

30 (2002 – 03)

6

PRE SEK

ISSN 0351-6653

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

JEAN-PIERRE SERRE JE PRVI DOBITNIK ABELOVE NAGRADE ZA MATEMATIKO

V peti številki lanskega letnika Preseka smo pisali o ustanovitvi Abelove nagrade, nove mednarodne nagrade za matematiko. Letos aprila, ob obletnici Abelove smrti, je norveška akademija znanosti razglasila njenega prvega dobitnika. To je eden največjih sodobnih matematikov, Francoz Jean-Pierre Serre, častni profesor na Collège de France, svobodnem vseučilišču v Parizu. Nagrada je vredna približno šest milijonov norveških kron in po višini enakovredna Nobelovi nagradi.

V obrazložitvi nagrade je rečeno, da Jean-Pierre Serre prejema nagrado za ključno vlogo pri modernizaciji številnih matematičnih vej, kot so topologija, algebraina geometrija in teorija števil. Njegovo delo je izjemno široko, globoko in vplivno ter je bistveno prispevalo in še prispeva k razvoju matematike v zadnjih petdesetih letih. Čeprav osredotočeno na osnove matematike, je pomembno vplivalo tudi na razvoj uporabnih področij, kot sta šifriranje z javnim ključem in razvoj učinkovitih kod za odpravljanje napak.

Jean-Pierre Serre se je rodil leta 1926 v Bagesu v Franciji. Študiral je na L'École Normale Supérieure v Parizu in leta 1951 doktoriral na pariški Sorbonni. Najprej je deloval v Centre National de la Recherche Scientifique, bil nato izredni profesor na univerzi v Nancyju, od leta 1956 dalje pa je redni profesor na Collège de France.

Profesor Serre je nosilec številnih priznanj. Podeljena sta mu bila visoka francoska državna naziva Commandeur de la Légion d'honneur (komandir častne legije) in Grand officier de l'Ordre National du Mérite (visoki oficir reda zaslug za narod). Je član številnih akademij znanosti, med drugimi francoske, švedske, ameriške in nizozemske. Leta 1954 je prejel Fieldsovo medaljo in je bil najmlajši dobitnik tega priznanja doslej. Leta 1970 je dobil nagrado Gaston Julia, 1985. leta nagrado Balzan, deset let kasneje nagrado Steele in leta 2000 Wolfovo nagrado. Je častni doktor številnih univerz, tudi univerze v Oslu, ki mu je ta naziv podelila ob dvestoletnici Abelovega rojstva.



Marija Vencelj

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, leto 2002/03, številka 6, strani 321–384

VSEBINA

MATEMATIKA	Glasba in matematika – 2. del, Temperirana uglasitev in prijemi pri kitari (Marija Vencelj) .. 324-331 Ti presneta sedmica! (Marko Razpet)..... 338-343 Trikotnik, kvadrati in krožnica (Nada Razpet) 347-351
FIZIKA	Skok v daljavo (Janez Strnad) 332-337, III Pogled v čase, ko je bila Zemlja še mlada (Jože Pahor)..... 354-359 Kako hitro se gibljejo zračne molekule? (Ivan Gutman, Branislav Čabrić, Nenad Stevanović, prev. Marija Vencelj) 367-369
ASTRONOMIJA	Prihodnje leto se bo zgodilo (Marian Prosen)..... 344-346
RAČUNALNIŠTVO	Napake niso večne – Presek, zgoščenke, planeti in kode (Aleksandar Jurišić) 361-366, III, IV
NOVICE	Jean-Pierre Serre je prvi dobitnik Abelove nagrade za matematiko (Marija Vencelj) II
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Odkrivanje napak na pamet (Marija Vencelj)..... 337 Križanka "Geometrijska telesa" – reš. na str. 366 (Marko Bokalič) 352-353 Glorija – sipanje svetlobe (Jože Rakovec) 359-360
REŠITVE NALOG	Rešitve nagradnih nalog iz 3., 4. in 5. številke Preseka (Marija Vencelj, odgovorna urednica)..... 322 Kriptaritem v različnih številskih sestavih – Rešitev nagradne naloge iz 4. številke (Marija Vencelj) . 322-323 Z ognjem in smodnikom – Rešitev nagradne naloge iz 5. številke Preseka (Tim Vidmar) 323
TEKMOVANJA	24. mednarodno matematično tekmovanje mest – Naloge jesenskega kroga (Gregor Cigler)..... 370-372 24. mednarodno matematično tekmovanje mest – Rešitve nalog jesenskega kroga s str. 370 (Gregor Cigler) 372-379
LETNO KAZALO	 380–384
NA OVITKU	Slika k članku Glasba in matematika na str. 324 (foto Matjaž Vencelj)..... I Slike k člankoma na strani 332 in 361..... III, IV

REŠITVE NAGRADNIH NALOG IZ 3., 4. IN 5. ŠTEVILKE PRESEKA

Podaljšani rok za nagradno nalogo **Hrana, rana, Ana, na** je prinesel novo najdaljšo slovensko besedo, iz katere lahko z zaporednim izpuščanjem posameznih črk dobimo same slovenske besede, do vključno zadnje z dvema črkama. Pregibanje besed ni bilo dovoljeno. Poslal nam jo je *Blaž Batagelj iz Kamnja pri Dobravljah*. Besedi **ogredje**, ki ima sedem črk, je našel zaporedje **ogredje, gredje, gredè, gred, red, re**. Vse besede smo našli v Slovarju slovenskega knjižnega jezika, zato Blažu pripada knjižna nagrada.

Edini popolni odgovor na nalogo **Kriptaritem v različnih številskih sestavih** nam je poslal *Sebastjan Meznarič iz Maribora* in si prislužil našo knjižno nagrado.

Nihče od reševalcev naloge **Z ognjem in smodnikom** ni odmeril potrebne tričetrt ure samo z uporabo vžigalnih vrvic. Posrečeno rešitev, ki je blizu pravi, nam je poslal reševalec iz Sodražice. Žal je prvih petnajst minut odmeril s pravo uro, zato mu rešitve ne moremo priznati.

Marija Vencelj, odgovorna urednica

KRIPTARITEM V RAZLIČNIH ŠTEVILSKIH SESTAVIH – Rešitev nagradne naloge iz 4. številke

Poiskati je bilo treba vse številске sestave, v katerih ima kriptaritem

$$\overline{ABC} + \overline{CBA} = \overline{DDD}$$

natanko šest rešitev.

Naj bo $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ osnova, v kateri je kriptaritem zapisan. Primerjava prvih in tretjih števk pove, da v računu na nobenem mestu ne more priti do bazičnega prenosa. Zato velja

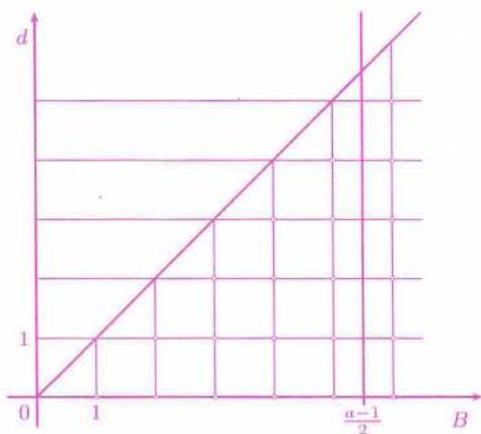
$$2 \leq A + C = 2B = D \leq a - 1. \quad (1)$$

$B = \frac{A+C}{2}$ pomeni, da je številka B aritmetična sredina števk A in C , torej je $A = B - d$ in $C = B + d$ za neko celo število d . Ker po pogojih naloge pri

štetju ne ločimo med rešitvama, v katerih sta trimestna seštevanca ABC in CBA med seboj zamenjana, lahko privzamemo, da je $d \geq 0$. Zaradi (1) in ker je $A \geq 1$, mora par celih števil (B, d) , s katerima je posamezna rešitev določena, izpolnjevati pogoja

$$1 \leq B \leq \frac{a-1}{2} \quad \text{in} \quad 0 \leq d < B.$$

Možne pare (B, d) prikazujejo poudarjene točke na sliki, ki leže pod grafom premice $d = B$ in levo od grafa premice $B = \frac{a-1}{2}$. Takih točk je natanko šest, če je $3 \leq \frac{a-1}{2} < 4$. Od tod sledi $6 \leq a-1 < 8$, kar da dve možni osnovni številkega sestava, $a = 7$ in $a = 8$.



Marija Vencelj

Z OGNJEM IN SMODNIKOM –

Rešitev nagradne naloge iz 5. številke Preseka

Wołodyjowski se je najprej vprašal, kako bi z vžigalnima vrvicama odmeril pol ure. Pravzaprav lahko to stori z eno samo vrvico – prižge jo na obeh koncih hkrati, in čeprav gori vrvica neenakomerno, bo minilo natanko pol ure, ko se bosta plamena z obeh strani srečala in bo vrvica dogorela. Če hkrati s prvo prižge še drugo vrvico, a le na enem koncu, bo ta gorela že pol ure, ko bo prva dogorela. Drugo vrvico lahko tedaj prižge še na drugem koncu in v naslednje četrte ure bo druga vrvica dogorela. Skupaj s pol ure, ki jo je odmeril s prvo vrvico, dobi tako zelene tričetrt ure.

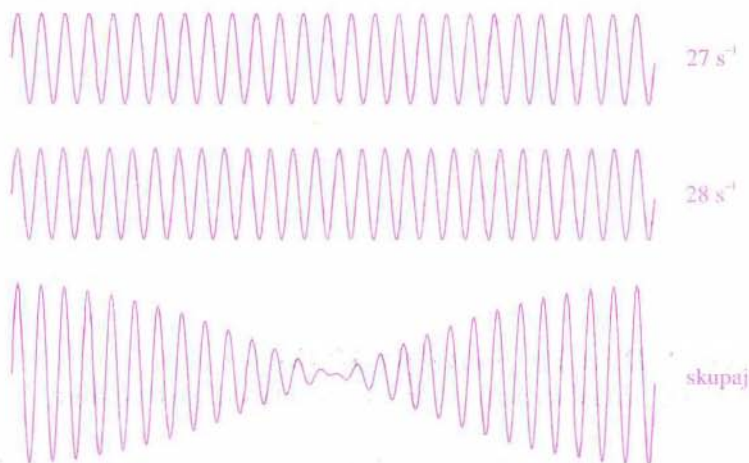
Tim Vidmar

GLASBA IN MATEMATIKA – 2. del

Temperirana uglasitev in prijemi pri kitari

Temperirana uglasitev

V prvem delu prispevka Glasba in matematika, ki je izšel v prejšnji številki Preseka, smo se ustavili ob pojavu pitagorejske ali ditonične kome. To je nekaj manj kot 1,4 % velika napaka, ki nastane pri oktavnem intervalu, če gradimo kromatično lestvico tako, da napredujemo navzgor po kvintah in se nato po oktavah spustimo v območje začetne oktave. Podobne napake nastanejo tudi pri drugih intervalih z izjemo velike sekunde in čiste kvinte. Napaka je videti majhna, a je v glasbi lahko hudo moteča. Če namreč kombiniramo dva tona z rahlo različnima frekvencama, nastopajo trenutki, ko se tona medsebojno ojačita, kar zveni našemu ušesu precej neprijetno (slika 1). Podobno velja za sestavljanje pripadajočih alikvotnih tonov. Problem se najbolj odraža pri instrumentih s fiksnimi toni, kot sta npr. klavir in kitara.



Slika 1.

Matematično lahko pojav pitagorejske kome preprosto razložimo. Od tonike, to je osnovnega tona s frekvenco f , smo se dvignili za 12 kvint, kar pomeni spremembo frekvence od f na

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot f = \frac{531441}{4096} \cdot f \approx 129,7463 \cdot f.$$

To naj bi dalo novo kopijo tonike, toda sedem oktav više, torej ton s frekvenco $2^7 \cdot f = 128 \cdot f$. Ali bi lahko z dvigom za večje število kvint toniko natančno ponovili, torej oktavo natančno zadeli? To bi pomenilo, da obstajata taki naravni števili m in n , da velja $(\frac{3}{2})^n = 2^m$ oziroma da je

$$2^{m+n} = 3^n.$$

To pa ni možno, saj imamo za vsak par $m, n \in \mathbb{N}$ na levi sodo in na desni liho število.

Podobno velja tudi za napake pri drugih intervalih. Torej se bo treba zadovoljiti z bolj ali manj dobrimi približnimi vrednostmi. Nastopi vprašanje, kje skoncentrirati napako. Eden od načinov je uglasiti instrument tako, da imajo nekatere tonalitete le majhne težave, pri drugih pa se zato pojavijo precejšnja odstopanja, kar med drugim onemogoča prenos melodij med tonalitetami.

Sodobna zahodna glasba je posvojila **enakorazmerni tonski sistem**, znan pod imenom **temperirana uglasitev**. Pri njem je razmerje med frekvencama poljubnih dveh zaporednih tonov v kromatični lestvici konstantno, pri čemer je oktava edini interval, ki je akustično natančen (glej članka Glasbena lestvica I in II, Presek 16, str. 12 in str. 66). V splošnem ni jasno, kje, kdaj in kdo je prvi začel uporabljati temperirano uglasitev. Zagotovo pa je Johann Sebastian Bach ogromno prispeval k njeni popularizaciji s tem, da je napisal 36 preludijev in fug, za vsako od dvanajstih durovih in dvanajstih molovih tonalitet vsaj po eno. Znane so pod imenom *Das Wohltemperierte Klavier* (prav ubrani klavir). Če pianino, klavir ali čembalo niso temperirano uglašeni, nekatera teh del na njih zelo grdo zvenijo. Zato nekateri glasbeni zgodovinarji štejejo, da je Bach dejansko uvedel temperirano uglasitev. Kakorkoli že, res pa je tudi, da so kitare enakorazmerno uglaševali že konec 16. stoletja, davno pred Bachovim rojstvom.

Enakorazmerna uglasitev razprši napako v dveh smereh:

1. V posamezni tonaliteti (durovi ali molovi lestvici) so napake v velikosti posameznih intervalov bolj ali manj enakomerno porazdeljene.
2. Nobena tonaliteta ni na boljšem kot ostale.

Zahodna glasba temelji na kromatični lestvici, sestavljeni iz dvanajstih poltonov v eni oktavi. Razmerja frekvenc njenih tonov napram toniki tvorijo geometrijsko zaporedje

$$1, r, r^2, r^3, r^4, \dots, r^{12} = 2.$$

Za konstantno razmerje med frekvencama poljubnih dveh zaporednih tonov torej velja

$$r = \sqrt[12]{2} \approx 1,059463. \quad (1)$$

Ker je r iracionalno število in ker se harmonični intervali izražajo z racionalnimi števili, ne more biti v temperirani uglasitvi natančen noben harmonični interval. Izjema je seveda oktava, iz natančnosti katere smo v enačbi $r^{12} = 2$ izhajali.

Zakaj torej prav dvanajst tonov v eni oktavi? Ali bi bilo kaj drugače, če bi imela glasbena lestvica drugačno število tonov?

Odgovor je večplasten.

Po eni strani je zahodna glasba kot osnovne privzela določene (harmonične) intervale, ki smo jih zasledili že pri Pitagorejcih in ki se izražajo z racionalnimi razmerji. Kaže, da je taka izbira v evropski kulturi naravnejša kot druge. Dejstvo, da npr. človeškemu ušesu čista kvinta lepo zveni, potrjujejo tudi analize narodne glasbe. To je eden od intervalov, ki najpogosteje nastopajo v narodni glasbi večine evropskih narodov.

Po drugi strani nobena skala končne dolžine in s konstantnim racionalnim razmerjem med toni ne more doseči natančne oktave. Enačba $r^n = 2$ namreč nima racionalne rešitve za noben od 1 različen naraven n .¹ Pri $n = 1$ pa bi lestvico sestavljal samo oktavni interval, kar bi dalo hudo revno glasbo.

Izkaže pa se, da so prav v dvanajsttonski temperirani uglasitvi harmonični intervali dokaj dobro aproksimirani. Presenetljivo je, da to ne velja le za čisto kvinto, na katero je bila pozornost posebej osredotočena, ampak tudi za druge intervale. Še najslabša je velika terca, sicer pomemben interval, ki je v prvi oktavi aproksimiran z natančnostjo 2,5 Hz. Ta enakomerna porazdelitev napake po vseh intervalih krepko odtehta samo nečistost posameznih intervalov.

Z matematičnega vidika je presenetljivo še nekaj. Denimo, da želimo poiskati tako število n , da bi bila v enakorazmerni skali z n toni v eni oktavi čista kvinta čimbolje aproksimirana. Ker ustreza čisti kvinti razmerje $\frac{3}{2}$, moramo najti tak n , da bo v zaporedju

$$1, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2^2}, \sqrt[n]{2^3}, \dots, \sqrt[n]{2^{n-1}}, \sqrt[n]{2^n} = 2$$

¹ Iz $r = \frac{p}{q}$, kjer je $\frac{p}{q}$ okrajšan ulomek, sledi $p^n = 2q^n$. Zaradi enoličnega razcepa naravnih števil na praštevila je edina možna rešitev $n = q = 1$ in $p = 2$.

tudi člen, ki bo dober približek za $\frac{3}{2}$. Če pogoj $\sqrt[n]{2^m} \approx \frac{3}{2}$ malo preuredimo in logaritmujemo z osnovo 2, preide v

$$\frac{m+n}{n} \approx \log_2 3.$$

Iščemo torej dober racionalni približek iracionalnega števila $\log_2 3$. V principu lahko nalogo rešimo s poljubno natančnostjo. Vendar se moramo zavedati, da imenoalec n okrajšanega ulomka racionalnega približka ne sme biti velik, saj bi to vodilo k lestvici z veliko toni. To bi bilo brez smisla, saj naše uho ni sposobno razlikovati med toni, ki so si zelo blizu, pa tudi ustrezni glasbeni instrumenti bi bili zaradi fizikalnih omejitev nepraktični (predstavljajte si klavir, ki ima 100 tipk v eni oktavi).

Dobro sredstvo za aproksimacijo iracionalnih števil z racionalnimi števili so verižni ulomki. O njih je Presek že večkrat pisal. Za naš primer lahko najdete ustrezno izpeljavo verižnega ulomka v Preseku **16**, str. 69. Številu $\log_2 3$ pripadajoči verižni ulomek je

$$[1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, \dots]$$

z nekaj prvimi konvergenti (to je delnimi ulomki)

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{65}{41}, \frac{84}{53}, \frac{485}{306}.$$

Peti približek je $\frac{19}{12}$, čemur ustreza $n = 12$ in $m = 7$. Torej je oktava enakorazmerno razdeljena na dvanajst osnovnih intervalov, kvinto pa sestavlja sedem takih intervalov. Znano je, da daje posamezni konvergent verižnega ulomka realnega števila najboljšo racionalno aproksimacijo tega števila med vsemi okrajšanimi ulomki, ki imajo enak ali manjši imenoalec kot konvergent. To pomeni, da z nobeno enakorazmerno lestvico, ki bi imela manj kot dvanajst tonov v oktavi, ne bi mogli kvinte bolje aproksimirati. Torej je zahodna glasba, kar je presenetljivo in verjetno povsem slučajno, s temperirano uglasitvijo privzela najboljši približek k pitagorejski skali, zgrajeni s kvintami in oktavami.

Tipična kitajska lestvica ima pet tonov v oktavi. To ustreza četrtemu konvergentu razvoja števila $\log_2 3$ v verižni ulomek. Zanimivo je, da sta v njej čista kvinta in čista kvarta še kar dobro aproksimirani (napake je za dobri dve pitagorejski komi), velike in male terce pa praktično ni.

Šesti konvergent $\frac{65}{41}$ daje pričakovano zelo dobre približke za vse harmonične intervale. Vendar zahteva že 41 intervalov v eni oktavi, pri čemer je posamezni osnovni interval vreden le malo več kot pitagorejska koma. Le redki bi lahko ločili med zaporednimi toni take lestvice.

Kot zanimivost povejmo še, da je okoli leta 40 pred našim štetjem kitajski kralj Fang odkril sedmi zgornji približek. Seveda tega ni naredil z verižnimi ulomki, zato je njegov dosežek toliko bolj presenetljiv. V posebnem je odkril, da je 53 čistih kvint zelo blizu vrednosti 31 oktav.

Kje so prijemi pri kitari?

Kitaro, brenkalo s ploskim trupom v obliki osmice, z okroglo zvočnico in dolgim vratom s številnimi prečkami (prijemi), ki se proti zvočnici čedalje bolj gostijo, gotovo poznate. Sprva so imele kitare po štiri, nato pet dvojnih strun, od 18. stoletja dalje pa imajo večinoma po šest enojnih strun z uglasitvami E, A, d, g, h in e₁. Na posamezni struni lahko poleg osnovnega tona zaigramo tudi višje tone, kar dosežemo tako, da s prstom med dvema prečkama pritismo na struno. Če sledimo prijemom od vrha vratu proti zvočnici, naraščajo toni enakorazmerno po poltonih navzgor. Pri izdelavi kitare je torej očitno posebnega pomena natančna postavitev prečk. Kje naj leže?

Oglejmo si zvezo med prijemom in višino tona nekoliko podrobneje. Višino tona oziroma osnovno frekvenco f , s katero struna niha, podaja formula $f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{S\rho}}$. Pri tem je l dolžina strune, $S\rho$ masa strune na dolžinsko enoto in F velikost sile, s katero je struna napeta. Ko je dana struna uglasena (napeta), odloča o višini tona le še dolžina strune; natančneje velja $f = k \cdot \frac{1}{l}$, kjer je k konstanta. Ko s prstom pritismo na struno, le-ta sede na prečko, prvo ob prstu v smeri proti zvočnici, zato niha le del strune med to prečko in mestom pritrditve na trupu. Blíže zvočnici je prečka, krajši del strune niha, višji je ton. Ker toni, zaigrani na isti struni, naraščajo po poltonih navzgor, so razmerja njihovih frekvenc glede na osnovno frekvenco strune enaka

$$1, r, r^2, r^3, r^4, \dots,$$

kjer je $r = \sqrt[12]{2}$. Prvi prijem od vrha vratu leži torej na mestu, ki dopušča nihanje $\frac{1}{r}$ -tine strune. Razdalja od začetka strune do prvega prijema je torej enaka $d = (1 - \frac{1}{r})l$, kjer je l celotna dolžina strune. Do bi dobili lego naslednjega prijema, moramo vse iz premisleka za prvi prijem pomnožiti z $\frac{1}{r}$, od koder sledi, da so razdalje med zaporednimi prijemi (slika 2)

$$d, \frac{d}{r}, \frac{d}{r^2}, \frac{d}{r^3}, \frac{d}{r^4}, \dots$$

Ker je $r > 1$, se prijemi v smeri proti zvočnici čedalje bolj gostijo. To lahko igralce z debelejšimi prsti ovira pri igranju visokih tonov.

