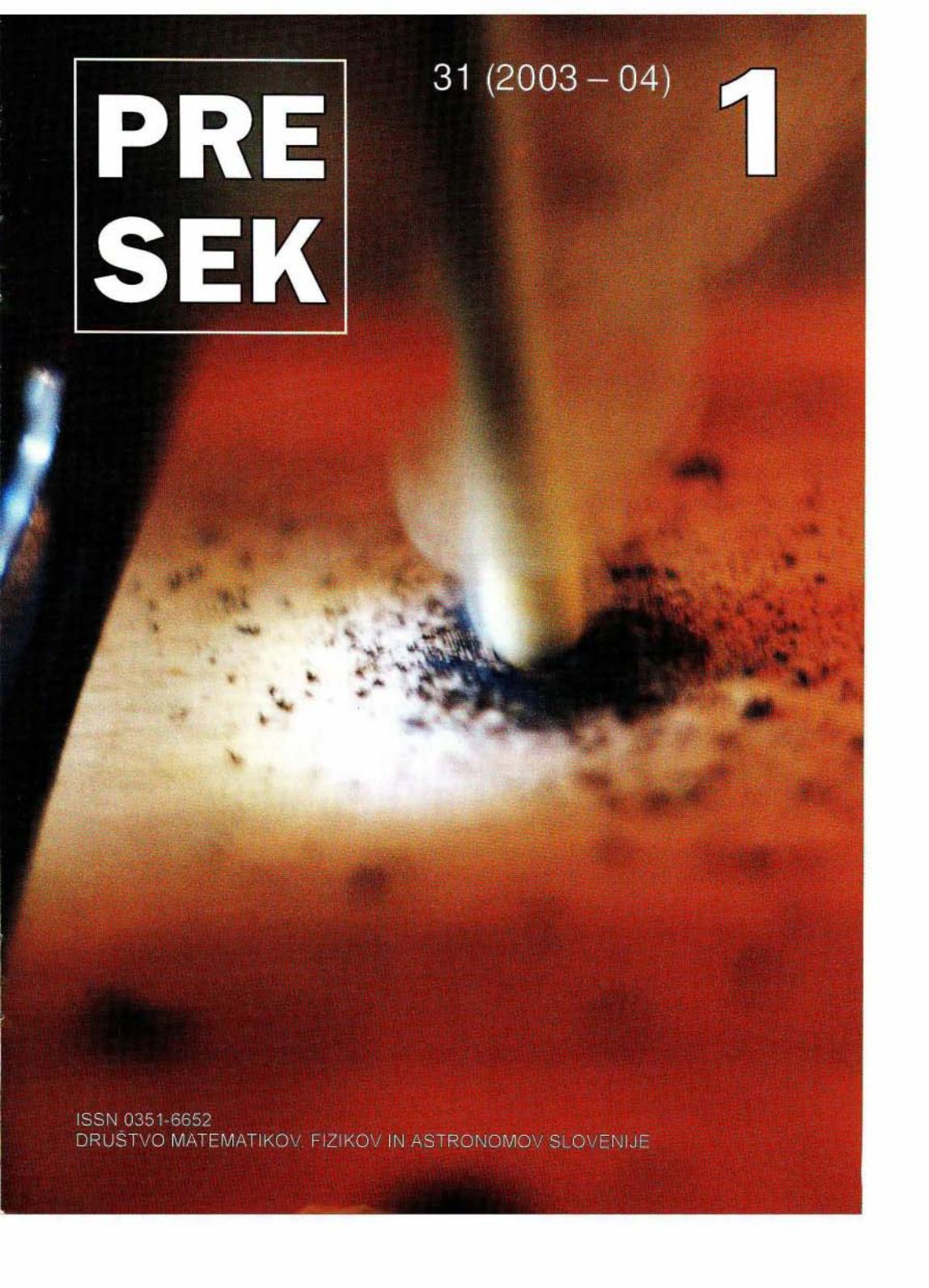


PRE SEK



31 (2003 – 04)

1

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Vesna Omladič: MATEMATIKA IN ODLOČANJE

Knjižica z zgornjim naslovom je izšla v zbirki SIGMA. Delo predstavlja obogatitev slovenske matematične literature, ne samo zato, ker je prvo, ki obravnava novo področje teorije odločanja, ampak tudi, ker širi matematično kulturo na družboslovna področja.

Knjižica obsega poleg Kazala, Predgovora, Literature in Stvarnega kazala sedem poglavij na 179 straneh. Tekst ilustrirajo številni primeri in pet slik. Seznam literature obsega enajst tekstov, od tega šest domačih. Stvarno kazalo je zelo pregledno in popolno ter obsega kar pet strani.

Odlika knjižice je v tem, da je razumljiva širšemu krogu bralcev, torej bralcem, ki nimajo večje matematične izobrazbe. Za večino teksta zadostuje predznanje v obsegu gimnazijske matematike. Ker se s problemom odločanja srečujemo skoraj vsak dan, bi bilo za vsakogar koristno, da se seznani z nekaterimi ugotovitvami teorije odločanja in njenimi metodami.

Namesto opisa vsebine knjižice raje omenimo nekaj primerov odločanja, ki so podrobno razloženi in na katerih so ilustrirane metode odločanja.

V prvem primeru ponudijo igralcu dve možnosti: srečko za loterijo z dobitkom 1000 evrov v 11% primerov in brez dobitka v 89% primerov ali srečko za loterijo z dobitkom 5000 evrov v 10% primerov in brez dobitka v 90% primerov.

V drugem primeru odločanja je dilema med prireditvijo športnega tekmovanja, ki bi v lepem vremenu prineslo 25 denarnih enot dobička, v slabem pa le 18 denarnih enot, in veselico, ki bi v prvem primeru prinesla 30 denarnih enot dobička, v drugem pa le 16.

Podobnih primerov odločanja je v knjižici še več: družinsko odločanje za nakup avtomobila, ko imajo različni člani družine različne preference, odločanje volivcev na enokrožnih in dvokrožnih volitvah in podobno.



list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, leto 2003/04, številka 1, strani 1–64

VSEBINA	
MATEMATIKA	Trojiški sestav (Aleksandar Jurišić)..... 20-21 Žužki – nožiščne krivulje asteroide (Marko Razpet) 47-52
FIZIKA	Ali sloni tečejo? (Janez Strnad) 16-19 O trenju, I. del (Janez Strnad) 28-31 S trenjem do visokih temperatur (Andrej Likar) 34-36
ASTRONOMIJA	Enakonočje (Marijan Prosen) 8-12 In potem so zavladali reflektorji (Marijan Prosen) 40-46
RAČUNALNIŠTVO	O razvrstitvah in permutacijah (Martin Juvan) 22-27
NOVE KNJIGE	Vesna Omladič: Matematika in odločanje (Zvonimir Bohte) II Marija Vilfan in Igor Mušević: Tekoči kristali (Irena Drevenšek-Olenik) 36-37
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILLO	Drobna o zlatem rezu (Nada Razpet) 7 Z netranzivnostjo v igri kock do 'skoraj zanesljive' zmage – reš. str. 46 (Matej Mlakar) 13-15 Krizanka "Pojmi iz algebre" – reš. na str. 39 (Marko Bokalič) 32-33 Baloni in vodne bombe? Ne, zrcala in leče! (Vida Kariž Merhar) 38-39
NOVICE	François Viète (1540 – 1603), ob štiristoletnici smrti (Marija Vencelj) 4-6
NALOGE	Izpitni rezultati – reš. str. 52 (Marija Vencelj) 2 Tri različne za najmlajše – reš. str. 31 (Dragoljub Milošević, prev. Marija Vencelj) 2 Naloga za spretno (in potrpežljive) računarje – reš. str. 27 (Ivan Vidav) 3 Tovornjaki – reš. str. 46 (Dušan Murovec) 3
TEKMOVANJA	39. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 53-54 23. državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja (Jelislava Sakelšek) 54-55 1. tekmovanje dijakov in dijakinj srednjih strokovnih šol iz znanja poslovne matematike (Sabina Gajšek) . 55-56 3. tekmovanje dijakov ter dijakinj srednjih poklicnih šol v znanju matematike (Dušanka Vrenčur) 56-57 3. tekmovanje dijakov in dijakinj srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike (Darinka Žižek, Polonca Pavlič, Irena Pivko) 57-60 47. matematično tekmovanje srednješolcev in srednješolk Slovenije (Matjaž Željko) 60-61 41. fizikalno tekmovanje srednješolcev in srednješolk Slovenije (Ciril Dominko) 62-64
NA OVITKU	S trenjem segret les se začne kaditi (foto Andrej Likar). Glej tudi članek na str. 34 I Slika k članku na str. 16 III Lovca pri prižiganju ognja (k članku na str. 34) IV

IZPITNI REZULTATI

Na zaključnem izpitu iz matematike so učenci odgovarjali na 30 vprašanj. Doseženo število točk je komisija izračunala po formuli

$$T = 4P - N + 30,$$

kjer je P pomenil število pravih odgovorov in N število napačnih odgovorov. Neodgovorjenih vprašanj niso točkovali.

Ali se je dalo doseči poljubno celo število točk od 0 do 150?

Marija Vencelj

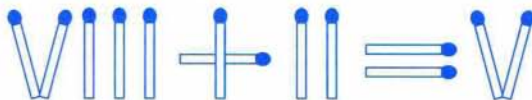
Rešitev je na str. 52.

TRI RAZLIČNE ZA NAJMLAJŠE

1. Ciril je prinesel domov 15 mandarin v štirih plastičnih vrečkah. V vsaki vrečki je bilo liho število mandarin.

Kako mu je to uspelo?

2. V naslednji postavitvi trinajstih vžigalic



prestavite eno vžgalico tako, da boste dobili veljavno enakost.

Obstajajo tri možnosti, poiščite vse.

3. Dana sta dva trikotnika, eden s stranicami 10, 13 in 13 enot ter drugi s stranicami 24, 13 in 13 enot.

Ocenite, kateri od trikotnikov ima večjo ploščino.

Dragoljub Milošević, prev. Marija Vencelj

Rešitve so na str. 31.

NALOGA ZA SPRETNE (IN POTRPEŽLJIVE) RAČUNARJE

Naj bosta x in y poljubni od nič različni realni števili povezani z enačbo

$$y^2 = x(x^2 + 5x - 32). \quad (1)$$

Oglejmo si zdaj trikotnik s stranicami

$$\begin{aligned} a &= (32 - x^2)y + x(x^2 + 32), & b &= (32 - x^2)y - x(x^2 + 32), \\ c &= 2x(x^2 + 8x - 32). \end{aligned} \quad (2)$$

Dokaži, da se v tem trikotniku izražajo ploščina p in dvojni težiščnici $2t_a$ in $2t_b$ kot polinomi spremenljivk x in y s celimi koeficienti!

Pripomba 1. Težiščnico t_a , ki sega od središča stranice a do nasprotnega oglišča, izračunamo iz enačbe

$$4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

Podobno dobimo t_b iz enačbe

$$4t_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2.$$

Pripomba 2. Če sta števili x in y , ki zadoščata enačbi (1), racionalni, nam dajo obrazci (2) trikotnik z racionalnimi stranicami a , b in c , v katerem se tudi ploščina in dve težiščnici izražajo z racionalnimi števili. Npr. $x = -1$ in $y = 6$ zadoščata enačbi (1). Pripadajoči trikotnik ima stranice $a = 153$, $b = 219$, $c = 78$. Njegova ploščina je $p = 3780$, težiščnici pa sta $t_a = 291/2$ in $t_b = 105/2$.

Obstaja neskončno parov racionalnih števil x , y , ki zadoščajo enačbi (1).

Ivan Vidav

Rešitev je na str. 27.

TOVORNJAKI

V skladišče so pripeljali 57 ton tovora. Za prevoz so uporabili 10 tovornjakov po 8 ton, 4 tone in 3 tone. Koliko je bilo posameznih tovornjakov, če so bili vsi polni in je vsak pripeljal le enkrat?

Dušan Murovec

Rešitev je na str. 46.

FRANÇOIS VIÈTE (1540 – 1603)

Ob štiristoletnici smrti



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

(Viètove formule)

učitelj in zaupnik visokega francoskega plemstva ter svetovalec hugenotskega kralja Henrika IV., res pa je tudi, da mu je bila matematika glavno razvedrilo in zabava.

François Viète se je rodil leta 1540 v Fontenay-le-Comte v Franciji materi Marguerite Dupont in očetu Étienneu Viètu, ki je bil odvetnik v Fontenayu in notar v Le Busseauju. François je bil dvakrat poročen. Najprej z Barbe Cothereau, po njeni smrti pa z Juliette Leclerc.

Ker je François Viète izhajal iz ugledne družine, je bil deležen najboljših možne vzgoje. Po začetnem šolanju v Fontenayu se je vpisal na študij prava na univerzi v Poitierju in diplomiral leta 1560.

Kot pravnik je deloval štiri leta, nato pa je odložil svoj uradni poklic in sprejel službo zasebnega učitelja Catherine de Parthenay iz pomembne francoske plemiške družine de Soubise. Njeni družini je sledil najprej v La Rochele in nato v Pariz, kjer ga je opazil kralj Karel IX. in ga leta 1573 imenoval za svétnika višjega sodišča v Rennesu, glavnem mestu province Bretanje.

V Rennesu je ostal dobrih šest let, od leta 1580 deloval na vrhovnem sodišču v Parizu in bil hkrati tajni svetovalec kralja Henrika III. Zaradi političnih intrig je bil leta 1584 izgnan z dvora, kamor ga je leta 1589 Henrik III. ponovno poklical, da bi mu zaupal mesto svétnika vrhovnega sodišča, ki je bilo medtem preseljeno v Tours.

Srednješolci tega sveta poznajo Viètovo ime predvsem po formulah, ki povezujejo rešitve kvadratne enačbe z njenimi koeficienti. Vendar te zveze še zdaleč niso edini Viètov prispevek matematiki, čeprav matematika ni bila njegov poklic. Za svojega življenja je bil predvsem poznan kot

Kasneje istega leta je med špansko-francosko vojno tudi novi kralj Henrik IV. Navarski povabil Viëta k sodelovanju. Toda ne kot državnega birokrata, ampak kot matematika, da bi dešifiral prestreženo pismo španskega kralja Filipa II. Šifra je bila tako zapletena, da so se Španci počutili povsem varne. Pretreseni, da je bila odkrita, so se celo pritožili pri papežu, češ da Francija v vojni uporablja črno magijo.

Iz Toursa se je Viëte leta 1594 vrnil v Pariz in leta 1597 v Fontenay. Ponovno je bil poklican v Pariz 1599. leta, toda konec leta 1602 ga je Henrik IV. odpustil. François Viëte je umrl v Parizu 23. februarja 1603.

V Viëtovem življenju sta bili dve obdobji, ko ni deloval kot pravnik (1564 – 1568 in 1584 – 1589) pa bil toliko plodovitejši drugje. V prvem obdobju je poučeval Catherine de Parthenay. Svoje učiteljske dolžnosti je vzel z vso resnostjo in pripravljaj za svojo varovanko lekcije z različnih področij, tudi matematike in naravoslovja. Njegovo najstarejše ohranjeno znanstveno delo je lekcija za Catherine s področja, s katerim se je Viëte ukvarjal pravzaprav vse življenje, namreč povezava matematike z astronomijo in kozmologijo. Pomembno delo s tega področja je Canon mathematicus, seu ad triangula cum appendicibus (Matematični zbornik z dodatkom iz trigonometrije), ki ga je začel izdajati leta 1571. Služil naj bi kot matematični uvod v veliko študijo Ptolemejevega astronomskega modela. Viëte je namreč vztrajal pri Ptolemejevem geocentričnem modelu Osončja (v središču Osončja je Zemlja), čeprav je že leta 1543 izšla knjiga De revolutionibus orbium coelestium, v kateri je Kopernik predstavil heliocentrični model (središče Osončja je Sonce). Viëte je spregledal geometrijsko veljavnost Kopernikovega modela.

S samo matematiko se je Viëte veliko ukvarjal predvsem po štiridesetem letu starosti. Svoja dela je z velikimi uspehi izdajal v samozaložbi. Veliko so ga ponatiskovali, vendar veljajo mnoga njegova dela danes za izgubljena, čeprav je znano, da so obstajala. Viëte ima velike zasluge za razvoj algebre. Izid njegovega najpomembnejšega algebraičnega dela "Isagoge" (In artem analyticem isagoge) leta 1591 lahko štejemo za spočetje moderne algebre. V algebri je prvi, še pred Descartesom, uvedel preprosto in uporabno simboliko in s tem odprl matematikom pot v algebro. Med prvimi je s črkami predstavil tudi števila. Znaka + in – je uporabljal tako, kot ju uporabljamo danes, A^2 pa je pisal "A quadratum". Je pa še vedno vztrajal na grškem principu homogenosti, po katerem produkt dveh daljic nujno pomeni ploščino, zato lahko seštevamo daljice le z daljicami, ploščine samo s ploščinami in prostornine s prostorninami.

Viëte se je ukvarjal tudi z ravninsko in sferno trigonometrijo in tabeliranjem trigonometričnih funkcij. Veljal je za izjemnega mojstra v

računanju s trigonometričnimi funkcijami in je prvi – moderno povedano – predstavil trigonometrične funkcije z neskončnimi vrstami. V povezavi algebre s trigonometrijo je prevedel Cardanove formule za rešitev kubične enačbe v trigonometrično obliko, zato je izginil strah pred “ireducibilnim primerom”.

Izračunal je vrednost števila π na devet decimalk natančno, pri čemer si je pomagal z dvema 1296-kotnikoma, ki ju je včrtal in očrtal krožnici. Nadalje je predstavil število π z neskončnim produktom in z verižnim ulomkom.

Še bi lahko naštevali, a se ustavimo le ob Viètovem zadnjem delu. To je zvezek “Apollonius Gallus”, ki je izšel leta 1600. V njem je rešil vseh deset konstrukcijskih problemov, ki nastopajo v Apolonijevi nalogi. To je naloga s šestilom in ravnilom konstruirati vse krožnice, ki se dotikajo treh danih krožnic. Pri tem je vsaka od danih krožnic lahko izrojena v premico ali reducirana v točko. To nalogo je zastavil in rešil že antični matematik Apolonij iz Perge okoli leta 200 pr. n. št. v izgubljenem delu, o katerega obstoju in vsebini vemo nekaj le iz del pozno antičnega matematika Papposa. Viète je kot prvi to domnevno delo obnovil (znano je, da je vodilni matematik 15. stoletja Regiomontanus dvomil v možnost zahtevanih konstrukcij le z uporabo ravnila in šestila). Ker je bil Apolonij iz Perge eden najslavnejših antičnih matematikov, si je je Viète z izbiro naslova, pod katerim je rešitev objavil, prislužil vzdevek “Galski Apolonij”.

Kot zanimivost omenimo še, da je bil Viète udeležen tudi pri popravljanju julijanskega koledarja. Pri vsakoletnem določanju gibljivih praznikov¹ je dolgo veljala velika zmeda. Hiter razvoj astronomije je opozoril na ta problem, predlagani so bili številni novi koledarji. Papež Gregor XIII. je sklical veliko število matematikov, astronomov in visokih cerkvenih dostojanstvenikov, ki so se odločili sprejeti koledar, kakršnega je predlagal Clavius. Da bi odpravili napako, ki je nastala z julijanskim koledarjem, so sprejeli sklep, da 4. oktobru 1582 takoj sledi 15. oktober 1582, za naprej pa je bil sprejet popravek glede prestopnih let. Gregorijanski koledar je pri nekaterih znanstvenikih, med katerimi je bil tudi Viète, naletel na veliko nasprotovanje. Viète je sicer cenil delo, vloženo v reformo koledarja, kljub temu pa si je dovolil, da ga je proti koncu življenja zaneslo v neupravičeno polemiko s Claviusom. Ko je Clavius odklonil, da bi v koledar vnesel popravke, ki jih je predložil Viète, se mu je ta 1602. oddolžil z objavo pamfleta, ki je bil enako nasilen kot nepošten.

