

PRE SEK

30 (2002 – 03)

3

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Nadaljevanje s str. 155.



Profesor Manindra Agrawal (skrajno desno) in njegova podiplomska študenta Nitin Saxena in Niradž Kajal.

Računski postopek treh indijskih znanstvenikov bomo morda opisali kdaj drugič. Za zdaj povejmo le, da čas, ki ga novi postopek v najslabšem primeru potrebuje za preskus praštevilstosti števila n , zanesljivo ni večji od $C \ln^{12} n$, kjer je C neka konstanta. Avtorji domnevajo, da potrebni čas v resnici ni večji od $C \ln^6 n$. Za ilustracijo vzemimo, da njihova domneva drži in da je vrednost konstante C enaka času, ki ga naš računalnik potrebuje za eno deljenje. Potem bo za preskus praštevilstosti števila $n = 10^{100} + 267$ porabil približno 149 sekund oziroma dve minuti in pol. No, toliko bomo pa že počakali!

Novi postopek ima velik teoretičen pomen. V praksi pa se bodo za reševanje problema praštevil še vedno uporabljali verjetnostni algoritmi, ki so neprimerno hitrejši, kar dosežejo z žrtvovanjem absolutne pravilnosti odgovora. Verjetnostni algoritmi se namreč lahko včasih zmotijo in kakšno število razglasijo za praštevilo, čeprav je v resnici sestavljeno. Ker pa je verjetnost napake izredno majhna (veliko manjša od verjetnosti glavnega dobitka na loteriji), so ti algoritmi za potrebe kriptografije zaenkrat povsem ustrezni.

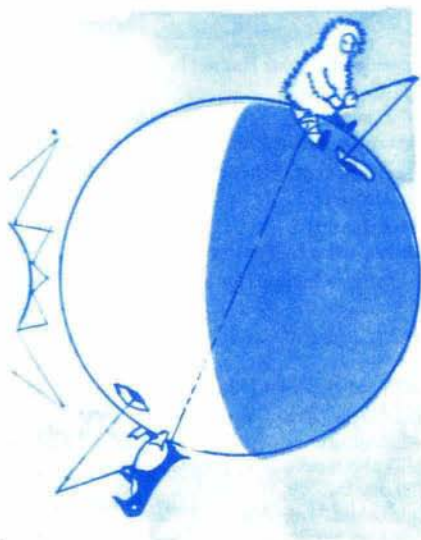
Marko Petkovšek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, leto 2002/03, številka 3, strani 129–192

VSEBINA

MATEMATIKA	Koti v pravilnem petkotniku (Marko Razpet)	142-147
FIZIKA	O Arhimedovi kroni (Janez Strnad)	134-137
	Kotalno trenje (Andrej Likar)	152-154
	Bine ugotavlja radioaktivnost (Jože Pahor)	164-168
ASTRONOMIJA	Druga najsvetlejša zvezda (Marijan Prosen)	148-150
	Dvojni planet (Marijan Prosen)	169-170
RAČUNALNIŠTVO	Številski labirint (Martin Juvan)	138-141
	Rešitev problema praštevil (Marko Petkovšek)	155, III
NOVE KNJIGE	Marijan in Stana Prosen: Zvezdni miti in legende (Marija Vencelj)	151
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Križanka "Matematiki 19. stoletja" – reš. na str. 170 (Marko Bokalič)	160-161
	Didona, volovska koža in razglednica (Marija Vencelj)	162-163
NOVICE	Astronomski tabor na Blokah (Petra Vencelj)	133
	33. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	156-157
	Slovenija gre naprej ali kako smo bili najboljši na olimpiadi (Tone Gradišek)	157-159
	Mednarodni kongres matematikov, Peking 2002 (Dušan Repovš)	171-172
NALOGE	Na drugi strani Zemlje – Nagradna naloga (Peter Petek)	130
	Hrana, rana, Ana, na – Nagradna naloga (Marija Vencelj)	131
	Tri posode – reš. str. 168 (Marija Vencelj)	141
	Raziskovalna naloga o Kanopu in Siriju – reš. str. 159 (Marijan Prosen)	150
REŠITVE NALOG	Dva kamna – Rešitev nagradne naloge iz 1. številke (Marija Vencelj)	131-132
	Naloga o Fibonaccijevem zaporedju – Rešitev s str. 4 (Viktor Velkavrh in Roman Drnovšek)	154
TEKMOVANJA	Urn timer tekmovanj v letu 2003 (Darjo Felda)	173-175
	22. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. na str. 180 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	176-179
	Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2001/02 (Ciril Dominko)	183-186
	Izbirna testa za mednarodno matematično olimpiado – reš. na str. 188 (Matjaž Željko)	187
NA OVITKU	Večerno nebo nad Bloško planoto (foto Petra Vencelj). Glej tudi zapis na str. 133	I
	Slovenski olimpijski ekipi na 33. fizikalni in 43. matematični olimpiadi. Poročili sta na straneh 156 in 157	II
	Zlata krona iz predverja groba Filipa II, Makedonskega, v obliki vejice iz listov in cvetov, zvite v venec, iz 4. stoletja pred našim štetjem. Več o tem najdejo bralci na spletnem naslovu " http://www.mcs.drexel.edu/~corres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html ". IV	

NA DRUGI STRANI ZEMLJE – Nagradna naloga



“No, danes je pred nami naloga iz zemljepisa,” je rekla teta Amalija, takoj ko so njeni trije nečaki Jožica, Tomaž in Polonca, stopili skozi vrata. Na mizi je imela globus.

“Kateri kraj na Zemlji leži najdlje od Ljubljane?”

“Hm, ravno na nasprotni strani planeta, za cel premer Zemlje daleč,” je premišljeval Tomaž.

“Ja, ampak Zemlja ni čisto okrogla, malo sploščena je,” je imela pomisleke Polonca.

Amalija je menila: “Seveda ne bomo tako grozno natančni, privzemimo, da je Zemlja krogla.

In tudi kakšnih sto kilometrov na to ali ono stran bomo pogledali, da najdemo kakšen večji naseljeni kraj.”

“Iščemo torej Ljubljani *antipodno* mesto,” je rekla Jožica in zasukala globus. “Tule nekje v Tihem oceanu mora biti.”

“Saj tu je sama voda. Antipodna točka Ljubljane je sredi oceana,” so razočarano ugotovili vsi skupaj. Zemljepisna širina Ljubljane je (zao-kroženo na cele stopinje) 46° severno in dolžina 15° vzhodno, torej leži antipodna točka 46° južno in $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$ zahodno, tam pa je daleč naokoli samo morje. To pravzaprav ni nič posebnega, saj morje pokriva 71 odstotkov Zemlje in kopno le 29 odstotkov.

Zato pa nagradna naloga za vas, dragi bralci.

Poiščite par večjih mest, ki sta si vsaj približno antipodni (do 150 km natančno).

Imeni mest – z zemljepisno širino in dolžino – pošljite najkasneje **do 15. januarja 2003** na naš naslov:

Presek, Jadranska 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Preverili bomo rezultate in izžrebali reševalca, ki bo prejel knjižno nagrado.

Peter Petek

HRANA, RANA, ANA, NA – Nagradna naloga

Iščemo čim daljšo slovensko besedo, iz katere lahko z zaporednim izpuščanjem natanko ene črke dobimo zaporedje samih slovenskih besed, do vključno zadnje, ki ima dve črki. Primer je prikazan v naslovu naloge. Črko lahko izpustimo na kateremkoli mestu, ne nujno na prvem (npr. križ, riž, rž ali križ, kri, ki), ne smemo pa spreminjati vrstnega reda črk. Sklanjanje, spreganje, stopnjevanje, dvojina, množina, kratice so

- a) prepovedane operacije;
- b) dovoljene operacije.

Za najdaljšo besedo pod a) in pod b) razpisujemo knjižni nagradi. Če bo takih več, bo o nagradi odločil žreb.

Besede pošljite najkasneje do 15. januarja 2003 na naš naslov:

Presek, Jadranska 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Marija Vencelj

DVA KAMNA – Rešitev nagradne naloge iz 1. številke

V letošnji 1. številki smo vam zastavili vprašanje, kdaj se srečata kamna, od katerih prvega spustimo z višine h , drugega pa hkrati sprožimo navpično s tal s hitrostjo v_0 . Nalogo je bilo treba rešiti za podatke:

- a) $h = 20$ m, $v_0 = 20$ m/s,
- b) $h = 30$ m, $v_0 = 10$ m/s.

Pravilna odgovora sta:

- a) Srečata se čez 1 sekundo.
- b) Srečata se čez 2,45 s na tleh, kamor čez 2 sekundi najprej prispe drugi kamen in 0,45 sekunde za njim še prvi. (Vzeli smo $g = 10 \text{ ms}^{-2}$.)

Na nalogo smo prejeli dvanajst pravih odgovorov. Poslali so jih Denis Brojan iz Domžal, Juvančič Janez z Mute in devet učenk ter en učenec z Osnovne šole Davorina Jenka v Cerkljah na Gorenjskem: Tina Gašpirc, Mina Grčar, Marta Jagodic, Anita Krt, Nataša Luskovec, Majda Pavlin, Damjana Praprotnik, Polona Trobevšek, Eva Žlebirič in Bojan Zupin. Vsak svojo in vsak po svoje drugačno. Njihovemu učitelju fizike gredo naše čestitke za delo pri dodatnem pouku. Za pravilne smo šteli tudi tiste rešitve, ki so bile fizikalno prav zastavljene in računsko pravilno rešene, pomanjkljiv pa je bil odgovor na zastavljeno vprašanje.

Žreb je sledil največji verjetnosti. Knjižno nagrado je prisodil osmošolki izpod Krvavca. Prejme jo Marta Jagodic.

Rešitev naloge

Vse prispele rešitve so povsem računske. Skupaj rešimo nalogo nekoliko drugače.

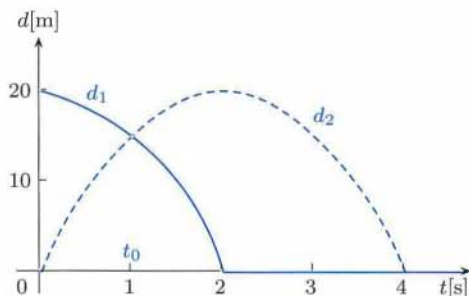
Kamna se srečata, ko sta ob istem času na isti višini od tal. Če štejemo čas t od trenutka, ko kamna spustimo oziroma sprožimo, in označimo z $d_1(t)$ višino prvega kamna ter z $d_2(t)$ višino drugega kamna nad tlemi, velja

$$d_1(t) = \begin{cases} h - \frac{g}{2}t^2, & \text{če je } h - \frac{g}{2}t^2 \geq 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

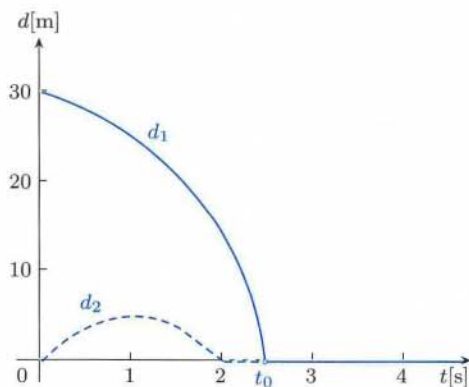
$$d_2(t) = \begin{cases} v_0t - \frac{g}{2}t^2, & \text{če je } v_0t - \frac{g}{2}t^2 \geq 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Iskaní čas srečanja t_0 je najmanjši pozitivni čas, za katerega je $d_1(t_0) = d_2(t_0)$. Poiskali ga bomo grafično. Za g bomo vzeli 10 ms^{-2} .

a) Slika 1. Grafa funkcij $d_1(t) = 20 - 5t^2$ in $d_2(t) = 20t - 5t^2$ se sekata pri $t_0 = 1 \text{ s}$, kamna se srečata čez 1 s v zraku na višini 15 m .



b) Slika 2. Grafa funkcij $d_1(t) = 30 - 5t^2$ in $d_2(t) = 10t - 5t^2$ se prvič združita pri $t_0 = 2,45 \text{ s}$, to je čas srečanja obeh kamnov na tleh.



Marija Vencelj

ASTRONOMSKI TABOR NA BLOKAH

Na radiu Ognjišče poteka že od februarja 2001 vsako drugo soboto v mesecu oddaja **Zanimivosti nočnega neba**, ko jo pripravlja profesor Boris Kham.

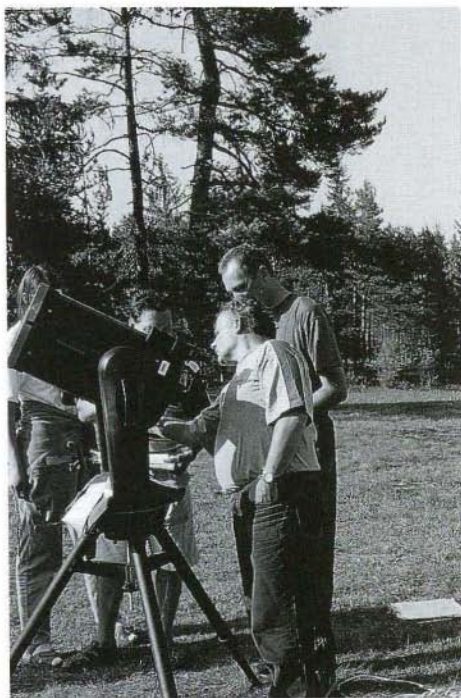
V njenem okviru je bil od 11. do 13. julija 2002 na Blokah poskusno organiziran tridnevni astronomski tabor z naslovom **Potovanje med galaksijami**. Namen tabora je bil seznaniti udeležence z osnovami astronomije in opazovanje s teleskopom.

Prišli smo z vseh koncev Slovenije, ob večerih pa so nas obiskali še domačini z okolice Blok.

Podnevi smo spoznavali zvezdne karte in ozvezdja, opazovali Sonce in Sončeve pege, ko pa nam je opazovanje preprečila oblačnost, smo izvedli nekaj preprostih fizikalnih poskusov in vaj (merjenje gravitacijskega pospeška z nitnim nihalom, računanje mase Zemlje s pomočjo Newtonovega gravitacijskega zakona, toplotni tok s Sonca). Zvečer smo se podali na lov za galaksijami, kopicami in planetarnimi meglicami. Naš cilj so bili Messierjevi objekti (M4, M13, M16, M18, M20, M26, M27, M29, M39, M51, M53, M56, M80, M92, M101, M108).

Poskusni tabor je uspel. Zanimivi program je bil brezhibno izpeljan, motivirani smo bili prav vsi udeleženci.

Spotoma so se razvile tudi zanimive debate, uspelo nam je napraviti prenekatero lepo fotografijo (glej naslovnico).



Delo v "dnevni izmeni".

Petra Vencelj

O ARHIMEDOVI KRONI

*Če ni res, je lepo povedano.
Italijanski rek*

Zgodbo najdemo celo v nekaterih učbenikih fizike, zato jo pozna precej učencev. Sirakuški vladar Hieron II. je pri zlatarju naročil krono in mu dal v ta namen kos čistega zlata. Krona, ki jo je zlatar izročil Hieronu, je imela enako maso kot kos zlata. A Hieron je pomislil, da ga je morda zlatar ogoljufal tako, da je nekaj zlata nadomestil z manj dragocenenim srebrom. Sum je zaupal Arhimedu, ki mu je že večkrat svetoval in je bil njegov dober znanec, kot tudi znanec njegovega sina Gelona, celo njun sorodnik.



Slika 1. Arhimeda, ki je bil rojen leta 289, je ubil vojak leta 212, ko so Rimljani zasedli Sirakuze. Hieron (306 do 215) je od leta 275 vladal sam in od leta 240 skupaj s sinom Gelonom. Tako bi zgodbo bilo najbrž treba postaviti pred leto 240. Vse letnice zadevajo čas pred našim štetjem.

Arhimed je moral ugotoviti, ali je zlatu v kroni primešano srebro, ne da bi krono, ki jo je Hieron že posvetil bogovom, kakorkoli poškodoval. Arhimed je, tako pripoveduje zgodba, najprej prišel do odkritja, kako izmeriti prostornino krone. Ko je legel v banjo do vrha polno vode, je ugotovil, da je prostornina vode, ki se prelije iz banje, enaka njegovi prostornini in da je prostornina vode v banji za toliko manjša, ko stopi iz nje. Od veselja nad odkritjem je gol stekel po mestu in vpil: "Heureka, heureka!" (Odkril sem, odkril sem!). Nekateri v isti sapi omenjajo še zakon o vzgonu, ki ga je Arhimed tudi odkril. Po tem zakonu se teža potopljenega telesa navidez zmanjša za težo izpodrinjene vode.

S tem spoznanjem Arhimedu ni bilo težko rešiti naloge s krono. Izmeriti je bilo treba prostornino kosa zlata z maso krone in jo primerjati s prostornino krone. Če bi bila prostornina krone večja kot prostornina kosa zlata, bi krona izpodrinila več vode kot kos zlata; to naj bi pomenilo, da je zlatu v kroni primešano srebro. Arhimedov poskus naj bi to zares pokazal in tako razkril zlatarjevo goljufijo.

O zgodbi je prvi poročal rimski inženir Vitruvij v 1. stoletju našega štetja. Toda premislek porodi sum, da so si zgodbo izmislili pozneje. Opisani postopek ne kaže domiselnosti, značilne za Arhimeda, in ne izkoristi zakona o vzvodu (glej *Aristotel in Arhimed o vzvodu*, Pressek 24 (1996/97) 70.) in zakona o vzgonu. Še pomembnejši je praktični pomislek, da bi se po opisanem poskusu tedaj bilo težko odločiti, ali je zlatar ogoljufal vladarja ali ne.

To razkrije kratek račun. Šlo naj bi za razmeroma lahko krono v obliki vejice z listi, zvite v venec. Take krone iz 4. stoletja pred našim štetjem so našli v Leti, Amfipoliju in Vergini v Grški Makedoniji ter v Dardanelah. Verginska krona, ki ji sicer manjka nekaj listov, ima premer 18,5 cm in maso 714 g. Vzemimo, da masa krone meri 1000 g in premer posode z vodo, v katero jo potopimo, 20 cm. Ploščina njene osnovne ploskve doseže 314 cm^2 . V tablicah poiščemo gostoto zlata in srebra. Podatki segajo od $18,88 \text{ g/cm}^3$, za vakuumsko destilirano, do $19,3 \text{ g/cm}^3$, za lito, in $19,4 \text{ g/cm}^3$, za monokristalno zlato, ter od $10,49 \text{ g/cm}^3$, za monokristalno, do $10,492 \text{ g/cm}^3$, za vakuumsko destilirano srebro. V Arhimedovih časih niso vakuumsko destilirali kovin in ne vzgajali lepih velikih monokristalov, pa tudi tako čistih kovin kot danes niso mogli dobiti. Ker pač podatke potrebujemo, se odločimo za $19,3 \text{ g/cm}^3$, za gostoto zlata, in $10,5 \text{ g/cm}^3$, za gostoto srebra, z zavestjo, da sta zadnji mesti lahko negotovi.

Naslednje vprašanje je prostornina zlitin. V nekaterih primerih se ta razlikuje od vsote prostornin prvega in drugega elementa, ki ju zlijemo. Tudi v najboljšežnejših tablicah snovnih konstant pa ni podatka o prostornini zlitine zlata in srebra. Najbrž v tem primeru podatek ni potreben. Atoma imata zelo podobno kemijsko zgradbo (polmer obeh je enak 0,144 nm) in enako kristalno zgradbo (ploskovno centrirano kubično mrežo z robom osnovne celice 0,407 nm v kristalu zlata in 0,408 nm v kristalu srebra). Zato lahko privzamemo, da se masi obeh atomov razlikujeta samo zaradi mas jeder in da v zlitini le atomi srebra zasedejo mesta atomov zlata. Zlato na 79. mestu periodne preglednice ima relativno atomsko maso 196,97, srebro pa na 47. mestu relativno atomsko maso 107,87. Ti masi sta v razmerju 1,867; le-to se le malo razlikuje od razmerja gostot 1,826. Zato privzamemo, da je prostornina krone kar vsota prostornine zlata in prostornine srebra, ki ju sestavljata.

