logaritmi rezultatov in njihovi antilogaritmi, torej rezultati, pa so:

$$\begin{aligned}
\log x &= 0.311 + 1, & x &= 20.5,\\
\log y &= 0.803 - 3, & y &= 0.00636,\\
\log u &= 0.671 - 2, & u &= 0.0469,\\
\log v &= 0.585 + 0, & v &= 3.85.
\end{aligned}$$

Pri preverjanju rezultatov z računalom se pokaže, da se nekateri rezultati razlikujejo za 1 na zadnjem mestu. Ker so logaritmi v bistvu dvočleniki (mantisa + karakteristika), moramo pri računanju z njimi paziti, da je mantisa vedno med 0 in 1, karakteristika pa celo število. Pri logaritmu števila u npr. dobimo pri množenju s 3 logaritma števila a v resnici $1.671 - 3$, kar moramo zapisati kot $0.671 - 2$. Pri logaritmu števila v pa moramo pred deljenjem s 3 logaritma števila b doseči, da bo karakteristika deljiva s 3. Torej moramo pred deljenjem s 3, logaritem števila b zapisati kot $1.754 + 0$ in šele nato deliti s 3.

Vzemimo sedaj nekoliko bolj obsežen račun. Izračunajmo z logaritmi izraz

$$x = \sqrt{\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{c^3}}\,,$$

kjer je

$$a = 42.3, \quad b = 6.37, \quad c = 0.974.$$

Račune združimo v tabelo:

število	logaritem
a	$0.626 + 1$
b	$0.804 + 0$
$d = b^2$	$0.608 + 1$
$e = \sqrt[3]{d}$	$0.536 + 0$
$f = ae$	$0.162 + 2$
c	$0.989 - 1$
$g = c^3$	$0.967 - 1$
$h = f/g$	$0.195 + 2$
$x = \sqrt{h}$	$0.098 + 1$

Iz tabele antilogaritmov dobimo končni rezultat

$$x = 12.5\,,$$

ki je pravilen na vsa tri mesta.

Zaključek

Numerično računanje "peš" se z logaritmi poenostavi le, če izraz vsebuje računske operacije množenja, deljenja, potenciranja in korenjenja. Če izraz vsebuje tudi seštevanje in odštevanje, je treba verižni račun logaritmiranja ustrezno prekinjati. Izraz

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

ki zelo pogosto nastopa v praksi, izračunamo npr. z logaritmi tako, da najprej z logaritmi izračunamo a^2 in b^2 posebej, ju seštejemo, nato pa z logaritmom izračunamo kvadratni koren. Zato so se včasih nekatere naloge glasile: "Pretvori izraz v obliko, primerno za logaritmiranje". Taki izrazi so bili pogosti v trigonometriji. Tu kot preprost zgled navedimo le izraz

$$y = \sqrt{a^2 - b^2}\,,$$

ki ga je bolj primerno zapisati v obliki

$$y = \sqrt{(a+b)(a-b)}\,.$$

Pri drugem izrazu si namreč prihranimo eno logaritmiranje in dve antilogaritmiranji.

Tehnični napredek pri računskih pripomočkih je povzročil, da danes nihče več ne računa z logaritmi, kar pa ne zmanjšuje ugleda Jurija Vege, ki je človeštvu lajšal numerično računanje skoraj dve stoletji.

Dodatek

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	0.000	0.041	0.079	0.114	0.146	0.176	0.204	0.230	0.255	0.279
2.	0.301	0.322	0.342	0.362	0.380	0.398	0.415	0.431	0.447	0.462
3.	0.477	0.491	0.505	0.519	0.531	0.544	0.556	0.568	0.580	0.591
4.	0.602	0.613	0.623	0.633	0.643	0.653	0.663	0.672	0.681	0.690
5.	0.699	0.708	0.716	0.724	0.732	0.740	0.748	0.756	0.763	0.771
6.	0.778	0.785	0.792	0.799	0.806	0.813	0.820	0.826	0.833	0.839
7.	0.845	0.851	0.857	0.863	0.869	0.875	0.881	0.886	0.892	0.898
8.	0.903	0.908	0.914	0.919	0.924	0.929	0.934	0.940	0.944	0.949
9.	0.954	0.959	0.964	0.968	0.973	0.978	0.982	0.987	0.991	0.996

Tabela 1. Trimestni logaritmi števil od 1.0 do 9.9.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.00	1.02	1.05	1.07	1.10	1.12	1.15	1.17	1.20	1.23
0.1	1.26	1.29	1.32	1.35	1.38	1.41	1.45	1.48	1.51	1.55
0.2	1.58	1.62	1.66	1.70	1.74	1.78	1.82	1.86	1.91	1.95
0.3	2.00	2.04	2.09	2.14	2.19	2.24	2.29	2.34	2.40	2.45
0.4	2.51	2.57	2.63	2.69	2.75	2.82	2.88	2.95	3.02	3.09
0.5	3.16	3.24	3.31	3.39	3.47	3.55	3.63	3.72	3.80	3.89
0.6	3.98	4.07	4.17	4.27	4.37	4.47	4.57	4.68	4.79	4.90
0.7	5.01	5.13	5.25	5.37	5.50	5.62	5.75	5.89	6.03	6.17
0.8	6.31	6.46	6.61	6.76	6.92	7.08	7.24	7.41	7.59	7.76
0.9	7.94	8.13	8.32	8.51	8.71	8.91	9.12	9.33	9.55	9.77

Tabela 2. Trimestni antilogaritmi števil od 0.00 do 0.99.

Zvonimir Bohte

VEGA IN ASTRONOMIJA

Barona Jurija Vego večinoma prikazujejo kot velikega matematika in zelo sposobnega vojaka, posebno veščega topničarskih opravil. Zelo malo ali skoraj nič pa ni znanega o tem, da se je Vega ukvarjal tudi z astronomijo. No, ne prav veliko, pa vendar. Zato naj na tem mestu namenimo nekaj vrstic tudi tej njegovi drobni, recimo, postranski dejavnosti. Seveda bi se lahko vprašali, če je in ali je kdaj in kaj resnega opazoval z daljnogledom. Verjetno ne, mislimo pa si lahko, da je zvezde zagotovo gledal skozi daljnogled, saj je imel kot vojak za to dosti možnosti in tudi priložnosti. O tem nisem zasledil nobenega zapisa. Sicer se zdi, da na bojnem polju v strelskih jarkih in prevetrenih šotorih prezebel, sestradan in nenaspan vojak ne more biti preveč razpoložen za astronomsko romantiko in modrovanja o vesolju, a morda se motimo.

Naj bo kakor koli. Leta 1801, eno leto pred svojo smrtjo, je Vega napisal v latinščini daljšo razpravo o izračunu mas vesoljskih teles v Osončju, posebej še srednjih razdalj planetov od Sonca in njihovih obhodnih časov. Naj na kratko predstavimo ta njegov astronomski spis, pri čemer se bomo izognili vsemu tistemu delu fizike in matematike, ki je morda nekoliko prezahteven[1].