Marija Vencelj

¹ Velika noč je na prvo nedeljo po prvi spomladanski polni luni. Datume ostalih gibljivih praznikov, kot so pust, binkošti, ... določijo glede na datum velike noči.

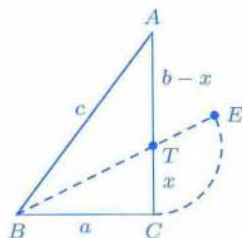
DROBNA O ZLATEM REZU

O zlatega reza je bilo v Preseku objavljenih že nekaj člankov. Tokrat si oglejmo le kratko nalogo, katere rešitev je povezana z zlatega rezom.

Imejmo pravokotni trikotnik, katerega stranice so trije zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Stranice trikotnika lahko zapišemo kot $b = b$, $a = b - d$, $c = b + d$, pri čemer je d razlika aritmetičnega zaporedja. Iz Pitagorovega izreka sledi

$$(b - d)^2 + b^2 = (b + d)^2 \quad \Rightarrow \quad a = 3d, \quad b = 4d \quad c = 5d.$$

Rešitev je torej klasični egipčanski pravokotni trikotnik, ki ima stranice v razmerju 3 : 4 : 5. Brez škode lahko izberemo $d = 1$. Narišimo simetralo kota, ki leži nasproti daljše katete. To je v našem primeru kot β . Simetrala odreže na kateti b odseka $|CT| = x$ in $|TA| = b - x$. Podaljšajmo daljico BT za x , da dobimo točko E . Izračunajmo razmerje daljic $|BE| : |BC|$.



Simetrala kota β deli kateto b v razmerju priležnih stranic kota β . To pomeni, da je

$$x : (b - x) = a : c \quad \text{in} \quad x = \frac{ab}{c + a} = \frac{3}{2}.$$

Velja

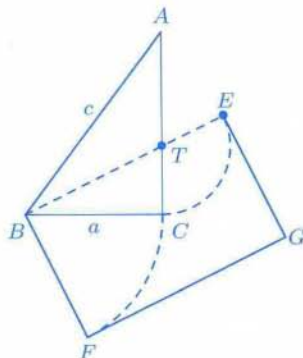
$$|BE| = \sqrt{a^2 + x^2} + x = \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2} = \frac{3(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

Iskano razmerje je

$$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

to pa je ravno razmerje zlatega reza.

Za konec si narišimo še zlati pravokotnik $BFGE$, ki ima stranici $|BE|$ in $|BF| = |BC|$ v razmerju zlatega reza.



Nada Razpet

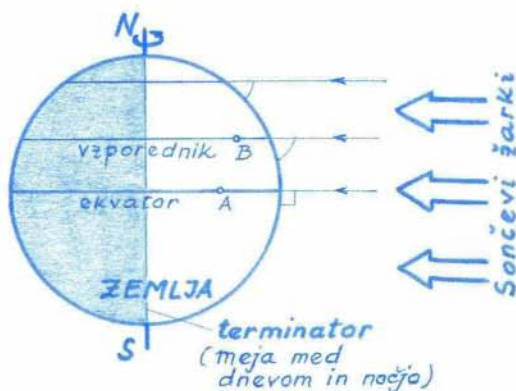
ENAKONOČJE

Pa je spet tu. Kdo? Kaj? Jesensko enakonočje vendar, ko sta dan in noč enako dolga, ko se pri nas, na severni zemeljski poluti, uradno začne (koledarska ali astronomska) jesen. Letos se začne 23.9. ob 12. uri in 47 minut, navedli bi lahko celo sekunde, a ne bodimo preveč natančni. Za naše razmišljanje zapisani podatek povsem zadostuje.

Kaj se pravzaprav vsako leto na Zemlji oziroma v vesolju zgodi, da je ta trenutek izbran¹ (gre za dogovor) za začetek jeseni? Oglejmo si astronomske razmere ob enakonočju. Zanima nas predvsem dvoje, in sicer

- kaj se v tem času dogaja v vesolju, pri čemer mislimo na medsebojno lego Sonca in Zemlje, oziroma natančneje, mislimo na kot med smerjo sončevih žarkov in smerjo Zemljine vrtilne osi;
- kako to doživljamo na Zemlji, pri čemer mislimo na opazovano dnevno pot Sonca nad obzorjem ob enakonočju.

Beseda nanese na enakonočje, ko obravnavamo letne čase. Ti predstavljajo v našem življenju enega najpomembnejših naravnih pojavov. Nekateri mislijo, da je to povsem geografska tema. Daleč od tega!



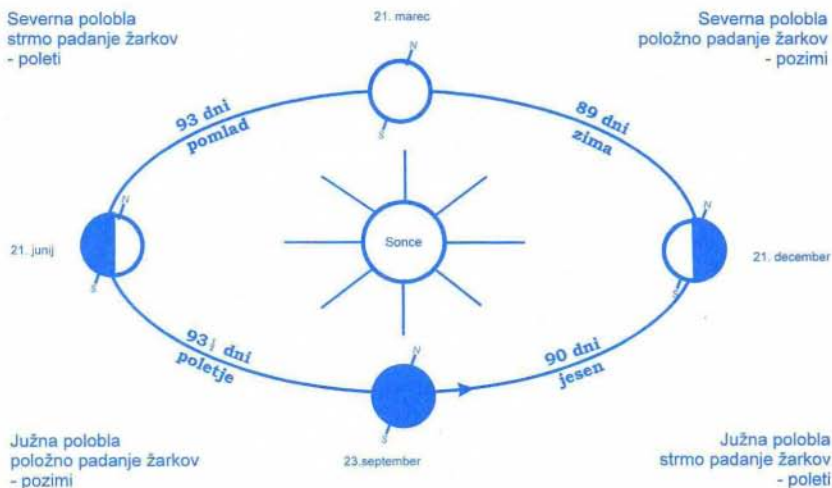
Slika 1. Lega Zemljine vrtilne osi glede na Sončeve žarke ob jesenskem ali spomladanskem enakonočju. V kraju A na zemeljskem ekvatorju ali v kraju B na vzporedniku sta dan in noč enako dolga, saj sta oba kraja enako časa osvetljena in enako časa v temi.

¹ Meteorološka jesen se začne že 1. septembra (dogovor). Podobno kot o jesenskem enakonočju lahko razmišljamo o spomladanskem, ki se zgodi vsako leto okoli 21. 3. Meteorološka pomlad se začne že 1. marca. S tujko enakonočju rečemo ekvinokcij (iz latinskih besed *aequus* – enak in *nox* – noč).

Letni časi nastajajo zaradi kroženja Zemlje okrog Sonca, vendar zato, ker je Zemljina vrtilna os za kot $66,5^\circ$ naklonjena k ravnini Zemljinega tira kroženja in ohranja svojo smer. Zaradi tega svetlobni žarki, ki prihajajo s Sonca, na obe zemeljski poluti med letom padajo pod različnim kotom. Kadar opoldne padajo na določeno ploskev na Zemljinem površju strmo, se ploskev bolj segreva (poletje), ko pa padajo položno, se segreva manj (zima).

Opomba. Če bi bila Zemljina vrtilna os pravokotna na ravnino Zemljinega kroženja, letnih časov ne bi bilo. Prav tako jih ne bi bilo, če se Zemlja ne bi vrtela. Čeprav se v bistvu Zemlja giblje okrog Sonca po rahlo sploščeni elipsi in je enkrat Soncu najbliže (za nas pozimi), drugič pa najdlje (za nas poleti), pa to na potek letnih časov ne vpliva.

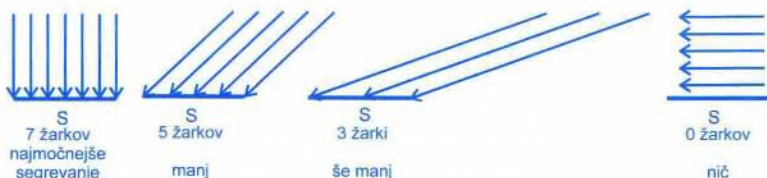
Enakonočje najbolj pojasnimo, če pozorno zasledujemo, kaj se dogaja s kotom med smerjo Sončevih žarkov in smerjo Zemljine vrtilne osi. Med letom se ta kot spreminja: od topega kota ($90^\circ + 23,5^\circ$) do ostrega ($90^\circ - 23,5^\circ$) in od ostrega do topega, dvakrat v letu pa doseže vrednost pravega kota, torej 90° , prvič v prvi polovici leta, drugič v drugi. V prvem primeru govorimo o spomladanskem enakonočju – na severni poluti se začne pomlad (na južni jesen), v drugem primeru o jesenskem – na severni



Slika 2. Štiri značilne lege Zemlje na njenem tiru okrog Sonca. Med letom Zemljina vrtilna os ohranja smer in naklon proti ravnini Zemljinega kroženja. Zato so na našem planetu letni časi.

poluti se začne jesen (na južni pomlad). Trenutek, ko omenjeni kot doseže 90° , je mogoče napovedati do sekunde natančno, vendar v navadnem življenju zadostuje na uro, večkrat celo na dan natančen podatek.

Za utrditev pojma letnih časov si velja dobro ogledati sliko 2, ki pojasnjuje začetek letnih časov s prikazom kroženja Zemlje okrog Sonca.



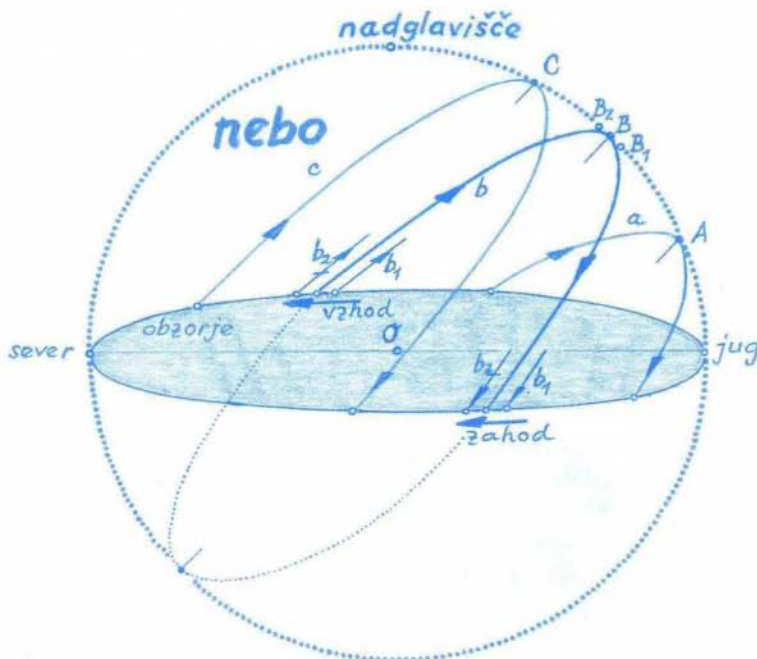
Slika 3. Čim višje nad obzorjem je Sonce, tem bolj greje. Segrevanje ravne ploskve S (kos Zemljinega površja) je odvisno od strmine Sončevih žarkov. Če padajo na ploskev pravokotno, je segrevanje najmočnejše. Pri vse bolj poševnih žarkih je segrevanje vse slabše. Če padajo žarki vzporedno s ploskvijo, segrevanja ni (primerjaj severne in južne strani streh, pogorij, cest, krtin). Skica prikazuje, kako enakomerno gost snop Sončevih žarkov pri različni strmini segreva enako veliko ravno ploskev s ploščino S.

Zdaj pa pogledjmo, kako enakonočje doživljamo v naših krajih, kako tega dne vidimo oziroma opazujemo Sonce na nebu. Pri tem opisu bomo še vedno zanemarili neke podrobnosti.

Opazovanja nas prepričujejo, da pri nas sredi zime Sonce vzhaja nekje na jugovzhodu, pride opoldne nizko nad jug in zahaja nekje na jugozahodu. Vendar pa se vzhajališče (vzid) in zahajališče (zaid) Sonca med letom spreminjata. Čim bolj gre zima v pomlad, tem bližje vzhodu vsak dan vzhaja Sonce in tem bližje zahodu zahaja. Okoli 21. 3. vziđe skoraj natančno na vzhodu (E), zaide skoraj natančno na zahodu (W) in je ravno pol dneva (12 ur) na nebu, tj. nad obzorjem (slika 4).

Ko torej kot med Sončevimi žarki in Zemljino osjo doseže 90° , nastopi enakonočje (spomladansko ali jesensko), kar se zgodi v različnih časih. V vseh krajih na Zemlji (razen polih) tega datuma Sonce vziđe na vzhodu in zaide na zahodu, je 12 ur nad obzorjem in 12 ur pod njim. Dan in noč sta enako dolga, kar pa seveda velja le za idealno obzorje, npr. na morju, kjer ni gora.

Vendar pa to, kar smo pravkar povedali, povsem ne drži, tudi za idealno obzorje ne. Res bi bilo le, če Zemlja ne bi imela ozračja. Ker ga ima, se stvari nekoliko zapletejo. Tu moramo predvsem omeniti lom svetlobe v ozračju. Svetlobni žarek, ki prihaja iz vesolja, npr. z zvezde, se v zračnih plasteh lomi k navpičnici, tako da ni raven, ampak se narahlo ukrivi in opazovalec na površju Zemlje vidi, na primer, zvezdo višje, kot je v resnici. Enako seveda velja tudi za Sonce.



Slika 4. Dnevne poti Sonca nad obzorjem:

- a – okoli astronomskega božiča (21. 12.);
- b – ob jesenskem (ali spomladanskem) enakonočju, ko je dnevna pot Sonca nad obzorjem (dan = 12 ur) enaka nočni poti Sonca pod obzorjem (noč = 12 ur);
- c – okoli astronomskega kresa (21. 6.).

Z b_2 je nakazana dnevna pot Sonca nad obzorjem malo pred jesenskim enakonočjem (malo po spomladanskem), ko je dan še daljši od 12 ur, z b_1 pa dnevna pot Sonca, ko je dan že krajši od 12 ur. Vrisana je smer premikanja vzhajališča in zahajališča Sonca okoli jesenskega enakonočja (okoli spomladanskega enakonočja je smer nasprotna). Slika ne upošteva vpliva loma svetlobe v ozračju.

Zaradi loma svetlobe vidimo Sonce še tik nad obzorjem, ko je dejansko že pod obzorjem, ko je torej že zašlo. Številčna vrednost loma ob obzorju je okoli $0,5^\circ$, kar je velikost zornega kota Sonca. Ker Sonce navidezno obkroži Zemljo v 24 urah, v teh 24 urah naredi kot 360° , brez težav izračunamo, da eni kotni stopinji (1°) ustreza čas štirih minut, polovici kotne stopinje ($0,5^\circ$) pa dve minuti (slika 5).



Slika 5. Zaradi loma svetlobe v ozračju pri vzhajanju vidimo Sonce že tik nad obzorjem, ko je v resnici še pod njim, pri zahajanju pa ga vidimo še tik nad obzorjem, ko je dejansko že zašlo.

Zaradi tega in še drugih vzrokov je 23. 9. ali pa 21. 3., ko navadno rečemo ali pa iz koledarjev preberemo, da je enakonočje, dejansko dan daljši od noči vsaj za približno štiri minute (teoretično). Dejansko jesensko enakonočje nastopi šele nekaj dni po uradno napovedanim datumom (v Ljubljani bo letos šele 26. 9.), dejansko spomladansko enakonočje pa nastopi že nekaj dni pred uradno napovedanem datumu (v Ljubljani je bilo letos že 18. 3.), o čemer se lahko prepričate v Astronomskih efemeridah *Naše nebo 2003*, ki jih izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov. Tako skupno trajata pomlad in poletje pri nas celo več kot 186 dni, kar glede na teoretični izračun prikazuje priložena preglednica.

“To so pa že prevelike podrobnosti”, bi kdo rekel. No, mislite si karkoli, za astronoma niso.

Trajanja letnih časov			
severna poluta	trajanje	južna poluta	opomba
pomlad	92,8 dneva	jesen	skupaj
poletje	93,6 dneva	zima	186,4 dneva*
jesen	89,8 dneva	pomlad	skupaj
zima	89,0 dneva	poletje	178,8 dneva

* Od spomladanskega do jesenskega enakonočja je po teoriji dobrih 186 dni, kar je več kot polovica leta. To nastane v glavnem zaradi tega, ker se Zemlja giblje okrog Sonca po rahlo sploščeni elipsi in ne po krožnici.

Marijan Prosen

Z NETRANZITIVNOSTJO V IGRI KOCK DO 'SKORAJ ZANESLJIVE' ZMAGE

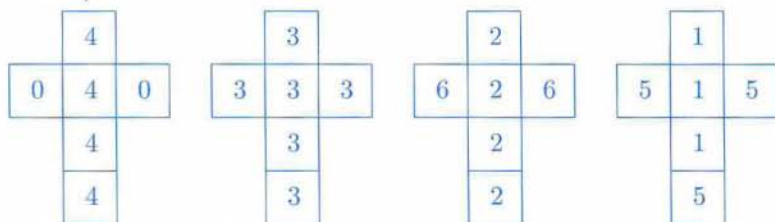
Verjetno je odveč omenjati, da v igri dveh poštenih, standardno označenih kock $K_{(1,2,3,4,5,6)}$ pade šestica na prvi kocki z enako verjetnostjo kot šestica na drugi kocki. Enako velja za vsako drugo število pik. Odloča naključje.

Za spremembo si zamislimo malce drugačno igro s kockami. Recimo, da je število pik na vsaki izmed kock drugače razporejeno (primer množice takih kock je na sliki 1). Pravila igra so preprosta. V igri dveh igralcev vsak igralec izbere eno izmed kock, nasprotnik izbere eno izmed preostalih. Kocke mečeta igralca večkrat (recimo desetkrat ali več), zmaga tisti, ki v teh metih večkrat vrže večje število pik.

Nasprotnik bi že navidez lahko podvomil v poštenost igre, zato je najmanj, kar lahko zahteva, možnost prve izbire. Z nekaj osnovami verjetnosti pa lahko pokažemo, da je prav možnost prve izbire nasprotnika pot k porazu. Kako je to sploh mogoče? V šahu (ki nima veliko opraviti z naključji) je prva poteza določena prednost. Tudi v nekaterih igrah na srečo je tako. Kdor prej pride, dostikrat prej melje.

Tukaj pa bo prva poteza 'skoraj zanesljivo' pomenila poraz.

Vzemimo množico štirih kock, vsako označimo drugače, kar je predstavljeno na mrežah spodaj (število pik na posamezni ploskvi je označeno s številom).



Slika 1. Kocke $K_{(4,4,4,4,0,0)}$, $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ in $K_{(1,1,1,5,5,5)}$.

Zavedati se moramo, da v primeru našega zmagovanja nasprotnik zaradi možnosti prve izbire lahko izbere našo, zmagovalno kocko. Kljub temu mu to ne pomaga kaj dosti. Zakaj?

V taki množici kock namreč velja, da

- prva kocka $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga drugo kocko $K_{(3,3,3,3,3,3)}$;
- kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(2,2,2,2,6,6)}$;
- kocka $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(1,1,1,5,5,5)}$;
- in presenetljivo: krog je sklenjen s tem, da kocka $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ 'skoraj zanesljivo' premaga kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$.