Vzemimo, da je zlatar 300 g zlata zamenjal za 300 g srebra. Čisto zlato ima značilno rumeno barvo, medtem ko ima srebro "kovinsko barvo" (nekateri pravijo, da je brezbarvno). To je povezano z valovno dolžino svetlobe, ki jo absorbira kristal. Odbita svetloba, v kateri ni te sestavine, kaže značilno barvo. Že pri 300 g srebra je zlitina utegnila biti opazno bolj "bela" od čistega zlata. Morda je prav to zbudilo Hieronov sum? Večji delež srebra bi bil še bolj tvegan. Barva se manj spremeni, če zlato zlijemo z bakrom. Toda baker ima gostoto $8,9 \text{ g/cm}^3$, torej je precej manjša od gostote srebra. Zato bi bilo primes bakra pri Arhimedovem poskusu lažje odkriti.

Pri navedeni izbiri je prostornina krone $700 \text{ g}/19,3 \text{ gcm}^{-3} + 300 \text{ g}/10,5 \text{ gcm}^{-3} = 64,8 \text{ cm}^3$. V izbrani posodi ji ustreza višina vode $64,8 \text{ cm}^3/314 \text{ cm}^2 = 0,206 \text{ cm}$. Prostornina kosa zlata z maso 1000 g je $1000 \text{ cm}^3/19,3 = 51,8 \text{ cm}^3$ in ji v posodi ustreza višina vode $51,8 \text{ cm}^3/312 \text{ cm}^2 = 0,165 \text{ cm}$. Razlika obeh višin doseže komaj $0,041 \text{ cm} = 0,41 \text{ mm}$. Tolikšno razliko gladin bi težko opazili s prostim očesom. Ustreza ji prostornina $0,041 \text{ cm} \cdot 314 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^3$ vode, ki bi dodatno stekla iz posode, če bi v zvrhano polno posodo najprej potopili kos zlata, ga vzeli iz vode in potem potopili krono. Upoštevati je treba, da je gladina vode zaradi površinske napetosti ukrivljena ter da nekaj vode lahko ostane na zlatu. Razlika višin in dodatna prostornina bi bili še manjši, če bi bili masa krone in masa kosa zlata manjši, če bi zlatar manjši del zlata nadomestil s srebrom ali če bi imela posoda večji premer.

Z bolj domiselnim poskusom pa bi Arhimed precej lažje ugotovil, ali je zlatar goljufal. Oprl bi se prav tako na zakon o vzvodu in zakon o vzgonu. Krono in kos zlata bi obesil na krajšiči enakoročnega vzvoda, kakršnega uporablja tehtnica. Vzvod, ki bi bil na zraku v ravnovesju, bi se dvignil na strani krone, ko bi ga potopil v vodo. Krona z večjo prostornino bi izpodrinila več vode z večjo maso od mase kosa zlata in bi bila zato navidez lažja. S prejšnjimi podatki ugotovimo, da se masa krone, ki ustreza njeni teži, navidez zmanjša za $64,8\text{ g}$, to je na $1000\text{ g} - 64,8\text{ g} = 935,2\text{ g}$, ker je gostota vode 1 g/cm^3 . Masa, ki ustreza teži kosa zlata, pa se navidez zmanjša za $51,8\text{ g}$ na $1000\text{ g} - 51,8\text{ g} = 948,2\text{ g}$. Razlike teh mas $948,2\text{ g} - 935,2\text{ g} = 13\text{ g}$ s potopljeno tehtnico tudi v Arhimedovih časih ne bi bilo težko ugotoviti. V tem primeru napake, ki smo jih omenili pri prejšnjem načinu merjenja, ne bi motile. Poleg tega bi vzvod lahko uporabili tudi, če krona ne bi imela natančno enake mase kot kos zlata. Na zraku bi dosegli ravnovesje, če bi povečali ročico krone, v kolikor bi imela krona manjšo maso, ali če bi ročico zmanjšali, v kolikor bi imela krona večjo maso.

Kaj se je dogajalo v davnih časih, ne vemo in najbrž nikoli ne bomo vedeli. Ni pa dvoma, da so si veliko zanimivih zgodb izmislili kasneje z dobrim namenom, da bi pritegnili pozornost bralcev in poslušalcev. O eni od njih, v katero je bil prav tako vpleten Arhimed, je Presek že poročal. Trdni fizikalni razlogi govorijo za to, da rimskih ladij niso zažgali s sončno svetlobo, ki se je odbila na vdrtilih ščitih (*Arhimed in sežig ladij*, Presek 21 (1993/94) 2). To ne pomeni, da bi bilo treba zanimive stare zgodbe pregnati iz šole. Prav pa je, če jih jemljemo z zabavne strani in v njih ne iščemo "naravoslovne resnice".

Pri računanju smo uporabili naslednje enačbe:

- za ploščino kroga, to je dna posode: $p = \pi r^2$, če je r polmer kroga,
- za prostornino valja: $V = \pi r^2 h$, če je h njegova višina,
- zvezo med maso in prostornino: $m = \rho V$, če je ρ gostota, in
- zvezo med težo in maso: $F = mg$, če je g težni pospešek.

Zaradi zadnje zveze smo lahko razpravljali o masi, ki ustreza teži, čeprav zakon o vzgonu pravi, da se teža potopljenega telesa navidez zmanjša za težo izpodrinjene tekočine.

ŠTEVILSKI LABIRINT

Pred časom sem naletel na naslednjo različico iskanja izhoda iz labirinta. Namesto običajne slike labirinta dobimo pravokotno tabelo naravnih števil, na primer tako, kot je prikazana na sliki 1. Na začetku se nahajamo na enem od polj tabele, recimo v levem zgornjem vogalu. Naš cilj je priti do nekega izbranega polja tabele, ki predstavlja izhod iz labirinta. Pri tabeli s slike 1 naj bo to desni spodnji vogal. Premikanje po labirintu poteka takole: Če smo na polju, na katerem je napisano število k , potem se lahko premaknemo za k mest v desno, za k mest v levo, za k mest navzgor ali za k mest navzdol. Seveda pa pri tem ne smemo stopiti čez rob tabele.

3	2	3	4	3	3
1	3	3	2	1	3
5	3	3	2	2	4
1	3	3	3	3	3
1	4	2	3	2	5

Slika 1. Številski labirint.

Za labirint s slike 1 je ena od možnih poti do izhoda prikazana na sliki 2. Seveda pa pri vseh številskih labirintih ni moč priti do izhoda. Tako na primer labirint s slike 1 nima rešitve, če mu izhod prestavimo v desni zgornji vogal.

①			①		
			③		④
			②		⑤

Slika 2. Pot skozi labirint s slike 1.

In kako se lotiti iskanja izhoda iz številkega labirinta? Seveda se iskanja lahko lotimo s poskušanjem in se pri tem zanašamo na navdih ter zaupamo v srečo. Če pa želimo zanesljivo pot do rešitve, je priporočljivo, da se reševanja lotimo bolj urejeno in sistematično.

Ena od možnih poti je naslednja: Polja tabele bomo postopoma oštevilčili tako, da bo številka, prirejena posameznemu polju, povedala, koliko potez smo potrebovali, da smo z začetnega prišli do tega polja. Začetno polje označimo s številko 0. Nato poljem, na katera lahko pridemo s polja številka 0, dodelimo številko 1. V naslednjem koraku še neoštevilčenim poljem, na katera lahko pridemo s polj, ki imajo številko 1, dodelimo številko 2. Postopek ponavljamo, dokler številke ne dobi tudi polje, na katerem je izhod iz labirinta. Številka, dodeljena izhodu, pove, koliko potez potrebujemo, da pridemo iz labirinta. Vendar pa se postopek vedno ne izide. Lahko se namreč zgodi, da na nekem koraku ne moremo več priti na nobeno neoštevilčeno polje, do polja, na katerem je izhod, pa še nismo prišli. V takem primeru poti iz labirinta ni.

0	3		1	4	
	4		3		4
2	4				3
1	2		4	3	
2	3		2		4

Slika 3. Iskanje poti skozi labirint.

Če opisani postopek uporabimo na labirintu s slike 1, dobimo tabelo števil s slike 3. Številka 4 v desnem spodnjem vogalu pove, da je iz labirinta moč priti v štirih potezah, torej potezo hitreje, kot to naredimo z rešitvijo s slike 2.

In kako poiščemo poteze, ki jih moramo narediti, da pridemo iz labirinta? Verjetno je najlažje, da si jih beležimo kar sproti. Vsakič, ko neko polje oštevilčimo, si tudi zapomnimo, s katerega polja (z za eno manjšo številko) smo nanj prišli. Včasih je takih polj več. Takrat si zapomnimo katerokoli od njih. Upoštevajte nasvet in poiščite štiri poteze, ki nas pripeljejo do izhoda iz labirinta s slike 1.

Ko se reševanja s svinčnikom in papirjem naveličamo, lahko gornji postopek zapišemo tudi v obliki računalniškega programa. V nadaljevanju je zapisana le funkcija, ki opravi glavni del računanja, branje podatkov o labirintu in izpis ugotovitev pa boste morali dodati sami.

```
int resi(int lab[MAX][MAX], int m, int n, int pot[MAX][MAX][3])
{
    int i, j, poteza, konec, t;

    for (i = 0; i < m; i++)
        for (j = 0; j < n; j++)
            pot[i][j][0] = pot[i][j][1] = pot[i][j][2] = -1;
    /* začetni položaj in začetna poteza */
    poteza = pot[0][0][0] = 0;
    do {
        konec = 1;
        for (i = 0; i < m; i++)
            for (j = 0; j < n; j++)
                if (pot[i][j][0] == poteza) {
                    /* gremo na levo */
                    if ((t = j - lab[i][j]) >= 0 && pot[i][t][0] == -1) {
                        pot[i][t][0] = poteza + 1; konec = 0;
                        pot[i][t][1] = i; pot[i][t][2] = j;
                    }
                    /* gremo na desno */
                    if ((t = j + lab[i][j]) < n && pot[i][t][0] == -1) {
                        pot[i][t][0] = poteza + 1; konec = 0;
                        pot[i][t][1] = i; pot[i][t][2] = j;
                    }
                    /* gremo navzgor */
                    if ((t = i - lab[i][j]) >= 0 && pot[t][j][0] == -1) {
                        pot[t][j][0] = poteza + 1; konec = 0;
                        pot[t][j][1] = i; pot[t][j][2] = j;
                    }
                    /* gremo navzdol */
                    if ((t = i + lab[i][j]) < m && pot[t][j][0] == -1) {
                        pot[t][j][0] = poteza + 1; konec = 0;
                        pot[t][j][1] = i; pot[t][j][2] = j;
                    }
                }
        poteza++;
    } while (pot[m - 1][n - 1][0] == -1 && !konec);
    return !konec;
}
```

Funkcija vrne vrednost 1, kadar obstaja pot do izhoda iz labirinta, sicer vrne vrednost 0. Komponenti 1 in 2 v tabeli **pot** povesta, od kod smo prišli na dano polje, komponenta 0 pa, koliko potez smo potrebovali.

Funkcija ni napisana najbolj varčno. Z dodatno pomožno funkcijo bi njeno kodo lahko nekoliko skrajšali, še bolj moteča pa je potratnost izvedbe postopka. V vsaki ponovitvi zanke do namreč pregledamo celotno tabelo, čeprav je v njej morda le nekaj polj, iz katerih lahko naredimo nove poteze. Ta polja bi si lahko na vsakem koraku zabeležili v pomožno eno-razsežno tabelo in se tako izognili vsakokratnemu potratnemu preverjanju vseh polj. Tisti, ki poznate osnove algoritmov, ste v gornjem postopku verjetno prepoznali eno od različic pregleda grafa v širino.

Končajmo z nalogo. Na sliki 4 vas čaka "še neraziskan" številski labirint. Začnete v levem zgornjem vogalu, izhod pa je v desnem spodnjem vogalu. Seveda iščete tako pot do izhoda, ki zahteva čim manj potez.

6	1	2	1	4	1	2	1	2	1
1	4	4	2	2	2	1	4	4	6
2	1	4	1	4	1	4	2	4	1
1	6	1	2	1	4	1	4	1	2
6	8	6	1	2	2	4	6	4	4
1	2	1	2	1	6	1	6	1	4
6	1	2	4	2	4	4	4	5	1

Martin Juvan

TRI POSODE

Gostilničar je kupil 50 litrov vina, 2 litra odlil v štefan, ostalo pa nalil v tri enake posode, vendar v različnih količinah. Rad bi, da bi bile posode tudi enako polne, zato začne vino pretakati. Najprej iz ene posode odlije polovico vina enakomerno v drugi dve posodi (to je, v vsako enako količino). Nato odlije iz druge posode polovico vsebine enakomerno v prvo in tretjo posodo in nazadnje polovico vsebine posode enakomerno v prvi dve posodi. Presrečen opazi, da je dosegel, kar je želel, da so gladine v vseh treh posodah enako visoko.

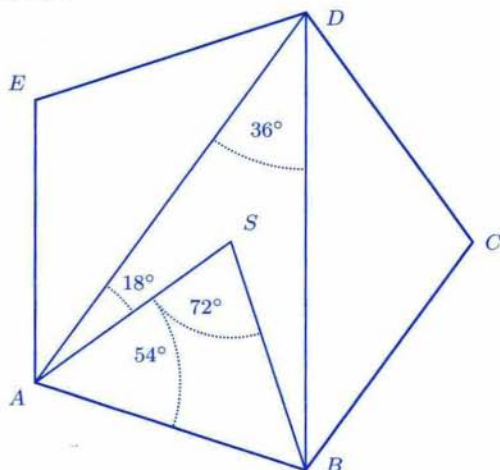
Koliko je bilo vina na začetku v posameznih posodah?

Marija Vencelj

Rešitev je na strani 168.

KOTI V PRAVILNEM PETKOTNIKU

Kot je razvidno na sliki, v pravilnem petkotniku $ABCDE$ s središčem v točki S povsem naravno nastopajo koti 18° , 36° , 54° in 72° , ki so vsi večkratniki kota 18° .



Za kote 30° , 45° in 60° ni težko najti vrednosti kotnih funkcij, saj si pomagamo z enakostraničnim trikotnikom in kvadratom. Rezultatov si tudi ni težko zapomniti. Navadno pa najdemo v učbenikih za kotne funkcije kotov, ki jih srečamo v pravilnem petkotniku, precej zapletene izpeljave. Za nekatere od njih je treba obvladati celo kompleksna števila ter enačbe tretje in četrte stopnje. Ogledali si bomo, kako lahko enostavneje dobimo izraza za sinus in kosinus kota 54° . Rezultat nam omogoča izračun vrednosti kotnih funkcij tudi za ostale kote v pravilnem petkotniku in geometrijsko konstrukcijo pravičnega petkotnika, če poznamo njegovo stranico a .

Najprej opazimo, da velja

$$2 \cdot 54^\circ = 270^\circ - 3 \cdot 54^\circ.$$

Nato se spomnimo znanih identitet

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \quad \sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Nekoliko manj znana je identiteta za kosinus trojnega kota, ki pa jo dobimo iz adicijskega izreka in prejšnjih identitet (ali tudi iz Moivreove formule):

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = \cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha).$$

Označimo

$$x = \sin 54^\circ, \quad y = \cos 54^\circ.$$

Očitno je $0 < x < 1$ in $0 < y < 1$. Ker velja

$$\sin(2 \cdot 54^\circ) = -\cos(3 \cdot 54^\circ),$$

dobimo od tod najprej

$$2xy = -y(1 - 4x^2),$$

po krajšanju z y in po preureditvi pa je pred nami kvadratna enačba

$$4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Njeni rešitvi sta

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \quad x_2 = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}).$$

Ker je x_2 negativno število, imamo nazadnje

$$\sin 54^\circ = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Število

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

smo že srečali v Preseku (Presek **27** (1999/2000), 34). Imenujemo ga *število zlatega reza* (zlato razmerje, označujemo ga tudi τ), ker nastopa pri zlatem rezu, zlatem pravokotniku, zlati spirali. Potence števila ϕ s celimi eksponenti se linearno izražajo s ϕ samim, koeficienti pa so Fibonaccijeva števila. Trditev temelji na tem, da število $\phi = 2x_1$ zadošča enačbi $\phi^2 = \phi + 1$, iz katere dobimo ϕ^n , oziroma enačbi $\phi^{-1} = \phi - 1$, ki nam da izraze za ϕ^{-n} , kjer je n naravno število.

Nekateri menijo, da se oznaka ϕ uporablja v čast starogrškemu kiparju Fidiji, ki je zlati rez uporabljal pri svojih mojstrovinah, drugi pa stavijo, da oznaka pride od Fibonaccija. Kakorkoli že je, velja

$$\sin 54^\circ = \frac{1}{2} \phi.$$

Podobno idejo, ki nas privede do kvadratne enačbe, lahko uporabimo tudi za sinus kota 18° . Začnemo z enakostjo $2 \cdot 18^\circ = 90^\circ - 3 \cdot 18^\circ$ in nadaljujemo podobno kot pri sinusu kota 54° . Lahko pa uporabimo dobljeni rezultat in enakost

$$2 \sin^2 18^\circ = 1 - \cos 36^\circ = 1 - \sin 54^\circ = \frac{1}{2}(2 - \phi).$$

Tako dobimo najprej

$$\sin^2 18^\circ = \frac{1}{4}(2 - \phi) = \frac{1}{4}(\phi - 1)^2,$$

nato pa

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2}(\phi - 1) = \frac{1}{2\phi}.$$

S številom ϕ se izražajo tudi

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \phi}, \quad \sin 72^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \phi}.$$

Prav tako lahko s številom ϕ zapišemo tudi kosinuse, tangense in kotangense tistih večkratnikov kota 18° , ki ležijo med kotoma 0° in 90° , kot kaže razpredelnica.

kot	sin	tg	
18°	$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \phi}$	$\frac{1}{5}\sqrt{35 - 20\phi}$	72°
36°	$\frac{1}{2}\sqrt{3 - \phi}$	$\sqrt{7 - 4\phi}$	54°
54°	$\frac{1}{2}\phi$	$\frac{1}{5}\sqrt{15 + 20\phi}$	36°
72°	$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \phi}$	$\sqrt{3 + 4\phi}$	18°
	cos	ctg	kot

Bralec bo z lahkoto zapisal vrednosti v zgornji razpredelnici v običajni obliki, s kvadratnimi koreni. Čemu nam vse to lahko koristi?

V učbenikih običajno najdemo geometrijsko konstrukcijo pravičnega petkotnika, ki je včrtan dani krožnici. Poskusimo sedaj konstruirati pravični petkotnik z dano stranico a . Njeni krajšči označimo z A in B , ki bosta hkrati že dve oglišči iskanega lika. V A in B narišemo pravokotnici na daljico AB in konstruiramo kvadrat $ABFG$. Razpolovišče stranice AG označimo s H , potem pa načrtamo krožni lok s središčem v H skozi F . Krožni lok preseka podaljšek stranice AG v točki I . Na tem podaljšku določimo še točko J , ki je od A oddaljena $2a$. Ker je po Pitagorovem izreku

$$|HI| = |HF| = \frac{1}{2}a\sqrt{5},$$

dobimo

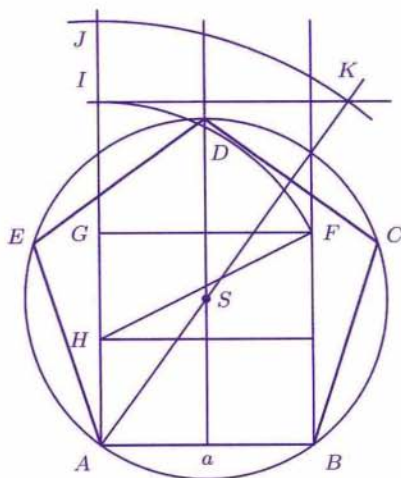
$$|AI| = |AH| + |HI| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5} = a\phi.$$

Skozi I načrtamo vzporednico stranici AB , ki jo krožni lok s središčem v A skozi J preseka v točki K . Takoj vidimo, da premica skozi A in K oklepa z daljico AB kot 54° . Velja namreč

$$\sin \sphericalangle AKI = \frac{|AI|}{|AK|} = \frac{a\phi}{2a} = \frac{1}{2}\phi.$$

Torej je res

$$\sphericalangle BAK = \sphericalangle AKI = 54^\circ.$$



Očitno premica skozi A in K preseka pravokotnico skozi razpolovišče daljice AB ravno v središču S iskanemu pravilnemu petkotniku očrtane krožnice. S konstrukcijo iskanega pravilnega petkotnika $ABCDE$ potem ni več težav.

