

30 (2002 – 03)

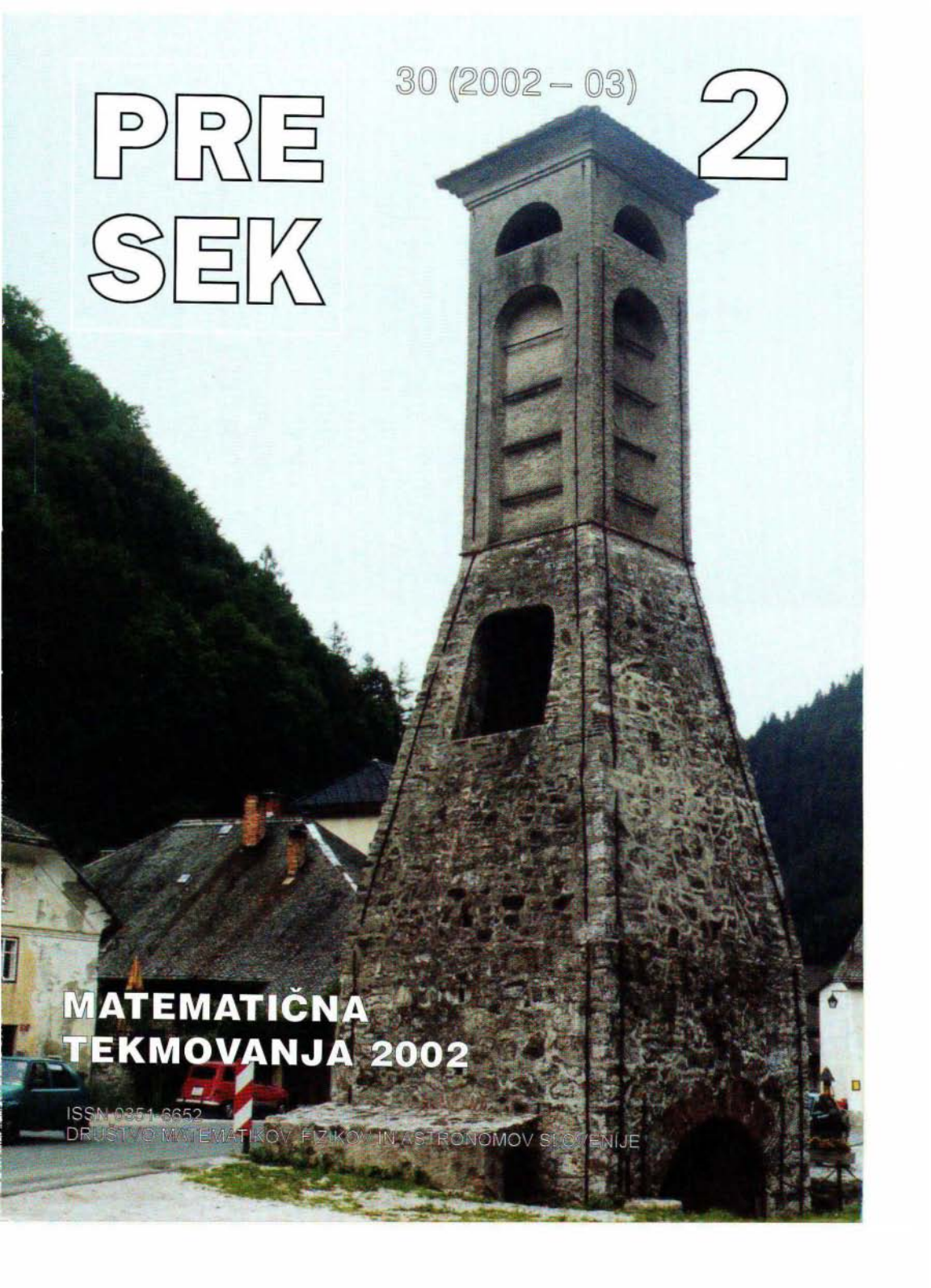
2

PRE SEK

**MATEMATIČNA
TEKMOVANJA 2002**

ISSN 0354-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE





list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, leto 2002/03, številka 2, strani 65–128