Iz omenjene razprave je razvidno, da je Vega odlično razumel in znal predstaviti tudi težja poglavja astronomije, v tem primeru nebesne mehanike, to je področja, ki na osnovi gravitacijskega zakona obravnava gibanja vesoljskih teles. Z uporabo Keplerjevih zakonov, Newtonovega gravitacijskega zakona, gravitacijskega pospeška na zemeljskem površju in obrazcev, ki veljajo za središčno gibanje telesa, je najprej izračunal maso Sonca, nato pa še mase planetov (do Urana, saj Neptun in Pluton še nista bila odkrita), njihove obhodne čase in povprečne oddaljenosti od Sonca. Ne bi se spuščali v podrobnosti, le navedimo, da je izračunal maso Sonca na dva načina. Prvič je dobil vrednost 339 680 mas Zemlje, drugič pa 338 625 mas Zemlje. (*Opomba:* V šoli se zadovoljimo z vrednostjo 333 000 mas Zemlje, kar si hitro zapomnimo.) Številne račune je združil v preglednico, ki jo prikazujemo spodaj.

---

[1] Če koga ta snov posebno zanima, lahko podrobnosti (npr. izpeljave enačb) najde v učbeniku F. Avsec – M. Prosen, *Astronomija*, DMFA Slovenije, str. 69 do 71 in v *Zborniku za zgodovino naravoslovja in tehnike 15–16*, Slovenska matica v Ljubljani, 2002, str. 67 do 69.

ime planeta	obhodni čas (v dnevih)	srednja oddaljenost (v a.e.)	masa planeta (v masah Zemlje)	opomba: masa danes
Merkur	87,969255	0,3871	3,5	0,05
Venera	224,70082	0,723332	0,5	0,8
Zemlja	365,25638	1	1	1
Mars	686,97958	1,523693	1,3	0,1
Jupiter	4332,602	5,202778	316,2	318
Saturn	10759,077	9,538785	98,1	95
Uran*	30689	19,183475	10,3	14

* Uran je bil odkrit 1781, še v času Vegovega življenja;
a.e. pomeni okrajšavo za astronomsko enoto, t.j. razdaljo Zemlja–Sonce.

Mase planetov, njihovi obhodni časi in srednje oddaljenosti od Sonca, kot jih je izračunal J. Vega.

Zanimivost

Maso Sonca je Vega računal po formuli

$$M = m \cdot \left(4\pi^2 r^3 / R^2 g t^2 - 1\right) ,$$

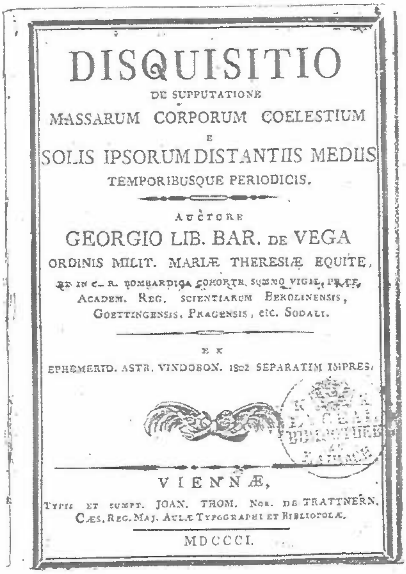
maso m_1 planetov pa po obrazcu:

$$m_1 = m \cdot 4\pi^2 r_1^2 / R^2 g t_1^2 - M$$

Tu pomeni: m masa Zemlje, R radij Zemlje, $g = Gm/R^2$ pospešek prostega pada na Zemlji, r razdalja Zemlje od Sonca (astronomska enota), t obhodni čas Zemlje (eno leto), r_1 oddaljenost planeta od Sonca in t_1 obhodni čas planeta.

Vega je obravnaval tudi določanje mas lun, torej satelitov, ki krožijo okrog planetov. Izrazit primer takega planeta je Jupiter. Tako je na koncu prispevka navedel vrednosti za mase prvih štirih največjih Jupitrovih satelitov, imenovanih tudi Galilejeve lune, ker jih je leta 1610 z daljnogledom odkril italijanski fizik in astronom Galileo Galilei.

Vega ima veliko spomenikov, tako na Slovenskem kot tudi v tujini. Ima pa ga tudi na nebu. Na predlog nemškega astronoma J. H. Maedleja so leta 1837 po Vegi za njegove znanstvene zasluge poimenovali krater na Luni (gl. *Presek* **28**, štev. 6/344). Pred nekaj leti pa so slovenski astronomi po Vegi imenovali tudi mali planet, ki so ga odkrili med Marsovim in Jupitrovim tirom.

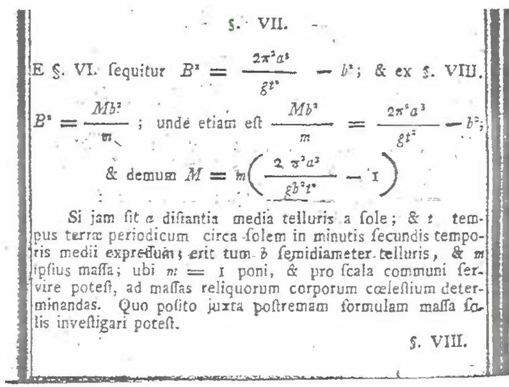

DISQUISITIO
DE SUPPUTATIONE
MASSARUM CORPORUM COELESTIUM
E
SOLIS IPSORUM DISTANTIIS MEDIIS
TEMPORIBUSQUE PERIODICIS.

AUCTORE
GEORGIO LIB. BAR. DE VEGA
ORDINIS MILIT. MARIÆ THERESIÆ EQUITE,
ET IN C. R. LOMBARDICA COHORT. SUMMO VIGIL. PRÆF.
ACADEM. REG. SCIENTIARUM BEROLINENSIS,
GOETTINGENSIS, PRAGENSIS, etc. SODALI.

EX
EPHEMERID. ASTR. VINDOBON. 1802 SEPARATIM IMPRES.

VIENNÆ,
TYPIS ET SUMPT. JOAN. THOM. NOB. DE TRATTNERN,
CÆS. REG. MAJ. AULÆ TYPOGRAPHI ET BIBLIOPOLÆ.
MDCCCI.

Slika 1. Naslovni list Vegovega astronomskega spisa, v katerem je prikazal izračune mas Sonca in planetov ter srednjih oddaljenosti planetov od Sonca in njihovih obhodnih časov.


§. VII.

E §. VI. ſequitur $B^2 = \frac{2\pi^2 a^3}{gt^2} - b^2$; & ex §. VIII.

$B^2 = \frac{Mb^2}{m}$; unde etiam eſt $\frac{Mb^2}{m} = \frac{2\pi^2 a^3}{gt^2} - b^2$;

& demum $M = m\left(\frac{2\pi^2 a^3}{gb^2 t^2} - 1\right)$

Si jam ſit a diſtantia media telluris a ſole; & t tempus terræ periodicum circa ſolem in minutis ſecundis temporis medii expreſſum; erit tum b ſemidiameter telluris, & m ipſius maſſa; ubi $m = 1$ poni, & pro ſcala communi ſervire poteſt, ad maſſas reliquorum corporum cœleſtium determinandas. Quo poſito juxta poſtremam formulam maſſa ſolis inveſtigari poteſt.

§. VIII.

Slika 2. Del Vegovega prispevka, kjer obravnava izračun mase Sonca (gl. še osenčen del besedila).

Prav pred kratkim smo izvedeli, da je Vega na Dunaju leta 1787 opazoval Sončev mrk in o opazovanjih so poročale dunajske efemeride. Tesno je sodeloval tudi z dunajskim profesorjem fizike Gussmannom, ki je leta 1785 dokazal, da so kometi vesoljska telesa zunaj zemeljskega izvora. Tako se torej zdi, da je bil Vega astronomiji zelo naklonjen.