Bralec bo morda konstruiral pravilni petkotnik z dano stranico a še kako drugače, recimo z uporabo diagonal iz oglišča D . Trikotnik ABD je enakokrak z osnovnico a . Kot ob vrhu D pa meri 36° . Ni težko izračunati dolžine krakov AD in BD . Dobimo

$$|AD| = |BD| = \frac{a}{2 \sin 18^\circ} = a\phi.$$

Ker že obvladamo konstrukcijo daljice dolžine $a\phi$, znamo s tem načrtati tudi trikotnik ABD . Ker merita $\sphericalangle ADE$ in $\sphericalangle BDC$ tudi po 36° , dodamo ta kot na vsako stran vrha D enakokrakega trikotnika ABD . Nato odmerimo a iz D vzdolž nosilk daljic DC in DE . S tem imamo vsa oglišča iskanega lika.

Za konec si oglejmo še eno zanimivost v zvezi s kvadrati sinusov večkratnikov kota $\gamma = 18^\circ$. Označimo

$$a_n = \sin^2(n\gamma),$$

kjer je n poljubno celo število. Iz že predstavljene razpredelnice domnevamo, da je

$$a_n = A_n + B_n\phi,$$

kjer so A_n in B_n racionalna števila. Posebej je $\sin^2(3\gamma) = \phi^2/4 = (1 + \phi)/4$. Tako imamo na primer $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $A_1 = 1/2$, $B_1 = -1/4$, $A_2 = 3/4$, $B_2 = -1/4$, $A_3 = 1/4$, $B_3 = 1/4$ itd. V Preseku smo tudi že dokazali, da realna števila oblike $a + b\phi$, kjer sta a in b racionalni števili, zaradi iracionalnosti števila ϕ lahko v taki obliki zapišemo samo na en način. Seveda za vsako naravno število veljata enakosti $A_{-n} = A_n$ in $B_{-n} = B_n$.

Z uporabo adicijskega izreka za funkcijo sinus najprej izpeljemo identiteto

$$\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - 4\sin^2\alpha\sin^2\beta,$$

kamor nato vstavimo $\alpha = n\gamma$ in $\beta = \gamma$. Dobimo rekurzivno enačbo za a_n :

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_n\phi + 1 - \frac{1}{2}\phi.$$

Ker je $a_0 = 0$ in $a_1 = 1/2 - \phi/4$, lahko postopoma izračunamo $a_2, a_3, \dots$. Z metodo matematične indukcije dokažemo, da so vsi členi zaporedja a_n oblike $A_n + B_n\phi$, kjer so A_n in B_n racionalna števila. Torej velja naslednja enačba:

$$(A_{n+1} + B_{n+1}\phi) + (A_{n-1} + B_{n-1}\phi) = (A_n + B_n\phi)\phi + 1 - \frac{1}{2}\phi.$$

Ker je $\phi^2 = 1 + \phi$, morata zaradi enoličnosti zapisa A_n in B_n izpolnjevati enačbi

$$\begin{aligned} A_{n+1} + A_{n-1} &= B_n + 1 \\ B_{n+1} + B_{n-1} &= A_n + B_n - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Iz dobljenega sistema rekurzivnih enačb lahko korak za korakom izračunamo A_n in B_n . Toda pojdimo še korak naprej. Izrazimo

$$A_n = B_{n+1} + B_{n-1} - B_n + 1/2$$

iz druge enačbe in ga vstavimo v prvo. Dobimo rekurzivno enačbo

$$B_{n+2} = B_{n+1} - B_n + B_{n-1} - B_{n-2}.$$

Torej je katerikoli B_n izmenična vsota štirih svojih predhodnikov.

Podobno najdemo tudi rekurzivno enačbo

$$A_{n+2} = A_{n+1} - A_n + A_{n-1} - A_{n-2} + \frac{1}{2}.$$

Katerikoli A_n je izmenična vsota štirih svojih predhodnikov, povečana za polovico. Tako lahko širimo naslednjo tabelo:

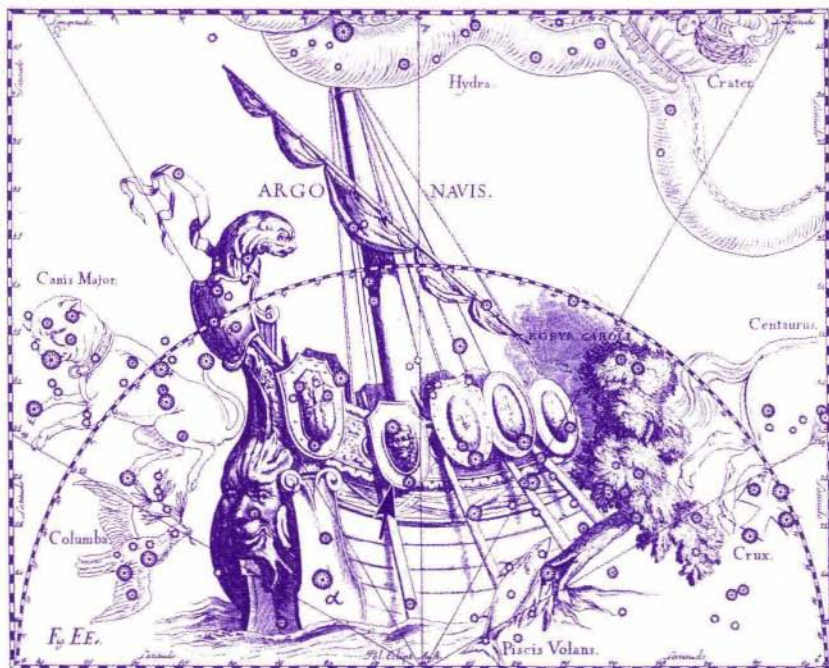
n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
A_n	...	3/4	1/2	0	1/2	3/4	1/4	1/2	1	1/2	...
B_n	...	-1/4	-1/4	0	-1/4	-1/4	1/4	1/4	0	1/4	...

Prav za konec pa še ena naloga za bralce. Diagonali iz različnih oglišč v pravilnem petkotniku se sekata v notranjosti lika. Dokažite, da je pri tem razmerje daljšega in krajšega odseka enako številu ϕ .

Marko Razpet

DRUGA NAJSVETLEJŠA ZVEZDA

Iz naših krajev ta zvezda ni vidna. Opazujejo pa jo že lahko južno od Sredozemlja. Stari Egipčani so jo častili kot "zvezdo Egipta", srednjeveški Arabci so jo imeli za božansko lepo. Na starejših zvezdnih kartah so v ozvezdju Ladja Argo to zvezdo prikazovali na sprednjem delu ladje in jo imenovali Sprednja od dveh ob veslu (slika 1).

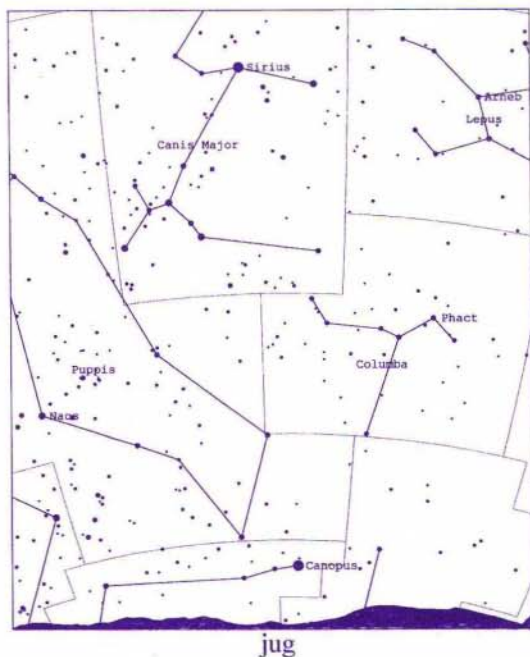


Slika 1. Zvezda Kanop, prikazana v starem ozvezdju Ladja Argo (α Argo navis). Slika je iz Hevelijevega atlasa zvezdnega neba Uranografija (1690). Kot zanimivost naj povem, da se je na ladji ovekovečil tudi sam Hevelij. Puščica kaže na njegov portret. To sem ugotovil pred kratkim, ko sem sliko tega ozvezdja pogledal z veliko povečavo.

Danes tej zvezdi rečemo Kanopus, pri nas udomačeno Kanop¹. Najverjetneje je zvezda dobila ime po starem egipčanskem mestu Kanopusu (danes пристанище Abukir v Nilovi delti) blizu Aleksandrije, od koder

¹ Sprva je imela zvezda uradno oznako α Argo navis (alfa Ladje Argo). Zaradi preobširnosti in zato nepreglednosti so pozneje ozvezdja Ladja Argo razdelili na tri manjša ozvezdja: Carina (Gredelj) – sprednji del ladje, Puppis (Krma) – zadnji del ladje in Vela (Jadro). Današnja uradna oznaka zvezde je zato α Carine (alfa Gredlja).

sta starogrška astronoma Hiparh (2. stol. pr. n. š.) in Ptolemej (2. stol.) opazovala zvezdno nebo in prav gotovo tudi zvezdo Kanop, ki je od tam vidna nizko nad južnim delom obzorja (slika 2). Nekateri menijo, da je zvezda dobila ime po Kanopusu ali Kanobosu, glavnemu krmarju ladjevja špartanskega kralja Menelaja, tistega kralja, ki so mu ugrabili najlepšo ženo na svetu, Heleno, zaradi katere se je potem razvihrala trojanska vojna.



Slika 2. Lega zvezde Kanop v ozvezdju Gredelj (računalniška zvezdna karta). Približno tako, kot kaže skica, je zvezda vidna iz severnega Egipta, ko je najvišje (komaj kakšnih 7°) nad obzorjem.

Po grški zmagi nad Trojanci se je Menelaj s svojimi ladjami vračal v domovino. Na povratku ni in ni imel sreče. Kar osem let so z ladjami blodili med Kikladi in Sporadi preden so prišli domov. Med drugim jih je zaneslo celo do egipčanske obale. Tam pa je krmarja pičila kača in je umrl. Na tistem kraju mu je Menelaj postavil spomenik. Dal je zgraditi mesto Kanopus.

Tako se mitološka zgodba dotika sveta realnega dogajanja, saj naj bi le nekaj stoletij pozneje na ploščadi enega tamkajšnjih templjev aleksandrijski astronomi imeli svojo zvezdarno in od tam opravljali svoja znamenita opazovanja zvezd.

Zvezdo Kanop so dobro poznali stari pomorščaki. Po njej se je ravnal Amerigo Vespucci pri svojem potovanju preko Atlantskega oceana, arabski romarji pa so ji rekli "srečna zvezda svete Katarine", ko so jo pri romanju na goro Sinaj opazovali nizko na jugu neba. Kanop je sploh znana navigacijska zvezda. Zaradi močnega sija jo pogosto uporabljajo pri usmerjanju umetnih satelitov.

Kot rečeno, zvezde Kanop iz naših krajev ne moremo videti. Za nas je torej podobzornica. O njeni dejanski lepoti težko sodim, saj je še nisem videl. Toda številni opazovalci z južne zemeljske polute, pa tudi tisti, ki se vrnejo po turističnem obisku Avstralije, pripovedujejo, da je za njih to res čudovita zvezda južnega neba. Povsem verjamem, toda v isti sapi, ko jo vsi hvalijo in občudujejo, kar nekako pozabljajo, da leži Sirij, od vseh zvezd najsvetlejša, tudi na južnem nebu.

No, glede jakosti sija se zvezdi med seboj res dosti ne razlikujeta, zato je čisto mogoče, da jo imajo na jugu za najlepšo, vendar pa se zvezdi zelo razlikujeta med seboj po drugih fizikalnih lastnosti. To pa boste ugotovili kar sami (glej raziskovalno nalogo).

Marijan Prosen

RAZISKOVALNA NALOGA O KANOPU IN SIRIJU

Dopolni spodnjo preglednico, t.j. izračunaj izsev in polmer obeh zvezd. Zvezdi primerjaj med seboj. V odgovoru na kratko označi bistveno značilnost zvezde Kanop. Da bi znal to nalogo narediti, poglej prispevek *Izsev zvezde* v 1. letošnji številki Preseka, str. 22. Pri oceni polmera zvezde upoštevaj, kakor da zvezde (Sonce, Kanop in Sirij) svetijo pri isti površinski temperaturi (čeprav to zdaleč ni res). Za izsev Sonca vzemi okroglo $4 \cdot 10^{26}$ W, za svetlobno leto pa 10^{16} m. Rezultati bodo približni.

jakost sija v magnitudah		oddaljenost v svetlobnih letih		izsev zvezde v izsevih Sonca		polmer zvezde v polmerih Sonca	
Kanop	Sirij	Kanop	Sirij	Kanop	Sirij	Kanop	Sirij
-0,8	-1,5	180	9	?	?	?	?

Preglednica. Primerjava zvezd Sirija in Kanopa.

Marijan Prosen

Rešitev je na str. 159.

Marijan in Stana Prosen: ZVEZDNI MITI IN LEGENDE

Pri Založništvu Jutro iz Ljubljane in Založbi Branko iz Nove Gorice je izšla še ena lepa knjiga Marijana in Stane Prosen, piscev poljudnih astronomskih vsebin za mlade. Delo Zvezdni miti in legende je namenjeno predvsem tistim, ki se radi ozrejo v nočno nebo in občudujejo čudovito zvezdno pokrajino, pa bolj iz romantičnih kot iz astronomskih nagibov.

Za starodavna ljudstva so bile zvezde vir številnih mitov in legend. V ozvezdjih so prepoznali svoje bogove in junake, pa živali ipd. V knjigi, bogato opremljeni z ilustracijami iz Hevelijevega zvezdnega atlasa Uranografija, nad štirideset prelepih pripovedk pripoveduje o podobah na nebu. Večina izvira iz bogatega grškega bajeslovja, nekaj pa tudi iz krščanstva. Oglejmo si zaključek ene od njih:

Na skalah ob obali je vso objokano in obupano Ariadno našel bog Dioniz, gospodar tega otoka. Njena milina in lepota sta ga silno prevzeli. Zaljublil se je vanjo in jo takoj zaprosil za roko. Bil je dober in prikupen, pa še bog povrhu, tako da je Ariadna privolila v poroko. Za poročno darilo ji je Dioniz podaril zlat venček oziroma zlato krono s sedmimi svetlečimi diamanti.

Kmalu po poroki pa je Ariadna umrla. Dioniz je zelo žaloval. Odločil se je, da odvrže venček, saj ga je vsakič, ko ga je pogledal, preveč spominjal na izgubljeno ljubezen. Venček je zalučal proti nebu. V letu so ga ujeli njegovi prijatelji bogovi. Ponesli in postavili so ga visoko na nebo. Tam od tedaj sveti njegovih sedem svetlih diamantov in tako sestavlja ozvezdje Venec, Severno krono ali tudi Ariadnino krono.

Pred nami so dnevi obdarovanj. Taka knjiga je lepo praznično darilo. Naročite jo lahko pri Založništvu Jutro, Jutro d.o.o., Črnuška cesta 3, p.p. 4986, 1001 Ljubljana, po telefonu (01) 561-72-30, 041 698-788, faksu (01) 561-72-35, po elektronski pošti JUTRO@SIOL.NET ali na WWW.JUTRO.SI.

Marija Vencelj



KOTALNO TRENJE



Pri obravnavi gibanja dvokolesa radi zanemarimo kotalno trenje v primeri z zračnim uporom. Res pri večjih hitrostih, denimo okrog 30 km/h, zračni upor prevlada nad trenjem in je zanemarljiv upravičena. Pri manjših hitrostih je vpliv trenja relativno večji, ker zračni upor narašča s kvadratom hitrosti, trenje pa je od hitrosti neodvisno. Pokažimo, da je trenje kar pomemben faktor pri vožnji, še posebno, če vozimo s prenizkim tlakom v zračnicah.

Podrobneje razmislimo, kaj se dogaja pri kotaljenju pnevmatike po površini ceste. Da bomo lažje razmišljali, si najprej oglejmo kotaljenje žoge. Denimo, da

je tlak v žogi p in da je njen plašč tanka elastična opna. Na stiku žoge z vodoravnimi gladkimi tlemi se opna deformira in na stiku privzame obliko tal. Polmer r stičnega kroga je odvisen od teže žoge F_g , veljati mora

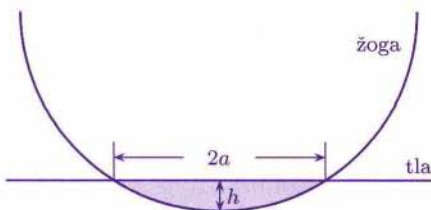
$$p\pi r^2 = F_g,$$

saj pri kotaljenju navpična sila tal ves čas uravnoveša težo žoge. Površina deformirane žoge je nekaj manjša od površine krogle $4\pi R^2$, kjer smo z R označili njen polmer. Krogelna kapica, ki pri deformirani žogi manjka, ima nekaj večjo površino kot stični krog. Na obod stičnega kroga delujejo deli plašča, ki niso deformirani. Velikost te enakomerno porazdeljene sile je odvisna le od tlaka v žogi. Pri deformaciji ta sila poskrbi, da se plašč, ko prehaja iz ene oblike v drugo in nazaj, drgne ob tla in jo tako zavira.

Da pridemo do računske ocene vpliva tega trenja na gibanje, najprej izračunamo delo A zaradi trenja pri prehodu žoge iz prvotne oblike v deformirano in nazaj. Zelo lahko žogo v mislih obremenimo s silo F_g in jo nato razbremenimo. Verjamemo, da se pri kotaljenju dogaja nekaj podobnega, ko se del plašča na stiku s podlago izravna in potem spet izboči. Pri računu upoštevamo, da se napetost v plašču pri deformaciji ne spremeni in da se obodni deli deformiranega plašča najbolj podrgnejo ob tla. Do zaviralne sile F_k pridemo tako, da dobljeni izraz za delo A delimo s kosom prekotaljene poti $2a$, ko se izbrani del plašča izravna in potem spet izboči. V računu povežemo pot $2a$ in višino kapice h (slika 1), radij stičnega kroga $r = a$ in težo F_g ter upoštevamo znano zvezo med silo

trenja pri drgnjenju $F_{tr} = k_{tr}F_p$, kjer sta k_{tr} koeficient trenja, F_p pa sila podlage na izbrani del plašča. Računu v podrobnostih ne bomo sledili, oglejmo si le rezultat

$$F_k = \frac{1}{9\pi} k_{tr} \frac{F_g^2}{pR^2}.$$



Slika 1. Deformacija žoge pri kotaljenju. Obremenjena žoga se na stiku s tlemi zravna.

Pnevmatika na kolesu ima obliko svitka (torusa) in ne krogle. To upoštevamo tako, da nadomestimo R^2 v zadnji enačbi z $r_1 r_2$, kjer je r_1 polmer kolesa, r_2 pa polmer prereza plašča.

Najprej opazimo, da v izrazu nastopa kvadrat teže F_g , ki jo nosi kolo. V nekaterih učbenikih avtorji vpeljejo koeficient kotalnega trenja kot razmerje med silo F_k in težo F_g ,

$$k_{kt} = \frac{F_k}{F_g},$$

in navajajo, da je tako dobljeni k_{kt} precej manjši kot k_{tr} . Taka vpeljava je predvsem uporabna v primerih, ko se pri kotaljenju deformira podlaga, na primer pri vožnji jeklenega kolesa po mehki cesti. Takrat je sila kotalnega trenja res premo sorazmerna s težo, ki jo nosi kolo. V našem primeru vpeljava takega koeficienta ni smiselna, saj bi bil odvisen tudi od teže F_g . Kvadratična odvisnost sile trenja od teže spet kaže na prednost lahkih kolesarjev. Kaže tudi, da je pri zmanjšanju kotalnega trenja pomembna enakomerna obremenitev obeh koles. Če je namreč obremenjeno le eno kolo, se sila trenja poveča kar dvakrat v primeri z enakomerno obremenjenimi kolesi.

Na zmanjšanje trenja pa lahko vplivamo tudi s povečanjem tlaka p v zračnicah. Pri sodobnih kolesih, ki so predvidena za vožnjo po gladkih, asfaltnih cestah, je tlak v zračnicah med 3 in 5 bari, pri dirkalnih kolesih pa še večji. Seveda pa je vožnja po slabših cestah bolj udobna, če je tlak nekoliko manjši.