VSEBINA**EVROPSKI
MATEMATIČNI
KENGURU**

Pripravili Gregor Dolinar, Darjo Felda in Matjaž Željko	
Naloge za 2. razred osnovne šole	66-67
Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole	67-70
Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole	70-73
Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole	73-76
Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A ...	76-79
Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A ...	80-83
Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija B ...	83-84
Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija B ...	84-85
Naloge za vse letnike srednje šole, kategorija C	85
Rešitve nalog	86

**TEKMOVANJE
ZA VEGOVO
PRIZNANJE**

Pripravil Aleksander Potočnik	
Področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje ...	87-91
Rešitve nalog s področnega tekmovanja	91-92
Državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje	92-93
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	93-94

**TEKMOVANJE
DIJAKOV
SREDNJIH
POKLICNIH
ŠOL**

Pripravili Dušanka Vrenčur in Anja Jesenek	
Regijsko tekmovanje	95-97
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	97-98
Državno tekmovanje	98-100
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	100

**TEKMOVANJE
DIJAKOV
SREDNJIH
TEHNIŠKIH IN
STROKOVNIH
ŠOL**

Pripravili Sonja Perko, Polonca Pavlič, Irena Pivko, Iztok Leskovar in Andreja Leskovar	
Regijsko tekmovanje	101-106
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	106-109
Državno tekmovanje	110-112
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	112-115

**MATEMATIČNO
TEKMOVANJE
SREDNJEŠOLCEV
SLOVENIJE**

Pripravil Matjaž Željko	
Izbirno tekmovanje	116-117
Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja	118-121
Državno tekmovanje	122-124
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	124-128

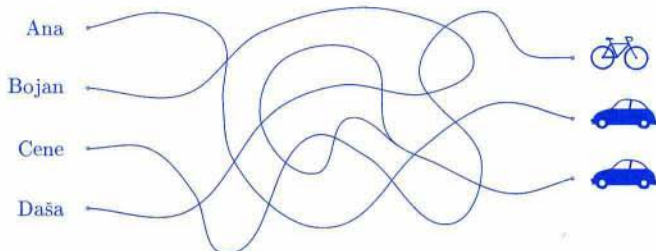
NA OVITKU

Stari plavž v Železnikih so si ogledali tudi udeleženci 46. ma- tematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije (foto Marija Vencelj)	I
Te tekmovalce je gostila starodavna Škofja Loka (zgoraj, foto Marija Vencelj), 2. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol pa je bilo na Srednji šoli za gostinstvo in turi- zem v Celju (spodaj, sliko je prispevala šola)	II
2. tekmovanje dijakov srednjih poklicnih šol je potekalo v Novi Gorici, mestu vrtnic (foto Vladimir Bensa)	III, IV

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

Naloge za 2. razred osnovne šole

1. Ana, Bojan, Cene in Daša so šli na sprehod. Kdo se je sprehodil do kolesa?



- (A) Ana (B) Bojan (C) Cene
(D) Daša (E) Nihče izmed njih.

2. Samo en račun je pravilen. Kateri?

- (A) $5 + 7 - 2 = 11$ (B) $6 + 7 - 2 = 11$ (C) $9 + 3 - 0 = 11$
(D) $3 + 7 - 1 = 11$ (E) $8 + 4 - 2 = 11$

3. Katere število prebereš?

DVESTO DVAINDEVETDESET

- (A) 229 (B) 292 (C) 922 (D) 20029 (E) 20092

4. Hana je zbirala barvne svinčnike. Imela je 32 rumenih, 13 rdečih, 23 modrih, 9 oranžnih in 19 zelenih svinčnikov. Katerih je imela največ?

- (A) rumenih (B) rdečih (C) modrih
(D) oranžnih (E) zelenih

5. Kenguru je za rojstni dan od svojih prijateljev dobil 10 barvic, 3 slikanice, 4 žoge, 1 kapo, 3 balone in 2 čokoladi. Koliko stvari je dobil?

- (A) 15 (B) 17 (C) 20 (D) 23 (E) 27

6. Tevž stanuje v ulici, kjer so hiše oštevilčene s številkami od 1 do 22. Kolikokrat je na hišnih številkah zapisana številka 2?

- (A) dvakrat (B) štirikrat (C) petkrat
(D) šestkrat (E) osemkrat

7. Tina ima 2 leti. Njen brat Blaž ima dvakrat toliko let kot Tina. Njuna sestra Katja ima toliko let kot Tina in Blaž skupaj. Koliko let ima Katja?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Žan je imel 12 kroglic in 12 barvnih trakov. Izdeloval je novoletne okraske. Za vsak okrasek je porabil 2 kroglici in 3 barvne trakove. Največ koliko okrasov je naredil?