Marijan Prosen

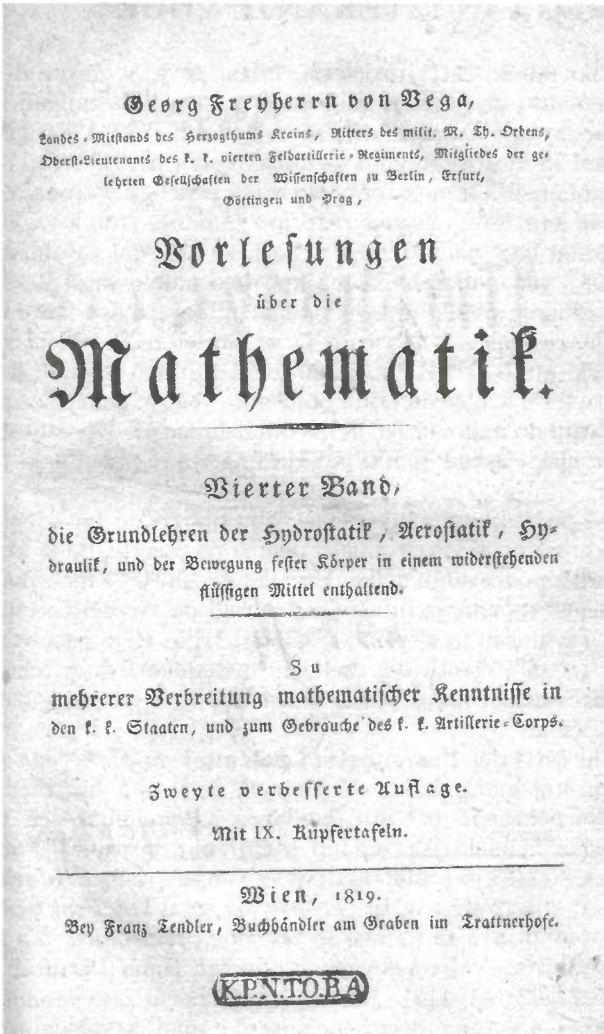
JURIJ VEGA IN IZTEKANJE VODE

23. marca bo minilo četrt tisočletja, odkar se je v Zagorici rodil Jurij Vega. Matematiki ga poznajo predvsem po njegovih knjigah. Štirje deli učbenika *Predavanja o matematiki* so izšli v letih 1782, 1784, 1788 in 1800. Najbolj znani so njegovi številni logaritmovniki, prvi iz leta 1783. Knjige so večkrat ponatisnili in nekatere dele izdali posebej. Poročajo o ponatisu logaritmov iz leta 1962. Vegove razprave bi danes šteli k raziskovalnemu delu. Izračunal je π na 140 mest (1794), se zanimal za obliko vrteče se Zemlje (1798), računal, kako bi majhno telo nihalo skozi Zemljo (1800), obravnaval gibanje planetov in izračunal njihove mase (1801) ter opisal prednosti metričnega sistema enot in se zavzel za to, da bi ga uvedli v Avstro-Ogrski (1801, 1802, 1803, 1804). Zadnji deli sta izšli leta 1802 po Vegovi smrti; le-te še niso do kraja pojasnili. Vegovo delo priča predvsem o njegovi ljubezni do matematike in izredni delavnosti. Upoštevati moramo, da je kot topniški častnik moral odhajati na vojne pohode, ki jih tedaj ni bilo malo.

Na prvi pogled zanimanje fizika vzbudijo tri od navedenih razprav, ki zadevajo gravitacijo. Podrobnejši pogled pa pokaže, da je Vega izdatno prispeval tudi k poučevanju fizike. Prvi del *Predavanj o matematiki* obravnava "umetnost računanja in algebro", drugi pa "teoretično in praktično geometrijo, ravninsko in sferično trigonometrijo, višjo geometrijo in infinitezimalni račun". Tretji del vsebuje "mehaniko trdnih teles" in četrti "osnove hidrostatike, aerostatike, hidravlike in upor pri gibanju trdnih teles po tekočinah".

Tretji in čerti del *Predavanj* sta potemtakem posvečena poglavjem, ki jih danes štejemo k fiziki. V Vegovih časih sta bili matematika in fizika tesneje povezani, kot sta dandanes. Pomembni deli fizike, npr. termodinamika in elektrika, so bili tedaj še v povojih. Ponekod tudi danes mehaniko štejejo k matematiki. V tretjem delu *Predavanj* je Vega obdelal gibanje izstrelkov in ta del posebej izdal kot *Praktična navodila za metanje bomb in v ta namen sestavljene preglednice.* Za fizika je to poglavje zanimivo. V Preseku ga je obdelal Tomo Pisanski (*Balistika*, Presek **5** (1977/78) 49, 116). Na tem mestu počástimo spomin na Jurija Vego ob okrogli obletnici njegovega rojstva z manj krvoločnim odlomkom iz četrtega dela (slika 1).

Pustimo se voditi Vegi, a le tu in tam kako zanimivo trditev navedemo dobesedno, imena nekaterih količin in simbole zanje prilagodimo današnji rabi. Vega je npr. – tudi v drugih svojih delih – namesto težnega pospeška uporabljal njegovo polovico, to je pot pri prostem padanju v prvi sekundi, če telo na začetku miruje. Sicer z enačbami, kolikor je mogoče, sledimo Vegi. Vega je po tedanji navadi večino enačb zapisal v tekočem



Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitstands des Herzogthums Krains, Ritters des milit. M. Th. Ordens, Oberst-Lieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitgliedes der gelehrten Gesellschaften der Wissenschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

Vorlesungen

über die

Mathematik.

Vierter Band,

die Grundlehren der Hydrostatik, Aerostatik, Hydraulik, und der Bewegung fester Körper in einem widerstehenden flüssigen Mittel enthaltend.

Zu

mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, und zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

Zweyte verbesserte Auflage.

Mit IX. Kupfertafeln.

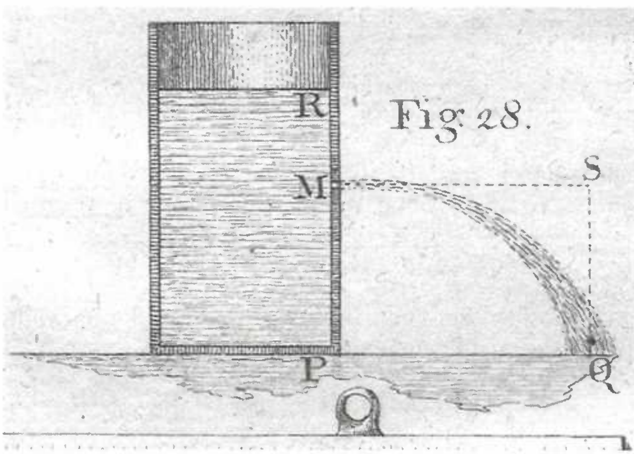
Wien, 1819.

Bey Franz Tendler, Buchhändler am Graben im Trattnerhofe.

Slika 1. Na naslovnici četrtega dela Vegovih *Predavanj o matematiki* se Vega predstavi kot član stanov Vojvodine Kranjske, vitez vojaškega reda Marije Terezije, podpolkovnik cesarsko-kraljevega četrtega bataljona poljskega topništva in član učenih združenj v Berlinu, Erfurtu, Göttingenu in Pragi. Druga popravljena izdaja je izšla na Dunaju leta 1819 "za večje širjenje matematičnih znanj v cesarsko-kraljevih deželah in za uporabo v cesarsko-kraljevem topniškem zboru".

besedilu, medtem ko danes pomembno enačbo postavimo v posebno vrstico. Način pisanja pa vpliva tudi na obliko enačb.

