

30 (2002 – 03)

4

PRE SEK

120

100

80

60

40

20

ISSN 0351-6652

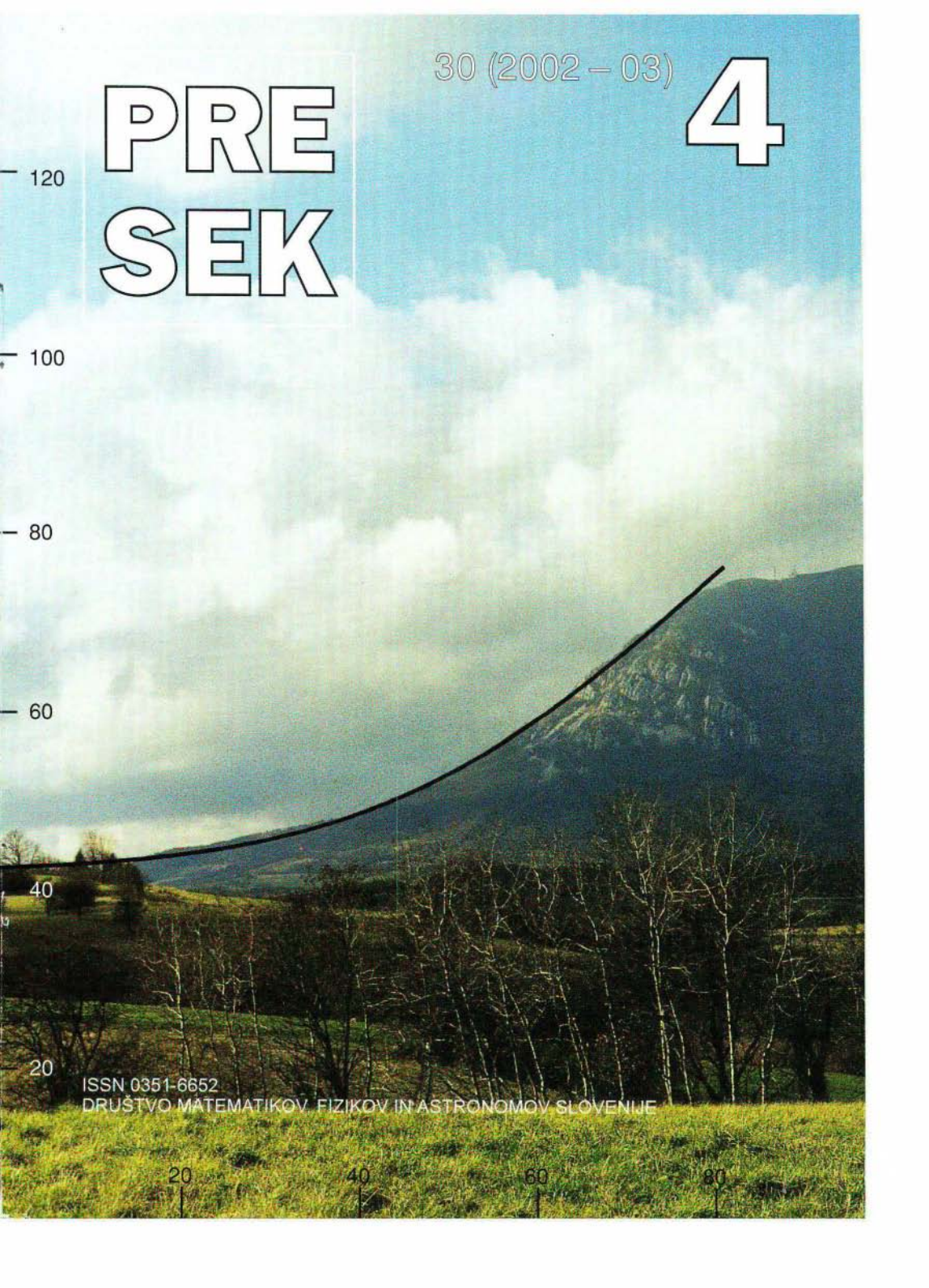
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

20

40

60

80





list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, leto 2002/03, številka 4, strani 193–256

VSEBINA

MATEMATIKA	Sylvestrov izrek (Ivan Vidav) 200-205 Računala nove dobe, 1. del (Aleksandar Jurišić) ... 226-231
FIZIKA	Pobočje Nanosa (Andrej Likar) 196-199 Več vodikovih antiatomov (Janez Strnad) 218-222 Ladja in mehurčki (Janez Strnad) 232-235
ASTRONOMIJA	Vrtenje Lune (Marijan Prosen) 206-207 Hitrost Lune (Marijan Prosen) 223
RAČUNALNIŠTVO	Je slika res več kot tisoč besed (Jože Pahor) 208-212
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Križanka "Znamenja zodiaka" – reš. na str. 237 (Marko Bokalič) 224-225
NALOGE	Kriptaritem v različnih številskih sestavih – Nagradna naloga (Marija Vencelj) 194 Najkrajši čas potovanja (Karel Šmigoc) 195 Krivični tenis (Marija Vencelj) 199 Mala šola številskih sestavov – reš. str. 236 (Marija Vencelj) 213-217 Bolj za šalo kot zares – reš. str. 223 (Aleksandar Jurišić) 217
REŠITVE NALOG	Rešitvi nagradnih nalog iz 3. številke Preseka (Marija Vencelj, odg. ur.) 194-195
TEKMOVANJA	22. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač) 238-242 Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce – s str. 238 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) 242-245 Rešitve nalog s predtekmovanja iz srednješolske fizike v šolskem letu 2001/2002 – s str. 183 (Bojan Golli) 246-251 Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2001/2002 (Ciril Dominko) 252-256
NA OVITKU	Fotografija pobočja Nanosa iz postojnske smeri. Pobočje, ki po obliki spominja na parabolo, smo poskusili opisati pri- spevku na str. 196 (foto Andrej Likar) I Ozvezdja, zodiak, likovna umetnost. Rešite tudi križanko na straneh 224–225. II, IV Fotografiji k članku na str. 208 III

KRIPTARITEM V RAZLIČNIH ŠTEVILSKIH SESTAVIH – Nagradna naloga

Kriptaritem

$$\begin{array}{r} A \ B \ C \\ C \ B \ A \\ \hline D \ D \ D, \end{array}$$

v katerem sta začetni števki A in C obeh seštevancev različni od nič, ima v različnih številskih sestavih različno mnogo rešitev. V dvojiškem nobene, v trojiškem eno, v desetiškem pa kar deset, če pri štetju ne ločimo med rešitvama, v katerih sta seštevanca ABC in CBA med seboj zamenjana. To so rešitve, pri katerih je

$$ABC \in \{111, 123, 135, 147, 222, 234, 246, 333, 345, 444\}.$$

Ali obstaja kakšen številski sestav, v katerem ima zgornji kriptaritem šest rešitev? Navedite vse sestave s to lastnostjo; odgovor utemeljite.

Rešitve naloge pošljite najkasneje do 15. marca na naš naslov:

Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Izmed reševalcev, ki nam bodo poslali pravilno rešitev naloge, bomo izžrebali nagrajenca, ki bo prejel knjižno nagrado.

Za tiste, ki potrebujejo ponovitev teorije številskih sestavov, smo pripravili poseben prispevek na str. 213.

Marija Vencelj

REŠITVI NAGRADNIH NALOG IZ 3. ŠTEVILKE PRESEKA

Na nalogo **Na drugi strani Zemlje** smo dobili samo dva odgovora, ki oba ustrezata pogojem naloge. Borij Levski iz Ljubljane je našel približno antipodni mesti Ulan-Ude v Rusiji in Punta Arenas v Čilu, Tomaž Potočnik iz Stranske vasi pri Semiču pa par Lima v Peruju in Bangkok na Tajskem.

Žreb je knjižno nagrado namenil Boriju Levskemu.

Na nalogo **Hrana, rana, Ana, na** smo dobili več odgovorov. Nekateri reševalci so spregledali navodilo, da ne smejo spreminjati vrstnega reda črk. Takih rešitev seveda nismo priznali. Najdaljšo besedo pod točko b), z dovoljenim pregibanjem besed, nam je poslal Borij Levski iz Ljubljane. Beseda **mučilnicama** ima enajst črk, reševalec je našel zaporedje **mučilnicama, mučilnicam, mučilnica, mučilnic, učilnic, učilni, učili, čili, čil, či**. Tudi besedico **či** smo našli v Slovarju slovenskega knjižnega jezika. To je medmet, s katerim se oglašajo jerebice in nekatere druge ptice. Reševalcu torej pripada naša nagrada.

Zanimivo je, da nismo na nalogo pod točko a) dobili nobene pravilne nove najdaljše besede. Tako 'uradno' ostaja najdaljša beseda **hrana** iz naslova naloge. Ta del naloge je res težji, morda niste bili zadovoljni z dolžino dobljene besede. Vseeno nam svoje besede pošljite. Čaka vas knjižna nagrada. Za vzpodbudo namreč podaljšujemo rok za najdaljšo besedo pod točko a) do konca aprila. Ponovimo nalogo:

Iščemo čim daljšo slovensko besedo, iz katere lahko z zaporednim izpuščanjem natanko ene črke dobimo zaporedje samih slovenskih besed, do vključno zadnje, ki ima dve črki. Črko lahko izpustimo na kateremkoli mestu (npr. **križ, riž, rž** ali **križ, kri, ki**), ne smemo pa spreminjati vrstnega reda črk. Pregibanje besed, t.j. sklanjanje, spreganje, stopnjevanje, dvojina, množina ipd., so prepovedane operacije.

Marija Vencelj, odg. ur.

NAJKRAJŠI ČAS POTOVANJA



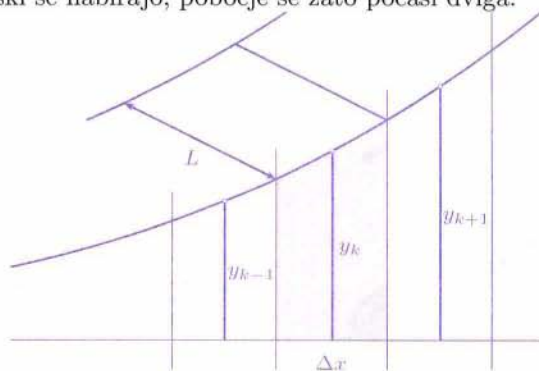
Trije študentje matematike nameravajo ob koncu tedna odpotovati iz Ljubljane v Maribor. Na razpolago imajo dvosedežno motorno kolo, katerega povprečna potovalna hitost je 60 km/h. Kako naj potujejo, da bodo vsi trije istočasno in v najkrajšem času (kar pomeni, da se bodo vsi trije ves čas gibali) prispeli v Maribor? Kolikšen je najkrajši čas potovanja, če je pot dolga 144 km in povprečna hitrost pešca 5 km/h?

Karel Šmigoc

POBOČJE NANOSA

Ko se peljemo proti morju, se kmalu po Postojni prikaže Nanos. S 1262 metri nadmorske višine je v okolju, kjer ni visokih gora, prav mogočen. Oddajni stolpi na vrhu Pleše ga naredijo še nekoliko višjega. Z vrha se najprej strmo spušča proti Razdrtemu s prepadnimi stenami. Takega prizora smo vajeni pri marsikateri gori. Pozornost pa vzbuja pobočje, ki se parabolično dviga proti stenam in se tu in tam zaključí z melišči. Tako pravilno oblikovanega pobočja pa ne vidimo prav pogosto. Opazimo ga sicer pri ledeniških dolinah, kjer je za njihov značilni prerez v obliki črke U poskrbel ledenik, ki se je nekdaj pomikal v dolino. Pobočja Nanosa pa ni mogel oblikovati ledenik, saj daleč okoli ni nobene visoke gore. Verjetneje je, da je nastalo s počasnim podiranjem gore v obsežno ravan brez večjih ovir, ki bi popačile njegovo obliko. Da je pobočje še vedno živo, se prepričamo ob vzponu na Plešo strmo navzgor. Mejni kamni so zaradi lezenja zgornjih plasti nagnjeni, čeprav so jih postavili navpično. Gibanje pobočja dela preglavice tudi graditeljem avtoceste pod Nanosom. Ali bi znali izračunati obliko pobočja s preprostim modelom, s katerim bi opisali nalaganje in gibanje okruškov?

Usodi posameznega okruška ne moremo slediti. Lahko pa privzamemo, da se v povprečju gibljejo v dolino tem hitreje, čim večja je strmina pobočja. Seveda je to gibanje izredno počasno, saj se pobočje zaznavno spremeni šele v stoletjih. Opazujemo del pobočja z debelino Δx in dolžino L (slika 1). Zanemarili bomo, da se pobočje krivi tudi v vodoravni smeri. Na strani, ki je bližje vrhu, je bolj strmo kot na drugem koncu. V ta del pobočja se torej v danem času Δt privali več okruškov, kot se z njega odvali. Okruški se nabirajo, pobočje se zato počasi dviga.

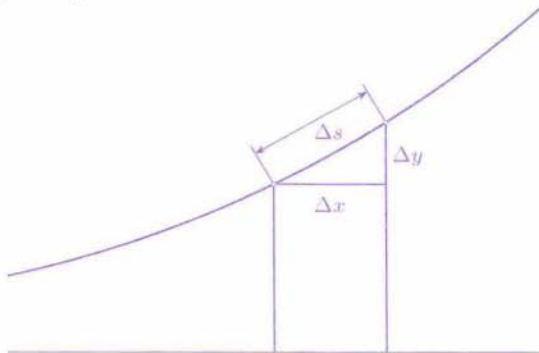


Slika 1. Pobočje v mislih razrežemo na rezine z debelino Δx in dolžino L . Vsako rezino označimo z različnimi oznakami k , ki tečejo od 1 do 100.

Ker bomo računali, moramo ustrezno opredeliti strmino pobočja. Kot merilo za strmino ceste vpeljejo razmerje med vzponom Δy in dolžino poti Δs , ki jo opravimo za ta vzpon. Če se na primer pot pri prehojenih 100m dvigne za 10m, je njena strmina $y' = \frac{10m}{100m} = 0,1 = 10\%$. Nekoliko lažje bomo računali, če namesto Δs zapišemo kar Δx (slika 2):

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Pri strminah, s katerimi imamo tu opravka, se Δs in Δx skoraj ne razlikujeta. Ker se strmina spreminja z oddaljenostjo od vrha gore, Δy in Δx ne smeta biti prevelika. V našem primeru pa lahko Δx meri tudi nekaj deset metrov, saj se pobočje razteza nekaj sto metrov od gore, strmina pa se le počasi spreminja.



Slika 2. Strmino krivulje opredelimo kot kvocient med dvigom Δy in vodoravno projekcijo poti Δx .

Maso Δm prispelih okruškov bomo povezali s časom Δt in strmino pobočja y' takole:

$$\Delta m = Ky' \Delta t L.$$

Faktor K je odvisen od narave okruškov in vremenskih vplivov. Privzeli bomo, da se s časom ne spreminja. Razmerje med Δm in Δt imenujemo tudi masni tok Φ :

$$\Phi = \frac{\Delta m}{\Delta t} = KLy'.$$

Privzeli smo torej, da je masni tok skozi dani prerez pobočja sorazmeren z njegovo strmino.

Sedaj lahko zapišemo enačbo, ki povezuje strmini na levem in desnem robu izbranega dela pobočja in spremembo njegove višine. Masa okruškov, ki se v času Δt privali, je $\Phi_2 \Delta t$, odvali pa se jih $\Phi_1 \Delta t$. Pobočje se zviša za $\delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$, njegova prostornina torej za $\delta V = \delta y \Delta x L$, masa pa za $\Delta m = \delta V \rho$. Gostota pobočja ρ naj bo neodvisna od časa in strmine. Velja torej

$$\Phi_2 \Delta t - \Phi_1 \Delta t = \rho \delta y \Delta x L.$$

Ko izpišemo izraza za Φ_1 in Φ_2 , dobimo

$$y'_2 - y'_1 = \frac{\rho}{K} \Delta x \frac{\delta y}{\Delta t}.$$

Slednja enačba bo pripravna za računanje, ko bomo izrazili obe strmini z višino opazovanega dela pobočja y_k in višinama sosednjih delov y_{k-1} in y_{k+1} . Strmina y'_2 je torej

$$y'_2 = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x},$$

strmina y'_1 pa

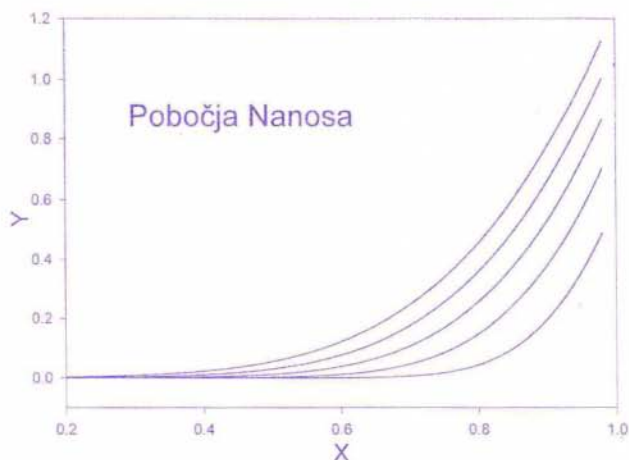
$$y'_1 = \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}.$$

Dobimo

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = \frac{\rho(\Delta x)^2}{K \Delta t} (\delta y)_k.$$

Enačba velja ne glede na to, kateri del pobočja smo izbrali. Pobočje v mislih razrežemo na 100 rezin z debelino Δx . Obliko pobočja tako predstavljajo višine y_k , kjer tečejo oznake k od 1 do 100.

Enačba torej povezuje trenutno obliko pobočja, ki jo predstavljajo vrednosti y_k , z njegovo spremembo $(\delta y)_k$. Konstante K sicer ne poznamo, lahko pa izberemo Δt tako, da bo ulomek na desni enak $\frac{1}{6}$, ki je pri reševanju enačbe najprimernejši. Začnemo s povsem navpično goro. Pobočja torej še ni. Vsi y_k so tedaj enaki nič, le pri zadnjih dveh upoštevamo, da padajo okruški s stene s konstantnim masnim tokom. Ker velja $\Phi_{100} = KL(y_{100} - y_{99})/\Delta x$, z izbiro Φ_{100} postavimo y_{100} na primerno vrednost η . Pri naslednjih korakih izračunamo nove vrednosti y_k za k od 1 do 99, zadnjega y_{100} pa spet povežemo z vrednostjo y_{99} kot $y_{100} = y_{99} + \eta$.

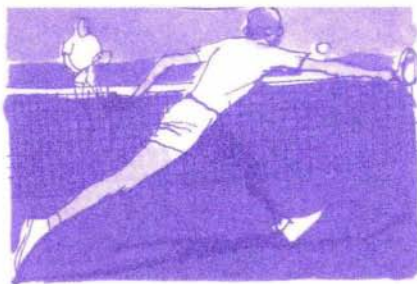


Slika 3. Oblike pobočja Nanosa v različnih enakomernih časovnih presledkih. Najvišje pobočje ustreza sedanjemu stanju. Ker koeficienta K ne poznamo, ne moremo opredeliti časov, ki ustrezajo ostalim oblikam.

Slika 3 kaže razvoj pobočja v enakih časovnih obdobjih do sedanje oblike. Točke (x_k, y_k) v grafu smo povezali z gladkimi krivuljami. Ob pogledu na fotografijo Nanosa iz postojnske smeri na naslovnici smo z našim modelom še kar zadovoljni.

Andrej Likar

KRIVIČNI TENIS



Na teniškem turnirju je v napetem dvoboju Maja Vrisnik po slabem začetku premagala Tino Matjažič v treh setih (brez tie-break). Tekma je bila nenavadna tudi zato, ker je Maja zmagala, čeprav je bilo razmerje posameznih Tininih točk proti Majinim kar 5 : 3. Kako je potekala igra?

Opomba. V razmerju so upoštevane dejanske točke in ne njihovo poimenovanje. Rezultat 40 : 30 pomeni 3 : 2 v točkah.