Primerjajmo silo kotalnega trenja in upor zraka pri kolesu. Za koeficient trenja med plaščem in asfaltno cesto privzamemo vrednost $k_{tr} = 1$, polmer kolesa $r_1 = 35$ cm, polmer prereza plašča $r_2 = 2,3$ cm, za tlak v zračnicah pa $p = 3$ bar. Teža kolesarja s kolesom naj bo 800 N, breme

pa enakomerno razporejeno na obe kolesi. S temi podatki dobimo $F_k = 4,7$ N. Upor zraka je odvisen od hitrosti in ga ocenimo iz enačbe

$$F_u = \frac{1}{2} \rho v^2 c_u S,$$

kjer je ρ gostota zraka, $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$, in c_u koeficient upora, ki je odvisen od oblike telesa, ki se giblje skozi zrak. Zanj privzamemo vrednost $c_u = 0,5$. Končno smo z S označili ploščino sence telesa, projicirane na zaslon, pravokoten na smer gibanja. Zanj privzamemo vrednost $S = 0,6 \text{ m}^2$. Pri hitrosti $v = 5 \text{ ms}^{-1}$ (18 km/h), je $F_u = 5$ N, pri dvakrat večji hitrosti pa $F_u = 20$ N. Vidimo, da sta pri zmernih hitrostih sili primerljivi, pri večjih pa res prevladuje zračni upor.

Andrej Likar

NALOGA O FIBONACCIJEVEM ZAPOREDJU – Rešitev s str. 4

Ko izračunamo vsoti (1) in (2) v zastavljeni nalogi pri prvih nekaj naravnih številih n , postavimo domnevi

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1 \quad (4)$$

in

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}, \quad (5)$$

ki ju zlahka dokažemo z indukcijo. Tukaj dokažimo le enakost (5). Ker pri $n = 1$ očitno velja, predpostavimo, da velja pri naravnem številu $n = k$. Potem je leva stran enakosti pri $n = k + 1$ enaka

$$(f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_k^2) + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2},$$

kjer smo nazadnje upoštevali rekurzivno zvezo, ki definira Fibonaccijevo zaporedje. Ker v dobljenem rezultatu prepoznamo desno stran enakosti (5) pri $n = k + 1$, je po principu indukcije enakost (5) dokazana.

Če odštejemo enakost (4) od enakosti (5), dobimo

$$\begin{aligned} f_1(f_1 - 1) + f_2(f_2 - 1) + \dots + f_n(f_n - 1) &= f_n f_{n+1} - f_{n+2} + 1 = \\ &= f_n f_{n+1} - f_n - f_{n+1} + 1 = (f_n - 1)(f_{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Od tod je razvidno, da je vsota (3) praštevilo le za $n = 3$.

Zvezi (4) in (5) sta bili dokazani že v članku Sandi Klavžar, *Prvo srečanje s Fibonaccijevimi števili*, Presek **25** (1997/98), 232–237.

Viktor Velkavrh in Roman Drnovšek

REŠITEV PROBLEMA PRAŠTEVIL

V začetku avgusta 2002 je časopis *New York Times* objavil novico, ki je vznemirila matematike in računalnikarje po vsem svetu. Indijski znanstveniki Manindra Agrawal, Niradž Kajal in Nitin Saxena so namreč odkrili učinkovit računski postopek za reševanje naslednjega problema.

Problem praštevil. *Dano je naravno število n . Ali je n praštevilo?*

Seveda znajo ta preprosti problem rešiti že osnovnošolci.

1. METODA. Število n po vrsti delimo z $2, 3, \dots, n-1$. Če se deljenje nikoli ne izide, je n praštevilo, sicer je sestavljeno število.

Zakaj torej takšno vznemirjenje? V kriptografiji, ki se ukvarja s šifriranjem sporočil, potrebujemo zelo velika praštevila, takšna s sto ali več desetiški mesti. Tipičen problem je npr. ugotoviti, ali je število $n = 10^{100} + 267$ praštevilo. Koliko časa bomo potrebovali s prvo metodo?

Recimo, da je naš računalnik zelo hiter in opravi 10^{12} deljenj na sekundo. Na odgovor bomo torej v najslabšem primeru (če je število n zares praštevilo in je treba opraviti vsa deljenja) čakali približno 10^{88} sekund oziroma 3.17×10^{80} let. Hmm ... Ali ne bi šlo hitreje? Bi. Če je število n produkt dveh faktorjev, je vsaj eden od njiju manjši ali enak $\sqrt{n}$. Torej zadošča n deliti s števili, ki ne presegajo $\sqrt{n}$. Poleg tega je dovolj deliti le s praštevili.

2. METODA. Število n po vrsti delimo s praštevili od 2 do p , kjer je p največje praštevilo, ki ne presega $\sqrt{n}$. Če se deljenje nikoli ne izide, je n praštevilo, sicer je sestavljeno število.

Pri oceni časovne zahtevnosti druge metode upoštevajmo le čas, potreben za deljenja, saj lahko tabelo praštevil do $\sqrt{n}$ pripravimo vnaprej. Vedeti moramo torej, koliko je praštevil, ki ne presegajo $\sqrt{n}$. Po znamenitem Gaussovem izreku o praštevilih je praštevil do N približno $N/\ln N$, kjer $\ln$ označuje naravni logaritem. Torej bo po drugi metodi treba opraviti približno $\sqrt{n}/\ln \sqrt{n} \approx 8.69 \times 10^{47}$ deljenj, kar bo trajalo 8.69×10^{35} sekund oziroma 2.75×10^{28} let. Tudi z drugo metodo ne bomo dočakali rezultata ($10^{100} + 267$ je namreč v resnici praštevilo).

Nadaljevanje na III. strani ovitka.

33. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Naša ekipa se je z olimpiade vrnila z zlato medaljo in tremi pohvalami. To je prva zlata medalja, ki jo je na tem tekmovanju dosegel kak Slovenec kot član jugoslovanske ali (od leta 1992) slovenske olimpijske ekipe iz fizike.

Indonezijski organizatorji letošnje olimpiade so nas pol leta pred začetkom olimpiade obvestili, da so spremenili kraj in čas olimpiade. Tako je 33. *mednarodna fizikalna olimpiada* potekala med 21. in 30. julijem v mestu Nusa Dua na otoku Baliu in ne v Bandungu na otoku Javi, kot je bilo prvotno napovedano. Indonezija je dala olimpiadi velik poudarek, saj je olimpiado otvorila predsednica države Megawati Sukarnoputri.

Slovenijo so na olimpiadi zastopali Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka, Matjaž Humar, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija, Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana, Davorin Učakar, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana, in Andraž Stožer, II. gimnazija Maribor. Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sva bila Jure Bajc s *Fakultete za matematiko in fiziko* ter Ciril Dominko, *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije*. Udeležbo na olimpiadi sta finančno omogočili *Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport* ter *DMFA Slovenije*.

Na olimpiadi je sodelovalo 296 tekmovalcev iz 66 držav. Tekmovalce je spremljalo 123 strokovnih vodij ekip. Poleg tega so še tri države, Južna Afrika, Bahrain in Japonska, sodelovale kot opazovalke. Naslednje leto bodo sodelovale s tekmovalci.

Tekmovalci so reševali tri obsežne teoretične naloge, pri čemer so lahko dosegli skupaj največ 30 točk, in po dnevu odmora še dve eksperimentalni nalogi, kjer so lahko dosegli skupaj 20 točk. Absolutni zmagovalec olimpiade, Vietnamec Ngoc Duong Dang, je dosegel malo čez 45 točk, drugouvrščeni in naslednji za njim pa okrog 42 točk. Naš Matija Perne je dosegel 36,60 točk, kar je zadostovalo za zlato medaljo, za katero je bilo potrebno zbrati najmanj 36 točk. Pomembno je še poudariti, da je imel Matija v eksperimentalnem delu drugi najboljši rezultat na olimpiadi (18 točk) in je malo zaostal za najboljšim v tem delu tekmovanja, že prej omenjenim absolutnim zmagovalcem, ki je zbral 18,70 točke. Andraž Stožer, Matjaž Humar in Gašper Žerovnik so zbrali po vrsti 22,05, 17,85 in 16,40 točke, kar jim je zadoščalo za pohvale.

Kot je bilo v prejšnjih letih že večkrat zapisano, tekmovalci na olimpiadi nastopajo kot posamezniki in ne kot državna ekipa. Če kljub temu neuradno primerjamo osvojeno zlato medaljo in tri pohvale z ustreznimi dosežki drugih držav, si Slovenija s še nekaj državami (Češka, Kazahstan, Nizozemska, Pakistan) na taki lestvici deli 24. mesto. Od evropskih držav so za nami po vrstnem redu Avstrija, Bolgarija, Hrvaška, Danska,

Slovaška, Italija, Bosna in Hercegovina, Španija, Belgija, Irska, Švedska, Švica, Albanija, Ciper, Finska, Liechtenstein, Makedonija, Norveška in Portugalska. Prvih pet na tej lestvici pa je po vrstnem redu Iran (vseh pet tekmovalcev je osvojilo zlato medaljo), Južna Koreja, Kitajska, Rusija in Tajvan.

Naslednja fizikalna olimpiada bo spet v Aziji. Od 12. do 21. julija 2003 bo potekala v Taipeiju, glavnem mestu Tajvana.

Ciril Dominko

SLOVENIJA GRE NAPREJ

ali

kako smo bili najboljši na olimpiadi

Letošnja mednarodna matematična olimpiada, že 43. po vrsti, se je odvijala v Glasgowu na Škotskem. Ekipo smo sestavljali tekmovalci Aleksandra Franc s I. gimnazije v Celju, Tone Gradišek in Klemen Šivic z Gimnazije Bežigrad, Tine Porenta z Gimnazije Škofja Loka, Janez Šter z Gimnazije Želumlje in Erik Štrumbelj z Gimnazije Kočevje, vodja ekipe Matjaž Željko s Fakultete za matematiko in fiziko ter član mednarodne tekmovalne komisije Gregor Dolinar s Fakultete za elektrotehniko.

Že ob prihodu smo spoznali, da se na Škotskem pač ne bomo mogli naužiti sončnih žarkov. In res, v vsem tednu smo jasno nebo videli le trikrat, od tega dvakrat v letalu nad oblaki. Dežja je bilo toliko, da so se organizatorji odločili za nadvse praktično potezo – namesto dežnikov je vsak tekmovalec dobil priročno kapo, ki je oblikovana tako, da dež z nje odteka, kar se da hitro.

Ob prihodu smo spoznali tudi svojega vodiča Toma, pristnega Angleža z, na srečo, oksfordsko angleščino. Škote namreč razumejo samo drugi Škoti.

Sledila je otvoritev. Organizatorji so naredili veliko napako, ko so na vse stole nalepili liste z imeni držav. Med prireditvijo so ti listi spreminjali obliko in ob koncu je po dvorani letalo nekaj najbolj zanimivih papirnatih aviončkov, kar sem jih kdaj videl. In še cel kup tistih običajnih. Na otvoritvi smo lahko tudi slišali, kako v živo zvenijo škotske dude.

Škoti so nasploh zanimivi ljudje. Posebno radi se ukvarjajo s tradicionalnima otoškima športoma – nogometom in čakanjem v vrsti. Za slednjega so hoteli navdušiti tudi nas, pa jim (žal) ni uspelo. Dejansko je bilo utopično pričakovati, da bo petsto tekmovalcev čakalo v vrsti na prevoz po sistemu – ko se prvi avtobus v vrsti napolni, se začne vkrcavanje

na naslednjega. Očitno na Škotskem še niso slišali za izraz "paralelno procesiranje"! V takih situacijah smo se morali odločiti – čakati v vrsti na dežju in mrazu ali ne. V skrbi za lastno zdravje smo se odločili za ne-čakanje, seveda na eleganten in nevpadljiv način. Naše geslo v tovrstnih akcijah je bilo "Slovenija gre naprej". Z malo treninga smo postali zares dobri in bi se naše metode skoraj začeli posluževati tudi ob drugih priložnostih, na primer med čakanjem na kosilo. Na srečo sta nas vedno prisebna mentorja od tega bolj ali manj uspešno odvrčala.

Seveda je bil uradni namen našega obiska matematično tekmovanje. Dva naporna dneva smo preživeli v reševanju šestih problemov, enega težjega od drugega. Reševanje so nam še dodatno otežili organizatorji, ki so že prej postavljeno prepoved uporabe kotomerov pet minut pred začetkom tekmovanja razširili na vsa ravnila ki vsebujejo še kakšen kot, ki ni devetdeset stopinjski. Seveda smo zahtevali nadomestna ravnila in medtem, ko smo jih čakali, je odtekal dragoceni čas. Ko bomo leta 2006 mi organizirali olimpiado, se bomo dosledno držali tistega o geometrijskih konstrukcijah: šestilo in neoznačeno ravnilo z enim ravnim robom. Tekmovalci, uživajte v risanju skic! Mi smo.

Potem je bil na vrsti prijetnejši in gotovo manj naporen del – izleti. Prvi je bil v Edinburgh. Škotska prestolnica je zares krasna. Med ogledom gradu smo dobili še en dokaz za pregovorno škotsko varčnost. Z gradu vsak dan streljajo s topom. Če bi streljali ob dvanajestih, bi očitno porabili preveč nabojev, zato raje streljajo ob enih.

Drugi izlet je bil v York. Skupaj več kot sedem ur vožnje z vlakom, *packed lunch*, zanimiv vikinški center in res velika gotška katedrala, to pove vse. Kosilo v vrečki je ena od stvari, ki so se nam res zamerile. Druga taka stvar je znani angleški zajtrk. Prvič smo bili sicer navdušeni, ampak vsak dan isto je odločno preveč. Smo pa imeli na voljo veliko čokolade in čipsa.

Tretji izlet je bil skupen in je bil nadvse nenavaden. S parnikom smo se vozili po reki Clyde. Bilo bi zanimivo, če ne bi bilo hladno, vetrovno, megleno, in deževno. In če ne bi prišli na vrsto za kosilo šele ob šestih popoldne. Rešil nas je supermarket v neki odročni vasi, ki je bil odprt v nedeljo popoldne.

Medtem ko smo se mi zabavali, sta se naša mentorja borila, da bi nam ocenjevalci priznali čimveč točk. Ponovno smo se srečali na podelitvi. Angleška princesa Ana je podeljevala zlate kolajne, predvsem Kitajcem in Rusom, zlato so namreč osvojili kar vsi tekmovalci teh dveh matematičnih velesil.

Naši dosežki so bili sicer malo skromnejši, ampak še vedno kar v redu. Klemen je osvojil bronasto medaljo, Erik pa pohvalo ... za Slovaško!

Potem smo poslušali nekaj priljubljenih pesmi, princesin govor in dude (spet). Sledila je predaja zastave, naslednje leto bo olimpiada v Tokiu, potem še sklepna zabava in zdelo se nam je, da smo s tem zaključili. Pa smo se motili ...

Naslednji dan smo pospravili kovčke, opravili še zadnje nakupe in se odpravili na letališče. In dolgo čakali na polet. Let v London je imel namreč kar precejšnjo zamudo zaradi slabega vremena, zato smo zamudili letalo za Ljubljano. Ni nam preostalo nič drugega kot čakanje na naslednji prost polet. Imeli smo kar precejšno srečo, šest nas je odletelo že naslednji dan dopoldne, Erik in Gregor Dolinar pa sta v Ljubljano prispela ponoči, preko Amsterdama. Brez kovčkov.

Doma nas je pričakal dež. Pa smo ga bili že vajeni. Olimpiada je bila zanimiva, nekatere stvari so uspele bolj, druge malo manj. Odločili smo se, da bo naša boljša.

Da ne pozabim: Slovenci smo bili na olimpiadi najboljši v nogometni ligi. Zmagi nad reprezentancama Brazilije in Argentine, spektakularen Tinetov gol v peti sekundi tekme in nasploh izvrstna igra – zasluženost smo pristali na samem vrhu. Slovenija gre naprej!

Tone Gradišek

REŠITEV RAZISKOVALNE NALOGE O KANOPU IN SIRIJU – s str. 150

jakost sija v magnitudah		oddaljenost v svetlobnih letih		izsev zvezde v izsevih Sonca		polmer zvezde v polmerih Sonca	
Kanop	Sirij	Kanop	Sirij	Kanop	Sirij	Kanop	Sirij
-0,8	-1,5	180	9	5200	25	72	5 ¹

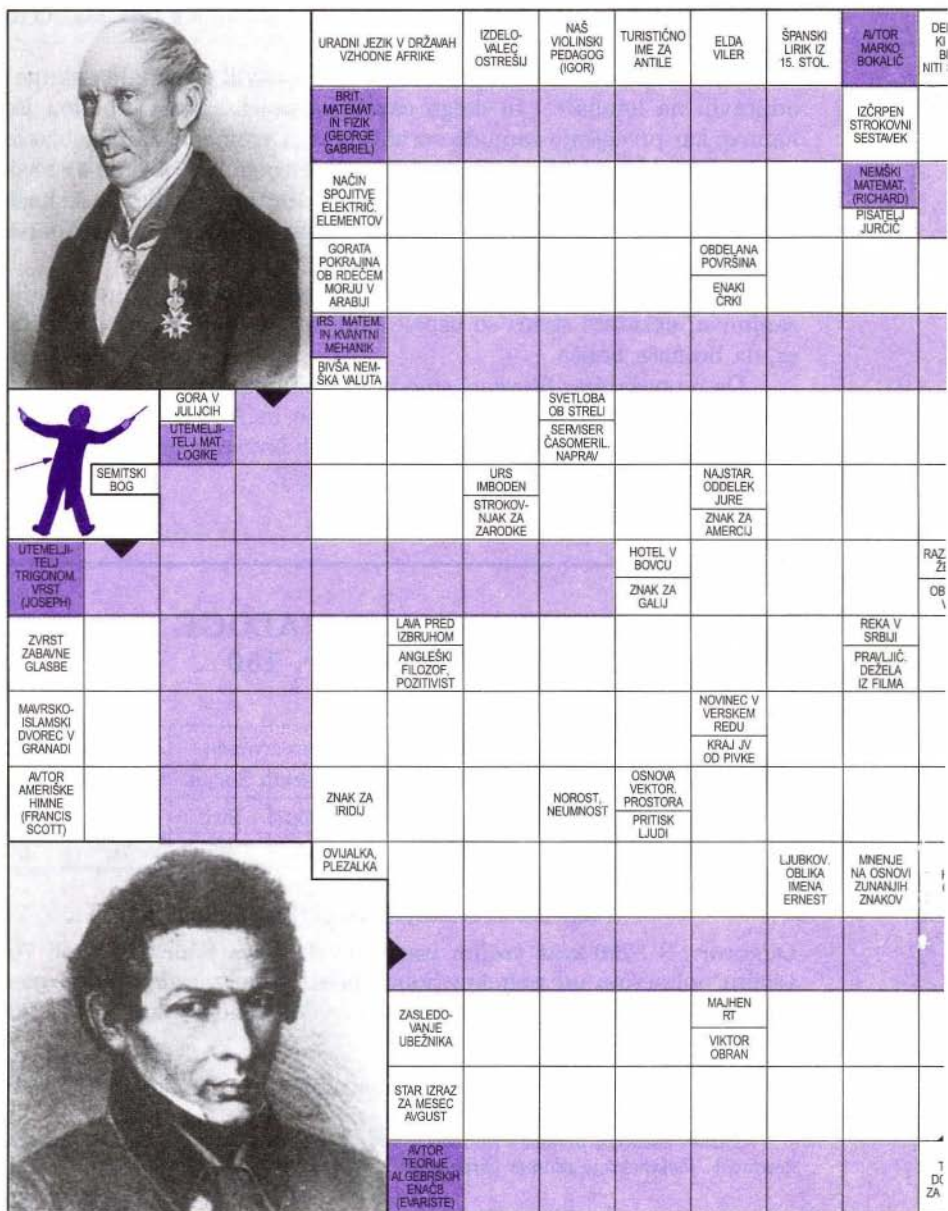
Preglednica. Primerjava zvezd Sirija in Kanopa.

Odgovor: S 5200-krat večjim izsevom od izseva Sonca in okoli 70-krat večjim polmerom od polmera Sonca prištevamo zvezdo Kanop med nadzorjakinje. Sirij je res najsvetlejša zvezda, vendar nam je kar 20-krat bliže kot Kanop.

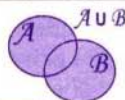
Marijan Prosen

¹ Zaradi ohlapno podanih podatkov smo za polmer Sirija dobili nekoliko preveliko vrednost. Dejansko je polmer Sirija okoli dvakrat večji od polmera Sonca.

