

PRE SEK

31 (2003 – 04) 2

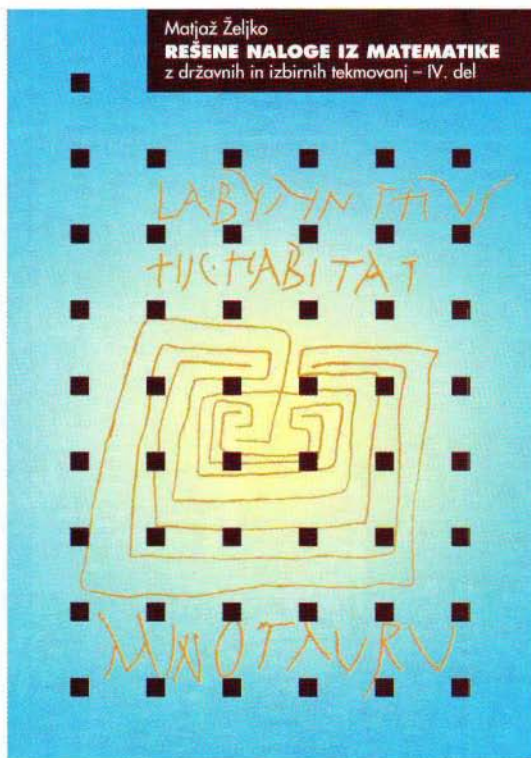
**MATEMATIČNA
TEKMOVANJA 2003**

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Matjaž Željko: REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE z državnih in izbirnih tekmovanj – IV. del, Knjižnica Sigma, DMFA–Založništvo.

Matematična tekmovanja imajo v svetu in v Sloveniji dolgo tradicijo. Ob pripravah nanje se naučimo veliko nove in zanimive matematike, bolje razumemo šolsko snov, na koncu pa vse skupaj popestrimo s tekmovalnim duhom in napeitim pričakovanjem rezultatov. Vsi vemo, da se naloge na matematičnih tekmovanjih zelo razlikujejo od tistih v šolskih preizkusih znanja. V šoli se preverja obvladovanje osnovnega znanja in rutinskih postopkov, na tekmovanjih pa občutek za matematični problem, domiselnost, včasih sposobnost za prav pesniški navdih. Zato za priprave niso primerne običajne šolske naloge, ampak predvsem naloge s prejšnjih tekmovanj.



V knjižnici Sigma je izšlo že več zbirk rešenih nalog z različnih matematičnih tekmovanj. Zadnja v tem sklopu, po duhu in zahtevnosti najbližja sedanjim tekmovanjem, je pričujoča, *REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE z državnih in izbirnih tekmovanj – IV. del*, ki zajema naloge z izbirnih tekmovanj od leta 1992 do leta 1996, republiških tekmovanj od leta 1988 do leta 1991 in državnih tekmovanj od leta 1992 do leta 1996. V njej je zbranih kar 240 zanimivih in izzivalnih nalog, za pomoč pri tistih, ki se izkažejo za pretrd oreh, pa so dodane še rešitve. Želim vam uspešno reševanje.

Petar Pavešić

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, leto 2003/04, številka 2, strani 65–136

VSEBINA**TEKMOVANJE
ZA VEGOVA
PRIZNANJA**

Pripravił Aleksander Potočnik	
38. področno tekmovanje za srebrna Vegova priznanja	66-70
Rešitve nalog s področnega tekmovanja	71-75
39. državno tekmovanje za zlata Vegova priznanja	76-77
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	77-79

**TEKMOVANJE
DIJAKOV
SREDNJIH
POKLICNIH
ŠOL**

Pripravili Duřanka Vrenčur in Anja Jesenek	
Regijsko tekmovanje	80-83
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	83-84
Državno tekmovanje	84-87
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	87

**TEKMOVANJE
DIJAKOV
SREDNJIH
TEHNIŠKIH IN
STROKOVNIH
ŠOL**

Pripravile Darinka Žizek, Polonca Pavlič in Irena Pivko	
3. regijsko tekmovanje	88-93
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	93-97
Državno tekmovanje	98-100
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	101-105

**TEKMOVANJE
IZ ZNANJA
POSLOVNE
MATEMATIKE**

Pripravila Sabina Gajšek	
1. šolsko tekmovanje	106-108
Rešitve 1. šolskega tekmovanja	109-112
1. državno tekmovanje	112-114
Rešitve 1. državnega tekmovanja	115-118

**MATEMATIČNO
TEKMOVANJE
SREDNJEŠOLCEV
SLOVENIJE**

Pripravił Matjaž Željko	
Izbirno tekmovanje	119-121
Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja	121-126
Državno tekmovanje	126-128
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	128-132
Izbirna testa za mednarodno matematično olimpiado . . .	132-133
Rešitve nalog z izbirnih testov za mednarodno matematično olimpiado	133-136

NA OVITKU

Gimnazija Želimlje (foto arhiv Gimnazije Želimlje)	I, IV
Knjiznica Sigma – Rešene naloge iz matematike z državnih in izbirnih tekmovanj – IV, del (Petar Pavešić)	II
Navodila sodelavcem Preseka za oddajo prispevkov	III

TEKMOVANJE ZA VEGOVA PRIZNANJA

38. področno tekmovanje za srebrna Vegova priznanja

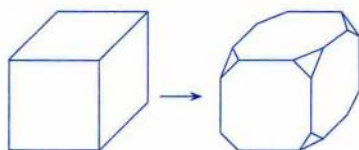
6. razred

A1. Jure in Miha sta imela skupaj 10 jabolok. Ko je Jure pojedel eno jabolko, Miha pa tri, sta jih imela oba enako. Koliko jabolok je imel Jure na začetku?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
(E) Nemogoče je določiti.

A2. Kocki smo na enak način porezali vsa oglišča, kot kaže slika. Koliko robov ima nastalo telo?

- (A) 24 (B) 28 (C) 32
(D) 36 (E) 40



A3. Katero izmed naštetih števil je 15-krat večje od $\frac{1}{25}$?

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) 0,6 (C) 0,15 (D) 0,12 (E) 0,04

A4. Koliko deliteljev ima zmnožek treh različnih praštevil?

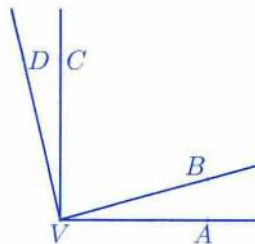
- (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 3

A5. Koliko štirimestnih naravnih števil, zapisanih s števki 1, 2, 5 in 8 (vsakič so uporabljene vse števke), je deljivih z 8?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8 (E) 10

A6. Kot $\sphericalangle DVA$ meri 138° . Poltrak VD je pravokoten na poltrak VB , poltrak VC pa je pravokoten na poltrak VA . Koliko je velikost kota $\sphericalangle CVB$?

- (A) 24° (B) 42° (C) 48° (D) 64° (E) 66°

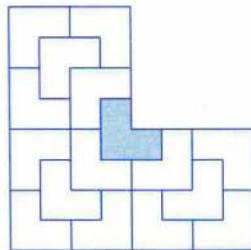


A7. Koliko je vrednost izraza $250 - 249 + 248 - 247 + 246 - \dots + 2 - 1$?

- (A) 124 (B) 125 (C) 126 (D) 225 (E) 250

A8. Logarjev vrt ima obliko črke L. Na osenčenem delu raste petersilj. Kolikšen del vrta je zasejan s petersiljem?

- (A) četrtnina tretjine (B) petina četrtnine
(C) petina tretjine (D) tretjina četrtnine
(E) četrtnina četrtnine



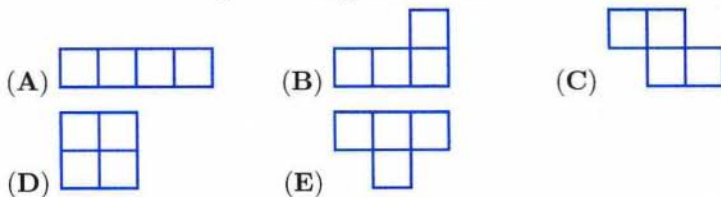
B1. Poišči ulomek z imenovalcem 20, ki je večji od $\frac{4}{13}$ in manjši od $\frac{5}{13}$.

B2. Žogo smo spustili padati z višine 32 m. Po vsakem odboju je dosegla polovico prejšnje višine. Ujeli smo jo v skrajni zgornji legi po petem odboju. Koliko metrov je prepotovala?

B3. Načrtaj trikotnik $\triangle ABC$ s podatki: $a = |BC| = 6$ cm, $v_a = 4$ cm, $t_a = 5$ cm. (Nariši obe rešitvi.)

7. razred

A1. Vsak lik na posamezni sliki je sestavljen iz štirih skladnih kvadratov. Kateri lik ima drugačen obseg od ostalih?



A2. Pri katerem paru števil je absolutna vrednost razlike med številoma največja?

- (A) $(-3, 8)$ (B) $(-5, -13)$ (C) $(1, 11)$
(D) $(4, -5)$ (E) $(-6, -15)$

A3. Pet ribičev v šestih dneh ujame 70 rib. Koliko rib ujame devet ribičev v desetih dneh?

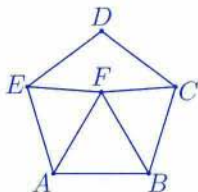
- (A) 900 (B) 630 (C) 420 (D) 210
(E) Noben od ponujenih odgovorov ni pravilen.

A4. Število ima obliko 679679...679. Koliko mest ima najmanjše število take oblike, ki je deljivo z 9?

- (A) 3 (B) 9 (C) 18 (D) 21 (E) 27

A5. V pravilnem petkotniku $ABCDE$ je narisan enakostranični trikotnik $\triangle ABF$, kot kaže slika. Koliko meri izbočeni kot $\angle EFC$?

- (A) 170° (B) 168° (C) 150° (D) 144° (E) 120°



A6. Za nekatera cela števila velja lastnost, da je kub števila enak temu številu. Koliko je celih števil s to lastnostjo?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) več kot 3

A7. Koliko naravnih števil x zadošča neenačbi $2x + 5 > 5x - 14$?

- (A) nobeno (B) 3 (C) 6 (D) 8 (E) več kot 8

A8. Koliko je vrednost izraza $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{2}}$?

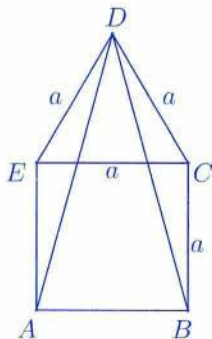
- (A) $3 \cdot \sqrt{2}$ (B) $2 \cdot \sqrt[4]{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt[3]{2}$ (E) $\sqrt{6}$

B1. Oče je zapustil trem sinovom 16 ha zemlje. Prvi sin je dobil 35 % zemlje, drugi pa trikrat več kot tretji. Koliko hektarov zemlje je dobil vsak od sinov?

B2. Izračunaj vrednost izraza

$$\left(-3 \cdot \sqrt{5^2 - 2^4}\right) : \sqrt[3]{27} + \frac{-2 : \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}}{-2\frac{1}{2} + 2,7 : 3}.$$

B3. Petkotnik $ABCDE$ je sestavljen iz kvadrata s stranico a in enakostraničnega trikotnika, kot kaže slika. Z a izrazi polmer trikotniku $\triangle ABD$ očrtane krožnice. Utemelji.



8. razred

A1. Tina je vsak dan prebrala dvakrat več strani knjige kot prejšnji dan. V desetih dneh je knjigo prebrala. Koliko dni je potrebovala, da je prebrala polovico knjige?

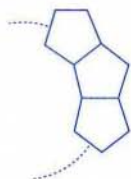
- (A) 4 dni (B) 5 dni (C) 6 dni (D) 8 dni (E) 9 dni

A2. Dva sendviča in sok stanejo skupaj 620 tolarjev. Štirje sendviči in trije sokovi stanejo skupaj 1360 tolarjev. Koliko staneta skupaj sendvič in sok?

- (A) 120 tolarjev (B) 250 tolarjev
(C) 370 tolarjev (D) 740 tolarjev
(E) Noben od ponujenih odgovorov ni pravilen.

A3. Iz skladnih pravih petkotnikov želimo sestaviti obroč na način, ki ga prikazuje skica. Prvi trije petkotniki so že narisani. Koliko petkotnikov je še potrebnih, da bo obroč sklenjen?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

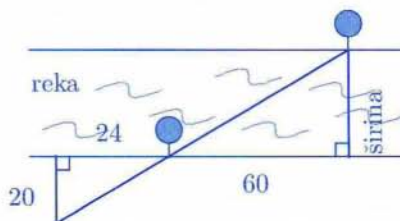


A4. Število a je sedemkrat večje od števila b . Za koliko je število a večje od števila b ?

- (A) za 700 % (B) za 600 % (C) za 350 % (D) za 70 % (E) za 60 %

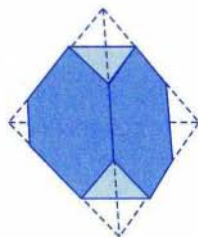
A5. Na vsakem bregu reke raste po eno drevo. Skica prikazuje, kako smo izmerili širino reke. Označene izmerjene dolžine so v metrih. Koliko metrov je široka reka?

- (A) 16 m (B) 40 m (C) 48 m
(D) 50 m (E) 60 m



A6. Pravilnemu četvercu (tetraedru) z robovi, dolgimi 6 cm, smo porezali vsa oglišča in dobili telo na sliki. Trikotne ploskve so vse enakostranični trikotniki, ne nujno skladni. Koliko je skupna dolžina vseh robov nastalega telesa?

- (A) 28 cm (B) 30 cm (C) 36 cm
(D) 48 cm (E) Nemogoče je določiti.

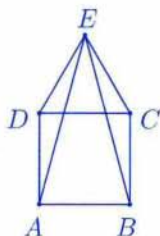


A7. Tri točke, ki ne ležijo na isti premici, določajo tri oglišča paralelograma. Koliko različnih možnosti je za četrto oglišče paralelograma?

- (A) tri (B) dve (C) ena
(D) nobena (E) Nemogoče je določiti.

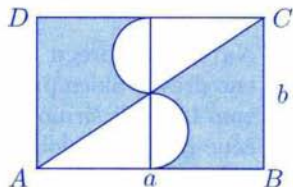
A8. Kvadrat $ABCD$ in enakostranični trikotnik $\triangle DCE$ ležita v isti ravnini (glej sliko). Koliko je velikost kota $\sphericalangle AEB$?

- (A) 15° (B) $22^\circ 30'$ (C) 27°
(D) 30° (E) 45°



B1. Trimestno število ima števko na mestu stotic za 1 večjo od števke na mestu desetic, števka na mestu enic pa je enaka vsoti števk na mestih desetic in stotic. Če število deliš z vsoto njegovih števk, dobiš količnik 31 in ostanek 3. Katero je to število? (Zapiši ustrezno enačbo in jo reši.)

B2. Izrazi ploščino osenčenega dela pravokotnika $ABCD$ s stranicama a in b . Kolikšna je ploščina, če je $a = 6$ cm in $b = 4$ cm?



B3. Točke A , B , C so oglišča trikotnika $\triangle ABC$. Oglišče A je presečišče premic z enačbama $y = -2$ in $3x - 4y - 2 = 0$. Oglišče B je presečišče ordinatne osi in premice z enačbo $y = -2$. Oglišče C je presečišče ordinatne osi in premice z enačbo $3x - 4y - 2 = 0$.

- a) Določi koordinate oglišč trikotnika $\triangle ABC$.
b) Izračunaj obseg in ploščino trikotnika $\triangle ABC$.
c) Zapiši enačbo nosilke višine na stranico b ($b = AC$).

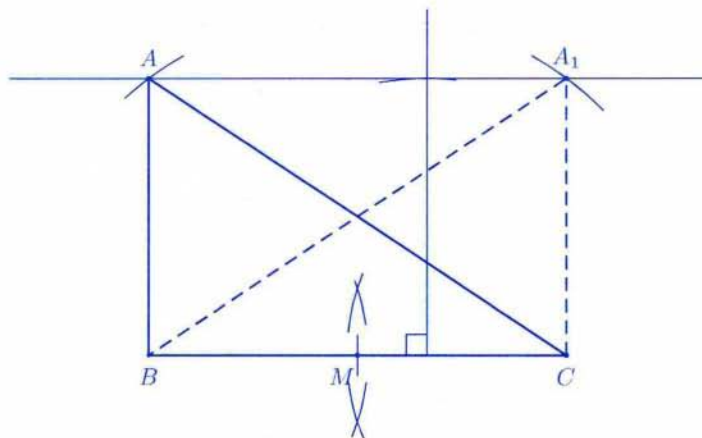
Rešitve nalog s področnega tekmovanja

6. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
odgovor	C	D	B	A	C	B	B	E

- A3.** Število, ki je 15-krat večje od $\frac{1}{25}$, je $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$.
- A4.** Število $n = p \cdot r \cdot s$, kjer so p , q in r različna praštevila, ima osem deliteljev, in sicer 1, p , q , r , pq , pr , qr in pqr .
- A5.** Števila, ki so deljiva z 8, so soda, zato se končajo s sodo števk. Z danimi števki lahko sestavimo 12 sodih štirimestnih števil (pri vsakem številu uporabimo vse števke): 1258, 1528, 2158, 2518, 5128, 5218, 1582, 1852, 5182, 5812, 8152 in 8512, a le štiri so deljiva z 8. To so 1528, 5128, 8152 in 6512.
- A6.** Ker je $\sphericalangle DVA = 138^\circ$ in $\sphericalangle CVA = 90^\circ$, je $\sphericalangle DVC = 48^\circ$. Analogno pridemo do sklepa, da je $\sphericalangle BVA = 48^\circ$. Tako je $\sphericalangle CVB = \sphericalangle CVA - \sphericalangle BVA = 42^\circ$.
- A7.** Pišimo $(250 - 249) + (248 - 247) + (246 - 245) + \dots + (2 - 1)$, pa opazimo, da je šeststih 125 enic. Vsota je torej 125.
- A8.** Logarjev vrt, ki ima obliko črke L, je razdeljen na 16 manjših L-jev. En tak L je torej četrtnina četrtnine (šestnajstina) celega vrta.
- B1.** Za ulomek $\frac{x}{20}$ velja odnos $\frac{4}{13} < \frac{x}{20} < \frac{5}{13}$. Razširimo ulomke na najmanjši skupni imenovalc: $\frac{80}{260} < \frac{x \cdot 13}{260} < \frac{100}{260}$. Odnos velja, če je $x = 7$, saj je $\frac{80}{260} < \frac{91}{260} < \frac{100}{260}$. Iskani ulomek je $\frac{7}{20}$.
- B2.** Žogica prepotuje skupno $32 \text{ m} + 2 \cdot 16 \text{ m} + 2 \cdot 8 \text{ m} + 2 \cdot 4 \text{ m} + 2 \cdot 2 \text{ m} + 1 \text{ m} = 32 \text{ m} + 32 \text{ m} + 16 \text{ m} + 8 \text{ m} + 4 \text{ m} + 1 \text{ m} = 93 \text{ m}$.
- B3.** Najprej narišemo stranico BC , dolgo 6 cm. Na razdalji 4 cm narišemo vzporednico k BC . Poiščemo razpolovišče (središče) stranice BC , ki ga označimo z M . Ker je t_a dolga 5 cm, je oglišče A od točke M oddaljeno 5 cm, zato narišemo krožni lok s središčem v točki M in polmerom 5 cm. Kjer le-ta preseka narisano vzporednico, je točka A . Ker dvakrat preseka vzporednico, imamo še možnost A_1 in torej dve rešitvi: $\triangle ABC$ in $\triangle A_1BC$. (Slika je na naslednji strani.)



7. razred

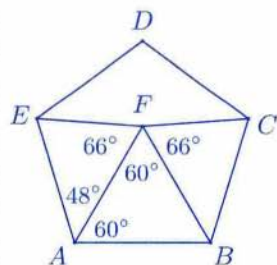
Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
odgovor	D	A	D	E	B	D	C	B

A3 Najbolje, da premislimo, koliko rib bi ujel en ribič v enem dnevu: število 70 delimo s 5 in 6, pa imamo $\frac{70}{5 \cdot 6}$. Nato množimo z 9 in 10: $\frac{70 \cdot 9 \cdot 10}{5 \cdot 6} = 210$.

A4 Dano število je sestavljeno iz "delčkov" oblike 679. Ko ugotavljamo deljivost z 9, lahko števko 9 zanemarimo, opazujemo le vsoto števk 6 in 7. V vsakem delčku je opazovana vsota enaka 13. Vprašamo se, koliko delčkov moramo zapisati, da bo vsota šestic in sedmic, ki nastopajo v nastalem številu, deljiva z 9. Ker sta si števili 13 in 9 tuji, moramo vzeti vsaj devet takih delčkov in ker je vsak delček trimesten, je iskano število 27-mestno.

A5. Premislimo ob sliki. Notranji kot pravilnega petkotnika meri 108° . Trikotnik ABF je enakostraničen, zato merijo vsi njegovi notranji koti 60° . Trikotnika EFA in FCB sta enakokraka ($|EA| = |AF| = |FB| = |BC|$). Tako je najprej $\angle EAF = \angle FBC = \angle ABC - \angle ABF = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$, nato pa $\angle EFA = \angle CFB = \frac{1}{2}(180^\circ - 48^\circ) = 66^\circ$. Tako imamo $\angle EFC = 360^\circ - 2 \cdot 66^\circ - 60^\circ = 168^\circ$.



A6. Taka števila so tri: -1 , 0 in 1 .

A7. Neenačbo $2x + 5 > 5x - 14$ preuredimo v $3x < 19$, od koder je očitno, da ji zadoščajo naravna števila $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

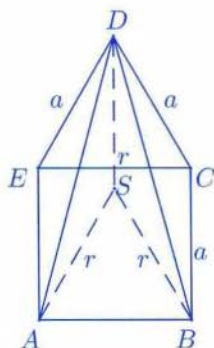
A8. Izraz preuredimo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$.

B1. Prvi sin je dobil 35 % od 16 ha = 5,6 ha. Ker je drugi sin dobil trikrat več zemlje kot tretji, je tretji sin dobil četrtno ostanka, to je $(16 \text{ ha} - 5,6 \text{ ha}) : 4 = 2,6 \text{ ha}$, drugi pa tri četrtine ostanka: $3 \cdot 2,6 \text{ ha} = 7,8 \text{ ha}$.