Marija Vencelj

SYLVESTROV IZREK

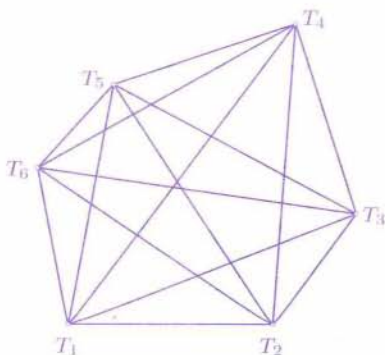
1. Eden od osnovnih aksiomov geometrije pove, da dve (različni) točki določata natanko eno premico, ki ji pravimo zveznica teh dveh točk. Kaj pa, če imamo namesto dveh več točk? Denimo, da je točk n . Vsako izmed njih lahko povežemo s katerokoli izmed preostalih $n - 1$ točk in dobimo tako $n - 1$ zveznic, ki izhajajo iz izbrane točke. Ker je vseh točk n , je vseh zveznic n -krat toliko, se pravi $n(n - 1)$. Toda pri tem smo vsako zveznico šteli najmanj dvakrat, saj dobimo isto premico, če zvežemo točko T s točko R ali pa R s T . Zato je vseh zveznic kvečjemu polovico toliko, torej kvečjemu enako

$$\frac{n(n - 1)}{2}. \quad (1)$$

Če so npr. naše točke oglišča n -kotnika, so zveznice stranice in diagonale tega večkotnika (slika 1) pravzaprav premice, na katerih ležijo stranice in diagonale. Stranic je n , diagonal pa $n(n - 3)/2$, skupaj torej

$$n + \frac{n(n - 3)}{2} = \frac{n(n - 1)}{2},$$

v skladu z obrazcem (1). (Šestkotnik na sliki ima 6 stanic in 9 diagonal. Vseh premic, ki vežejo po dve izmed šestih oglišč, je torej $6 + 9 = 15$.)



Slika 1.

Seveda niso vse zveznice vselej med seboj različne. Zato daje izraz (1) le največje število premic, ki jih določa množica n točk. V skrajnem primeru, ko ležijo vse točke na isti premici p (rekli bomo, da so točke tedaj **kolinearne**), je zveznica ena sama, namreč premica p .

Denimo zdaj, da naše točke niso kolinearne. Ali se dajo morda tako izbrati, da gre vsaka premica, ki veže dve izmed teh točk, vsaj še skozi eno izmed izbranih točk, da torej ležijo na vsaki zveznici najmanj tri točke iz naše množice? Angleški matematik J. J. Sylvester je pred dobrimi sto leti postavil trditev, da taka konfiguracija točk ni mogoča. Velja namreč naslednji izrek:

Izrek 1. (Sylvester). Če vzamemo poljubno končno množico točk, ki niso kolinearne, obstaja vsaj ena premica, na kateri ležita dve in samo dve točki te množice.

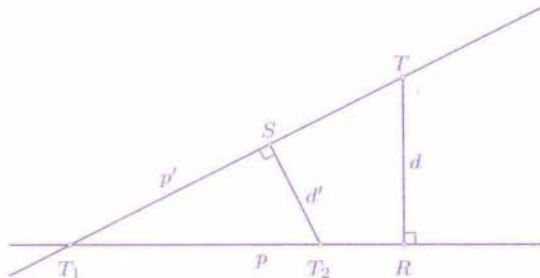
Ni znano, ali je imel Sylvester za svojo trditev tudi dokaz. Prvi je izrek 1 dokazal T. Gallai kakih 40 let pozneje. Tu pa si bomo ogledali preprost dokaz, ki ga je našel L. M. Kelly.

Naj bo

$$\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$$

množica n točk, ki niso vse na isti premici. Od tod sledi, da je njihovo število najmanj 3, torej $n \geq 3$. (Dve točki sta namreč vedno na isti premici.) Zaznamujmo s $\mathcal{P}$ množico vseh premic, ki vežejo po dve točki iz množice $\mathcal{T}$. Ker naše točke niso kolinearne, ni v množici $\mathcal{P}$ samo ena premica, temveč jih je več.

Katerokoli premico iz $\mathcal{P}$ vzamemo, obstaja vsaj ena točka iz $\mathcal{T}$, ki ne leži na njej. Med temi točkami je ena najbližja naši premici (najbližjih točk je lahko tudi več). Zdaj pa poiščimo med vsemi premicami množice $\mathcal{P}$ tisto, pri kateri je razdalja do najbližje točke iz množice $\mathcal{T}$ najmanjša. Imenujmo to premico p . Točka iz $\mathcal{T}$, ki ne leži na p , ji je pa najbližja, naj bo T (slika 2). Katerokoli premico vzamemo iz množice $\mathcal{P}$, je najbližja točka iz množice $\mathcal{T}$ od nje bolj (ali kvečjemu enako) oddaljena kakor točka T od p .



Slika 2.

Razdaljo točke T od premice p dobimo tako, da iz točke T spustimo pravokotnico na premico p . Če je R presečišče pravokotnice s p , je razdalja d točke T od premice p enaka dolžini daljice $\overline{TR}$, torej $d = \overline{TR}$ (slika 2).

Ker pripada premica p množici zveznic $\mathcal{P}$, sta na njej vsaj dve točki iz množice $\mathcal{T}$, npr. točki T_1 in T_2 . Najprej bomo ugotovili, da ležita T_1 in T_2 na premici p na nasprotnih straneh točke R . Denimo namreč, da sta T_1 in T_2 na isti strani in je npr. T_1 bolj oddaljena od R kakor T_2 , tako da je vrstni red točk takšenle: T_1T_2R (slika 2). (Točka T_2 se lahko ujema z R .) Premica p' , ki veže T in T_1 , je ena izmed premic družine $\mathcal{P}$, točki T in T_1 namreč obe pripadata množici $\mathcal{T}$. Različna je od premice p , saj točka T ne leži na p . Kakšna je razdalja točke T_2 od p' ? Ta razdalja je enaka dolžini daljice $\overline{T_2S} = d'$, kjer pomeni S presečišče pravokotnice iz T_2 na premico p' . Oglejmo si zdaj trikotnika T_1RT in T_1T_2S na sliki 2. Oba sta pravokotna, pri oglišču T_1 pa imata skupen ostri kot in sta si zato podobna. (Dva pravokotna trikotnika, ki se ujemata v enem ostrem kotu, se ujemata v vseh treh kotih in sta si zato podobna.) Ker je hipotenuza $\overline{T_1T_2}$ trikotnika T_1T_2S del katete $\overline{T_1R}$ trikotnika T_1RT (oziroma enaka tej kateti, če točki R in T_2 sovpadata), v pravokotnem trikotniku pa je kateta manjša od hipotenuze, je zato hipotenuza $\overline{T_1T_2}$ trikotnika T_1T_2S manjša od hipotenuze $\overline{T_1T}$ trikotnika T_1RT . Enako velja potem za enakoležne katete. Zato je kateta $\overline{ST_2} = d'$ prvega trikotnika manjša od katete $\overline{TR} = d$ drugega (obe ti kateti ležita nasproti kotu pri oglišču T_1). Dolžina daljice $\overline{ST_2} = d'$ pa pomeni razdaljo točke T_2 od premice p' in je potemtakem točka T_2 bližje premici p' kakor točka T premici p . Tako smo prišli do protislovja, saj smo izbrali v družini zveznic $\mathcal{P}$ tisto premico p , pri kateri je razdalja od najbližje točke iz množice $\mathcal{T}$ najmanjša. Zato T_1 in T_2 nista na isti strani točke R , temveč na nasprotnih straneh. Ker sta T_1 in T_2 poljubni točki iz množice $\mathcal{T}$, ki ležita na premici p , sklepamo, da na p razen T_1 in T_2 ni nobene druge točke te množice. Če bi namreč tudi točka T_3 ležala na p , bi morali biti bodisi T_1 in T_3 bodisi T_2 in T_3 na isti strani točke R . To pa, kakor smo videli, ni mogoče. Tako smo našli premico p , na kateri sta natanko dve točki množice $\mathcal{T}$, in s tem dokazali Sylvestrov izrek.

2. Izraz (1) pove, kolikšno je največje število zveznic pri množici n točk. Lahko jih je manj. Pri kolinearnih točkah je zveznica ena sama. Denimo zdaj, da točke niso kolinearne. Koliko je tedaj najmanj različnih zveznic? Na to vprašanje daje odgovor naslednji izrek:

Izrek 2. Množica n točk, ki niso na isti premici, določa najmanj n zveznic.

Izrek 2 bomo dokazali s popolno indukcijo. Množica nekolinearnih točk vsebuje vsaj tri točke in je zato $n \geq 3$. Naj bo najprej $n = 3$. Tri nekolinearne točke so oglišča trikotnika, ki ima tri stranice. V tem primeru so zveznice tri in izrek 2 pri $n = 3$ velja.

Denimo zdaj, da smo izrek dokazali za kak $n \geq 3$. Vzemimo množico $n + 1$ nekolinearnih točk $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}\}$. Po izreku 1 obstaja taka premica p , na kateri ležita dve in samo dve točki te množice. Naj bosta ti dve točki T_n in T_{n+1} . Odstranimo iz množice $\mathcal{T}$ točko T_{n+1} in si oglejmo množico preostalih točk $\mathcal{T}' = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Dve možnosti sta:

- a) Točke množice $\mathcal{T}'$ so kolinearne.
- b) Točke te množice niso kolinearne.

Obravnavajmo najprej primer a). Ker so točke iz $\mathcal{T}'$ kolinearne, ležijo vse na isti premici, ki jo imenujmo q . Točka T_{n+1} ne leži na njej, saj točke množice $\mathcal{T}$ niso kolinearne. Če zvežemo T_{n+1} z vsemi n točkami množice $\mathcal{T}'$, dobimo n različnih premic. Vse so zveznice po dveh točk množice $\mathcal{T}$. Ker je tudi premica q , na kateri ležijo točke iz množice $\mathcal{T}'$, ena od zveznic, določajo točke množice $\mathcal{T}$ v tem primeru natanko $n + 1$ zveznic.

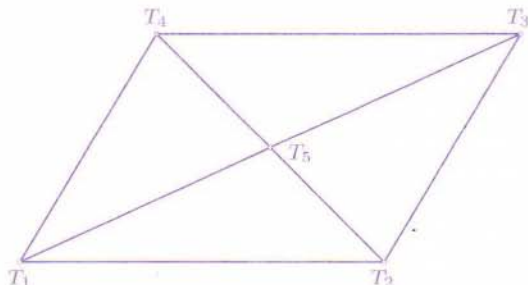
Oglejmo si zdaj možnost b). Ker točke iz $\mathcal{T}'$ niso kolinearne, njihovo število pa je n , določajo vsaj n premic, saj smo privzeli, da izrek 2 za n točk velja. Med te zveznice ne sodi premica p , ki veže T_n in T_{n+1} . Na njej ležita le dve točki iz množice $\mathcal{T}$, namreč T_n in T_{n+1} , od njiju pa je samo prva v množici $\mathcal{T}'$, druga T_{n+1} pa ni. Ker je p zveznica dveh točk množice $\mathcal{T}$, imamo tudi v tem primeru najmanj $n + 1$ zveznic, namreč najmanj n zveznic točk množice $\mathcal{T}'$ in še premico p .

Zato velja izrek 2 za $n + 1$ točk, če velja za n točk. S tem smo dokaz končali.

3. Vzporedne premice imajo isto smer. Nekatere zveznice, ki jih določa množica n točk, so lahko med seboj vzporedne in je zato včasih smeri manj, kakor je različnih premic. Zastavimo si vprašanje: Koliko je najmanjše število različnih smeri pri n točkah? Seveda spet izvzamemo primer kolinearnih točk, saj je tedaj zveznica ena sama in tudi smer je ena sama.

Tri nekolinearne točke so oglišča trikotnika, ki ima tri stranice in zato tudi tri smeri.

Izberimo zdaj štiri točke T_1, T_2, T_3 in T_4 tako, da so oglišča paralelograma (slika 3). Zveznic je šest, namreč štiri stranice in dve diagonali. Nasprotni stranici pa sta v paralelogramu vzporedni in imata zato isto smer. Potemtakem določajo oglišča paralelograma štiri smeri: dve smeri nam dajo stranice, dve diagonali.



Slika 3.

Dodajmo k našim štirim točkam še presečišče diagonal kot peto točko T_5 . Ker se število zveznic z dodano točko ni povečalo, imamo zdaj pri petih točkah štiri smeri.

Brez težave se prepričamo, da določajo štiri nekolinearne točke najmanj štiri smeri. Pravkar pa smo videli, da lahko izberemo pet točk tako, da so smeri samo štiri. Število 4 je sodo, 5 liho. Odgovor na vprašanje, koliko je najmanj različnih smeri pri n točkah, je odvisen od tega, ali je n sod ali lih.

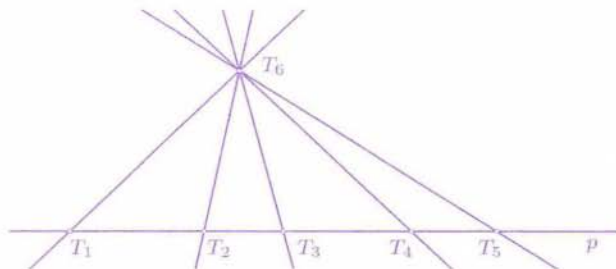
Izrek 3. *Množica točk, ki niso kolinearne, njihovo število n pa je večje od 3, določa najmanj n različnih smeri, če je n sod, in $n - 1$ različnih smeri, če je n lih.*

Dokaz tega izreka je precej zahteven, namreč bolj kakor pri prejšnjih dveh, in ga zato tu ne bomo navedli. Pokažimo le to, da zadostuje dokaz za sodo število točk.

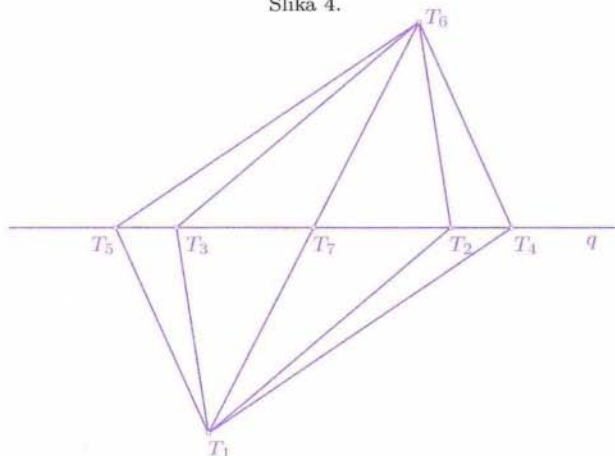
Denimo namreč, da izrek 3 velja za sodo število točk. Naj bo zdaj $\mathcal{T}$ množica n nekolinearnih točk, kjer je število n liho in večje od 3, torej $n \geq 5$. Iz $\mathcal{T}$ izberimo $n - 1$ točk, ki ne ležijo na isti premici. Ker je število $n - 1$ sodo in večje od 3, izrek za to množico, ki jo imenujmo $\mathcal{T}'$, velja. Torej določa $\mathcal{T}'$ najmanj $n - 1$ smeri. Prvotna množica $\mathcal{T}$ pa določa kvečjemu več smeri, torej najmanj $n - 1$. Zato velja naš izrek prav tako za lihe n .

Pri vsakem $n > 3$ obstaja konfiguracija n nekolinearnih točk, pri kateri je število različnih smeri najmanjše, se pravi pri sodem n enako n , pri lihem n pa $n - 1$.

Denimo najprej, da je n sod. Izberimo poljubnih $n - 1$ točk $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ na isti premici p , n -to točko T_n pa kjerkoli, da le ni na tej premici p (slika 4, kjer je $n = 6$). Premica p in zveznice $T_1T_n, T_2T_n, \dots, T_{n-1}T_n$ določajo n različnih smeri. Ker so to vse možne zveznice pri izbrani množici točk, drugih smeri ni.



Slika 4.



Slika 5.

Če je n lih in večji od 3, ga lahko pišemo v obliki $n = 2k + 3$, kjer je k celo število, $k \geq 1$. Izberimo najprej $n - 1 = 2k + 2$ točk tako, da sestavljajo oglišča k paralelogramov, pri čemer imajo vsi ti paralelogrami skupni dve nasprotni oglišči T_1 in T_{n-1} , torej tudi eno skupno diagonalo, namreč zveznico T_1T_{n-1} (slika 5). Druga diagonalna vsakega od teh paralelogramov naj leži na premici q , tako da sta drugi dve oglišči vsakega od k paralelogramov na njej. Vseh oglišč je $2k + 2$; dve oglišči sta namreč T_1 in T_{n-1} , oglišča $T_2, T_3, \dots, T_{n-2}$, teh je $n - 3 = 2k$, pa ležijo na premici q . Kot zadnjo točko T_n izberimo presečišče diagonale T_1T_{n-1} in premice q , tako da je potem vseh točk $2k + 3 = n$. Stranice teh k paralelogramov določajo $2k$ smeri, diagonalni dve, torej imamo skupaj $2k + 2 = n - 1$ različnih smeri. Slika 5 prikazuje primer, ko je $k = 2$. Paralelograma sta dva, namreč $T_1T_2T_6T_3$ in $T_1T_4T_6T_5$, točk je 7, vseh različnih smeri pa 6.

Ivan Vidav

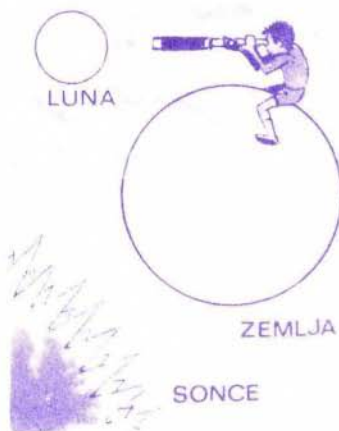
VRTENJE LUNE

Takoj na začetku predlagam, da s prostim očesom ali pa lovskim daljnogledom pozorno pogledate Luno že danes. Opazovanje ponovite čez teden dni, dva tedna, tri tedne. Po treh tednih se že lahko vprašate, če ste kaj posebnega opazili.

To, kar bi morali opaziti, je povezano z vrtenjem Lune. Opazovanja kažejo, da so ob vsaki Lunini meni (legi) z Zemlje vidni vedno isti predeli Luninega površja, kar pomeni, da nam kaže Luna vedno isto polovico (stran).

Vzemimo, da krožimo okoli nekega predmeta. Ves čas ga vidimo, če smo pri kroženju stalno z obrazom obrnjeni proti njemu. Ko predmet obkrožimo, se tudi sami enkrat zavrtimo. Tako je z Luno. Ko nas obkroži, se tudi sama enkrat zavrti okrog svoje vrtilne osi. Zato nam stalno kaže isto polovico.

Sonce osvetljuje le eno polovico Lunine krogle, tisto, ki je obrnjena k Soncu. Na osvetljeni strani je dan. Na nasprotno polovico pa sončna svetloba ne pade. Tam je temno in je noč. Luna se enkrat zavrti ravno v času, ko obkroži Zemljo, t.j. približno v enem mesecu ali natančneje v 27 dneh. Zaradi tako počasnega vrtenja traja en Lunin dan skoraj dva naša tedna in prav toliko tudi noč.



prvi krajec

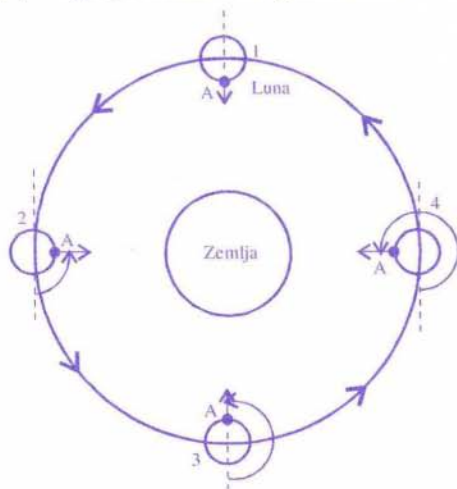
polna luna

zadnji krajec



Slika 1. Tri fotografije Lune nas prepričajo, da nam Luna vedno kaže isto stran.

Lunino vrtenje lahko prikažemo z igro. Nastopata dve osebi. Prva predstavlja Zemljo, druga pa Luno. Pri igri se ravnamo po sliki 2.



Slika 2. Skica, s katero si pojasnimo vrtenje Lune. V legi 1 je pogled iz točke A na Luni usmerjen proti središču Zemlje. V legah 2, 3 in 4 je pogled iz A še vedno usmerjen proti središču Zemlje, saj se Luna zavrti v enakem času kot obkroži Zemljo.

Oseba–Luna počasi kroži okoli osebe–Zemlja z desne proti levi (v pozitivni smeri) in je z obrazom ves čas obrnjena proti osebi–Zemlja (nos gleda proti osebi–Zemlja). Oseba–Zemlja naj miruje (čeprav vemo, da se vrti in kroži). Ko oseba–Luna obkroži osebo–Zemlja, se oseba–Luna ravno enkrat zavrti okoli svoje vrtilne (navpične) osi. Nos osebe–Luna se je namreč v tem času zavrtel za polni kot (360°).