Poglavje o "Osnovah hidravlike" Vega začne takole: "Hidravlika se imenuje nauk o gibanju tekočih mas. O tej daljnosežni znanosti, ki še ni prišla popolnoma na čisto, naj navedemo tukaj nekaj najpotrebnejših osnov, da bi pojasnili nekatere mehanične učinke vode, ki nam padejo v oči v vsakdanjem življenju, in, posebej, da bi lahko s potrebno jasnostjo obravnavali gibanje trdnih teles v tekočinah." Na začetku razdelka o "iztekanju vode skozi odprtine" je obdelal gibanje vode skozi odprtino v vodoravnem dnu in skozi odprtino v navpični steni (slika 2). Navpično razdaljo odprtine v dnu ali težišča odprtine v steni je vpeljal kot *tlačno višino* h. Voda skozi odprtino izteka s hitrostjo telesa, ki bi prosto padlo za tlačno višino $v = \sqrt{2gh}$, če je g težni pospešek.



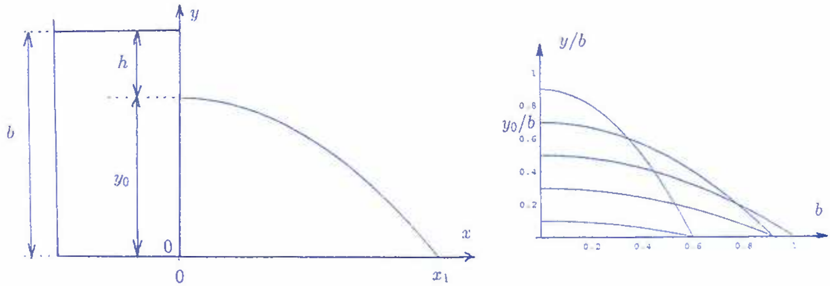
Slika 2. Risba iz četrtega dela *Predavanj o matematiki* kaže iztekanje vode skozi odprtino v navpični steni. Obliko curka poda parabola.

Curek vode, ki izteka iz odprtine v steni posode, ima obliko parabole. Vodoravna komponenta hitrosti curka je enaka hitrosti iztekanja. Tako opišemo curek vode z enačbama

$$x = \sqrt{2gh}\, t\,, \qquad y = y_0 - \tfrac{1}{2}gt\,.$$

Pri tem smo os y koordinatnega sistema prislonili ob navpično steno in usmerili navzgor, os x pa po vodoravnih tleh pravokotno na steno od posode stran (slika 3). Višina težišča odprtine nad tlemi je y_0 in višina gladine nad temi $b = h + y_0$. Čas t izrazimo s koordinato x in dobimo drugo koordinato

$$y = y_0 - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{x}{\sqrt{2gh}} \right)^2 = y_0 - \frac{x^2}{4(b - y_0)} \,.$$



Slika 3. Curki vode iztekajo iz odprtin v različni višini. Največji je domet curka iz odprtine na sredi med gladino in dnom.

Domet curka x_1, to je razdaljo točke, v kateri curek zadene tla, od stene posode, dobimo, če upoštevamo, da je višina tal $y = 0$:

$$x_1 = \sqrt{4y_0(b - y_0)} = \sqrt{b^2 - (2y_0 - b)^2} \,.$$

Domet je odvisen od višine odprtine in je največji, ko je kvadratni izaz, ki ga pod korenom odštejemo, enak 0:

$$x_{1m} = b \qquad \text{pri} \qquad y_{0m} = \tfrac{1}{2} b \,.$$

Domet je največji, ko je odprtina na sredi višine stene, in je enak višini gladine nad tlemi.

Nekoliko bolj redkobesedno izvajanje je Vega pospremil s pripombo: "Iz navedenih enačb si bo pozorni bralec sam lahko izpeljal različne koristne sklepe, na primer:

a) Pri različnih tlačnih višinah so hitrosti vode, ki izteka iz majhnih odprtin, sorazmerne s kvadratnim korenom teh višin (slika 2). [...]

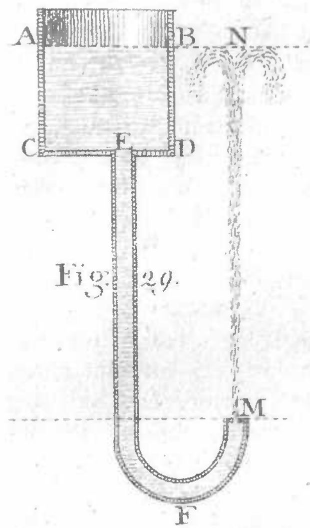
c) Da pri dani višini gladine PR $= b$ nad tlemi PQ vodni curek doseže največji domet PQ, mora biti višina odprtine MP $= \frac{1}{2}$PR in je največji domet enak b. [...]

d) Dometa curkov iz majhnih odprtin v enaki razdalji od polovice navpične črte PR sta enaka [...]."

Tudi dandanes spodbujamo učitelje, da potem, ko pridejo do kake enačbe, z besedami opišejo, kaj ta pove. Storimo tako še mi. Že enačba $x = vt$ pove, da je domet curka tem večji, čim večja je hitrost $v = \sqrt{2g(b - y_0)}$ in čim daljši čas $t = \sqrt{2y_0/g}$ pada. To je precej splošen sklep, saj velja tudi pri skokih v daljavo in pri skokih s smučmi. Pri iztekanju vode je čas dolg, ko je višina odprtine velika, a tedaj je hitrost majhna. Pri višini $y_0 = b$ je čas največji, a je hitrost enaka 0. Hitrost je velika, ko je višina odprtine majhna, a tedaj je na voljo le kratek čas. Pri višini $y_0 = 0$ je hitrost največja, a je čas enak 0. Domet je največji pri srednji višini, ko je hitrost znatna in je tudi čas znaten. Izpeljava pokaže, da je táko natanko pri odprtini na sredi med gladino in tlemi.

Zanimivo je, da se v nobeni enačbi ne pojavi gostota kapljevine. Tako veljajo enake enačbe za katero koli kapljevino. V enačbi za obliko curka tudi ni težnega pospeška. To pomeni, da bi bila oblika curka enaka na Luni ali na Marsu. Ker je tam tlak v atmosferi zelo majhen, bi morali seveda s plinom v posodi pri dovolj velikem tlaku poskrbeti, da voda ne bi takoj izparela. Hitrost iztekanja in čas pa sta odvisna od težnega pospeška. Hitrost je tem večja in čas tem krajši, čim večji je težni pospešek.

V nadaljevanju je Vega obdelal navpični curek. Če je os odprtine usmerjena navzgor, enako kot prej določimo hitrost, ki kaže navpično navzgor (slika 4). Iztekajoči del vode se ravna v tem primeru po zakonih za telo, ki ga vržemo navpično navzgor s hitrostjo $\sqrt{2gh}$. Med gibanjem navzgor hitrost pojema in telo doseže višino MN na gladini ABN, ko je hitrost 0. "Ker vodne plasti iz odprtine s hitrostjo, ki ustreza tlačni višini, neprekinjeno sledijo druga drugi, sestavljajo v višino se gibajoči vodni curek, kot ga lahko opazimo pri znanih vodometih."



Slika 4. Risba iz četrtega dela *Predavanj o matematiki* kaže iztekanje vode skozi odprtino navpično navzgor.