Priporočljivo je zapisati vseh 36 možnosti pri metu vsakega izmed parov, kjer ugotovimo, da je razmerje zmag v vsakem primeru $24 : 12$, kar pomeni, da je relacija 'skoraj zanesljivo premaga' dejansko dvakrat večja verjetnost zmage.

Sklenjen krog, v katerem ni absolutno najboljšega, pomeni, da ta relacija na tej množici kock ni tranzitivna. Prav neprehodnost relacije pa nam omogoča, da s prvo izbiro nasprotnika 'skoraj zanesljivo' zmagamo. Če je na primer izbrana kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, moramo izbrati $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ in kocka $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ je poražena z dvakrat večjo verjetnostjo.

To velja tudi za ostale omenjene pare.

Če pa se število metov večja, je zmaga tistega, ki izbira drugi, toliko verjetnejša – pri desetih metih pa nasprotnik praktično nima nikakršnih možnosti.

Kaj pa, če se nasprotnik odreče možnosti prve izbire?

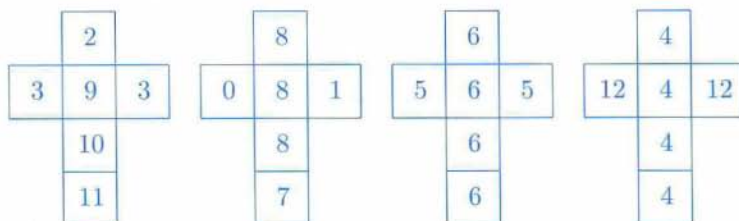
V primeru, da ugotovi strategijo, so naše vloge in možnosti zamenjane. Bolje je, da igro čimprej končamo. Lahko pa se zgodi, da je po naši izbiri kocke njegova izbira še vedno naključna. Mora se pač odločiti med preostalimi tremi kockami. Oglejmo si, katera izbira kocke bi nam prinesla največ možnosti za zmago.

- Izberemo $K_{(4,4,4,4,0,0)}$. S to kocko 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ (razmerje $2 : 1$), tesno izgubimo s $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ (razmerje $4 : 5$) ter 'skoraj zanesljivo' izgubimo s $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ (razmerje $1 : 2$).
- Če izberemo $K_{(3,3,3,3,3,3)}$, 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(2,2,2,2,6,6)}$ (razmerje možnosti $2 : 1$), s $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ imamo enake možnosti za zmago, s kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ pa 'skoraj zanesljivo' izgubimo (razmerje $1 : 2$).
- Če izberemo $K_{(2,2,2,2,6,6)}$, so možnosti za našo zmago s kocko $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ tesno nam v prid (razmerje $5 : 4$), 'skoraj zanesljivo' izgubimo s $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ (razmerje $1 : 2$) ter 'skoraj zanesljivo' premagamo $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ (razmerje $2 : 1$).
- Če pa izberemo $K_{(1,1,1,5,5,5)}$, smo v podobni situaciji kot pri izbiri kocke $K_{(3,3,3,3,3,3)}$. Enkrat imamo enake možnosti, enkrat 'skoraj zanesljivo' izgubimo (s $K_{(2,2,2,2,6,6)}$), enkrat pa 'skoraj zanesljivo' zmagamo (s $K_{(4,4,4,4,0,0)}$).

Iz celotne obravnave je razvidno, da bi nam, če nasprotnik strategije ne pozna, najbolj služila kocka $K_{(2,2,2,2,6,6)}$, kocki $K_{(3,3,3,3,3,3)}$ ter $K_{(1,1,1,5,5,5)}$ sta verjetnostno nevtralni, medtem ko bi s $K_{(4,4,4,4,0,0)}$ najverjetneje izgubili.

Naloge

1. Pokaži, da je množica kock



Slika 2. Kocke $K_{(3,3,2,9,10,11)}$, $K_{(0,1,7,8,8,8)}$, $K_{(5,5,6,6,6,6)}$ in $K_{(4,4,4,4,12,12)}$.

množica netranzitivnih kock, v kateri prva premaga drugo, druga tretjo, tretje četrto ter četrta prvo.

2. Pokaži, da je relacija 'skoraj zanesljivo premaga' na množici kock

$$K_{(3,3,5,5,7,7)}, K_{(2,2,4,4,9,9)}, K_{(1,1,6,6,8,8)}$$

netranzitivna.

- (a) Pokaži, da obstaja magični kvadrat velikosti 3, v katerem nastopajo številke, ki določajo števila pik na teh treh kockah.

3. Poišči množico treh kock z lastnostjo netranzitivnosti, ki imajo vsoto pik po vseh ploskvah enako 42.

Matej Mlakar

Literatura

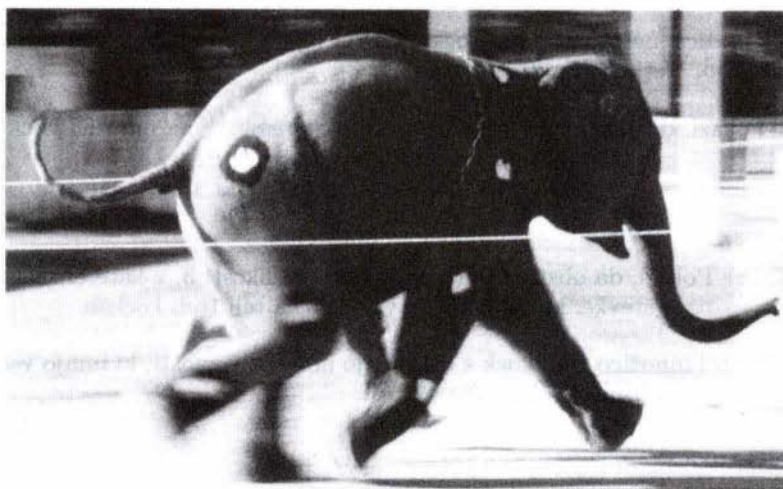
- [1] Savage Jr., R.P. *The paradox of nontransitive dice*. American Mathematical Monthly 101, Maj 1994, stran 429–436.
- [2] Peterson, I. 1997. *Mailbox: Magic dice; Monopoly and contra dancing*. Science News Online at http://www.sciencenews.org/sn_arc97/12_20_97/mathland.htm

Rešitve nalog so na str. 46.

ALI SLONI TEČEJO?

Presek se je v lanski 1. številki dotaknil vprašanja, kako so se gibali dinozavri, ki so že zdavnaj izumrli. Zakaj se ne bi mimogrede pomudil še ob vprašanju, kako se gibljejo sloni, ki jih za razliko od dinozavrov ni težko opazovati? Da je vprašanje smiselno, bi lahko sklepali že po tem, da nanj ni mogoče enolično odgovoriti.

Revija Nature je poročala o poskusu, ki naj bi pomagal najti odgovor. Na Tajskem so opazovali 42 zdravih azijskih slonov, s katerimi so izvedli 188 merjenj. Sloni so imeli na voljo trideset metrov dolg odsek poti, pred tem še deset dolg odsek za pospeševanje, na koncu pa prav tolikšen odsek za zaviranje. Ob slonu je tekel ali na njem sedel njegov gonič. Na strani slona, ki je bila obrnjena proti kameri, so z vodotopno barvo zaznamovali tri sklepe na sprednji in zadnji nogi: skočnega, kolenskega in vrhnjega, to je kolčnega in ramenskega (slika 1). S televizijsko kamero so posneli srednjih deset metrov gibanja in s posebnim programom ugotovili,



Slika 1. Slon in gonič tečeta ob vrvi, ki določa smer. Slonove sklepe so zaznamovali z barvo. Slike so povzete z dovoljenjem revije Nature in avtorjev iz prispevka J. R. Hutchinson, D. Faini, R. Lair, R. Kram, *Are fast-moving elephants really running?*, Nature **422** (2003) 493. Avtorji so po vrsti člani biomehanskega oddelka univerze v Stanfordu, oddelka veterinarske medicine kalifornijske univerze v Davisu, oddelka za ohranitev slonov v Lampangu na Tajskem in oddelka za uporabno fiziologijo koloradske univerze v Bouldru.

kako se je s časom spreminjala lega šestih sklepov. Da so podatke za vse slone spravili na enotno osnovo, so si pomagali z razdaljo med kolenskim in kolčnim sklepom kot enoto. S časom gibanja, ki so ga izmerili s fotocelicama, so ugotovili povprečno hitrost na trideset metrov dolgem odseku in jo primerjali s podrobnimi podatki na srednjem, deset metrov dolgem odseku. Oboji podatki so se dobro ujemali, kar je pričalo, da so se sloni gibali približno enakomerno. Pri treh poskusih so se gibali s hitrostjo nad 6 m/s, pri dvajsetih s hitrostjo med 5 in 6 m/s in pri dvaintridesetih poskusih s hitrostjo med 4 in 5 m/s. Zanimive podatke so dobili, ko so podrobno razčlenili gibanje sklepov pri posameznih poskusih. Kot smo namignili, pa tudi po vseh teh merjenjih niso mogli nedvoumno odgovoriti na vprašanje, ali sloni tečejo, ko se gibljejo s hitrostjo, ki je zanje velika.

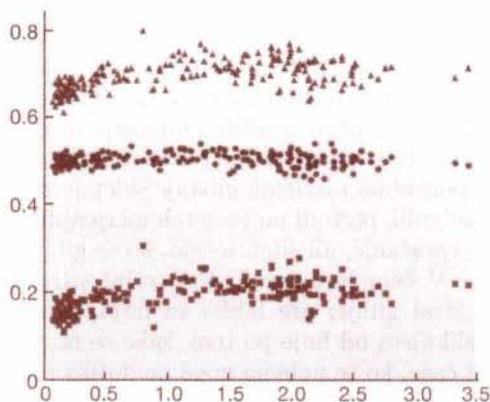
V čem je težava? Pri večini štirinožcev se ni težko odločiti, kako se žival giblje; gre lahko za hojo, drnec ali galop. Drnec in galop se razlikujeta od hoje po tem, kako se noge dotikajo tal. Pomemben je tudi del časa, ko se nobena noga ne dotika tal. Za tek je veljala značilnost, da se posamezna noga polovico časa ne dotika tal.

Pomembno je tudi Froudovo število, s katerim je mogoče na enotni osnovi primerjati gibanje vretenčarjev: $Fr = v^2/(gl)$, če je v povprečna hitrost, g težni pospešek in l višina kolčnega sklepa (*Kako hitro so se gibali dinozavri?*, Presek 27 (1999/2000), 142). Pri Froudovem številu nad $\frac{1}{2}$ pri vretenčarjih hoja preide v drnec. Pri hoji in drncu se drugi par nog giblje enako kot pri hoji, le da je gibanje enega para zakasnjeno za gibanjem drugega. Pri Froudovem številu nad 2,5 drnec preide v galop, ko se para nog gibljeta različno. Hoja, drnec in galop se razlikujejo po prelivanju kinetične energije v potencialno in obratno. V splošnem se ni težko odločiti, ker se vrsta gibanja spremeni, če ga presojujemo po tej ali po drugi značilnosti.

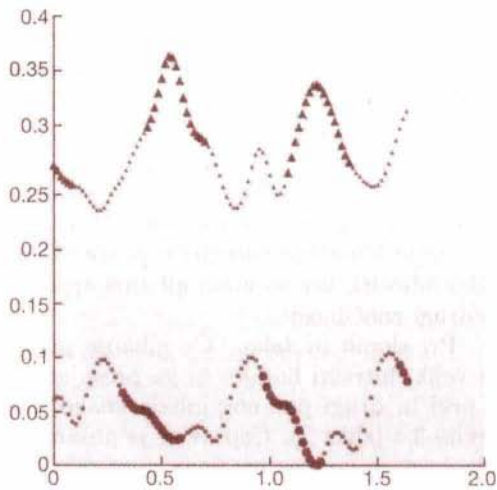
Pri slonih ni tako. Če gibanje presojujemo po eni značilnosti, tudi pri veliki hitrosti hodijo, če ga presojujemo po drugi, pa tečejo. Tako sta se prvi in drugi par nog gibala enako, čeprav so dosegli celo Froudovo število 3,4 (slika 2). Čeprav se je posamezna noga dotikala tal samo 0,37 dela časa, je ves čas vsaj ena noga ostala na tleh. Pri slonih se v prvem – pripravljalnem – delu koraka pri počasnem gibanju ramenski in kolčni sklep dvigneta in spustita sočasno. V tem delu koraka se težišče dvigne in spusti. Pri veliki hitrosti pa se ramenski sklep v prvem delu koraka dvigne in spusti, ko je sprednja noga na tleh, kar je značilno za hojo, kolčni sklep pa se spusti in nato dvigne, kar je značilno za drnec (slika 3). Mimogrede je vredno primerjati nogo slona, ki ima od vseh kopenskih živali največjo maso in na enoto mase in poti porabi za gibanje najmanj energije, z nogo precej lažjega konja (slika 4).



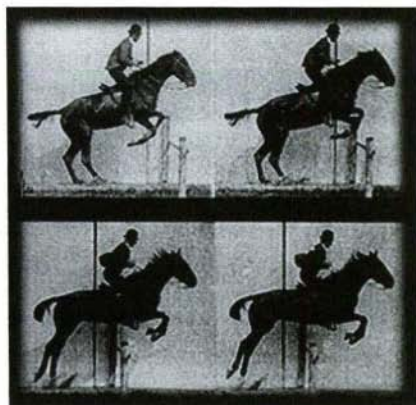
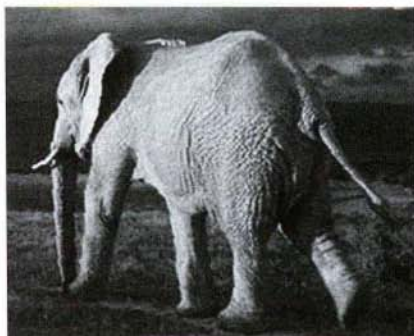
Slika 2. Sloni so enako predstavljali noge pri majhni in pri veliki hitrosti. Na vodoravno os je naneseno Froudovo število, na navpično pa čas kot del periode. Vodoravna črta ustreza levi zadnji nogi, sledi leva sprednja noga (kvadrati), desna zadnja noga (krogi) in desna sprednja noga (trikotniki). Vrstni red, ki je še posebej nakazan na vrhu, in relativni čas nista odvisna od hitrosti.



Slika 3. Navpični odmik kolčnega sklepa (krogi) in ramenskega sklepa (trikotniki) za slona pri Froudovem številu 2,8 in hitrosti 6,8 m/s. Veliki znaki ustrezajo prvemu delu koraka, majhni pa drugemu. Gibanje kolčnega sklepa navzdol je bilo značilno tudi za druge slone pri veliki hitrosti, pri nekaterih pa se je v prvem delu koraka kolčni sklep gibal dol in potem gor. Risba kaže približno dva in pol koraka v srednjih desetih metrih poti.



Po teh ugotovitvah je hitro gibanje slonov nekaj posebnega. Odpirata se dve možnosti: ali to vpeljati kot novo vrsto gibanja ali najti nove podatke, na primer, z merjenjem sil, s katerimi tla delujejo na noge slonov, da bi se po njih odločili, ali gre morda za drnec ali hojo. Začasno in ne popolnoma resno so hitro gibanje slonov poimenovali "Grouchov tek" po nenavadni hoji enega od bratov Marxov, ki so posneli nekaj zabavnih filmov.



Slika 4. Zadnja noga slona (levo) se po zgradbi znatno razlikuje od zadnje noge konja (desno). Sloni tudi pri hitrem gibanju stopajo na vse stopalo, konji pa se pri hitrem gibanju odrivajo z "enim prstom in uporabljajo stopalo kot nekakšno vzmet". Konja pri skoku čez oviro je leta 1887 posnel Eadweard Muybridge.

Ali ni tudi v drugih delih fizike podobno? Dokler ni trdnih merskih podatkov, je mogoče o zadevah poljubno razpravljati in si izmišljati nova imena. Novi trdni merski podatki pa pokažejo, za kaj v bistvu gre.

Veliko podatkov s filmom gibajočih se slonov je mogoče dobiti na spletnih naslovih

http://www.stanford.edu/~jrhutch/fast_elephants/wanalee/

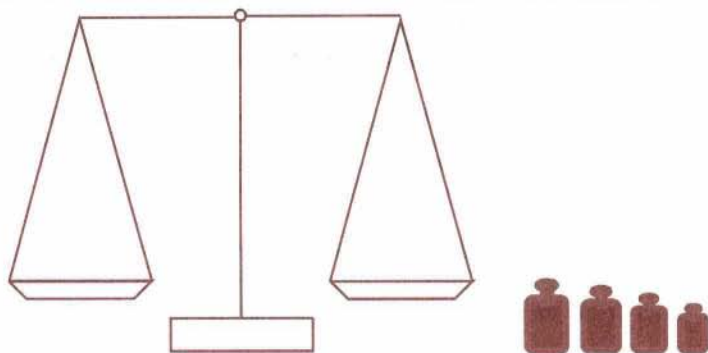
http://whyfiles.org/shorties/128elephant_run/

Če prvemu naslovu dodamo še `history.html`, pridemo do daljše razprave o razvoju raziskovanja slonovega gibanja. Pismo v *Nature* je razkrilo, da je prve uspešne posnetke gibanja slonov naredil Etienne-Jules Marey s sodelavcem že leta 1887. Slone je zaznamoval na način, ki so ga uporabili tudi sedanji raziskovalci. Pomagal si je z gibajočo se zaklopko z režo, ker tedaj še niso imeli filmskih kamer. Prve fotografije slonov v gibanju pa je že nekaj let prej naredil Eadweard Muybridge s 24 fotografskimi kamerami.

TROJIŠKI SESTAV

Zaradi računalnikov je pomen binarnih sestavov očiten. Človek bi pomislil, da mora biti nekoliko težje najti primer, ki bi nas 'prisilil' razmišljati v trojiškem sestavu. Pa temu sploh ni tako. Oglejmo si naslednjo nalogo iz Rutarjeve knjige *Svet matematike, Priročnik in vaje iz matematike za 5. razred osnovne šole* (poglavje Računske operacije v množici naravnih števil, str. 65, nal. 11), ki je označena z utežjo:

Koliko kg naj tehta vsaka od štirih uteži, da bi lahko na narisani tehtnici natehtali vse celoštevilске količine od enega do 40 kg?



V rešitvah lahko najdemo samo odgovor, ne pa tudi njegove razlage. Skupaj poiščimo pot do njega.

Z $x \geq y \geq z \geq t$ označimo iskane uteži. Potem mora množica števil

$$U = \{ax + by + cz + dt \mid a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}\} \quad (1)$$

vsebovati vsa števila od 1 do 40 (-1 pomeni, da smo utež postavili na nasprotno stran, nič pa, da uteži sploh ne uporabimo). Očitno je množica U , če jo predstavimo na realni osi, simetrična glede na izhodišče, saj iz $ax + by + cz + dt \in U$ sledi $-ax - by - cz - dt \in U$. Zato so v množici U tudi števila od -1 do -40 ter seveda 0. Skupaj je torej v množici U vsaj $81 = 3^4$ števil. Več pa jih ne more biti, saj imamo za vsako izmed števil a, b, c in d le tri možnosti. Torej je

$$(1) \quad U = \{-40, -39, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 39, 40\}.$$

Zaključimo:

$$(2) \quad \text{Vsako število iz množice } U \text{ lahko zapišemo na en sam način v obliki} \\ ax + by + cz + dt.$$

Od tod sledi, da so uteži x, y, z in t različna naravna števila, vsota vseh uteži nam da seveda največjo vrednost $40 = x + y + z + t$, drugo največjo vrednost dobimo le tako, da ne uporabimo najlažje uteži: $39 = x + y + z$. Od tod dobimo $t = 1$ ter $38 = x + y + z - 1$.