Oseba–Luna še bolje poudari vrtenje, če pri vrtenju z rokama v predročanju stalno kaže proti osebi–Zemlja. S sukanjem rok dejansko kar doživi vrtenje osebe–Luna. Ko torej pride oseba–Luna iz lege 1 mimo leg 2, 3 in 4 spet v lego 1, prikaže približno en mesec gibanja. V tem času obkroži osebo–Zemlja, hkrati pa se tudi sama enkrat zavrti.

Vaji

1. S prostim očesom ali dvogledom opazuj Luno nekaj dni okoli prvega krajca. Na lastne oči se prepričaj, da nam Luna zares kaže vedno isti obraz.
2. V igri VR TENJE LUNE naj oseba–Luna z odročanima rokama prikaže trajanje Luninega dne in Lunine noči.

Marijan Prosen

JE SLIKA RES VEČ KOT TISOČ BESED

Pravijo, da pove vsaka slika več kot tisoč besed. Pa je to res? Bi znali opisati obraz razbojnika Cefizlja tako natančno, da bi ga butalski policaj prepoznal na prvi pogled?

Danes, v dobi računalnikov, se pogosto pogovarjamo tudi z njimi. Kako shraniti v računalniku besedilo, kako shraniti sliko, da jo bo računalnik na zahtevo spet lahko pokazal na zaslonu? Besedilo nam bo delalo bržkone manj preglavic kot slika, zato začnimo z njim.

Pri pogovoru z računalnikom se moramo prilagoditi njegovim lastnostim. Računalnik pomni, misli in govori po dvojiško. V vsaki svoji spominski celici ustvari lahko le stanje, ki pomeni 0, in stanje, ki pomeni 1. Nekaj dvojiške govorice že poznamo, namreč dvojiški zapis števil. Niz 101 pomeni 5, niz 101010 pa 42. Shranimo obe števili v zaporedni spominski celici. Celotni niz 101101010 lahko preberemo na različne načine, saj ne vemo, kje je razmejitev. Rezultat je lahko spet 5 in 42, morda dobimo 11 in 10 (1011 in 01010) ali kaj tretjega. Da ne bo zmede, se je treba vnaprej dogovoriti, kakšna števila bomo uporabljali in kako jih bomo skladiščili.

Najprej si omislimo večje predalčke, zloge oziroma byte, ki jih sestavlja po osem celic oziroma bitov. Če namenimo vsakemu številu po dva byta, lahko zapisujemo števila od 0 do 65535. Če je dvojiško število vredno manj kot 16 bitov, ga dopolnimo spredaj z ničlami:

0000 0000 0000 0101 je po naše 5.

Kadar bi radi pisali še večja števila, se vnaprej dogovorimo za tri ali štiri osembitne predale oziroma byte. S štirimi byti pridemo do $2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295$.

Zdaj poskusimo z besedilom. Slovenska abeceda pozna 25 črk. Da bi jih zapisali po dvojiško, potrebujemo 25 različnih kombinacij ničel in enic ter dogovor, katero črko pomeni vsaka od teh kombinacij. S petbitnimi nizi zmoremo 32 različnih kombinacij, torej dovolj. Lahko bi začeli takole: 00001 pomeni **a**, 00010 pomeni **b**, 00011 pomeni **c** in tako naprej. Niz 00000 smo prihranili, da napove presledek med dvema besedama. Šestim preostalim nizom priredimo piko, vejico in še kaj. Žal bi bil tak dogovor uporaben le znotraj Slovenije. Marsikje šumnikov ne potrebujejo, manjkale pa bi jim oznake za njihove črke. Poleg tega petbitni kosi tudi niso pisani na kožo računalniku, ki ljubi byte, osembitne predalčke. Zato

bomo uporabili po en byte za vsak znak abecede. Pri 256 različnih nizih je prostora za vse znake, ki jih je nekda j zmo gel pisalni stroj. Zapisati znamo velike in male črke, pa številke, ločila. Nekateri znaki so ukazi: pojdi v novo vrsto, pozvoni, vrni se. Poseben znak pove, da je konec našega besedila.

Dogovor je zapis *American Standard Code for Information Interchange*, ali krajše ASCII, torej zapis znakov za informacijsko izmenjavo po ameriško¹. Sporočilo PRESEK se po tem dogovoru napiše 80 82 69 83 69 75. Ustrezni dvoj iški zapis spravimo v 48 spominskih celic². Naši šumniki, veliki in mali, nosijo precej visoke številke, ki pa niso enotno standardizirane.

Tudi debelo knjigo lahko varčno zapišemo. Prva knjiga zadnje čase priljubljenega Gospodarja prstanov šteje 535 strani. Vsaka polna stran ima 35 vrstic, dolgih po 65 znakov. Vsak znak zavzema po osem spominskih celic. To terja skupaj 9 milijonov in nekaj nad 700 tisoč spominskih celic. Ker šteje po osem celic za en byte, je zapis dolg nekaj manj kot 1,2 MB (mega bytov)³. To je na videz mnogo. Vendar pa na današnje CDje lahko shranimo 650 ali 700 MB. Na tak CD bi lahko zapisali preko 500 Gospodarjev prstanov. Na knjižnih policah bi to pomenilo vsaj dvajset metrov ali nekaj sto kilogramov. Trdi disk v samem računalniku je še zmogljivejša shramba od CDja. Današnji trdi diski običajno drže 40 000 do 80 000 MB. Z besedili potemtakem ne bo težav.

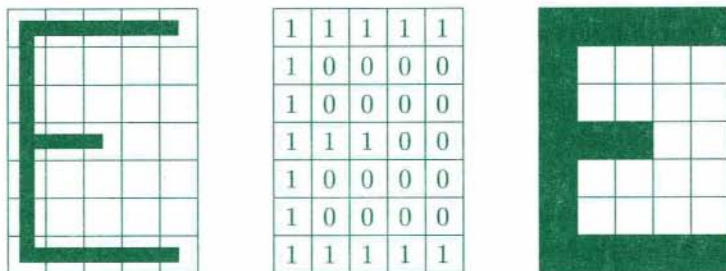
Na koncu knjige Gospodar prstanov najdemo nekaj zemljevidov. Kako shraniti sliko? Bo tudi v deželi računalnikov veljala več kot tisoč besed?

Poskusili bomo spremeniti preprosto sliko v niz iz enic in ničel. Naj bo to kar slika črke E. Prekrijmo sliko z mrežo, ki šteje pet polj v širino in sedem polj v višino.

¹ Novejši je UNICODE, kjer znaki za posamezne črke zajemajo po 16 spominskih celic. To pomeni, da razpolaga s preko 65 500 nizi, zato so nabori znakov lahko veliko daljši. Tako lahko v enem naboru zapišemo vse posebne znake različnih jezikov (šumniki, akcenti, grška abeceda), lahko pa tudi zapišemo pisave z veliko znaki (arabske, kitajske pismenke itd.).

² Ozna ki za P in R nista sosednji števili, ker je med njima v angleški abecedi črka Q.

³ V računalništvu je $1k=1024$ in $1M = 1024 \times 1024 = 1\,048\,576$.



Slika 1. Levo: Črka E sedi v nekaterih poljih. Sredina: Vpišemo enice v polja, kjer najdemo košček črke E, v prazna polja pa 0. Desno: Pri obnavljanju slike počrtnimo polja, označena z 1.

V nekaterih poljih najdemo košček črke, druga polja so spet prazna. Otipajmo sliko polje za poljem in označimo polna polja z znakom 1, prazna pa z znakom 0. Celoten niz ničel in enic pove vse o sliki:

11111 10000 10000 11100 10000 10000 11111 .

Zaradi preglednosti smo uporabili presledke med zapisi posameznih vrstic. Računalnik seveda presledkov ne pozna. Ko bere celotni niz brez presledkov, torej

11111100001000011100100001000011111 ,

mora vedeti, koliko polj si sledi v vsaki vrsti in koliko je vseh vrst. Da ne bo zmede, namenimo vsakemu od obeh podatkov po osem spominskih celic, bitov, torej po en byte, in jih postavimo na začetek slikovnega zapisa kot 00000101 00000111, kar je 5 in 7 po naše. Ker poznamo pravila, ki so nas vodila pri zapisu slike, iz celotnega zapisa ne bo težko znova obnoviti slike. Prvih osem polj pove vodoravno razsežnost slike, drugih osem polj pa navpično. Produkt obeh razsežnosti, ki je pri nas 35, pove število nadaljnjih polj, ki jih je potrebno prebrati, da vzemo vse o sliki. Celoten zapis slike je zdaj dolg 51 bitov. Pri uporabi znakov ASCII smo za zapis črke E potrebovali le 8 bitov.

Z obnovljeno sliko nismo zadovoljni, saj ne posnema dovolj natančno izvirnika. Očitno je mreža pregroba. Polj v vrstah naj bo zato nekaj sto ali celo tisoč, povečajmo pa tudi število vrst. Oba podatka povemo, preden opišemo vsebino slike. Po en byte za vsakega bo premalo, naj bodo po trije.

Večina slik pozna poleg belin in črnin tudi vrsto sivih odtenkov. Skalo bo treba razširiti. Naj ostane popolna belina 0, z 255 označimo popolno črnilo⁴. Vmes je prostora za 254 odtenkov sivine. To je sicer več, kot jih lahko naše oko razlikuje, vendar je računalniku pri srcu razdelitev na byte. Zapis take slike bo seveda daljši. Vsako polje terja byte in ne bit.

Slika pa ljubi barve. Kako jih spremeniti v ničle in enice? Ugotovili so, da je mogoče katerokoli barvo sestaviti iz treh osnovnih barv: rdeče, zelene in modre. Če ni ne rdeče ne zelene in ne modre, vlada popolna tema. Zapišemo jo z 0, 0, 0. Vse tri barve, vsaka s polno vrednostjo 255, ustvarjajo videz bele barve, ki jo zapišemo kot 255, 255, 255. Povsem rdeče polje ima oznake 255, 0 in 0, seveda vse zapisano z ustreznim nizom štirindvajsetih ničel in enic (sliki na III. strani ovitka).



Slika 2. Belina prehaja postopno v črnilo prek vrednosti od 0 do 255.

Zapis slik postaja vse daljši in daljši. Ni težko izračunati, kako dolg bo zapis barvne slike, široke 1000 točk in visoke 800 točk. Približno tak zapis uporabljamo dandanes na zaslonih svojih računalnikov. Zapis takšne slike bo dolg 2 400 000 bytov, kar je skoraj dvakrat toliko kot vse besedilo Gospodarja prstanov. Zdaj poiščimo odgovor na vprašanje, ki smo si ga zastavili. Če predpostavimo, da je povprečna slovenska beseda dolga šest znakov – všteli smo tudi presledek – potem je v Gospodarju prstanov okoli 200 000 besed. Vsaj toliko pa je lahko vredna tudi ena sama slika.

V tehniki in znanosti uporabljamo načrte in grafe. Črte zasedajo le malo prostora; večina slike je bela. Ko načrt ali graf na opisani način spremenimo v niz enic in ničel, bodo prevladovale ničle. Ob veliki množici ničel bo zapis pošastno dolg. Poskusimo z drugačnim zapisom. Spet se lotimo risanja črke E tako, da sledimo naslednjemu nizu ukazov:

Dvigni pero nad papir – za vsak slučaj.

Premakni se v koordinatno izhodišče – potovanje bomo začeli od doma.

Premakni se do točke 2,1 – zdaj smo pripravljeni za risanje.

Spusti pero do papirja – na papirju začrni pika.

Premakni se do točke 2,8 – dobimo navpično črto.

Premakni se do točke 7,8 – kar dobro nam gre od rok.

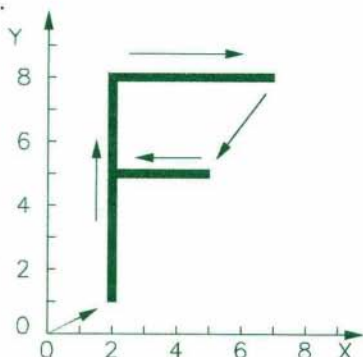
Dvigni pero – del risanja je končan.

Premakni se do točke 5,5.

Spusti pero do papirja.

⁴ V resnici uporabljamo 0 za črnilo (ni svetlobe) in 255 za belino (polna svetloba).

Premakni se do točke 2,5 – dobili smo F, ki mu bomo dodali še nogo in ga spremenili v E.



Slika 3. Kako potujemo med risanjem črke E.

Zelo podobno so lahko navodila zapisana v računalniku, le zapis je okrajšan, npr.:

PU (**pen up** = dvigni pero),

PA 0,0 (**pen absolute to** 0,0 = premik v točko 0,0),

PA 2,2,

PD (**pen down** = spusti pero ali pa **pero dol**),

PA 2,8 in tako naprej do srečnega konca, ko spravimo pero spet domov.

Poleg ravnih črt so pa tu tudi krive. Te narišemo tako, da jih nadomestimo z množico kratkih daljic. Krog postane, recimo, 40-kotnik.



Slika 4. Petkotnik, desetakotnik in dvajsetkotnik, ki ga vidimo že kot krog.

Opisani način poveljevanja je bil prilagojen risalniku (plotterju), instrumentu, ki je po ukazih računalnika risal načrte pred dvajsetimi leti, torej pred rojstvom sodobnih tiskalnikov. Poleg dveh elektromotorčkov, ki sta vozila pero sem in tja pa papirju, je premogel ravno dovolj vgrajene računalniške pameti, da je razumel nekaj potrebnih ukazov. Risalniki so izumrli, zapis pa se uporablja še danes.

Načinov slikovnega zapisa je še mnogo. Preveč, da bi jih spravili v Presek.

Jože Pahor

MALA ŠOLA ŠTEVILSKIH SESTAVOV

Zapisi števil v različnih številskih sestavih

Z različnimi številskimi sestavi se srečamo že v osnovni šoli. Zato na hitro ponovimo najnujnejše, potem pa kar k računskim primerom, s katerimi bomo znanje zares udomačili.

Vemo, da

$$10\ 110\ 100\ 111_2$$

pomeni v dvojiškem sestavu (sistemu) zapisano število, katerega vrednost izračunamo takole:

$$1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 1447.$$

Na desni je to število zapisano v desetiškem sestavu, torej je

$$10\ 110\ 100\ 111_2 = 1447 = 1447_{10} = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7.$$

Isto število lahko zapišemo tudi

$$1222121_3 = 112213_4 = 21242_5 = \dots = 17_{1440} = \dots = 10_{1447} = \dots$$

V splošnem velja: Če je a poljubno naravno število, različno od 1, lahko vsako naravno število n na natanko en način zapišemo v obliki

$$n = x_m a^m + x_{m-1} a^{m-1} + x_{m-2} a^{m-2} + \dots + x_2 a^2 + x_1 a + x_0, \quad (1)$$

kjer so koeficienti x_k nenegativna cela števila, manjša od a , torej kvečjemu enaki $a - 1$. Pravimo, da smo število n zapisali v številskem sestavu z osnovo a , koeficiente x_k imenujemo števke števila n v tem sestavu.



Običajno same vsote (1) ne pišemo, ampak zapišemo samo niz števk z osnovo v oklepaju na koncu niza, kot vidimo v zgornjih številskih primerih, v splošnem torej

$$\overline{x_m x_{m-1} x_{m-2} \dots x_2 x_1 x_0}_a.^1$$

Iz takega zapisa je moč vsoto (1) in z njo vrednost števila n enolično razbrati. Po dogovoru pisanje osnove 10 opuščamo, če ne more priti do nesporazuma. Enako velja za osnovo 2 v informatiki.

Pisno seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje, ki smo se jih v šoli naučili za desetiško zapisana števila, poteka praktično na enak način tudi v drugih številskih sestavih. Paziti moramo le, da ostanejo številke manjše od osnove sestava. To dosežemo pri $a = 10$ s t.i. desetiškim prenosom. Če dobimo npr. pri pisnem seštevanju v nekem stolpcu vsoto 32, zapišemo samo 2, razliko $30 = 3 \cdot 10$ pa prenesemo v sosednji stolpec na levi (z besedami: "3 dalje"). Podobno ravnamo pri drugih osnovah. Skupaj si oglejmo primer za seštevanje, za množenje ga napravite sami.

račun	miselna spremljava
256 ₇	$6 + 3 = 9 = 12_7$, zapišemo 2, 1 dalje;
+153 ₇	$1 + 5 + 5 = 11 = 14_7$, zapišemo 4, 1 dalje;
442 ₇	$1 + 2 + 1 = 4$, zapišemo 4.

Dovolj uvoda, na vrsti so naloge! Za začetek dve številski križanki.

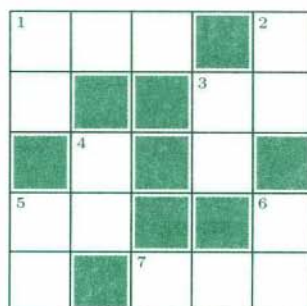
- Opisi gesel so podani v sestavih z različnimi osnovami, odgovore vpišite po desetiško.

Vodoravno:

- 411₅
- 33₄
- 42₈
- 300₆

Navpično:

- 23₄
- 300₅
- 15₇
- 136₈
- 40₉
- 44₆



¹ Nad števki smo narisali črto, da zapisa ne bi pomotoma razumeli kot produkt števk $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, x_0$. Pri številskih števkih to ni potrebno, saj npr. produkta števil 2 in 3 ne pišemo 23, ampak $2 \cdot 3$.

2. Opisi so podani v desetiškem sestavu, odgovore vpišite v križanko po petiško. Osnove 5 ne vpisujte.

Vodoravno:

Navpično:

1. 8

1. 49

3. 39

2. 19

6. 124

4. 66

7. 15

5. 20

8. 21

9. 87

9. 18

10. 103

11. 12

11. 11

12. 90

13. 19

14. 38

15. 23

1	2		3	4	5
6				7	
			8		
	9				10
11			12	13	
14				15	

3. Dopolnite tabelo:

	osnova 10	osnova _	osnova _	osnova _
a	7			
b	10			
c		30		
č	29	131	104	45
d			33	
e			202	
f				53
g		303		
h				111

4. Izračunajte v osmiškem sestavu (brez prehoda v desetiškega):

(a) $13_8 + 17_8$

(b) $46_8 - 27_8$

5. Računajte v danem številskem sestavu:

(a) $13_4 + 32_4$

(f) $123_8 \times 14_8$

(b) $133_5 + 23_5$

(g) $31_5 : 2_5$

(c) $43_6 - 15_6$

(h) $32_6 : 4_6$

(d) $32_5 - 14_5$

(i) $476_9 \times 10_9$

(e) $23_4 \times 12_4$

Ulomkovna pika ali vejica

Podobno kot uporabljamo v desetiškem zapisu decimalno piko ali vejico, uporabljamo ulomkovno piko ali vejico tudi v drugih sestavih. Velja

$$\overline{x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \dots}_a = x_m a^m + x_{m-1} a^{m-1} + \dots + x_1 a + x_0 + x_{-1} a^{-1} + x_{-2} a^{-2} + \dots$$

Tako je

$$10.11_2 = 2 + 2^{-1} + 2^{-2} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}, \quad 0.21_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}, \dots$$

6. Zapiši drugače:

(a) 3.3_4

(d) 0.2_4

(b) 1.5_6

(e) 0.3_6

(c) 4.5_8

(f) 0.4_8

7. Naslednji računi so zapisani v dvojiškem sestavu (osnove nismo pisali), zapišite tako tudi rezultate. Uporabite pisni način, kjer je potrebno.

(a) $10101 + 1011$

(e) $1101 - 111$

(b) $1001011 + 11100$

(f) $1000.101 - 0.111$

(c) $1110.01 + 101.11 + 100.01$

(g) 101×101

(d) $101.101 + 11.11 + 1.0011$

(h) 101.01×1.01

8. Rešite križanko, ki je popolnoma dvojiška.

Vodoravno:

1. $1011 + 11$

$1000.10\ 000 : 100$

$101.1110 : 10$

$1010.100 - 1$

$110.1 + 1$

$1011.111 - 10$

$111.10 + 1$

1101.111×11

Navpično:

1. 111×10

$110.11 + 10$

$10.1 + 10 + 100$

$1001.1111 - 1010$

11.11×10

$1011.11 + 0.1$

$100.1101 + 110$

$1100.100 : 10$

1	10	11			100
101				110	
111			1000		
		1001		1010	
	1011		1100		
1101					

Sestavi z osnovo večjo od 10

Če osnova številskega sestava ne presega 10, uporabljamo za označevanje števk ustrezne znake za desetiške številke, v osnovi 7 npr. 0, 1, 2, 3, 4, 5 in 6. Če je osnova večja od 10, moramo za številke nad 9 uvesti nove oznake. Za osnovo 12 potrebujemo npr. novi oznaki za številki deset in enajst. Ponuja se izbira D za deset in E za enajst. Pri taki izbiri v sestavu z osnovo 12 štejemo takole:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, D, E, 10, 11, 12, 13, ...