Števila $r = \sqrt[12]{2}$ iz enote, ki je v našem primeru dolžina strune, ne moremo konstruirati le z uporabo neoznačenega ravnila in šestila. Problem je tako rekoč kopija nerešljivega problema o podvojitvi kocke, to je risanja števila $\sqrt[3]{2}$, saj je $\sqrt[12]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$, kvadratne korene pa s šestilom in ravnilom lahko narišemo.

Zgodovina iskanja geometrijskih metod za umestitev prečk pri kitari je izredno zanimiva. Poiskati je bilo treba čimboljšo, pa dovolj preprosto približno konstrukcijo.

Leta 1581 je Vincenzo Galilei, oče velikega Galilea Galilea, našel za $\sqrt[12]{2}$ približek (primerjajte z (1))

$$\frac{18}{17} = 1,05882 \dots,$$

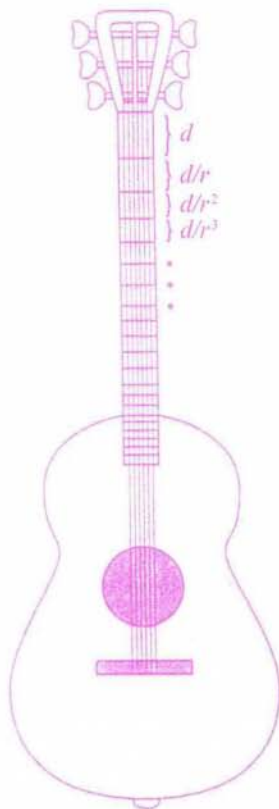
ki sicer ni bil najboljši, a je bil preprosto uporabljen in zato v rabi več stoletij.

Leta 1636 je pater Marin Mersenne aproksimiral interval iz štirih poltonov s kvocientom $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$, kar da za polton odličen približek

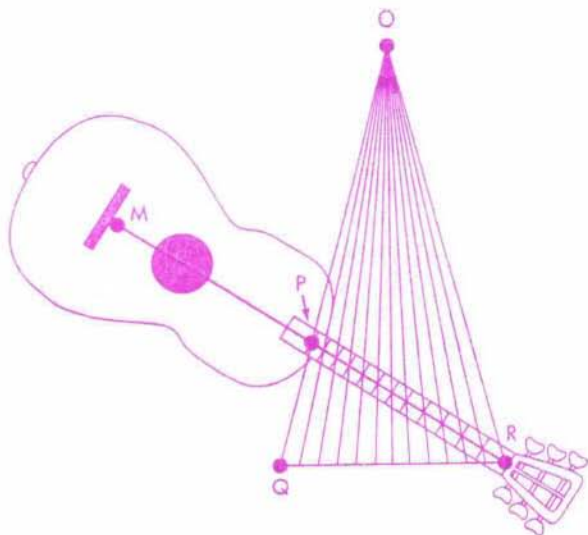
$$\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}} = 1,05973 \dots$$

Ker vsebuje izraz le kvadratne korene, ga lahko geometrijsko konstruiramo. V praksi pa približek ni najbolj uporaben, ker moramo konstruirati kar tri kvadratne korene, kar pomeni kopičenje risarskih napak.

Potrebna je bila torej metoda, natančnejša od Galilejeve in uporabnejša od Mersennove. Leta 1743 je praktik Daniel Strähle, mož brez matematične izobrazbe, v članku, ki ga je objavila švedska akademija, predložil preprosto in praktično konstrukcijo prijemov pri kitari, ki jo prikazuje slika 3.



Slika 2.



Slika 3. Strählejeva konstrukcija. Konstruiramo enakokraki trikotnik QRO , v katerem meri osnovnica QR 12 enot in kraka $OQ = OR$ po 24 enot. Osnovnico razdelimo na dvanajst enakih delov in delilne točke povežemo z O . Na OQ izberemo točko P , ki je sedem enot oddaljena od Q . Kitaro položimo z vratom vzdolž daljice RP kot na sliki. Če pade točka P v razpolovišče strune RM , nam spojnice točke O z delilnimi točkami na osnovnici trikotnika QRO že določajo mesta prvih enajstih prijemov na kitari. Sicer moramo kitaro najprej vzporedno premakniti tako, da pritrdišče strune na vratu kitare drsi po kraku RO , dokler razpolovišče strune ne pristane na kraku QO , in šele nato odčitamo prijeme.

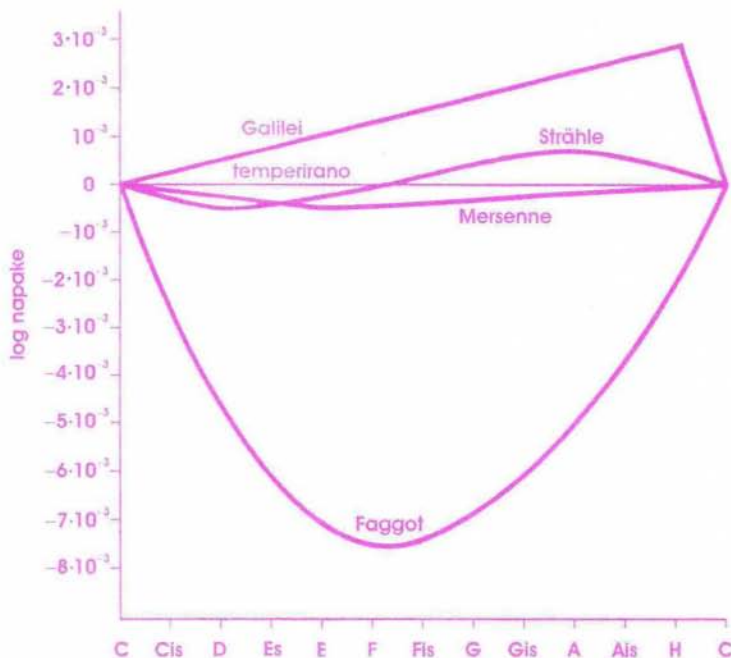
Konstrukcija je doživela prav neverjetno usodo. Da je izjemno uporabna, je bilo sicer očitno na prvi pogled. Kaj pa natančnost? Ekonomist in geometer Jacob Faggot je opravil ustrezne račune z uporabo trigonometrije in ugotovil, da doseže konstrukcija na najslabšem mestu napako 1,7 %, kar je petkrat več, kot bi bili muziki pripravljeni sprejeti. Izračune je priložil k Strählejevemu članku in konstrukciji zapečatil usodo. Faggot je bil namreč eden od ustanovnih članov švedske akademije, tri leta njen tajnik in rangiran na četrto mesto v akademiji, pri kateri je bil njegov slavn sodobnik, botanik Linné, na drugem mestu. Če je torej Faggot izjavil, da je metoda slaba, potem je bila slaba, pa naj je Strähleju njegova kitara še tako lepo zvenela.

Faggotova ocena je obveljala za več kot 200 let, vse do leta 1957, ko je matematik J. M. Barbour z michiganske državne univerze odkril, da se je Faggot v računih zmotil. Usodno napako je zagrešil pri izračunu

kota $\angle PRQ$, ko je namesto pravih $33^\circ 32'$ naračunal $49^\circ 14'$, kar se je odražalo na vseh nadaljnjih rezultatih. Pri popravljenih računih se je največje odstopanje z 1,7 % zmanjšalo na vsega 0,15 %.

Barbour pa se ni zadovoljil le s popravkom Faggotovih računov, zanimalo ga je tudi, ali se za veliko natančnostjo Strählejeve metode ne skriva kakšen matematični razlog. Res ga je našel. Njegova razlaga je nekoliko daljša in delno tudi presega Presekov okvir. Povejmo le, da Strählejeva metoda skriva v sebi dobro aproksimacijo funkcije $y = \sqrt[3]{2}$ s funkcijo oblike $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ na intervalu $[0, 1]$ in da so spet vpleteni verižni ulomki. Ker je Strähleja pri konstrukciji vodila zgolj izjemno dobra intuicija, se lahko samo vprašamo: "Kako mu je to sploh padlo na pamet?"

Za konec pogledjmo na sliki 4 še napake posameznih konstrukcij in Faggotovega napačnega izračuna. Najhuje ga je polomil prav Faggot.



Slika 4. Graf prikazuje desetiški logaritem kvocienta približne vrednosti in prave vrednosti za tone ene oktave. Zaradi boljše preglednosti so točke povezane.

SKOK V DALJAVO

Presek se je dotaknil nekaterih športnih panog, med njimi tudi skoka v višino in skoka ob palici (S. Pahor, *Skok v višino in skok ob palici po fizikalno*, Presek **5** (1977/78) 179). Skoka v daljavo pa še ni obravnaval. Zapolnimo to vrzel.



Pri skoku v daljavo tekmovalec med zaletom doseže veliko hitrost, se odrine in doskoči v jamo s peskom. Med skokom spreminja lego delov telesa glede na druge dele. Gibanje težišča skakalca lahko preprosto opišemo. Pri tem si moramo pomagati z enačbami. Čeprav je precej računanja, na srečo ni zahtevno; rešiti moramo le nekaj kvadratnih enačb. Med zaletom se težišče skakalca giblje pospešeno v vodoravni smeri, dokler ne doseže končne hitrosti v_0 . V preprostem modelu vzemimo, da se po odskoku ne spremeni velikost te hitrosti, ampak samo njena smer. Pred odskokom se težišče giblje s hitrostjo v_0 v vodoravni smeri, ob njem pa poševno navzgor pod kotom β proti vodoravnici. Ob odskoku je vodoravna komponenta hitrosti $v_0 \cos \beta$ in navpična komponenta $v_0 \sin \beta$. Dalje opišemo gibanje težišča kot *poševni met*. To je pomembna sestavina različnih športnih panog, ki smo jo srečali pri metih v lahki atletiki in pri metu na koš (*Meti*, Presek **13** (1985/86) 86; *Koš! Koš!*, Presek **18** (1990/91) 268).

Poševni met opišemo v navpični ravnini. Os x postavimo na začetno pot težišča v višini $y^* = 1$ m nad tlemi v smer zaleta, os y pa nad odskočiščem navpično navzgor. Gibanje težišča lahko potem razstavimo na enakomerno premo gibanje s hitrostjo $v_0 \cos \beta$ v vodoravni smeri in navpični met navzgor z začetno hitrostjo $v_0 \sin \beta$:

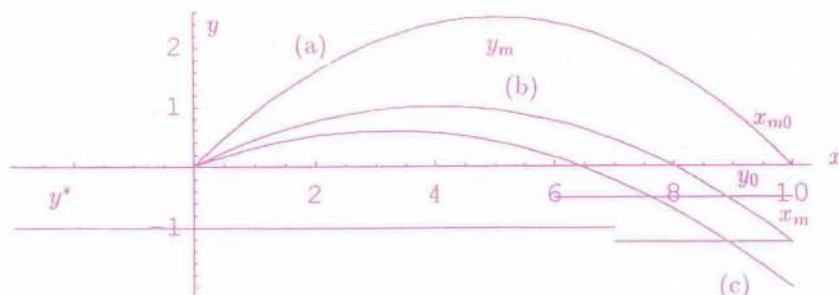
$$x = v_0 t \cos \beta, \quad y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

Zadnji člen ustreza globini pri prostem padanju z velikostjo pospeška prostega padanja g , približno 10 m/s^2 . Iz prve enačbe izračunamo čas $t = x / (v_0 \cos \beta)$ in ga vstavimo v drugo. Dobimo enačbo parabole:

$$y = x \tan \beta - \frac{1}{2} g x^2 / (v_0^2 \cos^2 \beta). \quad (2)$$

V zadnjem delu skoka skakalec skrči kolena, da podaljša skok. Zato težišče zadene vodoravna tla pod črto $y = 0$ pri $y = -y_0$ (slika 1). Navadno vzamejo $y_0 = -0.5$ m. To vstavimo v enačbo (2) in dobimo kvadratno enačbo za dolžino skoka x_m , ki ga določa koren s pozitivnim znakom:

$$x_m = v_0^2 \sin \beta \cos \beta / g + (v_0 \cos \beta / g) \sqrt{v_0^2 \sin^2 \beta + 2gy_0}. \quad (3)$$



Slika 1. Tri parabole, po katerih bi se gibalo težišče skakalca pri skoku v daljavo s hitrostjo 10 m/s: nedosegljiva parabola pri kotu 45° (a), parabola pri kotu $26,6^\circ$ (b) in parabola pri kotu 20° (c). V drugem primeru doseže težišče največjo višino $y_m = 1$ m, vodoravna komponenta hitrosti meri 8,9 m/s in skok traja 1 s. V tretjem primeru doseže težišče največjo višino $y_m = 0,56$ m, vodoravna komponenta hitrosti meri 9,35 m/s in skok traja 0,8 s pri globini $y_0 = 0,5$ m, a 0,95 s pri globini $y_0 = 1,3$ m.

Vzemimo, da bi skakalec ne skrčil kolen. Potem bi veljalo $y_0 = 0$ in bi po enačbi (3) bila dolžina skoka

$$x_{m0} = 2v_0^2 \sin \beta \cos \beta / g = v_0^2 \sin 2\beta / g. \quad (4)$$

V tem primeru bi bila višina skoka po drugi enačbi (1)

$$y_m = y(x = \frac{1}{2}x_{m0}) = \frac{1}{2}v_0^2 \sin^2 \beta / g. \quad (5)$$

Skakalci v daljavo so dobri tekači na kratke proge. Na velikih tekmovaljih ni redko v skoku v daljavo zmagal isti tekmovalec kot v teku na 100 m. Za hitrost ob odzivu je smiselno vzeti 10 m/s. Skakalec, ki bi mu pri odzivu to hitrost uspelo preusmeriti pod najugodnejšim kotom proti vodoravnici $\beta_0 = 45^\circ$, bi pri skoku dosegel višino težišča $y_m = v_0^2 / (4g) = 2,5$ m in daljavo $x_{m0} = v_0^2 / g = 10$ m. Pri tem niti ne bi skrčil kolen.

Po izračunani daljavi in še bolj po izračunani višini sklepamo, da uporabljenemu modelu ne gre zaupati. Pri skoku bi se namreč težišče dvignilo od $y^* = 1$ m za 2,5 m na 3,5 m nad tla. Skakalec ne bi dosegel samo svetovnega rekorda pri skoku v daljavo, ampak tudi pri skoku v višino. V resnici skakalec ne more tako uspešno spremeniti kinetične energije v potencialno. Po izreku o kinetični in potencialni energiji $\frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \beta_0 = mgy_m$, iz katerega sledi zveza (5), kot β ne more doseči 45° . Spoznanje, da je človek zmožen samo manjši del kinetične energije pri teku spremeniti v potencialno, ne omejuje samo dosežkov pri skoku v višino, ampak tudi pri skoku v daljavo. Skakalci v višino se razlikujejo od skakalcev v daljavo in tekačev na kratke proge. Navadno so višji in bolj košćeni. Pritečejo razmeroma počasi s strani in se na vso moč odrinejo po kotom $\beta = 60^\circ$. Potem pa se previjejo čez letev tako, da ostane težišče čim nižje.

Enačbo za dolžino skoka (3) predelamo in najprej vstavimo vanjo $v_0^2 = 2gy_m / \sin^2 \beta$ iz (5), da se znebimo začetne hitrosti. Nato uporabimo izraza $\sin \beta = \sqrt{2gy_m / v_0^2}$ in $\cos \beta = \sqrt{1 - 2gy_m / v_0^2}$ in se znebimo kota β :

$$x_m = \sqrt{v_0^2 - 2gy_m} \cdot \left[\sqrt{2y_m/g} + \sqrt{2(y_m + y_0)/g} \right]. \quad (6)$$

Prvi faktor v (6) je enak vodoravni komponenti hitrosti

$$\sqrt{v_0^2 - 2gy_m} = \sqrt{v_0^2 - v_0^2 \sin^2 \beta} = v_0 \cos \beta,$$

zaradi druge enačbe (1), ki da $v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2 = -y_0$, pa je oglati oklepaj v (6) enak trajanju skoka

$$t_0 = v_0 \sin \beta / g + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \beta / g^2 + 2y_0/g} = \sqrt{2y_m/g} + \sqrt{2(y_m + y_0)/g}.$$

Za višino, ki jo doseže težišče, vzemimo $y_m = 1$ m. To ustreza višini skoka okoli 2 m, kar je precej manj od svetovnega rekorda pri skoku v višino. Skok v daljavo traja potem približno 1 s in vodoravna komponenta hitrosti doseže nekaj več kot 8,9 m/s. Enačba $\sin \beta = \sqrt{2gy_m}/v_0$ da kot $\beta = 26,6^\circ$, ki je precej manjši od 45° . Navpična komponenta hitrosti meri 4,5 m/s. V tem primeru je po enačbi (6) daljava 8,9 m, kar je zelo blizu priznanega svetovnega rekorda 8,95 m za moške. Po posnetkih 8,06 m dolgega skoka, s katerim je Jesse Owens leta 1936 dosegel olimpijski rekord, so ugotovili, da je kot β meril 25 do 26° .

Vendar so novejša merjenja pri skoku v daljavo dala vodoravno komponento hitrosti 9,35 m/s in navpično komponento 3,35 m/s. Tema ustrežata velikost hitrosti $v_0 = 9,93$ m/s in še manjši kot $\beta = 20^\circ$. Žal ob tem

ni podatkov za dolžino skoka. Enačba (3) da za dolžino pri $y_0 = 0,5$ samo 7,6 m. Kako bi mogli skakalci skočiti več? Gibanje težišča smo dobro zajeli z našim opisom, zato je treba vzrok iskati v gibanju delov telesa glede na druge dele. To lahko poveča v računu globino y_0 . Vendar bi bil pri kotu 20° skok dolg 8,9 m pri globini skoraj $y_0 = 1,3$ m, kar bi presegalo začetno višino težišča nad tlemi. Tu je še nekaj dela za strokovnjake za mehaniko človeškega telesa. Ali je kot pri rekordnih skokih večji? Ali pri njih dosežejo skakalci večjo hitrost? Morda pa zrak na skakalca ne deluje samo z zračnim uporom?

Najprej recimo kakšno o upor. Po kvadratnem zakonu deluje zrak na skakalca z uporom v nasprotni smeri gibanja:

$$F_u = \frac{1}{2} \rho v_0^2 c_u S. \quad (7)$$

Pri tem je $\rho = 1,23 \text{ kg/m}^3$ gostota zraka v navadnih okoliščinah, $c_u = 0,9$ izmerjeni koeficient upora in $S = 0,5 \text{ m}^2$ povprečni presek skakalčevega telesa pravokotno na smer hitrosti. Hitrost v_0 je odvisna tudi od upora. Menda lahko dobro treniran skakalec za kratek čas razvije največjo moč $P = 3 \text{ kW}$, kar je vsekakor zelo velik podatek. To moč tik pred skokom potrebuje za vzdrževanje teka s končno hitrostjo in premagovanje upora:

$$P = Kmv_0 + F_u v_0 = Kmv_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^3 c_u S. \quad (8)$$

Prvi člen na desni strani podaja moč sile Km , ki vzdržuje tek s končno hitrostjo skakalca z maso $m = 75 \text{ kg}$. Sorazmernostni koeficient $K = 3,63 \text{ W/(kg} \cdot \text{m/s)}$ so ugotovili z merjenji. Drugi člen je moč upora. Ni se težko prepričati, da enačbo reši hitrost $v_0 = 10 \text{ m/s}$, ki smo jo navedli. Zračni upor (7) meri v tem primeru $F_u = 28 \text{ N}$. Zaradi njega se zmanjša končna hitrost od 11 m/s na 10 m/s . Če se hitrost relativno spremeni za $\Delta v_0/v_0$, se daljšava spremeni za

$$\Delta x_m = x_m \frac{v_0^2}{v_0^2 - 2gy_m} \frac{\Delta v_0}{v_0}.$$

Zmanjšanje hitrosti za 2 % skrajša skok za 25 cm in zvečanje hitrosti za 2 % ga za toliko podaljša.

Poleg tega se zaradi zračnega upora skakalec med skokom v vodoravni smeri giblje enakomerno pojemajoče. Velikost pojemka je $a = F_u/m = 28 \text{ N/(75 kg)} = 0,37 \text{ m/s}^2$. V eni sekundi se pot, to je dolžina skoka, zaradi pojemka skrajša za $\Delta x_m = \frac{1}{2} at^2 = 0,18 \text{ m}$.

Na upor in na dolžino skoka vpliva tudi gostota zraka. Pri manjši gostoti je upor manjši in končna hitrost večja, če se druge okoliščine ne spremenijo. Poleg tega se zaradi zmanjšanega upora skok manj skrajša. V glavnem mestu Mehike na višini 2265 m je tlak za $\frac{1}{4}$ nižji kot ob morju. Za toliko so manjši tudi gostota, upor in pojemek. Po enačbi (8) se zaradi tega hitrost poveča za 2 % in skok podaljša za 25 cm. Za 25 % se zmanjša tudi pojemek in zato se skok podaljša še za $\frac{1}{4} \cdot 18 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$. V celoti je skok za 30 cm daljši kot skok ob morski gladini, če se druge okoliščine ne spremenijo. Po tem premisleku 8,90 m dolgemu skoku Boba Beamona na olimpiadi leta 1968 v glavnem mestu Mehike ustreza ob morju približno 8,6 m dolg skok. V tem pogledu je bil boljši od Beamonovega skoka 8,8 m dolgi skok Carla Lewisa leta 1983 ob morski gladini, ki ga seveda niso vodili kot svetovni rekord. Z izpopolnjeno enačbo (7) bi lahko zajeli še vpliv vetra na dolžino skoka. Zrak bi utegnil delovati na skakalca, ko po odzivu z zgornjim delom telesa zaniha, še s prečno silo ali dinamičnim vzgonom v smeri navzgor. To bi podaljšalo čas skoka in povečalo dolžino. To možnost bi morali upoštevati, če pri rekordnih skokih kot ni večji kot 20° in hitrost ne večja kot 10 m/s. S preprostim modelom ni mogoče zajeti podrobnosti pri skoku v daljavo. Jasno pa postane, da se rekordni skoki posrečijo le v ugodnih okoliščinah skakalcem, ki so najboljše pripravljeni in ki imajo tudi nekaj sreče.