Število z ne more biti enako 2, saj bi 38 lahko dobili tudi z $x + y + t$, kar je v nasprotju z lastnostjo (2). Torej je $z \geq 3$ in mora biti $37 = x + y + 1$. Zaključimo $z = 3$, $36 = x + y$, $35 = x + y - 1$, $34 = x + y - 3 + 1$, $33 = x + y - 3$, $32 = x + y - 3 - 1$. Na podoben način se prepričamo, da mora zaradi lastnosti (2) veljati $y \geq 9$ in $31 = x + 3 + 1$. Torej je $x = 27$ in $y = 9$.

Prepričati se moramo le še, da za četverico $(x, y, z, t) = (27, 9, 3, 1)$ res velja (1) oziroma, kar je isto, da lahko zapišemo vsa števila od 0 do $80 = 2222_3$ v naslednji obliki:

$$a \cdot 27 + b \cdot 9 + c \cdot 3 + d \cdot 1 = \overline{abcd}_3 \quad \text{za } a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}.$$

To pa res ni težko, saj nas že v 5. razredu učijo šteti tudi v trojiškem sestavu:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	10_3	11_3	12_3	20_3	21_3	22_3
9	10	11	12	13	14	15	16	17
100_3	101_3	102_3	110_3	111_3	112_3	120_3	121_3	122_3
18	19	20	21	22	23	24	25	26
200_3	201_3	202_3	210_3	211_3	212_3	220_3	221_3	222_3
27	28	29	30	31	32	33	34	35
1000_3	1001_3	1002_3	1010_3	1011_3	1012_3	1020_3	1021_3	1022_3
36	37	38	39	40	41	42	43	44
1100_3	1101_3	1102_3	1110_3	1111_3	1112_3	1120_3	1121_3	1122_3
45	46	47	48	49	50	51	52	53
1200_3	1201_3	1202_3	1210_3	1211_3	1212_3	1220_3	1221_3	1222_3
54	55	56	57	58	59	60	61	62
2000_3	2001_3	2002_3	2010_3	2011_3	2012_3	2020_3	2021_3	2022_3
63	64	65	66	67	68	69	70	71
2100_3	2101_3	2102_3	2110_3	2111_3	2112_3	2120_3	2121_3	2122_3
72	73	74	75	76	77	78	79	80
2200_3	2201_3	2202_3	2210_3	2211_3	2212_3	2220_3	2221_3	2222_3

Trditve, da lahko vsako naravno število zapišemo na natanko en način v sistemu z osnovo $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$ (glej M. Vencelj, *Mala šola številskih sestavov*, Presek 30 (2002–03), str. 213–217), smo na naši poti dokazali le delno, a je očitno, da sedaj do splošne rešitve ni več daleč.

Aleksandar Jurišić

O RAZVRSTITVAH IN PERMUTACIJAH

Pri programiranju se včasih zgodi, da je treba dane objekte razvrstiti na vse možne načine in za vsako razvrstitev preveriti, ali ima neko želeno lastnost. Seveda je tako preverjanje smiselno le za majhne skupine objektov. Če je namreč v skupini n objektov, potem je vseh razvrstitev ravno $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Na prvo mesto lahko postavimo katerikoli objekt, na drugo kateregakoli od preostalih $n-1$ itd. Števila $n!$ pa se zelo hitro večajo: $5! = 120$, $10! = 3628800$, $20! \doteq 2.43 \cdot 10^{18}$.

Matematično razvrstitve predstavimo s permutacijami. Naj bo X (končna) množica z n elementi. Da poenostavimo pisavo, običajno vzamemo $X = \{1, 2, \dots, n\}$. *Permutacije* množice X so natanko bijektivne preslikave iz množice X nazaj v množico X . Množico vseh permutacij označimo z S_X , $S(X)$ ali pa kar z S_n . Naj bo π permutacija množice X , torej bijektivna preslikava $\pi: X \rightarrow X$. Če n ni prevelik, jo pogosto podamo s tabelo

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Za razvrstitev, ki jo določa permutacija, vzamemo kar spodnjo vrstico gornje tabele. Vrednost $\pi(1)$ tako pove, kateri objekt je na mestu 1, vrednost $\pi(2)$, kateri objekt je na mestu 2, itd. Možna je tudi nasprotna interpretacija, pri kateri vrednost $\pi(i)$ pove, na katerem mestu v razvrstitvi, ki pripada permutaciji π , se nahaja objekt i .

S permutacijami lahko tudi računamo. Če vzamemo dve permutaciji iste množice, lahko naredimo njun kompozitum (kot kompozitum preslikav) in spet dobimo permutacijo iste množice. Tu smo upoštevali, da je kompozitum bijektivnih preslikav spet bijektivna preslikava. Spomnimo se, da kompozitum preslikav označujemo s $\circ$ in da je definiran kot $(\pi_1 \circ \pi_2)(x) := \pi_1(\pi_2(x))$. Na primer, pri $n = 5$ vzemimo

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Potem je

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mimogrede opazimo, da $\pi_1 \circ \pi_2 \neq \pi_2 \circ \pi_1$. Učeno pravimo, da kompozitum permutacij ni *komutativna* operacija. Je pa kompozitum *asociativna* operacija, kar pomeni, da lahko "prestavljamo oklepaje". Za vsako trojko permutacij $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_n$ namreč velja $(\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3 = \pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3)$. Kot vse bijektivne preslikave imajo tudi permutacije inverze. Če permutacija preslika i v j , potem njen inverz preslika j v i . Inverz permutacije π bomo označili s π^{-1} .

Pri računanju je zelo pomemben zapis permutacij v obliki produkta *ločenih ciklov*. Poglejmo primer. Vzemimo permutacijo $\pi \in S_9$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 5 & 9 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Opazimo, da π preslika 1 v 7, 7 v 3, 3 v 4 in 4 nazaj v 1. Podobno gre 6 v 9, 9 v 8 in 8 nazaj v 6. Elementa 2 in 5 ostaneta na svojih mestih. Pravimo tudi, da sta *fiksni točki* permutacije. Permutacijo π lahko zapišemo tudi kot

$$\pi = (1\ 7\ 3\ 4) \circ (2) \circ (5) \circ (6\ 9\ 8) = (1\ 7\ 3\ 4)(6\ 9\ 8) = (8\ 6\ 9)(7\ 3\ 4\ 1).$$

Tu zapis $(i_1\ i_2 \dots i_k)$ označuje *cikel*, permutacijo, ki i_1 preslika v i_2 , i_2 v i_3 itn. do i_k , ki gre nazaj v i_1 . Zapis permutacije v obliki ločenih ciklov ni enoličen: zapis posameznega cikla lahko začnemo s poljubnim njegovim elementom (npr. $(1\ 7\ 3\ 4) = (7\ 3\ 4\ 1)$), pa tudi cikle lahko navedemo v poljubnem vrstnem redu. Cikli so ločeni, noben element ne nastopa v več ciklih, ampak vsak v natanko enem. V navadi je, da pri zapisu fiksne točke (cikle dolžine 1) izpuščamo. Seveda pa moramo potem za celotni opis permutacije poznati še število n . Prav tako izpuščamo znak za kompozitum med cikli. Kadar imamo permutacijo zapisano kot produkt ločenih ciklov, lahko njen inverz dobimo tako, da vse cikle obrnemo:

$$\pi^{-1} = (1\ 4\ 3\ 7)(6\ 8\ 9).$$

Povejmo še, kako razvrstitev *premešamo* v skladu s permutacijo τ . To storimo tako, da za vsak i od 1 do n objekt, ki je na mestu i , prestavimo na mesto $\tau(i)$. Poglejmo primer. Vzemimo razvrstitev B, D, A, E, C in jo premešajmo v skladu s 3-ciklom $(1\ 4\ 3)$. Dobimo razvrstitev A, D, E, B, C . Recimo, da začetno razvrstitev določa permutacija π . Katera permutacija določa premešano razvrstitev? Krajši razmislek pokaže, da je to permutacija $\pi \circ \tau^{-1}$. Res, kar pogledamo, kateri objekt je v premešani permutaciji na mestu i . Tisti, ki je na začetku na mestu, ki ga τ preslika v i . To mesto je $\tau^{-1}(i)$, tam pa je objekt $\pi(\tau^{-1}(i)) = (\pi \circ \tau^{-1})(i)$.

Po nekoliko daljšem uvodu smo tako prišli do jedra prispevka. Predstavil bi vam rad štiri desetletja star postopek, s katerim lahko zgradimo vse razvrstitve (oz. permutacije), vsako natanko enkrat. V postopku bomo razvrstitev predstavili z enorazsežno tabelo $\mathbf{p}$, pri čemer bodo indeksi v mejah od 1 do n . Kadar bomo nanjo pogledali kot na permutacijo, bo to spodnja vrstica iz dvovrstičnega zapisa permutacije v obliki tabele z začetka prispevka. Splošna shema, v katero sodi naš postopek, je rekurzivna:

permutacije($\mathbf{p}, n$)

za $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ponovi

če je $n > 2$, pokliči permutacije($\mathbf{p}, n - 1$), sicer preglej $\mathbf{p}$
v $\mathbf{p}$ zamenjaj elementa na mestih n in $f(n, i)$

do tod

če je $n > 2$, pokliči permutacije($\mathbf{p}, n - 1$), sicer preglej $\mathbf{p}$

Pri pravilnem delovanju postopka pričakujemo, da bo na mestih, kjer pregledamo tabelo $\mathbf{p}$, v njej vsakič druga razvrstitev. Razvrstitev, ki se v tabeli nahaja ob začetnem klicu, je lahko poljubna, res pa je, da bo postopek to razvrstitev obravnaval kot tisto, ki ustreza identični permutaciji.

Bistvo postopka se skriva v izbiri predpisa f , ki določa, kako med seboj zamenjujemo elemente tabele. Predpis mora zagotoviti, da bomo res zgradili vse razvrstitve. Na prvi pogled pa niti ni jasno, ali tak predpis sploh obstaja. No, B. R. Heap je leta 1963 opazil, da za f lahko vzamemo

$$f(n, i) := \begin{cases} 1, & \text{če je } n \text{ lih,} \\ i, & \text{če je } n \text{ sod.} \end{cases}$$

V nadaljevanju prispevka se bomo poskušali prepričati, da z zgornjo izbiro res dobimo vse razvrstitve. Razmislek bo zahteval kar nekaj računanja s permutacijami.

Poglejmo najprej majhne primere. Če je $n = 1$, se telo zanke sploh ne izvrši, edino razvrstitev pa pregledamo v zadnji vrstici. Pri $n = 2$ se telo zanke izvede enkrat. V njem pregledamo začetno razvrstitev, nato pa zamenjamo elementa na mestih 1 in 2 ($f(2, 1) = 1$ in $n = 2$). Po koncu zanke pregledamo še drugo razvrstitev.

V splošnem pa razmišljajmo takole. Če je $n > 2$, klic podprograma permutacije izvede n rekurzivnih klicev, $n - 1$ v zanki in enega po koncu zanke. Prepričati se moramo, da se pri rekurzivnih klicih na mestu n zvrstijo prav vsi elementi. Nato upoštevamo predpostavko, da rekurzivni

klici (pri njih ima drugi parameter manjšo vrednost) res naredijo vse razvrstitve elementov na mestih od 1 do $n-1$, in tako dobimo vse razvrstitve vseh n elementov. Takemu načinu razmišljanja pravimo dokazovanje z *matematično indukcijo*. Bazo indukcije, preverjanje trditve za $n=1$ in $n=2$, smo že premislili v prejšnjem odstavku. Ravnokat pa smo opisali tudi načrt za dokaz *indukcijskega koraka*.

Če želimo razumeti, kako se izmenjujejo elementi na zadnjem mestu, moramo vedeti, kako rekurzivni klic premeša elemente na prvih $n-1$ mestih. Označimo s τ_n permutacijo, v skladu s katero je po klicu permutacije($\mathbf{p}, n$) premešana tabela $\mathbf{p}$. S sledenjem postopku (ali pa s pomočjo programa, ki izvaja opisani postopek) ugotovimo, da velja $\tau_2 = (1\ 2)$, $\tau_3 = (1\ 3)$, $\tau_4 = (1\ 4\ 3\ 2)$, $\tau_5 = (1\ 5)$, $\tau_6 = (1\ 6\ 5\ 2\ 3\ 4)$, $\tau_7 = (1\ 7)$ in $\tau_8 = (1\ 8\ 7\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Z nekaj smelosti postavimo domnevo, da je permutacija τ_n enaka 2-ciklu $(1\ n)$, če je n lih, in enaka n -ciklu $(1\ n\ n-1\ 2\ 3\ \dots\ n-2)$, če je n sod.

Obnašanje postopka bomo opisali s permutacijami. Naj bo π_i , $1 \leq i \leq n$, permutacija, ki določa razvrstitev tik pred i -tim rekurzivnim klicem. Iz opisa postopka sledi, da za $i=1, 2, \dots, n-1$ velja

$$\pi_{i+1} = \begin{cases} \pi_i \circ \tau_{n-1}^{-1} \circ (1\ n), & \text{če je } n \text{ lih,} \\ \pi_i \circ \tau_{n-1}^{-1} \circ (i\ n), & \text{če je } n \text{ sod.} \end{cases}$$

Prvi kompozitum ustreza rekurzivnemu klicu, drugi pa sami zamenjavi v postopku. Pri tem smo upoštevali, da so 2-cikli kar sami svoji inverzi. Razvrstitev, ki je v tabeli $\mathbf{p}$ po koncu klica, pa ustreza permutaciji $\pi_n \circ \tau_{n-1}^{-1}$.

Dokazovanje pravilnosti postopka smo tako prevedli na povsem računski, algebraični problem. Pokazati moramo, da so elementi $\pi_i(n)$, $i=1, \dots, n$, med seboj različni (kar pomeni, da je pri vsakem rekurzivnem klicu na mestu n drugačen element) in da je $\pi_n \circ \tau_{n-1}^{-1} = \pi_1 \circ \tau_n^{-1}$ (kar pomeni, da je končna razvrstitev ravno s permutacijo τ_n premešana začetna razvrstitev π_1). Brez škode lahko vzamemo, da je π_1 identična permutacija. V računu bomo glede na parnost števila n ločili dve možnosti.

Naj bo n liho število. Potem je

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \tau_{n-1}^{-1} \circ (1\ n) = (1\ n-3\ n-4\ \dots\ 2\ n-2\ n-1)\ (1\ n) \\ &= (1\ n\ n-3\ n-4\ \dots\ 2\ n-2\ n-1) \end{aligned}$$

cikel dolžine n . Velja tudi $\pi_i = \pi_2^{i-1}$. Ciklična permutacija vsak element krožno preslika v njegovega naslednika. Podobno velja za potenco cikla, le da moramo narediti toliko korakov naprej po ciklu, kolikor je vrednost eksponenta. Tako ugotovimo, da velja

i	1	2	...	i	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
$\pi_i(n)$	n	$n-3$	...	$n-i-1$	...	2	$n-2$	$n-1$	1

Ker so v spodnji vrstici tabele sama različna števila, je prvi del trditve dokazan. Poglejmo še izraz $\pi_n \circ \tau_{n-1}^{-1}$. Če upoštevamo, da je k -ta potenca cikla dolžine k identična permutacija, sledi še drugi del trditve:

$$\pi_n \circ \tau_{n-1}^{-1} = \pi_2^{n-1} \circ \tau_{n-1}^{-1} \circ (1\ n) \circ (1\ n) = \pi_2^n \circ (1\ n) = (1\ n) = \tau_n^{-1}.$$

Ostane še možnost, ko je n sodo število. Tedaj je $\tau_{n-1}^{-1} = (1\ n-1)$. Tako z nekaj računanja dobimo

$$\begin{aligned}\pi_2 &= (1\ n-1) \circ (1\ n) = (n-1\ 1\ n), \\ \pi_3 &= \pi_2 \circ (1\ n-1) \circ (2\ n) = (n-1\ n\ 2), \\ \pi_4 &= \pi_3 \circ (1\ n-1) \circ (3\ n) = (n-1\ 1\ n\ 3\ 2), \\ \pi_5 &= \pi_4 \circ (1\ n-1) \circ (4\ n) = (n-1\ n\ 4\ 3\ 2), \\ \pi_6 &= \pi_5 \circ (1\ n-1) \circ (5\ n) = (n-1\ 1\ n\ 5\ 4\ 3\ 2).\end{aligned}$$

Natančneje, za lihe $i > 1$ velja

$$\pi_i = (n-1\ n\ i-1\ i-2\ \dots\ 3\ 2),$$

za sode $i \neq n$ pa

$$\pi_i = (n-1\ 1\ n\ i-1\ i-2\ \dots\ 3\ 2).$$

Zadnja permutacija π_n je enaka

$$\pi_n = \pi_{n-1} \circ (1\ n-1) \circ (n-1\ n) = (1\ n) (n-1\ n-2\ \dots\ 3\ 2).$$

Tako dobimo

i	1	2	3	4	...	i	...	$n-1$	n
$\pi_i(n)$	n	$n-1$	2	3	...	$i-1$	...	$n-2$	1

V spodnji vrstici tabele so zopet sama različna števila, tako da prvi del trditve drži. Poračunajmo še $\pi_n \circ \tau_{n-1}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\pi_n \circ \tau_{n-1}^{-1} &= (1 \ n) (n-1 \ n-2 \ \dots \ 3 \ 2) (1 \ n-1) \\ &= (1 \ n-2 \ n-3 \ \dots \ 3 \ 2 \ n-1 \ n) = \tau_n^{-1}.\end{aligned}$$

S tem je pravilnost postopka dokazana.

Opisanega postopka vam gotovo ne bo težko pretvoriti v program, ki bo s pomočjo rekurzije zgradil vse razvrstitve. Bolj izkušenim programerjem pa predlagam, da poskusijo napisati nerekurzivno različico postopka. Ta mora seveda graditi razvrstitve v povsem enakem vrstnem redu kot rekurzivna. Po mojih izkušnjah naj bi bila tudi za slabo petino hitrejša (je pa to seveda odvisno od računalnika in prevajalnika, ki ga uporabljate).

V prispevku smo spoznali Heapov postopek za pregled vseh razvrstitev (oz. permutacij), ki ga je preprosto opisati, precej težje pa se je prepričati, da deluje pravilno. Za dokazovanje pravilnosti smo izbrali bolj algebrائيčno, matematično korektno pot, ki pa ni najbolj nazorna. Smo se pa pri tem vsaj poskušali naučiti osnov računanja s permutacijami.

Martin Juvan

NALOGA ZA SPRETNE (IN POTRPEŽLJIVE) RAČUNARJE – Rešitev s str. 3

Račun pokaže, da se ploščina trikotnika in težiščnici izražajo takole:

$$\begin{aligned}p &= 4x^2(x^4 - 80x^2 + 1024), \\ 2t_a &= (x^2 + 32)y + 3x(x^2 - 32) \quad \text{in} \quad 2t_b = (x^2 + 32)y - 3x(x^2 - 32).\end{aligned}$$

Na desni so polinomi spremenljivk x in y s celimi koeficienti.

Pripomba. V nalogi navedeni izrazi za a , b in c niso pozitivni pri vseh parih števil x , y , ki zadoščajo enačbi $y^2 = x(x^2 + 5x - 32)$. Treba je vzeti trikotnik, ki ima za stranice absolutne vrednosti $|a|$, $|b|$, $|c|$. V Heronovem obrazcu za ploščino in v obrazcih za težiščnice pa nastopajo samo kvadrati stranic in zato morebitni negativni predznaki ne motijo pri računanju. Tudi ploščina p in dvojni težiščnici $2t_a$ in $2t_b$ so, strogo vzeto, absolutne vrednosti izrazov na desni.