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 12 (E) 24

9. Na kateri sliki je narisana trikotnik?

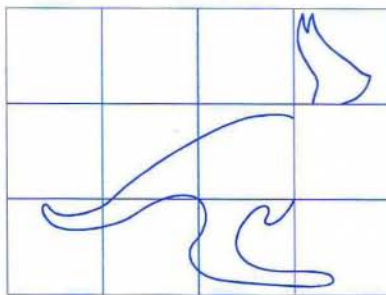
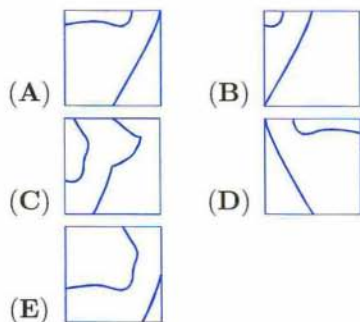


10. Luka, Nina, Blaž in Špela so tekmovali v teku na 100 m. Nina je pritekla na cilj pred Lukom in za Blažem. Špela je pritekla na cilj pred Blažem. Kdo je prvi pritekla na cilj?

- (A) Luka (B) Nina (C) Blaž
(D) Špela (E) Nemogoče je določiti.

Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole

1. Katerega od koščkov smo vzeli s slike?



2. Koliko dobimo, če izračunamo $2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2$?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 12 (E) 20

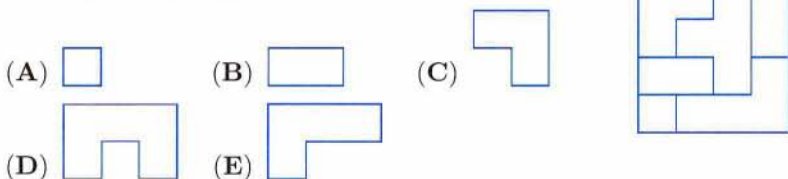
3. Naloge za 2. razred osnovne šole, naloga 5.

4. Na levi strani tehtnice je 6 pomaranč, na desni pa sta 2 meloni. Če na levo stran položimo še 1 melono, bo tehtnica v ravnotežju. Koliko tehta 1 melona?



- (A) enako kot 2 pomaranči (B) enako kot 3 pomaranče
(C) enako kot 4 pomaranče (D) enako kot 5 pomaranč
(E) enako kot 6 pomaranč

5. Katerega od spodnjih likov ni v desnem kvadratu?



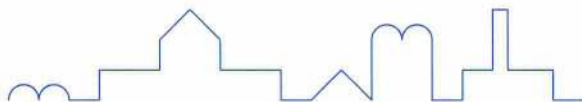
6. Človeško srce utripne približno 70-krat v eni minuti. Približno kolikokrat utripne v eni uri?

- (A) 420-krat (B) 700-krat (C) 4200-krat
(D) 7000-krat (E) 42000-krat

7. Tevž stanuje v ulici, kjer so hiše oštevilčene s števkami od 1 do 24. Kolikokrat je na hišnih številkah zapisana številka 2?

- (A) dvakrat (B) štirikrat (C) osemkrat
(D) šestnajstkrat (E) dvaintridesetkrat

8. V daljavi vidimo obris gradu (glej desno sliko). Katera od spodnjih črt ni del obrisa?



- (A) (B) (C) (D) (E)

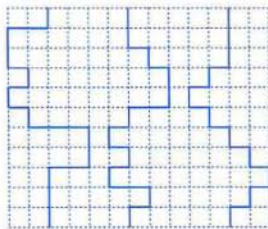
9. Koliko dobimo, če številu 17 najprej prištejemo najmanjše dvomestno število, nato pa dobljeno vsoto delimo z največjim enomestnim številom?

- (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 11 (E) 27

10. Jasna, Vesna, Ajda in Ela so se rodile 1. marca, 20. marca, 17. maja in 20. julija, ne nujno v tem vrstnem redu. Vesna in Ajda sta se rodili istega meseca, Jasna in Ajda pa istega dne v mesecu. Katera od deklet se je rodila 17. maja?