B2. Računajmo:

$$\begin{aligned} & \left(-3 \cdot \sqrt{5^2 - 2^4} \right) : \sqrt[3]{27} + \frac{-2 : \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}}{-2\frac{1}{2} + 2,7 : 3} = \\ & = -3 \cdot \sqrt{9} : 3 + \frac{-2 : \sqrt{\frac{25}{16}}}{-\frac{5}{2} + \frac{9}{10}} = -3 + \frac{-2 : \frac{5}{4}}{\frac{-25+9}{10}} = -3 + \frac{-\frac{8}{5}}{-\frac{16}{10}} = -2. \end{aligned}$$

B3. Ker je trikotnik ADE enakokrak ($|AE| = |DE| = a$), je $\sphericalangle DAE = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$ in $\sphericalangle ADE = 15^\circ$. Tudi trikotnik ABD je enakokrak ($|AD| = |BD|$), zato je $\sphericalangle BAD = 75^\circ$, $\sphericalangle ABD = 75^\circ$, $\sphericalangle ADB = 30^\circ$. Naj bo S središče enakokrakemu trikotniku ABD očrtane krožnice. Le-to leži na simetrali osnovnice AB , ki sovpada s simetralo kota ob vrhu. Daljica DS torej razpolavlja kot ADB . Velja $|AS| = |SD| = |SB| = r$ (polmer trikotniku ABD očrtane krožnice), zato je $\sphericalangle SAD = \sphericalangle ADS = 15^\circ$. Tako je trikotnik ABS enakostraničen s stranico $r = a$, kajti $\sphericalangle BAS = \sphericalangle ABS = 60^\circ$. Polmer očrtane krožnice je torej enak stranici kvadrata.



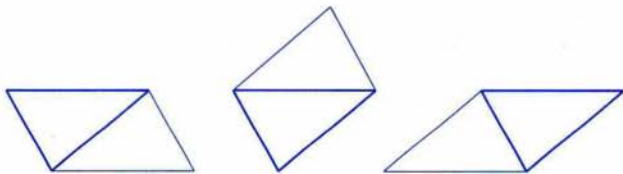
8. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
odgovor	E	C	B	B	D	C	A	D

A2. Če od štirih sendvičev in treh sokov odvezamemo dva sendviča in en sok, nam ostanejo dva sendviča in dva sokova, zato dva sendviča in dva sokova skupaj stanejo $1360 - 620 = 740$ tolarjev. Sendvič in sok staneta skupaj $740 : 2 = 370$ tolarjev.

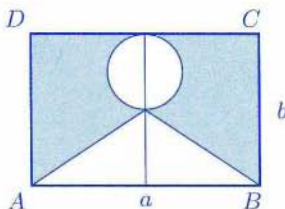
- A3.** S skice v nalogi sklepamo, da pri sestavljanju obroča s skladnimi pravilnimi petkotniki nastaja pravilni večkotnik. Po ena stranica vsakega petkotnika je hkrati stranica tega večkotnika. Ker je notranji kot petkotnika enak 108° , je notranji kot večkotnika enak $360^\circ - 2 \cdot 108^\circ = 144^\circ$. Če dve sosednji oglišči nastajajočega večkotnika povežemo s središčem tega večkotnika, dobimo enakokraki trikotnik, s kotom 36° ob vrhu. To pomeni, da z desetimi petkotniki res sklenemo obroč, saj je $10 \cdot 36^\circ = 360^\circ$, in pri tem oblikujemo pravilni desetkotnik. Ker so trije petkotniki že postavljeni, jih potrebujemo še sedem.
- A4.** Ker je $a = 7 \cdot b$, je a za $6 \cdot b$ večje od b , to je za 600 %.
- A5.** Narisana pravokotna trikotnika sta si podobna, zato zapišemo sorazmerje $20 : 24 = x : 60$, pri čemer nam x pomeni širino reke. Izrazimo $24 \cdot x = 20 \cdot 60$ in od tod $x = 50$ m.
- A6.** Premislimo, kaj imamo ob posameznem oglišču četrverca potem, ko mu na opisani način porežemo oglišče. V resnici smo ob oglišču odrezali manjši četrvec, zato je obseg trikotne ploskve, ki jo oblikujejo novonastali robovi telesa, enak vsoti dolžin tistih treh robov manjšega četrverca, ki se stikajo v skupnem vrhu (oglišču, ki smo ga porezali). Ker enak premislek velja za vsako oglišče, ne glede na to, ali so trikotne ploskve med seboj skladne ali ne, je skupna dolžina vseh robov nastalega telesa enaka vsoti dolžin robov prvotnega četrverca, torej $6 \cdot 6$ cm = 36 cm.
- A7.** Tri točke, ki ne ležijo na isti premici, so oglišča trikotnika. Če želimo trikotnik dopolniti v paralelogram tako, da so oglišča trikotnika tri izmed štirih oglišč paralelograma, imamo tri možnosti, kot lahko vidimo na spodnjih slikah.



- A8.** S slike v nalogi razberemo, da je $\angle ADE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Trikotnik AED je enakokrak, zato je $\angle DAE = \angle DEA = 15^\circ$. Od tod sklepamo, da je $\angle EAB = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. Ker je tudi trikotnik ABE enakokrak, velja $\angle AEB = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

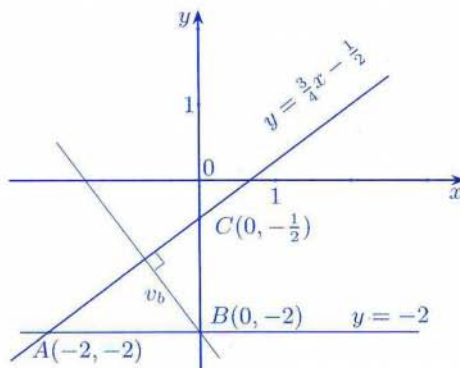
B1. Označimo število desetic z x . Število stotic je tedaj $x+1$, število enic pa $2x+1$. Vsota števk števila je $4x+2$. Ustrezna enačba je npr. $100(x+1)+10x+(2x+1) = 31(4x+2)+3$ (ali $\frac{100(x+1)+10x+(2x+1)}{4x+2} = 31 + \frac{3}{4x+2}$). Od tod izračunamo $x = 3$. Število stotic je 4, število enic 7, iskano število pa 437.

B2. Če primerjamo sliko v nalogi in sliko na desni, vidimo, da je ploščina osenčenega dela pravokotnika na obeh enaka, zato si bomo pomagali kar s sliko na desni. Ploščina pravokotnika je $p_p = a \cdot b$. Neosenčeni trikotnik ima ploščino $p_t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$, neosenčeni krog pa $p_k = \pi\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{16}$. Ploščina osenčenega dela



je $p = ab - \frac{ab}{4} - \frac{\pi b^2}{16} = \frac{12ab - \pi b^2}{16}$. Za $a = 6$ cm in $b = 4$ cm dobimo $p_o = (18 - \pi) \text{ cm}^2$ ($\doteq 14,86 \text{ cm}^2$).

B3. Oglišča trikotnika so $A(-2, -2)$, $B(0, -2)$ in $C(0, -\frac{1}{2})$, njegov obseg pa $o = |AB| + |BC| + |AC|$, pri čemer je $|AC| = \sqrt{4 + (\frac{3}{2})^2} = 2,5$. Tako je torej $o = 2 + 1,5 + 2,5 = 6$ dolžinskih enot. Ploščina trikotnika je $p = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| = 1,5$ ploščinskih enot.



Smerni koeficient nosilke stranice b je $k = \frac{3}{4}$, zato je smerni koeficient nosilke višine na stranico b enak $k_1 = -\frac{4}{3}$. Enačba nosilke višine na stranico b ima obliko $y = -\frac{4}{3}x + n$. Ker preseka ordinatno os v točki B z ordinato -2 , je $n = -2$ in imamo $y = -\frac{4}{3}x - 2$.

39. državno tekmovanje za zlata Vegova priznanja

7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\sqrt{9} + (2^2)^2 \cdot \frac{5^{(-15+3 \cdot 7 + \frac{12}{6})}}{\left(\sqrt{13 + \sqrt{139 + \sqrt{25}}}\right)^5}.$$

2. 17-članski kolektiv izdelava na dan določeno število izdelkov. V ponedeljek dveh delavcev ni bilo na delo, vendar bi navzoči delavci radi izdelali predvideno število izdelkov. Koliko odstotkov izdelkov več je moral izdelati vsak od navzočih delavcev?
3. Na travniku se vsak dan pasejo krave, trava pa ponovno ves čas enakomerno raste. Osem krav bi popaslo vso travo (s prirastom vred) v desetih dneh, štiri krave pa v tridesetih dneh. Vsaka krava pojé dnevno enako količino trave. V kolikšnem času bi vso travo popaslo dvanaest krav, če trava ne bi ponovno rasla?
4. Dan je enakokraki trapez $ABCD$ z osnovnicama $a = |AB|$, $c = |CD|$ in višino $v = |CE|$. Kolikokrat je ploščina trapeza $ABCD$ večja od ploščine trikotnika AEC ? Utemelji.
5. V notranjosti enakokrakega trikotnika ABC ($|AC| = |BC|$, $\sphericalangle ACB = 100^\circ$) leži točka T tako, da merita kota $\sphericalangle TAC = 10^\circ$ in $\sphericalangle ACT = 20^\circ$. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle CTB$.

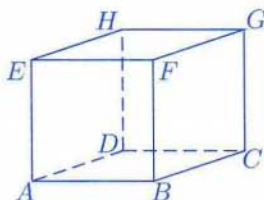
8. razred

1. Kolesar je ob 14.00 odpeljal iz kraja A v kraj B . Vozil je s hitrostjo $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. V kraju B je počakal 20 minut in se s hitrostjo $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ po isti poti vrnil v kraj A , kamor je prispel ob 18.00. Izračunaj, koliko kilometrov je prevozil kolesar.
2. Izračunaj vrednosti števila m , tako da se bosta premici z enačbama $(2m+3)y + m + 6 = 0$ in $(2m+1)x + (m-1)y + m - 2 = 0$ sekali na ordinatni osi.

3. Studenec teče v jezero. Vsak dan priteče v jezero enaka količina vode. 183 konj bi popilo vso vodo v enem dnevu (torej bi v 24 urah izpraznili jezero). 37 konj bi izpraznilo jezero v petih dneh. V kolikšnem času bi popil vso vodo en konj?
4. Dolžina daljice AB na sliki je 2 cm. Koliko kvadratnih centimetrov meri ploščina krožnega kolobarja?



5. Kocko $ABCDEFGH$ z robom a presekamo z ravnino skozi središča (razpolovišča) robov AB , BC , CG , GH , HE in AE . Ploščina preseka je $75\sqrt{3}$ cm². Izračunaj površino kocke.



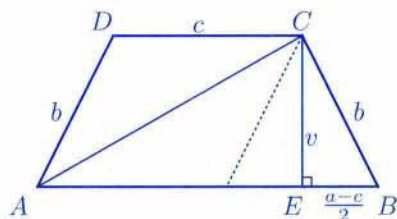
Rešitve nalog državnega tekmovanja

7. razred

1. Računajmo: $\sqrt{9} + (2^2)^2 \cdot \frac{5^{(-15+3\cdot 7+\frac{12}{6})}}{\left(\sqrt{13 + \sqrt{139 + \sqrt{25}}}\right)^5} = 3 + 16 \cdot \frac{5^8}{5^5} = 3 + 2^4 \cdot 5^3 = 3 + 2 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 3 + 2000 = 2003$.
2. Označimo z a število izdelkov, ki jih izdelava na dan vsak delavec 17-članskega kolektiva. Vseh 17 delavcev izdelava $17a$ izdelkov na dan. Ko sta dva delavca odsotna, vsak izmed 15 delavcev izdelava $(a + x)$ izdelkov na dan. Iz $15(a + x) = 17a$ dobimo $15x = 2a$ oziroma $x = \frac{2}{15}a = 0,1333\dots a$. Vsak izmed navzočih delavcev mora izdelati 13,3 % več izdelkov.
3. Označimo začetno količino trave s t , enodnevni prirast trave (količino trave, ki zraste v enem dnevu) pa s p . Osem krav poje v desetih dneh začetno količino t in 10 enodnevnih prirastov p . Torej $80(8 \cdot 10)$ krav njih dnevnih obrokov pomeni $t + 10p$ trave. Ker bi štiri krave popasle vso travo v tridesetih dneh, v tem času pojedjo začetno količino t in 30

enodnevnih prirastov p , tako da $120 (4 \cdot 30)$ kravjih dnevnih obrokov pomeni $t + 30p$ trave. Sklepamo, da je 40 kravjih dnevnih obrokov enako količini $20p$ trave oziroma da enodnevni prirast trave zadošča za dve kravi za en dan. Ker vemo, da osem krav poje v desetih dneh začetno količino in prirast in da se dve kravi najesta s prirastom, bi šest krav pojedlo začetno količino v desetih dneh, dvanaest krav pa v petih dneh. Če trava ne bi sproti rasla, bi torej travnik popaslo dvanaest krav v petih dneh.

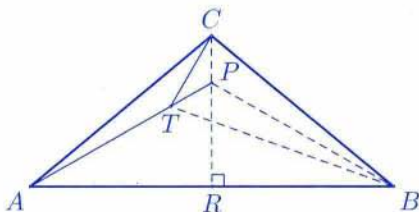
4. Ker je $|AE| = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2}$ in $|EC| = v$, je ploščina trikotnika AEC enaka $p_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot v$. Ploščina trapeza je $p = \frac{a+c}{2} \cdot v$ in je torej dvakrat večja



od ploščine trikotnika AEC .

Premislamo lahko tudi drugače. Če podaljšamo stranico c preko D do A_1 , ki je nožišče pravokotnice iz oglišča A , dobimo trikotnik ADA_1 , ki je ploščinsko enak trikotniku BCE . Tako je ploščina trapeza $ABCD$ enaka ploščini pravokotnika $AECA_1$, ta je pa dvakrat večja od ploščine trikotnika AEC , saj je AC diagonalna pravokotnika $AECA_1$.

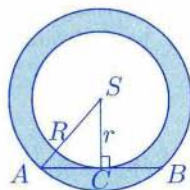
5. Postavimo točko T po navodilih naloge ($\sphericalangle TAC = 10^\circ$ in $\sphericalangle ACT = 20^\circ$). Narišimo višino iz oglišča C z nožiščem R , ki je hkrati simetrala kota pri C . Daljico AT podaljšamo, da seka višino v točki P . Teda je $\sphericalangle TCR = \sphericalangle ACR - \sphericalangle ACT = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$ in $\sphericalangle APC = 180^\circ - 10^\circ - 50^\circ = 120^\circ$. Potem pa je $\sphericalangle PTC = 30^\circ$ in trikotnik CTP je enakokrak, tako da je $|CP| = |TP|$. Nadalje je $\sphericalangle PAR = 30^\circ = \sphericalangle PBR$, zato je $\sphericalangle APB = 120^\circ$. Potem pa sta trikotnika PTB in PCB skladna, saj se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima. Tako je $\sphericalangle PTB = \sphericalangle PCB = 50^\circ$ in končno $\sphericalangle CTB = \sphericalangle CTP + \sphericalangle PTB = 30^\circ + 50^\circ = 80^\circ$.



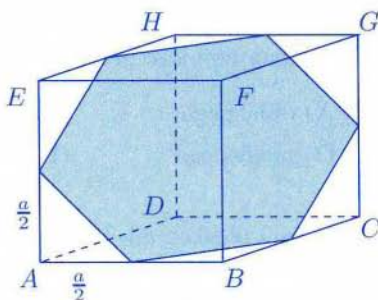
8. razred

1. Čas vožnje je štiri ure. Označimo dolžino poti v eno smer z x . Dobimo enačbo: $\frac{x}{24} + \frac{1}{3} + \frac{x}{20} = 4$ (ali $\frac{x}{24} + \frac{x}{20} = 3\frac{2}{3}$), ki ima rešitev $x = 40$. Kolesar je prevozil 80 km.

2. Ker se premici sekata na ordinatni osi, je abscisa presečišča enaka 0. Upoštevamo torej $x = 0$ v drugi enačbi in izrazimo $y = \frac{2-m}{m-1}$. To vstavimo v prvo enačbo: $(2m+3) \cdot \frac{2-m}{m-1} + m + 6 = 0$ in dobimo $-m^2 + 6m = 0$ oziroma $m^2 - 6m = 0$, kar razstavimo v $m(m-6) = 0$. Dobimo dve rešitvi: $m_1 = 0$ in $m_2 = 6$.
3. Označimo začetno količino (prostornino) vode v jezeru z V_j , količino (prostornino) vode, ki v jezero priteče v enem dnevu, pa z V_d . Ker bi 183 konj popilo vso vodo v enem dnevu, to je količino $V_j + V_d$, en konj popije $\frac{V_j + V_d}{183}$ vode na dan. V petih dneh je v jezeru $V_j + 5 \cdot V_d$ vode. Ker bi to količino popilo 37 konj v petih dneh, en konj v tem času popije $\frac{V_j + 5 \cdot V_d}{37}$ vode oziroma $\frac{V_j + 5 \cdot V_d}{5 \cdot 37}$ na dan. Izenačimo $\frac{V_j + V_d}{183} = \frac{V_j + 5 \cdot V_d}{5 \cdot 37}$ in od tod izrazimo $V_j = 365 \cdot V_d$ oziroma $V_d = \frac{V_j}{365}$. Denimo, da en konj popije vso vodo v x dneh. V tem času je v jezeru $V_j + x \cdot V_d$ vode, en konj pa je v istem času popije $\frac{V_j + V_d}{183} \cdot x$. Tako velja $V_j + x \cdot \frac{V_j}{365} = \frac{V_j + \frac{V_j}{365}}{183} \cdot x = \frac{366x \cdot V_j}{183 \cdot 365}$, od koder izračunamo $x = 365$ dni. En konj bi popil vso vodo v enem letu.
4. Narišimo polmer R večjega kroga in polmer r manjšega kroga. Ker je $|AB| = 2$ cm oziroma $|AC| = 1$ cm, velja $R^2 = r^2 + 1$ oziroma $R^2 - r^2 = 1$. Ploščina krožnega kolobarja je $p_k = \pi(R^2 - r^2) = \pi \doteq 3,14 \text{ cm}^2$.



5. Presek je pravilni šestkotnik s stranico $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ in ploščino $p = 6 \cdot (\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$. Tako je $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$, od koder izračunamo $a = 10$ cm. Površina kocke je $P = 600 \text{ cm}^2$.



**TEKMOVANJE DIJAKOV SREDNJIH
POKLICNIH ŠOL V ZNANJU MATEMATIKE****Regijsko tekmovanje****I. del**

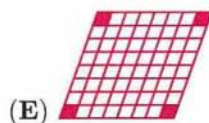
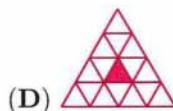
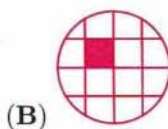
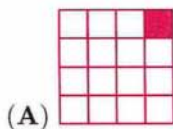
1. Če gre Miha v šolo peš, nazaj pa se pelje s kolesom, porabi za pot od doma do šole in nazaj 1 h 30 min. Če se v obe smeri pelje s kolesom, porabi 30 min. Koliko časa porabi, če gre v šolo in nazaj peš?
(A) 1 h 15 min (B) 2 h (C) 2 h 30 min
(D) 2 h 45 min (E) 3 h 30 min

2. Katarina se je naučila brati. Zelo rada bere pravljice, ki imajo veliko ilustracij in ne preveč besedila. Za rojstni dan je dobila pet takih enako debelih knjig. Prvi dan je prebrala 15 strani. Razmerje med številom strani, ki jih je prebrala prvi dan, in številom strani, ki jih je prebrala drugi dan, je 5 : 4. Prebrati mora še 33 strani. Koliko strani ima vsaka knjiga?
(A) 60 (B) 12 (C) 18 (D) 42
(E) Nemogoče je določiti.

3. Jaka je opolnoči pogledal skozi okno in opazil, da dežuje. Kakšnega vremena ne more pričakovati 72 ur kasneje?
(A) oblačnega (B) deževnega (C) sončnega
(D) meglenega (E) nič od navedenega

4. Zgornja ploskev mize ima obliko kvadrata s stranico 80 cm. Namizni prt pravokotne oblike povsod visi 20 cm čez rob mize. Prt bomo obrobili s čipko. Koliko čipke potrebujemo?
(A) 4 m (B) 4,8 m (C) 48 cm (D) 64 dm (E) 3,2 m

5. Na katerem liku ni pobarvana $\frac{1}{16}$ lika?



6. Srečko je pri igri na srečo zadel 500 000 tolarjev, vendar mora plačati davek v višini $\frac{1}{5}$ tega zneska ter od preostanka nameniti 10 % v dobrodelne namene. Koliko mu ostane?

- (A) 90000 tolarjev (B) 400000 tolarjev (C) 410000 tolarjev
(D) 360000 tolarjev (E) 100000 tolarjev

7. Na košarkarski tekmi so gostje zadeli 24 košev manj kot domačini. Razmerje med številom košev, ki so jih zadeli domačini, in številom košev gostov je bilo 5 : 3. Koliko košev so zadeli domačini?

- (A) 54 (B) 48 (C) 60 (D) 12 (E) 36

8. V cvetličarni imajo rdeče in rumene vrtnice, rdeče gerbere in modre irise ter dve vrsti zelenja. Na koliko različnih načinov lahko g. Pozornik naroči šopek, če se je odločil za sedem rož enake vrste in enake barve ter za eno zelenje?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 32 (E) 7

9. Janez je nameraval kupiti 50 m električnega kabla. Trgovec je dolžino kabla izmeril z metrsko palico, ki je bila za 1 cm prekratka. Koliko kabla je Janez dobil?

- (A) 50 m (B) 49 m (C) 49,5 m (D) 45 m (E) 47,5 m

10. Tin in Sara sta jeseni zaklenila kolo s ključavnico, ki se zaklepa s šestmestnim številom, in to število pozabila. Tin se spomni, da je bilo število deljivo s 6, Sara pa ve, da so bile prve štiri številke tega števila po vrsti 8, 6, 0, 5. Kateri par števk jima lahko odklene ključavnico?
- (A) 6, 6 (B) 3, 5 (C) 1, 4 (D) 4, 1
 (E) Takih števk ni.

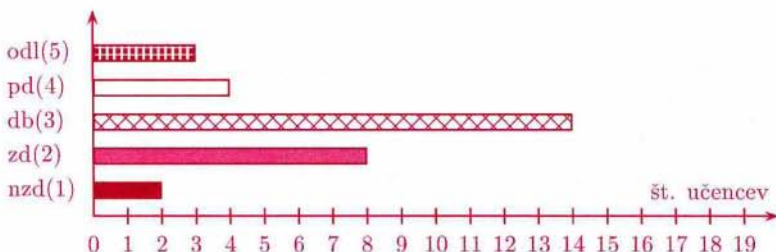
II. del

1. Maja je večkrat povabila 15 sošolk na sok.
- A. Prejšnjo soboto je pol deklet popilo po 2 dl, pol pa po 3 dl soka. Koliko litrov soka so v soboto popile vse skupaj z Majo?
- B. V nedeljo so priredile piknik. Bilo je zelo vroče, zato je vsako dekle popilo 0,5 l soka. Koliko litrov soka so v nedeljo popile vse skupaj z Majo?
- C. Včeraj je vsako dekle med pogovorom najprej popilo po 2 dl soka. Kasneje sta se jim pridružila Majina starša in so si vsi skupaj ogledali fotografije s piknika. Med ogledom fotografij je vsak izmed njih popil še po 1,5 dl soka. Koliko litrov soka so včeraj popili vsi skupaj?
2. Jata golobov je letela, s tal pa jih je opazoval neki golob in rekel: "Koliko jih je! Zagotovo jih je sto!"
 Jata je odgovorila: "Ni nas sto. Če bi nas bilo še enkrat toliko, kolikor nas je, in še polovica našega števila in še polovica te polovice, in če bi bil z nami še ti, bi nas bilo sto."
 Koliko golobov je v jati?
3. Ana je imela na veržici obesek v obliki pravokotnika. Ena stranica je merila 1,6 cm, druga stranica pa 1,2 cm. Potem se ji je del obeska pri enem oglišču odlomil, kot kaže slika. Zlatar je obesek na enak način zbrusil še pri ostalih treh ogliščih, da je nastal manjši štirikotni obesek.