Vega je posvetil vodometom veliko pozornosti, po čemer sklepamo, da so bili v njegovem času precej priljubljeni. Zapisal je: "Izkušnja uči, da je višina vodnega curka pri vodometu nekoliko manjša od tlačne višine, posebno, če je višina zelo velika. Za to je mogoče navesti več razlogov, na primer:

1. Ker notranje površje odprtine ni popolnoma gladko, na tem mestu nekoliko moti iztekajočo vodo trenje neke vrste.
2. Ker voda ni popolnoma tekoča, ampak se njeni deli privlačijo, čeprav šibko, jih je mogoče ločiti le s silo.
3. Ker na vrhu curka vodo, ki popolnoma zgubi hitrost in naj bi padla navpično navzdol, potiska ali odrine voda, ki sledi. Zato tudi curek vodometa doseže nekoliko večjo višino, če odprtino malo nagnemo.
4. Ker se zrak gibajočemu se vodnemu curku upira tem bolj, čim večja je hitrost curka.
5. Ker je pri velikih vodometih cev EF, ki dovaja vodo iz posode ACDB do šobe M, na splošno premajhna. Taka cev naj bi imela tako velik presek, da bi lahko vzeli, da voda, ki izhaja iz šobe, v cevi miruje, ker je le tedaj višina iztekajoče vode enaka tlačni višini."

Današnji fizik ima na trditve, posebno na 1., 2. in 3. nekaj pripomb.

Vega je od drugih eksperimentatorjev prevzel dva zanimiva sklepa. Razlika tlačne višine h in dosežene višine curka h' je sorazmerna s kvadratom dosežene višine. Pri višini gladine $h = 1,60$ m so dala merjenja razliko $h - h' = 2,6$ cm. S tem dobimo za sorazmernostni koeficient v zvezi $h - h' = Kh'^2$ vrednost $K = 0,0106\ \mathrm{m}^{-1}$. Najugodnejši premer šobe za določeno tlačno višino je ob dovolj široki dovodni cevi sorazmeren s kvadratnim korenom iz te višine. Pri višini 16 m so dala merjenja za najprimernejši premer šobe v tanki kovinski plošči 1,6 cm. S tem dobimo za sorazmernostni koeficient v zvezi $2r = k\sqrt{b}$ vrednost $k = 0,004\ \mathrm{m}^{1/2}$. Vega je navedel mere v pariških čevljih, colah in črtah. Včasih pa je omenil dunajske mere, za katere ni jasno, ali se ujemajo s pariškimi. Za uporabo metra se je navdušil žal šele pozneje.

V nadaljevanju je Vega opisal, kako povečamo višino curka pri vodometu, če z batom povečamo tlak v posodi z vodo. Obravnaval je tudi primer, pri katerem ni mogoče vzeti, da voda v posodi ali cevi pred šobo miruje. Dotaknil se je črpalk, ki sesajo ali potiskajo vodo. Precej obširno je obdelal praznjenje posod z vodo in navedel veliko primerov, tudi take, ki so pomembni v tehniki, na primer pri zapornicah na rekah. Predvsem pa ga je zanimala uporaba v vsakdanjem življenju. Opazovanja so pokazala, da ima iztekajoči curek iz odprtine nekoliko manjši presek kot odprtina. Po merjenjih so sklepali, da je pri krožni odprtini presek curka 0,64-krat tolikšen kot presek odprtine v tanki pločevini ali 0,81-krat tolikšen kot presek odprtine v debeli posodi ali pri daljšem valjastem nastavku. Efektivni polmer r' je povezal s polmerom odprtine r z zvezo

$r' = \alpha r$. Za odprtino v tanki steni velja $\alpha = \sqrt{0,64} = 0,8$ in za odprtino v debeli steni ali pri valjastem nastavku $\alpha = \sqrt{0,81} = 0,9$. Poudarimo, da so to le ocene.

Prostornino vode, ki odteče ali priteče v 1 s, danes vpeljemo kot prostorninski tok

$$\phi_V = \frac{V}{t} = Sv\,.$$

Vega je izenačil maso vode z njeno prostornino, češ da je gostota vode ρ enaka 1. Tako mu ni bilo treba razločevati med prostorninskim tokom ϕ_V in masnim tokom $\phi_m = \rho\phi_V$.

Vega se je sicer skliceval na dela Daniela Bernoullija in drugih fizikov. Vendar v njegovem času še niso poznali izreka o kinetični in potencialni energiji ter se pri pojavih niso zanimali za to, kako se spreminjata kinetična in potencialna energija. Šele z izrekom v drugi polovici 19. stoletja je prišla do prave veljave enačba, ki jo imenujemo po Bernoulliju. Prav tako Vega ni uporabljal viskoznosti. Vprašanje je, ali jo je poznal. Ozadje marsikaterega njegovega zgleda bi postalo preglednejše, če bi jo omenil. Zanimivo je primerjati vsebino Vegovega – po današnjem gledanju visokošolskega – učbenika matematike z vsebino današnjih srednješolskih učbenikov fizike. Osnovne dele, od katerih smo se dotaknili iztekanja vode, najdemo v srednješolskih učbenikih. Za tehniko in vsakdanje življenje zanimivih primerov, ki jih je na tej stopnji mogoče obravnavati le približno, pa srednješolski učbeniki ne vsebujejo. Obravnavajo samo Bernoullijevo enačbo in se vzdržijo pripomb, da je samo približna.

Janez Strnad

VEGOVA NALOGA

V četrtem delu *Predavanj o matematiki* je Jurij Vega postavil nalogo: V posodo doteka vsako sekundo 6 litov vode. Kolikšen mora biti polmer odprtine v globini 0,8 m, da gladina vode ostane v enaki višini? Efektivni premer curka je 0,9 premera odprtine.

Janez Strnad

Rešitev je na str. 255.

NEKAJ KNJIG O JURIJU VEGI

O življenju in delu Jurija Vege je bilo v slovenskem prostoru napisanih več knjig. Prva dela izvirajo s konca devetnajstega in z začetka dvajsetega stoletja. V tem prispevku pa si bomo ogledali kratke opise nekaterih del, ki so izšla v zadnjih petdesetih letih.
Najstarejša med njimi je knjižica:

Lavo Čermelj, *Jurij Vega*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1954.