- (A) Jasna (B) Vesna (C) Ajda
(D) Ela (E) Nemogoče je določiti.

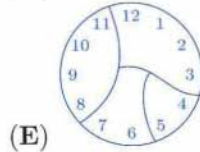
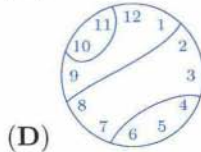
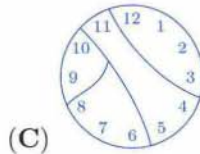
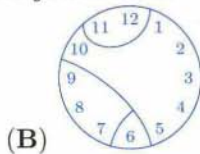
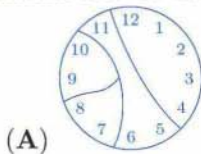
11. Kenguruji Anže, Aljaž in Aljoša so tekmovali, kdo bo prvi prišel na drugo stran parka. Začeli so hkrati, vsi so skakali z enako hitrostjo, vsak pa je ubral svojo pot (glej sliko). Kaj se je zgodilo na drugi strani parka?



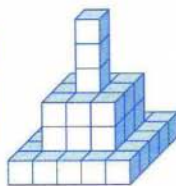
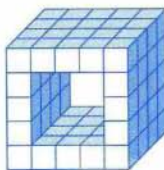
Anže Aljaž Aljoša

- (A) Aljaž je bil prvi.
(B) Aljoša je bil zadnji.
(C) Vsi trije so hkrati prišli na drugo stran parka.
(D) Anže in Aljoša sta hkrati prišla na drugo stran parka.
(E) Anže in Aljaž sta hkrati prišla na drugo stran parka.

12. Babičina ura je padla s stene in se razbila na štiri kose. Vnukinja Mateja je seštela števila na vsakem od kosov in ugotovila, da je dobila zaporedna števila. Katera ura je babičina?



13. Rok je iz vseh svojih kock napravil figuro z luknjo (glej levo sliko). Nato je figuro podrl in sestavil piramido brez lukenj (glej desno sliko). Koliko kock mu je ostalo?



- (A) 15 (B) 18 (C) 22 (D) 29 (E) 34

14. Na taborjenju prijatelji Tadej, Jan, Dejan in Matic vsak dan skupaj večerjajo za isto mizo. Tadej vedno sedi na istem mestu. Na koliko različnih načinov lahko prijatelji sedijo za mizo?

- (A) na 3 (B) na 4 (C) na 6 (D) na 24 (E) na 25

15. Na matematičnem tekmovanju se je zbralo 28 učencev. Število tekmovalcev, ki so bili slabši od Nejca, je bilo dvakrat večje od števila tekmovalcev, ki so bili boljši od Nejca. Na katero mesto se je uvrstil Nejc?

- (A) na osmo (B) na deveto (C) na deseto
(D) na šestnajsto (E) na sedemnajsto

Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole

1. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 8.

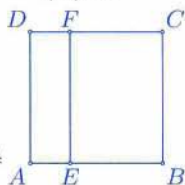
2. Število 2002 se prebere enako z leve in desne strani. Katero od naštetih števil nima te lastnosti?

- (A) 1001 (B) 1991 (C) 2112 (D) 2222 (E) 2323

3. Oče kenguru in mama kengurujka imata 3 hčere kengurujke, vsaka od hčera pa ima 2 brata kenguruja. Koliko članov ima družina?

- (A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 11

4. Stranica kvadrata $ABCD$ meri 10 cm, krajša stranica pravokotnika $AEFD$ pa 3 cm. Za koliko centimetrov je obseg kvadrata $ABCD$ večji od obsega pravokotnika $AEFD$?



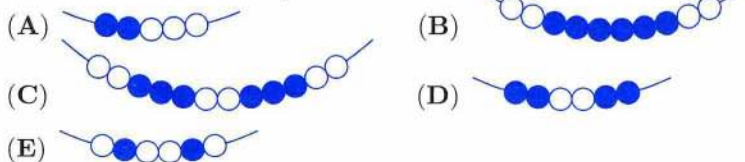
- (A) za 4 (B) za 6 (C) za 7 (D) za 10 (E) za 14

5. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 9.

6. Denis je en dan po svojem rojstnem dnevu dejal: "Pojutrišnjem bo četrtek." Kdaj je imel Denis rojstni dan?

- (A) v ponedeljek (B) v torek (C) v sredo
(D) v četrtek (E) v petek

7. Na kateri od ogrlic sta $\frac{2}{3}$ biserov črni?



8. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 12.