Tudi pred skoraj tri tisoč leti so tekmovali v skoku v daljavo, vendar drugače kot danes. Na antičnih olimpiadah so v peteroboju skakali v daljavo z mesta. Pri tem so vsaj od olimpiade leta 708 pr. n. št. dalje uporabljali ročaje, (*h*)*alteres*. Nekaj ročajev se je ohranilo do današnjih dni (slika 2 na III. strani ovitka). Vsak od dveh ročajev iz kamna ali svinca je tehtal od dva do devet kilogramov. Pred skokom so tekmovalci zibali roke z ročaji sem in tja. Tik pred odskokom so stegnili roke nazaj in jih ob odskoku prenesli naprej in navzgor. S tem so dosegli, da je bilo težišče više in bolj spredaj, kot bi bilo brez ročajev. Ob doskoku so potisnili roke z ročaji nazaj in navzdol, da so bile noge čim dlje pred težiščem. S tem so povečali dolžino skoka. Morda so ročaje uvedli tudi zato, da so skakalci lažje lovili ravnotežje ob doskoku. Pravila so namreč zahtevala, da se noge na določen način dotaknejo tal, čeprav ne vemo, na kakšen.

Alberto Minetti in Luca Ardigó z univerze v Manchesteru sta s poskusi in z računalniško simulacijo raziskala vpliv ročajev in o tem poročala v reviji *Nature* lanskega novembra. Ugotovila sta, da se je zaradi ročajev z maso dvakrat po tri kilograme podaljšal trimetrski skok vsaj za 17 cm.

Pri tem se hitrost ob odskoku zaradi ročajev ni zmanjšala, kakor bi pričakovali, ampak zvečala. Pokazalo se je, da zmorejo nekoliko napete mišice večjo moč kot nenapete. Zaradi tega je bila hitrost ob odskoku z ročaji večja kot brez njih. Poskusi z ročaji z različno maso so pokazali, da je hitrost pri skoku v višino z mesta največja pri masi ročajev dvakrat po tri kilograme.

Kot zanimivost omenimo, da je Anglež J. Howard že leta 1854 "skočil" 9,02 m daleč. Pri tem si je na grški način pomagal z ročajema z maso po 1,7 kg, ki ju je med skokom odvrigel v smeri nazaj.

Svetovni rekordi v skoku v daljavo in skoku v višino

daljava	moški	8,95 m	Mike Powell, ZDA	1991
	ženske	7,52 m	Galina Čistjakova, Rusija	1988
višina	moški	2,45 m	Javier Sotomayor, Kuba	1993
	ženske	2,09 m	Štefka Kostadinova, Bolgarija	1987

Janez Strnad

ODKRIVANJE NAPAK NA PAMET

Številska vsota $D(n)$ števila n je enomestno število, ki ga dobimo tako, da najprej seštejemo številke števila. Če rezultat ni enomestno število, seštejemo njegove številke in tako nadaljujemo, dokler ne dobimo enomestnega števila. Z njo lahko preprosto ugotovimo, če je rezultat seštevanja oziroma množenja ali **zanestljivo napačen** ali **verjetno pravilen**. Ilustrirajmo uporabo kar na primerih:

Ker je $D(355) = D(13) = 4$, $D(104) = 5$, $D(459) = 9$, $D(469) = 1$, $D(36\,820) = 1$, $D(36\,920) = 2$ in velja:

$$D(355) + D(104) = 4 + 5 = 9 = D(459),$$

$$D(355) + D(104) = 4 + 5 \neq 1 = D(469),$$

$$D(355) \cdot D(104) = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$D(20) = 2 = D(36\,920) \neq 1 = D(36\,820),$$

sta računa $355 + 104 = 459$ in $355 \cdot 104 = 36\,920$ verjetno pravilna, računa $355 + 104 = 469$ in $355 \cdot 104 = 36\,820$ pa zanesljivo napačna.

Marija Vencelj

TI PRESNETA SEDMICA!

Gospoda Tine Sedmak in Tone Devetak sta, kljub letom, še vedno izkušena morjeplovca. Leta 1977 sta se z majhno jadrnico podala na tvegano pot, da bi objadrala svet. Pred tem sta vsako poletje križarila po sinjem Jadranu, kjer sta dobro poznala vsak otoček in zalivček ter muhavost vetrov. Toda na poti okrog sveta ju je nekje na Tihem oceanu doletela nesreča. V razburkanem morju sta doživela brodolom. Samo naključju se lahko zahvalita, da sta na razbitinah pristala na neobljudenem otočku. Kot po čudežu sta rešila tudi nekaj hrane, ladijski dnevnik, nekaj pisemskega papirja in svinčnikov ter še precej druge krame. Ko sta spoznala, kako nezavidljiva je njuna situacija, sta si na otočku takoj uredila zasilno bivališče, si posušila rešene stvari in ugotovila, da bo mogoče preživeti nekaj tednov, dokler ju kdo ne opazi in reši. V okolici novega domovanja se je dobilo tudi kaj za pod zob, pa tudi kako ribo sta sem ter tja potegnili iz morja.

Toda najhuje je bilo nepredvidljivo dolgo čakanje. Začela sta brskati po dnevniku in ugotovila, da se je brodolom zgodil 7. 7. 1977 po lokalnem času. Datum s štirimi sedmicami in s samimi lihiimi števki. Ti presneta sedmica! Kdaj smo že nazadnje pisali datum s samimi lihiimi števki? Kaj pa s sodimi? Tone Devetak je njega dni študiral matematiko in se je takrat v šali podpisoval nekoliko krajše, namreč kot *Tone 9ak*. V zrelejših letih je še vedno rad reševal matematične probleme. Kot zanalašč je sedaj našel v dnevniku listek, na katerem se je še dalo razbrati naslednje besedilo:

Brez uporabe tablic, žepnega računalja ali računalnika ugotovi, kaj je prav:

$$\sqrt{8}^{\sqrt{7}} < \sqrt{7}^{\sqrt{8}} \quad \text{ali} \quad \sqrt{7}^{\sqrt{8}} < \sqrt{8}^{\sqrt{7}}.$$

Nalogo je vzel s sabo kar tako, za vsak primer, da bi z njo zapravljaj čas, ko ne bi bilo drugega dela. Zdaj pa je kazalo, da bo časa za matematiko na pretek. Tine Sedmak pa je bil strojni inženir in je imel na Fakulteti za strojništvo tudi kar precej višje matematike. Tone si je nalogo ogledoval in kmalu prišel na misel, da bi jo posplošil:

Za katera naravna števila n velja neenakost

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} \quad (1)$$

in za katera neenakost

$$\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} < \sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}? \quad (1')$$

Ker imamo v zgornjih relacijah opravka s pozitivnimi števili na obeh straneh, sta se naša junaka s kvadriranjem hitro znebila dveh korenov in reševala enakovreden problem:

Za katera naravna števila n velja neenakost

$$n \sqrt{n+1} < (n+1) \sqrt{n} \quad (2)$$

in za katera neenakost

$$(n+1) \sqrt{n} < n \sqrt{n+1} ? \quad (2')$$

Tone se je spomnil, da je funkcija $x \mapsto x^\alpha$ za vsak eksponent $\alpha > 0$ na poltraku $x > 0$ naraščajoča, tako da sta s potenciranjem z eksponentom $\sqrt{n}$ iz relacije (2) dobila

$$n \sqrt{n(n+1)} < (n+1)^n, \quad (3)$$

s potenciranjem z eksponentom $\sqrt{n+1}$ pa sta iz relacije (2') prišla do

$$(n+1) \sqrt{n(n+1)} < n^{n+1}. \quad (3')$$

Tone je pomislil tudi na to, ali bi nemara lahko za kako naravno število n v zgornjih relacijah veljal enačaj namesto neenačajeve, torej, ali je za kakšno naravno število n izpolnjena enakost

$$(n+1)^n = n \sqrt{n(n+1)}.$$

Ker bi bilo potem na levi strani očitno naravno število, bi moral biti eksponent $\sqrt{n(n+1)}$ na desni strani te enačbe tudi naravno število. To se pravi, obstajal bi tak naraven k , da bi veljala enačba $n(n+1) = k^2$, iz katere takoj sledi enakovredna enačba $(2n+1)^2 = 4k^2 + 1$ oziroma $(2n+1-2k)(2n+1+2k) = 1$. Toda to velja le v primeru, ko je hkrati $2n+1-2k = 1$ in $2n+1+2k = 1$, ali pa je hkrati $2n+1-2k = -1$ in $2n+1+2k = -1$. Hitro vidimo, da je potem bodisi $n = 0$ ali pa $n = -1$, kar je nemogoče, saj mora biti n naravno število.

Ko sta Tine in Tone gledala relaciji (3) in (3'), sta hitro odkrila, da bo najbrž za nekaj začetnih naravnih števil n veljala prva, torej

$$(n+1)^n > n \sqrt{n(n+1)}. \quad (4)$$

Za $n = 1$ imamo $(1+1)^1 = 2 > 1 = 1 \sqrt{2}$ in (4) res velja.

Ker jima princip popolne indukcije pri naših neenakostih sploh ni šel od rok, sta poskusila za $n = 2$ in seveda takoj dobila $(2 + 1)^2 = 9$. Toda na desni strani v (4) se pojavi nerodno število, namreč $2\sqrt{6}$, za katero moramo šele ugotoviti, da je manjše kot 9. Kako to dognati brez logaritamskih tablic, brez računalna? Ni težav! Ker je $6 < 9$, je $\sqrt{6} < 3$ in zato $2\sqrt{6} < 2^3 = 8 < 9$. Relacija (4) tudi tokrat velja.

Za $n = 3$ moramo dokazati, da je $(3 + 1)^3 = 64 > 3\sqrt{12}$. Na žalost pa ne gre več tako kot prej. Res je, da velja $\sqrt{12} < 4$, toda $3^4 = 81 > 64$, tako da ocena ne gre v pravo smer. To je zato, ker se 4 preveč razlikuje od $\sqrt{12}$. Toda Tone se nenadoma spomni, da je

$$n(n+1) = n^2 + n < n^2 + n + 1/4 = (n + 1/2)^2$$

in zato $\sqrt{n(n+1)} < n + 1/2$ za vsako naravno število n . V posebnem primeru velja za $n = 3$ relacija $\sqrt{12} < 3 + 1/2$. Ker je

$$3\sqrt{12} < 3^{3+1/2} = 3^3 \cdot \sqrt{3} < 27 \cdot 2 = 54 < 64,$$

res velja relacija $4^3 > 3\sqrt{12}$.

Primer $n = 4$ zahteva primerjavo števil $(4 + 1)^4 = 5^4 = 25^2 = 625$ in $4\sqrt{20}$. Ker je $\sqrt{20} < 4 + 1/2$, velja

$$4\sqrt{20} < 4^{4+1/2} = 4^4 \cdot \sqrt{4} = 16^2 \cdot 2 = 512 < 625.$$

Torej je relacija (4) pravilna za $n = 4$.

Pri $n = 5$ moramo primerjati števili $(5 + 1)^5$ in $5\sqrt{30}$, ki pa nista več tako majhni kot dosedanja. Na srečo se je Tone spomnil binomske formule in zapisal

$$(5 + 1)^5 = 5^5 + \binom{5}{1}5^4 + \binom{5}{2}5^3 + \dots + 1.$$

Nato sta vzela prve tri člene in s skupnimi močmi zapisala:

$$6^5 > 5^5 + 5 \cdot 5^4 + 10 \cdot 5^3 = 5^5(2 + \frac{2}{5}).$$

Radi bi videli, da je slednje število večje kot $5^{5+1/2} = 5^5 \cdot \sqrt{5}$, kar je več kot $5\sqrt{30}$. Torej je dovolj preveriti le še relacijo $2 + 2/5 > \sqrt{5}$ oziroma $(2 + 2/5)^2 = (12/5)^2 > 5$. To velja, ker je $144/25 = (125 + 19)/25 = 5 + 19/25 > 5$. Potemtakem tudi $n = 5$ zadošča neenačbi (4).

Pri $n = 6$ se izkaže, da je premalo vzeti le tri člene, pač pa je dobro upoštevati kar štiri člene v razvoju števila $(6 + 1)^6$ po binomski formuli:

$$\begin{aligned}(6 + 1)^6 &= 6^6 + \binom{6}{1}6^5 + \binom{6}{2}6^4 + \binom{6}{3}6^3 + \dots + 1 > \\ &> 2 \cdot 6^6 + 15 \cdot 6^4 + 20 \cdot 6^3 = 6^6(2 + 15/6^2 + 20/6^3) = 6^6(2 + 55/108).\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je $6^{\sqrt{42}} < 6^{6+1/2} = 6^6 \cdot \sqrt{6}$. Če nam uspe preveriti relacijo $(2 + 55/108)^2 > 6$, potem smo dokazali, kar smo želeli: $7^6 > 6^{\sqrt{42}}$. To pa res ni težko:

$$(2 + 55/108)^2 = 4 + 4 \cdot 55/108 + 55^2/108^2 > 4 + 55/27 = 4 + 2 + 1/27 > 6.$$

Sedmi dan neprostoVOLjnega bivanja na samotnem otočku je bil za Tineta in Toneta žalosten. Videla sta ladjo, ki je plula mimo, na vse pretege sta vpila in mahala, toda zaman. Nihče ju ni opazil. Ko sta se pomirila, sta poskušala ugotoviti, kaj je s številom $n = 7$. Ni in ni šlo tako kot za prejšnjih šest števil. Seveda velja $7^{\sqrt{56}} < 7^{7+1/2} = 7^7 \cdot \sqrt{7}$. Nista pa znala pokazati, da je $7^7 \cdot \sqrt{7} < 8^7$. Posumila sta, da je nasprotno, $7^7 \cdot \sqrt{7} > 8^7$. To pomeni isto kot $(8/7)^7 < \sqrt{7}$. Kvadriranje te relacije bi pripeljalo do računanja velikih potenc, kar jima ni bilo preveč všeč. Kar naenkrat se je Tone spomnil, da je nekoč v Preseku bral članek o verižnih ulomkih. Zapisal je: $\sqrt{7} = 2 + x$, kjer je $0 < x < 1$. Pri tem število x zadošča kvadratni enačbi $x^2 + 4x = 3$, ki jo po deljenju z x prepisemo v obliko $1/x = 1 + (x+1)/3$. Ker velja tudi $(x+1)^2 + 2(x+1) = 6$, dobimo po deljenju z $x+1$ še $3/(x+1) = 1 + (x+1)/2$ in $2/(x+1) = 1 + x/3$. Ker velja tudi $3/x = 4 + x$, je krog sklenjen in imamo

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1/x} = 2 + \frac{1}{1 + (x+1)/3} = \dots = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + 1/x}}}}.$$

Torej lahko $\sqrt{7}$ zapišemo v obliki neskončnega periodičnega verižnega ulomka

$$\sqrt{7} = \langle 2; \overline{1, 1, 1, 4} \rangle.$$

Nekaj prvih njegovih zaporednih približkov dobimo brez težav:

$$2, 3, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{37}{14}, \frac{45}{17}.$$

Hitro lahko ugotovimo, da velja relacija $37/14 < \sqrt{7}$, saj velja $37^2 = 1369 < 1372 = 196 \cdot 7 = 14^2 \cdot 7$. Nekoliko teže je brez računalna preveriti, da velja tudi $(8/7)^7 < 37/14$. Hitro spoznamo, da moramo preveriti veljavnost relacije $2^{22} < 7^6 \cdot 37$ oziroma $(2^{11})^2 < (7^2)^3 \cdot 37$. Z malo truda najdemo $2^{22} = 2048^2 = 4\,194\,304$ in $7^6 \cdot 37 = 49^3 \cdot 37 = 4\,353\,013$. Torej drži relacija $8^7 < 7^7 \cdot \sqrt{7}$, kar pomeni, da pravzaprav še nismo uspeli dokazati, katero izmed števil $7^{\sqrt{56}}$ in 8^7 je večje. V bistvu je bilo vse to računanje le strel v prazno, kar je tudi v matematiki pogost pojav.

Za naravna števila n , $1 \leq n \leq 6$, je torej dokazana (brez tablic in računalna) neenakost

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}^{\sqrt{n}}.$$

Skupaj s Tinetom in Tonetom predvidevamo, da bo od nekega naravnega števila naprej veljala neenakost (1') oziroma (3'). Zopet uporabimo neenakost $\sqrt{n^2 + n} < n + 1/2$ in se najprej vprašajmo, kdaj je

$$(n+1)^{n+1/2} < n^{n+1}.$$

Enemu od naših junakov je po daljšem razglabljanju prišlo na misel, da bi to relacijo delil s produktom $n^n \cdot \sqrt{n+1}$. Dobila sta

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{n}{\sqrt{n+1}}.$$

Kakor v en glas sta Tine in Tone spoznala, da ima to nekaj opraviiti s številom $e = 2,71828\dots$, z osnovo naravnih logaritmov. Velja namreč

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Znana je tudi relacija $2 < e < 3$ in pa $(1 + 1/n)^n < e$, ki velja za vsako naravno število n . Zato bo vsekakor pametno pogledati, kdaj velja relacija $e < \frac{n}{\sqrt{n+1}}$. Za $n = 8$ dobimo na njeni desni strani število $8/3 = 2 + 2/3$, kar je očitno manjše od e . Torej na prvotno zastavljeno vprašanje še nimamo odgovora. Neenakost $\sqrt{n^2 + n} < n + 1/2$ je namreč za $n = 8$ pregroba. Za $n \geq 9$ lahko hitro preverimo, da velja neenakost $n/\sqrt{n+1} > 11/4 = 2 + 3/4 > e$. Leva polovica te relacije namreč privede do relacije $16n^2 - 121n > 121$, ki res velja za $n \geq 9$, za $n = 8$ pa ne. To pomeni, da za $n \geq 9$ velja tudi neenakost (3').

Za $n = 8$ moramo, hočeš-nočeš, vse skupaj pogledati na novo. Dokazati moramo pač relacijo $9^{\sqrt{8}} < 8^{\sqrt{9}}$ ali pa ustrezno relacijo z znakom $>$.

Kot bomo videli, velja prva, ki jo prepišemo v obliko $3^4 \sqrt{2} < 8^3 = 2^9$. Uporabimo relacijo $4\sqrt{2} < 17/3$, ki jo je preprosto dokazati, saj velja $288 = 32 \cdot 9 < 17^2 = 289$. Torej je treba preveriti le še relacijo $3^{17/3} < 2^9$ oziroma $3^{16} < 2^{27}/3$. Zapišemo:

$$3^{16} = (((3^2)^2)^2)^2 = ((9^2)^2)^2 = (81^2)^2 = 6561^2 = 43\,046\,721$$

in

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{27} = \frac{2}{3} \cdot 2^{16} \cdot 2^{10} = \frac{2}{3} \cdot 65\,536 \cdot 1\,024 = 44\,739\,242 + \frac{2}{3}.$$

Potenci 2^{16} in 2^{10} sta bili Tinetu in Tonetu najbrž znani iz osnov računalništva. Pa tudi s približkoma $2^{16} \approx 65\,000$ in $2^{10} \approx 1\,000$ bi presegla število 43 300 000.

Torej je za vsa naravna števila $n, n \geq 8$, dokazana (prav tako brez tablic in računalov) neenakost

$$\sqrt{n+1} \sqrt{n} < \sqrt{n} \sqrt{n+1}.$$

Tako jima je ostal samo še primer $n = 7$, za katerega nista mogla izvedeti, ali velja zanj relacija (1) ali (1'). Izkaže se, da ni preprostega ulomka, s katerim bi približno ocenili število $\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ in postopali brez uporabe tablic in računalov tako kot v ostalih primerih.

Dva tedna po brodolomu so Tinetove in Tonetove signale na pomoč vendarle opazili z neke večje ladje, spustili v morje čoln, odveslali ponju in ju rešili. Rešili pa niso le njunih življenj, pač pa so ju odrešili tudi primera $n = 7$. Ko jima je kapitan posodil računalov, sta izračunala

$$\sqrt{8}^{\sqrt{7}} = 15,655\,817\,80, \quad \sqrt{7}^{\sqrt{8}} = 15,672\,890\,87,$$

torej velja

$$\sqrt{8}^{\sqrt{7}} < \sqrt{7}^{\sqrt{8}}.$$

Tukaj nastopajoči števili sta si toliko blizu, da ne dopuščata približkov s preprostimi ulomki, katerih števci in imenovalci bi bili majhni, primerni za računanje "peš". Če natančno analiziramo izraz $|\sqrt{n+1}^{\sqrt{n}} - \sqrt{n}^{\sqrt{n+1}}|$ za naravne n , ugotovimo, da je ravno za $n = 7$ najmanjši. Zato nam ta sedmica dela toliko težav v zastavljeni nalogi. Na koncu pa lahko le pripomnimo, da smo ob tej zgodbi ponovili kar nekaj matematike, pri čemer smo ves čas, do srečanja s kapitanom, vztrajali brez računalov in tablic.

Marko Razpet (Raz5)

PRIHODNJE LETO SE BO ZGODILO

Da, čez leto dni, v začetku junija, bomo lahko opazovali zelo redek astronomski pojav.