Če pri osnovi 14 izberemo za deset, enajst, dvanajst in trinajst oznake A, B, C, D, poteka štetje takole:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
18, 19, 1A, 1B, 1C, 1D, 20, ...

9. Izračunajte v dvanajstiškem sestavu:

(a) $29 + 37$

(d) $D + D$

(b) $46 + 6$

(e) $D \times 2$

(c) $25 + 27$

(f) 12×11

Tako, pri koncu smo. Sedaj pa k nagradni nalogi na str. 194, če je še niste rešili.

Marija Vencelj

Rešitve so na strani 236.

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

Vsi poznamo tisto o trgovcu, ki je prodajal gosje jajce in pol po en euro in pol, kupci pa so se spraševali, koliko stane eno jajce.

Navihan fantič pa je trgovcu zastavil naslednje vprašanje: "Če znesejo v povprečju tri kure in pol v treh dneh in pol tri jajca in pol, koliko jajc smemo pričakovati od sedmih kur v enem tednu?"

Aleksandar Jurišić

Rešitev je na str. 223.

VEČ VODIKOVIH ANTIATOMOV

V šesti številki leta 1996 je Presek poročal o prvih devetih antiatomih vodika, ki so jih tedaj zaznali v Evropskem laboratoriju za jedrska raziskovanja CERN v Ženevi. V istem letniku Preseka so izšli tudi trije prispevki o pasteh, v katerih naelektrene delce z električnim in magnetnim poljem zadržimo v delu prostora. Na kratko povzemimo tedanje pisanje.

Vsak delec ima svoj antidelec z enako maso, a nasprotnim znakom naboja. Antidelec ali razpada z enakim razpolovnim časom kot delec ali je obstojen, če je obstojen delec. Nekateri nevtralni delci se ne razlikujejo od svojih antidelcev. Foton, obrok energije elektromagnetnega valovanja, se, na primer, ne razlikuje od antifotona. Antidelec elektrona je pozitron in antidelec protona antiproton. Antidelec atoma vodika, v katerem sta vezana negativni elektron in pozitivni proton, je antiatom vodika ali atom antivodika, v katerem sta vezana pozitivni pozitron in negativni antiproton. Pozitron in antiproton sta obstojna, kot sta obstojna elektron in proton. Toda pozitron preneha obstajati, brž ko sreča elektron. Pri tem pride do *anihilacije*, pri kateri energijo mase elektrona in pozitrona prevzamejo dva ali trije fotoni, ki pri tem nastanejo. Tudi antiproton se anihilira, brž ko sreča proton. Pri tem nastanejo naelektreni in nevtralni pioni, ki niso obstojni in razpadejo dalje; pogosto nastanejo štirje naelektreni pioni, dva negativna in dva pozitivna. Pioni so mezoni, "delci z maso med elektronom in protonom", in z njimi lahko pojasnimo sile med protoni in nevtroni v atomskih jedrih.

Pozitroni torej ne smejo srečati elektronov in antiprotoni ne protonov. Enim in drugim je treba preprečiti, da bi prišli v stik z navadno snovjo, na primer s steno posode. V ta namen uporabimo past. Antiprotone in pozitrone je potrebno ujeti v past in jih nato spraviti skupaj, da se vežejo v antiatome vodika. Kakor je zamisel preprosta, jo je težko uresničiti. Antiprotoni imajo naboj drugega znaka kot pozitroni in obojih delcev ni mogoče preprosto ujeti v isto past. Antiprotoni in pozitroni se ob nastanku gibljejo s hitrostjo, le malo manjšo od hitrosti svetlobe. Električna privlačna sila, ki veže elektron in proton v atom ter pozitron in antiproton v antiatom, pa je tako šibka, da delcev ne more zvezati, če domala ne mirujeta.

Leta 1996 še niso mogli dobiti počasnih antiprotonov in pozitronov. Tedaj so antiatome dobili tako, da so antiprotone zavrli do hitrosti 270 km/s in jih usmerili na curek atomov ksenona. Ob reakcijah so nastali tudi pozitroni, od katerih so se maloštevilni gibal domala z enako hitrostjo kot antiprotoni in se z njimi zvezali v antiatome. Zato so zaznali samo devet antiatomov. Tega leta je v CERN prenehal delovati nizkoenergijski

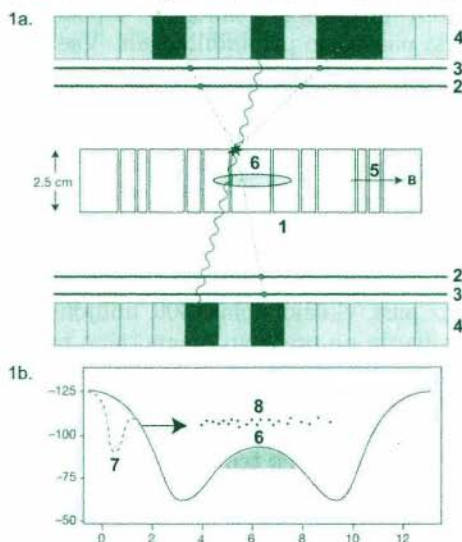
antiprotonski obroč LEAR (Low-Energy Antiproton Ring), v katerem so zbirali in zavirali antiprotone. V nekaj letih so ga nadomestili z antiprotonskim pojemnikom AD (Antiproton Decelerator), v katerega so delno vgradili stare sestavne dele. Tako je stal po merilih eksperimentalne fizike visokih energij skromnih 5 milijonov dolarjev. Stroški za njegovo delovanje pa so desetkrat nižji od stroškov za delovanje LEAR. Čeprav daje stokrat manj antiprotonov, to zadostuje za raziskovanje antiatomov.

Ob njem se z antiatomi ukvarjata dve mednarodni raziskovalni skupini. Skupina ATHENA – sestavlja jo 39 raziskovalcev z devetih ustanov, večinoma univerz, iz Anglije, Brazilije, Danske, Italije, Japonske in Švice – je septembra 2002 poročala o svojem uspehu. Njeno napravo v neposredni bližini pojemnika sestavljajo past za antiprotone, past za pozitrone, mešalna past, v kateri antiprotone “zmešajo” s pozitroni, in merilnik za zaznavanje delcev, ki nastanejo pri anihilacijah. Vse pasti so *Penningove* vrste z več zaporednimi obročastimi elektrodami na isti osi, priključenimi na različne električne napetosti (slika 1a). V pasti ustvarijo v smeri osi močno magnetno polje s superprevodno tuljavo za antiprotone in šibkejše magnetno polje z običajno tuljavo za pozitrone. Naelektreni delci se v prečnem magnetnem polju gibljejo po krožnicah in se ne oddaljijo od osi. Električno polje pa veže naelektrene delce v smeri osi (slika 1b). Pasti so v vakuumu pri temperaturi samo 15 kelvinov, to je samo 15 °C nad absolutno ničlo.

Najprej v prvo past vložijo oblak 300 milijonov elektronov, ki se zaradi sevanja pri gibanju po prečnem magnetnem polju “ohladi”. S tem hočemo reči, da delci v oblaku sevajo in se jim zato zmanjša povprečna kinetična energija na vrednost, značilno za tamkajšnjo temperaturo. Za temperaturo T je značilna energija kT z Boltzmannovo konstanto $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ joulov na kelvin. Po tem je za 15 kelvinov značilna energija $2 \cdot 10^{-22}$ joula ali 0,0013 elektronvolta. Tolikšni kinetični energiji ustreza hitrost elektronov 21 km/s ali hitrost protonov 0,5 km/s. V tem smislu govorijo o vodikovih antiatomih z majhno kinetično energijo kot o *hladnih antiatomih*.

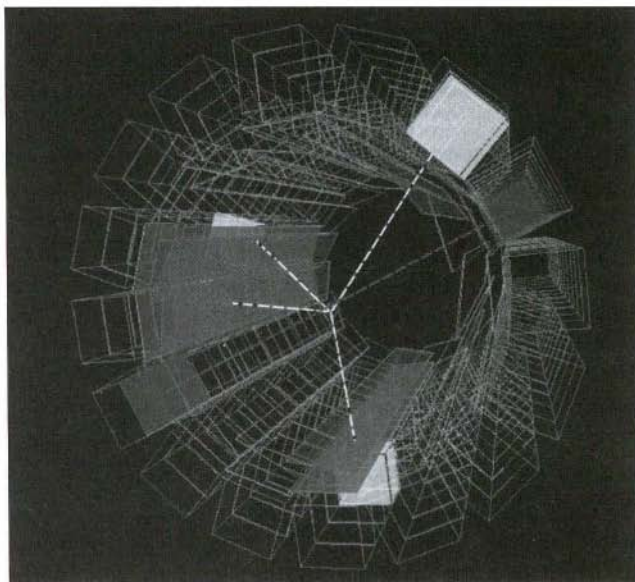
Iz pojemnika prileti gruča 20 milijonov antiprotonov s hitrostjo 31 000 km/s skozi tanek aluminijev listič. Pri prehodu skozi listič antiprotoni izgubijo velik del kinetične energije in jih sunek električne napetosti nato umesti v past. V njej se v ohlajenem oblaku elektronov zaradi sodelovanja z njimi – anihilirati se ne morejo – ohladijo tudi sami. Antiprotoni so precej počasnejši od elektronov in oblak antiprotonov se ne bi mogel ohladiti brez elektronov samo zaradi gibanja po prečnem magnetnem polju. Po tem elektrone zavržejo. V kovinskem lističu je zaradi anihilacije šlo v izgubo veliko antiprotonov. V antiprotonski del mešalne pasti vložijo tri gruče, to je skupaj 10 tisoč antiprotonov.

Pozitrone dobijo iz radioaktivnega izvira, v katerem razpade 1,4 milijarde jeder umetnega radioaktivnega izotopa natrija ^{22}Na na sekundo. Najprej v pozitronskem delu pasti zberejo oblak pozitronov, ki se zaradi sevanja pri gibanju po prečnem magnetnem polju ohladi. Nato jih 70 milijonov skozi tanko plast trdnega neona vložijo v mešalno past. Po prehodu skozi plast neona pozitroni izgubijo nekaj kinetične energije in se poslej po njej manj razlikujejo med seboj. Oblak pozitronov se sprva zadržuje v srednjem delu mešalne pasti (slika 1a). Nato spremenijo napetost na eni od elektrod (od sklenjene krivulje na črtkano krivuljo na sliki 1b) in oblak antiprotonov začne nihati skozi oblak pozitronov. Pri tem se nekateri od pozitronov vežejo z antiprotoni v antiatome. Delce zbirajo dobre tri minute, nato vse delce zavržejo in postopek vsakih pet minut ponovijo.



Slika 1. Mešalno past sestavljajo obročaste elektrode (1). Okoli njih so nameščeni silicijeva merilnika (2 in 3) in merilnik s kristali cezijevga jodida (4). Naprava je osno simetrična. Obdajata jo tuljavi, s katerima ustvarijo magnetno polje v smeri osi (5) in ki ju ni na risbi (a). Med obročastimi elektrodami je električno polje v smeri osi. Na navpično os je nanesena napetost v voltih, ki do predznaka ustreza potencialni energiji v elektronvoltih. Na vodoravno os je nanesena razdalja od levega roba pasti v centimetrih. Črtkana krivulja kaže napetost tik pred mešanjem in sklenjena krivulja med mešanjem. Oblak pozitivnih pozitronov se zadržuje v bližini lokalnega maksimuma (6), oblak negativnih antiprotonov pa najprej okoli lokalnega minimuma (7) in potem med mešanjem niha sem in tja (8) skozi oblak pozitronov. Fotona nakazujeta valoviti črti, naelektrene pione pa črtkane črte (b). Slika je vzeta iz članka M. Amoretti in drugi, *Production and detection of cold antihydrogen atoms*, Nature **419** (2002) 456 z ljubeznivim dovoljenjem profesorja Jeffreya Hangsta. Sliki 1 in 2 sta z dovoljenjem ponatisnjeni iz Nature, ki jo izdaja založba Macmillan Publishers Ltd.

Antiatomi so električno nevtralni in jih električno in magnetno polje ne vežeta na past. Brž ko nastanejo, jo zapustijo in zadenejo atome v elektrodah. Tam se antiproton anihilira s protonom in merilnik zazna naelektrene pione, ki pri tem nastanejo. Pozitron se anihilira z elektronom in merilnik zazna dva fotona z določeno energijo (slika 2). Pione zaznavata silicijeva merilnika. Rezina silicija ima zgoraj in spodaj mikroskopsko tanke pasove, ki jih od sosednjih pasov ločijo mikroskopsko tanke brazde. Vsak pas ima vlogo polprevodniške diode, priključene v zaporni smeri. Naelektreni delec na poti skozi polprevodnik ustvari nosilce naboja in ti povzročijo suneč toka skozi diodo, ki ga ojačijo. Po tem, v katerem pasu na zgornji strani in v katerem pasu na spodnji se pojavita sunka, je mogoče določiti mesto prehoda naelektrenega piona skozi merilnik. Spodnji pasovi so namreč glede na zgornje za približno 2° zasukani in tako na opisani način določimo lego kot presečišče premic, ki se sekata pod majhnim kotom.



Slika 2. Dogodek, kakršnega kaže slika, priča, da je nastal in se anihiliral antiatom vodika. Ob anihilaciji antiprotona in protona so nastali štirje naelektreni pioni, ob anihilaciji pozitrona in elektrona pa sta nastala dva fotona z energijo po 511 keV in odletela v nasprotnih smereh. Naelektrene pione sta zaznala silicijeva merilnika, fotona pa scintilacijska merilnika s cezijevim jodidom. Slika je vzeta iz članka T. W. Hijmans, *Cold antihydrogen*, Nature **419** (2002) 439 z ljubeznivim dovoljenjem profesorja Toma Hijmansa.

Prvi silicijev merilnik je nameščen po plašču valja, koncentričnem z osjo, in drugi silicijev merilnik po plašču valja z nekoliko večjim polmerom. Po točkah, v katerih merilnika zaznata pion, je mogoče ugotoviti, iz katere smeri je prišel. S štirimi določenimi smermi naelektrenih pionov je mogoče določiti, kje je prišlo do anihilacije antiprotona in protona. Fotona z določeno energijo, ki nastaneta pri anihilaciji pozitrona in elektrona, odletita v nasprotnih smereh. Zaznajo ju in izmerijo njuno energijo s kristali cezijevega jodida. Po dvanajst takih kristalov je razvrščenih v šestnajst vrst po plašču valja zunaj drugega silicijevega merilnika. Fotoni v kristalih sprožijo drobne bliske, ki jih zaznavajo fotopomnoževalke.

Za anihilacijo antiatoma sta značilna dva fotona, z določeno energijo v nasprotnih smereh, in štirje naelektreni pioni. Vsi ti delci se morajo pojaviti sočasno v roku 5 milijonin sekunde in izhajati iz dela prostora z linearno razsežnostjo 4 mm. Bolj natančno točke anihilacij ne morejo določiti, ker ne upoštevajo posebej, da se pioni odklonijo, ko se gibljejo po magnetnem polju. Podatke z merilnikov neposredno zapisujejo v računalnik. Iz množice dogodkov je računalnik izbral 131 takih, ki ustrezajo zahtevama o sočasnosti in skupnem kraju nastanka. Ocenili so, da se je od teh okoli 22 antiprotonov in pozitronov anihiliralo, ne da bi se prej zvezali v antiatome vodika. Vseeno so opazovali nastanek in anihilacijo več kot sto antiatomov vodika. Vsega skupaj naj bi nastalo približno 50 tisoč antiatomov vodika, a njihove anihilacije niso zaznali.

Čeprav je povečanje od 9 do 131 antiatomov velik korak, bi si jih želeli še veliko več. Le z veliko večjim številom antiatomov bi bilo mogoče delati podobne poskuse kot z vodikom. Zelo natančno je mogoče izmeriti valovne dolžine svetlobe, ki jo seva plinasti vodik. Pri merjenju ene od valovnih dolžin je uspelo zmanjšati relativno napako celo na 10^{-14} . Želeli bi si, da bi s podobno natančnostjo uspeli izmeriti valovno dolžino svetlobe, ki jo seva plinasti antivodik. Primerjava obeh valovnih dolžin bi pokazala, kako natančno se lastnosti antiatomov ujemajo z lastnostmi atomov. Odgovor na to vprašanje je v teoriji delcev zelo pomemben.

Možnost za doseg tega bi bila past za nevtralne antiatome. V tako past z magnetnim poljem, ki se spreminja s krajem, je raziskovalcem že uspelo ujeti oblak atomov vodika ali alkalijskih elementov. Ti atomi se v magnetnem polju vedejo kot drobne magnetnice. Vendar je past za nevtralne delce še šibkejša in morajo v tem primeru atomi v oblaku imeti zelo majhno povprečno hitrost, se pravi, da morajo biti ohlajeni na temperaturo nekaj kelvinov.

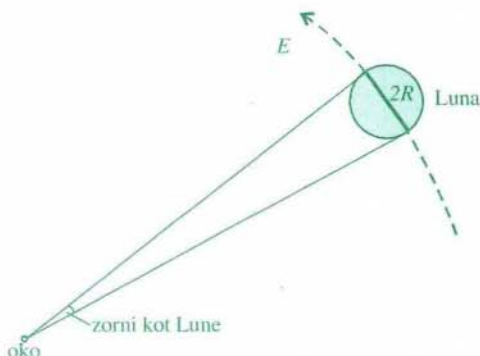
Janez Strnad

HITROST LUNE

Luna se giblje okoli Zemlje po rahlo sploščeni elipsi in neenakomerno. Privzamemo lahko, da se giblje enakomerno po krožnici, v središču katere je Zemlja. Hitrost Lune na njenem tiru okrog Zemlje zato lahko preprosto izračunamo iz enačbe $v = 2\pi r/t_o$, če je $r = 380\,000$ km oddaljenost Lune od Zemlje, $t_o = 27,3$ dneva pa obhodni čas Lune (zvezdni mesec). Hitrost je $v = 2\pi \cdot 380\,000 \text{ km} / 27,3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 1 \text{ km/s}$.

Luna torej kroži okoli Zemlje s hitrostjo približno kilometer na sekundo.

Hitrost Lune je mogoče izračunati še drugače. Zaradi kroženja okoli Zemlje se Luna vsak dan na nebu (t.j. navidezno) premakne za $360^\circ/27,3 = 13^\circ$ na dan proti vzhodu, kar je približno $0,5^\circ/\text{h}$. Zorni kot Lune pri opazovanju z Zemlje pa meri prav $0,5^\circ$. V tem zornem kotu vidimo Lunin premer, ki meri $2R = 3\,500$ km (slika 1). Tako lahko zapišemo $v = 2R/h = 3\,500 \text{ km} / 3\,600 \text{ s}$, kar zaokrožimo na 1 km/s .



Slika 1. Zorni kot Lune pri opazovanju z Zemlje je $0,5^\circ$. Zaradi kroženja okoli Zemlje Luna navidezno prečka ta kot približno v eni uri. Pri tem se premika od zahoda proti vzhodu (mesečno gibanje Lune), medtem ko se zaradi vrtenja Zemlje vsak dan giblje od vzhoda proti zahodu (dnevno gibanje Lune).

Marijan Prosen

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES – Rešitev s str. 217

Štirinajst.