9. Ploščina pravokotnika meri 1. Koliko meri ploščina trikotnika, ki ga dobimo, če povežemo razpolovišči sosednjih stranic?

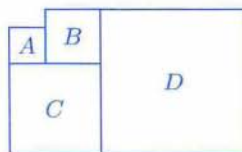
- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{2}{5}$

10. Tina gre zjutraj od doma ob 6.55 uri in pride v šolo ob 7.32 uri. Njena sošolka Urša pride v šolo ob 7.45 uri, čeprav potrebuje za pot do šole 12 min manj kot Tina. Koliko je ura, ko gre Urša od doma?

- (A) 7.07 (B) 7.20 (C) 7.25 (D) 7.30 (E) 7.33

11. Liki A , B , C in D so kvadrati. Obseg kvadrata A je 16, obseg kvadrata B pa 24. Koliko meri obseg kvadrata D ?

- (A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 72 (E) 80



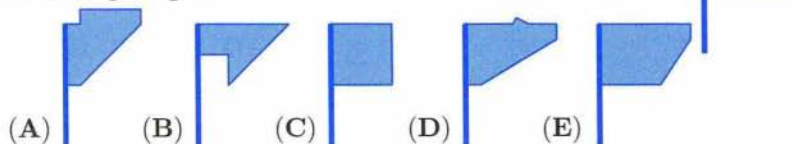
12. Nika, Kaja, Anja in Tjaša imajo doma mačko, psa, ribo in papigo, vendar ne nujno v tem vrstnem redu. Kajina žival ima dlake, Tjašina ima štiri tačke, Anja ima ptico, Nika in Kaja pa nimata mačke. Katera izjava ni pravilna?

- (A) Tjaša ima psa. (B) Anja ima papigo. (C) Nika ima ribo.
(D) Tjaša ima mačko. (E) Kaja ima psa.

13. Na avtomobilskem števcu, ki meri prevožene kilometre, je izpisano število 187569. Po koliko kilometrih se bo na števcu naslednjič izpisalo število, sestavljeno iz samih različnih števk?

- (A) po 1 (B) po 21 (C) po 431 (D) po 12431 (E) po 13776

14. Tinkara je skozi okno opazovala obris zastave, ki je plapolala v vetru. Katerega od obrisov ni mogla videti, če se zastava ni pretrgala?



15. Maja in Maša sta imeli skupaj 60 vžigalic. Najprej je Maja napravila trikotnik, ki je imel vsako stranico sestavljeno iz 6 vžigalic, nato pa je Maša iz vseh preostalih vžigalic napravila pravokotnik, ki je imel dve stranici dolgi po 6 vžigalic. Koliko vžigalic je Maša uporabila za vsako od drugih dveh stranic pravokotnika?

- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 30

16. Čarovnik Miha ima v svojem klobuku 14 sivih, 8 belih in 6 črnih zajcev. Najmanj koliko zajcev mora na slepo potegniti iz klobuka, da bo prepričan, da je iz klobuka potegnil vsaj enega zajca vsake barve?

- (A) 9 (B) 15 (C) 21 (D) 22 (E) 23

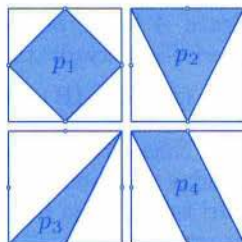
17. Koliko je razlika med največjim trimestnim številom, sestavljenim iz samih različnih števk, in najmanjšim trimestnim številom, sestavljenim iz samih različnih števk?

- (A) 100 (B) 800 (C) 864 (D) 885 (E) 899

18. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 15.

19. V štirih enako velikih kvadratih so označena razpolovišča stranic, ploščine osenčenih delov pa so označene s p_1 , p_2 , p_3 in p_4 . Kaj velja?

- (A) $p_3 < p_4 < p_1 = p_2$ (B) $p_3 < p_1 = p_2 = p_4$
 (C) $p_3 < p_1 = p_4 < p_2$ (D) $p_3 < p_4 < p_1 < p_2$
 (E) $p_4 < p_3 < p_1 < p_2$



20. Pladnji A , B in C so urejeni po naraščajoči teži. Kam moramo postaviti pladenj X ?



- (A) med A in B (B) med B in C (C) pred A
 (D) za C (E) C in X tehtata enako.