KRIŽANKA “MATEMATIKI 19. STOLETJA”



KLICA, NIMA RATA SESTRE	BOLGARSKA DENARNA ENOTA	KANADSKI PEVEC (BRYAN)	ZNIŽANI TON H	NAPAKA, MOTILJA V DELOVANJU NAPRAVE	A/TOR NEEVKLID, GEOMETRIJE (BERNHARD)	IZPRA- ŠEVANEC V ANKETI	TOMAŽ DOMICELJ	
			DOLGO ZGODOVIN. OBDOBJE TV UREDNIK PEČKO				PLES V KOROSKEM OKOLJU	
	LIBUSKI DIKTATOR GADAFI							
	VOJAŠKI STROKOV- NJAK JUŽNI SLOVANI							
		OBSEDENEC TEORETIK ELIPTIČNIH FUNKCIJ (CARLI)						
ŽIRALUKA ŠLEZA				NORINA RADOVAN				
VODNA VRBA						URADNI JEZIK V PAKISTANU 5 IN 3, VOKAL		
				STAR KNEŽJI NASLOV V IRANU	GL. MESTO TEKSASA NORV. MAT. (NIELS HENRIK)			
			FRANC. DIRKAČ (OLIVIER) KADAR (KRAJŠE)				OZNAKA RIJEKE PRVI VODJA ZN. (TRYGVE)	
	JAPONSKI SMUČAR, ŠKAKALEC (TAKANOBU)					PRIPRAVA ZA ŽILVANJE TEKOČINE V POSODO Z MAJHNO ODPRITINO IME NORVEŠKE SMUČARKE BAKKE		
ČAČJI GLAS	ZBADANJE KAREL ČAPEK					PREBRI- SANKA PROSTOR ZA POKOP MRLIČA		
			A/TOMOB. OZNAKA IZRAELA UČENJE		KRŠITEV BOŽJE ZAPOVEDI MREŽASTA TKANINA			SPLAVAR- SKI DROG Z ŽELEZNIM KAVLJEM
		PARAZIT V DLAKAH		PRVO LIHO PRAŠTEVILO μ			PEVSKI ZLOG ČASTNO, RAZSODIŠČE	
								
EKOČ ODATEK SOLATO		NEMŠKI MATEM. AKSIOMATIK (DAVID)						NAJMANUŠI MODEL AVTA ZNAMKE FORD


NEM. MATEM.
(PETER
GUSTAV)

DIDONA, VOLOVSKA KOŽA IN RAZGLEDNICA



Kot osnovnošolka sem uživala v antičnih pripovedkah, posebej tistih iz grške mitologije, v katerih so mladeniči sicer veliki junaki, mladenkam pa poleg lepote pogosto priznavajo še veliko bistrost. Spominjam se tudi solz jeze na starejšega brata, ki je z domov prinešenimi triki preskušal mojo inteligenco. To so bili izpiti, na katerih sem praviloma klavarno propadla.

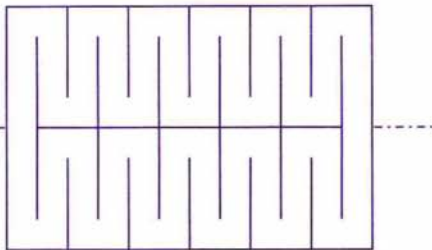
Ena od preskusnih nalog mi je bila pa vseeno všeč. Tista, kako zlezeš skozi razglednico.

In kje je zveza med pripovedkami in razglednico? Feničanska princesa Didona, vendar! A pojdimo lepo po vrsti.

Tirska princesa Didona je bila srečno poročena z bogatim Feničanom Sihejem. Njenemu bratu Pigmalionu pa je, čeprav je bil kralj v Tiru, manjkalo do popolne sreče bogastvo Didoninega moža. Prišel je na kraljevsko idejo, da svaka ubije in si prilasti njegove zaklade. Rečeno, storjeno! Didoni se je zdelo bratovo finančno poslovanje preenostavno, zato je s prijatelji skrivaj naložila ladje z bogastvom in pobegnila iz Tira. Prispeli so do libijske obale. S tamkajšnjim kraljem Jarbasom je za začetek sklenila kupoprodajno pogodbo, po kateri je za majhen denar kupila toliko zemlje, kolikor jo je moč obseči z volovsko kožo. Nato je volovsko kožo razrezala na tanke jermene in z njimi omejila prostor, imenovan Birs (Volovska koža), na katerem je zgradila trdnjavo. S svojimi zakladi je nato ozemlje razširila in s svojo bistrostjo ustanovila mogočno državo Kartagino. Od tu dalje ima Didonina zgodba dve različni nadaljevanji, grško in rimsko. V obeh Didona prostovoljno konča v ognju, le razloga sta različna. Nas to ne zanima več. Pomembno je, da smo ji sledili dovolj daleč, da je razrezala volovsko kožo.

Pri nalogi, kako zlesti skozi razglednico, sem poskusila z Didonino idejo, a mi brat rešitve ni priznal. Zahteval je, da je dobljeni trak zaključen. Morala sem priznati, da tak res bolj ustreza navodilu *zlesti skozi*, kot moj z dvema koncema. Žal pa rokodelske umetnosti, kakršni sta lepljenje ali šivanje, niso bile dovoljene. Domnevam, da Didona te prepovedi ni bila deležna. Končno je brat dočakal mojo vdajo in mi pokazal razrez, skiciran na sliki 1. Ko je vse skupaj raztegnil, je bil trak sicer neugledno cikcakast, toda zaključen obroč in tudi dovolj dolg, da bi lahko skozenj skočil celo dresiran cirkuški lev.

Slika 1. Razglednico, dopisnico ali kak drug primerno velik pravokotni kos čvrstega papirja najlaže narežemo vzdolž narisanih črt tako, da pravokotnik prepognemo vzdolž njegove daljše simetrale, zarežemo najprej vse potrebne reze, pravokotne na simetralo (z eno potezo na ta način kar dva reza hkrati), razgrnemo papir in zaključimo z rezom, ki poteka po simetrali. Čim več na simetralo pravokotnih zarez naredimo in čim globlje so, tem daljši je dobljeni obroč.



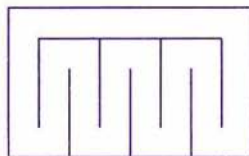
Lepo, toda tega ne moreš vedeti, če ti nihče ne pove. Ali pač?

Poskusimo vsaj približno premisliti, zakaj pri nalogi gre. Iz razglednice bi radi naredili zaključen trak, katerega rob sta dve zaključeni robni krivulji, ki ne sekata niti sami sebe niti druga druge. Izkáže se, da **pripada ves rob razglednice natanko eni od obeh robnih krivulj**. Razrezan je sicer na končno mnogo delov, toda vsi pripadajo isti robni krivulji. Res! V nasprotnem bi imeli nekje na robu nerazrezane razglednice dva sosednja dela, ki bi po razrezu pripadala različnima robnima krivuljama. To je možno le, če je v točki, ki je obema deloma skupna, rob prerezan. Pripadajoči prerez je nekakšna slepa ulica, saj ne sme sekati drugih prerezov niti robu razglednice. Skupno robno točko razdeli na dve točki, ki pripadata vsaka svoji robni krivulji, sam pa se razpre v povezan del robu traka, ki točki povezuje. To pa je že protislovje.

Pri rezanju se posvetimo najprej tisti robni krivulji, ki vsebuje rob razglednice. Kartico v ta namen preko nekaj robnih točk narežemo.

Pri tem pazimo, da se rezi med seboj ne sekajo, tudi robu kartice ne smemo prerezati, razen v začetni točki reza. Drugo robno krivuljo vrežemo v notranjosti kartice. Da bo trak čim daljši, jo speljemo tako, da potekajo posamezne veje med dvema sosednjima rezoma prve robne krivulje. Seveda mora biti tudi ta krivulja povezana in ne sme sekati ne sebe ne druge robne krivulje.

Sedaj je dolžina traku odvisna le še od vaše spretnosti in iznajdljivosti pri speljavi rezov. Ni nujno, da so ravni!



Marija Vencelj

BINE UGOTAVLJA RADIOAKTIVNOST



Bine Umnik je, skrit za časopisom, nabadal zadnje rezine kumarične solate.

“Poslušaj, Urša, Bush bo napadel Irak. Potem bo Sadam na Izraelce – dlje mu kanoni ne nesejo – ustrelil uši, okužene s tifusom. Šaron bo na biološki napad odgovoril z atomsko bombo. Potlej bodo kumare radioaktivne!”

Urša je iskala rešitev. “Jutri lahko vložim dvajset kozarcev kumar...”

“Kumare že. Kaj pa solata? Boš tudi solato vlagala?” se je obregnil Bine, ki je imel

drugačne načrte. Sevanja ne vidimo, ne slišimo, ne čutimo in ne vohamo. Treba bo napraviti nova čutila! Naredil bo merilnik radioaktivnosti, s katerim bo sam nadziral užitnost solate ali kumar. Po neuspehih v preteklem letu se je namreč Bine lotil spoznavanja fizike. V bližnjo knjižnico si je hodil sposojat učbenike, leksikone in različne priročnike ter se marsičesa naučil.

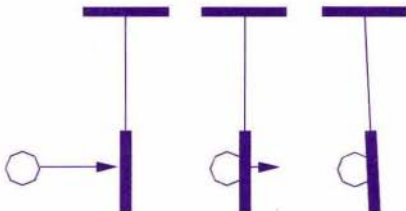
Na lov torej za delci alfa in beta in tako naprej! Bine je bil član lovske družine in ga je privlačila velika divjad. Gremo torej nad delce alfa, ki so v atomskem svetu kot medvedje proti polhom – elektronom.

Delec alfa ima maso. Ko odleti iz jedra, ima hitrost in zato gibalno količino ter energijo, nosi pa tudi električni naboj. Vsaka od teh lastnosti Binetu lahko koristi, da ga bo odkril. Ko se delec končno ustavi, najde nekje dva elektrona in postane helijev atom. Ne nosi več naboja in, ker je ob vso hitrost, nima energije ter gibalne količine. Je samo še navaden, dokaj redek državljani atmosfere.

Bine se je potil in računal. Delec alfa, majhna kroglica, odleti iz jedra polonija 210 s hitrostjo okoli 10^7 m/s. S tolikšno hitrostjo bi v štirih sekundah obkrožil Zemljo, če bi imel prosto pot. Če pa se kam zaleti, se ustavi. Podobno izstrellek iz puške, ki obtiči v kladi, le-to potisne naprej. Klada in izstrellek si zdaj delita gibalno količino, ki jo je imel prej samo izstrellek. Klada odpotuje naprej, vendar s precej manjšo hitrostjo od izstrelkove. Če visi klada na vrvicah, zaniha. Tudi delec alfa je tak izstrellek. Bine bi vzel meter dolgo nit, na katero bi obesil približno desetmiligramsko utež. Tarča bo torej kvadratni centimeter papirja. Seveda bi morala biti nihalo in vir sevanja v brezračnem prostoru, sicer bi delec alfa nihala niti ne dosegel. Minila je ura, ko se je Bine še vedno sklanjal nad papir.

Ni bil videti dobre volje. Če je račun pravilen, bo največji odklik klade nekajkrat 10^{-9} m. To pa je le nekaj deset atomskih premerov. Tolikšnega odklika ne bo zaznal.

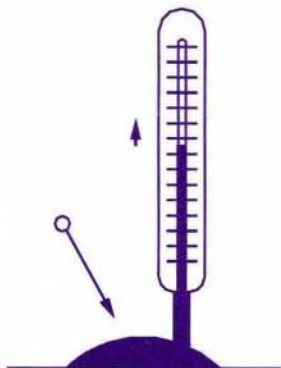
Slika 1. Binetov prvi izum. Delec alfa leti proti nihalu. V njem obtiči in potisne nihalo naprej. Nihalo zaniha, kar je znak, da je nihalo zadelo delec alfa. Iz največjega odklona pa lahko celo razberemo energijo delca alfa.



Ampak v slogi je moč. Kar ne zmore en sam delec, jih zmore več. Koliko delcev mora prestreči tarča vsako sekundo, da bo odklon nihala vsaj ena stopinja? Delci prihajajo v curku. Zato nihalo ne more nihati, ampak kaže stalen odklon. Bine se je spet potil. Šment, v sekundi je potrebnih 10^9 delcev. Solata, ki bi oddajala toliko delcev alfa, bi bila zanesljivo neužitna, saj je praktično škodljiv vsak alfa delec. Ne, z gibhalno količino ne bo nič.

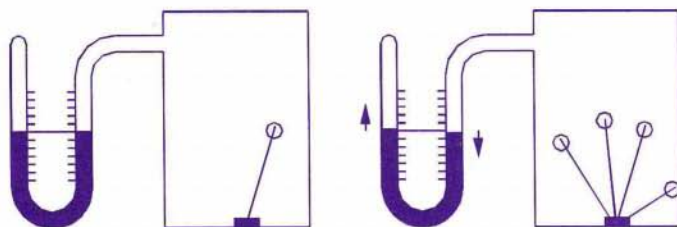
Torej k energiji. Delec alfa, ki bi zadell vodno kapljico in v njej obtičal, bi ji prinesel nekaj energije. Zato bi se kapljica neznatno segrela. Če bi kapljico zadelo dovolj delcev, bi morda lahko izmeril prirastek temperature z zelo občutljivim termometrom. Poskusimo izračunati prirastek. Delec naj ima energijo 5 MeV, kar je $8 \cdot 10^{-13}$ J. Petnajst kapelj vode napolni kubni centimeter, ki tehta 10^{-3} kg.

Približno 4300 J toplote potrebujemo, da segrejemo kilogram vode za stopinjo, tisočkrat manj za kubni centimeter, še petnajstkrat manj za kapljo. Najbrž bi še lahko zaznali spremembo stotinke stopinje. Ko delimo torej zadnji rezultat s sto, vzemo za potrebno toploto, ki je $3 \cdot 10^{-3}$ J. Tolikšno toploto prinese kaplji vode približno $4 \cdot 10^9$ delcev alfa. Res je, da ni treba, da prilete v isti sekundi. Lahko jih zbiramo daljši čas, če se le ne bo kaplja sproti tudi preveč hladila. Vendar tudi termometer ukrade nekaj toplote, preden kaj pokaže. Ker pa je Bine poznal le živo-srebrni termometer, ki je gotovo pogoltnejši od kaplje vode, se je vdal. Poskusil bo drugače.



Slika 2. Delec alfa obtiči v kaplji vode in jo neznatno segreje. Koliko delcev potrebujemo, da bi lahko zaznali temperaturni dvig? Narisani termometer ne bo dober, ker pogoltne preveč toplote, da jo pokaže.

Ko odda delec alfa svojo energijo in ukrade v okolici dva elektrona, postane helijev atom. S helijem polnijo balone, da se ti dvignejo. Morda bi napolnil s solato gumast balonček in ga tesno zadrnil. Iz solate bi izhajali delci alfa, se spreminjali v helijeve atome in polnili balonček. Ko bi bil balonček lepo napihnjen, bi odletel v nebo in rešil Bineta radioaktivne solate. Preveč lepo, da bi bilo res. Verjetno nobena solata ne bi premogla toliko helija.



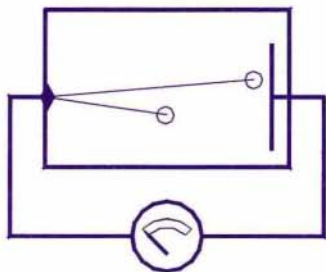
Slika 3. V prazni posodi je vir delcev alfa. Med razpadom se v posodi nabira helij. Tlak v posodi raste. Pokaže ga živosrebrni manometer.

Pa saj ni treba, da imamo helija na litre. Poskusimo z neznatno posodico. Na posodico pritrdimo živosrebrni manometer. V povsem prazni posodici je le vir sevanja alfa. Delci izletavajo, postajajo atomi helija in ustvarjajo tlak v posodici. Čez nekaj časa je v levem kraku nad živim srebrom še vedno brezračni prostor, v desnem kraku pa potiskajo živo srebro navzdol helijeve atomi, ki se jih nabira čedalje več. Razliko med gladinama živega srebra na levi in na desni, recimo 1 mm, pa lahko lepo vidimo. Le koliko delcev alfa bo potrebnih, da se gladini razmakneta za toliko? Bine se je odločil za zelo majhno posodo, morda 5 cm^3 .

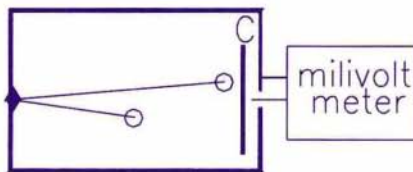
Kaj? Več kot 10^{20} delcev alfa naj bi nabral? Spet neuspeh.

Morda bi mu lahko koristile električne lastnosti delca alfa? Vsak delec nosi električni naboj. V posodo brez zraka bi torej na eno stran postavil vir sevanja, na drugi strani bi na izolirano elektrodo prestrezal delce. Ko bi povezal elektrodo z virom delcev prek ampermetra, bi ta pokazal električni tok vsakokrat, ko bi delec alfa treščil v elektrodo. Le kolikšen utegne biti tok? Naboj, ki ga delec alfa nosi, je $3,2 \cdot 10^{-19}\text{ As}$.

Če prileti vsako sekundo delec, pomeni to tok $3,2 \cdot 10^{-19}\text{ A}$. Ampermeter ne bi pokazal nič, miliampermeter tudi ne, celo mikroampermeter bi bil premalo občutljiv. Za nanoampermetre pa Bine še ni slišal. Mogoče bi pomagala elektronika? Tudi z njeno pomočjo bi lahko zaznal tokove le tja do 10^{-15} A . Tak tok bi zagotavljalo po 10 000 elektronov vsako sekundo. Solata, ki bi oddajala toliko delcev, bi bila zanesljivo škodljiva. Vendar je zdaj Bine zaznavi precej bliže kot pri uporabi čutil, ki so temeljila na mehaniki in toploti.



Slika 4. Delce alfa prestreza desna elektroda. Bo mogoče izmeriti električni tok?



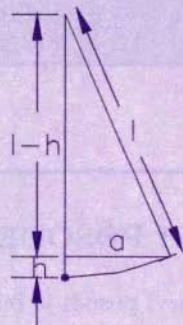
Slika 5. V kondenzatorju C nekaj časa zbiramo naboj. Med elektrodama kondenzatorja raste napetost. Bi jo lahko izmerili po dovolj dolgem času?

Kaj, če ne bi naboja sproti izgubljal prek ampermetra, ampak bi ga nekaj časa zbiral? Zbirna elektroda in ohišje škatle sta kondenzator. Naboj, ki ga prinašajo delci alfa, polni kondenzator. Med ploščama narašča električna napetost. Prirastek je tem večji, čim manjša je kapaciteta kondenzatorja. Pri kapaciteti 20 pF bo vsak prestreženi delec povečal napetost za kondenzatorju za $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ V}$. Da bo Bine napetost lahko meril, naj zraste do enega milivolta. Če oddaja vir 100 delcev alfa vsako sekundo, bo moral čakati 1 500 sekund, kar je skoraj pol ure.

Bine je izčrpan obupal. Če je že z delci alfa toliko preglavic, kako naj najde še drobnejše elektrone? Da bi vsaj Bush ne začel vojne!

Binetu smo pokukali prek rame v njegove račune. Pri ujetju delca alfa v klado je zapisal ohranitev gibalne količine, $mv = (M + m)v_1$. Hitrost delca alfa v je izračunal iz njegove energije E , torej $E = mv^2/2$. Masa klade in masa delca alfa sta M in m .

Zdaj Bine pozna maksimalno hitrost nihala v_1 , zato lahko izračuna njegovo kinetično energijo. Masa niti je zanemarljiva v primerjavi z maso obeska. Ko se nihalo giblje proti skrajni legi, se hkrati dviga. Zato se mu večja potencialna energija, manjša pa kinetična in z njo hitrost. V skrajni legi velja $mv_1^2/2 = mgh$. Dvig h pa povezuje z odklonom a Pitagorov izrek, $a^2 + (l - h)^2 = l^2$. Pri računanju je Bine zanemaril člen h^2 , ki je gotovo mnogo manjši od člena hl .



Pri računanju tlaka si je Bine pomagal z nekaterimi podatki, s katerimi ga je seznanila kemija. Mol kateregakoli plina, ki zavzema 22,4 litra pri sobni temperaturi in ima tlak približno enak atmosferskemu, šteje približno $6 \cdot 10^{23}$ atomov. Mol helija tehta 4 grame. Razlika gladin živega srebra 760 mm ustreza atmosferskemu tlaku. Bine mora napolniti s helijem le prostornino 5 cm^3 do tlaka, ki je 760-krat manjši od atmosferskega. Do rezultata je Bineta pripeljal le sklepni račun.