Aleksandar Jurišić

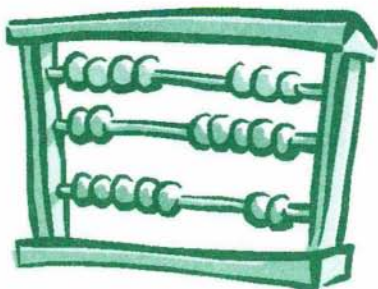
KRIŽANKA “ZNAMENJA ZODIAKA”

						OBLIKA SAMOSTALNIKA	ATLETSKA SKAKALNA PANOGA	A/TOMOB. OZNAKA REKE	PRAVA GREŠNICA NA SVETU	BRITANSKA PRESTOLNICA	ZAGNANOST ZA DELO, VNEMA
AVTOMOBILSKA OZNAKA DANSKE			IME VEČ SLOVENSKEGA KRAJEV	SOSEDI CRKE C	LOV NA CRNO REKA V KAZAHSTANU						
IZRAZ DOBRIH ŽELJ KOTU								ODNOS UJEMANJA V LOGIKI			
POŠKODOVANOST TKIVA OD MRAZA								TROPSKI KOPITAR			
PEVEC BON JOVI				BLAGA IN IZTRŽEK					DUŠAN NEČAK		
				VISOK ZRAČNI PRITISK					ZABAVIŠČNA ČETRTE V LONDONU		
SLED PISALA NA PAPIRU					SLOV. IGRALEC (MARKO)	IMITACIJA					HRAŠKO MOŠ, IME AN. IGRALEC (FRED)
RUSKO IME LITOV. MESTA KAUNAS						SUNKOVIT IZDIH PRI PREHLADU				ZABOJ S POKROVOM	
						PEVEC SMOLAR				ŽILE DOVODNICE	
PROPAGANDI NAMENJENO UMETNIŠKO DELO							KRAJ NAD LOGATCEM				
							ANGL. QAM. PLOŠČINSKA MERA				
	ELEKTRIČNI USMERNIK							UPOR LJUDSTVA PROTI OBLASTI	ANGLEŠKI PLEMŠKI NASLOV		
	TV NOVINAR SLAK	LETUVIŠČE V HRV. PRIMORJU							ETILNI ALKOHOL		
		OTKA									
BLAG SEVEROVZHODNIK NA JADRANU						ORGANSKA SPOJINA					
						NEM.-FR. DADAIST (HANS)					
DRŽAVA SAĐAMIA HUSEINA					MESTO V SZ GRČIJI					ZANOS, VZNESE-NOST	
					VELIKA PISANA PAPIGA					BOS.-HRV. REKA	
IZDELOVALEC KOTLOV							SUMERSKI BOG NEBA				NAJNIŽJI TAROK, PALČKA
							IVAN ŠTALEC				
											
	TOLSTOJEVA JUNAKINJA KARENINA						SMEŠNICA, VIC				

GRAJ NAD VIPAJSKO DOLINO			GLAVNO MESTO TIBETA	ERVIN ČURLIČ	JUŽNO- AMERIŠKI GLODALEC		
		SLOV. SLIKAR (KOSTJA)	DOMISEL- NOST IZVIRNOST	DEKLICA V ODNOSU DO STARŠEV JANEZ ALBREHT		SIMBOL ZA GOSTOTO GIMNAZIJA V LJUBLJANI	100 m ²
					SADNO DREVO IN NJEGOV KOSČOČASTI SADEŽ		
ROPADLA BORZNA HISA (JAŠ EPIK ANTON)					MINISTER ZA ZDRAVJE (DUŠAN) LIDIA OSTERC		
				DEČEK S ČUDEŽNO SVETILKO IZBRIZG. IZMEČEK			AVTOR MARKO BOKALIČ
				PARNI OR- GAN VIDA RUS. RIT- MIČARKA KABAJEVA		PROSTOR, KJER SE PRODAJA IN KUPLJE	
				BIVŠI ANG. PEVEC (ADAM) ATENSKI DRŽAVNIK			NEKDANJI BOKSARSKI SVETOVNI PRVAK (MOHAMED)
	MEDVEDEK VREČAR ČERK- LIJSKA MASKARA				ANGLŠKI IZRAZ ZA UMETNOST OKAY		
		VOZILCE, KI SE POGANJA Z NOGO				GRŠKA BOGINJA ZEMIJE NASPROTJE PASIVE	
		STARORIM. OBLAČILO RAZREZO- VALEC HLODOVINE				HEKTO- LITER POLMER	
IZNAKA RAZDINA MITJA IKOVŠEK			NITAST IZRASTEK NA GLAVI PREDEL BLEDA		PODZEMNI ŽUŽKOJEDI UMRLI RAD. NOVINAR (STANE)		
				SLOV. MANEKENKA (TATJANA)			DOLGO- DLAKO TIBETAN. GOVEDO
				PLATINI SORODNA KOVINA (IF)			
							
	EGIPČAN- SKI BOG SONCA			LAHEK KONICAŠT COLN			

RAČUNALA NOVE DOBE, 1. del

Ste že kdaj razmišljali, na kakšen način računajo računalniki ter ostale digitalne naprave, ki nas obkrožajo v času informacijske revolucije? V tem sestavku se bomo poskusili s pomočjo osnovnošolskega računanja približati računalom, ki jih preko številnih naprav, kot so osebni računalniki in pametne kartice, uporabljamo v vsakdanji praksi.



Vsi poznamo tabele za seštevanje in množenje (tabela 1).

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

(a)

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	...
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	...
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	...
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	...
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	...
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	...
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	...
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

(b)

Tabela 1. (a) tabela za seštevanje, (b) tabela za množenje.

Drugi tabeli pravimo *poštevanka* in se jo morajo drugošolci od nekdanj učiti na pamet ter si jo zapomniti za vse življenje. Seveda si ni potrebno zapomniti vseh 100 zmnožkov; večkratniki števil 1 in 10 so otročje lahki, množenje z 2 ni nič težje kot seštevanje, vrstni red pri množenju ni prav nič pomemben (*zakon o zamenjavi* ali *komutativnost*) (tabela 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55

(a)

1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51
2	7	12	17	22	27	32	37	42	47	52
3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53
4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

(b)

Tabela 2. Ploščina pravokotnika s stranicama a in b je enaka tako ab kakor tudi ba . Enkrat štejemo kvadratke po vrsticah, drugič pa po stolpcih.

Tabela za poštevanke je simetrična glede na diagonalo, torej si je potrebno zapomniti le približno tretjino zmnožkov. Omenimo še dve bližnjici.

Večkratniki števila 9. Koliko je 9×7 ? Uporabimo metodo računanja s prsti. Ne vzamemo v roke žepnega računalca, temveč potegnemo iz žepov deset prstov. Ker gre za sedemkratnik števila devet, pripognemo sedmi prst z leve in odčitamo: šest (6) prstov na levi ter trije (3) na desni in že vemo, da je pravilni odgovor 63.

Večkratniki števila 11. Koliko je 11×13 ? Zelo enostavno! Enico in trojko razmaknemo, med njiju pa zapišemo njuno vsoto in že dobimo iskani produkt 143.

Ko končno obvladamo tabelo množenja, ni več težko zmnožiti poljubnih števil (zapisanih v desetiškem zapisu), saj množimo le posamezne številke in nato samo še seštevamo (tabela 3).

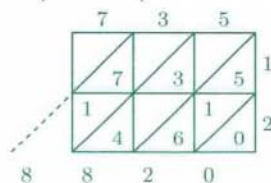


Tabela 3. France Križanič v svoji knjigi *Križem po matematiki* predstavi indijski način množenja s pomočjo pravokotne mreže, razdeljene v kvadrate. Vsaki številki prvega faktorja pripada po en stolpec, vsaki številki drugega faktorja pa ena vrsta kvadratkov. V vsak kvadrček zapišemo produkt obeh števil, ki pripadata stolpcu in vrsti, v kateri je kvadrček. Desetice tako dobljenega produkta zapišemo v levi zgornji kot, enice pa v spodnji desni kot. Ko so vpisani vsi produkti, je potrebno le še sešteti števila v smeri diagonal in že dobimo produkt.

Če pa bi računali v petiškem zapisu ali celo dvojiškem, bi bila matematika v drugem razredu veliko lažja (tabela 4).

*	1_5	2_5	3_5	4_5	10_5	...
1_5	1_5	2_5	3_5	4_5	10_5	...
2_5	2_5	4_5	11_5	13_5	20_5	...
3_5	3_5	11_5	14_5	22_5	30_5	...
4_5	4_5	13_5	22_5	31_5	40_5	...
10_5	10_5	20_5	30_5	40_5	100_5	...
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(a)

*	1_2	10_2	...
1_2	1_2	10_2	...
10_2	10_2	100_2	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(b)

+	0_2	1_2	...
0_2	0_2	1_2	...
1_2	1_2	10_2	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(c)

Tabela 4. (a) tabela za množenje v petiškem sistemu, (b) tabela za množenje v dvojiškem sistemu, (c) tabela za seštevanje v dvojiškem sistemu.

V prvem primeru bi si bilo potrebno zapomniti le 6 zmnožkov, v drugem pa pravzaprav nobenega. Prav zato običajno računalniki računajo račune v dvojiškem sistemu. Pred njimi pa so tako računali že Indijanci. Ko so npr. želeli izračunati 15×13 , so enega izmed faktorjev zapisali kot vsoto potenc števila 2, npr. $13 = 1 + 4 + 8$, t.j. v dvojiškem sistemu 1101_2 , in nato drugega le množili z dve in seštevali (tabela 5a). Če je tudi drugo število zapisano v dvojiškem sistemu, t.j. $15 = 1 + 2 + 4 + 8 = 1111_2$, potem je množenje z dve doseženo na prav enostaven način: na koncu števila je potrebno pripisati ničlo (tabela 5b) in že dobimo $11000011_2 = 128 + 64 + 2 + 1 = 195$.

$$\begin{array}{rcl}
 15 \times 1 & = & 15 \\
 30 \times 0 & = & 0 \\
 60 \times 1 & = & 60 \\
 120 \times 1 & = & 120 \\
 \hline
 & & 195
 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{rcl}
 1111_2 \times 1 & = & 1111_2 \\
 11110_2 \times 0 & = & 0_2 \\
 111100_2 \times 1 & = & 111100_2 \\
 1111000_2 \times 1 & = & 1111000_2 \\
 \hline
 & & 11000011_2
 \end{array}$$

(b)

Tabela 5.

Grupe in obsegi

Poleg seštevanja in množenja pa se v prvih razredih osnovne šole naučimo tudi odštevati in deliti. Seveda začnemo najprej odštevati manjša števila od večjih. Pri tem si lahko pomagamo s tabelo 1a. Če želimo izračunati $a - b$ in je $a \geq b$, se lahko vprašamo:

b plus koliko je a ?

To pomeni, da pogledamo v vrstico, ki ustreza številu b , iskano razliko pa najdemo na vrhu stolpca, ki ustreza številu a iz te vrstice. Za razliko $5 - 3$ poiščemo v tretji vrstici število 5. Najdemo ga na drugem mestu in zato vemo, da je razlika enaka 2. Šele nekoliko kasneje se naučimo, da moramo v primeru, ko želimo odšteti večje število od manjšega, števili najprej zamenjati, na koncu pa dobljeni razliki spremeniti predznak. Zaradi tega smo povečali množico naravnih števil $\mathbb{N}$ do množice celih števil $\mathbb{Z}$.

Deljenje ni tako preprosto. Če želimo a deliti z b , se lahko prav tako kot prej vprašamo: " b krat koliko je a ?" Vendar ni gotovo, da bomo v vrstici, ki ustreza številu b , našli število a . Pogosto se namreč zgodi, da število a ni deljivo s številom b . Množico števil lahko sicer povečamo do množice ulomkov $\mathbb{Q}$, kjer lahko delimo s poljubnim od nič različnim številom, a potem nastopijo druge težave. Najdemo lahko različne ulomke, ki so si poljubno blizu, tudi tako blizu, da jih računalnik ne more več ločiti. Ker pa si želimo, da bi se računalniki čim manj motili, se vprašajmo po množicah, v katerih bi lahko brez težav tudi delili, po možnosti na enak način kot znano odštevati. Da bi bilo to mogoče, se morajo v vsaki vrstici tabele pojaviti vsa od nič različna števila. Pravzaprav se je potrebno vprašati, na katera pravila se želimo pri računanju opreti. Naštejmo jih nekaj.

1. Običajno je prvo pravilo *zaprtost*, rezultat, ki ga dobimo po opravljeni operaciji med dvema številoma, je tudi v množici, iz katere smo izbrali števili. Množica naravnih števil je zaprta za seštevanje in množenje, saj v tabelah 1a in 1b nastopajo samo naravna števila. Ni pa množica naravnih števil zaprta za odštevaje. To lastnost ima na primer množica celih števil.

2. V množici celih števil igra pomembno vlogo število 0; pa ne samo zato, ker loči pozitivna števila od negativnih, pač pa tudi zato, ker se nobeno število s prištevanjem števila 0, ne spremeni. Tudi pri množenju najdemo nekaj podobnega. Če pomnožimo katerokoli od nič različno število z 1, dobimo zopet isto število. Takemu številu pravimo *nevtralni element* ali pa tudi *enota* za ustrezno operacijo.

3. V množici celih števil sta poljubni števili $-a$ in a povezani z enoto za seštevanje na naslednji način: $a + (-a) = 0$. Pravimo, da je $-a$ *nasprotni element* števila a . Celo število b je *obratni element* celega števila a , če je $ab = 1$. Od tod sledi $a = b = 1$ ali $a = b = -1$, t.j. v množici celih števil imata le števili 1 in -1 obratni element.

4. Če si izberemo poljubna števila a , b in c , potem velja $a + (b + c) = (a + b) + c$ in $a(bc) = (ab)c$. O drugi enakosti se lahko prepričamo z računanjem prostornine kvadra s stranicami a , b in c . Tem lastnostim pravimo *zakon o združevanju* za seštevanje oziroma za množenje (ali tudi *asociativnost*). Le-ta nam pove, da je vseeno, ali začnemo računati z leve ali z desne. To seveda ne drži za odštevanje ali deljenje.

Če v množici G z binarno operacijo $\circ$, t.j. operacijo, ki vsakemu urejenemu paru elementov iz G priredi natanko določen element, veljajo naslednja pravila:

$$(G1) \text{ za vsaka } a, b \in G \text{ je } \boxed{a \circ b \in G},$$

$$(G2) \text{ obstaja tak element } e \in G, \text{ da za vsak } g \in G \text{ velja } \boxed{e \circ g = g \circ e = g},$$

$$(G3) \text{ za vsak element } g \in G \text{ obstaja tak } f \in G, \text{ da je } \boxed{g \circ f = f \circ g = e},$$

$$(G4) \text{ za vse } a, b, c \in G \text{ velja } \boxed{(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)},$$

potem pravimo, da je par $(G, \circ)$ **grupa**. Elementu e pravimo **enota** grupe, elementu f pa **inverz** elementa g . Množica celih števil je grupa za seštevanje, ni pa grupa za množenje, saj ni izpolnjeno pravilo (3) (le 1 in -1 imata inverzni element za množenje).

Matematiki so potrebovali več kot sto let trdega dela, da so končno (eksplicitno) zapisali zgornja pravila (*aksiome*). *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) je leta 1771 postavil prvi pomembnejši izrek. *Augustin Louis Cauchy* (1789–1857) je študiral grupe permutacij, medtem ko je *Niels Henrik Abel* (1802–1829) s teorijo grup pokazal, da enačba 5. stopnje ni rešljiva z radikali (t.j. rešitve ne znamo zapisati s formulami kot v primeru enačb nižjih stopenj). Pravi pionir abstraktnega pristopa pa je bil *Evariste Galois* (1811–1832), ki je leta 1823 prvi uporabil besedo "grupa". Leta 1854 je *Arthur Cayley* (1821–1895) pokazal, da je grupo moč definirati ne glede na konkretno naravo njenih elementov.

Galois je vpeljal tudi naslednji pojem. Če za neko množico $\mathcal{O}$ z binarnima operacijama, ki ju bomo označili s $+$ in $*$ (četudi ne predstavljata nujno običajnega seštevanja in množenja), velja

- (O1) par $(\mathcal{O}, +)$ je grupa z enoto 0,
 (O2) par $(\mathcal{O} \setminus \{0\}, *)$ je grupa z enoto 1,
 (O3) za vse $a, b, c \in \mathcal{O}$ je $a * (b + c) = a * b + a * c$ in $(b + c) * a = b * a + c * a$,

potem imenujemo trojico $(\mathcal{O}, +, *)$ **obseg**. Množica ulomkov z običajnim seštevanjem in množenjem je primer obsega. O lastnosti (O3), ki jo imenujemo *zakon o razčlenjevanju* oziroma *distributivnost*, se lahko prepričamo z računanjem površine pravokotnika s stranicama a in $b + c$.

Za konec zastavimo še nekaj nalog:

1. Poišči še kakšno zanimivo pravilo za množenje (kot sta bili pravili za računanje večkratnikov števil 9 in 11). Če ne gre v desetiškem sistemu, pa poskusi v kakšnem drugem sistemu.
2. Poznamo še veliko grup, ki ne izhajajo iz množice števil s seštevanjem ali pa množenjem. Poišči še kakšne množice z binarnimi operacijami in preveri, katera izmed pravil (G1) – (G4) veljajo zanje. Zanimiva množica so simetrije določenega geometrijskega objekta, npr. enakostraničnega trikotnika ali pa kocke. Kakšno binarno operacijo bi vpeljali med simetrije, da bi dobili grupo? Spet druga zanimiva množica so funkcije. Kaj pa lahko rečemo o preseku in uniji množic?
3. Dokaži, da je v poljubni grupi G za vsaka $a, b \in G$ rešljiva enačba $a \circ x = b$. Poišči nekaj najmanjših grup (glede na število elementov). Kako jih lahko najlažje predstaviš?
4. Poišči najmanjši obseg.

V drugem delu si bomo za cilj postavili iskanje obsega s končno mnogo elementi, v katerem bo računanje v nekem smislu še udobnejše kot v obsegih, ki jih srečamo v osnovni ali srednji šoli (racionalna števila $\mathbb{Q}$, realna števila $\mathbb{R}$ ali celo kompleksna števila $\mathbb{C}$). Več o uporabi končnih obsegov pri nemotenemu branju zgoščenk ter prenašanju slik z oddaljenih planetov kot je Mars pa boste spoznali v članku *Napake niso za vedno*.

Aleksandar Jurišić

LADJA IN MEHURČKI



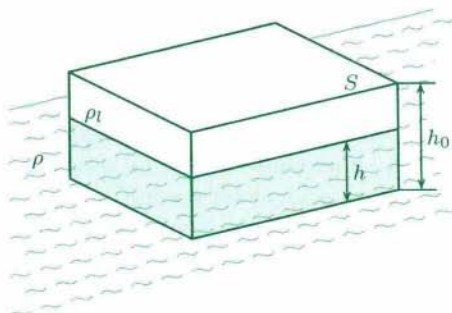
Nekatere mornarske zgodbe poročajo o ladjah, ki naj bi na morju izginile brez sledu. Posebno na slabem glasu je v tem pogledu območje okoli Bermudov, ki mu pravijo *Bermudski trikotnik*. Ali bi bilo mogoče s kakim znanim pojavom pojasniti, da ladja nepričakovano potone? Eden od takšnih pojavov bi utegnil biti močan izbruh metana z morskega dna. Taki izbruhi na omenjenem območju menda niso redki. Ladja lahko potone, če po naključju zaide v dovolj močan tok mehurčkov. Pri tem se lahko prevrne, če se mehurčki nenadoma pojavijo samo na eni strani. Take pojave je težko zajeti, ker imajo pri njih pomembno vlogo posebne

okolščine, ki se od primera do primera razlikujejo. Tu bomo opisali preglednejši pojav, da ladja potone, ko zaide v stalen navpični tok mehurčkov.

Po Arhimedovem zakonu tekočina deluje na potopljeno telo z vzgonom, ki je enak teži izpodrinjene tekočine. Ladja ima manjšo povprečno gostoto kot voda in plava na gladini, ker teža izpodrinjene vode uravnovesi težo ladje. Zaradi lažjega računanja ladjo nadomestimo s prizmo z osnovnima ploskvama, vzporednima z gladino. Teža vode s prostornino potopljenega dela prizme mora biti enaka teži prizme (slika 1):

$$\rho Shg = \rho_l Sh_0g \quad \text{in} \quad \rho h = \rho_l h_0.$$

ρ je gostota vode, ρ_l povprečna gostota prizme, h višina potopljenega dela prizme, h_0 višina prizme, S osnovna ploskev prizme in g težni pospešek.



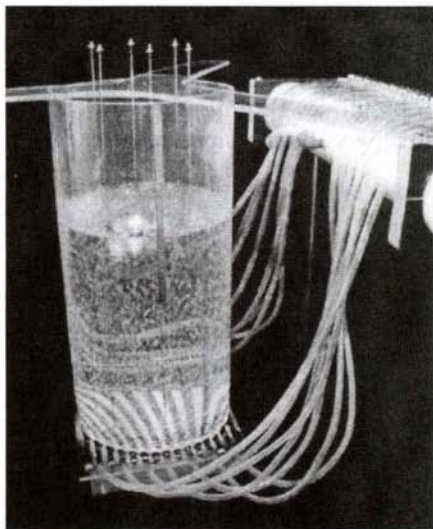
Slika 1. Prizma plava, ko vzgon uravnovesi težo.

V mejnem primeru, ko se prizma ravno potopi, bi bila povprečna gostota prizme enaka gostoti vode. V vodi z dvigajočimi se mehurčki v mejnem primeru povprečna gostota vode in mehurčkov ρ_m postane enaka povprečni gostoti prizme:

$$\rho_m = \rho_l. \quad (1)$$

Privzeli smo, da enakomeren tok mehurčkov v smeri navpično navzgor zaveda vso osnovno ploskev. Tok ni tako močan, da bi bilo treba upoštevati silo, s katero zrak v mehurčkih zaradi gibanja deluje na ploskve prizme, ob katerih polzijo mehurčki.