Notranja planeta, Merkur in Venera, ki krožita okoli Sonca znotraj Zemljine krožnice, od časa do časa prideta natanko med Zemljo in Sonce. Takrat ju lahko včasih opazujemo, kako se kot temni pegi navidezno premikata čez svetel Sončev disk (navidezno Sončevo okroglo ploščico – krožec). Temu naravnemu pojavu rečemo *navidezno prečkanje* ali *navidezni prehod* (notranjega) planeta čez Sončev disk (slika 1). Da pride do tega pojava, mora biti izpolnjenih več pogojev. Najpomembnejša sta dva. Planet mora biti:

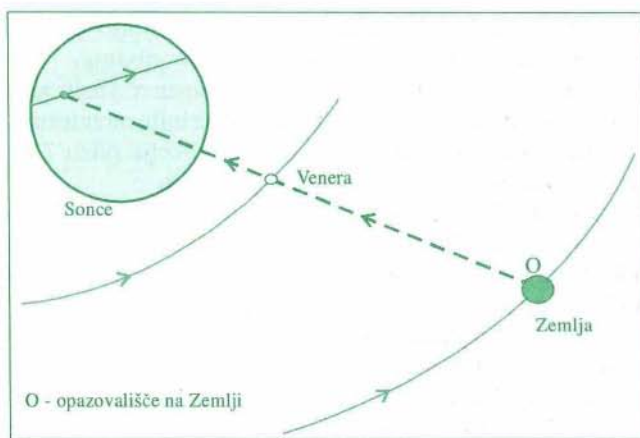
- i) v notranji konjunkciji s Soncem, in sicer natanko med Zemljo in Soncem;
- ii) v vozlu ali zelo blizu enega od vozlov svojega tira (Vozel je presečišče planetnega tira z ravnino zemeljskega kroženja okrog Sonca. Vozla sta dva; dvizni je tista presečna točka, v kateri planet prečka ravnino pri gibanju iz južne (spodnje) polute v severno (zgornjo), padni pa pri gibanju iz severa na jug.)

Zaradi zanimivosti pojava bomo na kratko opisali tako Merkurjeve kot tudi Venerine navidezne prehode čez Sonce.

Ko je Merkur ob notranji konjunkciji s Soncem in v vozlu ali blizu enega od vozlov svojega tira, je z Zemlje viden kot drobcena temna pega, ki se počasi premika čez Sončev obraz. To se lahko zgodi le, ko je notranja konjunkcija blizu 7. 5. ali 9. 11. Tako govorimo o majskih in novembrskih navidezni Merkurjevih prečkanjih. Merkurjev tir je precej sploščen in maja je Merkur Zemlji bliže kot novembra. Zato so novembrski prehodi pogostejši.

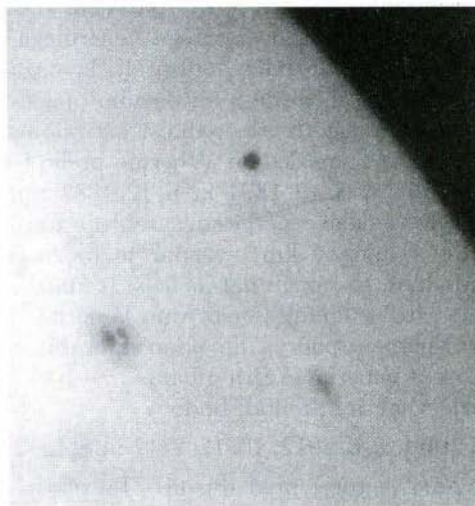
22 sinodskih obhodnih časov¹ Merkurja je približno enako sedmim letom, 41 sinodskih časov je še bliže 13 letom, 145 sinodskih časov pa je skoraj natančno 46 let. Prehodi so torej mogoči v časovnih presledkih 7, 13 ali 46 let, pri čemer v sedmih letnih presledkih majski prehodi niso mogoči. V 217 letih se zvrsti 29 prehodov, 19 pri dviznem vozlu (novembra) in 10 blizu padnega vozla (maja). Pojav lahko traja več ur, odvisno od kraja opazovanja.

¹ Sinodski obhodni čas planeta je čas med dvema enakima legama planeta glede na Sonce, npr. med dvema zaporednima notranjima konjunkcijama. To je obhodni čas planeta glede na Sonce (več glej v učbeniku: F. Avsec – M. Prosen, *Astronomija*, DZS-DMFA SLO, Ljubljana, 1966).



Slika 1. Navidezni prehod notranjega planeta (Venere) čez Sonce – shema. Planet se kot drobna temna pega premika po tetivi svetlega Sončevega diska. Pojav se začne, ko se planet navidezno dotakne diska – prvi dotik, nato pega zleze v disk in leze nekaj ur po njem, ko ga končno zapusti z zadnjim dotikom.

Prvi je opazoval in tako zabeležil Merkurjevo navidezno prečkanje čez Sonce francoski naravoslovec P. Gassendi 7. 11. 1631. Do danes so ta prečkanja velikokrat opazovali. Enega sem tudi sam opazoval (slika 2). Zadnji Merkurjev prehod je bil 14. 11. 1999, naslednji pa bo 7. 5. 2003.



Slika 2. Merkur (temni krožec) ob svojem navideznem prehodu čez Sonce dne 9. 5. 1970. Pojav je trajal skoraj osem ur (foto Marijan Prosen).

Opazovanje Merkurjevih prehodov lahko uporabijo za določitev natančnejših vrednosti elementov Merkurjevega tira gibanja.

Če je Venera ob notranji konjunkciji s Soncem v vozlu ali zelo blizu enega od vozlov svojega tira, pa pride do Venerinih navideznih prečkanj Sonca. Da se to zgodi, mora biti notranja konjunkcija blizu 7. 6. ali 8. 12. Zato govorimo o junijskih in decembrskih prehodih.

Osem sinodskih obhodnih časov Venere je skoraj enako osmim letom, tako da se prehodi navadno dogajajo v parih osem let narazen; 152 sinodskih obhodnih časov Venere pa je skoraj natančno enako 243 letom. Po paru prehodov, časovno razmaknjenih za osem let, se ne zgodi noben prehod ob istem vozlu najmanj 235 let. Par prehodov se pojavi ob drugem vozlu v vmesnem času. Časovna presledka med paroma prehodov sta torej 105,5 let in 121,5 let. Tako pridemo do vrste decembrskih prehodov v letih 1631 in 1639, 1874 in 1882, 2117 in 2125 ter vrste junijskih prehodov v letih 1761 in 1769 ter 2004 in 2012.

Prehod 6. 12. 1631 je napovedal J. Kepler. Gassendi, ki je prvi opazoval Merkurjev prehod, je opazoval Venero 4., 5., 6. in 7. 12., a prehoda ni "videl". Seveda ga ni mogel videti, ker se je zgodil ponoči od 6. na 7. 12., ko Sonce v Evropi ni bilo vidno.

Kepler ni napovedal prehoda 1639 (pravzaprav je napovedal, da bo šla Venera zelo tesno mimo Sonca, da ga bo torej "rahlo zgrešila"). Anglež J. Horrocks pa je izračunal, da se bo prečkanje Venere dogodilo 4. 12. Imel je srečo. Malo pred zaidom Sonca je s prijateljem res zabeležil začetek pojava. To je prvo in edino opazovanje tega Venerinega prečkanja.

Leta 1716 je astronom E. Halley, odkritelj slavnega po njem imenovanega komete, izrekel misel, da je z natančnim opazovanjem Venerinih prečkanj možno natančno ugotoviti vrednost astronomske enote (razdalje Zemlja–Sonce). Zato so naslednje Venerine prehode čez Sončev disk 5. 6. 1761 in 3. 6. 1774 ter 8. 12. 1874 in 6. 12. 1882 množično opazovali prav v ta namen. Iz obdelave podatkov vseh opazovanj so sicer dobili dober rezultat (150 milijonov km), vendar je to za današnji čas pre-malo natančno. Medtem so razvili natančnejši (radarski) način določitve astronomske enote, zato prihodnjih opazovanj Venerinih prečkanj ne bodo več uporabili za ta namen, pač pa jih bodo uporabili za pridobitev natančnejših podatkov o Venerinem tiru gibanja.

Naslednji štirje Venerini prehodi bodo

8. 6. 2004, 5. 6. 2012; 10. 12. 2117 in 8. 12. 2125.

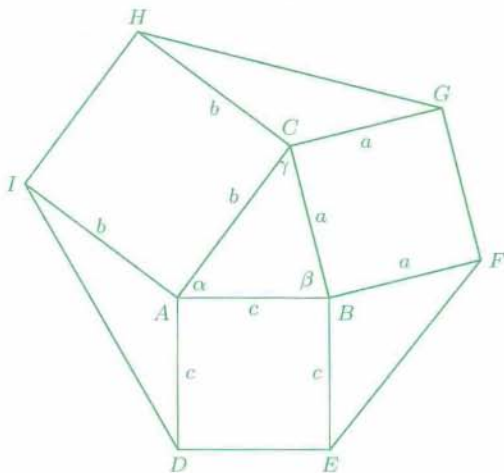
Prehod leta 2004 je torej pred durmi. Ta zelo redek astronomski pojav bomo lahko zares opazovali, ne pa samo pisali o njem.

Marijan Prosen

TRIKOTNIK, KVADRATI IN KROŽNICA

Nekatere znane naloge lahko z dodajanjem zahtev postanejo konstrukcijsko in računsko zanimive. Oglejmo si eno izmed njih.

Nad stranicami trikotnika ABC narišimo kvadrate. Izračunajmo ploščino šestkotnika $DEFGHI$ (slika 1).



Slika 1. Nad stranicami trikotnika narišemo kvadrate.

Iz slike razberemo kote:

$$\sphericalangle IAD = 180^\circ - \alpha, \quad \sphericalangle EBF = 180^\circ - \beta, \quad \sphericalangle HCG = 180^\circ - \gamma.$$

Upoštevajmo, da velja $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, in izračunajmo ploščine trikotnikov

$$p_{\triangle IAD} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha, \quad p_{\triangle EBF} = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \quad p_{\triangle HCG} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Ugotovimo, da je

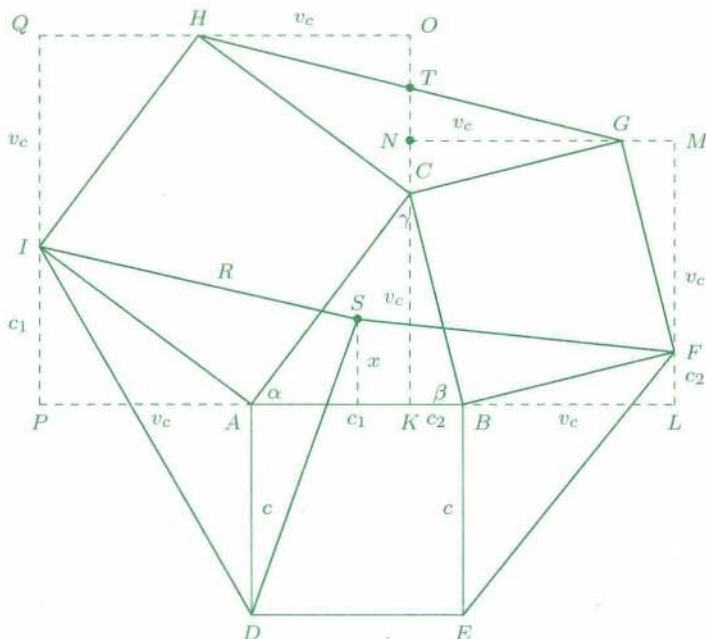
$$p_{\triangle IAD} = p_{\triangle EBF} = p_{\triangle HCG} = p_{\triangle ABC}.$$

Ploščina šestkotnika $DEFGHI$ je torej enaka

$$p = 2bc \sin \alpha + a^2 + b^2 + c^2 = 2cv_c + a^2 + b^2 + c^2.$$

To ploščino bi lahko izračunali tudi drugače. Kvadratoma nad stranicama a in b očrtajmo kvadrata tako, kot kaže slika 2.

Vzemimo, da sta kota α in β ostra, potem nožišče višine v_c na stranico c , to je točka N , leži na stranici AB . Označimo razdaljo $|AK| = c_1$ in $|KB| = c_2$, torej je $c = c_1 + c_2$. Razdalja središča očrtane krožnice S od stranic c naj bo x . Če bi bil kot $\alpha > 90^\circ$, potem bi bilo nožišče višine na nosilki stranice c izven c in bi bil $|KA| = c_1$ ter $|KB| = c_2 = c + c_1$.



Slika 2. Kvadratoma očrtamo kvadrata.

Iz slike razberemo iskane ploščine:

$$p_{\triangle EBF} = \frac{|EB| \cdot |BL|}{2} = \frac{1}{2} cv_c, \quad p_{\triangle IDA} = \frac{|DA| \cdot |AP|}{2} = \frac{1}{2} cv_c.$$

Ploščino trikotnika HCG lahko nadomestimo s ploščinama trikotnikov HCO in NCG , saj sta trikotnika $\triangle HOT$ in $\triangle GNT$ skladna:

$$\begin{aligned} p_{\triangle HCG} &= \frac{|CO| \cdot |OH|}{2} + \frac{|CN| \cdot |NG|}{2} = \frac{1}{2} c_1 v_c + \frac{1}{2} c_2 v_c = \\ &= \frac{1}{2} (c_1 + c_2) v = \frac{1}{2} cv_c. \end{aligned}$$

Poglejmo še, kdaj lahko tako nastalemu šestkotniku očrtamo krožnico. Središče krožnice, ki je očrtana šestkotniku, je v središču trikotniku ABC očrtane krožnice, v točki S , saj so simetrale stranic IH , GF in DE hkrati tudi simetrale stranic trikotnika. Izračunajmo razdalji $|IS|$ in $|SF|$:

$$|IS|^2 = \left(v_c + \frac{c}{2}\right)^2 + (c_1 - x)^2, \quad |SF|^2 = \left(\frac{c}{2} + v_c\right)^2 + (x - c_2)^2.$$

Razdalji morata biti enaki, saj točki I in F ležita na krožnici s središčem S . Iz enakosti sledi

$$c_1 - x = x - c_2 \quad \text{in} \quad c_1 - x = c_2 - x.$$

Iz prve enačbe dobimo

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{c}{2} \implies \gamma = 45^\circ$$

in iz druge

$$c_1 = c_2 \implies a = b.$$

Če bi bil kot $\alpha > 90^\circ$, potem bi dobili iz $|IS|^2 = |SF|^2$

$$\left(v_c + \frac{c}{2}\right)^2 + (c_1 + x)^2 = \left(\frac{c}{2} + v_c\right)^2 + (c_2 - x)^2$$

in od tod

$$x = \frac{c}{2} \quad \text{in} \quad c_1 = -c_2.$$

Ker dolžine ne moreje biti negativne, takoj vidimo, da je v tem primeru edina rešitev $x = c/2$ in s tem kot $\gamma = 45^\circ$. Pri tem smo upoštevali, da je $c_2 = c + c_1$. Pogoji so torej v primeru topega kota še ostrejši.

V trikotniku nobena od stranic ni odlikovana, zato lahko zapišemo pogoje še za primer, ko narišemo višino na stranico b . Označimo razdaljo središča trikotniku očrtane krožnice od stranice b z y . Iz pogoja $|SD| = |SG| = R$ dobimo

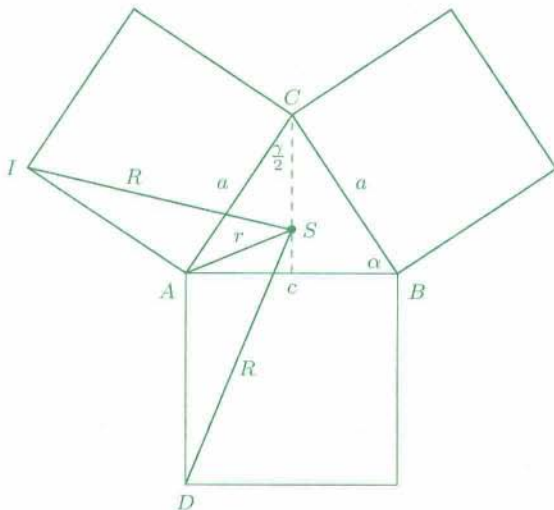
$$b_1 = b_2 \quad \text{ali} \quad y = \frac{b}{2} \implies \beta = 45^\circ.$$

Zapišimo pogoje, ki smo jih dobili pri delitvi stranice c in stranice b , z znaki matematične logike:

$$(a = b \vee \gamma = 45^\circ) \wedge (a = c \vee \beta = 45^\circ).$$

Iz pregleda vseh pogojev sklenemo, da mora biti trikotnik ali enakokrak pravokotni trikotnik (dva kota 45°) ali pa enakostranični trikotnik.

Iz pogojev, da mora biti trikotnik enakokrak, lahko dobimo obe omenjeni rešitvi še z računom. Narišimo novo skico in upoštevajmo, da je trikotnik enakokrak.



Slika 3. Nad stranicami enakokrakega trikotnika narišemo kvadrate.

Poglejmo kote, ki jih potrebujemo:

$$\gamma = 180^\circ - 2\alpha, \quad \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha, \quad \angle DAS = 90^\circ + \left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right) = 2\alpha.$$

Iz trikotnikov $\triangle IAS$ in $\triangle ADS$ izrazimo stranici $|IS|$ in $|DS|$, ki sta hkrati polmera R iskane krožnice:

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos\left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = a^2 + r^2 - 2ar \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$R^2 = c^2 + r^2 - 2cr \cos\left(90^\circ + \alpha - \frac{\gamma}{2}\right) = c^2 + r^2 - 2cr \cos 2\alpha.$$

Upoštevamo, da v trikotniku velja

$$a = 2r \sin \alpha, \quad c = 2r \sin \gamma = 2r \sin(180^\circ - 2\alpha) = 2r \sin 2\alpha.$$

Desni strani izrazov za R^2 izenačimo:

$$4r^2(\sin \alpha)^2 + r^2 + 4r^2 \sin \alpha \cos \alpha = 4r^2(\sin 2\alpha)^2 + r^2 - 4r^2 \sin(2\alpha) \cos 2\alpha.$$

Kotne funkcije dvojnih kotov pretvorimo v funkcije enojnih kotov, upoštevamo povezavo $(\cos \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2$ in enačbo uredimo. Ker mora biti kot α ostri kot (da je vsota kotov v trikotniku 180°) in seveda $\alpha \neq 0$, lahko enačbo delimo še s $4r^2 \sin \alpha$. Dobimo

$$\begin{aligned} 3 \sin \alpha - 3 \cos \alpha - 4(\sin \alpha)^3 + 4(\sin \alpha)^2 \cos \alpha &= 0, \\ (\sin \alpha - \cos \alpha)(3 - 4(\sin \alpha)^2) &= 0, \end{aligned}$$

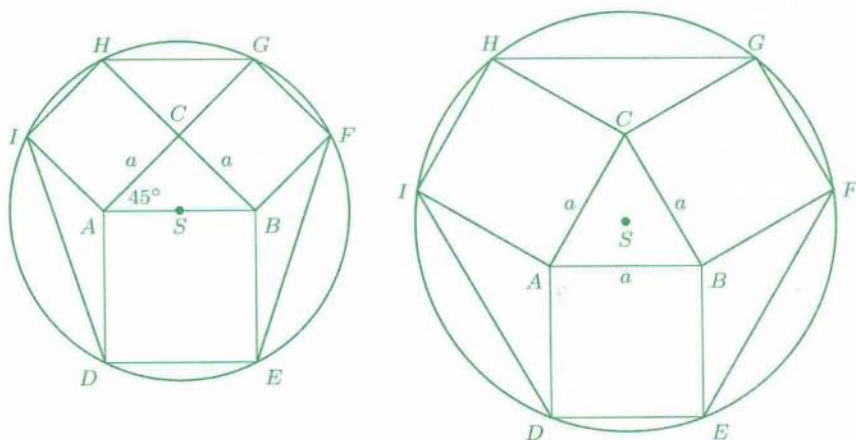
od tod pa

$$\sin \alpha = \cos \alpha \implies \alpha = 45^\circ,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \alpha = 60^\circ.$$

Ugotovili smo, da mora biti trikotnik ABC ali enakokrak pravokotni trikotnik ali pa enakostranični trikotnik, da lahko nastalemu šestkotniku očrtamo krožnico.

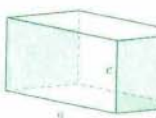
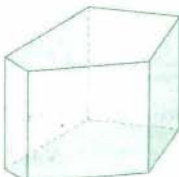
Grafično lahko nalogo rešimo z enim od programov za dinamično geometrijo. Tako še pred računskim reševanjem ugotovimo, kakšen mora biti trikotnik ABC , zato lahko nalogo brez računanja rešijo tudi osnovnošolci.



Slika 4. Šestkotniku $DEFGHI$ lahko očrtamo krožnico v dveh primerih.