- A. Kako se imenuje nastali štirikotnik?
- B. Izračunaj ploščino novega obeska.
- C. Koliko odstotkov ploščine starega obeska predstavlja ploščina novega obeska?

4. 3. c razred je ob koncu ocenjevalnega obdobja pri matematiki dosegel naslednji uspeh:



- A. Koliko dijakov je v razredu?
 B. Kolikšna je povprečna ocena pri matematiki v razredu? Rezultat zaokroži na dve decimalki.
 C. Kolikšen odstotek učencev je imel oceno višjo od 2?
 D. Koliko zadostno ocenjenih učencev bi moralo imeti oceno 3, da bi bila povprečna ocena v razredu 3?

Rešitve nalog z regijskega tekmovanja

I. Pravilni odgovori so zbrani v preglednici.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	B	B	D	C	B	C	C

II/1. (A) Vseh deklet skupaj je 16. V soboto so popile $8 \cdot 2 \text{ dl} + 8 \cdot 3 \text{ dl} = 40 \text{ dl} = 4 \text{ l}$ soka.

(B) V nedeljo so popile $16 \cdot 0,5 \text{ l} = 8 \text{ l}$ soka.

(C) Med pogovorom so spile $16 \cdot 2 \text{ dl} = 32 \text{ dl}$ soka. Ko sta se jim pridružila še starša, je teh 18 oseb spilo še $18 \cdot 1,5 \text{ dl} = 27 \text{ dl}$ soka. Tega dne so skupaj spili $32 \text{ dl} + 27 \text{ dl} = 59 \text{ dl} = 5,9 \text{ l}$ soka.

II/2. Označimo število golobov v jati z x . Tedaj je $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$, kar nam da $x = 36$. V jati je bilo 36 golobov.

II/3. (A) Nastali lik je romb. (Pravilna odgovora sta tudi paralelogram in deltoid.)

(B) Označimo $a = 1,2 \text{ cm}$ in $b = 1,6 \text{ cm}$. Pri vsakem oglišču je zlatar zbrusil trikotnik s ploščino $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = 0,24 \text{ cm}^2$. Stari obesek je

imel ploščino $ab = 1,92 \text{ cm}^2$, novi pa ima ploščino $1,92 - 4 \cdot 0,24 = 0,96 \text{ cm}^2$.

(C) Ploščina novega obeska meri $\frac{0,96}{1,92} = 0,5 = 50\%$ ploščine starega.

II/4. (A) V razredu je $3 + 4 + 14 + 8 + 2 = 31$ dijakov.

(B) Povprečna ocena pri matematiki je $\frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 14 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{31} = 2,94$.

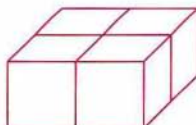
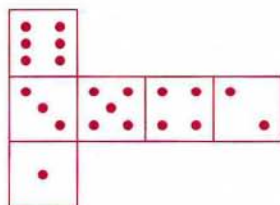
(C) Takih učencev je $\frac{5+4+4}{31} \approx 0,68 = 68\%$.

(D) Označimo iskano število učencev z x . Tedaj je $\frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + (14+x) \cdot 3 + (8-x) \cdot 2 + 2 \cdot 1}{31} = 3$, kar nam da $x = 2$.

Državno tekmovanje

I. del

- Profesor matematike po nekaj letih sreča dijaka, ki je imel ves čas šolanja probleme z matematiko. Začudi se, ko vidi, da se fant vozi z dragim športnim avtomobilom. Vpraša ga, kje dela, da tako dobro zasluži. Dijak mu odgovori: "V Avstriji kupujem svinčnike po 20 centov in jih potem prodajam po 30 centov. Od teh 10 % lahko človek dobro živi." Profesor se nasmehne in si misli: "Matematika mu še vedno ne gre, znajde pa se." Koliko odstotkov prodajne cene znaša zaslužek v resnici, če zaokrožimo na cele odstotke?
- (A) 10 % (B) 33 % (C) 50 % (D) 66 % (E) 100 %
- Iz štirih enakih mrež, kot je mreža na spodnji levi sliki, sestaviš štiri kocke, ki jih zlepiš v kvader, kot je narisano na spodnji desni sliki. Kolikšna je največja vsota pik na površini nastalega kvadra?

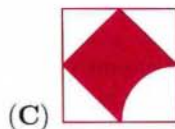
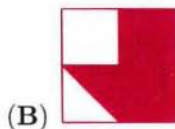


- (A) 72 (B) 70 (C) 68 (D) 76 (E) 74

3. Na tehtnici je na eni strani lubenica, na drugi strani pa sta polovica enako težke lubenice in utež za dva kilograma. Tehtnica je v ravnovesju. Koliko tehta lubenica?

(A) 2 kg (B) 4 kg (C) 6 kg (D) 8 kg
(E) Ni mogoče določiti.

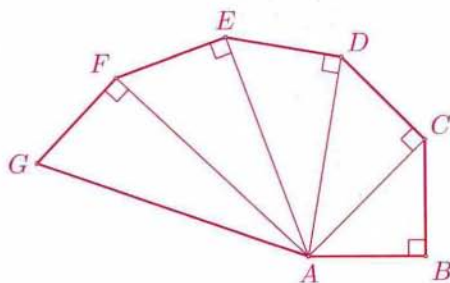
4. Najmanjši obseg ima pobarvan lik ob črki:



5. Proksima Kentavra, našemu osončju najbližja zvezda, je od Zemlje oddaljena 4,25 svetlobnih let. Svetlobno leto je razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu. Približno koliko kilometrov je to, če svetloba prepotuje v eni sekundi 300000 km?

(A) 134 milijonov km (B) 9,5 bilijonov km (C) 110 milijard km
(D) 167 milijard km (E) 40 bilijonov km

6. Kolikšna je dolžina daljice AG , če je vsaka izmed daljic AB , BC , CD , DE , EF in FG dolga 1 m?



(A) 5 m (B) $\sqrt{5}$ m (C) 6 m (D) $\sqrt{6}$ m (E) 2 m

II. del

1. Mama in hči pripravljata jabolka za jabolčno čežano. Mama sama v desetih minutah olupí in očisti šest jabolok, hči pa enako količino v 15 minutah.
 - A. Koliko časa bi mama sama pripravljala 15 jabolok?
 - B. Koliko časa bi hči sama pripravljala 15 jabolok?
 - C. Koliko časa bi obe skupaj pripravljali 15 jabolok?
 - D. Koliko jabolok bi pripravili obe skupaj v tričetrt ure?
2. Dijak SREČKO SMOLA ljubi igre na srečo, najrajši pa ima loto. Prvič je vplačal 10 evrov in potem vsakokrat dvakrat več kot pri prejšnjem plačilu. Šestič je zadel dobitek, ki je 4800-krat večji od zadnje vplačane vloge.
 - A. Koliko denarja je porabil, preden je zadel?
 - B. Koliko znaša dobiček?
 - C. Dijak bo štiri petine dobička pametno naložil v nadaljnje izobraževanje. Koliko denarja mu ostane?
3. Učenci 3. letnika so izvedli anketo o številu otrok v družinah. Rezultat ankete je prikazan s frekvenčnim kolačem. Odgovori na vprašanja.



- A. Koliko družin je zajetih v anketo?
 - B. Koliko je vseh otrok v teh družinah?
 - C. Kolikšno je povprečno število otrok v družinah?
 - D. Kolikšen je odstotek družin, ki imajo vsaj dva otroke?
 - E. Kolikšen je odstotek otrok, ki živijo v družinah s petimi otroki?
- Vse rezultate zaokroži na eno decimalko.
4. Iz pipe, ki pušča, priteče v eni minuti 50 kapljic vode. 4000 kapljic vode je 1 liter vode, ki ima maso 1 kg.

- A. Koliko kapljic vode priteče iz pokvarjene pipe v enem dnevu?
 B. Koliko litrov vode je to?
 C. V kolikšnem času bi s kapljicami napolnili lonec, ki ima prostornino 15 litrov?
 D. Koliko bi tehtal lonec, napolnjen z vodo, če je masa lonca 15 % mase vode, ki je v njem?

Rešitve nalog z državnega tekmovanja

I. Pravilni odgovori so zbrani v preglednici.

1	2	3	4	5	6
B	A	B	C	E	D

- II/1. (A) Mama bi sama pripravljala 15 jabolk $\frac{15}{6} \cdot 10 = 25$ min.
 (B) Hči bi sama pripravljala 15 jabolk $\frac{15}{6} \cdot 15 = 37,5$ min.
 (C) Mama pripravi $\frac{6}{10}$ jabolka na minuto, hči pa $\frac{6}{15}$ jabolka na minuto. Skupaj pripravita $\frac{6}{10} + \frac{6}{15} = 1$ jabolko na minuto. Obe skupaj bi pripravljali 15 jabolk 15 minut.
 (D) V tričetrt ure bi obe skupaj pripravili 45 jabolk.
- II/2. (A) Srečko je najprej porabil $10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 = 630$ evrov.
 (B) Šestič je zadel $320 \cdot 4800 = 1536000$ evrov, njegov dobiček pa je $1536000 - 630 = 1535370$ evrov.
 (C) Ker bo $\frac{4}{5}$ dobička vložil v nadaljnje izobraževanje, mu ostane še $\frac{1}{5}$ dobička oziroma $\frac{1}{5} 1535370 = 307074$ evrov.
- II/3. (A) V anketi je zajetih $2 + 9 + 7 + 6 + 1 + 1 = 26$ družin.
 (B) Vseh otrok skupaj je $2 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 50$.
 (C) Povprečno število otrok v družinah je $\frac{50}{26} \approx 1,9$.
 (D) Med 26 družinami ima vsaj dva otroke 15 družin, kar predstavlja $\frac{15}{26} = 0,577 = 57,7$ % delež.
 (E) Med 50 otroci jih 5 živi v družini s 5 otroci, kar predstavlja $\frac{5}{50} = 0,1 = 10$ % delež.
- II/4. (A) Dan ima $24 \cdot 60$ minut. V tem času iz pipe izteče $24 \cdot 60 \cdot 50 = 72000$ kapljic vode.
 (B) Ta količina predstavlja $72000 : 4000 = 18$ l vode.
 (C) Če v enem dnevu priteče iz pipe 18 l vode, se 15 litrov nateče v $\frac{15}{18} \cdot 24 = 20$ urah.
 (D) Voda tehta 15 kg, lonec pa $\frac{15}{100} \cdot 15 = 2,25$ kg. Voda in lonec tehtata skupaj 17,25 kg.

**TEKMOVANJE V ZNANJU MATEMATIKE ZA
DIJAKE SREDNJIH TEHNIŠKIH IN
STROKOVNIH ŠOL****3. regijsko tekmovanje****Prvi letnik**

A1. Koliko je vrednost izraza $|-3| + ||-1| - |2||$?

- (A) -6 (B) -4 (C) 2 (D) 4 (E) 6

A2. Zapiši naravna števila, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 2.

- (A) $7,2k$, $k \in \mathbb{N}$ (B) $2k + 7$, $k \in \mathbb{N}$ (C) $\frac{2}{7}$
(D) $7,2$ (E) $7k + 2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

A3. Poenostavi izraz $(-x)^6 \cdot (-x)^5 \cdot (-(-x)^4)$.

- (A) $-x^{15}$ (B) x^{15} (C) x^{120}
(D) $-x^{120}$ (E) Nič od navedenega.

A4. Reši neenačbo $8 - 16x \leq 4x^2 - (2x + 1)^2$.

- (A) $x > \frac{3}{4}$ (B) $x \leq \frac{3}{4}$ (C) $x \geq \frac{3}{4}$
(D) $x < 1$ (E) $0 < x \leq \frac{3}{4}$

A5. Bron je zlitina bakra in kositra v razmerju 47 : 3. Koliko kositra je v spomeniku iz brona, ki tehta 350 kg?

- (A) 7 kg (B) 21 kg (C) 300 kg
(D) 329 kg (E) Nič od navedenega.

A6. Izračunaj vrednost izraza $\frac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$.

- (A) 6 (B) 8 (C) $\frac{31}{2}$ (D) 24 (E) 512

B1. Produkt dveh zaporednih naravnih števil za številom n je za 600 večji od produkta dveh zaporednih naravnih števil pred številom n . Določi število n . Zapiši rešitev.

- B2.** Planet Jupiter obkroži Sonce v dvanajstih letih, planet Saturn pa v tridesetih letih. Leta 1941 sta bila oba na isti strani Sonca in smo ju z Zemlje videli oba skupaj. Katerega leta smo ju nazadnje videli skupaj? Katerega leta se bo dogodek prvič ponovil? Zapiši odgovora.
- B3.** Izračunaj vrednost izraza $(a^2 - ab + b^2) : (2a^2 - 6b)$, če je $a - b = 3$ in $\frac{2(a-b)}{3} - \frac{a+2b}{9} = 1$.
- B4.** Bazen polnijo tri cevi. Prva cev sama napolni bazen v štirih urah, druga v desetih, tretja pa v dvajsetih urah. Koliko odstotkov bazena je napolnjenega, če vse tri cevi odpremo za dve uri? Zapiši odgovor.

Drugi letnik

- A1.** Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi točko $A(\pi, 0)$ ter presečišče premic $y = \pi - 2x$ in $y = \pi - \frac{x}{2}$.

- (A) $y = 2x + \pi$ (B) $y = -x + \pi$ (C) $y = x - \pi$
(D) $y = 2\pi$ (E) Nič od navedenega.

- A2.** Za premico z enačbo $\frac{3x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ velja:

- (A) odreže odsek $\frac{3}{2}$ na osi x in $-\frac{1}{3}$ na osi y ,
(B) odreže odsek 2 na osi x in -3 na osi y ,
(C) odreže odsek $\frac{2}{3}$ na osi x in 3 na osi y ,
(D) odreže odsek $\frac{2}{3}$ na osi x in -3 na osi y ,
(E) ne seka osi x .

- A3.** Za kateri n velja enakost $3^{2002} - 3^{2001} + 3^{2000} - 3^{1999} = n(3^{1999})$?

- (A) 18 (B) 19 (C) 20
(D) 21 (E) Ne obstaja takšen n .

- A4.** Poenostavi izraz $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. Kaj dobiš?

- (A) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ (B) $x + y$ (C) $2x - y$
(D) xy (E) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

A5. Suplementarni kot kota α meri $78^\circ 18' 53''$. Koliko meri kot α ?

- (A) $102^\circ 42' 7''$ (B) $12^\circ 42' 7''$ (C) $11^\circ 41' 7''$
(D) 53° (E) Nič od navedenega.

A6. Za koliko odstotkov se poveča oziroma zmanjša ploščina pravokotnika, če eno stranico podaljšamo za 20 % njene dolžine, drugo pa skrajšamo za četrtno njene dolžine?

- (A) Poveča se za 5 %. (B) Zmanjša se za 10 %.
(C) Poveča se za 15 %. (D) Zmanjša se za 1 %.
(E) Ploščina se ne spremeni.

B1. V enačbi premice $x + my - 4 = 0$ določi m tako, da bo razdalja med presečiščema premice s koordinatnima osema enaka $2\sqrt{5}$.

B2. Če koren nekega števila delimo z $\frac{1}{2}$, dobimo ravno toliko, kot če število zmanjšamo za 3. Katero število je to? Ali je takih števil več?

B3. V trikotniku ABC meri kot $\alpha = 58^\circ$ in kot $\beta = 84^\circ$. Koliko meri kot x med simetralo kota γ in višino na stranico c ?

B4. Izračunaj natančno, brez uporabe žepnega računalna:

$$\frac{(-2)^{-3}}{(-0,2)^3} - \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot (-3)^{-2} \cdot 0,1^{-1}.$$

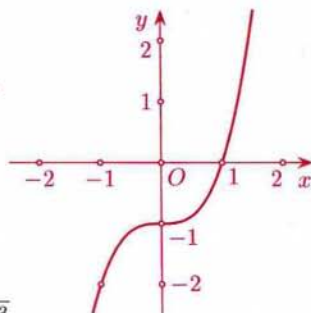
Tretji letnik

A1. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$. Katera trditev je pravilna?

- (A) Funkcija je povsod padajoča.
(B) Teme je v točki $T(3, 2)$.
(C) Funkcija nima realnih ničel.
(D) Graf je parabola, ki je zrcalno simetrična glede na premico $x = -3$.
(E) Nobena izmed navedenih trditev ni pravilna.

A2. Katera funkcija je prikazana na danem grafu?

- (A) $f(x) = x^3$ (B) $f(x) = -x^3 + 1$
 (C) $f(x) = x^3 - 1$ (D) $f(x) = x^2$
 (E) Nič od navedenega.



A3. Zapiši rešitev enačbe $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+5} = \sqrt{9^{6x-3}}$.

- (A) $x = -\frac{1}{2}$ (B) $x = -\frac{1}{4}$ (C) $x = \frac{1}{4}$
 (D) $x = \frac{1}{2}$ (E) $x = 1$

A4. Kaj velja za števili $a = \log_3 x$ in $b = \log_4 x$?

- (A) $a < b$ za vsak $x > 1$ (B) $a > b$ za vsak $x > 1$
 (C) $a \neq b$ za vsak $x > 0$ (D) $a \log 4 = b \log 3$ za vsak $x > 0$
 (E) $ab = \log_{12} x$ za vsak $x > 0$

A5. Koliko je a , če ima enačba $x^2 = 3(ax - 3)$ natanko eno realno rešitev?

- (A) $a = 2$ ali $a = -2$ (B) a je lahko le 2 (C) $a = 4$
 (D) $a = 6$ ali $a = -6$ (E) $a = \frac{2}{3}$

A6. Kolikokrat spremeni predznak funkcija $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 6x + 9}$?

- (A) nikoli (B) enkrat (C) dvakrat (D) trikrat (E) štirikrat

B1. Krogu s ploščino $100\pi \text{ cm}^2$ vrtamo pravokotnik, katerega dolžini stranic se razlikujeta za 4 cm. Izračunaj ploščino pravokotnika.

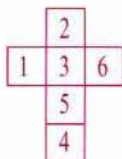
B2. Koliko je 12 % od števila $\sqrt[3]{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} + 2^{-\log_{10} 0,01}$? Zapiši odgovor.

B3. Skiciraj graf funkcije $f(x) = \frac{x(x+1)}{x+2}$.

B4. Pokaži, da je polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ enak kvadratu nekega polinoma.

Četrty letnik

A1. Katera kocka je razgrnjena v mrežo?

A2. Kolikšna je največja vrednost funkcije $g(x) = 24 - 5 \sin x$?

- (A) 14 (B) 19 (C) 24
(D) 34 (E) Nič od navedenega.

A3. Koliko je dolga telesna diagonalna kocke z robom a ?

- (A) $3a$ (B) a^3 (C) $a\sqrt{2}$
(D) $a\sqrt{3}$ (E) Nič od navedenega.

A4. Tričleno naraščajoče aritmetično zaporedje s srednjim členom 10 postane geometrijsko, če ta člen zmanjšamo za 2. Kaj sklepamo?

- (A) Aritmetično zaporedje je 3, 10, 17.
(B) Aritmetično zaporedje je 4, 10, 16.
(C) Geometrijsko zaporedje je 8, 8, 8.
(D) Geometrijsko zaporedje je 1, 8, 64.
(E) Iz aritmetičnega zaporedja na opisani način ni mogoče dobiti geometrijskega.

A5. V skupini dvajsetih fantov tehta vsak povprečno 62 kg. Če se fantom pridruži še učitelj, je vsak v povprečju težak 63 kg. Koliko tehta učitelj?

- (A) 62 kg (B) 73 kg (C) 83 kg (D) 93 kg
(E) Ni mogoče izračunati.

A6. Poenostavi izraz $\left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right) : (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha - 1)$.

- (A) $\sin^2 \alpha + \cos \alpha$ (B) $\sin \alpha + \cos \alpha$ (C) $\operatorname{tg} \alpha$
(D) $\operatorname{ctg} \alpha - 1$ (E) 1

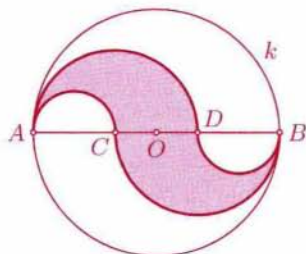
B1. Dani so izrazi $\frac{x+3}{x^2-4}$, $\frac{x-1}{x-2}$ in $\frac{x+3}{x+2}$. Določi x tako, da bo drugi izraz aritmetična sredina prvega in tretjega.

B2. Izračunaj $\sin(2\alpha + \pi)$, če je $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ in je α ostri kot.

B3. V mestni bolnišnici leži 120 bolnikov. Po jutranjem merjenju srčnega utripa je glavna sestra meritve uvrstila v 8 frekvenčnih razredov. Izračunaj aritmetično sredino meritev in standardni odklon.

število utripov na minuto	frekvenca
60 – 64,9	23
65 – 69,9	16
70 – 74,9	15
75 – 79,9	32
80 – 84,9	24
85 – 89,9	6
90 – 94,9	2
95 – 99,9	2

B4. Dana je krožnica k s polmerom R . Na premeru AB sta taki točki C in D , da velja $|AC| = |CD| = |DB|$. Nad AC in AD sta narisani polkrožnici na eni strani daljice AB , nad DB in CB pa na drugi strani (glej sliko). Izrazi ploščino osenčenega lika z R .



Rešitve nalog regijskega tekmovanja

Prvi letnik

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
odgovor	D	E	B	C	B	B

A4. Neenačbo preoblikujemo v $8 - 16x \leq -4x - 1$, ki ima rešitev $x \geq \frac{3}{4}$.

A5. Zaradi razmerja $47 : 3$ je v 50 kg brona 3 kg kositra, v 350 kg brona pa 21 kg kositra.

- B1.** Naj bo iskano naravno število n . Tedaj je $(n-2) \cdot (n-1) + 600 = (n+1) \cdot (n+2)$, od koder dobimo $n^2 - 3n + 2 + 600 = n^2 + 3n + 2$ in izrazimo $n = 100$.
- B2.** Ker je najmanjši skupni večkratnik števil 12 in 30 enak 60, vidimo Jupiter in Saturn skupaj na isti strani Sonca vsakih 60 let. Nazadnje je bilo to leta $1941 + 60 = 2001$, prvič pa se bo dogodek ponovil leta $2001 + 60 = 2061$.
- B3.** Iz $a - b = 3$ izrazimo $a = b + 3$ in vstavimo v enačbo $\frac{2(a-b)}{3} - \frac{a+2b}{9} = 1$, od koder dobimo $b = 2$ in je torej $a = 5$. Izračunani vrednosti vstavimo v izraz $(a^2 - ab + b^2) : (2a^2 - 6b)$ in dobimo rezultat $\frac{1}{2}$.
- B4.** V eni uri napolni prva cev $\frac{1}{4}$ bazena, druga $\frac{1}{10}$ in tretja $\frac{1}{20}$ bazena. Če vse tri cevi odpremo za dve uri, napolnijo $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$ bazena, kar je 80 %.