Študenti in učitelji s pomorske podiplomske šole v Montereyu v Kaliforniji in z univerze zvezne države Mississippi so pojav podrobneje raziskali. Prve poskuse so delali s kosi ledu v toku dvigajočih se mehurčkov. Da bi bilo kose ledu lažje opazovati, so jih naredili iz obarvane vode. Opazovali so, kako so kosi potonili v toku mehurčkov, vendar se je led prehitro talil, da bi bilo mogoče meriti. Zato so namesto ledu uporabili delno polno steklenico. Preizkusili so še več drugih naprav. Nazadnje so uporabili prozorno štirilitrsko valjasto posodo s premerom 30 cm, v kateri je plavala votla jeklena krogla s premerom 10 cm (slika 2). Povprečno

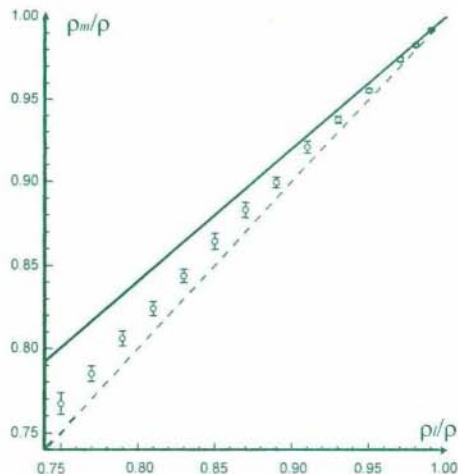


Slika 2. Naprava, s katero so pokazali, da pri dovolj močnem toku mehurčkov zraka v vodi potone plavajoča krogla. Ta slika in naslednja slika sta z ljubeznivim dovoljenjem profesorja Brucea Denarda in uredništva American Journal of Physics vzeta iz članka: B. Denardo, L. Pringle, C. DeGrace, M. McGuire, *When do bubbles cause a floating body to sink?*, American Journal of Physics **69** (2001) 1064.

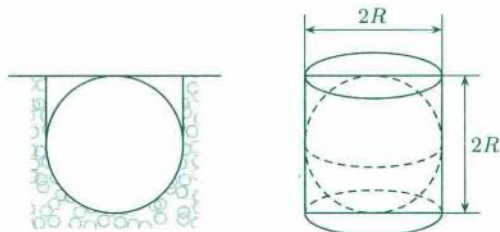
gostoto krogle so spreminjali tako, da so vanjo nalili nekaj vode. Iz posode s stisnjenim zrakom je zrak po cevi preko ventila dotekal v razdelilnik, ki ga je razdelil na 15 cevi. Z ventilom so uravnavali pretok zraka od 0 do 2 litra na sekundo. Cevi so vodile do prav toliko naprav, iz katerih so izhajali mehurčki. Najbolje se je obnesla neka vrsta naprav, kakršne uporabljajo za prezračevanje sobnih akvarijev.

Povprečno gostoto krogle so z dodatkom vode spremenili od $\frac{3}{4}\rho$ do ρ . Kroglo so položili v valjasto posodo, da je plavala na gladini, in povečali tok mehurčkov. Plavanje je postalo nestabilno in krogla je zanihala, ko se je povprečna gostota vode in mehurčkov približala povprečni gostoti krogle. Nato je krogla potonila. Povprečno gostoto krogle ρ_l so določili s tehtanjem, povprečno gostoto vode in mehurčkov ρ_m pa tako, da so izmerili dvig gladine. Gladina vode v posodi je bila v višini H_0 , ko ni bilo mehurčkov in je bila gostota enaka ρ . Pri določenem pretoku zraka je višina gladine narasla na H , ker so del prostornine izpolnili mehurčki. Povprečno gostoto vode in mehurčkov so izračunali z enačbo $\rho_m = \rho H_0/H$. S posebnim zaslonom so dosegli, da v delu posode ob steni ni bilo mehurčkov in je bilo mogoče višino gladine nemoteno odčitati

Izidi merjenj so se pri večji povprečni gostoti krogle dobro ujemali z enačbo (1) (slika 3). Pri manjši gostoti pa je krogla potonila, še preden se je povprečna gostota vode in mehurčkov zmanjšala do povprečne gostote krogle. Odstopanje so pojasnili s "senco": dvigajoči se mehurčki ne zaidejo v predel ob krogli, ko ta potone (slika 4). Na kroglo deluje zato del vode brez mehurčkov s silo navpično navdol, zaradi katere se nekoliko zmanjša vzgon.



Slika 3. Povprečna gostota vode in mehurčkov, pri kateri potone krogla, v odvisnosti od povprečne gostote krogle. Obe gostoti smo izrazili z gostoto vode ρ . Črtna črta ustreza enačbi (1), sklenjena pa enačbi (2). Krožci kažejo izmerke, navpične črtice pa opozarjajo na nenatančnost pri merjenju.



Slika 4. Nad kroglo, ki se dotika gladine, nastane območje "sence" brez mehurčkov. Krogli očrtani valj ima prostornino $2\pi R^3$.

Opazujmo kroglo in del vode brez mehurčkov nad njo (slika 4). V ravnovesnem stanju mora biti teža krogle in dela vode brez mehurčkov enaka teži vode z mehurčki v skupni prostornini krogle in dela brez mehurčkov. Prostornina krogle s polmerom R je $\frac{4}{3}\pi R^3$, del vode brez mehurčkov pa ima prostornino polovice razlike med prostorninama krogli očrtanega valja in krogle: $\frac{1}{2}(2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{1}{3}\pi R^3$. Tako v ravnovesju velja zveza

$$\rho_l \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 + \rho \cdot \frac{1}{3}\pi R^3 = \rho_m (\frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{1}{3}\pi R^3).$$

Iz nje sledi namesto enačbe (1)

$$\rho_m = \frac{4}{5}\rho_l + \frac{1}{5}\rho. \quad (2)$$

Premica (2) zares leži nad premico (1) (slika 3). To je le približek, ker pri večjem pretoku zraka, to je pri manjšem razmerju gostot ρ_m/ρ , meja med predeloma z mehurčki in brez njih ni ostra. Dvigajoči se mehurčki pri večjem pretoku zraka povzročajo vrtince in gladina postane podobna kot tedaj, ko voda vre. Tedaj postane merjenje negotovo. Pri prizmi popravka zaradi "sence" ni, vendar bi pri njej zaradi vrtincev merjenje postalo negotovo že pri manjšem pretoku zraka.

Razmeroma preprost poskus, ki ga je bilo mogoče pokazati večjemu številu študentov, je podprl misel, da se ladja v dovolj močnem toku mehurčkov potopi. To ne pomeni, da so ladje, o katerih pripovedujejo mornarske zgodbe, potonile na ta način. Pojav je mogoč, a za zdaj ni nobenega neposrednega namiga, da bi zaradi njega potonila kaka ladja.

Janez Strnad

MALA ŠOLA ŠTEVILSKIH SESTAVOV – Rešitve s str. 213

1.

¹ 1	0	6	²	7
1			³ 1	5
	⁴ 9		2	
⁵ 3	4			⁶ 2
6		⁷ 1	0	8

2.

¹ 1	² 3		³ 1	⁴ 2	⁵ 4
⁶ 4	4	4		⁷ 3	0
4			⁸ 4	1	
	⁹ 3	3			¹⁰ 4
¹¹ 2	2		¹² 3	¹³ 3	0
¹⁴ 1	2	3		¹⁵ 4	3

3.

	osnova 10	osnova 4	osnova 5	osnova 6
a	7	13	12	11
b	10	22	20	14
c	12	30	22	20
č	29	131	104	45
d	18	42	33	30
e	52	310	202	124
f	33	201	113	53
g	51	303	201	123
h	43	223	133	111

4. (a) 32_8 (b) 17_8 5. (a) 111_4 (d) 13_5 (g) 13_5 (b) 211_5 (e) 1002_4 (h) 5_6 (c) 24_6 (f) 1744_8 (i) 4760_9 6. (a) $3\frac{3}{4}$ (c) $4\frac{5}{8}$ (e) $\frac{1}{2}$ (b) $1\frac{5}{6}$ (d) $\frac{1}{2}$ (f) $\frac{1}{2}$

7. (a) 100000

(d) 1010.1001

(g) 11001

(b) 1100111

(e) 110

(h) 110.1001

(c) 11000.01

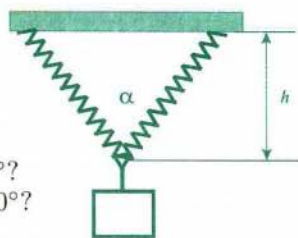
(f) 11.11

22. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Naloge za 7. razred

1. Imamo dve enaki vzmeti in utež z maso 1 kg. Če je vzmet neobremenjena, ima dolžino 50 cm. Ko vzmet **visi navpično** in je nanjo obešena kilogramska utež, pa ima dolžino 80 cm.

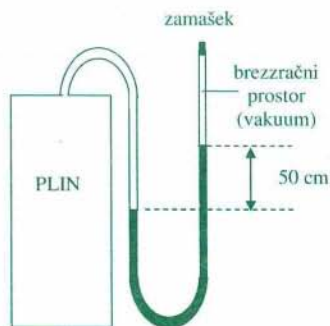
Nato vzmeti spodaj staknemo in nanju obesimo utež ter ju pritrdimo na strop, kot kaže slika. Razdaljo med zgornjima prijemališčema vzmeti spreminjamo in tako spreminjamo kot α .



- Kolikšna je razdalja h pri kotu $\alpha = 0^\circ$?
- Kolikšna je razdalja h pri kotu $\alpha = 90^\circ$?

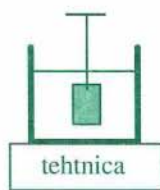
Lahko si pomagaš z načrtovanjem.

2. a) Izračunaj tlak plina v zaprti posodi, ki je povezana s tanko U-cevjo, kot kaže slika. V cevi je živo srebro, višinska razlika gladin živega srebra je 50 cm. Desni krak cevi je zamašen, v njem je vakuum. Zunanji zračni tlak je 98 kPa, specifična teža živega srebra pa $136\,000\text{ N/m}^3$.



- b) Nariši, kako bi se postavili gladini živega srebra, in izračunaj višinsko razliko za primer, ko bi zamašek odstranili. Pri tem bi se tlak v posodi zanemarljivo malo spremenil.

3. Imamo dve enaki posodi. V prvo nalijemo vodo z znano specifično težo 10 N/dm^3 , v drugo pa slano vodo. Posodi postavimo vsako na svojo tehtnico. Obe tehtnici kažeta 1000 g. Nato v obe tekočini zaporedoma potopimo isto aluminijasto klado, kot kaže slika. Klada ne sede na dno. Prva tehtnica (z vodo) pokaže 1250 g, druga (s slano vodo) pa 1290 g.



- Kolikšni sta sili vzgona na klado v vodi in v slani vodi?
- Kolikšna je specifična teža slane vode?
- Katera tekočina ima večjo prostornino? Odgovor utemelji.

Eksperimentalni nalogi

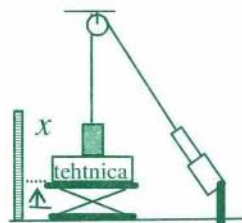
4. Pribor: valjasta škatlica za vitaminske tablete, čaša z vodo, 10 kovancev po 5 SIT, ravnilo.

- S poskusi ugotovi, kolikšna je masa kovanca za 5 SIT.
- Izmeri tudi maso škatlice.

Namig: Višino potopljenega dela škatlice meri samo takrat, ko škatlica plava navpično, pri čemer morajo biti v škatlici najmanj 4 kovanci.

Opomba: Prostornino valja izračunamo podobno kot prostornino kvadra, tako da pomnožimo ploščino osnovne ploskve in višino valja. Ploščino kroga izračunamo po enačbi $pl = \pi r^2$, pri čemer je $\pi = 3,14$.

5. Na tehtnico, ki stoji na dvizni mizici, postavimo utež. Zgornji konec uteži je preko vrvice privezan na silomer, kot kaže slika. Raziskati želimo, kako sta sila tehtnice in sila silomera med seboj povezani.



- Skiciraj utež in nariši vse sile, ki delujejo na utež. Zapiši enačbo, ki velja med temi silami.
- Nato začni dvigovati mizico in za vsak cm izmeri silo tehtnice ter silo, ki jo kaže silomer. Pred odčitkom zavrti gumb na mizici levo-desno, da zmanjšaš vpliv sile lepenja pri škripcu in silomeru. Sili izmeri še pri spuščanju mizice. Končna tabela naj vsebuje povprečne vrednosti. Ko se sili ne spreminjata več, lahko z meritvijo končaš.
- Na skupen diagram nariši F_{teh} , F_{silo} in $F_{\text{teh}} + F_{\text{silo}}$, vse v odvisnosti od višine mizice. Diagram naj bo narisane na milimetrskem papirju.

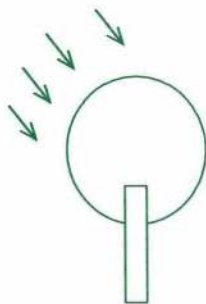
Naloge za 8. razred

1. Za vesoljsko postajo ISS smo prebrali tele podatke:¹ 2. aprila 2002 je bila iz Maribora postaja vidna **od** 20:38:26, ko je bila njena višina 10° nad obzorjem v smeri jugozahod, **do** 20:43:56, ko je bila višina 15° v smeri severovzhod. Predpostaviti smeš, da je postaja potovala preko zenita. Postajo vidimo zaradi odbite Sončeve svetlobe. Postaja

¹ Vir: www.heavens-above.com

leti na višini 400 km, polmer Zemlje je 6400 km. Pomagaj si z načrtovanjem, pri merjenju lahko krožne loke nadomestiš z daljicami.

- Ob katerem času je bila postaja v zenitu? Postaja potuje enakomerno po krožnici.
 - Kolikšna je hitrost postaje?
 - Ali je kdaj postaja vidna okoli 24. ure? Odgovor utemelji.
- Klado z maso 200 g smo potisnili s hitrostjo 4,0 m/s po vodoravni ledeni ploskvi in spustili. Klada se je ustavila pri razdalji 4,0 m.
 - Nariši vse sile, ki delujejo na klado med ustavljanjem potem, ko smo jo že spustili. Izračunaj tudi velikosti vseh sil.
 - Sila trenja je bila med gibanjem ves čas konstantna. Kako se je gibala klada med ustavljanjem (navedi ime takega gibanja)?
 - Nariši diagram hitrosti v odvisnosti od časa $v = v(t)$ za opisano gibanje.
 - Skiciraj diagram poti v odvisnosti od časa $s = s(t)$ za opisano gibanje.
 - Drevo predstavimo z naslednjim preprostim modelom: krošnja ima obliko krogle s polmerom 2,0 m, deblo pa obliko valja s polmerom 10 cm in višino 3,0 m, kot kaže slika.



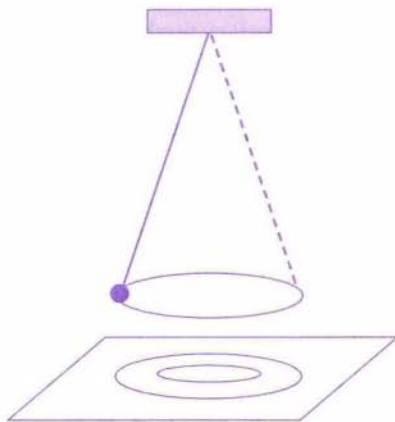
- Koliko energije sprejme omenjeno drevo neposredno od Sonca v enem letu? Upoštevaj, da krošnja absorbira vso vpadno svetlobo – senca krošnje je krog s polmerom krošnje. Od krošnje odbito svetlobo in svetlobo ob oblačnih dnevih smemo zanemariti. Upoštevaj še, da je v enem letu 100 sončnih dni in da vsak sončni dan sije Sonce v povprečju 8 ur. Sončeva svetloba prinese 1000 J energije vsako sekundo na m^2 .
- Za koliko se v enem letu poveča masa debla? **Polmer** debla se poveča (letnica) za 2 cm, višina pa za 0,5 m, gostota lesa je 800 kg/m^3 .
- Koliko energije bi dobili s sežigom letnega prirastka lesa? Če pokurimo 1 kg lesa, se sprosti 16 MJ energije.
- S kolikšnim "izkoristkom", to je kvocientom med shranjeno energijo (letni prirastek lesa) in sprejeto energijo (Sonce), dela drevo?

Eksperimentalni nalogi

4. Utež na vrvici potisnemo v tangentsni smeri, da začne krožiti po krožnici z večjim polmerom ($r_1 = 24$ cm). Zaradi zaviralne sile upora zraka se hitrost uteži zmanjšuje. Po določenem času kroži po krožnici s polmerom $r_2 = 12$ cm.

Namig: Najprej nekajkrat poskusi potisniti utež v tangentsni smeri, da bo približno krožila nad večjo krožnico, ko pa si boš pridobil malo spretnosti, začni z meritvami.

Pribor: utež na vrvici, list z vrisanima krožnicama, štoparica, ravnilo.



- a) Izmeri, s kolikšno hitrostjo se giblje utež po večji in s kolikšno po manjši krožnici. Čeprav se utež ne bo gibala natančno po krožnici, nekaj centimetrsko odstopanje od krožnice na posameznih mestih ne bo bistveno vplivalo na izid meritev. V računu upoštevaj, da utež enakomerno kroži po krožnici s polmerom 24 cm oziroma 12 cm.
- Opozorilo: Čas enega obhoda je tako kratek, da je napaka **pri merjenju časa enega obhoda** precejšnja.
- b) Izračunaj kinetično energijo uteži pri gibanju po večji in po manjši krožnici. Masa uteži je 50 g.
- c) Kolikšno je delo zaviralne sile upora zraka med gibanjem od večje do manjše krožnice?
5. S poskusom boš raziskal električne lastnosti tanke žičke. Na žički so prispajkane ploščice na obeh koncih in na $1/3$ dolžine. Preko teh ploščic boš priključil žičko na napetost. Potek dela: Najprej priključi žičko na koncih. Pripravi si tabelo s stolpcema za napetost in tok. Napetost počasi večaj in po vsakih dveh voltih zapiši napetost in tok. Nato ponovi poskus z $1/3$ dolžine žičke. Pri tej dolžini bo žička pregorela. Poskusi čim natančneje določiti največji tok. Na koncu izmeri še tok, pri katerem se preostali del žičke z $2/3$ dolžine stali.

Opozorilo: Žička je tanka in se pri nepazljivem ravnanju pretrga. Žičke ne napeňaj. Pred priključitvijo žičke naj bo vir napetosti postavljen na 0.

- Meritvi predstavi na skupnem diagramu $I = I(U)$.
- Pri kolikšnem toku se žička stali?
- Ali je ta največji tok odvisen od dolžine žičke?
- Iz diagrama oceni, kolikšno napetost bi potreboval, da bi se žička že v prvem delu stalila. Na diagramu naj bo vidno, kako si prišel do rezultata.

Pribor: vir napetosti z vgrajenima voltmetrom in ampermetrom, žička s tremi prispajkanimi ploščicami, dve stojali s krokodilčkoma in veznima vodnikoma.

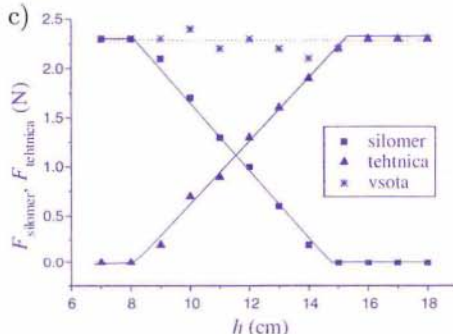
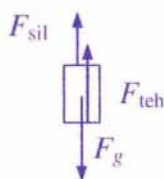
Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – s str. 238

7. razred

- Koeficient vzmeti je $k = F/s = 10 \text{ N}/30 \text{ cm} = 0,33 \text{ N/cm}$.
 - Pri kotu 0° obe vzmeti visita navpično in na vsako deluje sila 5 N. Vzmet se raztegne za 15 cm in ima dolžino 65 cm, $h = 65 \text{ cm}$.
 - Pri kotu 90° si pomagamo z načrtovanjem sil v merilu in iz slike preberemo, da deluje na vsako vzmet sila 7,1 N. Raztezek vzmeti je $s = F/k = 7,1 \text{ N}/(0,33 \text{ N/cm}) = 22 \text{ cm}$ in dolžina 72 cm. Iz risbe ali pa iz enačbe za diagonalo kvadrata dobimo, da je višina $h = 51 \text{ cm}$.
- Tlak v brezračnem prostoru je enak nič. V posodi je tlak $p = \sigma \cdot h_1 = 136\,000 \text{ N/m}^3 \cdot 0,5 \text{ m} = 68 \text{ kPa}$.
 - V posodi je tlak še vedno 68 kPa, v odprtem kraku pa je 98 kPa. Višinska razlika $h_2 = \Delta p/\sigma = 30 \text{ kPa}/(136\,000 \text{ N/m}^3) = 0,22 \text{ m}$. V drugem primeru je gladina v desnem kraku cevke za 22 cm nižja kot v levem kraku.
- Sila vzgona je sila, s katero deluje tekočina na kladu navzgor. Z nasprotno enako silo deluje tekočina na tehtnico in zato tehtnica pokaže večjo silo. Pri vodi je razlika mas 250 g, torej je sila vzgona $F_{\text{vzg}} = 2,5 \text{ N}$, pri slani vodi je razlika mas 290 g in $F_{\text{vzg}} = 2,9 \text{ N}$.