Nada Razpet

KRIŽANKA “GEOMETRIJSKA TELESA”

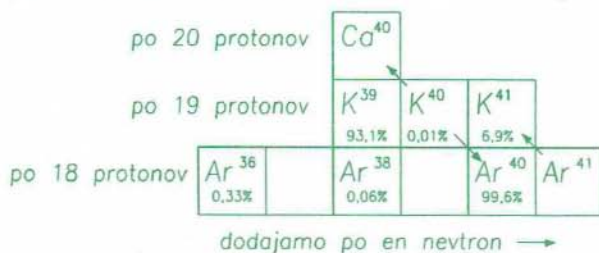
								DRŽA POLOŽAJ TELESA	
						POŠKODBA KOŽE OD OGNJA			
						SL. IGRALKA (NINA)			
		POLONA VETRIH			STAREJŠI ITAL. IGRALEC CERVI	POKOJNI GRŠKI LADJAR (ARI)	NIKO GRAFE- NAUER	TURŠKI ŠAHIST (SUAT)	VOZNA KARTA
		JUŽNO- SLOVANSKO MOŠKO IME							ODSEK NA KROŽNICI
									SEVERNO- AMERIŠKI INDIJANEC
MESTO PRI WASHINGTONU Z VOJAŠKIM POKOPAL.									
STARO GLASBILLO V OBLIKU ZABOJČKA Z ROČICO						SMUČ REŠ. COLN			
						ANG. IZRAZ ZA VZHOD			
IVAN MINATTI				TRMAST SORODNIK KONJA				AVTOMOB. OZNAKA ČAKOVCA	NEVTRALNI FAKTOR ZA MNOŽENJE
				AFRIŠKA DRŽAVA				PRITR- DILNICA	
PALICA Z JERMEKOM ZA UDARJANJE				MAROŠKI TEKAČ AOLITA					REKVIZIT V COLNU
				LIDIJA OSTERC					
									PROTI- SREDSTVO
									ČASO- MERILNE NAPRAVE
VESELJE							KOALICIJA, KI JE IZPELJALA OSAMOSV. SLOVENIJE	ZRUŠITEV OBLASTI	MESTO V JUŽNI TURČIJI
			OTO PESTNER	DEL ZEMELJSKE POVRŠINE	FILOZOF HRIBAR	IGRALEC ULAGA	PRIBEŽA- LIŠČE, ZAVETIŠČE		DANILO BENEDIČIČ
									GRŠKI BOG VETROV
									
			NEGATIVNO NAELEK- TREN ION						
			LEToviŠČE NA HVARU						

IRŠKI ISEC ASNI	NAPITEK, KI VSEBUJE KOFEIN	IGRALKA FERENČAK	NEKDANJI UGANDSKI DIKTATOR AMIN	PEVKA FALK	RIBA VELIKANKA IZ AMAZONKE				
						DRUŽINA ŽUŽELK S STRUPENIM ŽELOM	SOSEDI ČRKE "S" V OBE SMERI		PESNICA NOVY
			KRISTUSOV UČENEC						
			REVUJA ZA OSNOVNO- ŠOLCE						ADOLF JENKO
	ANDREJ PEČENKO			IZ FILMA ZNANA KAVARNA					
				KOLEŠAR BONČA					
	REKA NA JUGO- VZHODU KAZAH- STANA	ZIMSKI POJAV NA DREVJU				POŠKODBA OD NOVIH CEVLJEV			
		VALJASTA POSODA				IT. MESTO NA VODI			
ERA V LAHA					ROMAN DOSTO- JEVSKEGA				
MAŠEK / ŽILI					SL. PESNICA (MAKSA)				AVTOR MARKO BOKALIČ
			LASEK						
			KRAJ V DOLINI POD ČRNIM KALOM						
				ANTON NANUT					
				ROVNICA			MESTO NA VZHODU LITVE		
	IGRALEC CAVAZZA	NAŠ ŠAHIST (DRAŽEN)							
		NEOTE- SANEK							
		PROGRAM JEZIK ZA ZACETNIKE							
			PREBIVALEC JUŽNE BALKANSKE DRŽAVE	DEL CELICE					
				RIMSKI HIŠNI BOG					
					KATALI- ZATOR PRESNOVN. PROCESOV ASTAT				
EDMET ZA ROŠKO KBAVO						PRISTA- NISCE NA SEVERU IZRAELA			
TARO- GRSKI LOZOF						REKA V POSARJU, PLOVEN PRITOK MOZELE			

POGLED V ČASE, KO JE BILA ZEMLJA ŠE MLADA

Doktor Ksenon je pogledal na uro in rekel Janezu: "Kmalu dobiva vzorec. Imava vse pripravljeno?" Doktor in njegov mladi pomočnik sta se namenila določiti starost kristala silvina. Menda naj bi nastal pred nekaj sto milijoni let.

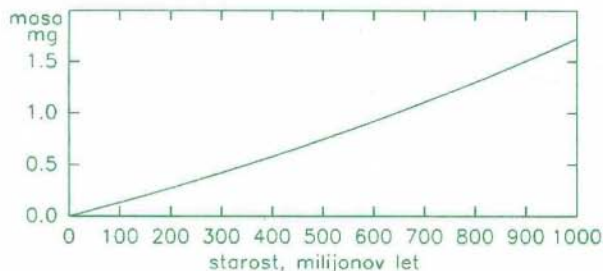
Silvin je kristaliziran kalijev klorid KCl. V naravi ga najdemo marsikje, a kako ga pripravimo do tega, da izda svojo starost? Pomaga nam radioaktivnost, ki se je bojimo, a se ji nikjer ne moremo popolnoma izogniti. Kemijski element kalij sestavlja pretežno kalijev izotop K^{39} , čigar jedro sestavlja 19 protonov in 20 nevtronov. Znatno manj je v naravi K^{41} . V jedrih tega izotopa dela družbo devetnajstim protonom dvaindvajset nevtronov. S tem pa kalijeve družine še ni konec. Med vsakimi 100 000 jedri prve in druge vrste najdemo tudi 12 kalijevih jeder z 19 protoni in 21 nevtroni. To so jedra kalija 40. Kalij 40 ni zadovoljen s svojo sestavo. Prej ali slej se spremeni v kalcij 40 ali pa v argon 40. Vendar pa so take spremembe silno redke. V povprečju se zgode morda enkrat v milijardi let. Sprememba kalija 40 v kalcij 40 je devetkrat bolj verjetna kot sprememba v argon 40. Doktor Ksenon pa se je odločil, da gre loviti natanko argonove atome. Le kako mu bodo koristili pri določanju starosti (slika 1)?



Slika 1. Pri radioaktivnem razpadu prehajajo elementi drug v drugega. Kadar jedro pogoltne nevtron, postane težje in marsikdaj nestabilno.

Nekoč, v pradavnih časih, so po nekaterih jezerih plavali kalijevi in klorovi ioni. Sem pa tja se je kakšen atom kalija 40 spremenil v argon 40. Argon je odplaval v stran in se nazadnje pridružil atomom v ozračju. Voda je izparevala in se gostila. V vodi so začeli rasti kristali kalijevega klorida, silvina. Atom argona, ki je nastal v kristalu, je ostal v njem ujet. Z milijoni let se je v kristalu nabrala množica takih ujetnikov. Če bi jih znali prešteti in če bi vedeli, kako hitro nastajajo, bi lahko izračunali starost kristala.

Kemiki ne znajo prešteti atomov, zato pa so zelo spretni s tehtnico. Morda bi argonove atome stehali, namesto da jih štejemo? Premislimo, kako narašča s časom masa ujetega argona. Vzemimo kos silvina, težkega 40 gramov. Vsak kubični centimeter tehta skoraj natanko 2 grama, torej zavzema prostornino 20 cm^3 . Iz poznanih atomskih tež kalija in klora hitro izračunamo, da vsebuje tak kos poleg 19,2 gramov klora tudi 20,8 gramov kalija. Vendar pa je delež kalija 40 majhen, njegova celotna teža znese le 2,4 miligrama. V knjigah lahko najdemo razpolovni čas kalija 40, ki je $1,28 \cdot 10^9$ let. Če torej počakamo milijardo let, se bo nekaj manj kot polovica kalija spremenila v argon. Masa argona, ujetega v silvinu, bo potemtakem okoli 1,1 miligrama. Pred milijardo leti bi našli v kaliju skoro dvakrat več kalija 40. Ko upoštevamo vse te zakonitosti, pridemo do grafa (slika 2), ki kaže maso ujetega argona v našem kosu silvina v odvisnosti od starosti. Mislimo si, da je naš vzorec star 500 milijonov let. Iz grafa razberemo, da lahko pričakujemo v njem 0,72 miligrama argona.



Slika 2. Množina ujetega argona 41 v 40 gramov težkem kristalu silvina je odvisna od njegove starosti.

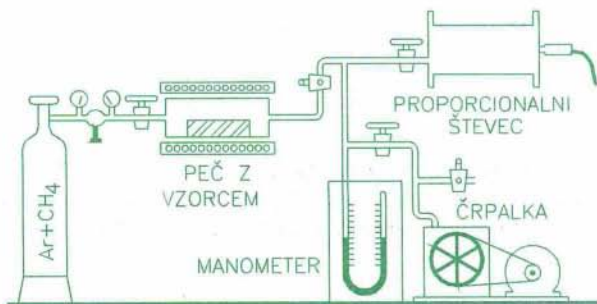
Kako torej izgnati argon iz kristala, ga pretočiti v izčrpano posodo, ki smo jo stehali povsem prazno, in kako potem ugotoviti razliko med prazno in polno posodo? Očitno s tehtanjem ne bo uspeha. Teža nastalega argona je premajhna.

Kemiki ugotavljajo množino snovi tudi prek meritve tlaka. Če v posodo s prostornino 100 cm^3 spravimo svoj vzorec, izčrpamo zrak in vzorec raztalimo, se bo argon sprostil in se razširil po preostali prostornini 80 cm^3 . Manometer, ki je prej kazal tlak 0, bi v našem primeru pokazal tlak približno 5 milibarov. Tolikšne tlake sicer znamo meriti, vendar nimamo zagotovila, da so vsega namerjenega tlaka krivi ravno sproščeni argonovi atomi. Morda so se sprostili tudi drugačni plini, ki so bili slučajno ujeti v kristalu? Morda smo s segrevanjem posode odlepili tanko plast dušika in kisika, ki se je utegnila držati na steni posode? Vsekakor bi bilo zanesljiveje, če bi atome argona prešteli. To pa zmore sodobna fizika.

Jedrski reaktorji nam poleg nevšečnosti prinašajo tudi koristi. Vsak jedrski reaktor je mravljišče, v katerem namesto mravelj mrgole nevtroni. Fiziki, ki so se igrali s takimi reaktorji, so ugotovili, da večina snovi, ki jo nekaj časa pustimo v delujočem reaktorju, postane radioaktivna. To pomeni, da snovi oddajajo različna sevanja tudi potem, ko smo jih potegnili iz reaktorja. V atomska jedra so namreč prodirali nevtroni in marsikdaj v njih obtičali.

Doktor Ksenon je svoj kos silvina vložil v jedrski reaktor dan poprej. Nevtroni, ki jih prestrežejo jedra argona 40, le-tega spremene v argon 41. Prej ali slej se bo nastalo jedro vnovič spremenilo. Iz jedra bo izletel elektron, eden od nevtronov pa se bo spremenil v proton. Novo jedro, s protonom več, je zadovoljno s svojo sestavo in novim imenom kalcij 41. Sprememb je konec. Elektron, oziroma delec beta, kot ga tudi imenujemo, pa je mogoče odkriti s primernim detektorjem radioaktivnosti. Najpreprostejši je že geigerski števec. Čim več takih delcev najavlja geigerski števec, tem več je bilo v kosu silvina ujetih argonovih atomov in tem starejši je vzorec.

Dr. Ksenon in Janez sta se odpravila v reaktorsko zgradbo, kjer so jima izročili njun vzorec. Prenesla sta ga v svoj laboratorij. Odprla sta posodo, v kateri so vzorec obsevali, in preložila kos silvina v pečico s cevkami in ventili na obeh straneh (glej sliko 3).



Slika 3. Potrebne naprave za osvoboditev ujetega argona.

Pognala sta črpalko, ki je izsesala zrak iz celotnega sistema. Tlak sta nadzorovala z manometrom. Ko sta se izenačili višini obeh krakov, sta zaprla ventila na obeh straneh cilindra. Vključila sta pečico, ogrevala cilindar in pri 700 stopinjah se je silvin stalil. Zdaj sta odprla ventile in spustila pline, ki so izšli iz raztaljenega silvina v proporcionalni števec. Doktorji Ksenonu geigerski števec ni bil posebno pri srcu. Geigerski števec delce beta le zaznava, več pa o njih ne zna povedati. Proporcionalni števec

pa pove tudi energijo delca beta tako, da odda električni sunek z višino, ki je sorazmerna energiji zaznanega delca. Proporcionalni števec mora biti za normalno delovanje napolnjen s plinom argonom, ki mu je primešanega še okoli deset odstotkov metana (CH_4). Tako plinsko mešanico sta imela oba raziskovalca že pripravljeno v jeklenki. Mešanica iz jeklenke, ki je prek peči tekla v števec, je odplaknila tja še zadnje sledi radioaktivnega argona. Ko je tlak v proporcionalnem števcu dosegel zunanji zračni tlak, sta števec zaprla, priključila nanj visoko napetost okoli 2300 V in začela s štetjem. Pogledala sta na uro in si zabeležila čas.

Po pol ure se jima je nabralo okoli sto tisoč sunkov. Razpadlo je torej sto tisoč jeder. Pogostost štetja se je polagoma manjšala. Seveda, za argon 41 je značilen razpolovni čas 109 minut. Ksenon je ustavil štetje in zapisal rezultat.

“Zakaj ne štejeva še naprej?” je zanimalo Janeza. “Saj še niso razpadla vsa jedra.”

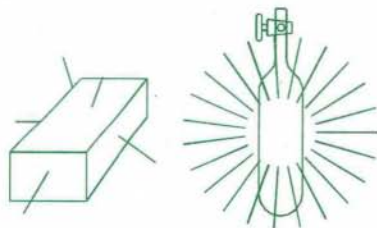
“Tako ali tako bo treba računati. Precej jeder je razpadlo, še preden sva začela s štetjem. Tudi konec razpadanja bi težko dočakala. . .”

“Kako pa bova računala?” je zanimalo Janeza. “So v reaktorju vsi atomi argona 40 postali radioaktivni?”

“Prav tu je težava. Spremenil se je le del teh atomov. Delež je odvisen od gostote nevtronov v reaktorju, od verjetnosti, da nevtron obtiči v jedru argona 40 in ga spremeni, pa še od časa obsevanja. Natančna napoved bi bila tvegana. K sreči pa imava tole.” Ksenon je potegnil ampulo iz posodice, v kateri je bil obseval vzorec silvina.

“S silvinom sva hkrati obsevala tudi argon v tejle ampuli, ki drži 10 cm^3 . Ampulo sva napolnila do atmosferskega tlaka, to pa pomeni, da je v njej 17,8 mg argona. Argon, ki ga najdemo v naravi, vsebuje kar 99,6 % argona 40. Poleg argona v silvinu je pri obsevanju tudi ta argon postal radioaktiven. Ker ga je več kot v silvinu, bo njegova radioaktivnost večja. Ker pa smo oba argona obsevali pri enakih pogojih, bo razmerje njunih radioaktivnosti v razmerju mas obeh argonov. Do mase argona v silvinu bomo prišli kar s sklepnim računom. Preprosto, mar ne?”

Janez se je strinjal (slika 4).



Slika 4. Poleg vzorca (levo) smo obsevali tudi ampulo z argonom (desno), pridobljenim iz zraka. Razmerje obeh aktivnosti pomaga določiti starost.

“Pa le ni tako preprosto. Sklepni račun bi veljal le, če bi merili radioaktivnost obeh vzorcev hkrati. Tako pa bomo merili radioaktivnost naravnega argona kasneje, ko bo ta že manjša. Ker pa poznamo razpolovni čas argona 41, ne bo težko določiti popravkov. Če bi drugo meritve začeli 109 minut za prvo, bi morali rezultate pomnožiti z dva, če bi jo začeli 218 kasneje, bi morali rezultate pomnožiti s štiri. Tako ali tako je radioaktivnost drugega vzorca dosti večja od radioaktivnosti prvega. Zato je celo koristno, če drugo radioaktivnost merimo precej kasneje, ko postane primerljiva s prvo. Če bi bila pogostost štetja prevelika, bi električne sunke izgubljali. Proporcionalni števec zanesljivo šteje do pet tisoč sunkov v sekundi.”

“Torej bova po tejle meritvi nekaj časa počivala?” je zanimalo Janeza.

“To pa spet ne. Merila bova ozadje. Najin števec šteje, tudi če v njem ni nobenega radioaktivnega vira. Sevanje prihaja iz vesolja, pa tudi iz tal pod nama. Da bi vsaj del tega sevanja odpravila, imava svoj števec v svinčenem gradu. S števcem, ki bo napolnjen z običajno delovno mešanico argona in metana, bova preštevala spet pol ure in rezultat odštela od rezultata meritve, pri kateri je bil v števcu radioaktivni argon. Pogostost sunkov iz števca brez dodanega argona je stalna in jo lahko napraviva kadarkoli. Zdajle imava ravno čas.”

Potem sta merila in spet merila, da bi preverila prejšnje meritve. Slednjič sta se lotila računanja in ugotovila, da je njun vzorec silvina star približno 450 milijonov let. Vendar je silvin še mlad v primerjavi z drugimi kameninami. Opisana metoda bi pokazala starosti tudi do dveh milijard let. Tudi Janez je bil zadovoljen, čeprav si je bil opekel kazalec. Uporabil ga je kot termometer, ko se mu je zdelo, da se peč prepočasi segreva. Pa se očitno ni... Bi študiral fiziko, ko konča s srednjo šolo?

Pri radioaktivnem razpadu se manjša število jeder N_A v viru sevanja eksponentno s časom t . Razpolovni čas, značilen za razpad, je $T_{1/2}$ in zato

$$N_A(t) = N_A(t=0) \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} . \quad (1)$$

Nastajajo jedra vrste B. Ker se ne izgubi nobeno jedro, se vsota jeder A in jeder B ohranja:

$$N_A + N_B = \text{konst} = N_A(t=0) . \quad (2)$$

Od tod izračunamo število nastajajočih jeder B:

$$N_B(t) = N_A(t=0) \cdot (1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}) . \quad (3)$$

Ta enačba pa velja za bodočnost. Tolikšen je danes delež kalija 40. Ob času $t = -T_0$, ko je KCl kristaliziral, je bil večji:

$$N_A(t = -T_0) = N_A(T = 0) \cdot 2^{\frac{T_0}{T_{1/2}}} \quad (4)$$

Če nesemo dobljeno vrednost v enačbo (3), dobimo

$$N_B(t) = N_A \cdot 2^{\frac{T_0}{T_{1/2}}} \cdot (1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}) \quad (5)$$

Graf te funkcije, kjer smo upoštevali vsebino kalija 40 v našem kosu silvina, kaže slika 2. Zanima nas še tlak, ki ga ustvari 0,75 mg argona v 80 cm^3 . Iz plinske enačbe vemo, da zavzame mol enoatomskega plina $22,4 \text{ litra} = 22400 \text{ cm}^3$ pri normalnem tlaku in sobni temperaturi. Mol argona 41 pomeni 41 gramov. Pri normalnem tlaku, ki je 1000 mb, je torej v 1 cm^3 $41000 \text{ mg} / 22400 = 1,83 \text{ mg}$ argona. Kadar razpnemo 0,75 mg argona v 80 cm^3 , namerimo gostoto $0,00937 \text{ mg/cm}^3$. Stopetindevetdesetkrat manjša gostota da tolikokrat manjši tlak, torej 5 mb. To pa pomeni v živosrebrnem manometru razliko gladin živega srebra nekaj manj kot 4 mm.

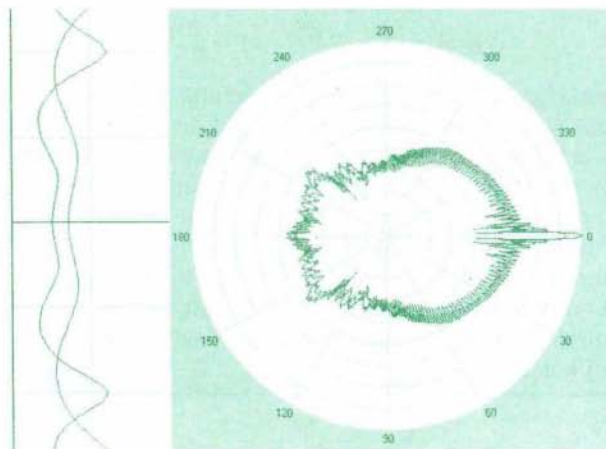
Jože Pahor

GLORIJA – SIPANJE SVETLOBE

V prejšnji številki Preseka je bila na naslovnici čudovita slika gloriije, barvnih kolobarjev (s premerom le nekaj ločnih stopinj), ki nastanejo na megli okrog sence opazovalca. Razlaga nastanka tega pojava se je naslanjala na podobnost z mavrico, kar pa pojasni pojav le v grobem in le delno. Tako dobra slika in tako zanimiv pojav zaslužita nekaj dodatne razlage.

Med mavrico in gloriijo je res kar precej podobnosti. Obe nastajata na vodnih kapljicah v zraku. Pri obeh pojavih kapljice izrazito močno preusmerjajo sončne žarke samo v nekatere smeri; lahko bi rekli, da jih v te smeri "zbirajo", medtem ko gre v druge smeri svetlobe precej manj. Pri obeh pride do razklona barv. Oba pojava nastajata tako, da ima opazovalec sonce za svojim hrbtom in v obeh primerih so sonce, opazovalec in središče pojava na isti premici (senca glave opazovalca v sredi barvnih kolobarjev).

Dežne kaplje, na katerih nastaja mavrica, so velike okrog milimetra. Zanje je dovolj dober opis z lomom svetlobe v kapljo, z enim ali večimi notranjimi odboji in končno z lomom nazaj ven iz kaplje. Meglene kapljice pa so velike le nekaj tisočink milimetra – torej so po velikosti približno primerljive z valovno dolžino svetlobe. V takih primerih pa pojave lahko ustrezno opišemo samo s sipanjem svetlobe, in sicer s takim



Slika 1. Krožni diagram relativne intenzivnosti sipanja nepolarizirane modre in rdeče svetlobe na vodni kapljici polmera 0,01 mm za vse smeri in (levo) povečan izsek za smeri sipanja "nazaj" med 174° in 186° , izračunano s pomočjo programa MiePlot v2.0.05 (Philip Laven, philip@philiplaven.com). Obe skali sta logaritmčni, zato vsak koncentrični krog oz. vsaka vertikalna črta pomeni za en velikostni red razlike pri intenzivnosti svetlobe. Žal nismo mogli objaviti barvne slike. Sicer bi videli, da se modra svetloba siplje bolj kot rdeča – zato je po sipanju svetlobe na molekulah zraka nebo modro.

sipanjem, ki je v nekatere smeri močnejše, v druge pa šibkejše, ko se torej v en kot preusmerja več svetlobe, v drugega manj, v naslednjega spet več svetlobe itn. Tako je Mieovo¹ sipanje, ki nastaja na okroglih kapljicah, po velikosti približno primerljivih z valovno dolžino vpadaajoče svetlobe na same kapljice. Ker je intenzivnost sipanja v razne smeri odvisna tudi od lomnega količnika snovi, na kateri se svetloba siplje, v našem primeru vode, in ker je lomni količnik vode za različne valovne dolžine, torej za različne barve, različen, so obroči glorijske tudi mavrično obarvani.

Jože Rakovec

¹ Gustav Mie (1868 – 1957), nemški fizik, avtor teorije o sipanju svetlobe na okroglih delcih.