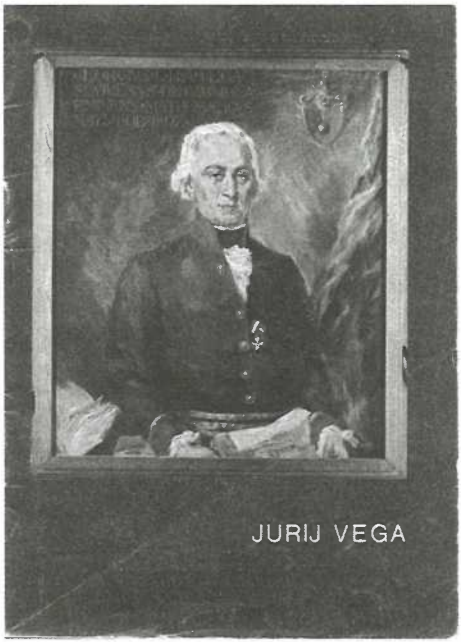
To je knjižica na 72 straneh, ki jo je ob 200-letnici rojstva Jurija Vege s sodelovanjem Društva matematikov in fizikov LR Slovenije izdala založba Mladinska knjiga. Osrednji del knjižice zavzema poljuden opis Vegovega strokovnega in znanstvenega dela. Opisani so njegovi (matematični) učbeniki in razprave ter logaritmovniki. V knjižici je tudi krajši opis Vegove mladosti, poglavje o njegovi vojaški karieri ter poglavje o njegovi smrti in z njo povezanimi govoricami. Dodan je še krajši seznam Vegovih del ter opis spomenikov in drugih obeležij, posvečenih Juriju Vegi. Omenjen je tudi krater na Luni, poimenovan po Vegi. Kot zanimivost naj omenim, da avtor besedilo o kraterju zaključi takole: "Ta spomenik je gotovo za Vego najbolj časten in tudi najbolj trajen, saj je varen pred vojnimi vihrami in pred človeškimi prevrati, vsaj tako dolgo, dokler se človeku ne posreči zleteti na Luno. To pa je pesem daljne bodočnosti." Danes seveda vemo, da je bila ta "daljna bodočnost" oddaljena le 15 let. Če sklenem, knjižica je zanimivo in lahko berljivo čtivo, pri čemer pa se je treba zavedati, da so bili nekateri opisani dogodki kasneje podrobneje raziskani in natančneje opisani. Zaradi starosti je za današnjega bralca zanimiv tudi nekoliko starinski jezik in nevsakdanje besedišče, uporabljeno v knjižici.

Jože Povšič, *Bibliografija Jurija Vege*, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana, 1974.

Bibliografija, ki obsega dobrih 120 strani, je sestavljena iz treh delov. V uvodnem delu, ki ima 20 strani, je avtor pregledno opisal Vegovo življenjsko pot, njegovo delo in dosežke. Osrednji del bibliografije je obsežen seznam različnih natisov Vegovih del, dodan pa je tudi seznam pomembnejših objavljenih prispevkov o Juriju Vegi oz. o njegovem delu. Med drugim je v bibliografiji navedenih kar 268 različnih natisov in prevodov Vegovega logaritemsko-trigonometrijskega priročnika ("malega logaritmovnika"). Avtor ocenjuje, da je bilo različnih natisov verjetno celo več kot 300, vendar pa vseh zaradi nepopolne, izgubljene ali uničene dokumentacije ni moč zanesljivo izslediti in dokumentirati. Groba ocena za skupno naklado vseh Vegovih logaritmovnikov je težko predstavljivih tri milijone izvodov. Prirejeni prevodi so izhajali še v drugi polovici prejšnjega stoletja, potem pa je z uveljavitvijo žepnih računalnikov zanimanje za natančne tabele vrednosti logaritmov in kotnih funkcij dokončno usahnilo. Zadnji del bibliografije obsega slikovno gradivo, ki prikazuje predvsem Vegova pisma in knjige ter kraje, kjer se je vojskoval.

Jože Povšič, *Jurij Vega*, Založba Obzorja, Maribor, 1983.

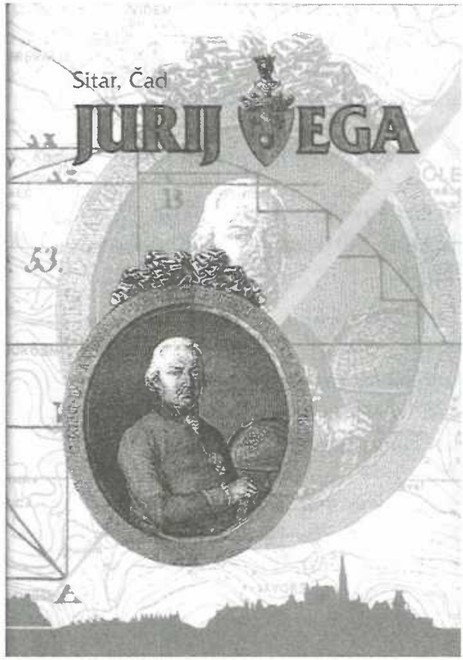
Ob 200-letnici izida Vegovega prvega logaritmovnika je v zbirki vodnikov po kulturnih in naravnih spomenikih Slovenije izšla drobna knjižica o Juriju Vegi. Ker jo je napisal isti avtor kot že omenjeno Bibliografijo, ni presenetljivo, da je opis Vegovega življenja in dela podoben tistemu iz Bibliografije. Tudi slikovno gradivo je večinoma vzeto iz Bibliografije, le da tu ni zbrano na koncu, ampak je porazdeljeno med besedilo. Dodan je še krajši uvodni del, ki opisuje dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov za obnovo Vegove domačije in obeležitev njegovega spomina.



Sandi Sitar, *Jurij Vega*, Gorazd Čad, *Vegovo Zasavje*, 2. dopolnjeni natis, Turistično društvo, Dolsko, 2002.

Med vsemi opisanimi knjigami je ta najobsežnejša in najbolj razkošno opremljena. Napisana je v treh jezikih. Prva polovica je v slovenščini, v drugi polovici pa je prevod slovenskega besedila v nemščino in angleščino.

Besedilo je tudi vsebinsko razdeljeno na dva dela. Prvi, biografski del z naslovom *Jurij Vega* je napisal Sandi Sitar. Isti avtor je že leta 1983 napisal podobno biografijo. Seveda pa je pričujoče delo dopolnjeno z novejšimi ugotovitvami in odkritji. Drugi natis se od prvega, ki je izšel leta 1997, loči po pet strani dolgem dodatku. Biografski del je sestavljen iz treh večjih sklopov, ki jih je avtor poimenoval Osebnost, Vojak in Znanstvenik. V prvem je nazorno opisana Vegova življenjska pot, ki ga je iz rodne Zagorice prek šolanja v Ljubljani popeljala do cesarskega Dunaja in od tam na mnoga mejna območja tedanje habsburške monarhije. Leta 1780 je tedaj šestindvajsetletni Vega vstopil v avstrijsko vojsko in ostal v vojaški službi vse do smrti leta 1802. V tem času je zaslovel kot vrhunski strokovnjak za artilerijska orožja in je pomembno vplival na razvoj in napredek avstrijskega topništva. Njegovi vojaški dosežki in podvigi so opisani v drugem delu biografije. Zadnji sklop obsega opis Vegovega strokovnega in znanstvenega dela in je sestavljen iz treh razdelkov: učbeniki, logaritmi in razprave.



Drugi del besedila je krajši ter podaja geografski in zgodovinski oris vzhodnega dela Ljubljanskega polja. Avtor Gorazd Čad ga je naslovil Vegovo Zasavje. Po vrsti ga sestavljajo razdelki Vrata v Zasavje, Naselitev območja, Srednjeveški gradovi, Brodarstvo na Savi, Življenje v Vegovem času in Današnja podoba krajev.

Vse v prispevku omenjene knjige si je moč izposoditi v več knjižnicah (glej `http://cobiss.izum.si/`). Sicer pa sta prvi dve verjetno razprodani, drugi dve pa je še moč kupiti (npr. pri Komisiji za tisk na Fakulteti za matematiko in fiziko na Jadranski 19 v Ljubljani).