Ivan Vidav

O TRENJU, I. del

Trenje se na prvi pogled zdi precej dolgočasen pojav. Toda brez njega si ni mogoče zamisliti življenja. Če ne bi bilo trenja, ne bi mogli uporabljati žebeljev, vijakov z maticami in lesnih vijakov ter zagozd. V strojih ne bi bilo prenosov z jermeni in dotikajočimi se kolesi. Ne bi mogli igrati na godala. Ne bi mogli zanetiti ognja ne z vrtenjem paličke iz trdega lesa ob kosu mehkega lesa ne s kresilom in ne z vžigalicami. Ne bi mogli hoditi, avtomobili in vlaki ne bi mogli speljati ali se zaustaviti, avtomobili ne bi mogli zaviti. (Del težav zaslutimo pri hoji in vožnji z avtomobilom ob poledici.) Ne bi delovale ne bobnaste ne kolutne zavore, avtomobila ne bi mogli pustiti zavrtega na klancu. Ne bi mogli uporabiti enojne lestve. Vozila bi pospeševali in zavirali ali zaustavljali z reakcijskimi ali raketnimi motorji, katapultili in velikimi kepami ilovice. (Na podobne razmere naletijo vesoljci, ko zapustijo vesoljsko ladjo.) Naprave s telesi, ki se dotikajo in gibljejo drugo glede na drugega, se ne bi obrabile.

Trenje je spremljalo ljudi od najstarejših časov. Izkoriščali so ga, na primer zato, da so zanetili ogenj. Na drugi strani so ga poskušali zmanjšati. Težka telesa so dali na nekakšne sani in trenje med sanmi in podlago zmanjšali z *mazanjem*. Uporabljali so vodo, mleko, rastlinsko olje ali živalsko mast (slika 1). Pod telo so položili okrogle gredi in s tem drsenje prevedli v kotaljenje. To je pripeljalo do izuma kolesa in voza s kolesi ter na drugi strani do preprostih *ležajev*. V asirski naselbini so našli ostanke šest tisoč let starega ležaja, ki je zmanjšal trenje vrat po tleh.



Slika 1. 4400 let stara risba iz groba egipčanskega veljaka Tija kaže moža, ki pred sani s kipom poliva neko kapljevino, da bi zmanjšal trenje.

O trenju je razmišljal že Aristotel, a ni spoznal, da je sila trenja usmerjena nasproti sili konja, ki vleče voz. Zato je mislil, da mora na voz nenehno delovati "zunanji vzrok", ali po naše, rezultanta sil, da se enakomerno giblje. Tako je trenje zameglilo pot do zakona gibanja. Isaac Newton je prišel do zakona preko gibanja planetov, pri katerem ni trenja. V laboratoriju so Newtonov zakon nekdaž preizkušali tako, da so opazovali gibanje dveh uteži v navpični smeri na vrvici, ki je tekla čez lahek škripec z vodoravno osjo (*Atwoodov škripec*, Presek **23** (1995/96) 90). Danes se

lahko izognemu trenju tako, da med telo in kovinsko podlago damo kos suhega ledu, ki ob stiku s kovino sublimira v plinast ogljikov dioksid. Za poskuse v razredu je pripravna zračna klop. Vozilo se giblje po votlem nosilcu s trikotnim presekom, iz katerega skozi drobne luknje piha zrak. V obeh primerih nastane tanka plast plina, "zračna blazina", po kateri se telo giblje brez trenja.

Trenje je raziskoval Leonardo da Vinci (1452 do 1519). (Glej *Leonardo da Vinci kot fizik*, Presek **27** (1999/2000) 216.) V beležnicah *Atlantskega kodeksa* najdemo prvo kvantitativno razpravo o trenju z ugotovitvami:

- Sila trenja je sorazmerna s hrapavostjo.
- Sila trenja se podvoji, če podvojimo breme.
- K trenju, ki ga povzroča isto breme, sodi enaka sila na začetku gibanja, čeprav ima morda stik različno dolžino ali širino.
- Pri trenju se na pripravi ravnini z zglačeno površino vsako telo upira s četrtno svoje teže.
- Če nagib telesu omogoča, da deluje s četrtno svoje teže v smeri gibanja, teži telo samo od sebe h gibanju navzdol.

Pojma sile Leonardo v današnjem pomenu še ni poznal, pač pa je pisal o "uporu trenja". Delal je poskuse, ki jih je spremljal z risbami. Kvader je bilo treba vleči z enako silo, ne glede na to, ali je stal na stranski ploskvi z največjo, srednjo ali najmanjšo površino. V beležnicah *Madridskega kodeksa* je da Vinci obdelal trenje strojev in si zamislil valjčne in kroglične ležaje, ki so jih začeli v večji meri uporabljati šele okoli leta 1900. Njegova dognanja niso vplivala na razvoj, ker so vsebino beležnic spoznali šele v 20. stoletju.

Prva spoznanja o trenju je objavil Guillaume Amontons (1663 do 1705) leta 1699, ne da bi v vsem dosegel da Vincija. Naredil je vrsto poskusov s preprostimi napravami. Klado v obliki kvadra je na vodoravno podlago pritiskala navpična vijačna vzmet. Z vzmetno tehtnico je Amontons meril silo, s katero je premikal klado. Delal je poskuse s telesi iz železa, bakra, svinca, lesa in spreminjal površino drsne ploskve. Ugotovil je:

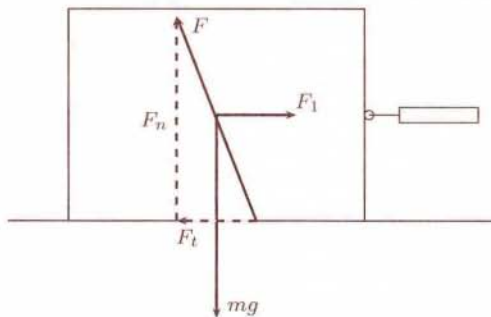
- Trenje je sorazmerno s silo, ki zgornjo ploskev stiska na spodnjo.
- Sila trenja je za uporabljene snovi približno enaka tretjini te sile.
- Sila trenja je neodvisna od površine drsne ploskve.

Amontons je še trdil, da sila trenja ni odvisna od snovi, če telo namažemo. Mislil je, da je sila trenja odvisna od hitrosti.

Razmišljal je tudi o izvoru trenja in domneval, da sila trenja nastane zaradi hrapavosti. Podlaga in klada imata vdrti in izbočene dele, ki segajo drugi v druge. Upor se pojavi, ker moramo klado dvigovati, kot da bi se gibala po klancu navzgor, da se premaknejo izbočeni in vdrti deli drugi glede na druge. Amontons ni razločeval med lepenjem in trenjem.

Na klado v obliki kvadra, ki se enakomerno giblje po vodoravni podlagi, delujejo tri telesa: Zemlja s težo mg navpično navzdol, vzmetna tehtnica v vodoravni smeri s silo F_1 in podlaga s silo $\vec{F}$ (slika 2). Silo podlage razstavimo na *pravokotno komponento* F_p in *vzdolžno komponento* F_t . Vzdlžna komponenta je *sila trenja*, ki je vedno nasprotna smeri gibanja. Na vodoravni podlagi je pravokotna komponenta navpična. Pri enakomernem gibanju so vse komponente sil v ravnovesju; težo uravnovesi pravokotna komponenta podlage, silo vzmetne tehtnice pa vodoravna komponenta sile podlage, to je sila trenja.

Slika 2. Klada v obliki kvadra se enakomerno giblje po vodoravni podlagi proti desni. Nanjo delujejo: teža navpično navzdol, vzmetna tehtnica proti desni in podlaga s silo, ki ima navpično in vodoravno komponento. Navpična komponenta sile podlage uravnovesi težo, vodoravna komponenta, to je sila trenja, pa silo vzmetne tehtnice.



Na klado polagamo uteži in ugotovimo, da je sila trenja sorazmerna s težo in s tem s pravokotno komponento sile podlage:

$$F_t = k_t F_p.$$

Sorazmernostni koeficient k_t je *koeficient trenja*.

Sila trenja ni odvisna od tega, po kateri mejni ploskvi drsi kvader, tako da tudi ni odvisna od površina S , v kateri se klada dotika podlage:

$$F_t \text{ ni odvisna od } S.$$

Sila trenja in koeficient trenja sta odvisna od snovi, iz katerih sta klada in podlaga, in od obdelave površin.

Poskusi pokažejo, da se *trenje v mirovanju* ali *statično trenje*, kratko *lepênje*, razlikuje od *trenja v gibanju* ali *dinamičnega trenja*, kratko *trenja*. Tako poznamo poleg sile trenja F_t še *silo lepenja* F_l . V mirovanju leži komponenta sile podlage na telo v vodoravni smeri na intervalu od 0 do *največje sile lepenja* F_{l0} :

$$0 \leq F_l \leq F_{l0}.$$

Največji sili lepenja priredimo *koeficient lepenja* k_l . Največja sila lepenja je podobno kot sila trenja sorazmerna s pravokotno silo in zanjo velja podobna zveza kot za silo trenja:

$$F_{l0} = k_l F_p.$$

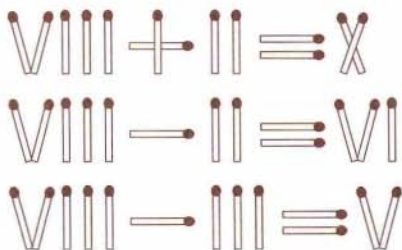
Navadno je največja sila lepenja malo večja kot sila trenja in koeficient lepenja malo večji kot koeficient trenja pri dani kladi in podlagi:

$$k_t < k_l.$$

Janez Strnad

TRI RAZLIČNE ZA NAJMLAJŠE – Rešitve s str. 2

1. V tri vrečke je dal po pet mandarin, nato pa te tri vrečke dal v četrto.
- 2.



3. Vsakega od trikotnikov sestavljata po dva skladna trikotnika s stranicami 5, 12 in 13 enot. Torej imata trikotnika enaki ploščini.

Dragoljub Milošević, prev. Marija Vencelj

KRIŽANKA "POJMI IZ ALGEBRE"

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$		DRUŽINSKI PRIIMEK PESNIKA VERGILA	MENIČNI POROK	ENAKI ČRKI	SISTEMAT. KATEGORI- JA MED VRSTO IN DRUŽINO	PRESLIKAVA $I(x) = x$	SESTAVA DVEH, ALI VEČ PRESLIKAV		LASTNOST TKANINE, KI JO ZAZNAMO S PRSTI	IG AF
								Q JE ZAE SESTEVANJE IN MNOŽE- NJE...		
NORVEŠKI MATEMATIK (PO NJEM SE IMENUJEJO KOMUTATIVNE GRUPE)		BIVALNI AUTOMOBIL						MATEM. PANDOGA, KI OBRAVNAVA ŠTEVILA		
ZAMEN- LJIVOST ČLENOV										
GLAVNO MESTO GANE				IGRALKA MOORE				AZUSKI VELETOK		
				PRAJ GRESNICA NA SVETU				VELIKA REČNA RIBA		
UTEMELJI- TELJ MAT. LOGIKE (GEORGE)					NIKO PRILATELJ			SOSEDI ČRKE R		ON ŽEN KR R
								LEDENIŠKA GROBLJA		
IME ČRKE M		RIMSKA ŠTIRI			ČLOVEKO- LJUB IN POPOTNIK KRIŽNAR				PROSTOR ZA PEVCE V CERKVI	
		MESTO V ROM. DELU MOLDAVIJE							OVITEK	
TUJA OSLIKA IMENA ALOJZIJA					ISTOLIČNOST STRUKTUR					
KRADLJIVEC								HRMAŠKA PEVKA (ALKA)		
OKRASEN KMEČKI PTIČ Z ŽIVO PISANIM REPOM					STISNJE- NA DLAN			OZNAKA REKE		
OBČAJNO NAJOŽJI DEL TRUPA				TRAJNICA IZ DRUŽINE ROŽNIC, PETOPRSTNIK						
				BISTVENO DEJSTVO ZA REŠEVANJE NALOGE						
VZDEVEK GLASBENIKA KARLA SOSSA				OKRASNA ROŽA Z RAZNOBARV. CVETI, SLOVENKA						
RIMSKA ŠEST		HAZARDNA IGRA S KARTAMI		IZOLACIJA OSEBKA				ODSEK NA KROŽNICI	MADŽAR. MOŠKO IME	PL STIS S
	VOLODJA PEER			DRAGO TRŠAR				PEVSKI ZLOG		HINP
	MORALNA NACELA, ETIKA			NEDOTAK- LJIVA ZADEVA				KOŽA, KI PREKRIVA OKO		C KI O
OBRLJIV ELEMENT					PRIPADNIK IZUMIRLE VEJE STARIH SLOVANOV	ŽENSKO IME				
KRAJŠA SVOBODNA KLAVIRSKA SKLADBA						STRUKTURA ŠTEVILSKIH n-TERIC				
						JOŽE UDVOČ				
PODNA- JEMNIK NA KMETIH, GOSTAČ (NAREČNO)								ZDRUŽ- LJIVOST ČLENOV		
MNOŽICA Z DEFINIR. RELACIJAMI MED ELEMENTI								STARA KULTURNA RASTLINA		

S TRENJEM DO VISOKIH TEMPERATUR

V prispevku *O trenju*, I. del, na strani 28, nas avtor spomni, da so nekdanj ljudje prav s trenjem prišli do ognja. Tako si še danes zakurijo lovci primitivnih plemen v področjih, kjer so odvisni predvsem od lastne iznajdljivosti (slika na IV. strani ovitka). Da je za tak način pridobivanja ognja potrebna posebna spretnost, se hitro prepričamo, ko z drgnjenjem lesenih ploščic drugo ob drugo skušamo ožgati njuni površini. Ni pa težko ožgati lesa pri vrtnanju ali žaganju z električnim orodjem, pri katerem se sprošča precejšnja moč. Brez orodja se posreči z vrtenjem paličice, ki jo z ostrim koncem postavimo v luknjico v leseni ploščici (slika na naslovnici). Izurjenemu lovcu hitro zagori okrog luknjice naloženo predivo tudi, ko vrti palico med dlanmi. Če si pri vrtenju pomagamo z lokom, pri katerem je tetiva ovita okrog palice, ki jo na zgornjem koncu potiskamo navzdol s prikladnim kamnom, se posreči zakuriti tudi izletnikom, če je le les dovolj suh. V ne tako oddaljeni preteklosti so prišli do ognja s kresanjem kremenov, torej spet s trenjem. Iskre so padale na izredno tanka vlakna posušene drevesne gobe in jih zažgale.

Oglejmo si razmere pri drgnjenju lesenih ploščic, saj so tedaj računi najpreprostejši. Pri tem premagujemo silo trenja $F_{tr} = k_t F$, kjer je k_t koeficient trenja, F pa sila, s katero stiskamo ploščici. Pri drgnjenju opravljamo delo

$$A = F_{tr} s, \quad (1)$$

ko na poti s premagujemo silo trenja F_{tr} . Pri tem je moč P kvocient opravljenega dela in časa t , v katerem smo delo opravili, torej $P = \frac{A}{t}$. *Gostota toplotnega toka* j , ki ga tako dovajamo na površino S ploščic z delom, pa je določena kot moč, deljena s površino:

$$j = \frac{A}{St} = \frac{kFs}{St} = \frac{kFv}{S}. \quad (2)$$

Radi verjamemo, da bo prav gostota toplotnega toka odločilna pri segrevanju površine ploščic. Povezavo med to količino in potekom temperature na površini bomo le navedli, saj je pot do nje prezapletena. Temperatura stičnega mesta narašča s časom takole:

$$T(t) = j \sqrt{\frac{t}{\pi \lambda \rho c_p}} + T_0. \quad (3)$$

Začetno temperaturo lesa smo označili s T_0 . V enačbi nastopajo še tri pomembne količine, in sicer toplotna prevodnost lesa λ , njegova

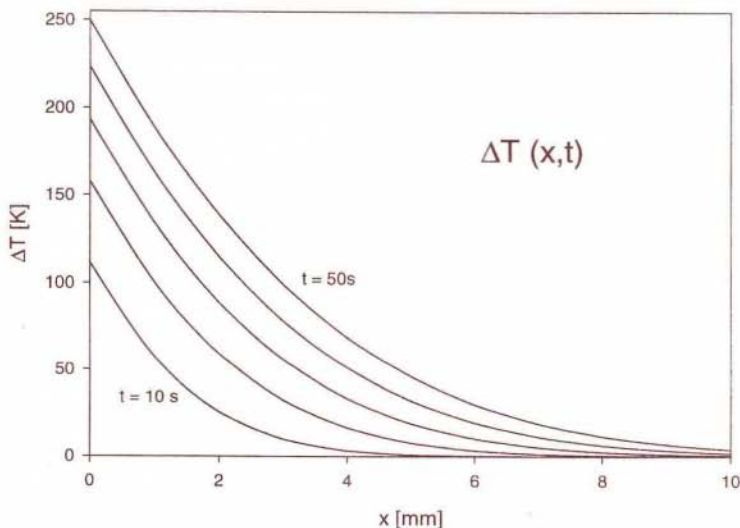
gostota ϱ in specifična toplota pri konstantnem tlaku c_p . Zanimivo je, da temperatura narašča kot $\sqrt{t}$, torej zelo hitro na začetku drgnjenja, potem pa vse počasneje. V enačbi smo že upoštevali, da se grejeta obe ploščici. Vrednosti za omenjene količine pri lesu so blizu naslednjim: $\lambda = 0.15 \text{ W/mK}$, $\varrho = 400 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 1700 \text{ J/kgK}$.

Kolikšna pa je gostota toplotnega toka? Ta je seveda odvisna od vneme, s katero ploščici drgnemo. Koeficient trenja med lesenima površinama je med 0,25 in 0,50. Če med drgnjenjem stiskamo ploščici s silo 50 N pri hitrosti ene ploščice glede na drugo 1 ms^{-1} in pri površini ploščic po 1 dm^2 , je gostota toplotnega toka

$$j = \frac{kFv}{S} = \frac{0,550 \text{ W}}{10^{-2} \text{ m}^2} = 2500 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (4)$$

Z navedenimi podatki izračunajmo čas t , v katerem se površini segrejeta na temperaturo 230°C , ko začne les goreti. Če začnemo pri temperaturi 20°C , moramo les na površini segreti za $\Delta T = 210^\circ\text{C}$. Čas t dobimo iz enačbe (3) takole:

$$t = \pi \lambda \varrho c_p \frac{(\Delta T)^2}{j^2}. \quad (5)$$



Slika 1. Potek temperaturne razlike pri drgnjenju ploščic pri gostoti toplotnega toka $j = 20 \text{ kW/m}^2$. Ostali podatki so navedeni v besedilu.