NAPAKE NISO VEČNE

Presek, zgoščenke, planeti in kode

V času informacijske tehnologije (zgoščenke, mobilni telefoni, bančne kartice, internet) se vsi dobro zavedamo pomena hitrega in natančnega prenosa, obdelovanja in hranjenja informacij. Še tako popolne naprave delajo napake, le-te pa lahko hitro spremenijo sicer izredno koristno programsko in strojno opremo v ničvredno ali celo nevarno orodje. Dolgo časa so se ljudje trudili izdelati računalnike in pomnilnike, ki bodo naredili oziroma vsebovali, kar se da malo napak. Seveda so bile zato cene takih izdelkov vedno višje. Potem pa so se domislili, da bi raje računalnike same naučili iskati in odpravljati napake. Za povečanje zanesljivosti prenosa in obdelave informacij smo dolgo časa uporabljali kontrolne bite (angl. parity-check bits), kot npr. pri številki bančnega čeka, ki pa so služili le za odkrivanje napak. Ko je matematik Richard Hamming vnašal v računalnik programe s pomočjo luknjanja kartic in ko mu je računalnik zavrnil paket kartic zaradi napak, se je zamislil: "Če zna računalnik sam odkriti napako, zakaj ne zna najti tudi njenega mesta in je odpraviti?"

Resnično nas vedno bolj zanima, kaj lahko storimo, če pride do tovrstnih napak, saj so računalniki začeli prevzemati večino dela na področju informacij in pri telekomunikacijah. Na začetku so bili računalniški programi dovolj enostavni, tako da so tehnične napake (ponavadi je odpovedala elektronka) hitro postale očitne. Toda z razvojem strojne opreme so postajali programi vse obsežnejši in bolj zapleteni, s tem pa je upanje, da bi lahko hitro opazili majhne napake, ki spremenijo delovanje naprave, plahnelo. Možnost, da se nam izmuzne kakšna napaka, je vse večja tudi zato, ker so elektronska vezja iz dneva v dan manjša, računalniki pa vse hitrejši. Tudi če je možnost napake ena sama milijardinka (npr. industrijski standard za trde diske je ena napaka na 10 milijard bitov), se bo računalnik, ki opravi dve milijardi osnovnih operacij na sekundo, in tak računalnik je prav dolgočasno počasen glede na superračunalnike, zmotil približno dvakrat na sekundo. Glede na količino podatkov, ki jih obdelujemo dandanes, je to pravišnji recept za vsakodnevne nevšečnosti.

Kaj lahko torej storimo? Raziskovalci so našli odgovor v kodah za odpravljanje napak. **Koda** je skupina simbolov, ki predstavlja informacijo. Kode obstajajo že tisočletja. To so npr. hieroglifi, grška abeceda, rimske številke ali pa genetska koda za sestavljanje ribonukleinskih kislin, različne kode za zapis govora ali glasbe, Morsejeva abeceda za prenos informacij, kode za shranjevanje podatkov. Matematična teorija kod, ki se je razvila v zadnjih petdesetih letih, je računalnikarjem in inženirjem omogočila, da sestavijo sisteme, ki so, kar se da zanesljivi (kolikor pač dopušča strojna

oprema). Tako teorija kodiranja lahko predstavlja varnostno mrežo, svojevrstno matematično zavarovanje pred muhastim materialnim svetom, v katerem živimo.

Tehnologija kod za popravljanje napak je danes tako razširjena kot zgoščenke (CD). Omogoča nam, da poslušamo priljubljeni Mozartov ali Madonnin CD brez kakršnih koli motenj, četudi nam ga mačka prav pošteno spraska.

Enako tehnologijo uporabljajo za komunikacijo tudi vesoljske ladje in sonde, ki raziskujejo naše osončje. Kode za odpravljanje napak omogočajo, da kljub elektromagnetnim motnjam pridejo na Zemljo kristalno jasni posnetki oddaljenih planetov, pri tem pa za prenos porabimo manj energije kot hladilnikova žarnica (gre torej za šepetanje, ki mora prepotovati več milijard kilometrov).

V nadaljevanju prispevka bomo najprej predstavili enostavnejše kode za odpravljanje napak, npr. kode s ponavljanjem in Hammingove kode, nato pa bomo spoznali še poenostavljeno varianto t. i. Reed-Salomonovih kod. Nazadnje si bomo ogledali osnove kodiranja na zgoščenkah.

Preproste kode za odpravljanje napak

Claude Shannon je kmalu po koncu druge svetovne vojne postavil teoretične osnove teoriji informacij in zanesljivemu prenosu digitalnih podatkov. Leta 1948 pa je Richard Hamming izumil metodo za *popravljanje* ene napake in *odkrivanje* dveh napak. Bistvo vseh metod za odpravljanje napak je dodajanje kontrolnih bitov. Najenostavnejša koda za odpravljanje napak je zasnovana na *ponavljanju*. Če npr. pričakujemo, da pri prenosu ne bo prišlo do več kot ene same napake, potem je dovolj, da vsak bit ponovimo trikrat in pri sprejemu uporabimo "večinsko pravilo" (zelo kratko "simfonijo" 1101 zakodiramo v 111 111 000 111). Če prejmemo 111 011 000 111, popravimo sporočilo v 111 111 000 111 in ga nazadnje še dekodiramo v 1101. V splošnem lahko odpravimo n napak z $(2n + 1)$ -kratnim ponavljanjem in uporabo večinskega pravila. Toda ta metoda je preveč potratna. V času, ko si želimo hitrega prenosa čim večje količine podatkov, je takšno napihovanje večinoma nesprejemljivo. Namesto tega si želimo dodati manjše število kontrolnih bitov, ki pa naj bodo ravno tako, ali pa morda še bolj, učinkoviti.

Najpreprostejši primer Hammingove kode za odpravljanje napak predstavimo kar s pomočjo Presekovega znamenja (slika 1 na III. strani ovitka).

S Hammingovo kodo nam je uspelo zmanjšati število kontrolnih bitov z osem na tri, dobili smo torej kodo z *informacijsko stopnjo* $4/7$ name-

sto prejšnjih $4/12 = 1/3$. Opisano Hammingovo kodo lahko seveda posplošimo. Običajno to storimo z nekaj linearne algebre (glej [3]).

Hammingova koda odkrije, da je do napake pri prenosu prišlo tudi, kadar je prišlo do dveh napak, saj vsi trije krogi ne morejo vsebovati obeh polj, na katerih je prišlo do napake. Če pa na dveh mestih zaznamo, da simbola manjkata, da ju npr. ne moremo prebrati (angl. erasure), potem znamo ti dve mesti celo popraviti.

V grobem lahko rečemo, da je cilj teorije kodiranja najti primerno ravnovesje med skromno metodo nadzora z nekaj kontrolnimi biti in razsipno metodo s ponavljanji. Hammingova koda predstavlja prvi korak v to smer.

Reed-Salomonove kode

Po odkritju Hammingove kode je sledilo obdobje številnih poskusov s kodami za odpravljanje napak. Ko je bila teorija kod stara deset let, sta Irving Reed in Gustave Salomon (takrat zaposlena v Lincolnovem laboratoriju na MIT) namesto ničel in enic uporabila skupine bitov, ki jim tudi v računalništvu pravimo kar *besede*. Ta izbira je pripomogla k odpravljanju t.i. grozdnih napak, pri katerih se pokvari več zaporednih bitov. Če delamo npr. s skupinami, sestavljenimi iz osmih bitov, potem celo devet zaporednih napak lahko pokvari največ dve besedi. Reed-Salomonova koda (na kratko RS-koda) za odpravljanje dveh napak torej predstavlja že precej dobro zaščito.

Naj bo $(a_0, a_1, \dots, a_{10})$, $a_i \in \mathbb{Z}_{13}$, sporočilo, ki ga želimo prenesti. Nadomestimo ga s 13-terico $(c_0, c_1, \dots, c_{10}, c_{11}, c_{12})$, tako da je $c_i = a_i$ za $i \in \{0, \dots, 10\}$, besedi $c_{11}, c_{12} \in \mathbb{Z}_{13}$ pa izračunamo iz enačb

$$c_0 + c_1 + \dots + c_{12} \bmod 13 = 0 \quad \text{in} \quad c_1 + 2c_2 + \dots + 12c_{12} \bmod 13 = 0 \quad (1)$$

in pošljemo. Predpostavimo, da smo prejeli zaporedje $(r_0, r_1, \dots, r_{10}, r_{11}, r_{12})$, pri čemer je prišlo kvečjemu do ene napake. Če je do napake prišlo pri prenosu besede c_i , potem velja $r_j = c_j$ za vse $j \in \{0, 1, \dots, 12\} \setminus \{i\}$ in $r_i = c_i + e$ za neki $e \in \{1, \dots, 12\}$. Iz $e = r_0 + r_1 + \dots + r_{12} \bmod 13 \neq 0$ ugotovimo, da je prišlo do napake. Nato pa iz $r_1 + 2r_2 + \dots + 12r_{12} \equiv \equiv ie \pmod{13}$ z deljenjem z e izračunamo še i , ki nam pove, na katerem mestu moramo odšteti e , da odpravimo napako. Prišli smo do [13,11]-kode z informacijsko stopnjo 11/13, ki zna popraviti eno napačno besedo.

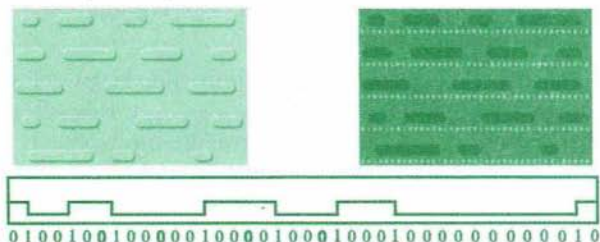
Primer. Naj bo $a = (1, 3, 8, 2, 7, 0, 1, 9, 11, 4, 12)$. Potem iz (1) dobimo $6 + c_{11} + c_{12} = 0 \bmod 13$ in $2 - 2c_{11} - c_{12} = 0 \bmod 13$ oziroma $c_{11} = 8 \bmod 13$ in $c_{12} = 12 \bmod 13$, torej je $c = (1, 3, 8, 2, 7, 0, 1, 9, 11, 4, 12, 8, 12)$.

Recimo, da smo dobili $r = (1, 3, 8, 2, 1, 0, 1, 9, 11, 4, 12, 8, 12)$. Iz $r_0 + r_1 + \dots + r_{12} = 7$ zaključimo, da je $e = 7$, nato pa iz $r_1 + 2r_2 + \dots + 12r_{12} = 2$ še $2/7 \equiv 4 \pmod{13}$. Slednje deljenje smo seveda izvedli v končnem obsegu (glej [2]). Pravzaprav moramo številu 2 v števcu prišteti 13, vse dokler se deljenje ne izide. Torej, ker $2+13=15$ še ni deljivo s 7, poskusimo z $2+13+13=28$ in dobimo 4, kar pomeni, da je potrebno na mestu z indeksom 4 odšteti napako 7.

Reed-Salomonove kode lahko obravnavamo veliko bolj splošno in pridemo tudi do tistih, ki odpravljajo dve in več napak. Vendar pa za to potrebujemo še več matematičnega znanja, ki presega naš okvir, pa tudi računanje v praštevilskem obsegu $\mathbb{Z}_p$ je potrebno nadomestiti z računanjem v končnem obsegu $\text{GF}(2^n)$. Poleg zgoščenek se RS-kode uporabljajo tudi v telekomunikacijah. Ena izmed najpomembnejših uporab je bila kodiranje digitalnih slik, ki sta nam jih na Zemljo pošiljala vesoljski sondi Voyager 1 in 2 (glej slike na IV. strani ovitka).

Zgoščenke – CD

Zapisovanje glasbe na CD-je je prevzelo ljubitelje glasbe tako rekoč čez noč. Visoko kvaliteto predvajanja zvoka je poleg laserske tehnike v veliki meri pripisati kodam za odpravljanje napak. Oglejmo si način zapisa CD nekoliko pobližje (slika 3).



Slika 3. CD ima premer 12 cm in debelino 1,2 mm, izdelan pa je iz prozorne plastike. Na popisanim CD-ju se nahaja spirala, ki se začne iz notranjosti in je sestavljena iz hribočkov in dolin. Branje poteka z laserjem (žarek ima premer $1 \mu\text{m}$), ki zazna spremembo višine spirale (preko jakosti svetlobe, ki se odbije od diska, odboj svetlobe je ali svetlejši ali temnejši, saj je razlika v višini približno $1/4$ valovne dolžine svetlobe v disku). Na ta način dobimo dvojisko zaporedje, vsaka sprememba ustreza številu 1, odsotnost spremembe višine pa ustreza številu 0.

1. Proces razdelimo na faze: digitalno/analogni konverter, kode in modulacija (slika 4).
2. Pri kodiranju bomo na bajte gledali kot na elemente iz obsega $\text{GF}(2^8)$, glej [2]. V stereotehniki posnamemo štiri bajte na vsak "tik", ki pomeni $1/44.100$ -ti del sekunde. Meritev šestih zaporednih tikov združimo v

sporočilo dolžine 24 bajtov, ki ga v dveh korakih zakodiramo v 32 bajtov. Najprej uporabimo [28,24]-RS kodo, ki zna popraviti dve napaki, in nato še [32,28]-RS kodo, ki tudi zna popraviti dve napaki. Tem 32-im bajtom dodamo še 33. bajt, ki je števec pesmi. Le-tega običajno vidimo na zaslonu predvajalnika.

3. Do sedaj so bili vsi omenjeni bajti bodisi nosilci informacije bodisi so bili dodani kot kontrola za odkrivanje in popravljanje napak. Z besedami smo računali za potrebe kodiranja, sedaj pa se zaradi fizikalnih lastnosti materialov spustimo na nivo bitov. Potrebno je paziti, da zaporedne enice niso ne preveč blizu (med njima morata biti vsaj dve ničli) in ne preveč narazen (med njima je lahko največ deset ničel). RS-kode seveda nimajo takih lastnosti, vendar pa ima to lastnost natanko 267 dvojiških besed dolžine 14 (preverjeno z računalnikom). Zato preslikamo 256 elementov končnega obsega s pomočjo dobro izbrane tabele v 256 besed, preostalih 11 besed pa zavržemo. Ta postopek se imenuje EFM (angl. eight to fourteen modulation). Da pa bi zgoraj omenjena lastnost veljala tudi med besedami dolžine 14, mednje postavimo še tri dodatne bite (ničle ali enice; pri tem pazimo še, da sta števili doslej prebranih ničel in enic čim bolj skupaj) in dobimo kodne besede dolžine $33 \cdot 17 = 561$ bitov. Končno, da zabeležimo začetek novega niza, priključimo vsaki kodni besedi še 27 sinhronizacijskih bitov, ki imajo zgornjo lastnost in so izbrani tako, da nikakor ne morejo sestavljati kodirnega podzaporedja. Ena sekunda glasbe se torej pretvori v $(561+27) \cdot 44.100/6 = 4.321.800$ bitov glasbe na spirali.



Slika 4. Med snemanjem izmerimo glasbo 44.100-krat na sekundo, po enkrat na levi in enkrat na desni. Amplitudo zvoka opiše naravno število med 0 in $2^{16} - 1$, ki ga predstavlja v dvojiškem sistemu 16 bitov. Ker gre za stereo glasbo, dobimo pri vsaki meritvi 32 bitov (t. i. audio-bit) oziroma štiri bajte podatkov.

Pri branju zgoščenke se lahko pojavi tudi čez 100.000 napak. Le-te lahko povzročajo nezaželeni delci, mikroskopski mehurčki v plastiki, prstni od-tisi, praske ali celo manjše luknje v CD-ju. Za primerjavo vzemimo knjigo z 200 stranmi, izpisano v pisavi, ki dopušča 3000 znakov na stran. Recimo, da je tiskalnik le 99,9% zanesljiv. V povprečju lahko torej pričakujemo do tri napake na stran. Vrnimo se k CD-jem. Če bi bila verjetnost, da predvajalnik prebere napačen bit, enaka 10^{-4} , bi še vedno imeli na stotine napak vsako sekundo. Kvaliteto zvoka seveda izboljšajo kode. Napake se običajno pojavijo v gručah (t. i. grozdne napake). Da zmanjšamo njihov vpliv, je kodiranje narejeno v dveh korakih. Pri tem druga koda kot vhod

uporabi nekoliko prepleten izhod prve kode, tako da bajti, ki so sosednji v kodnih besedah (glasbi), niso sosednji tudi na disku. Kodirna shema za CD-je se imenuje CIRC (Cross-Interleaved Reed-Salomon Scheme Code) in pravilno odpravi vse grozdne napake do dolžine 8.871 bitov, kar ustreza približno 2,5 mm spirale na CD-ju.

V članku smo si ogledali le nekaj najbolj osnovnih vidikov kodirnega procesa, praksa pa je seveda še nekoliko bolj zapletena reč.

Aleksandar Jurišić

Viri in dodatno branje

- [1] B. Cipra, *The Ubiquitous Reed-Solomon Codes*, SIAM News **26**/1 (1993) (<http://www.siam.org/siamnews/mtc/mtc193.htm>).
- [2] A. Jurišić, *Računala nove dobe*, 2. del, Presek **30** (2002–03), str. 291–296.
- [3] S. Klavžar, *O teoriji kodiranja, linearnih kodah in slikah z Marsa*, Obzornik mat. fiz. **45** (1998) 4, str. 97–106.
- [4] Več avtorjev, *For all practical purposes: introduction to contemporary mathematics*, 5. izdaja, New York, W. H. Freeman, 2000.

KRIŽANKA “GEOMETRIJSKA TELESA” – Rešitev s str. 352

				ČRKA, POSEBNA TELESA	OSRED POSRE POSRE POSRE	POSRE POSRE POSRE POSRE	POSRE POSRE POSRE POSRE	POSRE POSRE POSRE POSRE	POSRE POSRE POSRE POSRE	POSRE POSRE POSRE POSRE		
				O	P	E	K	L	I	N		
				I	K	Z	A	E	D	E		
				V	O	Z	O	V	N	I		
				A	P	A	Č	A	P	O		
				S	T							
				A	R	L	I	N	G	T		
				L	A	J	N	A	A	K		
				I	M	O	S	E	L			
				B	I	Č	S	A	I	D		
				O	D	A	L	I	S	K		
				R	A	D	O	S	T			
				D	A	R	E					
				E	O	L						
				K	R	O	G	L	A			
				P	R	I	Z	M	A			
				A	N	I	O	N				
				J	E	L	S	A				
				S	O	K	R	A	T			
				S	A	A	R					

KAKO HITRO SE GIBLJEJO ZRAČNE MOLEKULE?

Pline sestavljajo molekule, ki se medsebojno zelo slabo privlačijo. Gibljejo se po prostoru, ki jim je na voljo, ter trkajo med seboj in v okoliške predmete. Najpomembnejši in najbolj znan plin je zrak. Je zmes okrog 80 % dušika (N_2), okrog 20 % kisika (O_2) in manjših količin drugih sestavin, kot so argon, ogljikov dioksid, vodna para in druge.

S kolikšno hitrostjo se gibljejo molekule v plinih?

Odgovor na to vprašanje ni preprost. Tu bomo navedli le nekaj osnovnih rezultatov, povezanih s hitrostjo molekul v plinu.

Zavedati se moramo, da gre za izredno veliko število molekul. Pri sobni temperaturi in običajnem zračnem tlaku je v enem kubičnem centimetru zraka $19,6 \cdot 10^{18}$ molekul dušika in $4,9 \cdot 10^{18}$ kisika, to je 19 600 000 000 000 000 molekul dušika in 4 900 000 000 000 000 molekul kisika.

Vse te molekule se nenehno neorganizirano gibljejo in se med seboj zaletavajo. Ne le število molekul, tudi število trkov je ogromno. Vsako sekundo pride v enem kubičnem centimetru približno do milijarde trkov med molekulami. K temu moramo dodati še trke molekul s sosednjimi predmeti. Ob trkih molekule spremene smer in hitrost gibanja. Zato imajo različne molekule v plinu različne hitrosti, pa tudi posamezni molekuli se hitrost stalno spreminja, in to sunkoma v trenutku trka.

Ali torej sploh lahko odgovorimo na zastavljeno vprašanje?

Izhod iz težav je našel James Clerk Maxwell (1831–1879)¹. Leta 1850, torej pred več kot 150 leti, je oblikoval zakon, ki opisuje porazdelitev molekul v plinu (in ki danes nosi njegovo ime).

Ker se molekule v plinu gibljejo kaotično in je njihovo število ogromno, lahko njihovo gibanje opišemo le z uporabo verjetnostnega računa. Ne zanima nas hitrost posamične molekule (tega podatka eksperimentalno tudi ne moremo določiti), pač pa, povprečno kolikšen del molekul ima določeno hitrost.

Maxwell je izpeljal formulo (1), ki jo poznamo pod imenom *Maxwellova porazdelitev molekul po velikosti hitrosti (v idealnem plinu)*. Če

¹ Maxwell je veliko prispeval k razvoju fizike in fizikalne kemije. Najpomembnejše so njegove štiri enačbe (Maxwellove enačbe), ki predstavljajo osnovne zakone elektromagnetizma. Prvi je ugotovil, da je svetloba elektromagnetno valovanje.

s $P(v)$ označimo v procentih, od skupnega števila molekul, izraženi del molekul, katerih hitrost leži na intervalu $(v - \Delta v, v + \Delta v)$, velja

$$P(v) = 8\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \Delta v \cdot 100. \quad (1)$$

Pri tem smo uporabili naslednje oznake:

- v in Δv sta hitrosti, izraženi v metrih na sekundo;
- M je relativna molekulska masa, izražena v kilogramih na mol (za dušik N_2 je $M = 28,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$);
- $R = 8,314 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ je plinska konstanta;
- T je temperatura, izražena s kelvini ($T = 298 \text{ K}$ ustreza sobni temperaturi);
- $e = 2,718 \dots$ je osnova naravnega logaritma.

Formula (1) velja pri relativno majhnih Δv .

Formulo bomo nekoliko poenostavili in jo uporabili za molekule dušika v zraku pri sobni temperaturi. Če vzamemo za enoto hitrosti 1000 km/h in $\Delta v = 100 \text{ km/h}$ (kot bomo videli, je to v svetu molekul zelo majhna hitrost), potem je

$$P(v) = 13v^2 e^{-0,44v^2}. \quad (2)$$

Z žepnim računalom lahko izračunamo približne vrednosti za $P(v)$. Tabela 1 prikazuje nekaj značilnih vrednosti.