Martin Juvan

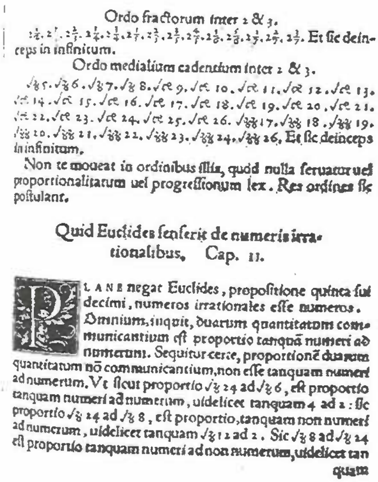
KAKO JE VEGA RAČUNAL LOGARITME[1]

Pri računanju v astronomiji in navigaciji na morju je bilo treba pogosto množiti ali deliti velika števila. Seveda takrat še niso poznali računalnikov in znanstveniki so iskali poti, kako bi si tako delo lahko olajšali. Ti napori so pripeljali do konstrukcij logaritmičnih tabel, ki so reducirale npr. množenje dveh števil na seštevanje nekih drugih dveh števil zapisanih v tabeli.

Oglejmo si na kratko pot do teh tabel. Začetek je bil študij tabele

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

ki jo je objavil Michael Stiefl v svojem delu *Arithmetica integra* leta 1544. Produkt dveh števil iz druge vrstice lahko izračunamo tako, da seštejemo števili nad njima iz prve vrstice in pogledamo število, ki vsoti ustreza v drugi vrstici. $\frac{1}{4} \cdot 64$ izračunamo npr. tako, da seštejemo števili -2 in 6, ki ležita nad faktorjema; dobimo vsoto 4, pod številom 4 v prvi vrstici je število 16, kar je rezultat produkta. Danes bi na kratko rekli, da smo uporabili pravilo za množenje potenc $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$. Ta tabela seveda ne pomaga, če želimo množiti npr. števili 5 in 19, saj jih v drugi vrstici ni.


Ordo fractorum inter 2 & 3.

Et sic deinceps in infinitum.

Ordo medialium cadentium inter 2 & 3.

Et sic deinceps in infinitum.

Non te moueat in ordinibus illis, quod nulla seruatur uel proportionalitatum uel progressionum lex. Res ordines sic postulant.

Quid Euclides senserit de numeris irrationalibus. Cap. 11.

PLANE negat Euclides, propositione quinta sui decimi, numeros irrationales esse numeros. Omnium, inquit, duarum quantitatum communicantium est proportio tanquã numeri ad numerum. Sequitur certe, proportionẽ duarum quantitatum nõ communicantium, non esse tanquam numeri ad numerum. Vt sicut proportio √z 24 ad √z 6, est proportio tanquam numeri ad numerum, uidelicet tanquam 4 ad 2: sic proportio √z 24 ad √z 8, est proportio, tanquam non numeri ad numerum, uidelicet tanquam √z 12 ad 2. Sic √z 8 ad √z 24 est proportio tanquam numeri ad non numerum, uidelicet tan quam

Slika 1. Stran iz Arithmetice integre.

[1]Avtor se zahvaljuje prof. Agati Tiegl za rokopise, ki mu jih je dala na razpolago.

Opisano idejo je prvi prelil v uporabo Švicar Jošt Bürgi. Opišimo poenostavljeno verzijo Bürgijeve realizacije zgornje ideje. Namesto osnove 2, kot v zgornji tabeli, je vzel za osnovo število 1,00001 in izračunal zaporedne potence tega števila. Potence je treba računati tako dolgo, da dobimo $1{,}00001^N = 10$.

1	2	3	4	5	6	7	8
$1{,}00001^1$	$1{,}00001^2$	$1{,}00001^3$	$1{,}00001^4$	$1{,}00001^5$	$1{,}00001^6$	$1{,}00001^7$	$1{,}00001^8$

Dejstvo, da so v drugi vrstici te tabele le števila med 1 in 10, ni ovira. Vsako število moremo spraviti na ta interval z množenjem s primerno potenco števila 10, potenco števila 10 pa je enostavno množiti. Števila v drugi vrstici te tabele ležijo zelo na gosto in tabela je nared za uporabo.

Slika 2. Jošt Bürgi.

Čeprav je Bürgi začel z izračuni že pred koncem šestnajstega stoletja, je objavil svoje delo *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* šele leta 1620 v Pragi. Prehitel ga je Škot John Napier, ki je leta 1614 objavil tablice z naslovom *Descriptio*. Tablice so bile sestavljene na osnovi istega principa, vendar osnova ni bila 10.

Pripominjam, da ob času objave teh tablic pojem logaritma še ni bil definiran. V jeziku logaritmov so števila v prvi vrstici zgornje tabele logaritmi števil v drugi vrstici tabele glede na osnovo 1,00001.


MIRIFICI

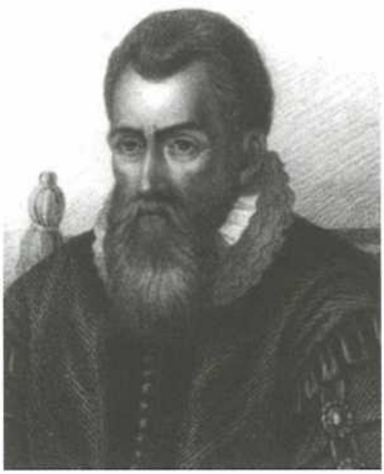
Logarithmorum
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Slika 3. Naslovnica Decsriptio.



Slika 4. John Napier.

Te tablice so kmalu (leta 1624) nadomestile tablice Angleža Henrika Briggsa, *Arithmetica logarithmica*. V tabelah so bili izračunani desetiški logaritmi naravnih števil od 1 do 20.000 in od 90.000 do 100.000. Manjkajoče logaritme je izračunal Holandec Adrian Vlack v delu *Arithmetica logarithmica* leta 1628. Leta 1633 pa je izdal tablice *Trigonometria artificialis*, v kateri so izračunani logaritmi kotnih funkcij. Od tedaj naprej je izšlo še mnogo raznih tablic, npr. avtorjev Henryja Gellibranda, Petra Crügerja, G. L. Frobeniusa. Šele leta 1647 je William Oughtred jasno formuliral pravilo logaritmiranja $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, pa tudi pravili za logaritem kvocienta in potence. Pater Gregorius de sanct Vincentio je leta 1647 po dolgi geometrični poti izpeljal formulo $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$, od tod pa je leta 1668 Nikolaj Mercator izpeljal vrsto za logaritme:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Več členov kot seštejemo, bolj natančen rezultat dobimo.

Slika 5. William Oughtred.

Korektno matematično definicijo logaritmov kot inverzno operacijo k eksponentni je prvi formuliral leta 1748 Leonhard Euler. Definiral je naravno število e in izpeljal povezavo med naravnimi in desetiškimi logaritmi. Logaritme je definiral tudi za kompleksna števila.

Tablico naravnih logaritmov na 48 mest natančno je objavil leta 1778 Wolfram. To tablico je objavil Jurij Vega v svojem *Thesaurusu*.

V Vegovem času so nekatere logaritemske tablice pošle. Vega je tudi opazil, da je v tablicah mnogo napak. To ga je navedlo na računanje novih tablic. Sedemmestne so izšle leta 1783, pozneje je objavil še več drugih tablic, najpomembnejše tablice pa so bile *Popolna zakladnica logaritmov*, ki jih je iz "Logaritmične aritmetike" in "Umetelne trigonometrije" Adriana Vlacqa zbral, očistil kar največjega števila napak ter na novo uredil.

V uvodu knjige "Thesaurus Logarithmorum Completus..." Jurij Vega poda na 13 straneh (v nemščini in latinščini) definicijo in osnovne lastnosti logaritmov. Navede tudi postopke, po katerih je logaritme računal, in zvezo med Briggsovimi in naravnimi logaritmi; končno podrobno opiše, kako se logaritemske tablice uporabljajo. V pričujočem sestavku na kratko povzemimo tisto delo Vegovega uvoda, ki opisuje izpeljavo raznih potenčnih vrst za računanje logaritmov.