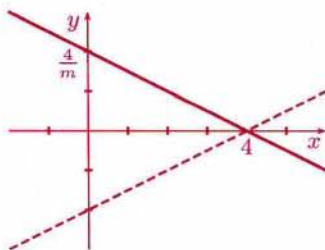
Drugi letnik

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
odgovor	B	D	C	A	E	B

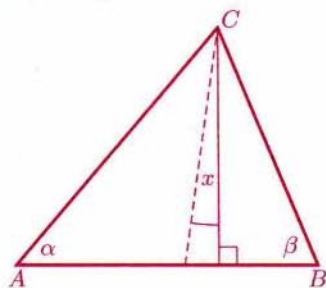
- A1.** Premici z enačbama $y = \pi - 2x$ in $y = \pi - \frac{\pi}{2}$ se sekata v točki $B(0, \pi)$. Enačba premice skozi točki $A(\pi, 0)$ in $B(0, \pi)$ je $y = -x + \pi$.
- A2.** Dano enačbo premice lahko preoblikujemo v odsekovno obliko $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{-3} = 1$, od koder preberemo odseka: $\frac{2}{3}$ na osi x in -3 na osi y .
- A3.** Če na levi strani enakosti izpostavimo 3^{1999} , dobimo $3^{1999} \cdot (3^3 - 3^2 + 3 - 1) = 20 \cdot 3^{1999}$.
- A4.** Izraz v števcu zapišemo kot razliko kvadratov, ki jo razstavimo:

$$\frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$
- A5.** Suplementarni kot kota $78^\circ 18' 53''$ je $101^\circ 41' 7''$, zato je pravilen odgovor (E).
- A6.** Ploščina pravokotnika s stranicama $1.2a$ in $0.75b$ je $\frac{12}{10} \cdot \frac{3}{4} \cdot ab = \frac{9}{10} \cdot ab$, torej je za 10 % manjša od ploščine pravokotnika s stranicama a in b .

- B1.** Očitno mora biti $m \neq 0$, sicer premica ne bi sekala ordinatne osi. Pri tem pogoju premica seka ordinatno os v točki $N(0, \frac{4}{m})$. Abscisno os seka v točki $M(4, 0)$. Veljati mora $\sqrt{16 + \frac{16}{m^2}} = 2\sqrt{5}$, od koder izrazimo $m^2 = 4$ oziroma $m = \pm 2$.



- B2.** Enačbo $\sqrt{x} : \frac{1}{2} = x - 3$ preoblikujemo v $x^2 - 10x + 9 = 0$, ki ima rešitvi $x_1 = 9$ in $x_2 = 1$. Število 9 ustreza pogoju naloge, saj je $\sqrt{9} : \frac{1}{2} = 9 - 3$, število 1 pa ne, saj imamo $\sqrt{1} : \frac{1}{2} \neq 1 - 3$.
- B3.** Kot x lahko izračunamo na dva načina, in sicer $x = \frac{\gamma}{2} - (90^\circ - \beta) = 19^\circ - 6^\circ = 13^\circ$ ali $x = 90^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} = 32^\circ - 19^\circ = 13^\circ$.



B4. Računamo: $\frac{(-2)^{-3}}{(-0,2)^3} - (\frac{2}{5})^{-3} \cdot (-3)^{-2} \cdot 0,1^{-1} = \frac{-\frac{1}{8}}{-\frac{1}{125}} - \frac{125}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10 =$
 $= \frac{125}{8} \cdot \left(1 - \frac{10}{9}\right) = -\frac{1}{9} \cdot \frac{125}{8} = -\frac{125}{72}.$

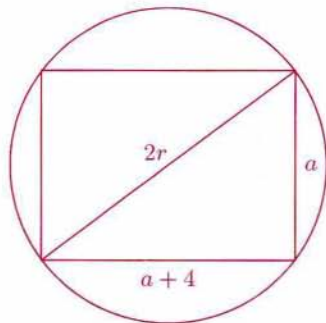
Tretji letnik

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
odgovor	D	C	B	B	A	C

- A1.** Iz zapisa funkcije vidimo, da je njen graf parabola s temenom $T(-3, 2)$ in je zrcalno simetrična glede na premico $x = -3$.
- A3.** Enačbo preoblikujemo v $3^{-2x-5} = 3^{6x-3}$, zato je $-2x - 5 = 6x - 3$, od tod pa $x = -\frac{1}{4}$.
- A4.** Logaritemska funkcija z višjo osnovo počasneje narašča kot funkcija z nižjo osnovo, zato je $a > b$ za vsak $x > 1$.
- A5.** Dano enačbo preoblikujemo v $x^2 - 3ax + 9 = 0$. Njena diskriminanta je $D = 9a^2 - 36$ in je enaka nič, če je $a = 2$ ali $a = -2$.

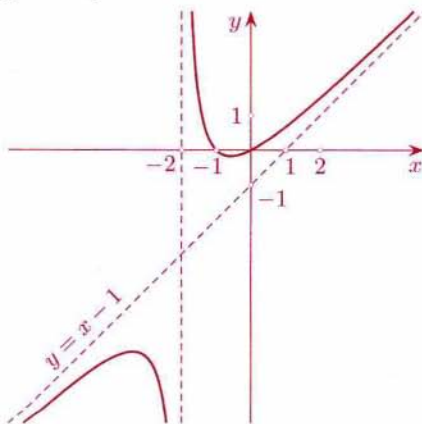
- A6.** Ker je $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 6x + 9} = \frac{(x+4)(x+1)}{(x+3)^2}$, ima graf te racionalne funkcije dve ničli prve stopnje in en pol druge stopnje, zato dvakrat spremeni predznak.

- B1.** Iz $\pi r^2 = 100\pi$ izračunamo $r = 10$ cm, nato pa uporabimo Pitagorov izrek: $a^2 + (a+4)^2 = (2r)^2$. Od tod izračunamo $a_1 = 12$ in $a_2 = -16$. Upoštevamo le pozitivno rešitev: stranici pravokotnika sta dolgi 12 cm in 16 cm, njegova ploščina je 192 cm^2 . Ko Pitagorov izrek preoblikujemo v kvadratno enačbo $a^2 + 4a - 192 = 0$, vidimo, da je $a(a+4) = 192$. Slednje je ravno zapis ploščine pravokotnika s stranicama a in $a+4$. Ne da bi izračunali dolžini stranic, vemo, da je ploščina 192 cm^2 .



- B2.** Izračunamo najprej $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)+2^{-\log_{10} 0,01}} = \sqrt[3]{1+2^{\log_{10} 100}} = 1+4=5$, nato pa poiščemo $\frac{12}{100} \cdot 5 = \frac{3}{5}$.

- B3.** Iz zapisa $f(x) = \frac{x(x+1)}{x+2}$ vidimo, da ima graf funkcije ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = -1$ ter pol $x_p = -2$. Če zapis preoblikujemo v $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+2}$ ugotovimo, da ima graf funkcije asimptoto $y = x - 1$ in da le-te ne seka. Nato še skiciramo graf.



- B4.** Če zapišemo $p(x) = (q(x))^2$, domnevamo, da je $q(x) = x^2 + ax \pm 2$. Tedaj je $(q(x))^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 \pm 4)x^2 \pm 4ax + 4$. Če primerjamo koeficienta pri x^3 polinomov $p(x)$ in $(q(x))^2$, ugotovimo, da mora biti $a = -1$, če pa primerjamo še koeficienta pri x^2 oziroma x , ugotovimo, da ima stalni člen polinoma $q(x)$ pozitiven predznak. Imamo torej eno samo rešitev: $p(x) = (x^2 - x + 2)^2$.

Četrty letnik

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
odgovor	C	E	D	B	C	B

A2. Največja vrednost funkcije $g(x)$ je 29, zato je pravilen odgovor (E).

A4. Tričleno naraščajoče aritmetično zaporedje s srednjim členom 10 lahko zapišemo $10 - d$, 10 , $10 + d$, kjer je $d > 0$. Ustrezno geometrijsko zaporedje je $10 - d$, 8 , $10 + d$ in velja $\frac{8}{10-d} = \frac{10+d}{8}$, od koder je $d^2 = 36$, zaradi pogoja $d > 0$ pa imamo le rešitev $d = 6$. Aritmetično zaporedje je torej 4, 10, 16.

A5. Vsi fantje skupaj tehtajo $20 \cdot 62 = 1240$ kg, skupaj z učiteljem pa $21 \cdot 63 = 1323$ kg. Učitelj tehta 83 kg.

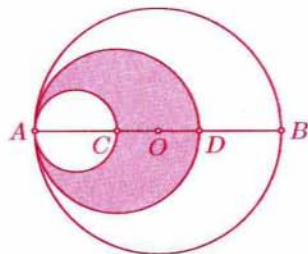
A6. Pišemo: $\left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}\right) : (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha - 1) = \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}\right) :$
 $\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1\right) = \frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} =$
 $\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha.$

B1. Pogoju naloge je zadoščeno, če velja $\frac{x-1}{x-2} = \frac{\frac{x+3}{x^2-4} + \frac{x+3}{x+2}}{2}$, enačbo pa lahko preuredimo v $x^2 = 1$, ki ima rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.

B2. Ker je α ostri kot, je $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{12}{13}$. Nato izračunamo $\sin(2\alpha + \pi) = -\sin 2\alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{120}{169}$.

B3. Najprej izračunamo sredine razredov, nato pa $\bar{x} = \frac{1}{120} \cdot (62.45 \cdot 23 + 67.45 \cdot 16 + 72.45 \cdot 15 + 77.45 \cdot 32 + 82.45 \cdot 24 + 87.45 \cdot 6 + 92.45 \cdot 2 + 97.45 \cdot 2) = \frac{1}{120} \cdot 8964 = 74.7$. Po formuli izračunamo še standardni odklon, ki znaša 8.5.

B4. Ploščina osenčenega lika iz naloge je enaka ploščini osenčenega lika na desni sliki, to je razliki med ploščino kroga s polmerom $\frac{2}{3}R$ in ploščino kroga s polmerom $\frac{1}{3}R$: $S = \pi\left(\frac{4}{9}R^2 - \frac{1}{9}R^2\right) = \frac{\pi}{3}R^2$.



3. državno tekmovanje

Prvi letnik

1. Vemo, da je $A = \frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$ in $B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} \right) \cdot (a^{-1}-b^{-1}) \cdot (a^{-2}+b^{-2})^{-1}$. Dokaži, da je $A = B^{-1}$.
2. Trije razredi so zbirali papir. Razred A je zbral 20 % več papirja kot razred B, razred B pa 20 % manj papirja kot razred C. Koliko kilogramov papirja so zbrali posamezni razredi, če je skupaj zbranih 759 kg papirja? Zapiši odgovor.
3. Točka $T(a+\sqrt{2}, \sqrt{2}-a)$ naj bo enako oddaljena od točk $A(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
 - a) Določi vrednost parametra a .
 - b) Izračunaj ploščino trikotnika ABT .
4. Naloga iz zbirke *LILAVATI*, indijskega matematika Bhaskare:
*Za zmeraj isto sem ceno kupil zate
 teh osem rubinov, zatem smaragdov deset
 in nazadnje še biserov sto,
 ki nosiš jih zdaj na uhanih.*
*Če zberem skupaj po enega
 iz vrste vsake žlahtnih kamnov teh,
 bo njih cena le za kovance tri manjša,
 kot je polovica od sto.*
*O, vedro dekle,
 če si v računanju spretna dovolj, le brž povej mi,
 koliko je kovancev tedaj vsak od teh kamnov me stal.*
5. Dokaži, da vsota petih zaporednih naravnih števil ne more biti praštevilo.

Drugi letnik

1. Poenostavi izraz

$$\left(x + \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{\frac{x^3-1}{9} + \frac{x-x^2}{3}}} \right) \cdot (x - \sqrt{x-1}).$$

2. Dani sta premici z enačbama $(1-a)x - 2ay - 2 = 0$ in $-2x + ay - 1 = 0$. Določi a tako, da se bosta premici sekali na simetrali lihih kvadrantov.

3. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico dolžine a se nosilki stranic AF in DE sekata v točki T . Natančno izračunaj dolžino daljice BT .
4. Dan je trapez s podatki $a = 7$, $b = 4$, $c = 3$ in $\beta = 90^\circ$. Izračunaj kot med diagonalama trapeza na stotinko stopinje natančno.
5. Dani funkciji $f(x) = \frac{3-2a}{a+5}x + \frac{2a-1}{3-a}$ določi parameter a tako, da bo graf funkcije sekal ordinatno os nad koordinatnim izhodiščem in da bo funkcija padajoča.

Tretji letnik

1. Poslovodja je nabavil puloverje in zanje plačal 960 tisočakov. V trgovini jih je prodajal po 12 tisočakov. Dobiček, ki ga je ustvaril pri prodaji vseh puloverjev, je bil enak znesku, ki ga je dal za 60 puloverjev. Koliko puloverjev je nabavil? Zapiši odgovor.
2. Reši sistem enačb $3^x \cdot 2^y = 648$ in $\log_3(x - y) = 0$.
3. Reši enačbo $\log_x(5 \cdot \sqrt{5}) - \frac{5}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$.
4. Zapiši enačbo polinoma 3. stopnje (lahko tudi v razstavljeni obliki), katerega graf poteka skozi točke $A(4, -5)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 5)$ in $D(5, 0)$. Skiciraj graf polinoma.
5. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $x^2 + 73 = y^2$.

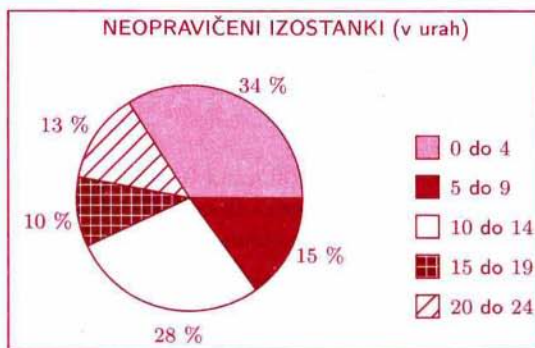
Četrty letnik

1. Dana je funkcija $f(x) = \cos x - \sin x$.
 - a) Pokaži, da funkcija ni niti soda niti liha.
 - b) Pokaži, da je $f(x) = -\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$, in zapiši zalogo vrednosti.
2. Dokazi, da sestavljajo razlike kvadratov zaporednih naravnih števil aritmetično zaporedje.
3. Ženin in nevesta sta naročila trinadstropno torto iz treh enako visokih tort na med seboj povezanih in enako oddaljenih podstavkih. Razmik med sosednjima podstavkoma je bil 11 cm, trinadstropna torta pa je bila visoka 30 cm. Spodnja torta je bila največja, premer vsake naslednje pa je bil za 6 cm krajši od premera prejšnje.
S trinadstropno torto sta nahranila sebe in še 28 svatov. Upoštevaj, da je vsak v povprečju pojedel 24 dag torte in da $77\pi \text{ cm}^3$ torte tehta 10 dag. Kolik je bil polmer spodnje (največje) torte?

4. Poišči ničle funkcije $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 2x}$ in nariši njen graf na intervalu $[-\pi, 2\pi]$.
5. Na dveh šolah so neopravičene izostanke prikazali z grafikoni. Na prvi šoli (šoli A) so podatke prikazali z dvema histogramoma.



Na drugi šoli (šoli B), na kateri je 200 dijakov, so podatke prikazali s strukturnim krogom.



- a) Za vsako šolo razvrsti podatke v ustrezno preglednico.

Šola A

razred	število dijakov	neopr. ure
1a		
1b		
2a		
3a		
4a		
4b		

Šola B

frekvenčni razred	odstotek	število dijakov	povprečje razreda	zmnožek
0 – 4				
5 – 9				
10 – 14				
15 – 19				
20 – 24				

- b) Koliko znaša povprečno število neopravičenih ur na dijaka na posamezni šoli? Zapiši odgovor.

Rešitve nalog državnega tekmovanja

Prvi letnik

1. Najprej poenostavimo izraz A : $\frac{b^2 - a^2}{\frac{a^2 b^2}{\frac{b-a}{ab}}} = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)ab} = \frac{b+a}{ab}$, nato

pa še izraz B : $\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{b+a}{ab}}\right) \cdot \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{1}{\frac{b^2+a^2}{a^2 b^2}} = \left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b+a}\right) \cdot \frac{ab(b-a)}{b^2+a^2} = \frac{b^2+ab-ab+a^2}{(b-a)(b+a)} \cdot \frac{ab(b-a)}{b^2+a^2} = \frac{ab}{b+a}$. Vidimo, da res velja $A = B^{-1}$.

2. Denimo, da je razred C zbral x kg papirja. Tedaj je razred B zbral $0.8x$ kg papirja, razred A pa $1.2 \cdot 0.8 \cdot x = 0.96x$ kg papirja. Velja $x + 0.8x + 0.96x = 759$, od koder izračunamo $x = 275$, nato pa še $0.8x = 220$ in $0.96x = 264$. Razred A je zbral 264 kg papirja, razred B 220 kg in razred C 275 kg papirja.

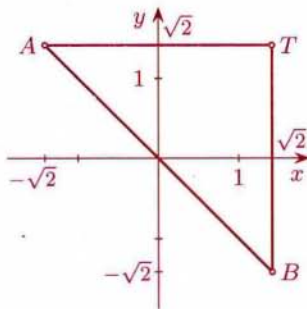
3. Da bo točka T enako oddaljena od točk A in B , mora veljati

$$\sqrt{(a + \sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - a - \sqrt{2})^2} = \sqrt{(a + \sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - a + \sqrt{2})^2},$$

od koder dobimo $a^2 + 4a\sqrt{2} + 8 + a^2 = a^2 + 8 - 4a\sqrt{2} + a^2$ oziroma $8a\sqrt{2} = 0$ in končno $a = 0$.

Točke A , B in T so oglišča enakokrakega pravokotnega trikotnika s katetama

dolžine $2\sqrt{2}$. Ploščina tega trikotnika je $\frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4$.



4. Denimo, da je rubin stal x kovancev, smaragd y kovancev in biser z kovancev. Prvi del naloge pove, da je $8x = 10y = 100z$, od koder lahko izrazimo $x = \frac{25}{2}z$ in $y = 10z$. Besedilo drugega dela naloge prepisemo v enačbo $x + y + z = \frac{100}{2} - 3$. Zapišemo torej lahko $\frac{25}{2}z + 10z + z = 47$ in izrazimo $z = 2$. Biser je stal 2 kovanca, smaragd 20 kovancev, rubin pa 25 kovancev.

5. Če vzamemo pet zaporednih naravnih števil $n-2$, $n-1$, n , $n+1$ in $n+2$, je $n \geq 3$, vsota teh števil pa je $5n$. Število $5n$ je za $n \geq 3$ sestavljeno.

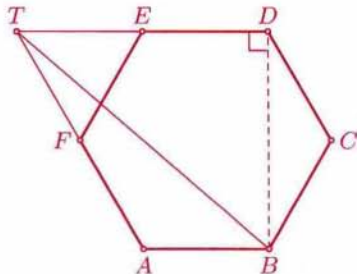
Če vzamemo pet zaporednih naravnih števil n , $n+1$, $n+2$, $n+3$ in $n+4$, je $n \geq 1$, vsota teh števil pa je $5n + 10 = 5(n+2)$. Število $5(n+2)$ je za $n \geq 1$ sestavljeno, saj je $n+2 \geq 3$.

Drugi letnik

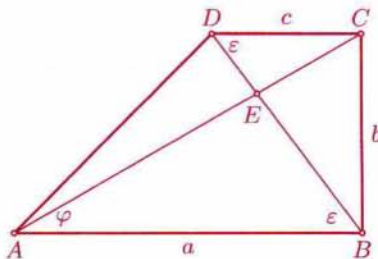
1. Izraz poenostavimo: $\left(x + \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{\frac{x^3-1}{9} + \frac{x-x^2}{3}}}\right) \cdot (x - \sqrt{x-1}) =$
 $= \left(x + \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt{\frac{x^3-1+3x-3x^2}{9}}}\right) \cdot (x - \sqrt{x-1}) = \left(x + \sqrt[6]{(x-1)^3}\right) \cdot$
 $\cdot (x - \sqrt{x-1}) = (x + \sqrt{x-1}) \cdot (x - \sqrt{x-1}) = x^2 - x + 1.$

2. Če je $a = 0$, sta premici med seboj vzporedni (njuni enačbi sta tedaj $x - 2 = 0$ in $2x + 1 = 0$), zato privzemimo, da $a \neq 0$. Izrazimo $y = \frac{(1-a)x-2}{2a}$ iz prve in $y = \frac{2x+1}{a}$ iz druge enačbe. Izenačimo dobljeni desni strani $\frac{(1-a)x-2}{2a} = \frac{2x+1}{a}$ in enačbo preuredimo v $(-a-3)x = 4$, od koder izrazimo $x = -\frac{4}{a+3}$, če je $a \neq -3$ (prepričamo se lahko, da predstavljata dani enačbi dve vzporedni premici, če upoštevamo $a = -3$). Izrazimo še ordinato presečišča: $y = \frac{a-5}{a(a+3)}$. Vsaka točka na simetrali lihih kvadrantov ima absciso enako ordinati, zato mora veljati $-\frac{4}{a+3} = \frac{a-5}{a(a+3)}$, od tod pa končno dobimo $a = 1$.

3. S skice razberemo, da je $|DT| = 2a$, $|BD|$ pa je enaka dolžini dveh višin enakostraničnega trikotnika s stranico a , torej $|BD| = a\sqrt{3}$. Dolžino daljice BT izračunamo po Pitagorovem izreku: $|BT| = \sqrt{|DT|^2 + |BD|^2} = \sqrt{4a^2 + 3a^2} = a\sqrt{7}.$



4. Označimo $\varphi = \sphericalangle BAC$ in $\varepsilon = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$. V pravokotnih trikotnikih ABC in BCD dobimo $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{7}$ oziroma $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{4}{3}$, tako da je $\varphi = 29.74^\circ$ in $\varepsilon = 53.13^\circ$ ter $\sphericalangle AEB = 97.13^\circ$. Kot med diagonalama je 82.87° .