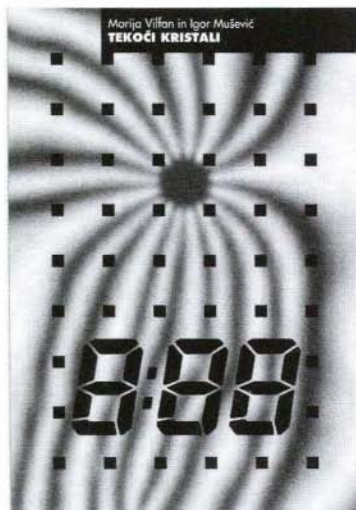
Ko vstavimo ustrezne vrednosti, dobimo $t = 2260$ s. Dobljeni čas blizu ene ure jasno pove, da bo tako drgnjenje po vsej verjetnosti neuspešno. V enačbi za čas t lahko izdatno spreminjamo le gostoto toplotnega toka j , na ostale parametre lahko vplivamo le v manjši meri z izbiro ustreznega lesa. Moči $k_t F v$ ne moremo bistveno povečati, vplivamo lahko le na površino S . Z zmanjšanjem le te za faktor 10^2 od 1 dm^2 na 1 cm^2 bi se čas skrajšal za faktor 10 000, torej od skoraj ene ure na del sekunde, kar je prav vabljivo. Razmere okrog tako majhne površine so sicer nekoliko drugačne kot med večjima ploskvama, enačbe pa vseeno tudi tedaj kar dobro veljajo. Tudi dovedena mehanična moč bo nekaj manjša. Pri kresanju kremenovih kamnov je dovedeno delo prav majhno, moč pa velika, saj traja kres delček sekunde. Gostota toplotnega toka pa je še posebno velika, ker je torna površina pri kresilu zelo majhna. S slike 1 razberemo, da se najprej znatno segreje le nekaj milimetrov tanka plast lesa. Debelina segrete plasti se s časom povečuje in ne preseže debeline enega centimetra, ko najbolj vroča plast doseže temperaturo vnetišča.

Računi in izkušnje torej kažejo, da ne gre obupati, ko se znajdemo brez vžigalnika kje na samem in bi se radi ob ognju pogreli.

Andrej Likar

Marija Vilfan in Igor Muševič: TEKOČI KRISTALI, Knjižnica Sigma, DMFA založništvo, Ljubljana 2002

Čeprav nas tekoči kristali na zaslonih prenosnih telefonov, digitalnih ur in žepnih računal spremljajo skoraj na vsakem koraku, se le malokdo zaveda dejstva, da pri tem ne gre le za neobičajne kemijske spojine, ampak predvsem za dokaj nenavadno in zelo zanimivo agregatno stanje snovi. To je stanje, v katerem snov teče podobno kot navadna kapljevina in hkrati kaže nekatere lastnosti, kot je denimo optična dvolomnost, ki smo jih navajeni srečati le v kristalih. Močna optična dvolomnost in dielektrična anizotropija tekočih kristalov, na primer, predstavljata osnovo za delovanje večine naprav, ki vsebujejo tekoče kristale.



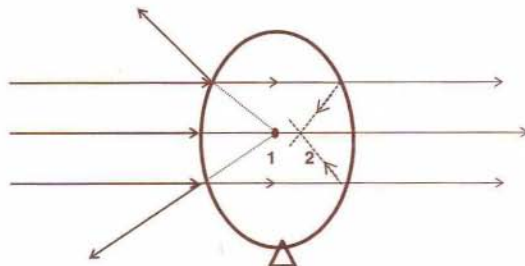
Knjiga *Tekoči kristali* poskuša v slovenskem knjižnem prostoru zapolniti splošno vrzel v učbeniški in strokovni literaturi, ki se opisu tekočih kristalov kljub njihovem širokemu tehnološkemu pomenu še vedno večinoma izogiba. Besedilo nas v trinajstih poglavjih celovito popelje v neznani svet teh, po mnenju Nobelovega nagrajenca P. G. de Gennesa, "lepih in hkrati skrivnostnih materialov". Na poljudno-strokovnem nivoju nam knjiga pojasni njihove posebnosti v primerjavi z običajnimi snovmi ter razloži principe delovanja nekaterih najbolj znanih naprav na osnovi tekočih kristalov (zasloni LCD, varilska očala, termometri, itd.). Izvemo, denimo, kakšna je razlika med preprostimi segmentnimi prikazovalniki, ki jih najdemo na ročnih urah in žepnih računalih, ter velikimi matričnimi LCD zasloni, kot je na primer barvni računalniški zaslon. Seznanimo se tudi z osnovami krmiljenja in najpomembnejšimi tehnološkimi problemi, povezanimi z izdelavo velikih zaslonov, ki so glavni razlog za še vedno relativno visoke prodajne cene ploščatih LCD televizorjev in monitorjev.

Besedilo je popestrjeno s številnimi ilustracijami in dvema barvnima prilogama, pri čemer so zlasti barvne slike zelo skrbno izbrane, tako da vzbujajo radovednost in željo po širšem razumevanju ozadja. Knjiga predstavlja koristno dopolnilo srednješolskim in tudi univerzitetnim učbenikom fizike in kemije. Kljub temu je napisana poljudno, saj je po besedah avtorjev namenjena vsem, ki bi radi izvedeli, kaj tekoči kristali so, od kod izvirajo njihove izjemne optične lastnosti in kako delujejo prikazovalniki. Besedilo se z eno samo izjemo dosledno izogiba rabi fizikalnih enačb, kar bo zagotovo dobrodošlo za mlajše bralce in tiste, ki niso najboljši poznavalci fizikalne stroke. Zanimiva popestritev besedila so dodatna vprašanja oziroma naloge in predlogi za poskuse, ki jih najdemo na koncu vsakega poglavja. Namenjena so v prvi vrsti učiteljem fizike, saj lahko z njimi učencu približajo in utrdijo marsikatero standardno poglavje pri pouku fizike. Vsakogar s kančkom naravoslovne žilice bo ob branju zagotovo zamikalo, da bi se opisanih oziroma predlaganih poskusov tudi sam lotil. V ta namen so v knjigi navedeni nekateri komercialni viri, pri katerih je možno nabaviti ustrezne kemikalije in drugo demonstracijsko opremo. Knjiga je zato lahko tudi priročnik za samo popestritev pouka, za delo v različnih interesnih dejavnostih in za raziskovalne naloge mladih naravoslovnih navdušencev.

BALONI IN VODNE BOMBE? NE, ZRCALA IN LEČE!

Ali ste vedeli, da so baloni tudi zrcala in vodne bombe poleg tega še leče? Ne verjamete? Poglejte!

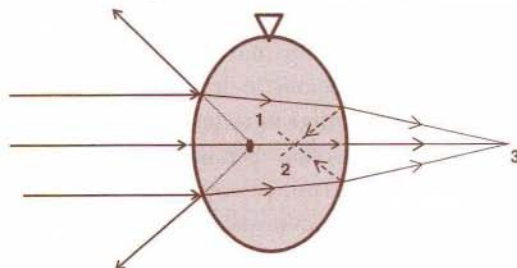
Pobljže si oglejte s soncem obsijan balon. V njem opazite dve svetli piki, ki sta približno enako veliki. Če balon vrtimo okrog navpične osi, ostaneta enako oddaljeni od stene balona. Svetli piki sta sliki sonca, ki nastaneta z odbojem svetlobe na zunanji ter na notranji steni balona (slika 1).



Slika 1. Preslikava sonca z balonom. Svetloba, ki vpade na balon, se delno odbije, delno vstopi vanj. Ko narišemo podaljške odbitih žarkov, dobimo v njihovem presečišču navidezno sliko sonca (1). Svetloba, ki vstopi v balon, se od zadnje stene delno odbije, delno pa gre skozi. Presečišče od zadnje stene odbitih žarkov pa da realno sliko sonca (2).

Prednja stena balona je razpršilno, zadnja pa zbiralno zrcalo.

Vzemite še z vodo napolnjen balon–vodno bombo in z njo poiščite sliko sonca. Poleg dveh svetlih pik, ki jih dobimo na enak način kot pri z zrakom napihnjem balonu, dobimo še eno svetlo piko na zaslonu za bombo (slika 2). Ta slika sonca, ki ja na sliki 2 označena s številko 3, nastane zaradi loma svetlobe pri prehodu iz balona v zrak. Tako nastane slika pri zbiralni leči. Torej je vodna bomba poleg zrcala tudi leča.



Slika 2. Preslikava sonca z vodno bombo. Žarki se lomijo tako pri vstopu v balon kot tudi pri izstopu iz njega.

IN POTEM SO ZAVLADALI REFLEKTORJI

Reflektor ali zrcalni daljnogled (teleskop) ima za objektiv vboklo (konkavno) zrcalo. O izgradnji reflektorja so razmišljali že v času, ko je živel Galileo Galilei (1564–1642), a do izdelave ni prišlo. Leta 1664 je Anglež Robert Hook sicer izdelal nekakšen reflektor, ki pa je bil tako slab, da sploh ni bil uporaben za astronomska opazovanja.

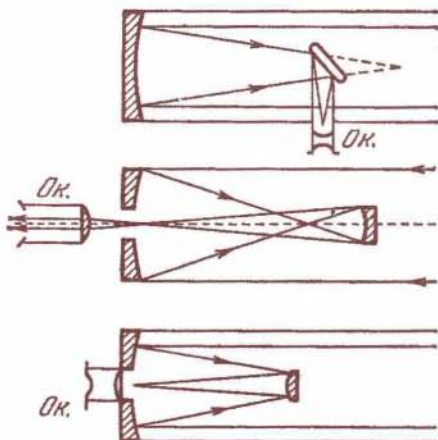
Prvi reflektor, ki je deloval, je uspel leta 1668 sestaviti šele Isaak Newton. To je bil majhen daljnogled. Glavno (primarno) vboklo sferno zrcalo iz poliranega bronu je imelo v premeru vsega 5 cm, goriščna razdalja pa je bila 6,5 cm (slika 1). Leta 1671 je Newton izdelal drugi reflektor, s premerom glavnega zrcala 3,5 cm in goriščno razdaljo 16 cm. Z optično osjo vzporedni svetlobni žarki so po odboju na glavnem zrcalu padali na majhno ravno zrcalo, od koder so se odbijali v okular ob boku daljnogledske cevi, kjer je oko (slika 2, zgoraj). Ta newtonovski tip reflektorja se je za opazovanje izkazal za zelo primerne in pripravnega. Uspešno ga uporabljamo še danes. Naj omenimo, da namesto ravnega (sekundarnega) zrcala pri nekaterih reflektorjih uporabljajo stekleno prizmo s totalnim notranjim odbojem, okular pa je vedno leča ali sistem leč, ki deluje kot povečevalno steklo (lupa).



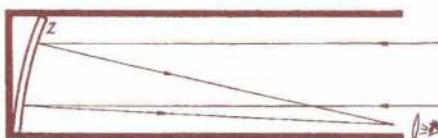
Slika 1. Prvi reflektor, ki ga je izdelal Newton leta 1668. Povečava tega teleskopa je bila menda okoli 25-kratna.

Poleg newtonskega sistema poznamo še druge tipe reflektorja. Pri reflektorju gregoryjevskega tipa po odboju od glavnega zrcala padajo svetlobni žarki na malo vboklo elipsno zrcalo, se od njega odbijajo v okular, ki je postavljen za središčno odprtino glavnega zrcala (slika 2, sredina). Ta sistem ima nekaj prednosti pred newtonovskim. Ker je elipsno zrcalo dlje od gorišča primarnega zrcala, so slike v gregoryjevskem sistemu pokončne, takšne kot npr. v lovskem daljnogledu. Za opazovanje zemeljskih predmetov je to zelo primerno. Tudi glede smeri opazovanja nebesnih teles je praktično, ker jih s takim reflektorjem opazujemo v isti smeri, kot ležijo na nebu.

Če elipsno zrcalo zamenjamo z izbočenim hiperboličnim, dobimo cas-sagrainski tip reflektorja (slika 2, spodaj). Ker svetlobni žarki, ki so se odbili od glavnega zrcala, padejo na hiperbolično zrcalo, predno se združijo v gorišča primarnega zrcala, so reflektorji tega tipa kratki, kar je spet primerno za določena astronomska opazovanja. Seveda so pozneje predlagali še druge tipe oziroma optične sisteme reflektorja (razne kombinacije), vendar so opisani trije najbolj pogosti.

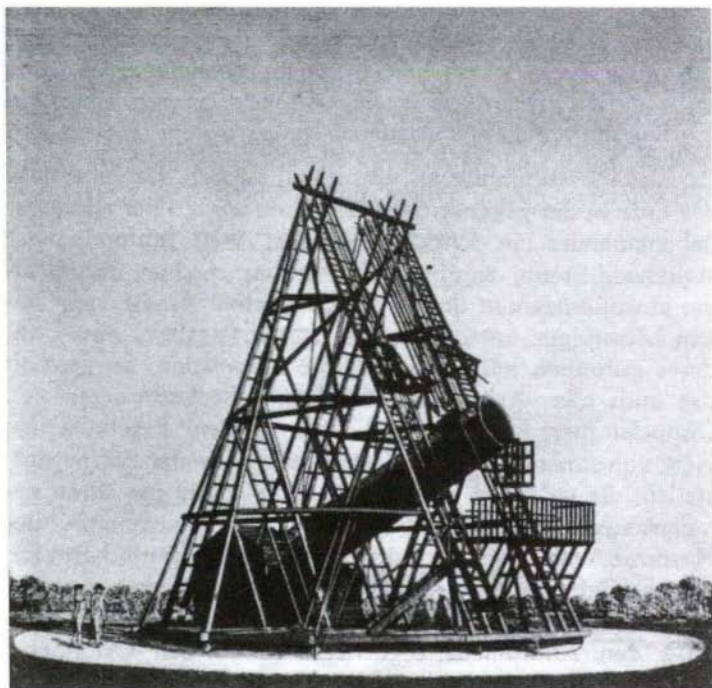


Slika 2. Nekaj tipov reflektorjev – sheme: zgoraj – newtonski tip, sredina – gregoryjevski tip, spodaj – cassagrainski tip; ok – okular.



Slika 3. Herschel-lomonosovski tip reflektorja – shema. Primarno zrcalo Z je nekoliko nagnjeno k osi cevi daljnogleda, s čimer prihranimo manjše sekundarno ravno zrcalo, kakršno je npr. pri newtonskem tipu reflektorja.

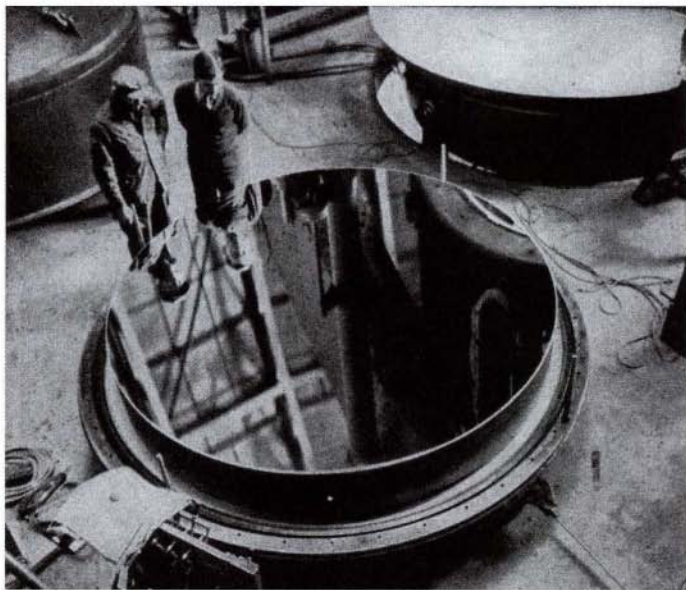
Prvi reflektorji newtonskega tipa, ki so jih izdelali, so bili glede kakovosti opazovanj dosti slabši od refraktorjev, daljnogledov z lečami, bili so slabši celo od zelo nerodnih zračnih refraktorjev. Vendar pa so v tekmovalju z refraktorji končno le iztržili zmago. Glavna prednost reflektorjev je namreč ta, da nimajo kromatične aberacije (barvne napake). Če ima glavno zrcalo obliko rotacijskega paraboloida, pa je možno izničiti tudi tako imenovano sferno aberacijo (vsaj za žarke, ki padajo na glavno zrcalo vzporedno z optično osjo daljnogleda).



Slika 4. Herschlov velikan, zgrajen v začetku 19. stoletja.

Izdelava zrcal je lažja kot za objektivne refraktorjev zelo zahtevno brušenje ogromnih leč. To je že v naprej zagotavljalo uspeh reflektorjev. Ker nimajo barvne napake, je mogoče izdelati svetlobno zelo močne reflektorje, kar ne velja za refraktorje. Gradnja reflektorja z enako velikim objektivom kot refraktor je dosti cenejša kot gradnja refraktorjev.

Seveda imajo pomanjkljivosti tudi reflektorji. Njihove cevi so odprte. V cevi se stalno vrtničijo zračni tokovi, zaradi katerih pride do neenakomernosti zraka, kar kvari sliko. Površje zrcal, na katerem se odbijajo svetlobni žarki, se hitro kvari, razmeroma kmalu postane motno in potrebuje stalno obnovo. Da dobimo odlične slike, je potrebna skoraj idealna oblika zrcal, kar je težko doseči, saj se pri uporabi (pri opazovanju) oblika zrcala hitro spreminja in kvari zaradi mehanskih obremenitev in temperaturnih sprememb. Kljub tem hibam so reflektorji postali najobetavnejši tip teleskopov.



Slika 5. Zrcalo 2,5 metrskega reflektorja na observatoriju Mount Wilson.

Tako je leta 1721 John Hadley, sicer izumitelj sekstanta, izdelal newtonski tip reflektorja s premerom bronastega zrcala 15 cm in goriščno razdaljo 158 cm. Z njim so z lahkoto opazovali štiri velike Jupitrove sate-lite, pa tudi Cassinijevo ločnico v Saturnovem obroču, ki jo je Huyghens s svojim 37 metrov dolgim zračnim refraktorjem komaj razložil. V Angliji je v sredini 18. stoletja James Short že serijsko izdeloval zelo kakovostne reflektorje. Večina jih je bilo izdelanih po gregoryjevskem tipu, največji med njimi je imel premer glavnega zrcala že 55 cm.

Rus Mihail Vasiljevič Lomonosov (1711–1768) in Anglež William Herschel (1738–1822) pa sta uporabljala pri opazovanjih drugačen tip reflektorja. Glavno zrcalo sta narahlo nagnila, tako da je bila slika oddaljene predmeta, ki jo je dalo glavno zrcalo, blizu vhodne zenice (odprtine) teleskopa. Na tem mestu sta postavila okular. Ta tip reflektorja je imel to prednost, da pri njem ni bilo treba uporabljati vmesnega ravnega zrcala ali prizme, zaradi česar se je izgubljal del sprejete svetlobe. Seveda pa so se lahko pojavljale razne druge napake (koma, astigmatizem, distorzija), ki so bile manj opazne pri drugih reflektorskih sistemih.

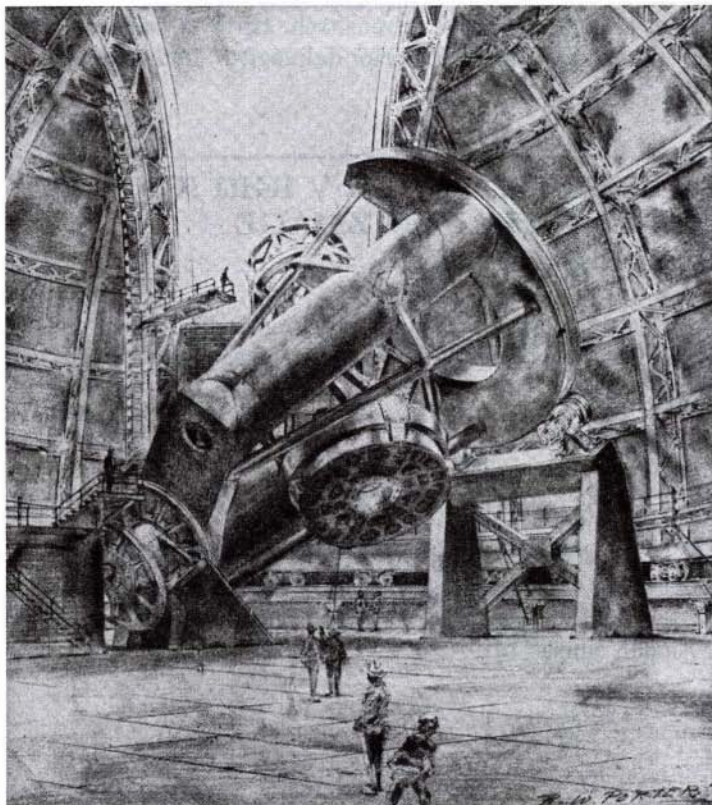


Slika 6. Kupola petmetrskega reflektorja na gori Palomar v ZDA.