- b) Iz podatkov za vodo izračunamo prostornino klade: $V = F_{vzg}/\sigma_{voda} = 2,5 \text{ N}/(10 \text{ N/dm}^3) = 0,25 \text{ dm}^3$. Nato izračunamo specifično težo za slano vodo: $\sigma_{sl.voda} = F_{vzg}/V = 2,9 \text{ N}/0,25 \text{ dm}^3 = 11,6 \text{ N/dm}^3$.
- c) Ker je teža obeh tekočin enaka, ima večjo prostornino tekočina z manjšo specifično težo, torej voda.
4. a) V škatlo damo najprej npr. pet kovancev in izmerimo, da se škatlica v vodi potopi za 70 mm. Ko damo v škatlico deset kovancev, pa se potopi za 119 mm. Težo dodanih petih kovancev je uravnovesila povečana sila vzgona in škatlica je dodatno izpodrinila prostornino $V = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta h$. Premer škatlice je $2r = 29 \text{ mm}$, ploščina osnovne ploskve pa $6,6 \text{ cm}^2$. Prostornina dodatno izpodrinjene vode je $6,6 \text{ cm}^2 \cdot (119 - 70) \text{ mm} = 32 \text{ cm}^3$. Teža dodatno izpodrinjene vode je $32 \text{ cm}^3 \cdot 10 \text{ N/dm}^3 = 0,32 \text{ N}$. Teža petih kovancev je torej $0,32 \text{ N}$, masa pa 32 g . Masa enega kovanca je torej približno $6,4 \text{ g}$.
- b) Ko je bilo v škatlici deset kovancev, se je potopila za 119 mm . Od tod izračunamo silo vzgona na škatlico $F_v = \sigma \cdot V = 10 \text{ N/dm}^3 \cdot 6,6 \text{ cm}^2 \cdot 11,9 \text{ cm} = 0,79 \text{ N}$, ki je po velikosti enaka teži škatlice in kovancev, kar ustreza masi 79 g . Ko odštejemo maso desetih kovancev (64 g), dobimo za maso škatlice okrog 15 g .
5. a) Velja: $F_g = F_{teh} + F_{sil}$.

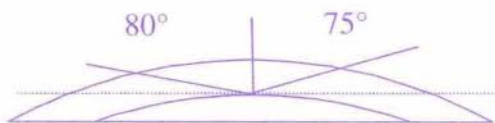


b)

$x \text{ (cm)}$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$F_{teh} \text{ (N)}$	0	0	0,2	0,7	0,9	1,3	1,6	1,9	2,2	2,3
$F_{sil} \text{ (N)}$	2,3	2,3	2,1	1,7	1,3	1,0	0,6	0,2	0	0

8. razred

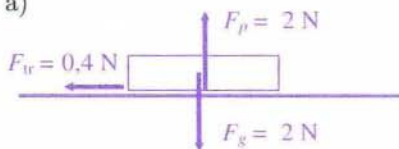
1. a) Postaja opiše krožni lok 1,5 cm do zenita in 1,2 cm od zenita do konca vidnosti, skupaj 2,7 cm



(merilo 1 cm $\rightarrow$ 1000 km) v času $5:30 = 330$ s. Po sklepnem računu porabi za 1,5 cm čas $t = 1,5 \text{ cm} \cdot 330 \text{ s} / 2,7 \text{ cm} = 183 \text{ s} = 3:03$. Postaja je bila v zenitu ob $20:38:26 + 3:03 = 20:41:29$.

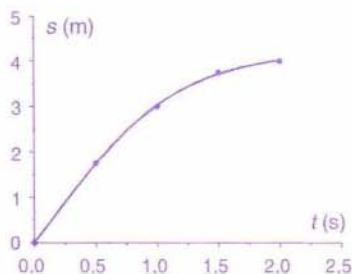
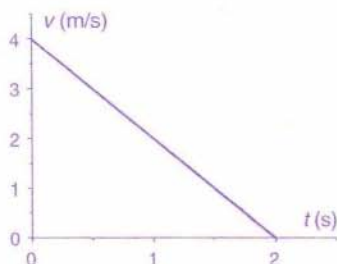
- b) Slika je narisana v takšnem merilu, da navpična črta predstavlja 1000 km. Hitrost izračunamo iz vsote dolžin obeh lokov in časa: $v = (1,5 + 1,2) \cdot 1000 \text{ km} / 330 \text{ s} = 8,1 \text{ km/s}$. Dovoljena napaka $3 \text{ mm} / 2,7 \text{ cm} = 11\%$.
- c) Postaja ne more biti vidna okoli 24 ure, ker je Sonce takrat na drugi strani Zemlje, in ko postaja leti nad nami, je v senci.

2. b) Vsota vseh sil je enaka kar sili trenja F_{tr} . Ker je sila trenja konstantna, je konstantna tudi vsota vseh sil in gibanje je enakomerno pojemalno.



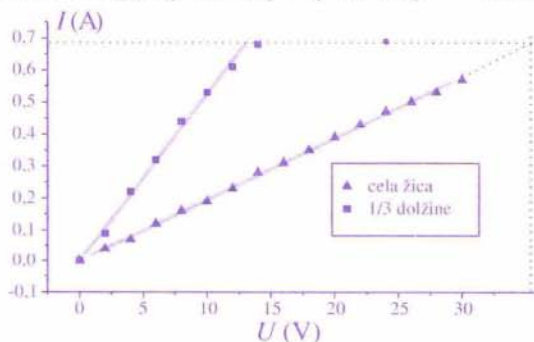
Iz enačbe $s = v_{\text{sr}} \cdot t$ dobimo čas zaustavljanja $t = s/v_{\text{sr}} = 4 \text{ m} / (2 \text{ m/s}) = 2,0 \text{ s}$. Pojemek je $a = v/t = (-4 \text{ m/s}) / 2 \text{ s} = -2 \text{ m/s}^2$. Od tod izračunamo vsoto vseh sil $F = ma = -0,4 \text{ N}$, ki je kar enaka sili trenja.

- c) Gibanje je enakomerno pojemalno, narišemo graf $v = v(t)$.
- d) Diagram $s = s(t)$ kaže slika.



3. a) Krošnja absorbira svetlobo, ki vpade na krog s polmerom r_k . Ploščina kroga $S = \pi r_k^2 = 12,6 \text{ m}^2$. Sprejeta energija v času 1 s je $W_{sp1} = 1000 \text{ J/m}^2 \cdot 12,6 \text{ m}^2 = 12,6 \text{ kJ}$. V osmih urah in sto dnevih je torej sprejeta energija: $W_{sp} = 12,6 \text{ kJ} \cdot 3600 \cdot 8 \cdot 100 = 36 \cdot 10^3 \text{ MJ}$.
- b) Volumski prirastek $\Delta V = \pi r_2^2 \cdot h_2 - \pi r_1^2 \cdot h_1 = \pi (0,12^2 \cdot 3,5 \text{ m}^3 - 0,10^2 \cdot 3,0 \text{ m}^3) = 0,064 \text{ m}^3$. Z gostoto izračunamo še masni prirastek: $\Delta m = \rho \Delta V = 800 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,064 \text{ m}^3 = 51 \text{ kg}$.
- c) $W_{oddana} = 16 \text{ MJ/kg} \cdot 51 \text{ kg} = 820 \text{ MJ}$.
- d) Izkoristek $\eta = 820 \text{ MJ} / 36 \cdot 10^3 \text{ MJ} = 0,02 = 2\%$.
4. a) Na zunanji krožnici izmerimo čas za pet obratov $5t_0 = 6,8 \text{ s}$, torej je $t_0 = 1,4 \text{ s}$ in hitrost $v_1 = 2\pi r / t_0 = 2\pi \cdot 24 \text{ cm} / 1,4 \text{ s} = 1,1 \text{ m/s}$. Na notranji krožnici izmerimo čas za pet obratov $5t_0 = 7,0 \text{ s}$, po enakem postopku dobimo še hitrost po notranjem krogu $v_2 = 0,55 \text{ m/s}$.
- b) Kinetična energija na zunanji krožnici je enaka $W_{k1} = mv_1^2 / 2 = 30 \text{ mJ}$, na notranji krožnici pa $W_{k2} = 7 \text{ mJ}$.
- c) Izračunati moramo še, koliko se je pri prehodu iz večje na manjšo krožnico zmanjšala potencialna energija uteži. Razliko višin izmerimo pri mirujoči uteži v oddaljenosti 24 cm oziroma 12 cm. Višina se zmanjša za približno 4,6 cm, torej se potencialna energija zmanjša za $mgh = 23 \text{ mJ}$. Pri točki b) smo izračunali, da se je kinetična energija zmanjšala iz 30 mJ na 7 mJ, torej za 23 mJ. Delo zaviralnih sil je enako vsoti spremembe kinetične in potencialne energije $(-23 \text{ mJ}) + (-23 \text{ mJ}) = -46 \text{ mJ}$.

5. a)



- b) Iz diagrama sledi $I = 0,69 \text{ A}$.
- c) Največji tok ni odvisen od dolžine žičke.
- d) Iz diagrama sledi (presečišče črtkanih črt) $U = 35 \text{ V}$.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 2001/2002 – s str. 183

Objavljamo rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 23. marca 2002. Besedila nalog smo objavili v letošnji tretji številki Preseka.

Pri tehničnem urejanju besedila se je prikradla majhna napaka. Štiri naloge I. skupine so bile oštevilčene z 1., 2., 2., 3., namesto 1., 2., 3., 4. Sklic I/4 v 2. nalogi skupine III se torej nanaša na zadnjo nalogo skupine I.

Skupina I

1. Podatki: $s = 300$ m, $t_0 = 30$ s, $v_0 = 30$ km/h, $a = 1$ m/s².
Čas pospeševanja označimo s t_1 . Voznik vozi $t_0 - t_1$ časa enakomerno, t_1 časa pa enakomerno pospešeno. Pot, ki jo pri tem opravi, mora biti ravno enaka razdalji do semaforja:

$$s = v_0(t_0 - t_1) + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = v_0 t_0 + \frac{1}{2} a t_1^2.$$

Od tod dobimo za čas pospeševanja

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(s - v_0 t_0)}{a}} = 10 \text{ s}.$$

Torej mora začeti pospeševati po $t_0 - t_1 = 20$ s. V tem času doseže hitrost $v = v_0 + a t_1 = 66$ km/h = 18,3 m/s.

2. Podatki: $a = 40$ cm, $l = 43$ cm, $\alpha = 120^\circ$.
 - a) Težišči prvih dveh odsekov (krakov) sta na sredini odsekov, oddaljeni za $\frac{1}{2} a \cos(\frac{1}{2} \alpha) = \frac{1}{4} a = 10$ cm od roba. Zato je tudi njuno skupno težišče na tolikšni oddaljenosti od roba, in sicer leži na simetrali krakov.
 - b) Navor teže tretjega odseka mora uravnovesiti navor teže prvih dveh odsekov. Če os postavimo tako, da sovpada z robom mize, dobimo

$$m_3 g \frac{1}{2} l \cos \varphi = (m_1 + m_2) g \frac{1}{2} a \cos(\frac{1}{2} \alpha).$$

S φ smo označili kot, ki ga tvori tretji odsek z vodoravnico. Ker je masa odseka premo sorazmerna z njegovo dolžino, lahko zapišemo $m_3 = \sigma l$, $m_1 = m_2 = \sigma a$ in velja

$$l \frac{1}{2} l \cos \varphi = 2a \frac{1}{2} a \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right),$$

$$\cos \varphi = \frac{2a^2 \cos(\frac{1}{2}\alpha)}{l^2} = \frac{a^2}{l^2} \quad \text{in} \quad \varphi = 30^\circ.$$

3. Podatki: $m_1 = 1,2$ kg, $m_2 = 1,0$ kg, $\varphi = 30^\circ$, $h = 20$ cm, $k_l = 0,2$, $\rho_v = 1000$ kg/m³, $\rho = 700$ kg/m³.

Sila lepenja, s katero deluje klanec na klado, ni enolična, temveč lahko zavzame poljubno vrednost med $-m_1 g k_l \cos \varphi$ in $m_1 g k_l \cos \varphi$. Zapisali jo bomo kot $m_1 g k \cos \varphi$, pri čemer ima k poljubno vrednost med $-k_l$ in k_l . Za iskano višino potopljenega dela valja bomo zato dobili rešitev na intervalu med največjo in najmanjšo vrednostjo.

Na vrvico delujeta na eni strani dinamična komponenta teže prve klade in sila lepenja na prvo klado, $m_1 g(\sin \varphi + k \cos \varphi)$, ki ju na drugi strani uravnovesi teža valja, zmanjšana za vzgon

$$m_1 g(\sin \varphi + k \cos \varphi) = (m_2 - S \rho_v) g.$$

Pri tem smo z x označili višino potopljenega valja in z S njegov prečni presek, ki ga izrazimo z maso kot $S = m_2 / \rho h$. Iz enačbe izluščimo x :

$$x = \frac{\rho}{\rho_v} h \left(1 - \frac{m_1}{m_2} (\sin \varphi + k \cos \varphi) \right).$$

Največji možni x dobimo, če vstavimo $k = -k_l$, najmanjši pa pri $k = k_l$, torej velja

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \quad x_{\min} = 2,7 \text{ cm}, \quad x_{\max} = 8,5 \text{ cm}.$$

4. Podatki: $s_0 = 100$ mm, $2r = 300$ mm, $l = 20,000$ m, $v_0 = 2,00$ m/s, $\eta = 30,0$ %, $k_t = 0,0100$.

Račun je smiseln, če so podatki dovolj natančni; zato je potrebno računati z natančnostjo vsaj treh pomembnih števk.

Čok se zaustavlja s pojemkom $a = k_t g$. Petrov čok prepotuje do trka razdaljo $l - s_0 - 2r$; njegovo hitrost (v'_1) tik pred trkom izračunamo iz zveze

$$v_1'^2 = v_0^2 - 2k_t g(l - s_0 - 2r), \quad v_1' = 0,398 \text{ m/s}.$$

Pri trku se ohrani gibalna količina obeh čokov. Če označimo z v_1 hitrost Petrovega čoka po trku in z v_2 Mihovega, zapišemo

$$mv'_1 = mv_1 + mv_2.$$

Kinetična energija čokov se pri trku ne ohrani; na koncu imata čoka le $1 - \eta = 70\%$ začetne energije Petrovega čoka, torej

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = (1 - \eta) \frac{1}{2}mv_1'^2.$$

Iz prve enačbe izrazimo v_2 in vstavimo v drugo. Dobimo kvadratno enačbo $2v_1^2 - 2v_1'v_1 + \eta v_1'^2 = 0$ z rešitvama

$$v_1^{1,2} = \frac{1}{2}v_1' \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\eta} \right).$$

Rešitev z negativnim predznakom ustreza hitrosti Petrovega čoka, tista s pozitivnim pa hitrosti Mihovega:

$$v_1 = \frac{1}{2}v_1' \left(1 - \sqrt{1 - 2\eta} \right) = 0,073 \text{ m/s},$$

$$v_2 = \frac{1}{2}v_1' \left(1 + \sqrt{1 - 2\eta} \right) = 0,325 \text{ m/s}.$$

Po trku prepotujeta čoka razdalji

$$\Delta x_1 = \frac{v_1^2}{2a} = 27 \text{ mm}, \quad \Delta x_2 = \frac{v_2^2}{2a} = 538 \text{ mm}$$

in sta na koncu oddaljeni od središča za

$$x_1 = |s_0 + 2r - \Delta x_1| = 37 \text{ cm}, \quad x_2 = |s_0 - \Delta x_2| = 44 \text{ cm}.$$

Zmaga torej Peter.

Skupina II

1. Podatki: $h = 50 \text{ mm}$, $v = 10 \text{ mm/s}$, $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_s = 200 \text{ kg/m}^3$, $T_s = 0^\circ\text{C}$, $T_v = 10^\circ\text{C}$, $c = 4200 \text{ J/kgK}$, $q_t = 336 \text{ kJ/kg}$. Nalogo najhitreje rešimo, če izračunamo maso dežja ($m_v = \rho_v S v \Delta t$), ki je potrebna, da stali maso snega ($m_s = \rho_s h S$) na površini S :

$$m_v c \Delta T = m_s q_t, \quad \rho_v S v \Delta t c \Delta T = \rho_s h S q_t,$$

$$\Delta t = \frac{\rho_s h q_t}{\rho_v v c (T_v - T_s)} = 8 \text{ h}.$$

2. Podatki: $I_a = 0,5 \text{ A}$, $I_b = 1,25 \text{ A}$, $U = 15 \text{ V}$.

Pri nesklenjenem stikalu velja $I_a = U/R$, pri sklenjenem pa $I_b = U/R'$, če z R' označimo nadomestni upor vzporedno vezanih upornika R in črne škatle. Dobimo $I_b/I_a = R/R' = 5/2$. Za nadomestni upor R' velja

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\text{čs}}}, \quad R_{\text{čs}} = \frac{RR'}{R - R'} = \frac{R}{\frac{R}{R'} - 1} = \frac{2}{3} R.$$

Z $R_{\text{čs}}$ smo označili nadomestni upor črne škatle. Najbolj preprosto vezje, ki vodi do tolikšnega nadomestnega upora, je vzporedna vezava upornika R z zaporedno vezanima upornikoma po R , saj velja

$$\frac{1}{R_{\text{čs}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}.$$

3. Podatki: $e = 10^{-5} \text{ As}$, $m = 10 \text{ g}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\varphi = 30^\circ$, $s = 10 \text{ cm}$. Hitrost kroglice, ko zapusti cev, najhitreje izračunamo iz ohranitve potencialne in kinetične energije

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh = mgl \sin \varphi, \quad v_0 = \sqrt{2gl \sin \varphi}.$$

Ko se kroglica giblje nad ploščo, deluje nanjo odbojna električna sila navpično navzgor in teža navpično navzdol. Pospešek kroglice je

$$a = \frac{eE - mg}{m} = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0 m} - g$$

in mora kazati navzgor, sicer kroglica ne bi dosegla ustja druge cevi. Ko kroglica zapusti prvo cev, opišemo njeno gibanje kot poševni met z začetno hitrostjo v_0 , ki tvori kot φ z vodoravnico in kaže navzdol:

$$x = v_x t = v_0 \cos \varphi t, \quad y = v_y t + \frac{1}{2}at^2 = -v_0 \sin \varphi t + \frac{1}{2}at^2.$$

Začetek druge cevi doseže, ko v vodoravni smeri prepotuje razdaljo s , torej ob času $t_1 = s/(v_0 \cos \varphi)$. V tem času se mora vrniti na začetno višino $y = 0$, torej $-v_0 \sin \varphi t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = 0$. Od tod lahko izrazimo pospešek

$$a = \frac{2v_0 \sin \varphi}{t_1} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{s} = \frac{2l \sin \varphi \sin 2\varphi}{s} g = 2,60 g = 25,5 \text{ m/s}^2.$$

Končno izračunamo še površinsko gostoto naboja

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 m}{e} (a + g) = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ As/m}^2.$$

4. Podatki: $l = 30$ cm, $a = 10$ cm, $I_1 = 300$ A, $I = 10$ A.

- a) Če tečeta tokova v vodnikih v isto smer, je rezultanta sil na okvir različna od nič pri vsaki legi okvira med vodnikoma, in ravnovesje ne obstaja.

Če tečeta tokova v različnih smereh, ravnovesje obstaja. V primeru, ko ima tok v stranici, ki je bližje izbranemu vodniku, enako smer kot tok v vodniku, je ravnovesje *labilno*. To ugotovimo z naslednjim razmislekom: V ravnovesju je privlačna sila med vodnikom in njemu bližnjo stranico okvira nasprotno enaka privlačni sili med drugim vodnikom in njemu bližnjo stranico okvira. Če okvir malo premaknemo proti vodniku, se privlačna sila na bližnjo vzporedno stranico okvira poveča, na drugi par pa zmanjša. Rezultanta kaže v smeri premika, proč od ravnovesne lege, zato ravnovesna lega ni stabilna.