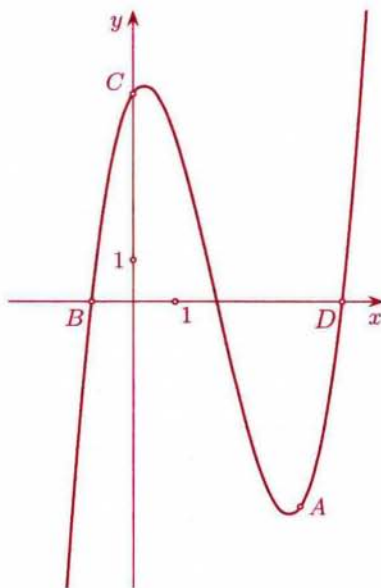


5. Dana funkcija je padajoča, če velja $\frac{3-2a}{a+5} < 0$. Njen graf seka ordinatno os nad koordinatnim izhodiščem, če velja $\frac{2a-1}{3-a} > 0$. Prva neenačba je izpolnjena, če imata števec in imenovalac ulomka $\frac{3-2a}{a+5}$ različna predznaka, to je za $a < -5$ ali za $a > \frac{3}{2}$. Druga neenačba je

izpolnjena, če imata števec in imenoalec ulomka $\frac{2a-1}{3-a}$ enaka predznaka, to je za $\frac{1}{2} < a < 3$. Obe neenačbi sta izpolnjeni, če je $\frac{3}{2} < a < 3$.

Tretji letnik

- Denimo, da je poslovodja nabavil x puloverjev po nabavni ceni c . Tedaj velja $x \cdot c = 960000$ in $x \cdot 12000 = 960000 + 60c$. Iz druge enačbe izrazimo $c = 200x - 16000$ in vstavimo v prvo, ki jo preuredimo v kvadratno enačbo $200x^2 - 16000x - 960000 = 0$, poenostavimo v $x^2 - 80x - 4800 = 0$ in razstavimo $(x - 120)(x + 40) = 0$. Edina smiselna rešitev enačbe je $x = 120$. Poslovodja je nabavil 120 puloverjev.
- Najprej iz $\log_3(x - y) = 0$ sklepamo, da je $x - y = 3^0 = 1$ oziroma $x = y + 1$. Nato drugo enačbo zapišemo $3^{y+1} \cdot 2^y = 648$ oziroma v obliki $3 \cdot 3^y \cdot 2^y = 648$ in poenostavimo v $6^y = 216 = 6^3$, od koder preberemo $y = 3$ ter izračunamo še $x = 4$.
- Enačbo lahko poenostavimo v $\frac{3}{2} \log_x 5 - \frac{5}{4} = (\frac{1}{2} \log_x 5)^2$. Če označimo $\log_x 5 = t$ in enačbo poenostavimo, dobimo $t^2 - 6t + 5 = 0$, ki ima rešitvi $t_1 = 1$ in $t_2 = 5$. Iz $\log_x 5 = 1$ dobimo $x_1 = 5$, iz $\log_x 5 = 5$ pa $x^5 = 5$ oziroma $x_2 = \sqrt[5]{5}$.
- Točki B in D sta ničli polinoma, zato lahko zapišemo $y = a(x+1)(x-5)(x-x_3)$. Polinom seka ordinatno os v točki $C(0, 5)$, torej je $5 = a \cdot 1 \cdot (-5) \cdot (-x_3)$ oziroma $5ax_3 = 5$, od koder dobimo $x_3 = \frac{1}{a}$, saj je $a \neq 0$. Končno upoštevamo, da gre polinom skozi točko A , pa imamo $-5 = a \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (4 - \frac{1}{a})$ oziroma $a \cdot (4 - \frac{1}{a}) = 1$, od koder izrazimo $a = \frac{1}{2}$. Polinom ima enačbo $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-5)(x-2)$.



5. Enačbo preoblikujemo v $y^2 - x^2 = 73$ oziroma v $(y+x)(y-x) = 73$. Število 73 je praštevilo, zato ga lahko razcepimo le na štiri načine: $73 \cdot 1$, $1 \cdot 73$, $-73 \cdot (-1)$ in $-1 \cdot (-73)$. Tako pridemo do štirih sistemov enačb, ki jih rešimo:

$y + x = 73$	$y + x = -73$	$y + x = 1$	$y + x = -1$
<u>$y - x = 1$</u>	<u>$y - x = -1$</u>	<u>$y - x = 73$</u>	<u>$y - x = -73$</u>
$y = 37$	$y = 37$	$y = -37$	$y = -37$
$x = 36$	$x = -36$	$x = -36$	$x = 36$

Četrty letnik

1. Ker se $f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x + \sin x$ razlikuje od $f(x)$ in od $-f(-x)$, funkcija $f(x)$ ni niti soda niti liha.

Pišimo: $-\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x = f(x)$. Ker je zaloga vrednosti funkcije $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ enaka $[-1, 1]$, je zaloga vrednosti funkcije $f(x)$ enaka $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

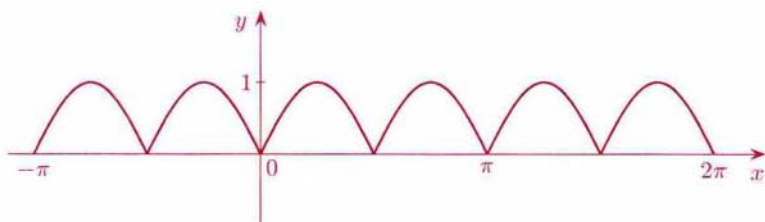
2. Vzemimo zaporedni naravni števili n in $n+1$. Razlika njunih kvadratov je enaka $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Če n povečamo za 1 (vzamemo naslednji zaporedni naravni števili), dobimo $((n+1)+1)^2 - (n+1)^2 = 2(n+1)+1 = 2n+3$. Razlika kvadratov dveh zaporednih naravnih števil se torej poveča za 2. Ker to velja za katerakoli dva zaporedna para po dveh zaporednih naravnih številih, tvorijo dobljena števila aritmetično zaporedje.

3. Torto je pojedlo 30 ljudi. Ker je vsak v povprečju pojedel 24 dag, je trinadstropna torta tehtala $30 \cdot 24 = 720$ dag. Njena prostornina je bila $\frac{77\pi \cdot 720}{10} = 5544\pi \text{ cm}^3$.

Če je višina posamezne torte enaka v , razmik med posamezno torto in podstavkom nad njo pa x , velja $v+x=11$ in $3v+2x=30$. Iz teh dveh enačb izračunamo $v=8$ cm.

Polmere posameznih tort označimo z r , $r-3$ in $r-6$. Tedaj je $\pi r^2 \cdot v + \pi(r-3)^2 \cdot v + \pi(r-6)^2 \cdot v = 5544\pi$. Enačbo lahko poenostavimo (upoštevamo, da je $v=8$ cm) v $3r^2 - 18r + 45 = 693$ oziroma $r^2 - 6r - 216 = 0$ in razstavimo $(r-18)(r+12) = 0$. Edina smiselna rešitev enačbe je $r=18$. Polmer spodnje (največje torte) je bil 18 cm.

4. Najprej zapišemo $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 2x} = \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x|$. Ničle funkcije so $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



5. Najprej izpolnimo preglednici.

Šola A

razred	število dijakov	neopr. ure
1a	30	105
1b	28	80
2a	26	100
3a	27	85
4a	26	130
4b	23	110
	160	610

Šola B

frekvenčni razred	odstotek	število dijakov	povprečje razreda	zmnožek
0 – 4	34	68	2	136
5 – 9	15	30	7	210
10 – 14	28	56	12	672
15 – 19	10	20	17	340
20 – 24	13	26	22	572
		200		1930

Povprečno število neopravičenih ur na dijaka na šoli A je

$$\bar{x} = \frac{105+80+100+85+130+110}{30+28+26+27+26+23} = \frac{610}{160} = 3.81,$$

na šoli B pa

$$\bar{y} = \frac{68 \cdot 2 + 30 \cdot 7 + 56 \cdot 12 + 20 \cdot 17 + 26 \cdot 22}{200} = \frac{1930}{200} = 9.65.$$

TEKMOVANJE IZ ZNANJA POSLOVNE MATEMATIKE

1. šolsko tekmovanje

1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. Prvotna cena blaga je bila 40.520,00 SIT. Blago se je najprej pocenilo za 13 %, sledila je podražitev za x %, nato ponovna podražitev za 15 %. Kupec je moral poravnati tudi stroške dodatnih storitev v višini 1.325,00 SIT, tako da je na koncu plačal skupaj s stroški 63.941,70 SIT.
 - a) Kolikšna je bila neznana podražitev v odstotkih?
 - b) Koliko odstotkov znaša skupna sprememba cene (od prvotne do končne)?
 - c) Izrazi v odstotkih stroške dodatnih storitev po 15 % podražitvi.
 - d) Za koliko odstotkov bi se moralo blago trikrat zapored podražiti za enak odstotek, da bi bila končna cena tega blaga 85.730,00 SIT? Upoštevaj, da je začetna cena 40.520,00 SIT.
2. Razdeli 6600 kg blaga med štiri poslovalnice, za katere imamo naslednje podatke:

poslovalnica	štev. zaposlenih	stroški poslovanja
A	5	108.000,00 SIT
B	4	144.000,00 SIT
C	6	72.000,00 SIT
D	5	216.000,00 SIT

- a) Razdeli blago premo sorazmerno s številom zaposlenih.
 - b) Razdeli blago obratno sorazmerno z obsegom stroškov poslovanja.
 - c) Razdeli blago premo sorazmerno s številom zaposlenih in hkrati obratno sorazmerno z obsegom stroškov poslovanja.
 - d) Blago razdeli tako, da poslovalnica A dobi 20 % več blaga kot poslovalnica B, poslovalnica C dobi 40 % manj blaga kot poslovalnica A in poslovalnica D 1,5-krat toliko kot poslovalnica C.
 - e) Za koliko odstotkov več/manj blaga dobi poslovalnica A od poslovalnice C, če upoštevaš podatke iz naloge c?
3. Zlatar je pri izdelavi zlatega predmeta zлил skupaj 5 g zlate rude (pri čemer je zlata 916,67 promilov, ostalo je baker), 8 g čistega zlata in baker. Izdelal je zlati predmet teže 17,76 g. Nabavna cena 1 g

čistega zlata je 5.000,00 SIT, 1 kg bakra pa 2.000,00 SIT. Zlatar je zlati predmet izdeloval 6 ur in 35 minut. Ena ura dela je vredna 5.500,00 SIT.

- a) Koliko gramov bakra je zlatar dodal v zlati predmet, če ne upoštevash bakra v zlati rudi?
 - b) Kolikšna je bila čistina zlatega predmeta, izražena v karatih?
 - c) Kolikšna je bila nabavna vrednost porabljenega čistega zlata?
 - d) Kolikšna je bila nabavna vrednost vsega porabljenega bakra?
 - e) Kolikšna je bila vrednost opravljenega dela?
 - f) Kolikšna je bila vrednost zlatega predmeta, če upoštevash surovine in delo?
4. Ameriški trgovec je v Angliji kupil 50 long ton (lt) in 4 hundredweight (cwt) premoga, vse skupaj za 472 GBP. Ko je premog prepeljal v ZDA, ga je prepakiral v vreče po 1 quarter (qr) in 6 pound (lb).

$$1 \text{ USD} = 226,38 \text{ SIT} \quad 1 \text{ qr} = 28 \text{ lb (VB)} \quad 1 \text{ lt} = 1016,05 \text{ kg}$$

$$1 \text{ GBP} = 350,55 \text{ SIT} \quad 1 \text{ qr} = 25 \text{ lb (ZDA)} \quad 1 \text{ lt} = 20 \text{ cwt}$$

$$1 \text{ lb} = 0,45 \text{ kg} \quad 1 \text{ cwt} = 4 \text{ qr} \quad 1 \text{ cwt} = 50,80 \text{ kg}$$

- a) Koliko bo vredna ena vreča premoga v ZDA?
- b) Po koliko bo trgovec prodajal eno vrečo premoga v ZDA, če bo obračunal še 49,5 promilov marže?
- c) Kolikšna je vrednost 1 kg premoga v Angliji v SIT?
- d) Koliko vreč premoga je trgovec lahko ponudil v prodajo v ZDA?
- e) Kolikšen bo dobiček trgovca v USD?

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. V letošnjem letu 2003 nameravamo kupiti računalniško opremo v vrednosti 500.000,00 SIT. Trgovec z računalniki ponuja opremo pod naslednjimi pogoji:

- 2 % popusta pri takojšnjem plačilu,
- 1 % popusta pri plačilu v 15 dneh in
- 0 % popusta pri odlogu plačila 30 dni.

Priliv sredstev za nakup opreme prav tako pričakujemo čez 30 dni.

- a) Ali je priporočljivo najeti posojilo pri banki, ki posoja gotovino po 15 odstotni letni obrestni meri (dekurzivno obrestovanje, navadni obrestni račun), ali naj na nakup počakamo do priliva denarja?
- b) Kateri rok plačila bomo izbrali, če se bomo odločili za najem posojila? Odgovor utemelji z izračunom.

2. Ob koncu leta 2000 smo v banko vložili 95.000,00 SIT, na začetku leta 2005 bomo dvignili 30.000,00 SIT, na koncu leta 2009 bomo dvignili še 15.000,00 SIT. Banka prvih devet let obrestuje po šest odstotni letni obrestni meri, nato pa do konca obrestovalnega obdobja po sedem odstotni letni obrestni meri.
- Koliko bi imeli na računu na začetku leta 2016 pri dekurzivnem obrestovanju in celoletni kapitalizaciji?
 - Koliko bi imeli na računu na začetku leta 2016, če bi bila zadnjih šest let kapitalizacija polletna, banka pa bi uporabljala relativno obrestno mero?
 - Koliko bi imeli na računu na začetku leta 2016, če bi bila zadnjih šest let kapitalizacija mesečna, banka pa bi uporabljala konformno obrestno mero?
 - Primerjaj rezultata pri nalogi a in nalogi c ter napiši obrazložitev.
3. Janez je z zavarovalnico sklenil pogodbo o dodatnem prostovoljnem pokojninskem zavarovanju. Na začetku vsakega leta vlaga po 120.000,00 SIT. Zavarovalnica te vloge obrestuje po pet odstotni letni obrestni meri.
- Koliko bo imel na računu po 25 letih varčevanja pri letni kapitalizaciji?
 - Koliko bo imel na računu po 25 letih varčevanja pri mesečni kapitalizaciji in relativni obrestni meri?
 - Koliko časa bi moral varčevati z enakimi letnimi prenumerandnimi zneski po 120.000,00 SIT, če želi pri pet odstotni letni obrestni meri in letni kapitalizaciji privarčevati 8.000.000,00 SIT?
- 4.. Znesek se najprej obrestuje dva meseca po 9,3 odstotni letni obrestni meri, naslednje tri mesece po 14 odstotni letni obrestni meri, zadnji mesec pa se obrestuje po 5,5 odstotni letni obrestni meri.
- Za koliko odstotkov se v celotnem obrestovalnem obdobju poveča začetna glavnica pri konformnem anticipativnem načinu obrestovanja in mesečni kapitalizaciji?
 - Za koliko odstotkov se v celotnem obrestovalnem obdobju poveča začetna glavnica pri dekurzivnem navadnem obrestovanju?
 - Izračunaj povprečno letno obrestno mero v celotnem obrestovalnem obdobju na konformni način.
 - Povprečni letni dekurzivni obrestni meri v celotnem obrestovalnem obdobju, ki ste jo izračunali pri nalogi c, poišči ekvivalentno anticipativno obrestno mero.

Rešitve 1. šolskega tekmovanja

1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. a) Spremembe cen ponazorimo z diagramom:

$$40520 \xrightarrow{-13\%} C_1 \xrightarrow{+x\%} C_2 \xrightarrow{+15\%} C_3 \xrightarrow{+1325} 63941,70.$$

Torej je $C_1 = 40520 \cdot 0,87 = 35252,40$, $C_3 = 62616,70$, $C_2 = 62616,70 \cdot \frac{100}{115} = 54449,30$ in zato $x = \frac{54449,30 - 35252,40}{35252,40} \cdot 100 = 54,46\%$.

- b) Skupna sprememba cene je
- $p = \frac{23421,70}{40520} \cdot 100 = 57,80\%$
- .

- c) Stroški dodatnih storitev so
- $p = \frac{1325}{62616,70} \cdot 100 = 2,12\%$
- .

- d) Zapišemo enačbo
- $40520 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 85730$
- , izrazimo
- p
- in dobimo, da bi se moralo blago trikrat zapored podražiti za
- $p = 28,38\%$
- .

2. a) Zapišemo enačbo
- $5x + 4x + 6x + 5x = 6600$
- , izračunamo
- $x = 330$
- in dobimo
- $A = 5 \cdot 330 = 1650$
- kg,
- $B = 4 \cdot 330 = 1320$
- kg,
- $C = 6 \cdot 330 = 1980$
- kg in
- $D = 5 \cdot 330 = 1650$
- kg.

- b) Najprej izračunamo skupne stroške poslovanja
- $108.000 + 144.000 + 72.000 + 216.000 = 540.000$
- in razmerja
- $\frac{540.000}{108.000} = 5$
- ,
- $\frac{540.000}{144.000} = \frac{15}{4}$
- ,
- $\frac{540.000}{72.000} = \frac{15}{2}$
- ,
- $\frac{540.000}{216.000} = \frac{5}{2}$
- , nato pa iz enačbe

$$5x + \frac{15}{4}x + \frac{15}{2}x + \frac{5}{2}x = 6600$$

izrazimo $x = 352$ in dobimo $A = 5 \cdot 352 = 1760$ kg, $B = \frac{15}{4} \cdot 352 = 1320$ kg, $C = \frac{15}{2} \cdot 352 = 2640$ kg in $D = \frac{5}{2} \cdot 352 = 880$ kg.

- c) S pomočjo rezultatov nalog a in b najprej izračunamo razmerja
- $5 \cdot 5 = 25$
- ,
- $4 \cdot \frac{15}{4} = 15$
- ,
- $6 \cdot \frac{15}{2} = 45$
- ,
- $5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$
- , nato pa iz enačbe

$$25x + 15x + 45x + \frac{25}{2}x = 6600$$

izrazimo $x = 67,69230769$ in dobimo $A = 25 \cdot 67,6923 = 1692,31$ kg, $B = 15 \cdot 67,6923 = 1015,38$ kg, $C = 45 \cdot 67,6923 = 3046,15$ kg in $D = \frac{25}{2} \cdot 67,6923 = 846,15$ kg.

- d) Zapišemo enačbo

$$1,2x + x + (1,2x - 0,4 \cdot 1,2x) + 1,5(1,2x - 0,4 \cdot 1,2x) = 6600,$$

izrazimo $x = 1650$ in dobimo $A = 1,2 \cdot 1650 = 1980$ kg, $B = 1650$ kg, $C = 0,72 \cdot 1650 = 1188$ kg in $D = 1,08 \cdot 1650 = 1782$ kg.

- e) Ker dobi $A = 1692,31$ kg in $C = 3046,15$ kg, dobi poslovalnica A za $\frac{3046,15 - 1692,31}{3046,15} \cdot 100 = 44,44$ % manj blaga od poslovalnice C .

3. a) Zlatar je dodal $17,76 - 5 - 8 = 4,76$ g bakra.
b) Zapišemo enačbo

$$5 \cdot 916,67 + 8 \cdot 1000 + 4,76 \cdot 0 = 17,76 \cdot x,$$

izrazimo $x = 708,52$ in dobimo, da je bila čistina zlatega predmeta $24 \cdot \frac{708,52}{1000} = 17$ karatov.

- c) V zlati rudi je $5 \cdot 0,91667 = 4,58335$ g zlata, torej je zlatar porabil $8 + 4,58335 = 12,58335$ g čistega zlata, za katerega je plačal $12,58335 \cdot 5000 = 62.916,75$ SIT.
d) V zlati rudi je $5 - 4,58335 = 0,41665$ g bakra, torej je zlatar porabil $4,76 + 0,41665 = 5,17665$ g bakra, za katerega je plačal $5,17665 \cdot 2 = 10,35$ SIT.
e) Zlatar je delal 395 minut, vrednost opravljenega dela pa je $5500 \cdot \frac{395}{60} = 36.208,33$ SIT.
f) Vrednost zlatega predmeta je $62.916,75 + 10,35 + 36.208,33 = 99.135,43$ SIT.
4. a) Vsega premoga je 50 lt + 4 cwt = 1004 cwt, v eni vreči pa je 1 qr + 6 lb = 31 lb premoga. Ena vreča premoga bo v ZDA vredna $x = \frac{31 \cdot 0,45 \cdot 472 \cdot 350,55}{1004 \cdot 50,8 \cdot 226,38} = 0,20$ USD.
b) Trговец bo prodajal eno vrečo premoga po $0,2 \cdot 1,0495 = 0,21$ USD.
c) Vsega premoga je $1004 \cdot 50,8 = 51003,2$ kg, torej je vrednost 1 kg premoga v Angliji $x = 472 \cdot \frac{350,55}{51003,2} = 3,24$ SIT.
d) Vsega premoga je $51003,2$ kg, v eni vreči pa je 1 qr + 6 lb = $31 \cdot 0,45 = 13,95$ kg premoga. Ker je $51003,2 : 13,95 = 3656,14$, je vseh vreč premoga 3656 .
e) Dobiček trgovca bo $3656(0,21 - 0,20) = 36,56$ USD.

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. a) Pri takojšnjem plačilu moramo plačati $500000 \cdot 0,98 = 490.000,00$ SIT, obresti pa so $o = 490000 \cdot 0,15 \cdot \frac{30}{365} = 6.041,10$ SIT. Priporočljivo je najeti posojilo za takojšnje plačilo, ker so obresti manjše od $10.000,00$ SIT. Pri plačilu v 15 dneh moramo plačati $500000 \cdot 0,99 = 495.000,00$ SIT, obresti pa so $o = 495000 \cdot 0,15 \cdot \frac{15}{365} = 3.051,37$ SIT. Tudi v tem primeru je

priporočljivo najeti posojilo za plačilo v 15 dneh, ker so obresti manjše od 5.000,00 SIT.

- b) Pri takojšnjem plačilu so stroški $500000 - 10000 + 6041,10 = 496.041,10$ SIT, pri plačilu v 15 dneh pa $500000 - 5000 + 3051,37 = 498.051,37$ SIT. Odločili bi se za takojšnje plačilo, ker je naš prihranek v tem primeru večji.

2. Ob koncu leta 2000 smo v banko vložili 95.000,00 SIT, na začetku leta 2005 bomo dvignili 30.000,00 SIT, na koncu leta 2009 bomo dvignili še 15.000,00 SIT. Banka prvih devet let obrestuje po šest odstotni letni obrestni meri, nato pa do konca obrestovalnega obdobja po sedem odstotni letni obrestni meri.

- a) Izračunamo $x = ((95000 \cdot 1,06^4 - 30000) \cdot 1,06^5 - 15000) \cdot 1,07^6 = 158.107,55$ SIT.
- b) Ker je zadnjih šest let kapitalizacija polletna, je $p'_s = 7\%/2 = 3,5\%$ in zato bi imeli na računu $x = ((95000 \cdot 1,06^4 - 30000) \cdot 1,06^5 - 15000) \cdot 1,035^{12} = 159.196,73$ SIT.
- c) Na računu bi imeli $x = ((95000 \cdot 1,06^4 - 30000) \cdot 1,06^5 - 15000) \cdot \sqrt[12]{1,07^{72}} = 158.107,55$ SIT.
- d) Rezultata sta enaka, saj uporaba konformne obrestne mere zagotavlja, da ima končna glavnica enako vrednost, kot jo ima po prvotni, celoletni kapitalizaciji.