Znameniti astronom William Herschel je izdelal več sto reflektorjev, med njimi tudi pravega velikana (težkega skoraj eno tono) s premerom glavnega zrcala 122 cm in goriščno razdaljo 12,5 m, vendar je s tem nerodnežem malo opazoval. Bil je bolj za okras in razkazovanje. Leta 1865 je angleški pivovar William Lassell po dolgotrajnem delu zgradil odličen reflektor s premerom glavnega zrcala 61 cm in z njim 10. 10. 1846 odkril Neptunov satelit Triton. Najbolj zanimivo pri tem je, da so planet Neptun odkrili le malo pred tem, 23. 9. 1846.

Največji reflektor s kovinskim zrcalom je izdelal irski aristokrat William Parsons, lord Rosse. Njegov velikanski daljnogled, rekli so mu Pošast iz Parsonstowna, s premerom glavnega zrcala 2 m (debelino 15 cm) in goriščno razdaljo 14 m je bil zgrajen 1845 in je bil celo namenjen opazovanju. Z njim je lord Rosse odkril spiralno strukturo Andromedine

galaksije (M 31), kar mu tedaj niso verjeli. Odkritje so potrdili šele v 20-tih letih prejšnjega stoletja. Daljnogledska cev je bila dolga 18 m in narejena iz smrekovih desk. Znotraj te cevi je lahko prosto hodil človek z odprtim dežnikom v roki, kar je med drugim storil tudi mestni pastor.



Slika 7. Pogled na petmetrski reflektor (risba).

Nato so zgradili še dosti večje in kakovostnejše reflektorje. Po prvi svetovni vojni so na observatoriju Mount Wilson v ZDA postavili 2,5 metrski reflektor in z njim opravili ogromno astronomskih meritev in opazovanj. Po drugi svetovni vojni pa so ameriški optiki z velikim trdom izdelali tudi glavno (13 ton težko) zrcalo za 5 metrski reflektor z goriščno razdaljo 6,5 m in ga postavili na observatoriju Mount Palomar. Ta daljnogled je zabeležil in seveda še beleži zvezde, ki so milijarde svetlobnih let oddaljene od nas.

Rusi so pozneje na astrofizikalnem observatoriju Zelenčukskaja na Kavkazu postavili mozaični reflektor s premerom vhodne zenice 6 m. Mimogrede, tudi Hubblov vesoljski daljnogled je reflektor.

Izdelava reflektorjev najrazličnejših tipov se nadaljuje. Zdaj na primer pri opazovanju ne uporabljajo več posamičnih daljnogledov, ampak daljnogleda, ki so sestavljeni iz dveh, treh, štirih in tudi več velikanskih reflektorjev (mreža). Takšen "mrežni daljnogled" ima zelo veliko skupno ločljivost.

Marijan Prosen

Z NETRANZITIVNOSTJO V IGRI KOCK DO 'SKORAJ ZANESLJIVE' ZMAGE – Rešitve nalog s str. 13

1. Izmed 36 možnosti, ki jih imamo pri metu dveh kock, vidimo, da je ugodnih 24, neugodnih pa 12, in to za vsakega izmed zgoraj napisanih parov.
2. V množici kock

$$K_{(3,3,5,5,7,7)}, K_{(2,2,4,4,9,9)}, K_{(1,1,6,6,8,8)}$$

prva kocka premaga drugo, druga tretjo, ta pa zopet prvo.

- (a) Števila, ki se pojavijo na kockah lahko razporedimo v magični kvadrat, v katerem je vsota po vrsticah, stolpcih in obeh diagonalah enaka (15).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3. Kocke so $K_{(1,1,1,13,13,13)}$, $K_{(0,3,3,12,12,12)}$, $K_{(2,2,2,11,11,14)}$.

Matej Mlakar

TOVORNJAKI – Rešitev s str. 3

Pet tovornjakov po 8 ton, dva za 4 tone in trije za 3 tone.

Dušan Murovec

ŽUŽKI – NOŽIŠČNE KRIVULJE ASTEROIDE

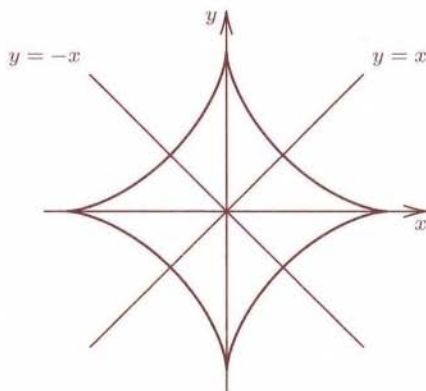
Dano ravninsko krivuljo $\mathcal{K}$ lahko na različne načine preoblikujemo v nove krivulje.

Nožiščno krivuljo $\mathcal{K}_P$ dane ravninske krivulje $\mathcal{K}$ dobimo tako, da v ravnini te krivulje izberemo točko P , nato pa jo pravokotno projiciramo na vse tangente krivulje $\mathcal{K}$. Množica vseh nožišč N , to je presečišč pravokotnic skozi P z vsemi tangentami krivulje $\mathcal{K}$, je nožiščna krivulja $\mathcal{K}_P$ krivulje $\mathcal{K}$ glede na pol P .

Nekatere krivulje, recimo premica in krožnica, imajo razmeroma enostavne nožiščne krivulje, nekatere pa bolj zapletene. Oglejmo si, kakšne nožiščne krivulje ima asteroida ali zvezdnica. Asteroida je krivulja, ki ima v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy enačbo

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad (1)$$

kjer je a pozitivna konstanta. Iz same enačbe razberemo, da je neobčutljiva za zamenjave $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$, $x \mapsto y$ in $x \mapsto -y$. To pomeni, da so premice $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ in $y = -x$ simetrale asteroida (1).



Slika 1. Simetrale asteroida.

Asteroido opiše izbrana točka na krožnici polmera $a/4$, če se ta krožnica brez drsenja kotali po notranji strani krožnice polmera a . Zato pravimo, da je asteroida poseben primer hipocikloide. Asteroida je lep primer ravninske krivulje, za katero večina računov poteka brez hujših zapletov.

Asteroido laže obravnavamo, če jo zapišemo v parametrični obliki. Če namreč enačbo (1) preoblikujemo v

$$\left(\frac{x^{1/3}}{a^{1/3}}\right)^2 + \left(\frac{y^{1/3}}{a^{1/3}}\right)^2 = 1$$

in se spomnimo, da je $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ za vsako realno število t , potem se samo po sebi vsiljuje, da postavimo

$$\frac{x^{1/3}}{a^{1/3}} = \cos t, \quad \frac{y^{1/3}}{a^{1/3}} = \sin t,$$

od koder sledi

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t. \quad (2)$$

To sta parametrični enačbi asteroide.

Funkciji sinus in cosinus smo smeli uporabiti zato, ker lahko že iz (1) sklepamo, da je asteroida omejena krivulja. Če en člen na levi strani v (1) povečamo, se mora drugi zmanjšati in obratno. Za $x = 0$ dobimo $y = \pm a$, za $y = 0$ pa $x = \pm a$. Točke $(a, 0)$ in $(0, a)$, $(-a, 0)$ in $(0, -a)$ so na asteroidi najbolj oddaljene od njenega središča. To so osti asteroide. Po vrsti jih dobimo iz (2) za $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$ in $t = 3\pi/2$. Očitno je za en obhod asteroide dovolj, da parameter t preteče interval $[0, 2\pi)$. Za $t = 2\pi$ dobimo zopet isto točko kot za $t = 0$. Vsaki točki na asteroidi ustreza natanko en t na intervalu $[0, 2\pi)$. Za $0 < t < \pi/2$ poteka asteroida po prvem kvadrantu, za $\pi/2 < t < \pi$ po drugem, za $\pi < t < 3\pi/2$ po tretjem in za $3\pi/2 < t < 2\pi$ po četrtem.

Kakšen geometrijski pomen ima parameter t ? Trdimo, da je t suplementaren naklonskemu kotu tangente na asteroido v točki, ki ustreza parametru t . Do tangente pridemo po običajnem postopku: skozi dve različni točki $T_0(x_0, y_0)$ in $T_1(x_1, y_1)$ asteroide najprej postavimo sekanto, potem pa omenjeni točki zblížamo v eno, recimo v T_0 . Če pri tem sekanta preide v mejni položaj, smo našli tangento. Smerni koeficient k_s sekante preide pri tem v smerni koeficient k_t tangente.

Denimo, da gre asteroida skozi T_0 , ko je $t = t_0$, skozi T_1 pa tedaj, ko je $t = t_1$. Pri tem je seveda $t_0 \neq t_1$. Torej je $x_0 = a \cos^3 t_0$, $y_0 = a \sin^3 t_0$, $x_1 = a \cos^3 t_1$ in $y_1 = a \sin^3 t_1$.

Zapišimo smerni koeficient k_s sekante skozi T_0 in T_1 :

$$k_s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{a \sin^3 t_1 - a \sin^3 t_0}{a \cos^3 t_1 - a \cos^3 t_0}.$$

Po krajšanju in razstavljanju dobimo

$$k_s = \frac{(\sin t_1 - \sin t_0)(\sin^2 t_1 + \sin t_1 \sin t_0 + \sin^2 t_0)}{(\cos t_1 - \cos t_0)(\cos^2 t_1 + \cos t_1 \cos t_0 + \cos^2 t_0)}.$$

Razliko dveh sinusov in dveh kosinusov lahko prevedemo na produkt

$$k_s = \frac{2 \cos \frac{t_0+t_1}{2} \sin \frac{t_1-t_0}{2} (\sin^2 t_1 + \sin t_1 \sin t_0 + \sin^2 t_0)}{-2 \sin \frac{t_0+t_1}{2} \sin \frac{t_1-t_0}{2} (\cos^2 t_1 + \cos t_1 \cos t_0 + \cos^2 t_0)}.$$

Po ponovnem krajšanju imamo

$$k_s = -\frac{\cos \frac{t_0+t_1}{2} (\sin^2 t_1 + \sin t_1 \sin t_0 + \sin^2 t_0)}{\sin \frac{t_0+t_1}{2} (\cos^2 t_1 + \cos t_1 \cos t_0 + \cos^2 t_0)}.$$

Ko gre T_1 proti T_0 , gre t_1 proti t_0 , koeficient k_s pa proti

$$k_t = -\frac{\cos t_0 (3 \sin^2 t_0)}{\sin t_0 (3 \cos^2 t_0)} = -\frac{\sin t_0}{\cos t_0} = -\tan t_0.$$

Smerni koeficient k_t tangente na asteroido v točki $T_0(x_0, y_0)$ je torej dan s formulo $k_t = -\tan t_0 = \tan(\pi - t_0)$. Za zgornjo in spodnjo ost k_t ni definiran. Enačba tangente na asteroido v T_0 pa je zato

$$y - a \sin^3 t_0 = -\tan t_0 (x - a \cos^3 t_0).$$

Po preureditvi dobimo enostavnejšo obliko:

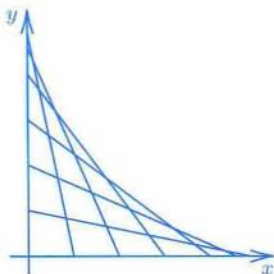
$$x \sin t_0 + y \cos t_0 = a \sin t_0 \cos t_0.$$

Ta oblika da pravilni rezultat tudi za vse osti asteroide. Naklonski kot α tangente je $\pi - t_0$, torej je t_0 res suplementaren naklonskemu kotu tangente na asteroido v točki, ki pripada parametru t_0 . Če izvzamemo osti asteroide, potem njena tangenta preseka os x v točki $A(a \cos t_0, 0)$, os y pa v točki $B(0, a \sin t_0)$. Razdalja med A in B pa je očitno enaka a , neodvisno od izbire točke T_0 na asteroidi. Značilno za asteroido je, da je medosna razdalja za vse tangente asteroide stalna. Izjeme so le tangente v njihih osteh.

Množica vseh tangent na asteroide je dana z enačbo

$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t. \quad (3)$$

Asteroidi (1) se v vsaki točki dotika natanko ena premica oblike (3), v dveh različnih točkah pa dve različni taki premici. Pravimo, da je asteroide (1) ogrinjača množice premic (3). Slika 2 prikazuje nekaj tangent z dotikališči v prvem kvadrantu.



Slika 2. Tangente na asteroide.

Sedaj pa že lahko izpeljemo izraza za koordinati (x, y) nožišča N izbrane točke $P(p, q)$ – pola – na katerokoli tangento asteroide. Pravokotnica na tangento (3) skozi P ima očitno enačbo

$$(x - p) \cos t - (y - q) \sin t = 0.$$

Rešitev x in y sistema enačb

$$x \cos t - y \sin t = p \cos t - q \sin t$$

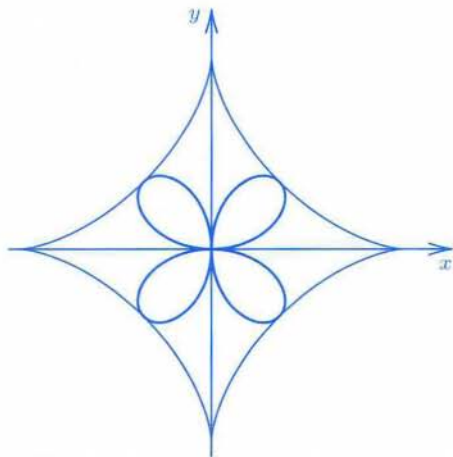
$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t$$

sta koordinati točke N . Preprost račun nam da

$$x = (p \cos t - q \sin t + a \sin^2 t) \cos t,$$

$$y = (-p \cos t + q \sin t + a \cos^2 t) \sin t.$$

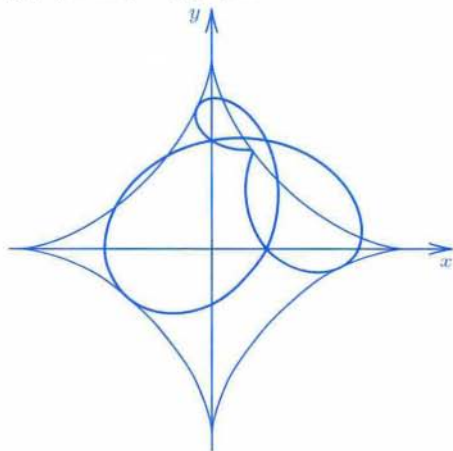
To sta parametrični enačbi nožiščne krivulje asteroide (2) glede na dani pol $P(p, q)$.



Slika 3. Štiriperesna deteljica kot nožiščna krivulja asteroide, če je pol izhodišče.

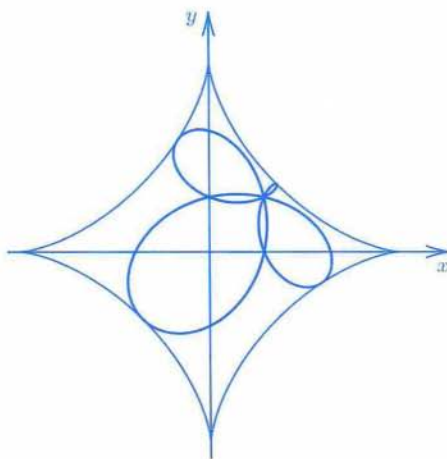
Oblika nove krivulje je precej odvisna od izbire točke P . V najenostavnejšem primeru $p = q = 0$ ima nožiščna krivulja asteroide glede na njeno središče parametrični enačbi $x = a \sin^2 t \cos t$, $y = a \cos^2 t \sin t$. Ker je v tem primeru $x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 t \cos^2 t = (a/2)^2 \sin^2 2t$, se polarni radij iskane krivulje izraža z $\varrho = (a/2) \sin 2t$. Krivulja je štiriperesna deteljica (slika 3).

Če izberemo točko P kar na slepo, ne predaleč od asteroide, dobimo krivuljo, ki bolj ali manj spominja na nekakšnega žužka. Na sliki 4 je primer, ko je $p = (2/7)a$ in $q = (4/7)a$.



Slika 4. Nesimetrični žuček.

Simetrične žužke dobimo, če izberemo P na eni od simetral asteroide. Slika 5 prikazuje primer žužka, ki je dobljen kot nožiščna krivulja asteroide za primer $p = q = (2/7)a$.



Slika 5. Simetrični žužek.

S parametričnima enačbama nožiščnih krivulj asteroide lahko različne oblike žužkov preučujemo z računalniškim programom Derive. Kdor ima raje geometrijske konstrukcije, pa bo morda segel po Cabri-géomètre in poskusil odkriti kako zanimivost tudi manj znanih krivulj. Seveda lahko uporabite tudi druge programe, ki so vam na voljo.

Marko Razpet

IZPITNI REZULTATI – Rešitev s str. 2

Pri opisanem načinu točkovanja ni možnih šest rezultatov: 139, 143, 144, 147, 148 in 149 točk.

Marija Vencelj

39. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši učenci in učenke sedmin ter osmih razredov s področnih tekmovanj so se v soboto, 12. aprila 2003, pomerili v sedmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po veljavnem pravilniku uvrsti 0,5% vseh sedmošolcev s posameznega področja in 1% vseh osmošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija.

REGIJA	7. razred	8. razred
Ljubljana	80	112
Kranj	29	34
Maribor	44	72
Celje	27	38
Koper	18	18
Nova Gorica	11	15
Novo mesto	20	37
SKUPAJ	229	326

Zlato Vegovo priznanje prejmejo sedmošolci in sedmošolke, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk, ter osmošolci in osmošolke, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem in tekmovalkam:

7. razred

I. nagrada

Nina Zupančič, OŠ Trebnje.

II. nagrada

Aleš Srna, OŠ Antona Tomaža Linharta, Radovljica.

III. nagrada

Maja Poklinek, OŠ Vuzenica; Katarina Vogelnik, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana; Miha Čančula, OŠ Božidarja Jakca, Ljubljana; Aljaž Gaber, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka; Miha Horvat, OŠ Antona Tomaža Linharta, Radovljica; Kaja Podobnik, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka; Alenka Verša, DSS Frana Levstika, Prosek.

8. razred**I. nagrada**

Nejc Ramovš, OŠ Mirna Peč.

II. nagrada

Tadej Stepišnik Perdih, OŠ Šmarje pri Jelšah.

III. nagrada

Mateja Pipan, OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica; Jon Leskovec, OŠ Notranjski odred Cerknica; Tom Primož, OŠ narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana; Jernej Zupančič, OŠ Trebnje; Tina Ilc, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina; Melita Rutar, OŠ Franceta Bevka, Tolmin; Jaka Sočan, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana.

Aleksander Potočnik

**23. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA
ZLATA STEFANOVA PRIZNANJA**

Državnega tekmovanja, ki je bilo 5. aprila na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, se je udeležilo 50 dvočlanskih ekip 7. razreda in 42 ekip 8. razreda. Tekmovalci so reševali ekipno dve eksperimentalni nalogi in tri teoretične naloge posamično.

Na tekmovanju je 89 učencev in učenk 7. razreda ter 53 učencev in učenk 8. razreda prejelo zlata Stefanova priznanja.