Vega najprej navede izpeljavo vrste za $\ln(1+x)$ na osnovi binomske formule. To izpeljavo tu opuščamo.

Vzeli bomo na znanje formuli

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \tag{1}$$

$$\ln(1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots)\,, \tag{2}$$

ki sta znani že najmanj od leta 1668, iz dela *Logarithmotechnia* Nikolaja Mercatorja. Vrsti (1) in (2) imata končno vsoto za $|x| < 1$. Z odštevanjem zgornjih dveh vrst dobimo

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots)\,. \tag{3}$$

V zgornjo formulo vpeljemo substitucijo $x = \frac{1}{q}$, seveda pri predpostavki $q > 1$, pa dobimo

$$\ln\frac{q+1}{q-1} = 2\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} + \cdots\right)\,. \tag{4}$$

Ta vrsta konvergira gotovo za $q > 1$. Prepišemo jo v obliki

$$\ln(q+1) = \ln(q-1) + 2\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{3q^3} + \frac{1}{5q^5} + \cdots\right)\,. \tag{5}$$

V vrsto (5) vstavimo $q = 2$ in še $q = 3$, pa dobimo vrsti za $\ln 3$ in $\ln 2$, saj je $\ln 4 = 2 \ln 2$. Pri $q = 2$ vrsta (5) ne konvergira prav hitro, zato je Vega predlagal še eno substitucijo

$$\frac{q+1}{q-1} = \frac{p^2}{p^2-1}\,,$$

od koder seveda sledi $q = 2p^2 - 1$. Ko to substitucijo vstavimo v vrsto (5), dobimo

$$\ln p = \frac{1}{2}[\ln(p-1)+\ln(p+1)]+\left[\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5(2p^2-1)^5} + \cdots\right]. \tag{6}$$

V enačbo (6) vstavimo $p = 2$ in nato še $p = 3$, pa dobimo

$$\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 3 + P$$

in

$$\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 + Q\,.$$

Tu pomeni

$$P = \frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \cdots$$
$$Q = \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \cdots .$$

Vsota prvih štirih členov vrste P da rezultat natančen najmanj na šest decimalnih mest. Vrsta Q seveda konvergira še hitreje. Iz zgornjega sistema dveh linearnih enačb, ki povezujeta ln 2 in ln 3, izračunamo

$$\ln 2 = 4P + 2Q$$

in

$$\ln 3 = 6P + 4Q\,.$$

Vega je izračunal vrsti P in Q na 12 decimalnih mest natančno. Zato je treba v vrsti za P upoštevati sedem členov, v vrsti za Q pa le pet členov. Vega je za izračun ln 2 in ln 3 izpeljal še hitreje konvergentni vrsti. V formulo (6) je vstavil za p števila $p = 7$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2.5$ in 11. Iz dobljenih petih enačb je moč ln 2 in ln 3 izraziti z vrsto, ki konvergira še hitreje kot vrsta za P in Q. Še hitreje konvergentne vrste dobimo po opisanem postopku, če v vrsto (6) vstavimo zaporedoma $p = 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$.

Za konstrukcijo logaritemskih tablic seveda zadošča, da poznamo logaritme vseh praštevil. Logaritme praštevil 2 in 3 poznamo iz zgornjih formul. Logaritme ostalih praštevil moremo zlahka izračunati iz formule (6). Od tu naprej pa nam ostane samo še ogromno dela, ki pa je v načelu nezahtevno: osnovne štiri računske operacije...

Anton Suhadolc

REŠITEV VEGOVE NALOGE

Upoštevamo efekivni polmer $r' = \alpha r$. Skozi odprtino izteka prostorninski tok vode:

$$\phi_V = S'v = \pi r'^2 v = \pi \alpha^2 r^2 \sqrt{2gh}\,.$$

Pritekajoči tok izenačimo z iztekajočim in iz enačbe $\phi_V = \pi\alpha^2 r^2\sqrt{2gh}$ dobimo

$$r = \sqrt{\frac{\phi_V}{\alpha^2 \pi \sqrt{2gh}}}\,.$$

S podatki $\alpha = 0,9$, $h = 0,8$ m in $\phi_V = 6\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{s}$ sledi za polmer odprtine 2,2 cm.

Janez Strnad

KRIŽANKA – Rešitev s str. 228

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte `Presek@dmfa.si`. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

PRESEK
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, šolsko leto 2003/04, številka 4, strani 201–256

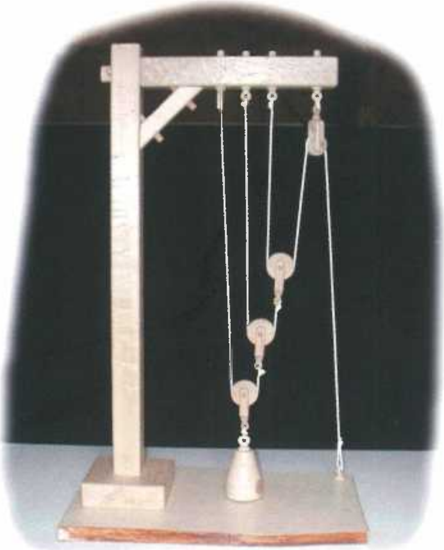
Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p.2964, tel. (01) 4766-553, (01) 4232-460, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2003/2004 je za posamezne naročnike **3.600 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol **3.000 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**.
Transakcijski račun: 03100-1000018787.
Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana,
SWIFT: SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

Sponzor:

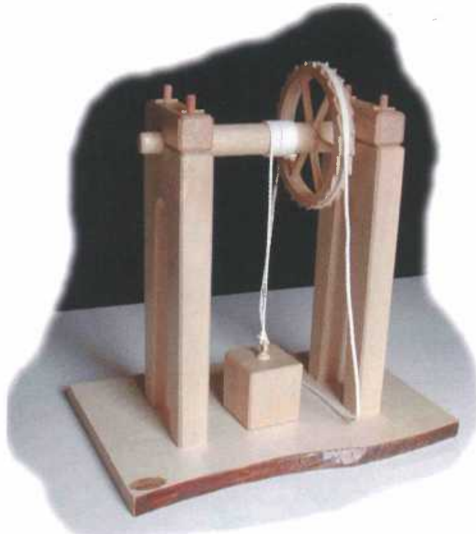
SRC.SI sistemske integracije

List sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

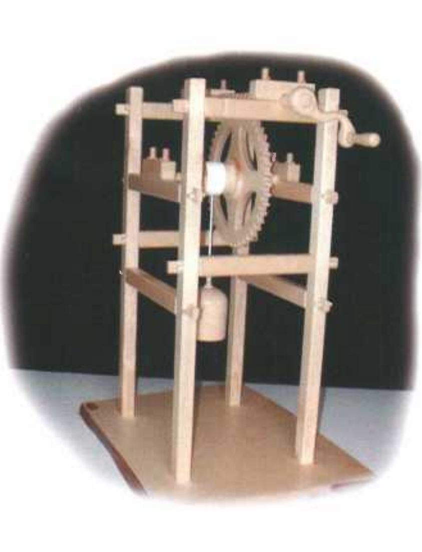
Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



slika 2.



slika 4.



slika 11.

slika 12.

Priložnostni kovanci ob 250-letnici rojstva Jurija Vege