3. a) Uporabimo obrazec $S^{(pre)} = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ in dobimo

$$S^{(pre)} = 120000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{25} - 1}{1,05 - 1} = 6.013.614,45 \text{ SIT}.$$

- b) Tokrat uporabimo obrazec $S^{(pre)} = a \cdot r^M \cdot \frac{r^{n \cdot M} - 1}{r^M - 1}$, pri čemer je $r = 1 + \frac{p}{100 \cdot M} = 1 + \frac{5}{1200}$, in dobimo

$$\begin{aligned} S^{(pre)} &= 120000 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12} \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{25 \cdot 12} - 1}{\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12} - 1} = \\ &= 6.117.610,47 \text{ SIT}. \end{aligned}$$

- c) Ker je $S^{(pre)} = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, je $r^n = \frac{S^{(pre)}(r - 1)}{ar} + 1$ in zato

$$n = \frac{\log\left(\frac{S^{(pre)}(r - 1)}{ar} + 1\right)}{\log r} = \frac{\log\left(\frac{8000000 \cdot 0,05}{120000 \cdot 1,05} + 1\right)}{\log 1,05} = 29,29 \text{ let}.$$

4. a) Po formuli $G_n = G_0 \cdot \varsigma^n$ izračunamo

$$\begin{aligned} G_n &= G_0 \sqrt[12]{\left(\frac{100}{100 - 9,3}\right)^2} \sqrt[12]{\left(\frac{100}{100 - 14}\right)^3} \sqrt[12]{\frac{100}{100 - 5,5}} = \\ &= G_0 \cdot 1,06045. \end{aligned}$$

Začetna glavnica se poveča za 6,05 %.

- b) Po formuli $G_n = G_0 + o$ izračunamo

$$G_n = G_0 + \frac{G_0 \cdot 2 \cdot 9,3}{1200} + \frac{G_0 \cdot 3 \cdot 14}{1200} + \frac{G_0 \cdot 5,5 \cdot 1}{1200} = G_0 \cdot 1,055083.$$

Začetna glavnica se poveča za 5,51 %.

- c) Izračunamo

$$\bar{p} = 100 \cdot \sqrt[3]{1,093^2 \cdot 1,14^3 \cdot 1,055} - 100 = 10,97 \% \text{ p.a.}$$

- d) Velja

$$\pi = \frac{100 \cdot p}{100 + p} = \frac{100 \cdot 10,97}{100 + 10,97} = 9,89 \% \text{ p.a.}$$

1. državno tekmovanje

1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

- V tiskarni so konec lanskega leta natisnili 60 000 žepnih koledarjev, dimenzije 6 cm × 3 cm. Zanje so porabili 120 kg papirja.
 - Koliko izvodov bodo lahko natisnili letos, če bodo koledarji veliki 4 cm × 4 cm, v tiskarni pa bodo imeli na voljo za 20 kg manj papirja? Uporabili bodo tudi za 10 % tanjši papir.
 - Primerjajte število izvodov v lanskem in letošnjem letu in razliko izrazite absolutno in relativno.
- Po kakšnem menjalnem tečaju EUR za 1 USD je nemško podjetje prodalo v ZDA 15 ton blaga, če je iztržilo 3.500,00 USD, cena za 1 kg v Nemčiji pa je 0,26 EUR?
 - Pri izvozu niso imeli dodatnih stroškov.
 - Od iztržka so plačali posredniku pet odstotno provizijo, država pa je izvoz subvencionirala s tremi odstotki od čistega iztržka.
 - Kolikšen bo iztržek, če izvoznik nima dodatnih stroškov, tečaj iz točke a pa se poveča za pet odstotkov?

3. V skladu za nagrade je bilo lani 1.000.000,00 SIT. Prva nagrada je bila 75 % celotnega zneska, druga nagrada je bila za 15.000,00 SIT večja od tretje, četrta pa za 35 % manjša od druge.
- Koliko SIT so znašale posamezne nagrade?
 - Nagradni sklad se je letos povečal za 30 %. Prva in četrta nagrada sta ostali enaki lanskima. Druga in tretja nagrada sta v razmerju 5 : 3. Kolikšne so letos posamezne nagrade?
 - Kolikšne bi bile letos nagrade, če je prvi kandidat dosegel vseh možnih 31 točk, drugi 26 točk, naslednja dva pa sta si delila tretje mesto s po 25 točkami. Za vsako izgubljeno točko, glede na prvouvrščenega, se nagrada zmanjša za 70.000,00 SIT.
4. V zdravilišču polnijo bazene s termalno vodo iz izvira, ki ima temperaturo 54°C .
- V malem termalnem bazenu je temperatura vode 38°C . Bazen je dolg 7 m, širok 3 m, višina vode je 1,5 m. Koliko navadne vode morajo priliti 20 m^3 vode iz izvira?
 - Kakšna mora biti v tem primeru temperatura navadne vode?
 - Večji plavalni bazen je dvakrat daljši in za polovico širši, voda pa je za 30 % globlja kot v malem termalnem bazenu. Izračunajte volumen vode v velikem plavalnem bazenu.
 - Uprava zdravilišča je pocenila vstopnice za bazen. S tem so privabili za 40 % več obiskovalcev dnevno, kot jih je bilo prej. Tako so dnevni prihodek povečali za 15 %. Za koliko odstotkov so znižali cene vstopnic?

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. Dolg je zapadel v plačilo 23. 11. 2002. Če bi ta dolg vrnili 10. 9. 2002, bi z 8,5 odstotnimi diskontnimi obrestmi vred znašal 275.174,80 SIT.
- S kolikšnim zneskom bi ta dolg poravnali ob roku?
 - S kolikšnim zneskom bi poravnali dolg, če bi zamudili s plačilom 20 dni pri 16 odstotni letni zamudni obrestni meri?
 - Kdaj (navedi datum) moramo poravnati dolg, da ne bomo z obrestmi vred plačali več kot 300.000,00 SIT?
 - Za koliko odstotkov bo plačilo pri nalogi b večje od plačila pri nalogi a?

2. Pred šestimi leti smo v banko vložili 125.000,00 SIT, pred dvema letoma smo ponovno vložili 60.000,00 SIT, čez tri leta nameravamo dvigniti 150.000,00 SIT. Banka obrestuje prvih pet let po 10,84 odstotni letni dekurzivni obrestni meri, naslednjih pet let po 9,6 odstotni letni dekurzivni obrestni meri, nato pa do konca obrestovanja po 6 odstotni letni dekurzivni obrestni meri.
- Koliko lahko dvignemo čez osem let, če je kapitalizacija ves čas letna?
 - Koliko lahko dvignemo čez osem let, če je kapitalizacija prvih pet let četrletna, naslednjih pet let dvomesečna, nato pa do konca obrestovanja mesečna? Obrestovanje je dekurzivno, z relativno obrestno mero.
 - Koliko moramo še vložiti čez šest let, če želimo imeti čez osem let 400.000,00 SIT in je kapitalizacija enaka kot pri nalogi b)?
3. Miha se je odločil za rentno varčevanje.
- Koliko bo imel po desetih letih varčevanja, če bo vlagal na začetku vsakega leta po 60.000,00 SIT pri 12 odstotni letni dekurzivni obrestni meri in letni kapitalizaciji?
 - Koliko mora vlagati na začetku vsakega leta desetih let pri $p = 12\%$ p.a. in četrletni kapitalizaciji, da bo privarčeval 2.000.000,00 SIT? Obrestovanje je relativno.
 - Koliko bo privarčeval v desetih letih, če vlaga na koncu vsakega meseca po 5.000,00 SIT pri $p = 12\%$ p.a. in letni kapitalizaciji, banka pa uporablja mešano obrestovanje?
 - Kolikšno polletno postnumerandno rento bo lahko prejemal pet let po zadnji vlogi, če je najprej vlagal deset let na začetku vsakega leta po 60.000,00 SIT pri $p = 12\%$ p.a., četrletni kapitalizaciji in se pod enakimi pogoji obrestuje tudi renta? Obrestovanje je relativno.
4. Glavnica 30.000,00 SIT se obrestuje tri leta po $p_1 = 9\%$ p.a., nato še pet let po $p_2 = 10,5\%$ p.a..
- Izračunaj končno glavnico, če je kapitalizacija mesečna in obrestovanje konformno.
 - Koliko časa se mora še obrestovati pri $p = 11\%$ p.a. in mesečni kapitalizaciji, da bo narasla na 80.000,00 SIT? Obrestovanje je konformno.
 - Po kolikšni letni dekurzivni obrestni meri in mesečni kapitalizaciji se mora končna glavnica iz naloge a obrestovati še štiri leta, da bo narasla na 100.000,00 SIT? Obrestovanje je konformno.

Rešitve 1. državnega tekmovanja**1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)**

1. a) Letos bodo lahko natisnili

$$x = \frac{60000 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 100}{4 \cdot 4 \cdot 120 \cdot 90} = 62500 \text{ izvodov}.$$

- b) Letos bo tiskarna natisnila
- $62500 - 60000 = 2500$
- izvodov žepnih koledarjev več kot lani oziroma za
- $x = \frac{2500 \cdot 100}{60000} = 4,17 \%$
- izvodov žepnih koledarjev več kot lani.

2. a) Menjalni tečaj je bil

$$x = \frac{15 \cdot 1000 \cdot 0,26}{3500} = 1,11 \text{ EUR/USD}.$$

- b) V tem primeru je tečaj

$$x = \frac{15 \cdot 1000 \cdot 0,26 \cdot 95 \cdot 103}{100 \cdot 3500 \cdot 100} = 1,09 \text{ EUR/USD}.$$

- c) Iztržek bo

$$x = \frac{15000 \cdot 0,26}{1,114285714 \cdot 1,05} = 3.333,33 \text{ USD}.$$

3. a) Če označimo z
- x
- vrednost druge nagrade, potem dobimo enačbo

$$0,75 \cdot 1000000 + x + x - 15000 + 0,65 \cdot x = 1000000,$$

iz katere izrazimo $x = 100000$. Torej je bila prva nagrada 750.000,00 SIT, druga nagrada 100.000,00 SIT, tretja nagrada 85.000,00 SIT in četrta nagrada 65.000,00 SIT.

- b) Nagradni sklad je letos
- $1,3 \cdot 1000000 = 1.300.000,00$
- SIT, zato je znesek za drugo in tretjo nagrado enak
- $1300000 - 750000 - 65000 = 485.000,00$
- SIT. Ker sta druga in tretja nagrada v razmerju 5 : 3, iz enačbe
- $5 \cdot x + 3 \cdot x = 485000$
- izrazimo
- $x = 60625$
- in dobimo, da je druga nagrada
- $5 \cdot x = 303.125,00$
- SIT in tretja nagrada
- $3 \cdot x = 181.875,00$
- SIT.

- c) Če označimo z
- x
- znesek prve nagrade, potem dobimo enačbo

$$x + x - 5 \cdot 70000 + x - 6 \cdot 70000 + x - 6 \cdot 70000 = 1300000,$$

iz katere izrazimo $x = 622500$. Torej bi bila prva nagrada 622.500,00 SIT, druga nagrada 272.500,00 SIT, tretja nagrada 202.500,00 SIT in četrta nagrada 202.500,00 SIT.

4. a) Prostornina vode v bazenu je $V = 7 \cdot 3 \cdot 1,5 = 31,5 \text{ m}^3$, torej morajo priliti $x = 31,5 - 20 = 11,5 \text{ m}^3$ vode.
 b) Zapišemo enačbo

$$20 \cdot 54 + 11,5 \cdot x = 31,5 \cdot 38$$

in dobimo, da mora biti temperatura navadne vode $x = 10,17^\circ \text{ C}$.

- c) Prostornina vode v velikem plavalnem bazenu je

$$V = 7 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 1,3 \cdot 1,5 \cdot 3 = 122,85 \text{ m}^3.$$

- d) Označimo dnevni prihodek s p , število obiskovalcev z o , ceno vstopnice z v , spremembo cene pa z x . Potem je bil prihodek pred spremembo $p = o \cdot v$, po spremembi pa

$$1,15 \cdot p = 1,4 \cdot o \cdot x \cdot v.$$

Sledi, da je $x = \frac{1,15}{1,4} = 0,82$, torej so se cene vstopnic znižale za 18 %.

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. a) Označimo vrednost predčasno odplačanega dolga z $G^- = 275174,80$, število dni pred rokom z $d_1 = 74$ in obresti s $p_1 = 8,5$. Iz obrazca $G^- = G \cdot \left(1 - \frac{p \cdot d}{36500}\right)$ nato izrazimo vrednost dolga ob roku

$$G = \frac{G^-}{1 - \frac{p \cdot d}{36500}} = \frac{275174,80}{1 - \frac{8,5 \cdot 74}{36500}} = 280.000,00 \text{ SIT}.$$

- b) Označimo zamudne obresti s $p = 16$ in število dni zamude z $d_2 = 20$. Znesek dolga z zamudnimi obrestmi je potem

$$G^+ = G \cdot \left(1 + \frac{p \cdot d}{36500}\right) = 280000 \cdot \left(1 + \frac{16 \cdot 20}{36500}\right) = 282.454,80 \text{ SIT}.$$

- c) Označimo znesek obresti z $o = 300000 - 280000 = 20000$. Iz obrazca $o = \frac{G \cdot p \cdot d}{36500}$ izrazimo število dni in dobimo

$$d = \frac{20000 \cdot 36500}{280000 \cdot 16} = 162 \text{ dni}.$$

Upoštevamo število dni po mesecih:

N	D	J	F	M	A	M
7	31	31	28	31	30	4

in ugotovimo, da moramo dolg poravnati 4. 5. 2003.

d) Število bo večje za

$$x = \frac{(282454,80 - 280000) \cdot 100}{280000} = 0,88 \, \%.$$

2. a) Čez osem let lahko dvignemo

$$\begin{aligned} G_{14} &= 125000 \cdot 1,1084^5 \cdot 1,096^5 \cdot 1,06^4 + \\ &\quad + 60000 \cdot 1,1084 \cdot 1,096^5 \cdot 1,06^4 - 150000 \cdot 1,096 \cdot 1,06^4 = \\ &= 417511,8731 + 132777,3508 - 207551,2122 = \\ &= 342.738,01 \text{ SIT}. \end{aligned}$$

b) V tem primeru lahko dvignemo čez osem let

$$\begin{aligned} G_{14} &= 125000 \cdot 1,0271^{20} \cdot 1,016^{30} \cdot 1,005^{48} + \\ &\quad + 60000 \cdot 1,0271^4 \cdot 1,016^{30} \cdot 1,005^{48} - \\ &\quad - 150000 \cdot 1,016^6 \cdot 1,005^{48} = \\ &= 436462,3635 + 136579,1388 - 209616,0202 = \\ &= 363.425,48 \text{ SIT}. \end{aligned}$$

c) Ker je $363425,4821 + x \cdot 1,005^{24} = 400000$, moramo vložiti še

$$x = \frac{400000 - 363425,4821}{1,005^{24}} = 32.448,39 \text{ SIT}.$$

3. a) Po desetih letih varčevanja bo imel

$$\begin{aligned} S_{10}^{(z)} &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7 + ar^8 + ar^9 + ar^{10} = \\ &= ar \left(\frac{r^{10} - 1}{r - 1} \right) = 60000 \cdot 1,12 \cdot \left(\frac{1,12^{10} - 1}{1,12 - 1} \right) = \\ &= 1.179.275,00 \text{ SIT}. \end{aligned}$$

b) Iz obrazca

$$S_{10}^{(z)} = ar^4 + ar^8 + \dots + ar^{36} + ar^{40} = ar^4 \left(\frac{r^{40} - 1}{r^4 - 1} \right)$$

izrazimo a in dobimo, da mora vlagati

$$a = \frac{S_{10}^{(z)}}{r^4 \left(\frac{r^{40} - 1}{r^4 - 1} \right)} = \frac{2000000}{1,03^4 \left(\frac{1,03^{40} - 1}{1,03^4 - 1} \right)} = 98.595,10 \text{ SIT}.$$

- c) V enem letu bo vložil v banko

$$\begin{aligned} A &= a + \frac{a \cdot p \cdot 1}{1200} + a + \frac{a \cdot p \cdot 2}{1200} + \dots + a + \frac{a \cdot p \cdot 11}{1200} = \\ &= a \left(12 + \frac{p \cdot 66}{1200} \right) = 5000 \left(12 + \frac{12 \cdot 66}{1200} \right) = 63.300,00 \text{ SIT} . \end{aligned}$$

V desetih letih bo privarčeval

$$\begin{aligned} S_{10}^{(k)} &= A + Ar + Ar^2 + \dots + Ar^9 = A \left(\frac{r^{10} - 1}{r - 1} \right) = \\ &= 63300 \left(\frac{1,12^{10} - 1}{1,12 - 1} \right) = 1,110.834,93 \text{ SIT} . \end{aligned}$$

- d) Zapišemo enakost

$$ar^{24} + ar^{28} + \dots + ar^{56} + ar^{60} = b + br^2 + \dots + br^{16} + br^{18} ,$$

torej je

$$ar^{24} \left(\frac{r^{40} - 1}{r^4 - 1} \right) = b \left(\frac{r^{20} - 1}{r^2 - 1} \right)$$

in zato

$$b = \frac{a \cdot r^{24} \cdot \frac{r^{40} - 1}{r^4 - 1}}{\frac{r^{20} - 1}{r^2 - 1}} = \frac{60000 \cdot 1,03^{24} \cdot \frac{1,03^{40} - 1}{1,03^4 - 1}}{\frac{1,03^{20} - 1}{1,03^2 - 1}} = 166.070,54 \text{ SIT} .$$

4. a) Najprej izračunamo $r_1 = \sqrt[12]{1,09} = 1,007207329$ in $r_2 = \sqrt[12]{1,105} = 1,008355156$. Končna glavnica je

$$\begin{aligned} G_8 &= G_0 \cdot r_1^{36} \cdot r_2^{60} = 30000 \cdot 1,007207329^{36} \cdot 1,008355156^{60} = \\ &= 64.004,75 \text{ SIT} . \end{aligned}$$

- b) Najprej izračunamo $r = \sqrt[12]{1,11} = 1,008734594$. Iz obrazca $G_0 \cdot r^{12n} = G_n$ nato izrazimo n in dobimo, da se mora obrestovati še

$$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{12 \cdot \log r} = \frac{\log 80000 - \log 64004,75434}{12 \cdot \log 1,008734594} = 2,14 \text{ let} .$$

- c) Obrestna mera mora biti

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right) = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{100000}{64004,75434}} - 1 \right) = 11,80 \% .$$

MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Izbirno tekmovanje

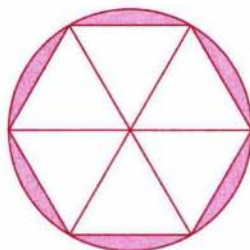
Prvi letnik

1. Poišči vsa naravna števila, za katera velja: Če številu prištejemo vsoto njegovih števk, dobimo 313.
2. Naj bo M razpolovišče stranice BC in N razpolovišče stranice CD pravokotnika $ABCD$. Določi razmerje dolžin stranic pravokotnika $ABCD$, če je AMN pravokotni trikotnik s hipotenuzo AM .
3. Naj bo $a^2 + c^2 = 2b^2$ za pozitivna števila a , b in c . Dokaži, da velja

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}.$$

4. Babica je razrezala okroglo pice na šest enakostraničnih trikotnikov in šest krožnih odsekov, kot prikazuje slika. Vsak izmed šestih vnukov je pojedel en trikotnik. Ker vnuki ne marajo robov, je krožne odseke pice pojedel pes Muri. Kdo je pojedel več pice, en vnuk ali Muri?

(Uporabiti smeš, da je $\frac{31}{10} < \pi < \frac{22}{7}$.)



5. Naj bosta a in b naravni števili, večji od 1, za kateri velja $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$. Katera je najmanjša možna vrednost vsote $a + b$?

Drugi letnik

1. Naj bo $a + b + c = 0$. Dokaži, da velja $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
2. V paralelogramu $ABCD$ označimo zaporedoma z A_1 , B_1 in D_1 razpolovišča stranic BC , CD in AB . Daljici DD_1 in BB_1 sekata AA_1 v točkah M in N . Dokaži, da je $|MN| = \frac{2}{5}|AA_1|$.
3. Dan je trapez z osnovnicama AB in CD , ki merita zaporedoma 5 cm in 1 cm. Naj bosta M in N takšni točki na AD in BC , da je daljica MN vzporedna z osnovnico AB , ploščina štirikotnika $ABNM$ pa je dvakrat večja od ploščine štirikotnika $CDMN$. Koliko centimetrov meri daljica MN ?

- Barbara je na predzadnjem testu v šolskem letu dosegla 98 točk in tako zvišala povprečje do takrat doseženih točk za eno točko. Na zadnjem testu je dosegla 70 točk in znižala novo povprečje za dve točki. Koliko testov je pisala v celem šolskem letu?
- Kolikšen ostanek dobimo, ko število 2002^{2001} delimo z 2003? Odgovor utemelji.

Tretji letnik

- Za pozitivni realni števili x in y velja

$$2 \log(x - 2y) = \log x + \log y.$$

Koliko je $\frac{x}{y}$?

- Naj bosta p in q taki praštevili, da sta tudi $p + q$ in $p - q$ praštevili. Dokaži, da je $p^2 - q$ praštevilo.
- Naj bo D razpolovišče tistega loka $\widehat{AB}$ trikotniku ABC očrtane krožnice, na katerem ne leži točka C . Izrazi dolžino daljice AD z dolžinami $a = |BC|$, $b = |AC|$ in $c = |AB|$.
- Na eno polje tabele velikosti 5×5 smo postavili žeton, ostala polja pa smo brez prekrivanja pokrili z dominami velikosti 3×1 . Določi vse možne položaje žetona.
- Poišči vsa realna števila x in y , ki zadoščajo enačbi

$$(x + y)^2 = (x + 3)(y - 3).$$

Četrty letnik

- Dokaži, da je

$$\frac{1}{\log_2 2003} + \frac{1}{\log_3 2003} + \cdots + \frac{1}{\log_{100} 2003} = \frac{1}{\log_{100!} 2003},$$

kjer je $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99 \cdot 100$.

- Dan je paralelogram $ABCD$, v katerem je stranica AB daljša od stranice AD . Na premici AB naj bo X takšna točka, ki ne leži med A in B , da je $|AD| = |BX|$. Simetrala kota $\sphericalangle BAD$ seka premici CD in BC v točkah E in F . Dokaži, da je $|EX| = |FX|$.