Državnega tekmovanja so se udeležili najboljši učenci ter učenke področnih tekmovanj. Področnega tekmovanja se je udeležilo 400 dvočlanskih ekip sedmih in 420 ekip osmih razredov. Podeljenih je bilo 590 srebrnih Stefanovih priznanj učencem/učenkam sedmih razredov in 460 priznanj učencem/učenkam osmih razredov.

Šolskega tekmovanja se je udeležilo 4568 učencev/učenk sedmih razredov in 4425 učencev/učenk osmih razredov, 1469 učencev/učenk sedmih razredov in 1440 učencev/učenk osmih razredov pa je prejelo bronasta Stefanova priznanja. Na državnem tekmovanju so bile podeljene tudi nagrade za najboljše tekmovalce in tekmovalke.

Nagrade so prejeli:

7. razred**1. nagrada**

Miha Čančula, OŠ Božidarja Jakca, Ljubljana.

2. nagrada

Marko Bregant, OŠ Mokronog; Gašper Golob, OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana; Aleš Srna, OŠ Antona Tomaža Linhartaradovljica; Katarina Vogeltnik, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana; Nejc Volk, OŠ Srečka Kosovela, Sežana; Jure Zmrzlikar, OŠ Vodice.

3. nagrada

Janez Barborič, OŠ Šmarjeta; Uroš Orešič, OŠ Poljčane; Davor Pavlovič, I. OŠ Slovenj Gradec; Tadevž Ropert, OŠ Lenart v Slovenskih Goricah.

8. razred**1. nagrada**

Katarina Kejžar, OŠ Dravljje, Ljubljana; Blaž Kirn, OŠ Preserje.

2. nagrada

Jernej Grmek, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana; Tadeja Tomšič, OŠ Medvode; Martin Werdonig, OŠ Bojana Iliča, Maribor.

3. nagrada

Jure Ausec, OŠ Simona Jenka, Kranj; Jaša Markun, OŠ Simona Jenka Kranj; Irena Matkovič, OŠ Bojana Iliča, Maribor; Matic Žirovec, OŠ Lava, Celje; Uroš Žunkovič, OŠ Franca Lešnjika–Vuka, Slivnica pri Mariboru.

Tekmovalci in tekmovalke osmih razredov, ki so se uvrstili na prvih petnajst mest, so vabljeni v Poletno šolo fizike, ki bo na Bledu v Plemljevi vili.

Mladim tekmovalkam in tekmovalcen ter njihovim mentorjem iskreno čestitamo za dosežene rezultate, vsem, ki so pripomogli k uspešni izvedbi tekmovanj, pa se najlepše zahvaljujemo.

Rezultati državnega tekmovanja so objavljeni na spletni strani Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije: <http://www.dmfa.si>.

Jelislava Sakelšek

1. TEKMOVANJE DIJAKOV IN DIJAKINJ SREDNJIH STROKOVNIH ŠOL IZ ZNANJA POSLOVNE MATEMATIKE

V letošnjem šolskem letu so se dijaki in dijakinje srednjih strokovnih šol prvič spopadli v tekmovanju iz znanja poslovne matematike. V ponedeljek, 24. 3. 2003, so potekala šolska tekmovanja, ki se jih je udeležil 401 dijak, od tega 192 na prvi in 209 na drugi zahtevnostni stopnji.

Iz vseh 24-ih sodelujočih šol se je 47 dijakov ter dijakinj udeležilo državnega tekmovanja, ki je bilo v petek, 11. 4. 2003, na Srednji ekonomski šoli Celje. Tekmovanje se je pričelo ob 9. uri z otvoritvijo in končalo ob 15. uri z razglasitvijo neuradnih, nekaj dni kasneje pa tudi uradnih rezultatov tekmovanja.

Predstavniki Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije so 22. 5. 2003 v okviru skupne slovesne podelitve nagrad za vsa tekmovanja podelili tekmovalcem tega tekmovanja šest nagrad. Najboljši tekmovalec na višji zahtevnostni stopnji pa je prejel še praktično nagrado, ki jo je prispevalo društvo jadralskih padalcev Kimfly, Vodice.

Nagrade so prejeli:

1. zahtevnostna stopnja

1. Tanja Lokošek, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje
2. Boško Simeunović, Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola, Ljubljana
3. Damijan Šorli, Srednja ekonomska in trgovska šola, Nova Gorica

2. zahtevnostna stopnja

1. Daniel Stojkov, Srednja ekonomska in trgovska šola, Nova Gorica
2. Lucija Koderman, ŠC Rudolfa Meistra Kamnik – Srednja ekonomska šola
3. Maja Sakelšek, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje

Sabina Gajšek

3. TEKMOVANJE DIJAKOV TER DIJAKINJ SREDNJIH POKLICNIH ŠOL V ZNANJU MATEMATIKE

Na šolskem tekmovanju je letos tekmovalo že 1785 tekmovalcev in tekmovalk.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola – Srednja poklicna šola v Ljubljani ter Zavod RS za šolstvo so bili 12. 4. 2003 organizatorji 3. državnega tekmovanja v znanju matematike za 74 najboljših dijakinj in dijakov srednjih poklicnih šol iz 38-ih slovenskih poklicnih šol. Podeljenih je bilo 20 zlatih priznanj (nagrajeni dijaki in dijakinje so iz 16-ih šol). Na svečani podelitvi je organizator prvim trem najbolje uvrščenim iz vsakega letnika podelil priznanja in praktične nagrade. Prejeli so jih:

1. letnik**1. nagrada**

Boštjan Krajnik, Srednja elektro in strojna šola, Kranj

2. nagrada

Nataša Regent, Srednja frizerska šola, Ljubljana

3. nagrada

Simon Matek, Srednja strokovna in poklicna šola, Celje

2. letnik**1. nagrada**

Tomaž Volmajer, Lesarska šola, Maribor

2. nagrada

Andrej Mugerli, Srednja lesarska šola, Nova Gorica

3. nagrada

Simon Fabčič, Srednja trgovska šola, Kranj

3. letnik**1. nagrada**

Matjaž Štokelj, Srednja lesarska šola, Nova Gorica

2. nagrada

Ana Osredkar, Srednja frizerska šola, Ljubljana

3. nagrada

Jure Sušin, ŠC Novo mesto – Poklicna in tehniška elektro šola

Dušanka Vrenčur

3. TEKMOVANJE DIJAKOV IN DIJAKINJ SREDNJIH TEHNIŠKIH IN STROKOVNIH ŠOL V ZNANJU MATEMATIKE

V šolskem letu 2002/2003 smo izvedli 3. tekmovanje dijakov in dijakinj srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike, tekmovanje B. Tekmovanja se lahko udeležijo vsi dijaki in dijakinje štiriletnih programov, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa. Opažamo, da tekmovanje dosega vedno večje zanimanje, kar je bil tudi cilj ustanoviteljev. Dijakom in dijakinjam je udeležba na tekmovanju dodatna pozitivna – prijetna motivacija.

Tekmovanje poteka na treh ravneh:

- šolsko (Evropski matematični kenguru);
- regijsko, ki je organizirano v osmih centrih;
- državno.

Naloge na šolskem tekmovanju so izbirnega tipa, na regijskem tekmovanju so naloge izbirnega tipa in kompleksne naloge, na državnem tekmovanju pa je pet kompleksnih nalog. Naloge za vse ravni tekmovanja pripravi državna tekmovalna komisija.

Šolsko tekmovanje je bilo izpeljano v četrtek, 20. marca 2003. Udeležilo se ga je 3533 dijakov in dijakinj. Na tem nivoju je bilo podeljenih 1103 priznanj.

847 tekmovalcev in tekmovalk je tekmovanje nadaljevalo na regijskem tekmovanju, ki je bilo organizirano 29. aprila 2003 v naslednjih regijskih centrih:

regija	gostitelj tekmovanja
Celjska regija	ŠC Celje – Poklicna in tehniška gradbena šola
Dolenjska regija	ŠC Novo mesto – Poklicna in tehniška elektro šola
Gorenjska regija	Srednja ekonomsko – turistična šola, Radovljica
Ljubljanska regija 0	SŠ Domžale
Ljubljanska regija 1	SŠ za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo, Ljubljana
Mariborska regija	Srednja prometna šola, Maribor
Pomurska regija	Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer
Primorska regija	Srednja pomorska šola, Portorož

Na regijskem tekmovanju je bilo podeljenih 283 srebrnih priznanj.

12. aprila 2003 smo izvedli 3. državno tekmovanje, ki je bilo na Srednji gradbeni, geodetski in ekonomski šoli v Ljubljani. Državnega tekmovanja se je udeležilo 123 tekmovalcev iz srednjih tehniških in strokovnih šol širom Slovenije. Državna tekmovalna komisija je podelila 45 zlatih priznanj.

Dobitniki zlatih priznanj

1. letnik

Davorin Krt, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Samo Jereb, Srednja lesarska šola, Škofja Loka; Simon Matavž, Srednja strojnikovinarska šola, Ravne na Koroškem; Martin Krauser,

ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Darko Pavlovič, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Sandi Babič, ŠC Ptuj – Poklicna in tehniška elektro šola; Borut Rutar, Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola, Ljubljana; Denis Štaleker, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Goran Hribar, Ekonomska šola, Murska Sobota; Matej Mežik, Srednja elektro in strojna šola, Kranj; Andreja Nastran, SŠ za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo, Ljubljana; Indira Ajanović, Srednja zdravstvena šola Izola; Kondrad Pogačar, ŠC Celje – Poklicna in tehniška elektro in kemijska šola; Marko Skrt, ŠC Postojna – Srednja šola.

2. letnik

Miha Nagelj, ŠC za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Simon Murgelj, ŠC za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Robi Gorup, TŠC Nova Gorica – Poklicna in tehniška elektro šola; Jani Prošt, Srednja strojnokovinarska šola, Ravne na Koroškem; Damjan Repar, SŠ za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Luka Boc Thaler, SŠ za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo, Ljubljana; Klemen Jezernik, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Jasna Tofant, ŠC Celje – Poklicna in tehniška elektro in kemijska šola; Željka Vasič, Srednja gostinska in turistična šola Izola; Robert Jerovšek, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; David Kapun, Srednja elektro – računalniška šola Maribor; Anja Miklavčič, ŠC Novo mesto – Strojna, zdravstvena ter poklicna in tehniška kemijska šola.

3. letnik

Goran Stojakovič, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Duro Drljača, ŠC za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; David Zakonjšek, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Manca Košorog, Gimnazija Kočevje; Dejan Kovačevič, ŠC Velenje – Poklicna in tehniška elektro in računalniška šola; Mojca Sporiš, SŠ za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo, Ljubljana; Marko Keferle, ŠC Novo mesto – Strojna, zdravstvena ter poklicna in tehniška kemijska šola; Goran Keser, ŠC Celje – Poklicna in tehniška gradbena šola; Andraž Kopač, Srednja elektro in strojna šola, Kranj.

4. letnik

Vanja Majcen, Gimnazija Celje – Center; Aleš Jugović, Šola za strojništvo Škofja loka; Mihael Rebernik, ŠC Celje – Poklicna in tehniška strojna šola; Jernej Guzej, SŠ za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo, Ljubljana; Tomaž Kanalec, TŠC Nova Gorica – Poklicna in tehniška elektro šola;

Boštjan Krajnik, Ekonomska šola Kranj – Srednja poklicna in strokovna šola; Matej Pičulin, TŠC Nova Gorica – Poklicna in tehniška elektro šola; Anže Rezar, ŠC Celje – Poklicna in tehniška strojna šola; Dean Delgiusto, Srednja pomorska šola, Portorož; Alojz Resnik, SŠ Krško.

Najboljšim trem tekmovalcem v posamezni tekmovalni kategoriji smo na svečani podelitvi v Ljubljani, 22. maja 2003, podelili nagrade.

Letošnjega tekmovanja se je udeležilo več dijakov in dijakinj kot lanskega. Takega zanimanja smo zelo veseli.

Zahvaljujemo se profesorjem mentorjem, organizatorjem regijskih tekmovanj in državnega tekmovanja ter ravnateljem, vsem torej, ki so pripomogli k uspešni izpeljavi vseh tekmovanj.

Darinka Žižek, Polonca Pavlič, Irena Pivko

47. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IN SREDNJEŠOLK SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 12. aprila 2003 se je 161 dijakov in dijakinj iz 41 gimnazij in srednjih šol v prostorih Gimnazije Želimlje spopadlo z nalogami na 47. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije. Urice do večerne razglasitve neuradnih rezultatov so si lahko skrajšali z izletom na grad Turjak, z izletom v Izobraževalni center za jedrsko energijo v Podgorici ali pa ob poslušanju potopisnega predavanja o Novi Zelandiji. Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade:

1. letnik

Prva nagrada

Boštjan Kovač, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Primož Koželj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Gašper Zadnik, Gimnazija Vič, Ljubljana.

Druga nagrada

Nino Bašič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Žiga Lokar, Gimnazija Kranj; Jože Mužerlin, Gimnazija Celje–Center.

Tretja nagrada

Tadej Grobelšek, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Matjaž Krnc, ŠC Slovenj Gradec – Gimnazija; Peter Lendero, ŠC Velenje – Splošna in strokovna gimnazija; Samo Štajner, Gimnazija Brežice.

2. letnik**Prva nagrada**

Sara Kališnik, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava.

Druga nagrada

Jan Lonzarić, II. gimnazija Maribor.

Tretja nagrada

Denis Golež, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Klavdija Jagar, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Matija Polajnar, Srednja elektro in strojna šola, Kranj.

3. letnik**Prva nagrada**

Nik Stopar, SŠ Vena Pilon Ajdovščina; Mitja Trampuš, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Klemen Žiberna, II. gimnazija Maribor.

Tretja nagrada

Matevž Pičman, Gimnazija Kranj; Janoš Vidali, Gimnazija Koper.

4. letnik**Prva nagrada**

Rok Končina, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Žiga Novšak, I. gimnazija Celje; Tadej Pajnhart Jarc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Janez Šter, Gimnazija Želimlje.

Druga nagrada

Tine Porenta, Gimnazija Škofja Loka.

Tretja nagrada

Katarina Bolko, SŠ Vena Pilon Ajdovščina; Domen Rovšček, Gimnazija Tolmin; Bojan Žunkovič, II. gimnazija Maribor.

Po določitih *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja izbrala ekipo, ki bo zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Tokiu na Japonskem. V ekipo so se uvrstili: Rok Končina, Ivo List, Nik Stopar, Janez Šter, Mitja Trampuš in Janoš Vidali.

Matjaž Željko

41. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IN SREDNJEŠOLK SLOVENIJE

Tudi letos je tekmovanje, tako kot v prejšnjih letih, potekalo v treh stopnjah in treh skupinah, ki so se razlikovale po snovi.

Na prvo stopnjo, **regijsko tekmovanje**, se je prijavilo 738 tekmovalcev iz 57 srednjih šol, udeležil pa se ga je 601 tekmovalac. Tekmovanje je bilo istočasno izvedeno 22. marca 2003 na osmih srednjih šolah iz posameznih regij: Škofijski klasični gimnaziji Ljubljana, Gimnaziji Litija, III. gimnaziji Maribor, Gimnaziji Ravne na Koroškem, Srednji elektro in strojni šoli Kranj, ŠC Nova Gorica – Gimnaziji, Srednji tehniški šoli Koper in Gimnaziji Brežice. Tekmovalne komisije so popravile izdelke in predložile tekmovalce za državno tekmovanje iz posamezne regije. Na tekmovanju je 193 tekmovalcev osvojilo bronasto priznanje, 126 predlaganih za državno tekmovanje pa tudi srebrno priznanje.

Državno tekmovanje je bilo 5. aprila 2003 v Šolskem centru Novo mesto. Od 126 predlaganih tekmovalcev se ga je v I. skupini udeležilo 54, v II. skupini 38 in v III. skupini 27, skupaj 119 tekmovalcev iz 38 srednjih šol. Tekmovanje je izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa sta krila Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport ter soorganizator državnega tekmovanja – Šolski center Novo mesto. Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so pomagali študentje in sodelavci FMF, Oddelek za fiziko, in sodelavci Inštituta Jožef Stefan. Na letošnjem državnem tekmovanju je komisija razglasila tri prve nagrade, šest drugih, osem tretjih in 29 pohval. Vseh 17 nagrajenih je prejelo tudi zlato priznanje. Svečana podelitev nagrad in zlatih priznanj je bila 22. maja 2003 na prireditvi v Koloseju v Ljubljani.

Podeljene nagrade in pohvale

Skupina I

I. nagrada

Matija Krajnc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

II. nagrada

Ni bila podeljena.

III. nagrada

Denis Golež, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Matija Vidmar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Vasja Susič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Miha Troha, Gimnazija Jurija Vege, Idrija; Andrej Soršak, I. gimnazija Maribor.

Pohvala

Matjaž Berčič, Gimnazija Škofja Loka; Tadej Kanduč, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana; Denis Brojan, SŠ za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Tadej Grobelšek, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Matjaž Gomilšek, II. gimnazija Maribor; Matija Lavrinec, ŠC Rudolfa Maistra Kamnik – Gimnazija; Tom Vodopivec, TŠC Nova Gorica – PTEŠ; Jerneja Bogovič, ŠC Novo mesto – Tehniška gimnazija; Simon Gangl, Srednja elektro-računalniška šola Maribor; Timotej Homar, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana; Klemen Rupnik, Gimnazija Jurija Vege, Idrija.

Skupina II**I. nagrada**

Simon Čopar, Gimnazija Litija; Nik Stopar, SŠ Vena Pilona Ajdovščina.

II. nagrada

Gregor Donaj, II. gimnazija Maribor; Monika Turk, Gimnazija Novo mesto; Gregor Posnjak, Gimnazija Kranj.

III. nagrada

Simon Jesenko, Gimnazija Škofja Loka; Klemen Pirnat, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Pohvala

Martin Strojnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matej Urbas, II. gimnazija Maribor; Lan Žagar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Klemen Blokar, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Matija Javorski, Gimnazija Jesenice; Marko Kuder, Srednja tehniška in poklicna šola, Trbovlje; Mitja Trampuš, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tadej Janež, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Žiga Novšak, I. gimnazija v Celju; Božidar Roglič, Srednja tehniška in poklicna šola, Trbovlje.

Skupina III**I. nagrada**

Ni bila podeljena.

II. nagrada

Klemen Žiberna, II. gimnazija Maribor; Anton Potočnik, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Ivo List, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

III. nagrada

Rok Končina, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava.

Pohvala

Marko Kotar, SŠ Josipa Jurčiča Ivančna Gorica; Rok Prislan, ŠC Nova Gorica – Gimnazija; Tadej Pajnhart Jarc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Simon Kolar, Gimnazija Murska Sobota; Jasna Rodman, Škofijska gimnazija Vipava; Mitja Pišlar, Gimnazija Koper; Matej Rožič, ŠC Novo mesto – Tehniška gimnazija.

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 9. maja 2003 na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Udeležilo se ga je 10 najboljših tekmovalcev iz III. skupine in 2 najboljša iz II. skupine z državnega tekmovanja. V ekipo za letošnjo 34. mednarodno fizikalno olimpiado so se uvrstili: Klemen Žiberna, II. gimnazija Maribor; Anton Potočnik, ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Rok Prislan, ŠC Nova Gorica – Gimnazija in Marko Kotar, SŠ Josipa Jurčiča Ivančna Gorica.

Čiril Dominko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
31. letnik, šolsko leto 2003/04, številka 1, strani 1–64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosen (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2003/04 je za posamezne naročnike **3.600 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **3.000 SIT**, posamezna številka **900 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBAS12X, transakcijski račun številka 03100-1000018787.

List sofinancira MŠZŠ
 Založilo DMFA – založništvo
 Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2003 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1538

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