21. Računalniški virus briše podatke s trdega diska. Prvi dan izbriše $\frac{1}{2}$ podatkov, drugi dan $\frac{1}{3}$ preostalih podatkov in tretji dan $\frac{1}{4}$ podatkov, ki so še ostali po drugem dnevu. Kolikšen del prvotnih podatkov ostane na disku?

- (A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{4}$

22. Koliko je največja možna vsota števk vsote števk trimestnega števila?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 18 (E) 27

23. Vsaka od mejnih ploskev kocke je druge barve. Ana, Meta in Aleša so si po vrsti ogledale kocko iz različnih smeri. Vsaka je povedala, katere barve je videla, ne da bi obračala kocko. Ana je videla modro, belo in rumeno, Meta je videla črno, modro in rdečo, Aleša pa je videla zeleno, črno in belo. Kakšna je ploskev nasproti beli ploskvi?

- (A) rdeča (B) modra (C) črna (D) zelena (E) rumena

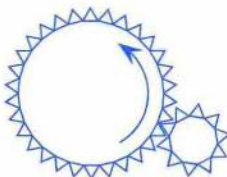
24. V kroge bi radi razporedili števila od 1 do 7 tako, da bodo vsote treh števil na vsaki ravni črti enake. Kaj velja?



- (A) Števil tako ne moremo razporediti.
- (B) Števila lahko razporedimo na en sam način.
- (C) Za število v srednjem krogu imamo dve možni izbiri.
- (D) Za število v srednjem krogu imamo tri možne izbire.
- (E) V srednji krog lahko postavimo katerokoli število od 1 do 7.

Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole

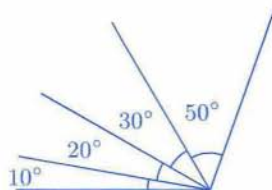
1. V stroju sta dve zobati kolesi, polmer večjega kolesa je trikrat večji od polmera manjšega kolesa (glej sliko). Kaj se zgodi z manjšim kolesom, če se večje kolo enkrat zavrti v nasprotni smeri urinega kazalca?



- (A) Enkrat se zavrti v smeri urinega kazalca.
- (B) Trikrat se zavrti v smeri urinega kazalca.
- (C) Trikrat se zavrti v nasprotni smeri urinega kazalca.
- (D) Devetkrat se zavrti v smeri urinega kazalca.
- (E) Devetkrat se zavrti v nasprotni smeri urinega kazalca.

2. Koliko različno velikih kotov, ki so manjši od 180° , je na sliki?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 11



3. Kateri izraz ima največjo vrednost?

- (A) $10 \cdot 0.001 \cdot 100$ (B) $0.01 : 100$ (C) $100 : 0.01$
 (D) $10000 \cdot 100 : 10$ (E) $0.1 \cdot 0.01 \cdot 10000$

4. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 13.

5. Kateri od naštetih ulomkov je največji?

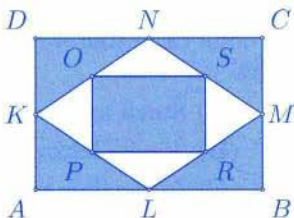
- (A) $\frac{7}{8}$ (B) $\frac{66}{77}$ (C) $\frac{555}{666}$ (D) $\frac{4444}{5555}$ (E) $\frac{33333}{44444}$

6. V angleškem kraju Newbury vzide sonce 1. julija ob 4.53 uri in zaide ob 21.25 uri. Koliko je ura na polovici časovnega intervala med sončnim vzhodom in zahodom?

- (A) 11.08 (B) 12.39 (C) 13.09 (D) 16.32 (E) 24.78

7. Točke K , L , M in N so razpolovišča stranic pravokotnika $ABCD$, točke O , P , R in S pa so razpolovišča stranic štirikotnika $KLMN$. Kolikšen del pravokotnika $ABCD$ je osenčen?

- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{5}{7}$
 (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{5}{6}$



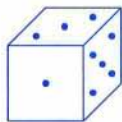
8. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 12.

9. Na zabavi so trije otroci skupaj pojedli 17 piškotov. Aleš je izmed vseh otrok pojedel največ piškotov. Najmanj koliko piškotov je pojedel Aleš?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

10. Kocka na sliki ima na spodnji ploskvi 6 pik, na levi ploskvi 4 pike in na zadnji ploskvi 2 pike. Koliko je največja vsota pik na treh ploskvah, ki imajo skupno oglišče?