- Poišči vsa taka naravna števila n , da dobimo pri deljenju števila 2003 z n ostanek 7.
- Poišči vse možnosti, kako lahko število 2003 zapišemo kot vsoto vsaj dveh zaporednih naravnih števil.
- Poišči vse rešitve sistema enačb

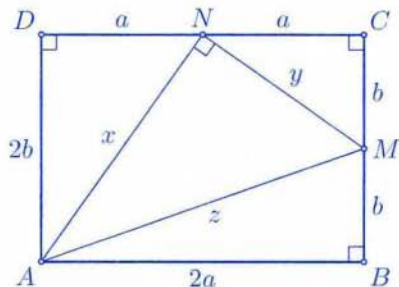
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25 \quad \text{in} \\x + y + xy &= 19.\end{aligned}$$

Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

I/1. Iskana števila so trimestna. Pišimo: $n = 100a + 10b + c$. Tedaj velja $100a + 10b + c + a + b + c = 313$ oziroma $101a + 11b + 2c = 313$. Premisliti moramo o dveh možnih vrednostih števk a , in sicer 2 in 3. Izberimo najprej $a = 2$. Tedaj je $11b + 2c = 111$, kar je možno le, če izberemo $b = 9$ in $c = 6$. Eno od iskanih števil je 296. Poglejmo še možnost $a = 3$. Tedaj je $11b + 2c = 10$, kar pomeni, da je $b = 0$ in $c = 5$. Drugo število s to lastnostjo je 305.

I/2. 1. način Pišimo $|AB| = 2a$ in $|BC| = 2b$. Ker je kot $\angle ANM = \frac{\pi}{2}$ pravi, je $\angle DNA + \angle MNC = \frac{\pi}{2}$. Sledi $\angle CMN = \frac{\pi}{2} - \angle NMC = \angle DNA$. Torej sta si pravokotna trikotnika AND in NMC podobna, od koder sledi $|AD| : |DN| = |NC| : |CM|$ oziroma $\frac{2b}{a} = \frac{a}{b}$. Sledi $a^2 = 2b^2$ in

$$a : b = \sqrt{2} : 1.$$



2. način Označimo še $|AN| = x$, $|NM| = y$, $|AM| = z$. Po Pitagorovem izreku je $x^2 = a^2 + 4b^2$, $y^2 = a^2 + b^2$, $z^2 = 4a^2 + b^2$ in $z^2 = x^2 + y^2$. Če izraza za x^2 in y^2 iz prve in druge enačbe upoštevamo v četrti, dobimo $z^2 = 2a^2 + 5b^2$. Nato izenačimo desni strani tretje in dobljene enačbe. Poenostavimo in dobimo $a^2 = 2b^2$, torej je $a : b = \sqrt{2} : 1$.

I/3. Iz $2b^2 = a^2 + c^2$ sledi $2b^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$, kar lahko razstavimo v $2(a+b)(b+c) = (a+c)^2 + 2b(a+c) = (a+c)(a+2b+c)$. Torej je $\frac{2}{a+c} = \frac{a+b+b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$, kot je bilo potrebno dokazati.

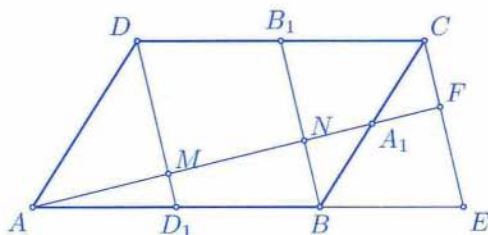
I/4. Denimo, da ima pica polmer r . Enakostranični trikotnik ima ploščino $r^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, krožni odsek pa $\frac{1}{6}\pi r^2 - r^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Muri je pojedel vseh šest krožnih odsekov, skupaj torej $r^2(\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{2})$. Torej je treba primerjati $\frac{\sqrt{3}}{4}$ in $\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dokažimo, da je Muri pojedel več, ker je $\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{4}$ oziroma $\pi > \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} = 7\frac{\sqrt{3}}{4}$. Res, če uporabimo spodnji približek $\frac{31}{10}$ za π , vidimo, da velja $\pi^2 > \frac{961}{100} > \frac{49 \cdot 3}{16}$, saj je $961 \cdot 16 = 15376 > 14700 = 100 \cdot 49 \cdot 3$, torej $\pi^2 > (\frac{7\sqrt{3}}{4})^2$.

I/5. Iz $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$ po vrsti dobimo $a\sqrt{a\sqrt{a}} = b^2$, $a^3\sqrt{a} = b^4$ in $a^7 = b^8$. To pomeni, da je število a osma potenca, število b pa sedma potenca naravnega števila, večjega od 1. Ker iščemo najmanjšo možno vsoto števil a in b , vzamemo $a = 2^8$ in $b = 2^7$. Tedaj je $a + b = 256 + 128 = 384$.

II/1. 1. način Ker je $c = -a - b$, velja $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc$.

2. način Najprej se spomnimo, da velja $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$. Torej je $0 = (a + b + c)^3 = (a + b)^3 + c^3 + 3(a + b)c(a + b + c) = (a + b)^3 + c^3$, saj je $a + b + c = 0$. Če upoštevamo še $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = a^3 + b^3 + 3ab(-c)$, dobimo želeno enakost $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

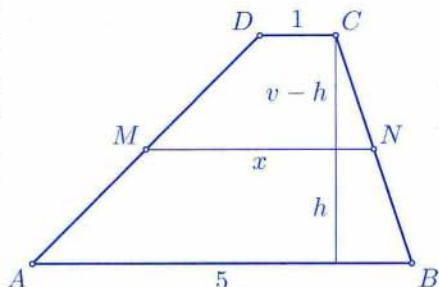
II/2. Ker sta daljici DD_1 in BB_1 vzporedni in je $|AD_1| = |D_1B|$, je $|AM| = |MN|$. Narišimo še vzporednico k B_1B skozi C in označimo njeno presečišče s premico AB z E . Naj bo F presečišče premice AA_1 s premico CE . Potem je $|BE| = |D_1B| = |AD_1|$, zato je $|NF| = |MN| = |AM|$. Trikotnika BA_1N in CA_1F sta skladna, zato je $|A_1N| = |A_1F|$. Torej je $|A_1N| = \frac{1}{2}|MN|$ in $|AA_1| = \frac{5}{2}|MN|$, od koder dobimo $|MN| = \frac{2}{5}|AA_1|$.



II/3. Označimo dolžino MN z x , višino trapeza $ABCD$ z v in višino trapeza $ABNM$ s h . Potem je $S_{ABNM} = \frac{(x+5)}{2} \cdot h$ in $S_{CDMN} = \frac{x+1}{2} \cdot (v-h)$. Ker velja $S_{ABNM} = 2S_{CDMN}$ in $S_{ABNM} + S_{CDMN} = S_{ABCD}$, dobimo enačbi

$$\frac{(x+5)}{2} \cdot h = 2 \frac{x+1}{2} \cdot (v-h),$$

$$\frac{(x+5)}{2} \cdot h + \frac{x+1}{2} \cdot (v-h) = \frac{1+5}{2} v.$$



Iz prve izrazimo $h = \frac{x+1}{3x+7} \cdot 2v$ in vstavimo v drugo. Dobljeno enačbo lahko delimo z v in krajši račun pokaže, da je $x^2 = 9$ oziroma $x = 3$. Torej daljica MN meri 3 cm.

II/4. Denimo, da je Barbara pred zadnjima dvema testoma pisala n testov in je imela povprečje m točk. Tedaj velja

$$\frac{n \cdot m + 98}{n + 1} = m + 1 \quad (1)$$

$$\text{in } \frac{n \cdot m + 98 + 70}{n + 2} = m + 1 - 2 = m - 1. \quad (2)$$

Iz prve enačbe dobimo $n \cdot m + 98 = n \cdot m + n + m + 1$ oziroma $m + n = 97$, iz druge pa $n \cdot m + 168 = n \cdot m - n + 2m - 2$ oziroma $2m - n = 170$. Tako pridemo do $3m = 267$ oziroma $m = 89$ ter $n = 8$. To pomeni, da je Barbara v celem šolskem letu pisala deset testov.

II/5. 1. način Če dá število a ostanek 2002 pri deljenju z 2003, potem je $a = 2003 \cdot a' + 2002$ za neko celo število a' . Zmnožek $2002 \cdot a$ dá ostanek 1 pri deljenju z 2003, ker je

$$2002 \cdot a = 2003 \cdot 2002 \cdot a' + 2002^2 = 2003 \cdot (2002 \cdot a' + 2001) + 1.$$

Če dá število b ostanek 1 pri deljenju z 2003, potem je $b = 2003 \cdot b' + 1$ za neko celo število b' . Zmnožek $2002 \cdot b$ dá ostanek 2002 pri deljenju z 2003, ker je

$$2002 \cdot b = 2003 \cdot 2002 \cdot b' + 2002.$$

Od tod sklepamo, da potence števila 2002 izmenično dajo ostanka 2002 in 1 pri deljenju z 2003. Potenca 2002^{2001} ima lih eksponent, zato dá ostanek 2002 pri deljenju z 2003.

2. način Pišimo $a = 2003$. Ko razstavimo $(a - 1)^{2001}$, so deljivi z a vsi členi razen $(-1)^{2001} = -1$. Ta člen ima ostanek 2002 pri deljenju z 2003. Torej je ostanek 2002.

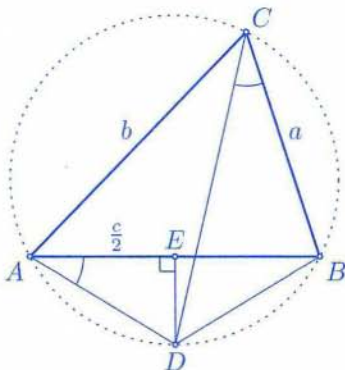
3. način Gornji sklep lahko zapišemo s kongruencami: iz $2002 \equiv -1 \pmod{2003}$ sledi $2002^{2001} \equiv (-1)^{2001} \equiv -1 \equiv 2002 \pmod{2003}$.

III/1. Da bi bil $\log(x - 2y)$ definiran, mora veljati $x > 2y$. Enačbo lahko zapišemo kot $\log(x - 2y)^2 = \log(xy)$, od koder sledi $(x - 2y)^2 = xy$ oziroma $(x - 4y)(x - y) = 0$. Zaradi pogoja, ki mu morata zadoščati x in y , rešitev $x = y$ ni možna, zato je $x = 4y$ oziroma $\frac{x}{y} = 4$.

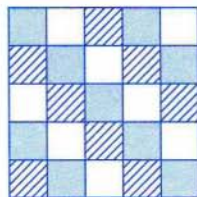
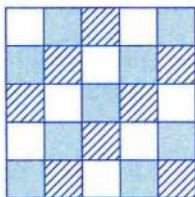
III/2. Če sta p in q lihi števili, je $p + q > 2$ sodo. Torej mora biti vsaj eno od števil p in q sodo. Ker je $p > q$, je tako $q = 2$. Med praštevili p , $p - 2$ in $p + 2$ je natanko eno deljivo s 3, zato je enako 3. Torej je lahko $p = 5$ in je $p^2 - q = 23$ res praštevilo.

III/3. Kota $\sphericalangle ACD$ in $\sphericalangle DCB$ sta kota nad enako dolgima tetivama, zato sta skladna in je CD simetrala kota $\sphericalangle ACB = \gamma$. Torej je $\sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$ in zato $\sphericalangle DAB = \frac{\gamma}{2}$. Označimo z E razpolovišče stranice AB . Tedaj je $|AE| = \frac{c}{2}$ in zato

$$\begin{aligned} |AD| &= \frac{c}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{2 \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}}} = \\ &= \frac{c}{\sqrt{2(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})}} = \\ &= c \sqrt{\frac{ab}{(a+b+c)(a+b-c)}}. \end{aligned}$$



III/4. Obarvajmo polja tabele s tremi barvami na dva načina. Ker vsaka izmed domin velikosti 3×1 prekrije po eno polje vsake barve, morajo biti števila pokritih polj vsake barve enaka. Ker imamo na vsaki sliki



devet sivih polj  in po osem polj drugih dveh barv, mora biti žeton v obeh tabelah na enem izmed sivih polj. Edino polje, ki je pri obeh

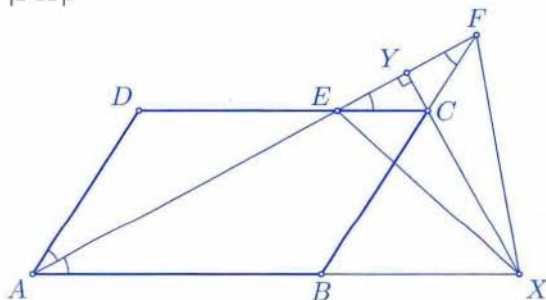
barvanjih sivo, je središčno polje tabele. Tekmovalec se bo sam prepričal, da je ostala polja tabele velikosti 5×5 res možno prekrižati z dominami velikosti 3×1 .

III/5. Ko enačbo poenostavimo, dobimo $x^2 + x(y + 3) + (y^2 - 3y + 9) = 0$. Da bi ta kvadratna enačba imela kakšno realno rešitev, mora biti njena diskriminanta $D = (y + 3)^2 - 4(y^2 - 3y + 9) = -3(y - 3)^2$ nenegativna. Torej je lahko le $y = 3$, kar nam da $x = -3$. Prvotni enačbi zadoščata le realni števili $x = -3$ in $y = 3$.

IV/1. Spomnimo se, da velja $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Izračunamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 2003} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 2003} &= \frac{\ln 2}{\ln 2003} + \dots + \frac{\ln 100}{\ln 2003} = \\ &= \frac{\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln 100}{\ln 2003} = \\ &= \frac{\ln(100!)}{\ln 2003} = \frac{1}{\log_{100!} 2003}. \end{aligned}$$

IV/2. Označimo kot $\sphericalangle BAD$ z 2α . Potem je kot $\sphericalangle BAE = \alpha$ in tudi kot $\sphericalangle CEF = \alpha$. V trikotniku ABF je kot $\sphericalangle ABF = \pi - 2\alpha$, zato je $\sphericalangle BFA = \alpha$ in je ABF enakokrak. Potem je tudi ECF enakokrak. Narišimo premico skozi C in X ter označimo presečišče s simetralo z Y . Ker je trikotnik XBC enakokrak in je kot $\sphericalangle XBC$ enak 2α , je kot $\sphericalangle BCX = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Potem je tudi $\sphericalangle FCY = \frac{\pi}{2} - \alpha$ in zato je $\sphericalangle CYF = \frac{\pi}{2}$. Videli smo že, da je trikotnik ECF enakokrak, zato je $|EY| = |YF|$ in tudi $|EX| = |FX|$.



IV/3. Ker mora dati število 2003 pri deljenju z n ostanek 7, je $n > 7$, število $2003 - 7 = 1996$ pa mora biti deljivo z n . Iz praštevilskega razcepa $1996 = 2^2 \cdot 499$ vidimo, da je lahko $n = 499$, $n = 2 \cdot 499 = 998$ ali $n = 2^2 \cdot 499 = 1996$.

IV/4. $2003 = n + (n+1) + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 + n}{2} = \frac{(m-n)(m+n) + m+n}{2} = \frac{(m-n+1)(m+n)}{2}$. Torej je $4006 = (m-n+1)(m+n)$. Ker je $1 < m-n+1 < m+n$ (prva neenakost velja, ker je v vsoti več kot eno število) in ker je 2003 praštevilo, je edina možnost $m-n+1 = 2$ in $m+n = 2003$, zato je $n = 1001$ in $m = 1002$. Število 2003 lahko zapišemo le kot vsoto dveh zaporednih naravnih števil, t.j. $2003 = 1001 + 1002$.

IV/5. Drugo enačbo pomnožimo z 2 in prištejemo prvi, dobimo

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy = 25 + 2 \cdot 19,$$

preoblikujemo v $(x+y)^2 + 2(x+y) = 63$ ter razstavimo $(x+y-7)(x+y+9) = 0$. Če je $x+y = 7$, iz druge enačbe sledi $xy = 12$. Iz teh enačb dobimo kvadratno enačbo za x , ki se lepo razstavi na $(x-3)(x-4) = 0$. Dobimo rešitvi $x = 3, y = 4$ in $x = 4, y = 3$. Pri $x+y = -9$ sledi $xy = 28$ in kvadratna enačba za x , ki jo izpeljemo, t.j. $x^2 + 9x + 28$, ima negativno diskriminanto, zato drugih rešitev ni.

Državno tekmovanje

Prvi letnik

1. Dano je praštevilo p . Poišči vsa naravna števila x in y , ki zadoščajo enačbi $p \cdot (x-5) = x \cdot y$.
2. Metka stoji 60 m vzhodno in 80 m južno od kraja, kjer stoji Tine. Oba sta enako oddaljena od lipe v mestnem parku, ki je naravnost vzhodno od kraja, kjer je Tine. Sočasno se vsak s svojega kraja odpravita naravnost proti lipi. Koliko metrov poti bo vsak izmed njiju prehodil do skupnega srečanja pod lipo?
3. Dana je krožnica k s premerom AB . Na njej izberemo točko M , ki ne sovpa ne z A in ne z B . Naj bo k_1 krožnica, ki ima središče v M in se dotika premere AB . Dokaži, da sta tangenta iz točke A in tangenta iz točke B na krožnico k_1 vzporedni.
4. Krt je izkopal podzemne sobe in jih povezal z rovi tako, da iz vsake sobe vodijo natanko trije rovi v tri različne sobe. Rovi se med seboj ne sekajo. Med poljubnimi tremi sobami vedno obstajata dve, ki nista povezani z rovom. Dokaži, da je krt izkopal vsaj šest sob. Ali je možno, da je krt izkopal natanko šest sob?

Drugi letnik

1. Za ulomek $\frac{m}{n}$, kjer sta m in n naravni števili, velja $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$. Če števcu prištejemo naravno število, imenovalc pa s tem številom pomnožimo, se vrednost ulomka ne spremeni. Poišči vse take ulomke $\frac{m}{n}$.
2. Vsota in zmnožek dveh ulomkov sta celi števili. Eden izmed ulomkov ima imenovalc 2003. Dokaži, da sta tudi oba ulomka celi števili.
3. Naj točka X leži na simetrali daljice AB in ne na premici AB . Naj bo C poljubna točka v notranjosti daljice AB . Dokaži, da imata trikotnikoma ACX in CBX očrtani krožnici enaka polmera ne glede na izbiro točke C .
4. V jami pod Krimom spi grozna pošast. Ko postane lačna, se zbudi in požre toliko ovc, kolikor je vsota števk tistega leta. Potem spet zaspi za toliko let, kolikor ovc je pojedla. Vemo, da se je zbudila 12. aprila leta 354. Ali je pošast lahko pred vrati?

Tretji letnik

1. Naj za polinom $p(x)$ s celimi koeficienti velja $p(3) = 2$. Ali je število $p(2003)$ lahko popolni kvadrat?
2. Naj bo X presečišče diagonal konveksnega štirikotnika $ABCD$. Dokaži, da se trikotnikoma ABX in CDX očrtani krožnici dotikata natanko tedaj, ko je $AB \parallel CD$.
3. Na voljo imamo šest različnih barv in veliko kock. Posamezno kocko pobarvamo z vsemi šestimi barvami, in sicer vsako mejno ploskev z eno barvo. Največ koliko kock lahko pobarvamo, če naj bo vsaka izmed njih drugače pobarvana? (Če lahko eno izmed pobarvanih kock zasučemo tako, da so barve mejnih ploskev enako razporejene kot na drugi kocki, sta kocki enako pobarvani.)
4. V jami pod Krimom spi grozna pošast. Ko postane lačna, se zbudi in požre toliko ovc, kolikor je vsota števk tistega leta. Potem spet zaspi za toliko let, kolikor ovc je pojedla. Vemo, da se je zbudila 12. aprila leta 666. Ali je pošast lahko pred vrati? Ali se bo lahko zbudila leta 3003?

Četrty letnik

1. Dano je aritmetično zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots$. Označimo z s_i vsoto prvih i členov tega zaporedja, z s_j vsoto prvih j členov in z s_k vsoto prvih k členov. Dokaži, da vrednost izraza

$$\frac{s_i}{i}(j-k) + \frac{s_j}{j}(k-i) + \frac{s_k}{k}(i-j)$$

ni odvisna niti od izbire števil i, j in k niti od zaporedja.

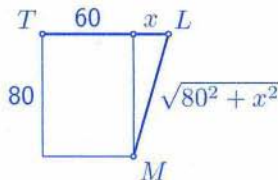
2. V letalu, ki ima 62 vrst s šestimi sedeži v vsaki vrsti, so se potniki posedli tako, da v nobenih dveh vrstah niso zasedeni sedeži na istih mestih. Največ koliko potnikov je lahko v letalu?
3. Naj bo D razpolovišče hipotenuze AB pravokotnega trikotnika ABC . Označimo z O_1 in O_2 središči trikotnikoma ADC in DBC očrtanih krožnic. Dokaži, da je AB tangenta na krožnico s premerom O_1O_2 .
4. Maček iz sosednje vasi hodi v Butale dražit vaške pse. Vsak večer, ko že vsi spiyo, se prikrade v Butale, na ves glas zamijavka, nato pa jo ucvre nazaj domov. Ko maček zamijavka, zalajajo vsi psi, ki so od njega oddaljeni do 90 m. Ker so Butale majhna vas, sta vsaka dva psa v vasi med seboj oddaljena do 100 m. Ali se lahko maček postavi tako, da nanj zalajajo vsi vaški psi hkrati?

Rešitve nalog z državnega tekmovanja

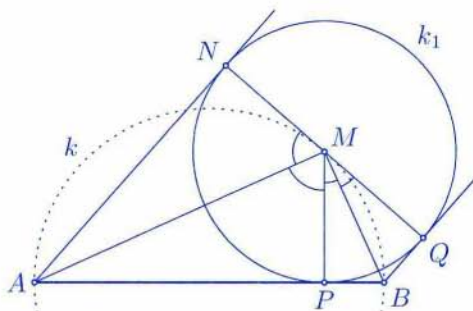
I/1. Ker je p praštevilo, ločimo dve možnosti: p deli x ali pa y . Oglejmo si najprej možnost, ko p deli x . Tedaj lahko zapišemo $x = px'$ (x' je pozitivno število) in tako dobimo $px' - 5 = x'y$, kar zapišemo kot $x'(p - y) = 5$. Potem je $x' = 1$ in $y = p - 5$ ali $x' = 5$ in $y = p - 1$. Toda $x = p$ in $y = p - 5$ je rešitev le takrat, ko je $p > 5$, $x = 5p$ in $y = p - 1$ pa pri vsakem p .

Poglejmo še primer, ko p deli y . Tedaj je $y = py'$ in tako $x - 5 = xy'$ oziroma $x(1 - y') = 5$. Ta enačba nima rešitev, saj sta x in y' pozitivni števili.

I/2. Ker sta Metka in Tine enako oddaljena od lipe, velja $60 + x = \sqrt{80^2 + x^2}$. Če obe strani enačbe kvadriramo in nato enačbo uredimo, dobimo $120x = 2800$, od tod pa izrazimo $x = \frac{70}{3}$ m. Vsak izmed njiju bo do srečanja prehodil $83\frac{1}{3}$ m.