Iz tabele razberemo, da ima le malo molekul (manj kot 0,1 %) hitrost manjšo od 100 km/h . Z naraščanjem hitrosti se število molekul, ki se gibljejo z opazovano hitrostjo, najprej veča. Največ molekul ima hitrost $1500 \pm 100 \text{ km/h}$ oziroma hitrost med 1400 km/h in 1600 km/h . Z nadaljnim večanjem hitrosti količina $P(v)$ pada proti nič. Natančnejši izračuni pokažejo, da je najverjetnejša hitrost molekul dušika pri sobni temperaturi enaka 1514 km/h , medtem ko je njihova povprečna hitrost 1709 km/h .

v	v v formuli (2)	$P(v)$
100 km/h	0,1	0,1 %
200 km/h	0,2	0,5 %
300 km/h	0,3	1,1 %
400 km/h	0,4	1,9 %
500 km/h	0,5	2,9 %
600 km/h	0,6	4,0 %
800 km/h	0,8	6,3 %
1000 km/h	1,0	8,4 %
1400 km/h	1,4	10,8 %
1500 km/h	1,5	10,9 %
1600 km/h	1,6	10,8 %
1700 km/h	1,7	10,5 %
2000 km/h	2,0	8,9 %
2500 km/h	2,5	5,2 %
3000 km/h	3,0	2,2 %
4000 km/h	4,0	0,2 %
5000 km/h	5,0	0,005 %

Tabela 1.

Iz Maxwellovega zakona sledi, da imajo lahko molekule v plinu (npr. v zraku) kakršnokoli hitrost, je pa verjetnost različnih hitrosti različna. Malo verjetno je, da se molekula 'plazi' s hitrostjo, ki je manjša kot 100 km/h, zato je takih molekul v plinu razmeroma malo. Prav tako ni zelo verjetno, da bi dobila molekula hitrost, večjo od 4000 km/h, zato je tudi tako hitrih molekul razmeroma malo (vendar izraz 'razmeroma malo' pomeni, da je v kubičnem centimetru zraka okoli 1 000 000 000 000 000 molekul dušika in še okoli 200 000 000 000 000 molekul kisika s hitrostjo pod 100 km/h ter približno enako število molekul, ki se gibljejo s hitrostjo, večjo od 4000 km/h.

Posebej poudarimo, da se molekule v plinu gibljejo presenetljivo hitro. Za primerjavo povejmo, da je hitrost modernih potniških letal okoli 900 km/h in vojnih do 3000 km/h. Hitrost zvoka je približno 1200 km/h, hitrost izstrelka iz puške preko 2800 km/h. Približno takšne so tudi hitrosti molekul v zraku. S takšno hitrostjo molekule trkajo v predmete v okolici, pa tudi na našo kožo. Vse življenje je naše telo izpostavljeno divjemu bombardiranju zračnih molekul. Tega niti ne opazimo niti nam ne pušča kakšnih škodljivih posledic.

Iz Maxwellovega zakona sledi, da je hitrost molekul v plinu odvisna od temperature plina T in od molekulske mase. Maso posamezne molekule izračunamo tako, da relativno molekulsko maso M delimo z Avogadrovim številom $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Masa ene molekule dušika je npr. enaka $4,67 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

Najverjetnejšo hitrost molekul podaja formula

$$v_{\text{najverjetnejša}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Njena vrednost se rahlo razlikuje od povprečne hitrosti molekul

$$v_{\text{srednja}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1,13 v_{\text{najverjetnejša}}.$$

Povprečna kinetična energija molekule v plinu je enaka

$$E_{\text{kinetična}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{RT}{N_A},$$

ki, presenetljivo, ni odvisna od mase molekule.

Ivan Gutman, Branislav Čabrić, Nenad Stevanović
prevod Marija Vencelj

24. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Naloge jesenskega kroga

Zapoznelo smo prejeli seznam dobitnikov priznanj za pretekla tri leta.

Za leto 1999/2000: Aleksandra Franc (Celje), Barbara Grobelnik (Celje), Matjaž Urlep (Celje), Bor Harej (Ljubljana), Sašo Jelenčič (Ljubljana), Martin Lukan (Ljubljana), Irena Majcen (Ljubljana), Mojca Miklavc (Ljubljana), Matija Perne (Ljubljana), Klemen Šivic (Ljubljana).

Za leto 2000/2001: Janez Šter (Ljubljana), Matija Perne (Ljubljana), Klemen Šivic (Ljubljana), Mojca Miklavc (Ljubljana), Andrej Košmrlj (Ljubljana), Jurij Kodre (Ljubljana), Bor Harej (Ljubljana), Rafael Hofman (Maribor), Žiga Novšak (Celje).

Za leto 2001/2002: Mitja Trampuš (Ljubljana), Janez Šter (Ljubljana), Klemen Šivic (Ljubljana), Jurij Kodre (Ljubljana), Žiga Novšak (Celje), Aleksandra Franc (Celje).

Prva skupina (prvi del)

1. V konveksnem večkotniku z 2002 ogliščema izberemo nekaj diagonal, ki se ne sekajo v notranjosti in ki večkotnik razrežejo na 2000 trikotnikov. Ali je možno, da ima natanko 1000 dobljenih trikotnikov diagonale za vse tri svoje stranice? (4 točke)
2. Janez in Marija sta si zamislila vsak svoje naravno število in ga prišepnila Bojanu. Bojan je na en listič zapisal vsoto teh števil, na drug listič pa njun produkt. Nato je enega od lističev skril, drugega, na katerem je bilo zapisano število 2002, pa je pokazal Janezu in Mariji. Ko je Janez videl listič, je izjavil, da ne more ugotoviti Marijinega števila. Ko je Marija slišala Janeza, je tudi ona ugotovila, da ne more odkriti Janezovega števila. Katero število si je zamislila Marija? (5 točk)
3.
 - a) V šoli so učenci opravljali izpit. Vsaj dve tretjini nalog sta bili težki, kar pomeni, da vsaj dve tretjini učencev nista rešili teh nalog. Poleg tega vemo, da je vsaj dve tretjini učencev uspešno opravilo izpit, kar pomeni, da so rešili vsaj dve tretjini izpitnih nalog. Ali so opisani rezultati mogoči? (1 točka)
 - b) Ali bi bil odgovor na vprašanje pod točko a) enak, če bi 'dve tretjini' povsod nadomestili s 'treimi četrtinami'? (2 točki)
 - c) Ali bi bil odgovor na vprašanje pod točko a) enak, če bi 'dve tretjini' povsod nadomestili s 'sedmimi desetninami'? (2 točki)

4. Na mizi ležita 2002 kartončka s številkami od 1 do 2002. Igralca izmenično pobirata z mize po en kartonček, dokler ne izpraznita cele mize. Na koncu seštejeta vrednosti, zapisane na svojih kartončkih. Zmaga igralec, ki ima v svoji vsoti večjo zadnjo številko. Ugotovi, kateri od igralcev lahko vedno zmaga, in opiši zmagovito strategijo. (5 točk)
5. Dana sta kot in točka A v njegovi notranjosti. Skozi točko A potegnemo tri premice, ki niso vzporedne krakoma kota. Označimo zapored z E, G in B presečišča premic z enim krakom kota ter s H, P in K presečišča teh premic z drugim krakom kota. Denimo, da točki G in P ležita na daljicah EB oziroma HK . Ali je možno, da sta točki G in P hkrati razpolovišči daljic EB oziroma HK ? (5 točk)

Druga skupina (prvi del)

1. Glej 2. nalogo za prvo skupino.
2. Glej 3. nalogo za prvo skupino.
3. S paroma nevzporednimi premicami $p_1, p_2, \dots, p_n$ razrežemo ravnino. Točko A si izberemo v notranjosti enega izmed dobljenih kosov ravnine. Označimo z B_k tisti breg premice p_k , ki ne vsebuje točke A . Dokaži, da točka, ki je vsebovana v vseh množicah $B_1, B_2, \dots, B_n$, obstaja natanko tedaj, ko je kos, ki vsebuje točko A , neomejen. (5 točk)
4. Naj bodo $x, y, z \in (0, \pi/2)$. Dokaži neenačbo

$$\frac{x \cos x + y \cos y + z \cos z}{x + y + z} \leq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}. \quad (5 \text{ točk})$$

5. Dano je neskončno zaporedje naravnih števil n_k , za katero velja: Člen n_{k+1} dobimo, če členu n_k prištejemo eno izmed njegovih neničelnih števk. Dokaži, da se v danem zaporedju pojavi vsaj eno sodo število. (5 točk)

Prva skupina (drugi del – izbrane naloge)

5. Konveksni n -kotnik je z diagonalami, ki se ne sekajo v notranjosti, razdeljen na trikotnike. Dobljeni trikotniki so pobarvani s črno in belo barvo tako, da sta poljubna trikotnika s skupno stranico različne barve. Za vsako naravno število $n \geq 3$ določi največjo možno razliko med številom belih in črnih trikotnikov. (7 točk)
6. Na mizi leži veliko kartončkov. Na vsakem od kartončkov je napisano eno izmed števil $1, 2, \dots, n$. Vemo, da je vsota vseh števil s kartončkov enaka $k \cdot n!$ za neko naravno število k . Dokaži, da lahko kartončke razdelimo na k kupov tako, da je vsota števil s kartončkov z vsakega izmed kupov enaka $n!$. (9 točk)

7. a) Električna napeljava ima obliko kvadratne mreže razsežnosti 3×3 . Omrežje ima tako 16 vozlišč, ki so medsebojno povezana z žicami na straneh kvadratov. V enem merjenju lahko preverimo, če sta dve izbrani vozlišči 'v stiku', kar pomeni, da električni tok lahko po žicah, ki so nepoškodovane, steče od enega do drugega vozlišča. Določi najmanjše število meritev, s katerim se lahko prepričamo, da sta poljubni dve vozlišči 'v stiku'. (5 točk)
- b) Enako vprašanje kot v točki a) za primer mreže razsežnosti 5×5 in s 36 vozlišči. (5 točk)

Druga skupina (drugi del – izbrane naloge)

5. Dani sta krožnici k_1 in k_2 , ki se sekata v točkah A in B . Skozi točko B narišemo premico, ki krožnico k_1 poleg B seka še v točki K in krožnico k_2 še v točki M . Premica l_1 je tangenta na krožnico k_1 , vzporedna daljici AM , in se k_1 dotika v točki Q . Premica skozi točki A in Q seka krožnico k_2 poleg A še v točki R , premica l_2 pa je tangenta na k_2 z dotikališčem R . Dokaži:
- a) Premica l_2 je vzporedna daljici AK . (4 točke)
- b) Premice l_1 , l_2 in KM se sekajo v skupni točki. (4 točke)
6. Dano je neskončno zaporedje naravnih števil z začetnima členoma 1 in 2. Za nadaljnje člene velja: Vsak od njih je najmanjše naravno število, ki se v zaporedju še ni pojavilo in ni tuje svojemu predhodnemu členu. Dokaži, da se vsa naravna števila pojavijo v danem zaporedju. (8 točk)

Gregor Cigler

24. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Rešitve nalog jesenskega kroga s str. 370

Prva skupina (prvi del)

1. Vsaka stranica večkotnika je stranica v vsaj enem izmed dobljenih 2000 trikotnikov. Ker vsak izmed teh trikotnikov vsebuje kvečjemu dve stranici večkotnika, ima vsaj 1001 trikotnik kako stranico skupno z danim večkotnikom, kar pomeni, da imamo kvečjemu 999 trikotnikov, katerih vse stranice so diagonale.

2. Ker Janez ni mogel ugotoviti Marijinega števila, si je zamislil enega od deliteljev števila 2002. V nasprotnem primeru bi namreč vedel, da je na listku, ki jima ga je pokazal Bojan, vsota števil, iz katere bi zlahka ugotovil Marijino število. Poleg tega si Janez ni zamislil števila 2002, saj bi v nasprotnem primeru vedel, da je na listku produkt in Marijino število enako 1. Torej je Janezovo število največ 1001. Enako kot za Janezovo število seveda velja tudi za Marijino število. Denimo, da je Marijino število manjše od 1001. V tem primeru bi Marija iz Janezovega odgovora lahko sklepala, da na Bojanovem listku ni vsota, in od tod ugotovila Janezovo število. Torej si je Marija zamislila število 1001.
3. (a) Opisana situacija je možna. Imejmo tri učence in tri naloge ter predpostavimo, da je prvi učenec rešil prvo in tretjo nalogo ne pa druge naloge, drugi učenec je rešil prvo in drugo nalogo, ne pa tudi tretje naloge, zadnji učenec pa je rešil le prvo nalogo. Tedaj sta bili druga in tretja naloga težki, izpit pa sta opravila prva dva učenca.
- (b) Tvorimo množico vseh možnih urejenih parov (učenec, naloga). Rečemo, da je izbrani par pozitiven, če je učenec rešil nalogo v izbranem paru. Če je vsaj tri četrtnine učencev rešilo vsaj tri četrtnine nalog, je vsaj $\frac{9}{16}$ parov pozitivnih. Po drugi strani pa iz dejstva, da vsaj treh četrtnin nalog ni rešilo vsaj tri četrtnine učencev, sledi, da imamo vsaj $\frac{9}{16}$ negativnih parov. Ker je $\frac{9}{16} + \frac{9}{16} > 1$, opisana situacija ni možna.
- (c) Naj bo g delež učencev, ki so rešili vsaj $\frac{7}{10}$ nalog, in h delež nalog, ki jih ni rešilo vsaj $\frac{7}{10}$ učencev. Par takega učenca in take naloge imenujmo poseben par. Poleg tega ohranimo tudi klasifikacijo parov, ki smo jo opisali v točki (b). Tedaj je delež posebnih pozitivnih parov vsaj $g(\frac{7}{10} - (1 - h))$ in delež negativnih posebnih parov vsaj $h(\frac{7}{10} - (1 - g))$. Od tod sledi

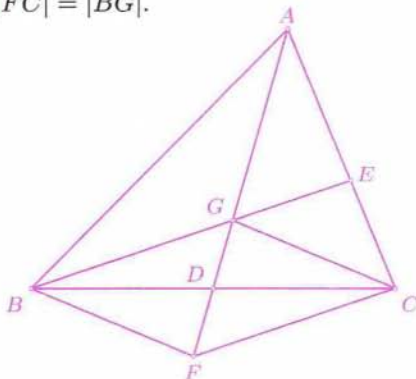
$$gh \geq g(h - \frac{3}{10}) + h(g - \frac{3}{10})$$

oz. ekvivalentno

$$9 \geq (10g - 3)(10h - 3).$$

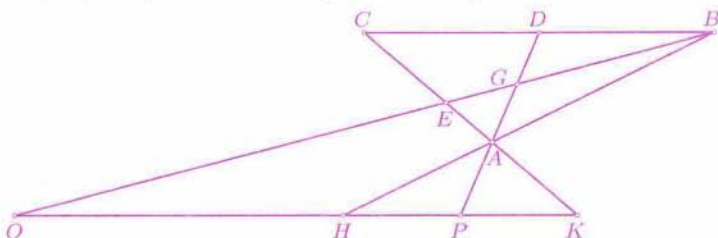
Če je $g, h \geq \frac{7}{10}$, dobimo $9 \geq 16$, zato tudi v tem primeru opisana situacija ni mogoča.

4. Jasno je, da lahko oznake na katrončkih nadomestimo z njihovimi zadnjimi števki. Nabor desetih kartončkov z različnimi oznakami imenujmo *snopič*. Vsota oznak na snopiču se končuje z 0. Tedaj imamo 200 snopičev in dva kartončka z oznakama 1 in 2. Opišimo strategijo, po kateri lahko vedno zmagata prvi igralec. Najprej naj s kupa vzame kartonček z oznako 2, zatem pa s kupa jemlje karte z enako oznako, kot jo je v prejšnji potezi potegnil drugi igralec. Tega ne more storiti, če drugi igralec s kupa potegne zadnjo karto z oznako 1. Če je na mizi ostal še kak kartonček, prvi igralec izbere poljubno karto z oznako a in nato znova ponavlja poteze drugega igralca, dokler drugi ne vzame kartončka z oznako a . Potem prvi ponavlja ta postopek. Ko se igra konča, je prvi igralec z mize pobral 100 snopičev in kartonček z oznako 2, kar pomeni, da je zadnja številka vsote njegovih kartončkov enaka 2, medtem ko je zadnja številka vsota kartončkov drugega enaka 1.
5. Naj bo G neka točka na težiščnici AD trikotnika ABC . Denimo, da premica BG seka stranico AC v točki E . Dokažimo, da je tedaj $|BG| > |GE|$. Na premici AD izberimo točko $F \neq G$ z lastnostjo $|GD| = |DF|$. Ker se diagonali štirikotnika $BFCG$ razpolavljata, je $BFCG$ paralelogram, zato sta daljici GE in FC vzporedni. Od tod sledi, da sta trikotnika AGE in AFC podobna. Ker je $|AG| < |AF|$, velja $|GE| < |FC| = |BG|$.



Naj bo A točka v notranjosti kota z vrhom v točki O . Izberimo premice skozi točko A in označimo njihova presečišča s prvim krakom kota zapored s H , P in K , presečišča z drugim krakom pa z B , G in E , kot prikazuje slika. Denimo, da je P razpolovišče daljice HK . Skozi točko B potegnemo premico p , vzporedno kraku OK , in označimo s C in D zapored presečišči premic KE in PG s premico p . Imamo dva para podobnih trikotnikov: BAD in HAP ter CAD in KAP .

Od tod dobimo $\frac{|BD|}{|HP|} = \frac{|AD|}{|AP|} = \frac{|CD|}{|KP|}$. Ker je $|HP| = |KP|$, velja $|BD| = |CD|$. Imamo situacijo kot zgoraj pri enakih oznakah. Ker je $|BG| > |GE|$, točka G ni razpolovišče daljice BE .



Druga skupina (prvi del)

1. Glej rešitev 2. naloge za prvo skupino.
2. Glej rešitev 3. naloge za prvo skupino.
3. Točka A leži v neomejeni komponenti razrezane ravnine natanko tedaj, ko obstaja poltrak z začetkom v A , ki ne seka nobene izmed premic. Privzemimo, da poltrak ni vzporeden nobeni izmed premic, ker lahko izbrani poltrak malo zasukamo okrog A . Zadnje je seveda ekvivalentno temu, da 'komplementarni' poltrak $\bar{s}$ iz A seka vsako izmed premic. To je ekvivalentno obstoju daljice $AB \subset \bar{s}$, ki seka vse premice, kar pomeni natanko to, da leži točka B na nasprotnem bregu premice p_k kot točka A pri poljubnem k .
4. Predpostavimo lahko, da je $x \leq y \leq z$. Ker je funkcija $\cos$ padajoča na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, velja $\cos x \geq \cos y \geq \cos z$. Ni se težko prepričati, da tedaj velja

$$z \cos x + x \cos y + y \cos z \geq x \cos x + y \cos y + z \cos z,$$

$$y \cos x + z \cos y + x \cos z \geq x \cos x + y \cos y + z \cos z$$

ter očitno

$$x \cos x + y \cos y + z \cos z \geq x \cos x + y \cos y + z \cos z.$$

Če enačbe seštejemo, dobimo željeni rezultat.

5. Denimo, da so vsi členi n_k liha števila. Tedaj ima n_1 sodo števko, ki ni na zadnjem mestu. Naj bo k prva soda števka v n_1 , ki se nahaja na l -tem mestu gledano z leve. Ker zaporedje narašča, obstaja najmanjši tak $m > 1$, da je l -ta števka v n_m enaka $k + 1$. Števke pred njo so tedaj enake kot v n_1 , števke za njo pa enake 0, razen zadnje, ki je liho število. Od tod sledi, da je n_{m+1} sodo število. Protislovje!

Prva skupina (drugi del)

5. Konstruirajmo graf G , katerega vozlišča predstavljajo dobljene trikotnike. Dve vozlišči sta povezani, če imata ustrezna trikotnika skupno stranico. Tedaj je stopnja poljubnega vozlišča kvečjemu 3. Če bi se v grafu pojavil cikel z začetkom in koncem v trikotniku T , bi ta cikel trikotnik T 'zapustil' in se 'vrnil' k trikotniku T v isti stranici, zato bi bil drugi in zadnji člen tega cikla isti trikotnik, kar seveda ni mogoče, če privzamemo, da so členi cikla različni. To pomeni, da je graf G drevo, ki ima črno in belo pobarvana vozlišča, pri čemer sta sosednji vozlišči različne barve. Privzamemo seveda lahko, da je črnih vozlišč vsaj toliko kot belih. Naj bo $f(n)$ iskana največja razlika med številom črnih in belih vozlišč. Tedaj je $f(3) = 1$, $f(4) = 0$ in $f(5) = 1$. Dokazimo, da je $f(3k) = k$, $f(3k + 1) = k - 1$ in $f(3k + 2) = k$. Predpostavimo, da trditev velja za večkotnike s kvečjemu N oglišči in, da v vsakem od optimalnih primerov, kjer razlika zavzame vrednost $f(N)$, v grafu obstaja črno vozlišče stopnje 1. Z A označimo graf, ki ima eno belo vozlišče stopnje 2 in dve črni vozlišči, povezani le z belim vozliščem. Tedaj lahko k vsakemu od optimalnih primerov dodamo graf A tako, da prejšnjemu grafu v prosto črno vozlišče prilepimo črno vozlišče grafa A . Dobljeni graf je mogoče realizirati tudi v $(N + 3)$ -kotniku. K črnemu trikotniku, ki leži na robu N -kotnika in ustreza črnemu vozlišču stopnje 1, vzdolž 'zunanje' stranice prilepimo beli trikotnik, ki ima na preostalih dveh stranicah prilepljena dva črna trikotnika. Če so dodani trikotniki 'dovolj topokotni', je tako dobljeni večkotnik spet konveksen, njemu ustrežajoči graf pa ima znova črno vozlišče stopnje 1. Ker smo dodali dve črni in eno belo vozlišče, se je razlika med črnimi in belimi vozlišči povečala za 1. Iz dokazanega sledi, da je $f(3k) \geq k$, $f(3k + 1) \geq k - 1$ in $f(3k + 2) \geq k$. Dokazati moramo še, da teh meja ne moremo preseči. Spet predpostavimo, da trditev velja za večkotnike s kvečjemu N oglišči. Naj bo G tisti graf, ki ustreza $(N + 1)$ -kotniku, kjer je razlika med črnimi in belimi vozlišči največja. Če najdemo dve črni vozlišči stopnje 1, ki sta povezani s skupnim belim vozliščem, lahko od grafa G 'odrežemo' trojček A in dobimo graf, ki ustreza $(N - 2)$ -kotniku. Za $(N - 2)$ -kotnik trditev velja, zato velja tudi za naš $(N + 1)$ -kotnik, v katerem se razlika poveča za natanko 1. Privzamemo torej lahko, da na vsako belo vozlišče pride kvečjemu eno črno vozlišče stopnje 1. Označimo število belih vozlišč z w in število črnih vozlišč z b . Tedaj je število črnih vozlišč stopnje 1 kvečjemu w . Ker imajo vsa vozlišča grafa stopnjo kvečjemu 3, je skupna stopnja belih vozlišč kvečjemu $3w$. Označimo število vozlišč

grafa G z n in privzemimo, da je $b = w + l$. Črnih vozlišč stopnje 1 je kvečjemu w , ostala pa imajo stopnjo vsaj 2, zato je skupna stopnja črnih vozlišč vsaj $b + (b - w) = b + l = n - w + l$. Dobimo

$$3w \geq n - w + l.$$

Ni se težko prepričati, da je $n = N - 2$.