Stabilno ravnovesje je le v primeru, ko tok v vodniku teče v nasprotni smeri kot tok v njemu bližnji vzporedni stranici okvira. Ker je sila med njima odbojna, kaže rezultanta sil pri majhnem odmiku okvira iz ravnovesne lege vedno proti ravnovesni legi.

- b) Podatki: $I_2 = 100$ A.

Upoštevamo izraz za silo med dvema vodnikoma in zapišemo rezultanto sil na okvir:

$$F = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left[I_1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) - I_2 \left(\frac{1}{l-a-x} - \frac{1}{l-x} \right) \right] = \\ = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi} \left[\frac{I_1}{x(x+a)} - \frac{I_2}{(l-a-x)(l-x)} \right],$$

pri čemer smo z x označili razdaljo od vodnika s tokom I_1 do njemu bližnje stranice okvira. Iz zahteve za ravnovesje sil sledi kvadratna enačba $(1-r)x^2 - (2l-a(1-r))x + l(l-a) = 0$, $r = I_2/I_1 = 1/3$. Ko vstavimo $l = 3a$ in $z = x/a$, se enačba poenostavi v $(1-r)z^2 - (5+r)z + 6 = 0$, z rešitvijo

$$z = \frac{5+r \pm \sqrt{(5+r)^2 - 24(1-r)}}{2(1-r)}.$$

Smiselna je rešitev, pri kateri leži okvir znotraj vodnikov: $z = 1,35$ ali $x = 1,35a = 13,5$ cm. Pri drugi rešitvi bi bil okvir zunaj vodnikov, ravnovesje pa bi bilo labilno.

Skupina III

1. Glej rešitev II/2.
2. Glej rešitev I/4.
3. Podatki: $T_1 = 80^\circ\text{C}$, $\rho_1 = 0,972 \text{ kg/dm}^3$, $\nu_1 = 0,364 \text{ mm}^2/\text{s}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$, $\rho_2 = 0,998 \text{ kg/dm}^3$, $\nu_2 = 1,01 \text{ mm}^2/\text{s}$, $c = 4190 \text{ J/kgK}$, $R = 0,5 \text{ cm}$.

Masni tok po ceveh poganja tlačna razlika, ki se pojavi zaradi razlike gostot na višini h , $\Delta p = (\rho_2 - \rho_1)gh$. Iz Poisseuilovega zakona, zapisanega za zaporedno povezani cevi, dobimo

$$\Delta p = \frac{8\eta_1 \Phi_{m1} \Delta l_1}{\pi R^4 \rho_1} + \frac{8\eta_2 \Phi_{m2} \Delta l_2}{\pi R^4 \rho_2}.$$

Ker sta masna tokova (in ne volumska!) v ceveh enaka in prav tako dolžini $\Delta l_1 = \Delta l_2 = h$, velja

$$(\rho_2 - \rho_1)gh = \frac{8\Phi_m h}{\pi R^4} (\nu_1 + \nu_2), \quad \Phi_m = \frac{\pi R^4 (\rho_2 - \rho_1)g}{8(\nu_1 + \nu_2)} = 0,045 \text{ kg/s}.$$

Preneseni toplotni tok pa je enak

$$P = \Phi_m c (T_1 - T_2) = 11,5 \text{ kW}.$$

4. Podatki: $l = 3a = 30 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm}$, $I_1 = I_2 = 300 \text{ A}$, $I = 10 \text{ A}$, $S = 1 \text{ mm}^2$, $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$.

a) Glej rešitev II/4a.

b) Silo na okvir pri majhnem odmiku x iz ravnovesne lege zapišemo takole:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu_0 I I_1 a}{2\pi} \left[\frac{1}{a+x} - \frac{1}{2a+x} - \frac{1}{a-x} + \frac{1}{2a-x} \right] \approx \\ &\approx \frac{\mu_0 I I_1 a}{2\pi} \left[\frac{a-x}{a^2} - \frac{2a-x}{4a^2} - \frac{a+x}{a^2} + \frac{2a+x}{4a^2} \right] = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi a} x \end{aligned}$$

Sila ima torej enako obliko kot sila pri nihalu na vijačno vzmet. Od tod razberemo koeficient $k = \frac{3}{2} \mu_0 I I_1 / 2\pi a$ in krožno frekvenco nihanja

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{3\mu_0 I I_1}{16\pi a^2 S \rho}, \quad \omega = 2,9 \text{ s}^{-1}, \quad \nu = 0,46 \text{ s}^{-1}.$$

Bojan Golli

NALOGE Z DRŽAVNEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 2001/2002

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost $9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Maja in Gregor se igrata s teniškima žogicama. Tokrat sta se odpravila v stanovanjski blok. Maja se je postavila na balkon, ki je 40 m nad tlemi in je ravno nad balkonom, kjer je Gregor, ki je 20 m nad tlemi. Maja vrže žogico navpično navzdol s hitrostjo v , Gregor pa istočasno navpično navzgor z enako hitrostjo v .

a) Kako visoko nad tlemi trčita žogici, če je $v = 7 \text{ m/s}$?

b) Kolikšna mora biti hitrost v , da bosta žogici trčili tik nad tlemi?

2. Da nam veter ne odnese listov z mize, jih obtežimo z obtežilnikom. Obtežilnik je majhno težko telo z ravno spodnjo ploskvijo. Liste lahko vzamemo z mize tako, da jih sunkovito potegnemo po mizi vzporedno z mizo, pri tem pa se premakne tudi obtežilnik in po nekem času zdrsne z listov na mizo. Liste, na katerih je obtežilnik na sredini, začnemo enakomerno vleči tako, da se gibljejo enakomerno pospešeno. Kolikšen je pospešek, če obtežilnik zdrsne z lista tik pred robom mize? Dolžina listov v smeri premikanja je 30 cm, prvotna oddaljenost obtežilnika od roba mize pa 100 cm. Koeficient trenja med listom in obtežilnikom je 0,4.



3. Po ravnici, prekriti z zbitim snegom, se z motornimi sani enakomerno pelje Božiček. Božiček lahko s posebno ročico zvezno spreminja moč motorja, ki poganja sani.
 - a) Kolikšna je hitrost sani, če motor dela z močjo 100 W?
 - b) S kolikšno največjo močjo še sme delati motor, da gosenice sani ravno še ne podrsavajo po podlagi?

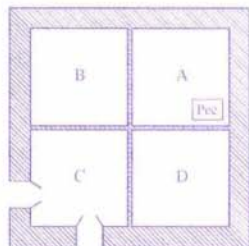
Na sani z Božičkom deluje med gibanjem sila zračnega upora F_u , katere velikost je odvisna od hitrosti sani v kot $F_u = Kv^2$, kjer je koeficient $K = 0,80 \text{ kg/m}$. Masa sani skupaj z Božičkom je 350 kg. Koeficient lepenja med zbitim snegom in gosenicami sani je 0,010.

4. Miha želi vreči žogico tako, da bi po *neprožnem* odboju od vodoravne podlage poletela čez 2 m visoko tanko steno. Žogico meče tako, da je tir ves čas v navpični ravnini, pravokotni glede na steno. Odvrže jo

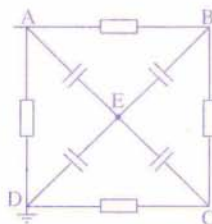
skoraj tik nad tlemi z začetno hitrostjo 15 m/s pod kotom 30° navzgor glede na vodoravnico. Poskus uspe samo v primeru, če je točka, v kateri se žogica odbije, 4 m pred steno. Kolikšen je koeficient trenja med žogico in podlago? Upor zraka zanemarimo.

Skupina II

- Obravnavamo močno pomanjšan namišljeni model hlajenja jedrske elektrarne z vodo iz reke z volumskim tokom 200 l/s . Vodni zbirnik v jedrski elektrarni zajame iz reke vsako sekundo 10 l vode pri temperaturi 10°C . Ta voda po izoliranih ceveh teče do vodnega rezervoarja iz bakra, v obliki kocke s stranico 1 m in debelino sten 2 cm . Rezervoar z zunanje strani obliva vroča voda iz elektrarne pri temperaturi 65°C . Mrzla voda, ki priteka v rezervoar, se v njem hitro meša s toplo vodo, tako da lahko predpostavimo, da ima vsa voda v rezervoarju enako temperaturo. Enako temperaturo ima tudi voda, ki odteka iz rezervoarja. Količina vode, ki priteče, je enaka količini vode, ki odteče. Segreta voda se izliva nazaj v reko in segreva vodo v reki. Kolikšna je sprememba temperature reke zaradi posega jedrske elektrarne? Toplotna prevodnost bakra je $390 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, specifična toplota vode je $4160 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, gostota vode je 1000 kg/m^3 .
- V stanovanju so štiri enake kvadratne sobe, velikosti $3 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$. Debelina notranjih sten je 5 cm , debelina stropa, tal in zunanjih sten pa je veliko večja. V sobi C odpremo okna in zračimo. Zaradi prepiha je v tej sobi praktično enaka temperatura kot zunaj. Kolikšne so v sobah temperature po dolgem času, če je v sobi A prižgana peč z močjo 2 kW ? Toplotna prevodnost notranjih sten je $0,4 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, zunanja temperatura pa je -10°C .



- Vezje na sliki priključimo med točkama A in D na tokovni izvir, ki daje konstanten (enosmerni) tok $0,1 \text{ A}$, razen če gonilna napetost ne preseže maksimalne vrednosti 50 V . (Pomeni, da se gonilna napetost prilagaja porabniku; če je upor porabnika prevelik, ostane gonilna napetost na maksimalni vrednosti, tok skozi porabnik pa se ustrezno zmanjša.) Vrednosti uporov so po $R = 100 \Omega$, kapacitete kondenzatorjev pa po $C = 100 \text{ nF}$.



- Kolikšna je napetost med točkama A in D?
- Kolikšen je naboj na kondenzatorju med točkama E in C?

4. V prostor s homogenim magnetnim poljem usmerimo pod kotom, glede na silnice polja, tanek curek elektronov, v katerem znaša dolžinska gostota naboja $-5,0 \cdot 10^{-8} \text{ As/m}$. Tir curka elektronov v homogenem magnetnem polju je vijačnica.
- Pokaži, da ima dodatno magnetno polje znotraj vijačnice, ki nastane zaradi gibanja elektronov, nasprotno smer kot zunanje magnetno polje.
 - Pod kolikšnim kotom, glede na silnice magnetnega polja, moramo usmeriti curek elektronov, da bo polje, ki ga ustvari curek, po velikosti enako stotinki zunanjega magnetnega polja?

Curek elektronov v obliki vijačnice obravnavaj kot dolgo ravno tuljavo. Električni tok v curku nabitih delcev z dolžinsko gostoto naboja γ izračunamo kot $I = \gamma v$, kjer je v hitrost nabitih delcev v curku. Naboj elektrona je $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, masa elektrona pa $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Indukcijska konstanta je $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$.

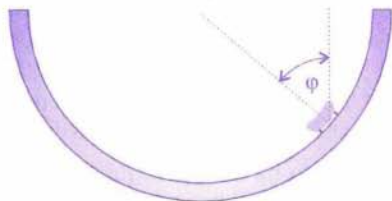
Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost $9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Bob doseže pri vožnji po stezi hitrosti, večje od 100 km/h . Zaradi tega mora v ovinkih steze voziti v delu steze z ustreznim naklonom. Prečni presek steze za bob ima polkrožno obliko, kot kaže slika. Bob obravnavaj kot točkasto telo.

Kolikšen je kot φ na sliki (kot med navpičnico in pravokotnico na krožni lok), če pelje skozi ovinek s polmerom 20 m s hitrostjo 80 km/h ?

Koeficient trenja v prečni smeri glede na drsalke, na katerih drsi bob, je $0,1$.



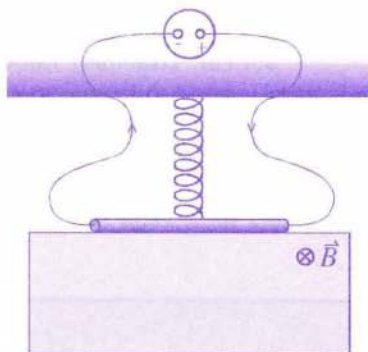
2. Na nogometni tekmi v dvorani 2 m visok sodnik opazi, da proti njegovi glavi pada žoga, ki je nekaj trenutkov prej prosto padla z ogrodja 10 m visokega stropa dvorane. Odloči se, da bo glavo zaščitil z roko tako, kot kaže slika. Najmanj koliko naj bo dlan sodnikove roke oddaljena od glave, da se ob morebitnem zadetku žoge dlan ne dotakne glave?



Za roko privzemimo, da se od komolca do dlani obnaša kot 4 kg težka in 0,5 m dolga homogena palica, ki je vpeta v komolcu s polžasto vzmetjo s sučnim koeficientom $D = 750 \text{ Nm}$. Masa žoge je 0,3 kg, trk žoge s krajiščem palice pa je popolnoma prožen.

Vztrajnostni moment palice z maso m in dolžino l okrog osi skozi krajišče palice je $J = \frac{ml^2}{3}$. Za polžasto vzmet je znano, da je zasuk sorazmeren z navorom ($M = D\varphi$) in da je prožnostna energija enaka $W_{pr} = \frac{1}{2} D\varphi^2$.

3. Na lahko dolgo vzmet s prožnostnim koeficientom 0,2 N/m obesimo vodoravno žičko z dolžino 10 cm in maso 10 g. Žička je prevodna in je preko ohlapnih vodnikov, ki v ničemer ne motita gibanja žičke, povezana s stabiliziranim izvirom električnega toka, ki daje konstantni tok 0,8 A. Žička miruje v ravnovesju tik nad področjem homogenega magnetnega polja z gostoto 0,05 T (glej sliko). Silnice so v osenčenem področju



pravokotne na navpično ravnino, v kateri leži žička. Smeri električnega toka in magnetnega polja sta označeni na sliki.

Žičko privzdignemo za 2,5 cm in spustimo, da zaniha v navpični ravnini. S kolikšnim nihajnim časom niha in kolikšno globino doseže v magnetnem polju?

Predpostavi, da je magnetno polje dovolj razsežno, tako da žička spodaj ne pride iz polja.

4. Podolgovato opno pravokotne oblike vpnemo med dva navpična nosilca tako, da je pritrjena na nosilca vzdolž krajših stranic. Daljši stranici, katerih dolžina znaša po 20 cm, sta pravokotni na nosilca, opna pa je rahlo napeta. Eden izmed nosilcev je v stiku z generatorjem tresljajev, s katerim preko nosilca povzročamo nihanje opne z izbrano frekvenco. Izvor mikrovalov postavimo tako, da oddaja v vodoravni smeri ravno valovanje, ki se širi v smeri, pravokotno na površino opne. Na drugi strani opne z majhnim detektorjem merimo gostoto energijskega toka prepuščenih mikrovalov, in sicer na oddaljenosti 400 cm od opne. Frekvenco, s katero deluje generator tresljajev,

naravnomo tako, da opna niha v enem izmed lastnih nihajnih načinov. Kar se tiče mikrovalov, je opna, ki niha v lastnem nihajnem načinu, kar uklonska mrežica z mrežno razdaljo enako razdalji med dvema navpičnima vozelnima črtama. Detektor premaknemo z mesta, kjer zaznamo središčni pas ojačenja, do mesta, kjer zaznamo prvi pas ojačenja. Premikamo ga vzporedno z daljšima stranicama opne v simetrijski ravnini daljših stranic opne. Nato frekvenco, s katero deluje generator tresljajev, spremenimo tako, da opna niha v naslednjem višjem nihajnem načinu.

- a) Da zaznamo pas ojačenja, moramo detektor pomakniti še za 9,4 cm. Izračunaj valovno dolžino mikrovalov.
- b) Po drugem premiku je detektor oddaljen od prvotnega mesta za 37,2 cm. Izračunaj razdaljo med sosednjima vozelnima črtama v tem nihajnem načinu.

Če je $x \ll 1$, velja $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$.

Ciril Dominko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, šolsko leto 2002/03, številka 4, strani 193–256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosen (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2002/03 je za posamezne naročnike **3.300 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.700 SIT**, posamezna številka **825 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASIX, transakcijski račun številka 03100-1000018787.

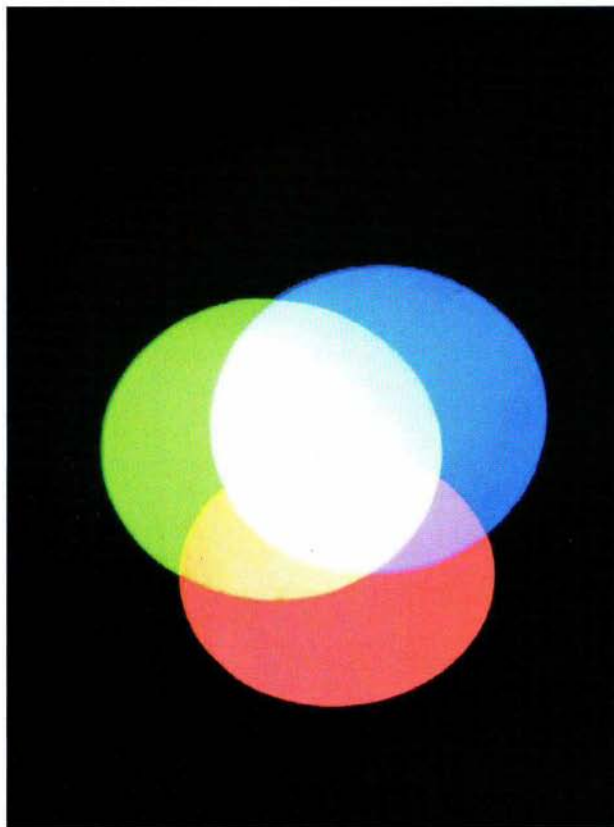
List sofinancira MŠZŠ

Založilo DMFA – založništvo

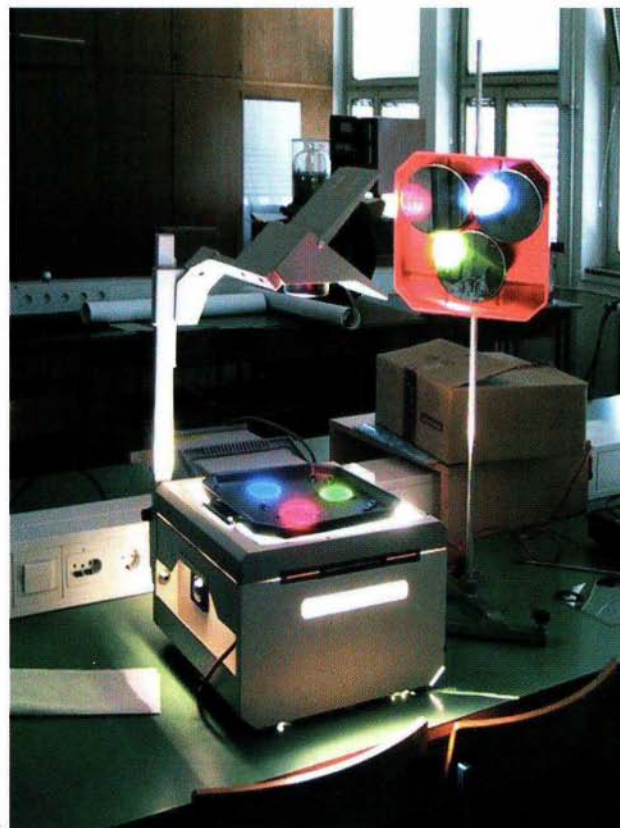
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2003 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1522

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Snop rdeče, zelene in modre svetlobe daje belo svetlobo.



Projekcijska površina grafoskopa nosi tri barvne filtre. Snope obarvane svetlobe prestrežejo tri različno nagnjena ogledala in jih usmerijo na zaslone tako, da se prekrivajo.



Mozaik na sliki je osrednji del velikega stenskega mozaika, ki krasi vhod v sinagogo Beth El v ameriškem Harrisonburgu. Mozaik v Beth El je bil narejen leta 1964 po vzoru slavnega talnega mozaika velike sinagoge Beth-Alpha v Galileji, ki so jo zgradili v 5. in 6. stoletju. Osem krat trinajst čevljev velik mozaik sestavlja 13 000 koščkov iz posebnega emajla, modrikaste bizantinske smalte, ki so jo v želji, da bi se čimbolj približali originalu, uvozili iz Italije.

Osrednji del prikazuje bizantinsko pojmovanje zgradbe vesolja.

Zodiak, živalski krog, obkroža poosebljeno Sonce, mladca, ki vodi vprego s štirimi konji.

Levo od zodiaka, na delu, ki ga ni na sliki, je upodobljeno žrtvovanje Izaka, desno pa mavrica, znamenje zaveze med Bogom in življenjem na Zemlji.

Marija Vencelj