Tudi z megaelektronvolti (MeV) ni bilo težav, čeprav so enota iz atomskega sveta. Kadar pade kamen z maso 1 kg v težnostnem polju Zemlje za en meter, pridobi na energiji 9,81 J. Tolikšno energijo bi lahko razglasili za enoto energije, če ne bi že imeli dobrih starih joulov. Podobno kot deluje težnostno polje na maso, deluje električno polje na naboj. V atomskem svetu, kjer se igramo z elektroni in s precej težjimi protoni, ki oboji nosijo električni naboj e_0 , enak 10^{-19} As, pa je novi način zapisave energije običajen. Elektron, ki v električnem polju pade za volt, pridobi energijo 1 elektronski volt ali 1 eV. Nova enota, mnogo manjša od joula, je zelo pripravna v atomskem svetu. Elektron pa ima tudi maso m_e , zato deluje nanj privlačna sila Zemlje. Elektron torej pridobiva na energiji tudi tedaj, ko pada v težnostnem polju Zemlje. Zato izračunajmo energijski prirastek pri padcu za meter: $\Delta E = m_e g \cdot 1 = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,81 \approx 10^{-29}$ J, kar je zanemarljivo malo proti energiji, ki jo dobi, kadar pade v električnem polju za volt: $\Delta E = e_0 \cdot 1 = 10^{-19}$ J. To pa pomeni, da lahko vpliv težnosti na gibanje elektronov zanemarimo. Proton, ki je približno 2000-krat težji od elektrona, pridobi pri padcu za meter v težnostnem polju Zemlje tolikokrat več. Kljub temu je težnostni vpliv še vedno milijonkrat manjši od vpliva najneznatnejšega električnega polja. Zanimivo je, da na prostem izmerimo električna polja nekaj sto voltov na meter zaradi atmosferske elektrike.

Jože Pahor

TRI POSODE – Rešitev s str. 141

V prvi posodi je bilo 8 litrov, v drugi 14 in v tretji 26 litrov vina.

Marija Vencelj

DVOJNI PLANET

Zemljo in Luno¹ astronomi pogosto obravnavajo kot sistem dveh vesoljskih teles – kot dvojni planet. Pa je to upravičeno? Poskusil vas bom o tem prepričati.

V primerjavi s svojim matičnim planetom, Zemljo, Luna ni zelo majhna, nima zelo majhne mase in tudi razmeroma blizu ji je. V Osončju sicer najdemo satelite, ki so po polmeru in masi večji ter masivnejši od Lune, toda v primerjavi s svojim matičnim planetom so dosti manjši kot Luna v primerjavi z Zemljo. Luna se torej zelo razlikuje od drugih satelitov Osončja.

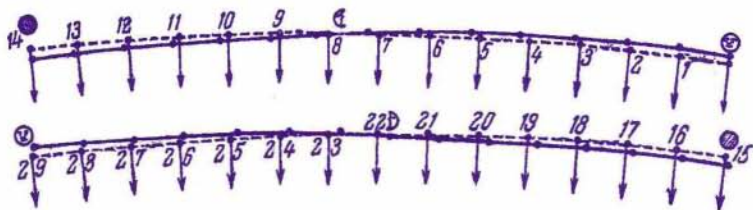
Polmer Lune je le štirikrat manjši od polmera Zemlje, polmer največjega satelita (Tritona) pa je le desetina polmera matičnega planeta (Neptuna). Nadalje, masa Lune je $1/81$ mase Zemlje, medtem ko ima v Osončju najmasivnejši satelit (Ganimed) 10000-krat manjšo maso od svojega matičnega planeta (Jupitra).

Da imenujejo sistem Zemlja-Luna dvojni planet, je predvsem odločilna velika bližina obeh vesoljskih teles. Sateliti drugih planetov krožijo dosti dlje od matičnega planeta kot Luna okrog Zemlje. Tako se pot, ki jo opisuje Luna okrog Sonca, zelo malo razlikuje od Zemljine poti. To se zdi nenavadno, če pomislimo, da Luna kroži okrog Zemlje v oddaljenosti skoraj 400 000 km. Toda ne pozabimo, da v času, ko Luna enkrat obkroži Zemljo, Zemlja skupaj z Luno prepotuje približno trinajestino svoje letne poti okrog Sonca, kar je dobrih 70 milijonov km. Predstavljajte si okoli 2,5 milijona km dolgo krožno pot Lune, razvlečeno vzdolž 30-krat daljše dolžine. Kaj ostane od njene krožne poti? Praktično nič.

Lunina pot okrog Sonca se torej skoraj zlije z Zemljinim tirom, od katerega je odmaknjena le s 13-timi, komaj opaznimi izboklinami, podobna je nekakšnemu izbočenemu 13-kotniku z "rahlo zaobljenimi" koti.

Slika 1 precej natančno prikazuje Zemljino in Lunino pot okrog Sonca v času enega meseca. Črtkana krivulja prikazuje Zemljino pot, polna krivulja pa Lunino pot. Krivulji sta zelo blizu druga drugi. Če hočemo prikazati njuno razmaknjenost, moramo vzeti zelo veliko merilo. V našem primeru je polmer Zemljinega tira pol metra. Če bi vzeli polmer 20 cm ali še manj, bi bila na skici največja razdalja med obema krivuljama že manjša od debeline črt.

¹ Podobno naj bi veljalo tudi za planet Pluton in njegov satelit Haron. Zaradi premalo zanesljivih podatkov ta primer pustimo ob strani.



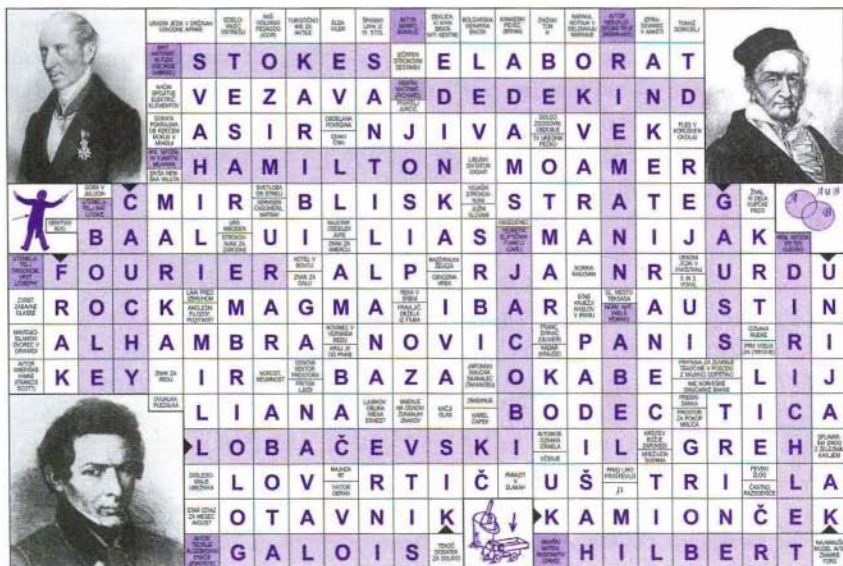
Slika 1. Lunina pot (polna črta) in Zemljina pot (črtkana) okrog Sonca v času enega meseca. ○ – ščip ali polna luna, ☾ – zadnji krajec, ● – mlaj ali prazna luna, ☽ – prvi krajec; puščice kažejo v smer proti Soncu.

Velja si natančno ogledati prepletanje krivulj na tej sliki. Lahko se prepričate, da se Zemlja in Luna gibljeta okrog Sonca po skoraj isti poti in da je imenovanje "dvojni planet" zanju kar upravičeno.

Zaenkrat ni znan noben drug primer v Osončju, kjer bi bil vpliv lune na matični planet tako velik, kot je učinkovanje Lune na Zemljo. Najbolj opazna posledica bližnjega sosedstva velikega satelita, kar za Luno vsekakor lahko rečemo, pa je plima in oseka. Toda to je povsem nova zgodba.

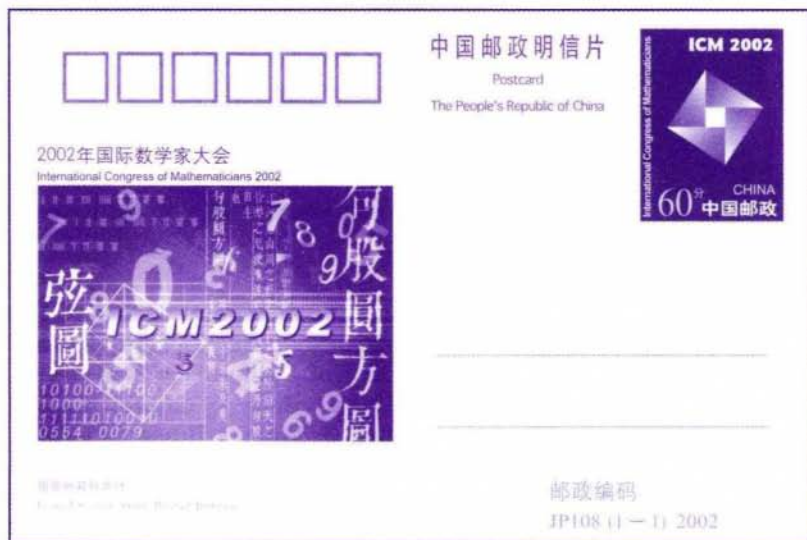
Marijan Prosen

KRIŽANKA "MATEMATIKI 19. STOLETJA" –
Rešitev s str. 160



MEDNARODNI KONGRES MATEMATIKOV, PEKING 2002

Od 20. do 28. avgusta 2002 je v Pekingu na Kitajskem potekal 24. mednarodni kongres matematikov. Največje srečanje matematikov z vsega sveta prireajo vsaka štiri leta. Na kongresu so podelili Fieldsove medalje (imenovane po kanadskem matematiku Johnu Fieldsu). To najvišje priznanje v matematiki podeljuje mednarodno matematično združenje, prejemniki pa smejo biti v letu podelitve stari največ 40 let. Na posameznem mednarodnem kongresu (od leta 1936 dalje) so podelili največ štiri medalje. Letos sta jo dobila francoski matematik Laurent Lafforgue in ruski matematik Vladimir Voevodskij. Medalji jima je izročil kitajski predsednik Jiang Zemin, ki se je udeležil otvoritvenih svečanosti.



Podelili so tudi nagrado za vrhunske dosežke na področju teoretičnega računalništva, nagrado Rolfa Nevanlinne. To priznanje podeljujejo od leta 1982 dalje, imenuje pa se po finskem matematiku Rolfu Nevanlinnu. Letos jo je prejel indijski matematik Mathu Sudan.



Lafforgue je diplomiral na École normale supérieure v Parizu, nato delal na Université de Paris-Sud v Orsayu, kjer je leta 1994 doktoriral, zatem pa je postal profesor na Institut des hautes études scientifiques, ki sodi med najuglednejše matematične inštitute na svetu. Lafforgue je dobil Fieldsovo medaljo za izjemen napredek v realizaciji Laglandsovega programa (o povezanosti zelo oddaljenih področij matematike – Galoisevim reprezentacijami v teoriji števil in avtomorfnimi formami v analizi).

sti zelo oddaljenih področij matematike – Galoisevim reprezentacijami v teoriji števil in avtomorfnimi formami v analizi).



Voevodskij je diplomiral na Moskovski državni univerzi, doktoriral na Harvardu, nato je gostoval na Institute for Advanced Study (Princeton), na Harvard University, na Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn) in Northwestern University. Sedaj je profesor na Institute for Advanced Study v Princetону. Voevodskij je dobil Fieldsovo medaljo za izjemne rezultate v algebraini geometriji – odkril je novo teorijo kohomologije za algebrainne mnogoterosti in dokazal znamenito Milnorjevo domnevo v algebraini K-teoriji.



Madhu Sudan je diplomiral na Indian Institute of Technology v New Delhiju, doktoriral na University of California v Berkeleyu (iz računalništva). Nato je najprej deloval v IBM Thomas J. Watson Research Center v Yorktown Heights. Sedaj je profesor na Massachusetts Institute of Technology. Sudan je nagrajen za izjemne prispevke v teoriji verjetnostno preverljivih dokazov, v raziskavah neapksimabilnosti problemov optimizacije in v teoriji kodiranja.

Dušan Repovš

URNIK TEKMOVANJ V LETU 2003

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko področno državno	20. marec 29. marec 12. april
	srednja	šolsko izbirno sredozemsko državno olimpiada	20. marec 28. marec april 12. april 7. do 19. julij
	za dijake srednjih poklicnih šol	šolsko področno državno	20. marec 29. marec 12. april
	za dijake sred- njih tehniških in strokovnih šol	šolsko področno državno	20. marec 29. marec 12. april
fizika	osnovna	šolsko področno državno	4. marec 15. marec 5. april
	srednja	področno državno izbirno olimpiada	22. marec 5. april 9. maj 12. do 21. julij
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	27. september
poslovna matematika	srednja	šolsko državno	24. marec 11. april
logika	osnovna	šolsko izbirno državno	26. september 18. oktober 15. november
	srednja	izbirno državno	18. oktober 15. november
	študentje	državno	15. november
računalništvo	osnovna	šolsko področno državno	28. januar 7. marec 5. april
	srednja	državno	5. april
Podelitev priznanj nagrajencem na državnih tekmovanjih v organizaciji DMFA Slovenije			22. maj

V nadaljevanju je nekaj osnovnih informacij o posameznih tekmovanjih. Vabimo vas, da obiščete spletno stran *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>), kjer boste našli več podatkov o posameznem tekmovanju. Mentorje prosimo, da sledijo tudi novicam, ki jih objavljamo na informacijskem strežniku. Podatke o tekmovanjih s področja logike in računalništva najdete na spletni strani *ZOTKS* (<http://www.zveza-zotks.si/>).

Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila dobite pri gospodu Aleksandru Potočniku na OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10, Ljubljana, tel. 041-420-618 oziroma na elektronskem naslovu "aleksander.potocnik@guest.arnes.si".

Matematika – srednja šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Datuma izbirnih testov bosta objavljena na spletni strani *DMFA Slovenije*. Podrobnejše informacije dajeta gospod Darjo Felda, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (01)-47-68-233, in gospod Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (01)-47-66-500, dobite pa jih tudi po elektronski pošti na naslovu "math.comp@fmf.uni-lj.si".

Dijaki srednjih poklicnih šol se lahko udeležijo matematičnega tekmovanja v posebni kategoriji. To tekmovanje ureja *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike*. Več informacij dobite pri gospe Dušanki Vrenčur, Živilska šola Maribor, Park mladih 3, Maribor, tel. (02)-32-08-600, elektronska pošta "dusanka.vrencur@guest.arnes.si".

Tudi dijaki srednjih tehniških in strokovnih šol, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa, se lahko udeležijo tekmovanja v posebni kategoriji. Tekmovanja v tej kategoriji ureja *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike*. Informacije dobite pri gospe Darinki Žižek, Srednja ekonomska šola, Trg Borisa Kidriča 3, Maribor, tel. (02)-25-13-461 ali po elektronski pošti "darinka.zizek@guest.arnes.si".

Naj poudarimo, da se matematičnih tekmovanj srednješolcev, ki jih podrobno ureja *Pravilnik o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*, lahko udeležujejo vsi srednješolci ne glede na vrsto šole, ki jo obiskujejo. Seveda pa je tekmovanje v tej kategoriji podvrženo mednarodni primerljivosti zaradi končnega izbora ekip, ki sodelujejo na mednarodnih tekmovanjih.

Fizika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Dodatne informacije dobite pri gospe Jelislavi Sakelšek, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (01)-52-44-401.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja v znanju fizike je objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije*. Informacije dobite pri gospodu Cirilu Dominku na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (01)-3000-400.

Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrilna matematika*.

Poslovna matematika

Tekmovanje bo organizirano prvič, in sicer pod okriljem *DMFA Slovenije*. Informacije dobite pri gospe Sabini Gajšek, Srednja ekonomska šola Celje, Vodnikova 10, Celje, tel. (03)-42-54-715 ali (03)-42-54-730 oziroma po elektronski pošti "sabina.gajsek@guest.arnes.si".

Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki so v času tekmovanja na predmetni stopnji osnovne šole, dijaki srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, Ljubljana. Druge informacije daje gospa Mija Kordež na ZOTKS, tel. (01)-25-13-727, faks (01)-25-22-487, elektronska pošta "mija.kordez@guest.arnes.si".

Računalništvo – osnovna in srednja šola

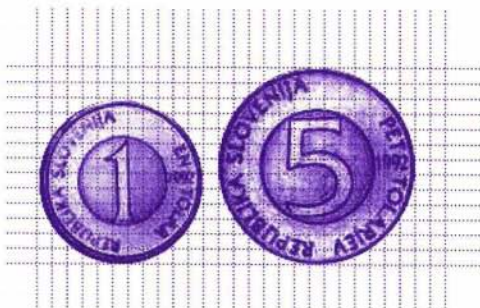
Informacije dobite na naslovu ZOTKS, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (01)-25-13-727 ali (01)-25-13-743, faks (01)-25-22-487.

Darjo Felda

22. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Naloge za 7. razred

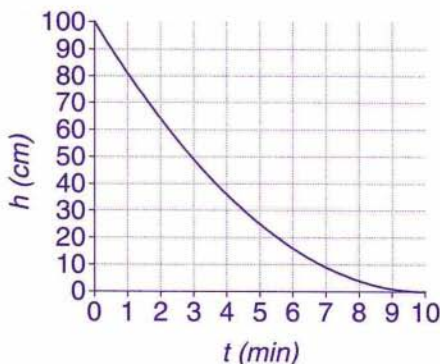
1. Slika kaže kovanca za 1 in 5 SIT v naravni velikosti. Kovanca sta iz enake snovi in imata enako debelino.



- Kolikšni sta ploščini krogov, ki ju kaže slika?
- Kolikšno je razmerje mas kovancev za 5 in 1 SIT?
- Kolikokrat bi morala biti debelina kovanca za 5 SIT večja, da bi bila tudi masa 5-krat večja od kovanca za 1 SIT?

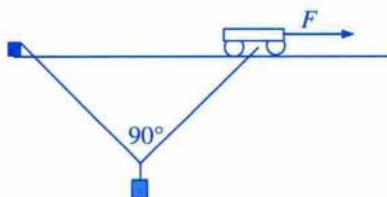
Opomba. Ploščino kroga lahko bodisi izračunaš z enačbo $pl = \pi r^2$ bodisi določiš s štetjem kvadratkov mreže. Pri tem je r polmer, kvadrateg mreže ima stranico 2 mm.

2. Olje pretakamo iz zgornjega, sprva polnega rezervoarja, v spodnji, sprva prazen rezervoar. Oba rezervoarja imata obliko kvadra, spodnji ima ploščino osnovne ploskve $2,0 \text{ m}^2$, zgornji pa $1,0 \text{ m}^2$. Diagram kaže višino olja v odvisnosti od časa za zgornji rezervoar.

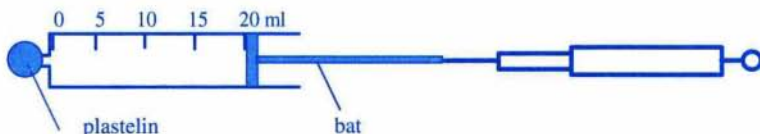


- Izračunaj višino olja v spodnjem rezervoarju ob časih: 0 min, 2 min, 5 min, 10 min.
- Nariši diagram za višino olja v odvisnosti od časa v spodnjem rezervoarju.

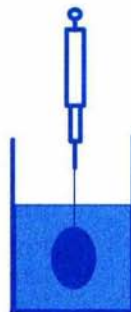
3. Utež s težo 10 N obesimo na sredino vrvice, kot kaže slika. Desni konec vrvice je pritrjen na voziček, ki se lahko brez trenja giblje po vodoravni tračnici. Teža vozička je 20 N. Pri reševanju si lahko pomagáš z načrtovanjem.



- Nariši vse sile, ki delujejo na voziček.
 - S kolikšno silo F je potrebno držati voziček, če naj sistem miruje?
 - S kolikšno silo deluje tračnica na voziček?
4. 20-mililitrsko medicinsko brizgo (injekcijo) vpnemo v primež in potisnemo bat do oznake 0 ml, da iz brizge iztisnemo ves zrak, nato pa s plastelinom neprodušno zapremo cevčico v brizgo. Potem s silomerom izvlečemo bat do oznake 20 ml, kot kaže slika. Ker je brizga neprodušno zaprta, je v njej brezračni prostor.