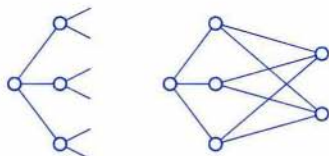


I/3. Krožnica k_1 se dotika premara AB v točki P , tangente iz A v točki N in tangente iz B v točki Q . Trikotnika AMN in AMP sta skladna, saj sta pravokotna ter imata skupno hipotenuzo AM in skladni kateti MN in MP . Torej sta kota $\sphericalangle NMA$ in $\sphericalangle AMP$ skladna. Po enakem razmisleku sta skladna tudi kota $\sphericalangle PMB$ in $\sphericalangle BMQ$. Po



Talesovem izreku je $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB$ pravi kot, od koder sledi, da je $\sphericalangle NMQ$ iztegnjeni kot $\sphericalangle NMQ = \sphericalangle NMA + \sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB + \sphericalangle BMQ = 2(\sphericalangle AMP + \sphericalangle PMB) = 2 \cdot \sphericalangle AMB$. Torej je NQ premer krožnice k_1 , tangenti AN in BQ pa sta vzporedni, saj sta nanj pravokotni.

I/4. Izberimo eno sobo. Iz nje vodijo trije rovi v tri nove sobe, iz vsake od njih pa vodita še dva rova, kot kaže prva slika na desni. Če bi povezali dva nezaključena rova na tej sliki, bi dobili tri sobe, ki so paroma povezane. Torej obstajata vsaj še dve sobi. Dokazali smo, da je sob vsaj šest.



Druha slika na desni pa potrjuje, da jih je lahko natanko šest.

II/1. Iz $\frac{m}{n} = \frac{m+k}{n \cdot k}$ izrazimo $m = \frac{k}{k-1}$. Ker je m naravno število, mora biti $k = 2$, tako da je tudi $m = 2$. Zaradi $\frac{1}{3} < \frac{2}{n} < 1$ mora biti $2 < n < 6$. Vse možne rešitve so $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$ in $\frac{2}{5}$.

II/2. Naj bosta ulomka $\frac{r}{2003}$ in $\frac{p}{q}$, pri čemer smemo predpostaviti, da je ulomek $\frac{p}{q}$ okrajšan. Če zapišemo

$$\frac{r}{2003} + \frac{p}{q} = a \quad \text{in} \quad \frac{r}{2003} \cdot \frac{p}{q} = b,$$

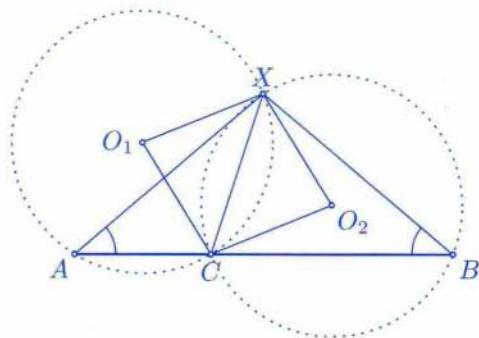
sta a in b celi števili. Izrazimo

$$q \cdot r + 2003 \cdot p = 2003 \cdot q \cdot a, \quad r \cdot p = 2003 \cdot q \cdot b.$$

Iz prve enačbe razberemo, da 2003 deli r ali q , ker je 2003 praštevilo. Če 2003 deli r , potem je $\frac{r}{2003}$ celo število in prav tako $\frac{p}{q}$, saj je $\frac{p}{q} = a - \frac{r}{2003}$. Obravnavajmo še primer, ko 2003 ne deli r . Tedaj 2003 deli p zaradi

druge enačbe, zaradi prve enačbe pa deli tudi q . To je nemogoče, ker smo predpostavili, da je $\frac{p}{q}$ okrajšan ulomek. Torej primer, ko 2003 ne deli r , sploh ni možen.

II/3. Ker leži točka X na simetrali daljice AB , je $|AX| = |BX|$ in je zato $\sphericalangle CAX = \sphericalangle XBC$. Torej sta enaka tudi središčna kota $\sphericalangle CO_1X = \sphericalangle XO_2C$. Trikotnika XO_1C in CO_2X sta enakokraka, z osnovnico XC in enakima kotoma pri vrhovih O_1 in O_2 . Torej sta skladna in je zato $|O_1C| = |O_2C|$.



II/4. Ker je število 354 deljivo s 3, je tudi vsota njegovih števk in zato število požrtih ovc deljivo s 3. Tudi vsako naslednje leto, ko se pošast zbudi, je torej deljivo s 3. Pošast se leta 2003 ne more zbuditi, saj 2003 ni deljivo s 3; torej tudi danes, 12. aprila 2003, ne more biti pred vrati.

III/1. Ker ima polinom p cele koeficiente, $x - y$ deli $p(x) - p(y)$. Potem je $p(2003) - p(3) = (2003 - 3)k$ in $p(2003) = 2000k + 2$. Torej da $p(2003)$ pri deljenju s 4 ostane 2 in ne more biti popolni kvadrat.

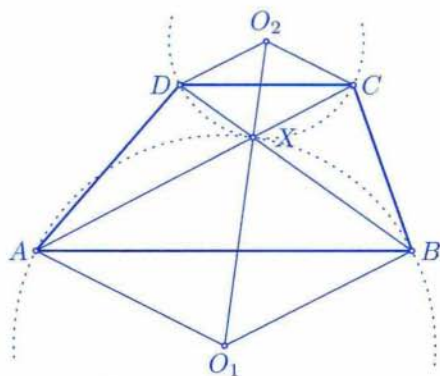
III/2. Označimo $\sphericalangle BAX = \alpha$ in $\sphericalangle DCX = \beta$. Potem je $\sphericalangle BO_1X = 2\alpha$ in $\sphericalangle DO_2X = 2\beta$, od koder izračunamo

$$\sphericalangle O_1XB = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ in}$$

$$\sphericalangle O_2XD = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

saj je O_1BX enakokraki trikotnik z vrhom O_1 in O_2DX enakokraki trikotnik z vrhom O_2 . Torej je $\alpha = \beta$ natanko tedaj, ko je $\sphericalangle O_1XB = \sphericalangle O_2XD$.

Iz konstrukcije pa vidimo, da je $\sphericalangle O_1XB = \sphericalangle O_2XD$ natanko tedaj, ko so točke O_1 , X in O_2 kolinearne. Ta pogoj pa je ekvivalenten pogoju, da se krožnici s polmeroma O_1X in O_2X v točki X dotikata.



III/3. Denimo, da imamo na voljo rdečo, modro, zeleno, rumeno, oranžno in belo barvo. Kocke postavimo tako, da imajo spodnjo mejno ploskev pobarvano z belo barvo. Za zgornjo ploskev imamo na voljo katero koli izmed preostalih petih barv.

Sedaj se vprašamo, koliko kock ima lahko zgornjo ploskev pobarvano z neko izbrano barvo (denimo oranžno). Te kocke postavimo tako, da imajo nepobarvano prednjo, zadnjo, levo in desno mejno ploskev. Z rumeno barvo pobarvamo zadnjo mejno ploskev posamezne kocke. Vsako izmed teh kock namreč lahko zavrtno tako, da ima zadnjo ploskev rumeno, ne da bi pri tem spremenili barvo zgornje in spodnje ploskve. Preostale tri mejne ploskve lahko pobarvamo na šest načinov (npr. tri barve imamo na voljo za desno mejno ploskev in dve barvi za sprednjo mejno ploskev).

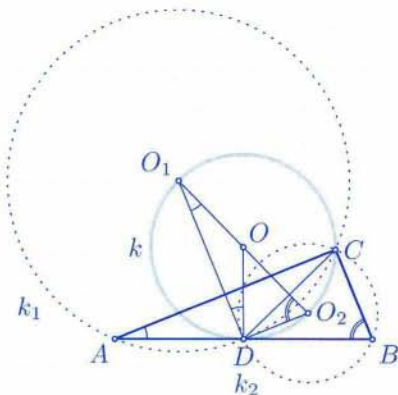
Vseh možnosti je torej $5 \cdot 6 = 30$. Pobarvamo lahko največ 30 kock, če želimo, da bo vsaka izmed njih drugače pobarvana.

III/4. Ker je število 666 deljivo z 9, je tudi vsota njegovih števk in zato število požrtih ovc deljivo z 9. Tudi vsako naslednje leto, ko se pošast zbudi, je torej deljivo z 9. Pošast se ne more zbuditi ne leta 2003 ne leta 3003.

IV/1. Vsota prvih i členov zaporedja je $s_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (i-1)d) = i \cdot a_1 + \frac{(i-1)i}{2} \cdot d$ in podobno $s_j = j \cdot a_1 + \frac{(j-1)j}{2} \cdot d$ ter $s_k = k \cdot a_1 + \frac{(k-1)k}{2} \cdot d$. Vstavimo v izraz in izračunamo $\frac{i \cdot a_1 + \frac{(i-1)i}{2} \cdot d}{i} (j - k) + \frac{j \cdot a_1 + \frac{(j-1)j}{2} \cdot d}{j} (k - i) + \frac{k \cdot a_1 + \frac{(k-1)k}{2} \cdot d}{k} (i - j) = a_1(j - k + k - i + i - j) + \frac{d}{2}((i-1)(j-k) + (j-1)(k-i) + (k-1)(i-j)) = \frac{d}{2}(ij - ik - j + k + jk - ji - k + i + ki - kj - i + j) = 0$.

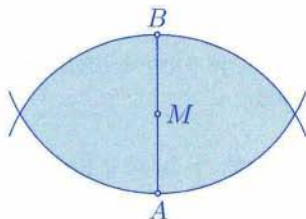
IV/2. Ker je v vsaki vrsti šest sedežev, imamo $2^6 = 64$ različnih možnosti posedanja potnikov v posamezni vrsti. Ker lahko za vsakega izmed 64 načinov posedanja najdemo njemu komplementarnega (t.j. takega, ki ima zasedene natanko tiste sedeže, ki so v dani vrsti nezasedeni), lahko iz 32 komplementarnih parov sestavimo 32 polno zasedenih vrst. Torej bi bilo v letalu s 64 vrstami $6 \cdot 32 = 192$ potnikov. Ker pa ima naše letalo le 62 vrst, izpustimo najmanj zasedeni vrsti: prazno vrsto in vrsto z enim potnikom. V letalu z 62 vrstami je lahko največ $192 - 1 = 191$ potnikov.

IV/3. Označimo s k krožnico, ki se dotika stranice AB v D in na kateri leži točka C . Naj bo O središče krožnice k . Potem so točke O , O_1 in O_2 kolinearne, saj ležijo na simetrali daljice CD . Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Potem je središčni kot $\sphericalangle DO_1C$ krožnice k enak 2α . Ker je trikotnik ADC enakokrak, je $\sphericalangle BDC = 2\alpha$, zato po izreku o kotu med tetivo DC in tangento AB krožnice k točka O_1 leži na tej krožnici. Podobno tudi točka O_2 leži na krožnici k . Dokazali smo že, da so točke O , O_1 in O_2 kolinearne, zato je O_1O_2 res premer krožnice k .



IV/4. Maček se lahko postavi tako, da nanj zalajajo vsi psi hkrati.

Naj bosta A in B psa, ki sta med seboj najbolj oddaljena. Področje na sliki je presek krogov s središčema v A in B in polmerom $|AB|$. Izven tega območja ni nobenega psa. Če se maček postavi v točko M , ki je razpolovišče daljice AB , so vsi psi od njega oddaljeni za največ $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB| \leq 50 \cdot \sqrt{3} < 90$ m.



Izbirna testa za mednarodno matematično olimpiado

Prvi izbirni test

1. Dokaži, da za vsako naravno število n obstaja število k_n z naslednjo lastnostjo: Če v ravnini narišemo k_n točk, tako da nobene tri niso kolinearne, in daljice med njimi pobarvamo z n barvami, bomo zagotovo lahko našli tri, ki bodo tvorile trikotnik z enako obarvanimi stranicami.
2. Naj bo D poljubna točka na kateti AC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C . Krožnici, ki se dotikata premice AB v točkah A in B , se sekata v točkah D in E . Dokaži, da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEC$.

3. Naj bo S končna neprazna množica naravnih števil, večjih od 1, z lastnostjo: Za vsako naravno število n obstaja tako število $s \in S$, da je $D(s, n) = 1$ ali pa $D(s, n) = s$.
Dokaži, da obstajata taki, ne nujno različni, števili $s, t \in S$, da je $D(s, t)$ praštevilo.

Drugi izbirni test

1. Naj bo $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$ polinom z nenegativnimi realnimi koeficienti in n realnimi ničlami. Dokaži, da velja

$$p(x) \geq x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}x + 1$$

za vse $x \geq 0$.

2. Krožnici k_1 in k_2 se sekata v različnih točkah P in Q . Skupna tangenta krožnic k_1 in k_2 , ki leži bliže P , se dotika krožnice k_1 v točki A , krožnice k_2 pa v točki B . Tangenta na krožnico k_1 v točki P seka krožnico k_2 ponovno v točki C , premici AP in BC pa se sekata v R . Dokaži, da se trikotniku PQR očrtana krožnica dotika premic BP in BR .
3. Žeton položimo na polje $(1, 1)$ v mreži $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in ga nato premikamo v skladu z naslednjimi pravili:

- S polja (a, b) lahko žeton premaknemo na $(2a, b)$ ali $(a, 2b)$.
- S polja (a, b) lahko žeton premaknemo na $(a - b, b)$, če je $a > b$.
- S polja (a, b) lahko žeton premaknemo na $(a, b - a)$, če je $b > a$.

Za katera naravna števila x in y lahko žeton premaknemo na polje (x, y) ?

Rešitve nalog z izbirnih testov za mednarodno matematično olimpiado

I/1. Naloge se lotimo induktivno. Za $n = 1$ trditev očitno velja (za k_n lahko izberemo denimo število 3). Pa recimo, da smo našli število k_n , ki ustreza trditvi za n . Trdimo, da je potem primerna izbira za k_{n+1} število $(n+1)(k_n - 1) + 2$: če je v ravnini danih $(n+1)(k_n - 1) + 2$ točk, izberemo poljubno izmed njih in si ogledamo daljice od te točke do preostalih $(n+1)(k_n - 1) + 1$ točk. Na voljo imamo $n+1$ barv vsaj $(n+1)(k_n - 1) + 1$ daljic, torej jih je po Dirichletovem principu vsaj $(k_n - 1) + 1 = k_n$ pobarvanih z enako barvo, denimo modro. Oglejmo si daljice, ki povezujejo končne točke teh k_n modro pobarvanih daljic.

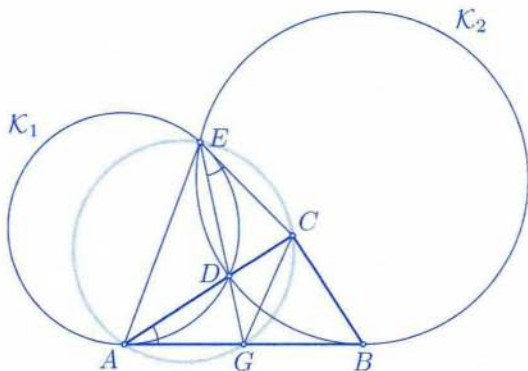
Če je med njimi ena, ki je pobarvana modro, ta skupaj z daljicama do prvotne točke sestavlja trikotnik, ki ima vse stranice modre. Sicer imamo k_n točk, daljice med njimi pa so pobarvane z n barvami. Po indukcijski predpostavki lahko med njimi najdemo tri daljice, ki so pobarvane z enako barvo in ki tvorijo trikotnik.

Opomba. Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo Ramseyevega izreka, ki pravi:

Naj bodo $n \in \mathbb{N}$ in $m_1, m_2, \dots, m_n$ poljubna naravna števila. Potem obstaja tako najmanjše število $r = r(m_1, m_2, \dots, m_n)$, da v vsakem polnem grafu K_r , katerega povezave so obarvane z n barvami, obstaja barva i in poln podgraf izomorfen grafu K_{m_i} obarvan s to barvo.

Glede na oznake v nalogi lahko postavimo $k_n = r(3, 3, \dots, 3)$.

I/2. Označimo z G presečišče premic AB in DE . Po izreku o potenci točke na krožnico $\mathcal{K}_1$ je $\overline{GA} \cdot \overline{GA} = \overline{GD} \cdot \overline{GE}$, po izreku o potenci točke G na krožnico $\mathcal{K}_2$ pa je $\overline{GB} \cdot \overline{GB} = \overline{GD} \cdot \overline{GE}$. Torej je $\overline{GA} \cdot \overline{GA} = \overline{GB} \cdot \overline{GB}$, kar nam da $|GA| = |GB|$. Torej je G središče trikotniku ABC očrtane krožnice in $\sphericalangle GAC = \sphericalangle ACG$.



Označimo z E' drugo presečišče trikotniku AGC očrtane krožnice s premico GD . Tedaj je $\sphericalangle AE'G = \sphericalangle ACG = \sphericalangle GAD = \sphericalangle AEG$, kjer velja zadnja enakost zaradi izreka o kotu med tetivo AD in tangento AB . Torej je $E = E'$ in je štirikotnik $AGCE$ tetiven. Sledi $\sphericalangle DEC = \sphericalangle GEC = \sphericalangle GAC = \sphericalangle BAC$, kot je bilo potrebno dokazati.

I/3. Naj bo n najmanjše naravno število, ki ni tuje nobenemu številu iz množice S . (Tako število res obstaja: Produkt vseh števil iz množice S ni tuje nobenemu številu iz S , saj $1 \notin S$.)

V praštevilske razcepu števila n nastopa vsako praštevilo le v prvi potenci, saj bi v nasprotnem n ne bilo najmanjše število z opisano lastnostjo.

Ker število n ni tuje nobenemu številu iz množice S , po predpostavki naloge obstaja tak $s \in S$, da je $D(s, n) = s$. Torej $s \mid n$.

Naj bo p poljuben praštevski delitelj števila s . Torej $p \mid n$ in po izbiri števila n je število n/p tuje nekemu številu $t \in S$. Ker je $D(t, n/p) = 1$ in $D(t, n) > 1$, mora $p \mid t$.

Ker pa število t ni deljivo z nobenim drugim praštevskim deliteljem števila n (ker tista praštevila delijo n/p), je $D(s, t) = p$.

II/1. Ker ima polinom p nenegativne realne koeficiente in $p(0) = 1$, so vse njegove ničle negativne. Ker jih ima n , ga lahko razcepimo na naslednji način:

$$p(x) = (x + x_1) \dots (x + x_n),$$

kjer so $x_1, \dots, x_n$ pozitivna realna števila. Zapišimo Vietove formule:

$$a_1 = x_1 + \dots + x_n$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = x_1 \dots x_{n-1} + \dots + x_2 \dots x_n$$

Iz $p(0) = 1$ sledi, da je $x_1x_2 \dots x_n = 1$. Z večkratno uporabo neenakosti med aritmetično in geometrično sredino dobimo

$$\frac{a_1}{\binom{n}{1}} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \dots x_n} = 1$$

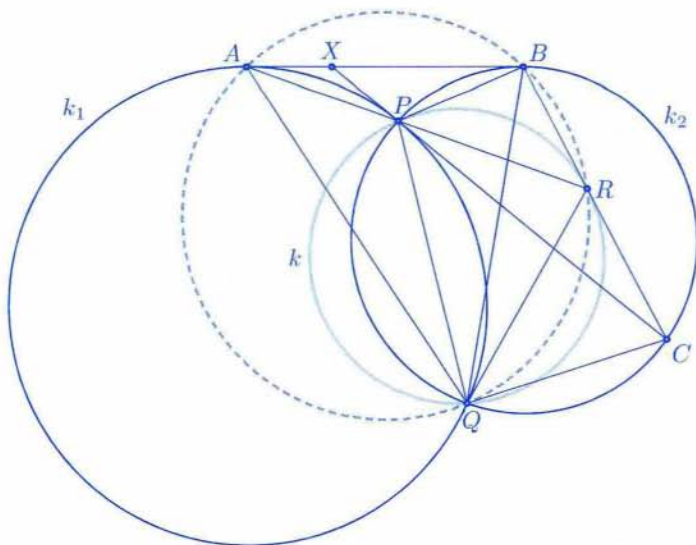
$$\frac{a_2}{\binom{n}{2}} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}} = 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}} = 1$$

Označimo sedaj $q(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Ker so istoležni koeficienti polinoma p večji od koeficientov polinoma q , res velja $p(x) \geq q(x)$ za vse $x \geq 0$.

II/2. Narišimo dovolj veliko skico. Označimo presečišče premic AB in PC z X .



Po izreku o kotu med tetivo in tangento je $\sphericalangle PAX = \sphericalangle PQA$ in $\sphericalangle XBP = \sphericalangle BQP$. Točke Q, C, B, P so konciklične, zato je tudi $\sphericalangle BCP = \sphericalangle BQP$. Ker sta XA in XP tangenti na krožnico k_1 , je $\sphericalangle PAX = \sphericalangle XPA$. Torej je $\sphericalangle CPR = \sphericalangle XPA = \sphericalangle PAX$.

Ker je

$$\begin{aligned}\sphericalangle BRA &= \sphericalangle RCP + \sphericalangle CPR = \sphericalangle BQP + \sphericalangle PAX = \sphericalangle BQP + \sphericalangle PQA = \\ &= \sphericalangle PQA,\end{aligned}$$

so B, R, Q, A konciklične. Torej je $\sphericalangle RAB = \sphericalangle RQB$, kar nam da $\sphericalangle RPB = \sphericalangle RQP$ in je zato po izreku o kotu med tetivo in tangento premica PB res tangenta na trikotniku PRQ očrtano krožnico k . Ker je $\sphericalangle BRP = \sphericalangle RPB$, je tudi BR tangenta na krožnico k .

II/3. Potreben in zadosten pogoj je, da je $d(x, y) = 2^s$ za neko pozitivno število s . Da je potreben, sledi iz $d(p, q) = d(p, q - p)$, torej na nobenem koraku koordinati ne moreta imeti lihega skupnega delitelja, ker je na začetku $d(1, 1) = 1$. Da je zadosten, dokažimo takole: Naj bo $d(x, y) = 2^s$. Izmed polj (p, q) , iz katerih lahko dosežemo (x, y) , izberimo tako, da bo $p + q$ najmanjši. Ne p ne q ne moreta biti soda, sicer bi lahko prišli tudi na polje $(p/2, q)$ ali $(p, q/2)$. Če je $p > q$, je polje (p, q) dosegljivo iz $((p + q)/2, q)$, kar pa je protislovje; podobno ne more biti $p < q$. Torej je $p = q$. Ampak $d(p, q)$ je potenca števila 2. Ker sta p in q liha, je $p = q = 1$, torej lahko na polje (x, y) pridemo iz $(1, 1)$.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovorni urednici na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije PRESEK, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **Presek@dmf.si**. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednica prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oziroma $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, šolsko leto 2003/04, številka 2, strani 65–136

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domažnjko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan (računalništvo), Maja Klavžar (odgovorna urednica), Damjan Kobal, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosen (astronomija), Marko Razpet, Marija Vencelj, Matjaž Vencelj.

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p.2964, tel. (01) 4766-553, (01) 4232-460, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2003/2004 je za posamezne naročnike **3.600 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila učencev šol **3.000 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**.
Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASIX, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport

Založilo DMFA – založništvo

Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2003 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1553

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