1. Naj bo $n = 3k - 2$ ali $n = 3k$ in $l > k$. Dobimo $3w > 3k - 2 - w + k$, kar pomeni $4w > 4k - 2$, oz. $w > k - \frac{1}{2}$, torej je $w \geq k$. Tedaj je $b > w + k > 2k$, od koder sledi $n = b + w > 3k$. Protislovje!

2. Naj bo $n = 3k - 1$ in $l \geq k$. Dobimo $3w \geq 3k - 2 - w + k$, kar pomeni $4w \geq 4k - 2$, oz. $w \geq k - \frac{1}{2}$, torej je $w \geq k$. Tedaj je $b \geq w + k \geq 2k$, od koder sledi $n = b + w \geq 3k$. Protislovje!

6. Najprej dokažimo, da lahko iz nabora naravnih števil $a_1, a_2, \dots, a_n$ izberemo nekaj členov tako, da je njihova vsota deljiva z n . Označimo z $b_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$. Če je kako od števil b_m deljivo z n , smo trditev dokazali, sicer pa obstajata taka indeksa $i < j$, da sta b_i in b_j kongruentna po modulu n . Tedaj je razlika $b_j - b_i = a_{i+1} + \dots + a_j$ deljiva z n .

Trditev sedaj dokazujemo z indukcijo na n . Če je $n = 1$, ni kaj dokazovati. Naj bo torej $n > 1$. Najprej vsakega od kartončkov, označenih z n , damo v svojo kuverto, ki jo označimo z 1. Sedaj izbiramo nabore kvečjemu n kart tako, da je vsota oznak na kartončkih deljiva z n , torej oblike $t \cdot n$. Ker smo kartončke z oznako n že pobrali, je $t \leq n - 1$. Te nabore kartončkov spravljamo v kuverte, ki jih označujemo z ustreznim t . Na koncu smo z mize bodisi pobrali vse kartončke bodisi nam ostane $r < n$ kartončkov. Ker so vsote 'vsebin' vseh prejšnjih kuvert deljive z n , je tudi vsota preostalih r kartončkov na mizi oblike $t \cdot n$ in jih spravimo v kuverto z oznako t .

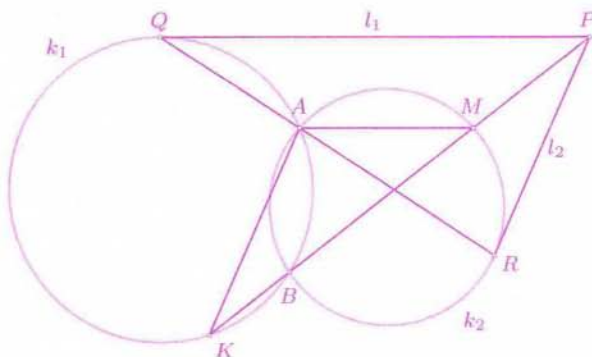
Nazadnje dobimo nabor kuvert z oznakami med 1 in $n - 1$, pri čemer je vsota oznak na kuvertah enaka $k \cdot (n - 1)!$. Po indukcijski predpostavki lahko te kuverte razdelimo na k kupov z vsoto $(n - 1)!$. Če kartončke iz kuvert enega kupa stresemo na skupni kup, bomo na ta način dobili željeno rešitev.

7. Naj bo $n = 2k$ in naj ima mreža n^2 vozlišč. Izberimo si poljubno vozlišče in opazujemo mrežo, v kateri to vozlišče ni povezano z natanko vsemi svojimi sosedi, vsa ostala vozlišča pa so med seboj povezana. Če tedaj v nobeno od naših meritev ne vključimo izbranega vozlišča,

ne opazimo napake. Vsako vozlišče mora biti tako vključeno v vsaj eni meritvi, zato moramo teh opraviti najmanj $n^2/2 = 2k^2$. Dokažimo, da toliko meritev tudi zadošča. Označimo z (i, j) vozlišče v i -ti vrstici in j -tem stolpcu dane mreže. Najprej za vsak $i = 1, 2, \dots, k$ preizkusimo stik med vozliščema (i, i) in $(k+i, k+i)$. Za tem za vsak par (i, j) , kjer je $i > j$, preizkusimo stik med vozliščema (i, j) in (j, i) . Na ta način smo opravili natanko $2k^2$ preizkusov. Pokažimo še, da so tedaj vsa vozlišča v stiku. Test v posebnem pokaže, da sta vozlišči $(1, 1)$ in $(k+1, k+1)$ povezani. Denimo, da tok priteče iz vozlišča $A_0 = (1, 1)$ v vozlišče $A_m = (k, k)$ tako, da se pojavi natanko v vozliščih $A_0, A_1, \dots, A_m$. Tedaj je množica $\{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ simetrična preko glavne diagonale dane mreže in objema vse točke oblike (i, i) , kjer je $i < k$. Ker sta točki (i, i) in $(k+i, k+i)$ v stiku, mora tok, ki steče med njima nujno sekati obroč iz vozlišč $A_0, A_1, \dots, A_m$. Od tod sledi, da so vsa vozlišča na diagonali v stiku. Ker tok, kot vemo, iz poljubnega izvendiodagonalnega vozlišča priteče v njemu simetrično vozlišče, nujno seka digonalo. Sledi, da so vsa vozlišča povezana.

Druga skupina (drugi del)

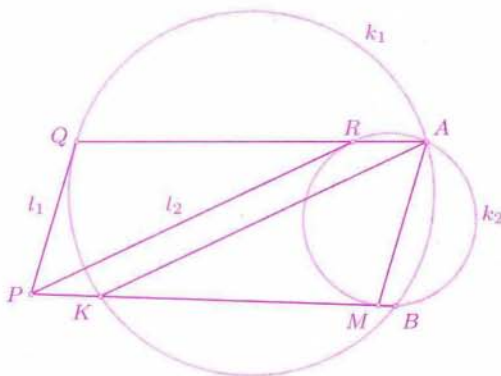
5. Označimo presek tangent l_1 in l_2 s P .



- (a) Po izreku o obodnem kotu velja $\sphericalangle RBM = \sphericalangle RAM$. Ker sta AM in QP vzporedni, je $\sphericalangle RAM = \sphericalangle RQP$. Premica QP je tangenta na k_1 , zato je $\sphericalangle RQP = \sphericalangle QBA$. Podobno ugotovimo, da je $\sphericalangle ARP = \sphericalangle ABR = \sphericalangle ABM + \sphericalangle RAM = \sphericalangle QBM$. Po izreku o obodnih kotih dobimo $\sphericalangle QAK = \sphericalangle QBK$, torej je $\sphericalangle QBM = 180^\circ - \sphericalangle QBK = 180^\circ - \sphericalangle QAK = \sphericalangle KAR$. Od tod sledi, da je $\sphericalangle ARP = \sphericalangle KAR$, zato sta premici AK in PR vzporedni.

- (b) Velja $\sphericalangle QPR + \sphericalangle QBR = \sphericalangle QBA + \sphericalangle RBA = \sphericalangle QPR + \sphericalangle AQP + \sphericalangle ARP = 180^\circ$, zato je štirikotnik $BQPR$ tetivni in je po točki (a) $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PRQ = \sphericalangle MBQ$. Od tod sledi, da točka P leži na premici BM .

Poleg konfiguracije, ki jo prikazuje gornja slika, je možna še konfiguracija, kjer točka M leži znotraj krožnice k_1 (glej sliko spodaj). Dokaz naloge v tem primeru prepustimo bralcu.



6. Pokažimo najprej, da obstaja praštevilo p , ki deli neskončno mnogo členov danega zaporedja. Kaj pa, če trdimo ravno nasprotno? Tedaj obstaja največji sodi člen zaporedja, ki ga označimo z N . V zaporedju najdemo število M , ki ni deljivo z nobenim praštevilom, manjšim od N . Če je q najmanjši prafaktor števila M , je naslednik člena M enak $2q > N$, kar je v protislovju s predpostavko, da je N največje sodo število v zaporedju. Naj bo torej p praštevilo, ki deli neskončno členov zaporedja in q praštevilo, različno od p . Za vsako naravno število n obstaja člen $L > pq^n$, ki je deljiv s p , in so členi, ki sledijo L , večji od pq^n . Naj bo a naslednik člena L . Če se število pq^n ne bi pojavilo v zaporedju pred L , bi bilo manjše od a . Ker pq^n in L nista tuja, dobimo protislovje. Torej se mora pq^n pojaviti pred L . Na ta način smo dokazali, da vsako praštevilo deli neskončno členov danega zaporedja.

Denimo sedaj, da je K najmanjše število, ki se ne pojavi v našem zaporedju. Naj bo q najmanjši prafaktor števila K . Tedaj obstaja tak člen P , deljiv s q , da se vsa števila $1, 2, \dots, K-1$ pojavijo v zaporedju pred P . Ker K in P nista tuji števili, je K naslednik člena P . Protislovje!

Gregor Cigler

**PRESEK — list za mlade matematike, fizike,
astronome in računalnikarje — 30. letnik,
leto 2002/03, številke 1–6, strani 1–384**

MATEMATIKA

Urejena lepota rastlin – Filotaksa in Fibonaccijeva števila (Marija Vencelj)	5-11
Tetraedri s ploščinsko enakimi mejnimi ploskvami (Ivan Vidav)	26-31
Koti v pravilnem petkotniku (Marko Razpet)	142-147
Sylvestrov izrek (Ivan Vidav)	200-205
Računala nove dobe, 1. del (Aleksandar Jurišić)	226-231
Glasba in matematika – 1. del, Tonski sistemi (Marija Vencelj)	267-272
Računala nove dobe, 2. del (Aleksandar Jurišić)	290-296
Glasba in matematika – 2. del, Temperirana uglasitev in prijemi pri kitari (Marija Vencelj)	324-331
Ti presneta sedmica! (Marko Razpet)	338-343
Trikotnik, kvadrati in krožnica (Nada Razpet)	347-351

FIZIKA

O gibanju dinosavrov (Janez Strnad)	12-15
Barometrično svetlikanje (Janez Strnad)	34-36
Kako stari so sandali? (Jože Pahor)	41-45
O Arhimedovi kroni (Janez Strnad)	134-137
Kotalno trenje (Andrej Likar)	152-154
Bine ugotavlja radioaktivnost (Jože Pahor)	164-168
Pobočje Nanosa (Andrej Likar)	196-199
Več vodikovih antiatomov (Janez Strnad)	218-222
Ladja in mehurčki (Janez Strnad)	232-235
Oh, to sevanje! (Irena Mele, Metka Kralj, Nadja Železnik)	261-266
Bine dobi pismo (Jože Pahor)	283-287
Še več vodikovih antiatomov (Janez Strnad)	297-298
Skok v daljavo (Janez Strnad)	332-337, XXIII
Pogled v čase, ko je bila Zemlja še mlada (Jože Pahor)	354-359
Kako hitro se gibljejo zračne molekule? (Ivan Gutman, Branislav Čabrić, Nenad Stevanović, prev. Marija Vencelj)	367-369

ASTRONOMIJA

Izsev zvezde – reš. str. 40 (Marijan Prosen)	22-24
Druga najsvetlejša zvezda (Marijan Prosen)	148-150
Dvojni planet (Marijan Prosen)	169-170
Vrtenje Lune (Marijan Prosen)	206-207
Hitrost Lune (Marijan Prosen)	223
Koliko nebesne krogle – odgovori na str. 300 (Marijan Prosen)	281-282
Prihodnje leto se bo zgodilo (Marijan Prosen)	344-346

RAČUNALNIŠTVO

Programerske prigode (Martin Juvan).....	16-21
Številski labirint (Martin Juvan).....	138-141
Rešitev problema praštevil (Marko Petkovšek)	155, XI
Je slika res več kot tisoč besed (Jože Pahor)	208-212
Vizualna kriptografija – šum skrivnosti (Martin Pečar).....	274-280
Napake niso večne – Presek, zgoščenke, planeti in kode (Aleksandar Jurišić)	361-366, XXIII, XXIV

NOVICE

To pot pa kar zlato! – Čestitka našim olimpijcem (Iz uredništva)	2
Astronomski tabor na Blokah (Petra Vencelj)	133
33. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	156-157
Slovenija gre naprej ali kako smo bili najboljši na olimpiadi (Tone Gradišek)	157-159
Mednarodni kongres matematikov, Peking 2002 (Dušan Repovš)	171-172
Jean-Pierre Serre je prvi dobitnik Abelove nagrade za matematiko (Marija Vencelj)	XXII

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

Križanka "Matematiki 17. in 18. stoletja" – reš. na str. 47 (Marko Bokalič)	32-33
Presek, salama in sinus (Robert Bakula in Aleksandar Jurišić).....	37-40
Križanka "Matematiki 19. stoletja" – reš. na str. 170 (Marko Bokalič)	160-161
Didona, volovska koža in razglednica (Marija Vencelj)	162-163
Križanka "Znamenja zodiaka" – reš. na str. 237 (Marko Bokalič)	224-225
Glorija z Mizaste gore (Matjaž Vencelj)	259-260
Križanka "Mehanika" – reš. na str. 300 (Marko Bokalič)	288-289
S kolikošno hitrostjo? (Marijan Prosen)	XIX
Poštna znamka o Hallersteinu (Marijan Prosen)	XX
Odkrivanje napak na pamet (Marija Vencelj)	337
Križanka "Geometrijska telesa" – reš. na str. 366 (Marko Bokalič)....	352-353
Glorija – sipanje svetlobe (Jože Rakovec)	359-360

NOVE KNJIGE

Marijan Prosen: Skrivnosti dneva in noči (Marija Vencelj).....	25
Marijan in Stana Prosen: Zvezdni miti in legende (Marija Vencelj).....	151

NALOGE

Dva kamna – Nagradna naloga (Marija Vencelj)	2
Naloga o Fibonaccijevem zaporedju – reš. str. 154 (Viktor Velkavrh in Roman Drnovšek)	4
Nenavadno število – reš. str. 46 (Martin Juvan)	31
Na drugi strani Zemlje – Nagradna naloga (Peter Petek)	130
Hrana, rana, Ana, na – Nagradna naloga (Marija Vencelj)	131
Tri posode – reš. str. 168 (Marija Vencelj)	141
Raziskovalna naloga o Kanopu in Siriju – reš. str. 159 (Marian Prosen) ..	150
Kriptaritem v različnih številskih sestavih – Nagradna naloga (Marija Vencelj)	194
Najkrajši čas potovanja – reš. str. 272 (Karel Šmigoc)	195
Krivični tenis – reš. str. 280 (Marija Vencelj)	199
Mala šola številskih sestavov – reš. str. 236 (Marija Vencelj)	213-217
Bolj za šalo kot zares – reš. str. 223 (Aleksandar Jurišić)	217
Z ognjem in smodnikom – Nagradna naloga (Tim Vidmar)	258
Periodični decimalni zapis – reš. na str. 298 (Anton Cedilnik)	260

REŠITVE NALOG

Štiri muhe – Rešitev nagradne naloge iz 6. številke XXIX. letnika Preseka, str. 322 (Marija Vencelj)	3-4
Dva kamna – Rešitev nagradne naloge iz 1. številke (Marija Vencelj) .	131-132
Rešitvi nagradnih nalog iz 3. številke Preseka (Marija Vencelj, odg. ur.)	194-195
Rešitve nagradnih nalog iz 3., 4. in 5. številke Preseka (Marija Vencelj, odgovorna urednica)	322
Kriptaritem v različnih številskih sestavih – Rešitev nagradne naloge iz 4. številke (Marija Vencelj)	322-323
Z ognjem in smodnikom – Rešitev nagradne naloge iz 5. številke Preseka (Tim Vidmar)	323

TEKMOVANJA

38. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	48-49
22. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce in osnovnošolke za Zlata Stefanova priznanja (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	49-52
2. tekmovanje dijakov ter dijakinj srednjih poklicnih šol v znanju matematike (Dušanka Vrenčur)	52
2. tekmovanje dijakov ter dijakinj srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike (Sonja Perko)	53-54
46. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko)	54-55
40. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko)	55-58
23. mednarodno matematično tekmovanje mest – Rešitve nalog jesenskega kroga iz XXIX, P-6, str. 376 (Gregor Cigler)	58-64

Evropski matematični kenguru (pripravili Gregor Dolinar, Darjo Felda in Matjaž Željko)

Naloge za 2. razred osnovne šole	66-67
Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole	67-70
Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole	70-73
Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole	73-76
Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A	76-79
Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A	80-83
Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija B	83-84
Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija B	84-85
Naloge za vse letnike srednje šole, kategorija C	85
Rešitve nalog	86

Tekmovanje za Vegovo priznanje (pripravil Aleksander Potočnik)

Področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje	87-91
Rešitve nalog s področnega tekmovanja	91-92
Državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje	92-93
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	93-94

Tekmovanje dijakov srednjih poklicnih šol (pripravili Dušanka Vrenčur in Anja Jesenek)

Regijsko tekmovanje	95-97
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	97-98
Državno tekmovanje	98-100
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	100

Tekmovanje dijakov srednjih strokovnih in tehniških šol (pripravili Sonja Perko, Polonca Pavlič, Irena Pivko, Iztok Leskovar in Andreja Leskovar)

Regijsko tekmovanje	101-106
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	106-109
Državno tekmovanje	110-112
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	112-115

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (pripravil Matjaž Željko)

Izbirno tekmovanje	116-117
Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja	118-121
Državno tekmovanje	122-124
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	124-128

Urniki tekmovanj v letu 2003 (Darjo Felda)

22. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. na str. 180 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	176-179
Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2001/02 (Ciril Dominko)	183-186
Izbirna testa za mednarodno matematično olimpiado – reš. na str. 188 (Matjaž Željko)	187

22. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač)	238-242
Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce – s str. 238 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	242-245
Rešitve nalog s predtekmovanja iz srednješolske fizike v šolskem letu 2001/2002 – s str. 183 (Bojan Golli)	246-251
Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2001/2002 (Ciril Dominko)	252-256
Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike v šolskem letu 2001/2002 (Bojan Golli)	301-308
23. mednarodno matematično tekmovanje mest – Naloge pomladanskega kroga (Gregor Cigler)	308-310
23. mednarodno matematično tekmovanje mest – Rešitve nalog pomladanskega kroga s str. 308 (Gregor Cigler)	311-320
24. mednarodno matematično tekmovanje mest – Naloge jesenskega kroga (Gregor Cigler)	370-372
24. mednarodno matematično tekmovanje mest – Rešitve nalog jesenskega kroga s str. 370 (Gregor Cigler)	372-379

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, šolsko leto 2002/03, številka 6, strani 321–384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosen (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2002/03 je za posamezne naročnike **3.300 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.700 SIT**, posamezna številka **825 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, transakcijski račun številka 03100-1000018787.

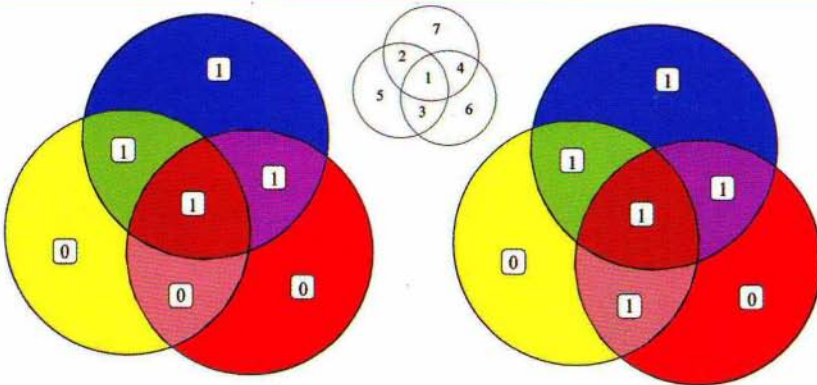
List sofinancira MŠZŠ
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2003 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1531

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Slika 2. Skakalca z ročajji na grških vazah in ohranjeni ročajji.



Slika 1. (a) Našo kratko "simfonijo" 1101 spravimo tokrat zaporedoma na rjavo (1), zeleno (2), oranžno (3) in vijoličasto polje (4), preostala polja pa dopolnimo tako, da bo v vsakem krogu vsota števil soda. Dobimo kodo 1101001, kjer zadnja tri mesta predstavljajo zaporedoma rumeno (5), rdečo (6) in modro polje (7).

Naštejmo vseh 16 kodnih besed, ki jih lahko dobimo na ta način: 0000000, 0001011, 0010110, 0011101, 0100101, 0101110, 0110011, 0111000, 1000111, 1001100, 1010001, 1011010, 1100010, 1101001, 1110100, 1111111.

(b) Recimo, da je prišlo do ene same napake in da smo prejeli zaporedje 1111001. Potem bo prejemnik lahko ugotovil, da je napaka v rumenem (levem) in rdečem (desnem) krogu, ne pa v modrem (zgornjem), kar pomeni, da je potrebno popraviti oranžno polje (3). Ni se težko prepričati, da je mogoče na tak način odpraviti napako na poljubnem mestu (tudi kontrolnem), seveda ob pogoju, da je to edina napaka.

Slika 2. Desno: Voyagerja sta leta 1979 poslikala Jupiter, leta 1980/81 Saturn, nato pa je Voyager 2 poslikal leta 1981 Uran in leta 1989 Neptun;
<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/voyager.html>.

Spodaj: Jupiter in njegovi Galilejski sateliti, Io, Evropa, Ganimed in Kalisto (montaža);
http://nssdc.gsfc.nasa.gov/photo_gallery/photogallery-jupiter.html.