- Nariši vse sile, ki delujejo na bat, ko ta miruje pri oznaki 20 ml. Sile tudi imenuj. Sila trenja in teža bata sta tako majhni, da ju lahko zanemarimo.
 - Pri poskusu opravimo še dve meritvi: razdalja med oznakama 0 ml in 20 ml na brizgi je enaka 5,7 cm, barometer na steni pa kaže 98 kPa. Koliko kaže silomer, ko bat miruje pri oznaki 20 ml?
5. V čašo, ki ima obliko kvadra, za osnovno ploskev pa kvadrat s stranico 10,0 cm, nalijemo vodo do višine 8,0 cm. Na silomer obesimo homogeno aluminijasto telo ($\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$) nepravilne oblike. Ko telo potopimo v vodo (glej sliko), se gladina vode dvigne za 2,5 cm.
- Koliko N kaže silomer, ko je telo še v zraku?
 - Koliko N kaže silomer, ko je celotno telo potopljeno v vodi?



Naloge za 8. razred

1. Pri polnjenju avtomobilskega akumulatorja priključimo akumulator na napetostni vir, kot kaže slika. Diagram prikazuje, kako se med polnjenjem spreminja tok.

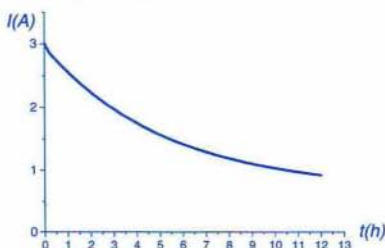
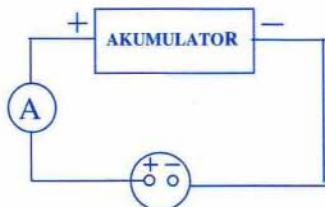
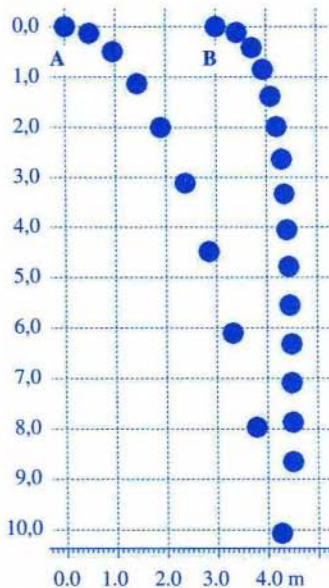


Diagram prikazuje, kako se spreminja tok I , ki ga napetostni izvir poganja skozi akumulator, v odvisnosti od časa t .

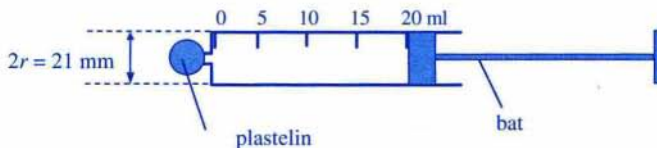
- Približno kolikšen naboj se je pretočil skozi napetostni vir v prvi minuti polnjenja?
- Ob katerem času je bil v eni minuti pretočeni naboj enak 120 As?

2. Dve enako veliki, a različno težki krogli potisnemo v vodoravni smeri istočasno in z enako hitrostjo z vrha stolpa. Gibanje krogel posnamemo na skupno sliko. Časovni interval med dvema zaporednima posnetkoma je 0,16 s, merili sta v metrih. Zračnega upora ne smemo zanemariti.



- Ali je gibanje krogle A oziroma krogle B ob koncu posnetkov, ki jih kaže slika, približno enakomerno ali pospešeno? Odgovor utemelji.
- Ali velja enačba $y = gt^2/2$ za interval od začetka do 10. posnetka krogle A oziroma krogle B? y je navpična koordinata, dovoljeno odstopanje koordinate je $\pm 0,2$ m, $g = 9,8$ m/s².
- Kolikšni sta povprečni hitrosti krogle A in krogle B za 9. časovni interval (med 9. in 10. posnetkom)?
- Katera krogla je težja? Odgovor utemelji.

3. 20-mililitrsko medicinsko brizgo (injekcijo) vpremo v primež in potisnemo bat do oznake 0 ml, da iz brizge iztisnemo ves zrak, nato pa s plastelinom neprodušno zapremo cevčico v brizgo. Potem izvlečemo bat do oznake 20 ml, kot kaže slika. Ker je brizga neprodušno zaprta, je v njej brezračni prostor. Bat nato spustimo.



- S kolikšnim pospeškom se začne gibati bat, ko ga spustimo? Masa bata je 200 g, premer bata je 21 mm. Sila trenja med batom in steno brizge pa je 10 N. Zračni tlak je 100 kPa.
 - Ali je gibanje bata med oznakama 20 ml in 10 ml enakomerno pospešeno ali ni? Utemelji odgovor.
 - V kolikšnem času bat prepotuje od oznake 20 ml do oznake 10 ml?
4. Diagram (vir: www.heavens-above.com) kaže višino vesoljske postaje ISS (International Space Station – trenutno edina obljudena postaja v vesolju) nad površjem Zemlje od 01.03.01 do 01.03.02. Zaradi zračnega upora se višina postaje manjša in motorji vedno znova popravljajo višino. Masa postaje je 90 000 kg. Zemljo obkroži v 93 minutah. Polmer Zemlje je 6400 km.

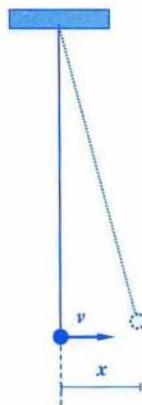


- Oceni povprečno višino postaje nad površjem Zemlje (dovoljena napaka ± 10 km).
- Izračunaj povprečno hitrost kroženja postaje.
- Iz diagrama **oceni**, kolikšna je vsota vseh pozitivnih sprememb potencialne energije (to je takrat, ko se višina veča) v času **od 01.10.2001 do 01.02.2002**. Težni pospešek na tej višini je $8,7 \text{ m/s}^2$.

5. Na sliki je nitno nihalo, ki je narejeno iz majhne kroglice z maso 100 g in zelo lahke nitke z dolžino 200 cm. Kroglico sunemo v vodoravni smeri tako, da ima v začetni legi (glej sliko) hitrost 2,00 m/s, in pustimo, da zaniha. Sila upora zraka in sila trenja sta tako majhni, da kroglica v nekaj nihajih izgubi zanemarljivo malo energije.

Najdlje koliko cm se kroglica odmakne od navpičnice (razdalja x na sliki)?

Pri reševanju si lahko pomagash z načrtovanjem. Zaradi nenatančnosti pri risanju bodo v rezultatu dovoljena odstopanja do 10%, iz poteka pa mora biti razvidno, kako si prišel do rezultata.



Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

REŠITVE S PODROČNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – s str. 176

7. razred

1.a) $pl_1 = \pi r^2 = 3,14 \cdot (1,1 \text{ cm})^2 = 3,8 \text{ cm}^2$, $pl_5 = 3,14 \cdot (1,3 \text{ cm})^2 = 5,3 \text{ cm}^2$.

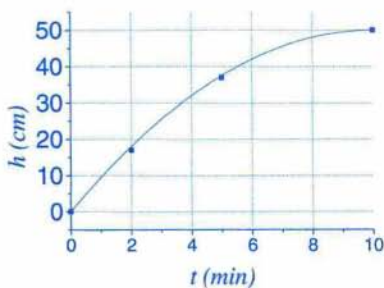
b) $m_5/m_1 = \rho \cdot pl_5 \cdot d / \rho \cdot pl_1 \cdot d = 5,3/3,8 = 1,4$.

c) $m_5 = 5 \cdot m_1$, sledi $\rho \cdot pl_5 \cdot d_5 = 5 \cdot \rho \cdot pl_1 \cdot d_1$, od koder izračunamo debelino "novega" kovanca za 5 SIT: $d_5 = 5 \cdot 3,8 \text{ cm}^2 \cdot d_1 / 5,3 \text{ cm}^2 = 3,6 \cdot d_1$. Razmerje je 3,6.

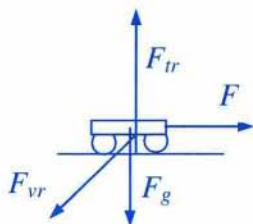
- 2.a) Tabela kaže rezultat, pri čemer je b)

h_{zg} višina v zgornjem rezervoarju, h_{sp} pa v spodnjem. Upoštevamo, da je v spodnjem rezervoarju olje, ki je iz zgornjega izteklo, in da je ploščina dvakrat večja: $h_{sp} = (100 \text{ cm} - h_{zg})/2$.

t (min)	0	2	5	10
h_{zg} (cm)	100	65	25	0
h_{sp} (cm)	0	17	37	50



3.a)



b) Če narišemo sile za vozec nad utežjo, dobimo kvadrat z diagonalo 10 N (teža uteži). Sila v vrvi (stranica kvadrata) je torej $F_{vr} = 10 \text{ N} / \sqrt{2} = 7,1 \text{ N}$. Pri vozičku razstavimo silo vrvice na vodoravno in navpično komponento. Spet imamo kvadrat in vodoravna komponenta je $F_{vrx} = F_{vr} / \sqrt{2} = 5,0 \text{ N}$. Z nasprotno enako silo moramo držati voziček.

c) Tudi v navpični smeri so sile v ravnovesju. Navzdol delujeta sila teže in navpična komponenta sile vrvice, ki je enaka 5,0 N, skupaj torej 25 N. Sila tračnice na voziček je nasprotno enaka tej vsoti, torej enaka 25 N.

4.a) Na bat delujeta sila zraka F_z v levo in sila silomera F_s v desno. Sili sta po velikosti enaki, po smeri pa nasprotni.

b) Sila zraka F_z je enaka produktu zračnega tlaka in ploščine bata $F_z = p_z \cdot S$, pri čemer je ploščina bata enaka $S = V/l = 20 \text{ cm}^3 / 5,7 \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}^2$. Tako je $F_z = p_z \cdot S = 98\,000 \text{ N/m}^2 \cdot 3,5 \text{ cm}^2 = 34 \text{ N}$. Sila silomera je po velikosti enaka sili zraka, torej kaže silomer 34 N.

5.a) Prostornina telesa je $V = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 2,5 \text{ cm} = 250 \text{ cm}^3$, masa pa $m = \rho \cdot V = 2,7 \text{ g/cm}^3 \cdot 250 \text{ cm}^3 = 675 \text{ g}$. Ko je telo v zraku, kaže silomer 6,75 N.

b) Sila vzgona je enaka $F_v = \sigma_v \cdot V = 10 \text{ N/dm}^3 \cdot 0,250 \text{ dm}^3 = 2,5 \text{ N}$. Silomer kaže razliko med težo in vzgonom, torej $6,75 \text{ N} - 2,5 \text{ N} = 4,25 \text{ N}$.

8. razred

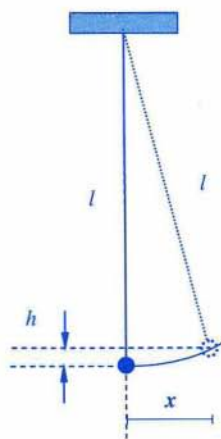
1.a) V prvi minuti je tok ves čas približno 3 A. Zato je pretočeni naboj približno enak $e_1 = I_1 \cdot t_1 = 3 \text{ A} \cdot 60 \text{ s} = 180 \text{ As}$.

b) Če je v eni minuti pretočeni naboj 120 As, teče skozi napetostni izvir tok $I_2 = e_2/t_2 = 120 \text{ As}/60 \text{ s} = 2,0 \text{ A}$. Iz diagrama razberemo, da je tok enak 2,0 A približno 3 ure po začetku polnjenja.

2.a) Pri krogli A razdalje med zaporednimi legami naraščajo in gibanje je pospešeno. Pri krogli B so razdalje enake in gibanje je enakomerno.

b) Za kroglo A izmerimo $y = 10,2 \text{ m}$ in $t = 1,44 \text{ s}$, sledi $gt^2/2 = 10,2 \text{ m} = y$ – enačba je potrjena. Za kroglo B izmerimo $y = 4,7 \text{ m}$ in $t = 1,44 \text{ s}$, sledi $gt^2/2 = 10,2 \text{ m} \neq y$ – enačba ne velja.

- c) Krogla A: $v = 2,2 \text{ m}/0,16 \text{ s} = 13,7 \text{ m/s}$. Krogla B: $v = 0,75 \text{ m}/0,16 \text{ s} = 4,7 \text{ m/s}$. Napaka rezultata je lahko do $\pm 1 \text{ m/s}$.
- d) Težja je krogla, ki doseže večjo končno hitrost. Takrat sta sila teže in sila upora v ravnovesju. Ker se sila upora večja z večjo hitrostjo, pomeni, da ima krogla, ki doseže večjo končno hitrost, večjo težo. V našem primeru je težja krogla A, ki še ni dosegla končne hitrosti, krogla B pa se že giblje enakomerno. Možne so še drugačne utemeljitve.
- 3.a) Zrak tišči bat navznoter s silo $F_{\text{zrak}} = p \cdot S = p \cdot \pi r^2 = 100\,000 \text{ N/m}^2 \cdot 3,5 \text{ cm}^2 = 35 \text{ N}$. Pospešek izračunamo iz Newtonovega zakona $a = F/m = (F_{\text{zrak}} - F_{\text{trenje}})/m = (35 \text{ N} - 10 \text{ N})/0,20 \text{ kg} = 125 \text{ m/s}^2$.
- b) Gibanje je enakomerno pospešeno, ker je vsota vseh sil konstantna.
- c) Dolžina med oznakama 20 ml in 0 ml je $20 \text{ cm}^3/3,5 \text{ cm}^2 = 5,7 \text{ cm}$, med oznakama 20 ml in 10 ml pa 2,85 cm. Iz enačbe $s = at^2/2$ izračunamo čas $t = \sqrt{2s/a} = 0,021 \text{ s}$.
- 4.a) Povprečno višino ocenimo na 385 km.
- b) Hitrost izračunamo iz obsega kroga in obhodnega časa: $v = 2\pi r/t_0 = 42\,600 \text{ km}/93 \text{ min} = 27\,500 \text{ km/h}$. r je razdalja od središča Zemlje in je enaka $6400 \text{ km} + 385 \text{ km} = 6785 \text{ km}$.
- c) Pozitivne spremembe višine v tem obdobju so: $18 \text{ km} + 13 \text{ km} + 18 \text{ km} = 49 \text{ km}$. Spremembe potencialne energije so: $\Delta W_p = mg\Delta h = 90\,000 \text{ kg} \cdot 8,7 \text{ m/s}^2 \cdot 49 \text{ km} = 38\,400 \text{ MJ}$. Zaradi nenačnega odčitavanja so dovoljene napake do $\pm 5\%$.
5. Začetna kinetična energija kroglice je $mv^2/2 = 0,200 \text{ J}$. Kroglica bo najdlje od navpičnice, ko se bo ustavila v skrajni legi. Takrat bo njena kinetična energija enaka nič, potencialna energija pa $0,200 \text{ J}$. Iz enačbe $\Delta W_p = mgh = 0,200 \text{ J}$ izračunamo, da se bo dvignila za $h = 20 \text{ cm}$. Najbolje je, da narišemo risbo na celoten list A4, kjer lahko dolžino $l = 200 \text{ cm}$ narišemo kot 200 mm dolgo črto in so vse razdalje 10-krat pomanjšane. Ugotovimo, da je pri višini $h = 20 \text{ mm}$ odmik x enak 88 mm, torej je pravi odmik x enak 88 cm.



NALOGE Z REGIJSKEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 2001/02

Skupina I

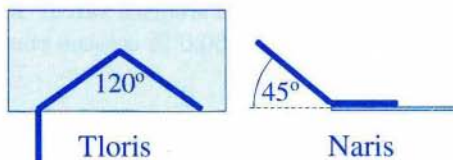
Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost $9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Voznik avtomobila vozi enakomerno s hitrostjo 30 km/h . Na ravnem delu ceste opazi na razdalji 300 m pred sabo semafor, na katerem se je ravno prižgala rdeča luč. Ker nima pred sabo nobenega avtomobila, sklene, da bo čez nekaj časa začel voziti enakomerno pospešeno z največjim možnim pospeškom, tako da bo pripeljal do semaforja ravno v trenutku, ko se bo na njem prižgala zelena luč. Čas med vklopom rdeče in vklopom zelene luči je 30 s , največji pospešek, ki ga avto zmore, pa 1 m/s^2 . Po kolikšnem času od vklopa rdeče luči mora voznik začeti pospeševati? S kolikšno hitrostjo pripelje mimo semaforja?

2. Če plastično vrtno cev uporabimo za pretakanje utekočinjenega dušika, katerega temperatura je precej pod temperaturo tališča ledu, se zaradi vlage v zraku okrog cevi nabere tanka plast ledu. Po koncu pretakanja se cev zato obnaša kot togo telo, dokler se plast ledu okoli nje ne stali.

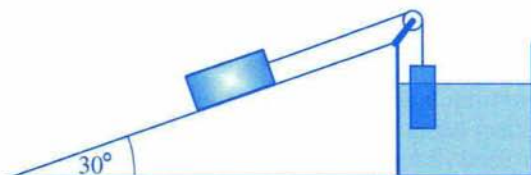
Po nekem pretakanju zavzame plastična cev obliko, kot je prikazano na sliki. Prva dva odseka (kraka) z dolžino po 40 cm oklepata kot 120° . Tretji odsek z dolžino 43 cm pa oklepa z ravnino, ki jo določata kraka, kot 45° in je pravokoten na premico, ki poteka skozi skrajni točki krakov.

Cev položimo na vodoravno mizo tako, da ležita kraka na mizi. Pri tem sta skrajni točki krakov točno na robu mize, tretji odsek pa sega preko roba mize in štrli poševno navzgor.



- a) Določi lego težišča tistega dela cevi, ki leži na mizi. Lego podaj na nedvoumen način.
- b) Ker se plast ledu okoli cevi najhitreje tali na mestu, kjer se tretji odsek stika z enim od krakov, se tretji odsek postopoma poveša. Pri tem ostajajo posamezni odseki cevi ravni. Kolikšen kot oklepa tretji odsek z ravnino, ki jo določata kraka, v trenutku, ko se cev prevrne z mize? Premer cevi je majhen v primerjavi z dolžino cevi.

2. Klada z maso 1,2 kg je na klancu z naklonom 30° z lahko neraztegljivo vrvico preko lahkega škripca povezana z valjem z maso 1 kg in višino 20 cm, ki je delno potopljen v vodo, kot kaže slika.



Koliko je lahko valj potopljen, da sistem obeh teles miruje? Koeficient lepenja med klado in klancem je 0,2, gostota vode je 1000 kg/m^3 , valj pa je iz snovi z gostoto 700 kg/m^3 .

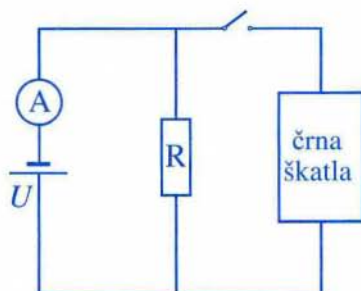
3. Miha in Peter sta se na letošnjih olimpijskih igrah navdušila nad curlingom (kegljanje na ledu). Na bližnjem zamrznjenem jezeru sta si narisala svoje igrišče in pravila malo priredila svojim potrebam. Cilj igre je svoj čok (disk s premerom 300 mm, ki drsi po ledu) čimbolj približati središču tarče, ki je narisana na ledu. Miha je svojo nalogo že opravil. Središče njegovega čoka je 100 mm pred središčem tarče, na zveznici med točko za izmet in središčem tarče. Peter je svoj čok spustil s hitrostjo $2,00 \text{ m/s}$ v smeri proti središču tarče, tako da središče tarče in oba čoka ležijo na isti premici. V trenutku, ko je spustil čok, je bilo središče čoka točno 20 m oddaljeno od središča tarče. Kdo je zmagovalec v tej igri in za koliko se razlikujeta razdalji središč čokov do središča tarče? Koeficient trenja ledu je 0,0100. Pri trku čokov gre 30,0 % celotne energije v notranjo energijo čokov.

Skupina II

1. Vodoravna pokrajina je prekrita z enakomerno plastjo poznega snega debeline 5 cm. V kolikšnem času sneg skopni, če začne enakomerno deževati, tako da pade vsako uro 10 mm dežja?

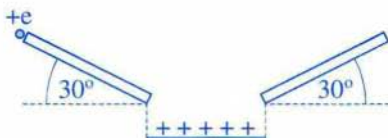
Temperatura snega je 0°C , temperatura dežja 10°C . Gostota vode je 1000 kg/m^3 , gostota snega pa 200 kg/m^3 . Specifična toplota vode je 4200 J/kgK , specifična talilna toplota snega pa znaša 336 kJ/kg . Predpostavi, da dež na površini plasti snega hitro izmenja toploto s snegom. Voda s temperaturo tališča lahko skozi sneg nemoteno odteka v tla, kjer se hitro vpije.

2. Vezje, sestavljeno iz upornika z uporom R , stikala, idealnega ampermetra in "črne škatle", priključimo na akumulator z napetostjo 15 V, kot kaže slika. Notranji upor akumulatorja je zanemarljivo majhen.



Pri nesklenjenem stikalu kaže ampermeter tok 0,5 A, pri sklenjenem pa 1,25 A. Nariši vezje v "črni škatli", ki ga sestavljajo trije enaki uporniki z uporom R .

3. Nabito kroglico z nabojem $1 \cdot 10^{-5}$ As in maso 10 g spustimo po cevi z dolžino 30 cm, ki je pripeta na klanec z naklonskim kotom 30° in se prilega kroglici. Na drugi strani je simetrično pripeta enaka cevka (glej sliko). Med obema cevkami je jarek širine 10 cm, na dnu katerega je naelektrena plošča. Kolikšna je površinska gostota naboja na plošči, da pride kroglica na vrh druge cevi, če drsi po obeh cevkeh brez trenja? Ploščo obravnavaj kot zelo razsežno. Za težni pospešek vzemi $9,8 \text{ m/s}^2$.



4. Na razsežni gladki vodoravni podlagi sta v razmiku 30 cm položena dva dolga vzporedna vodnika, po katerih tečeta tokova po 300 A. Na sredino med vodnika položimo kvadraten okvir iz aluminija s stranico 10 cm (ravno tretjino razdalje med vodnikoma), tako da sta po dve stranici vzporedni vodnikoma. Po okviru teče tok 10 A.
- Označi smeri tokov v vodnikih in okviru tako, da bo okvir miroval v postavljeni legi. Obravnavaj obe možnosti: pri eni naj bo ravnovesje *labilno* (kar pomeni, da se pri majhnem odmiku okvira iz ravnovesja prične okvir oddaljevati iz ravnovesne lege), pri drugi *stabilno* (okvir se vrne v ravnovesno lego).
 - V primeru *stabilnega* ravnovesja počasi zmanjšamo tok v enem vodniku na 100 A. Določi novo ravnovesno lego.

Skupina III

- Enaka naloga kot II/2.
- Enaka naloga kot I/4.

3. Za ogrevanje stanovanja imamo v kleti peč, višje v stanovanju pa radiator. Iz peči do radiatorja sta napeljeni dve ravni izolirani cevi, po katerih se pretaka voda tako, kot kažejo puščice na skici (obrnj list). Ko voda pride po cevi 2 v peč, se s temperature T_2 segreje na temperaturo T_1 , potem pa gre po cevi 1 v radiator, kjer se ohladi na T_2 . Voda kroži zato, ker ima pri različnih temperaturah različno gostoto, hitrost pa se ustali zato, ker gibanje vode v ceveh zavira upor (viskoznost). Kolikšen toplotni tok se lahko prenaša iz peči v stanovanje, če predpostavimo, da se lahko v peči segreje poljubno veliko vode na T_1 in v radiatorju poljubno veliko vode ohladi na T_2 , med gibanjem vode po radiatorju in peči pa ne prihaja do tlačnih padcev zaradi viskoznosti.

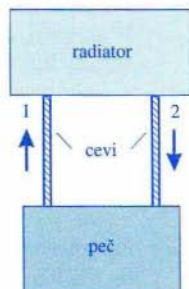
Podatki: voda ima pri $T_1 = 80^\circ\text{C}$ gostoto $\rho_1 = 0,972 \text{ kg/dm}^3$ in kinematično viskoznost $\nu_1 = 0,364 \text{ mm}^2/\text{s}$, pri $T_2 = 20^\circ\text{C}$ pa gostoto $\rho_2 = 0,998 \text{ kg/dm}^3$ in kinematično viskoznost $\nu_2 = 1,01 \text{ mm}^2/\text{s}$. Specifična toplota vode je konstantna na vsem temperaturnem intervalu in je $c = 4190 \text{ J/kgK}$, notranji polmer cevi, ki vodita iz peči v radiator in nazaj, pa je $R = 0,5 \text{ cm}$.

Pri reševanju uporabi Poiseuillov zakon, ki pravi, da je za stacionarno pretakanje viskozne tekočine z viskoznostjo η po cevi s polmerom R in pri volumskem toku Φ_v potrebna tlačna razlika na dolžinsko enoto

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{8\eta\Phi_v}{\pi R^4}.$$

Povezava med dinamično viskoznostjo η , kinematično viskoznostjo ν in gostoto ρ pa je:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$



4. a) Enaka naloga kot II/4a).
 b) V primeru *stabilnega* ravnovesja malo odmaknemo okvir iz ravnovesne lege. Izračunaj frekvenco nihanj okvira okoli ravnovesne lege. Žica, iz katere je okvir, ima prečni presek 1 mm^2 in je iz aluminija z gostoto $2,7 \text{ g/cm}^3$. Indukcijska konstanta je $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$.
 (Namig: Silo izrazi z majhnim odklikom od ravnovesne lege. Pri tem upoštevaj $\frac{1}{a \pm x} \approx \frac{a \mp x}{a^2}$, za $x \ll a$.)

Ciril Dominko

IZBIRNA TESTA ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO

Prvi izbirni test

- Poišči vsa naravna števila n z lastnostma:
 - Število n ima natančno šest pozitivnih deliteljev: $1, d_1, d_2, d_3, d_4, n$.
 - Velja $1 + n = 5(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$.
- Naj bo $ABCD$ tangenti štirikotnik. Presečišče premic AB in CD označimo z E , presečišče premic DA in BC pa z F . (Točka B naj leži med A in E , točka C naj leži med D in E , točka A naj leži med D in F ter točka B naj leži med C in F .) Označimo središča trikotnikom AFB , BEC in ABC včrtanih krožnic po vrsti z I_1, I_2 in I_3 . Premica I_1I_3 naj seka premico EA in ED v K in L , premica I_2I_3 pa naj seka FC in FD v M in N .
Dokaži, da je $|EK| = |EL|$ natanko tedaj, ko je $|FM| = |FN|$.
- Dokaži, da za vsako naravno število $n \geq 2$ velja

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{(n-k)2^{k-1}} < 4.$$

Drugi izbirni test

- Za katera naravna števila n obstaja taka permutacija $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ števil $1, 2, \dots, n$, da je za vsak $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ število

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

deljivo s k ?

- Naj bodo A, B, C, D, E in F različne točke na krožnici $\mathcal{K}$ v tem vrstnem redu. Tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah A in D ter premici BF in CE se sekajo v eni točki. Dokaži, da so premice AD, BC in EF bodisi vzporedne ali pa se sekajo v eni točki.
- Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Na koliko različnih načinov lahko v polja tabele $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ zapišemo število 1 ali -1 , če mora biti število v vsakem polju zmnožek števil v sosednjih poljih? Polji sta sosednji, če imata skupen rob.

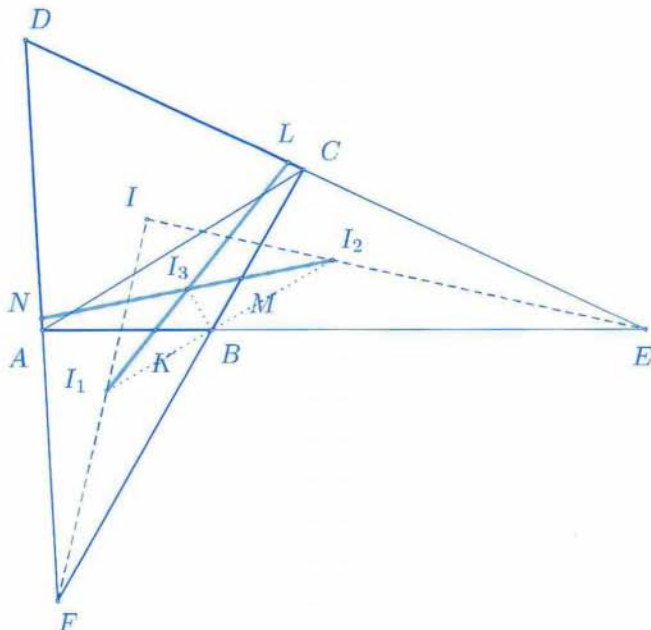
Matjaž Željko

REŠITVE NALOG Z IZBIRNIH TESTOV ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO – s str. 187

I/1. Naj bo $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ praštevilski razcep števila n . Tedaj je število njegovih deliteljev enako $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Ker je $\tau(n) = 6$, je lahko tako le $k = 1$ in $\alpha_1 = 5$ ali pa $k = 2$ in $\alpha_1 = 1$ in $\alpha_2 = 2$ (zaradi simetrije smemo privzeti, da je $\alpha_1 \leq \alpha_2$). V prvem primeru torej imamo $n = p^5$, kjer je p praštevilo. Pogoji naloge je tako $1 + p^5 = 5(p + p^2 + p^3 + p^4) = 5p(1 + p + p^2 + p^3)$, kar pa ni možno.

V drugem primeru imamo $n = pq^2$, kjer sta p in q različni praštevili. Pogoji naloge je tako $1 + pq^2 = 5(p + q + pq + q^2)$. Sledi $p = \frac{5q^2 + 5q - 1}{q^2 - 5q - 5} = 5 + \frac{30q + 24}{q^2 - 5q - 5}$. Ker mora biti p naravno število, je $30q + 24 \geq q^2 - 5q - 5$, kar nam da $q \leq 35$. Med praštevili do 35 pa le $q = 7$ da praštevilsko vrednost $p = 31$. Torej je $n = 31 \cdot 7^2 = 1519$ edina rešitev.

I/2. Narišimo dovolj veliko sliko. Središče štirikotniku $ABCD$ včrtane krožnice označimo z I . Pogoja $|EK| = |EL|$ pri risanju slike ne upoštevamo.



Ker sta I_1 in I_2 središči pričrtanih krožnic trikotnika ABC , so točke I_1, I_2 in B kolinearne ter $I_3B \perp I_1I_2$. Opazimo še, da so točke E, I_2 in I, F, I_1 in I ter B, I_3 in I kolinearne, saj ležijo na simetralah kotov $\sphericalangle CEB, \sphericalangle BFA$ ter $\sphericalangle CBA$.

Po konstrukciji je $|EK| = |EL|$ natanko tedaj, ko je $I_1I_3 \perp II_2$. Ker je $I_3B \perp I_1I_2$, je tako $|EK| = |EL|$ natanko tedaj, ko je I_3 višinska točka trikotnika II_1I_2 . Zaradi simetrije je potem tudi $|FM| = |FN|$ natanko tedaj, ko je I_3 višinska točka trikotnika II_1I_2 .

I/3. Trditev bomo dokazali z indukcijo.

Označimo $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{(n-k)2^{k-1}}$. Potem je $s_2 = 2 < 4$ in $s_3 = 3 < 4$. Velja

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{(n+1-k)2^{k-1}} = \sum_{k=1}^n \frac{n+1}{(n-(k-1))2^{k-1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+1}{(n-k)2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+1}{(n-k)2^k} + \frac{n+1}{n} = \\ &= \frac{n+1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{(n-k)2^{k-1}} + \frac{n+1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{s_n}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

Sedaj pa po induksijski predpostavki velja $s_n < 4$, zato je

$$s_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{s_n}{2} + 1\right) < 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 4$$

za $n \geq 3$.

II/1. Za $n = 1$ imamo permutacijo (1), za $n = 3$ pa (1, 3, 2) in (3, 1, 2). Dokažimo, da drugih rešitev ni.

Za vsak $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mora biti število $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ deljivo s k . Posebej to za $k = n$ pomeni, da je število $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ deljivo z n . Torej je število $\frac{n+1}{2}$ celo in je n liho število.

Naj bo sedaj $n \geq 5$ liho število. Označimo $m = \frac{n+1}{2}$. Število $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = nm - x_n$ je deljivo z $n-1$, zato je

$$x_n \equiv mn \equiv m \pmod{(n-1)}.$$

Ker je $m = \frac{n+1}{2}$ in $x_n \in \{1, 2, \dots, n\}$, je lahko le $x_n = m$. (Sicer bi bil $x_n \geq m + (n-1) > n$ ali $x_n \leq m - (n-1) < 1$, saj je $n \geq 5 > 3$.)

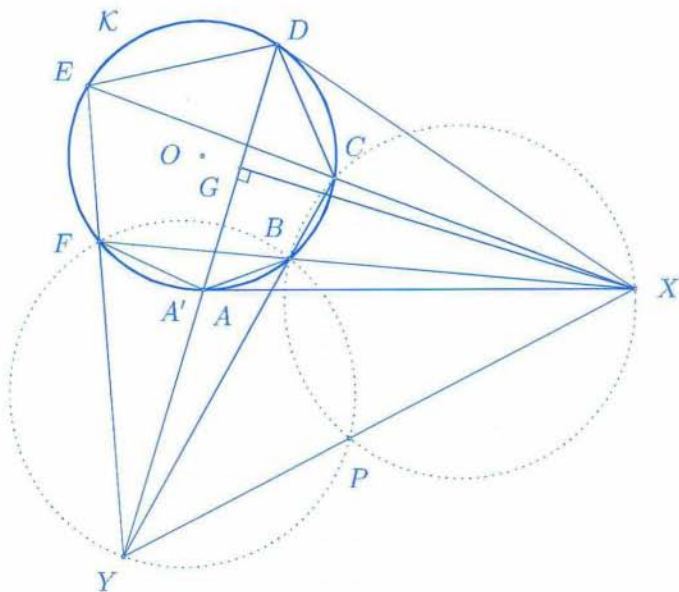
Število $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} = nm - x_n - x_{n-1} = (n-1)m - x_{n-1}$ je deljivo z $n-2$, zato je

$$x_{n-1} \equiv m(n-1) \equiv m \pmod{(n-2)}.$$

Sedaj pa podobno kot zgoraj sklepamo, da mora biti $x_{n-1} = m$, saj bi v nasprotnem imeli $x_{n-1} \geq m + (n-2) > n$ ali $x_{n-1} \leq m - (n-2) < 1$, saj je $n \geq 5$.

Ker smo dokazali, da mora biti $x_n = x_{n-1}$, števila $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne tvorijo permutacije števil $1, 2, \dots, n$, saj niso vsa različna.

II/2. Označimo središče krožnice $\mathcal{K}$ z O , presečišče premic BF , CE in tangent skozi A in D pa z X . Če je $BC \parallel EF$, je $BC \perp OX$ in $EF \perp OX$. Ker je $AD \perp OX$, so premice BC , EF in AD vzporedne.



Naj sedaj premici BC in EF ne bosta vzporedni. Označimo presečišče premic BC in EF z Y , drugo presečišče premice DY s krožnico $\mathcal{K}$ pa z A' . Dokazati moramo, da je $A' = A$. Označimo pravokotno projekcijo točke X na premico DY z G , presečišče trikotniku BCX očrtane krožnice s premico XY pa s P .

S koti enostavno preverimo, da je štirikotnik $YPBF$ tetiven. (Lahko pa tudi opazimo, da je točka B pravzaprav Miquelova točka trikotnika YXE ter izbranih točk P , C in F na njegovih stranicah.) Po izreku o potenci točke na krožnico lahko zapišemo

$$\begin{aligned} |XP| \cdot |XY| &= |XB| \cdot |XF| = |XD|^2 \text{ in} \\ |YP| \cdot |YX| &= |YB| \cdot |YC| = |YA'| \cdot |YD|. \end{aligned}$$

Ko seštejemo gornji enačbi, dobimo $|XY|^2 = |XD|^2 + |YA'| \cdot |YD|$, kar lahko zapišemo v obliki $|XY|^2 - |XD|^2 = |YA'| \cdot |YD|$. Ker je $GX \perp DY$, lahko zapišemo $|XY|^2 = |GY|^2 + |GX|^2$ in $|XD|^2 = |GD|^2 + |GX|^2$. Torej je

$$|XY|^2 - |XD|^2 = (|GY| + |GD|)(|GY| - |GD|) = |YD| \cdot (|GY| - |GD|).$$

Ker pa je $|XY|^2 - |XD|^2 = |YA'| \cdot |YD|$, iz gornjih enačb sledi $|YA'| = |GY| - |GD|$ in zato $|GA'| = |GD|$. Točka G je tako razpolovišče tetive DA' in je $OG \perp DA'$. Torej so točke O , G in X kolinearne in sta si točki D in A' simetrični glede na premico OX . Ker sta si tangentni točki A in D tudi simetrični glede na premico OX , je zato $A' = A$.

II/3. Dokazimo, da je ustrezen način en sam: v vsa polja vpišemo 1. Trditev bomo dokazali s protislovjem. Naj bo n najmanjše število, za katerega obstaja ustrezna tabela $A = [a_{ij}]$ razsežnosti $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$, v kateri smo zapisali vsaj eno število -1 .

Če i -ta vrstica tabele A ni simetrična glede na srednje polje, tvorimo novo tabelo $B = [b_{ij}]$, kjer je

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{če je } j = 2^{n-1} \\ a_{ij}a_{i(2^n-j)}, & \text{če je } j \neq 2^{n-1}. \end{cases}$$

V tabeli B je sedaj i -ta vrstica simetrična glede na srednje polje. Ko postopek ponovimo za vse nesimetrične vrstice, dobimo po vrsticah simetrično tabelo, ki ima še vedno lastnost, da je število v vsakem polju produkt števil v sosednjih poljih. V vsaj eni vrsti imamo število -1 , saj bi sicer bile vse vrstice že v tabeli A simetrične glede na srednje polje. Torej lahko privzamemo, da je tabela simetrična po vrsticah.

Podobno lahko privzamemo, da je tabela simetrična tudi po stolpcih.

Naj bo torej A tabela razsežnosti $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$, v kateri imamo vsaj eno število enako -1 , vsaka vrstica in vsak stolpec tabele pa je simetričen na srednje polje. Oglejmo si srednjo vrstico te tabele. Če je prvi element te vrstice enak 1 , so vsi elementi v tej vrstici enaki 1 . Če pa je prvi element te vrstice enak -1 , mora biti vrstica oblike $-1, -1, 1, -1, -1, 1, \dots, 1, -1, -1$. Torej je v vrstici $2 \pmod{3}$ števil. Slednje pa ni možno, saj je $2^n - 1 \not\equiv 2 \pmod{3}$. Podobno sklepamo, da so tudi v srednjem stolpcu vsa števila enaka 1 .

Ko iz tabele izrežemo srednjo vrstico samih enic in srednji stolpec samih enic, dobimo štiri manjše tabele razsežnosti $(2^{n-1} - 1) \times (2^{n-1} - 1)$. V vsaj eni izmed njih (recimo A') je vsaj en element enak -1 . Ker pa smo ob robu tabele A' imeli pas samih enic, je tudi v tabeli A' vsako število produkt števil v sosednjih poljih. Torej bi lahko n zmanjšali, kar pomeni, da je že na začetku bil $n = 2$. V tem primeru pa imamo tabelo 3×3 , pri kateri sta srednja vrstica in srednji stolpec enaka $1, 1, 1$. Torej so vsi elementi enaki 1 .

Skratka, pokazali smo, da nas privzetek, da imamo v tabeli vsaj eno število enako -1 , vodi v protislovje.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, šolsko leto 2002/03, številka 3, strani 129–192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosen (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2002/03 je za posamezne naročnike **3.300 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.700 SIT**, posamezna številka **825 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, transakcijski račun številka 03100-1000018787.

List sofinancira MŠZŠ

Založilo DMFA – založništvo

Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1519

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Slovenska olimpijska ekipa na 33. mednarodni fizikalni olimpiadi na Baliu v Indoneziji.

Od leve proti desni: Jure Bajc, Gašper Žerovnik (pohvala), Davorin Učakar, Matjaž Humar (pohvala), Andraž Stožer (pohvala), Matija Perne (zlata medalja), Ciril Dominko.



Ekipa Slovenije na 43. mednarodni matematični olimpiadi v Glasgowlu.

Od leve proti desni: Matjaž Željko (vodja ekipe), Erik Štrumbelj (pohvala), Tine Porenta, Tone Gradišek, Aleksandra Franc, Janez Šter, Klemen Šivic (bronasta medalja) in Gregor Dolinar (član mednarodne tekmovalne komisije).