- (A) 9 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15



11. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 14.

12. Jan potrebuje 2002 jajci. Vsaka od njegovih 23 kokoši znese vsak dan 1 jajce. Čez koliko dni bo Jan imel 2002 jajci in koliko jajc bo tistega dne še ostalo?

- (A) čez 87 dni 0 jajc (B) čez 87 dni 1 jajce (C) čez 88 dni 20 jajc
 (D) čez 88 dni 21 jajc (E) čez 88 dni 22 jajc

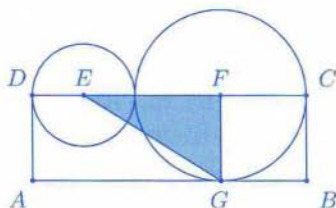
13. Koliko je $\frac{a-b}{b-c}$, če je $\frac{a}{b} = \frac{9}{4}$ in $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$?

- (A) $\frac{7}{12}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{25}{8}$
 (D) $\frac{4}{1}$ (E) Nemogoče je določiti.

14. Ladja je s samotnega otoka rešila 30 brodolomcev. Pred tem je bilo na ladji dovolj zalog hrane še za 60 dni plovbe, potem pa samo še za 50 dni plovbe. Koliko ljudi je bilo na ladji, preden je rešila brodolomce?

- (A) 15 (B) 40 (C) 110 (D) 140 (E) 150

15. Dan je pravokotnik $ABCD$ s ploščino 15. Krožnici s središčema E in F na stranici CD se dotikata, krožnica s središčem F se dotika tudi stranice AB v točki G ter stranice BC v točki C . Krožnica s središčem E se dotika stranice AD v točki D (glej sliko). Koliko meri ploščina osenčenega trikotnika?



- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{15}{4}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{5}$ (E) 5

16. Na tehtnico sta hkrati stopili po dve izmed petih deklet. Pri vseh različnih kombinacijah dvojic deklet je tehtnica pokazala 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg in 101 kg. Koliko kilogramov tehta pet deklet skupaj?

- (A) 225 (B) 230 (C) 239 (D) 240 (E) 250

17. Polona, Barbara, Neja in Sara so se lovile po stanovanju. Med prerivanjem je ena razbila vazo. Oče jih je vprašal, katera je razbila vazo. Dekleta so odgovorila:

Polona: "Jaz je nisem."

Barbara: "Jaz je nisem."

Neja: "Sara jo je."

Sara: "Barbara jo je."

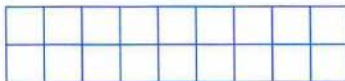
Oče je ugotovil, da je lagala natanko ena. Katera?

- (A) Polona (B) Barbara (C) Neja
(D) Sara (E) Nemogoče je določiti.

18. V Kanadi del prebivalcev govori samo angleško, del samo francosko, del pa oba jezika. Angleško govori 85 %, francosko pa 75 % prebivalcev. Koliko odstotkov prebivalcev Kanade govori oba jezika?

- (A) 25 (B) 40 (C) 50 (D) 57 (E) 60

19. Na pravokotno mrežo velikosti 2×9 smo položili kovance tako, da velja: na kvadratku mreže je kovanec ali pa kvadrater skupno stranico s kvadratom, na katerem je kovanec. Najmanj koliko kovancev je na mreži?

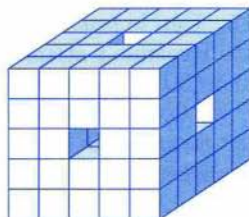


- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

20. Nekega meseca so bile tri nedelje na sode datume. Kateri dan v tednu je bil 20. tega meseca?

- (A) ponedeljek (B) torek (C) sredo
(D) četrtek (E) sobota

21. Skozi kocko velikosti $5 \times 5 \times 5$, sestavljeno iz kock velikosti $1 \times 1 \times 1$, smo izvrtali tri luknje velikosti $1 \times 1 \times 5$ (glej sliko). Dobljeno telo smo potopili v barvo. Koliko malih kock ima pobarvano natanko eno ploskev?



- (A) 24 (B) 26 (C) 30 (D) 40 (E) 48

22. Neža se je iz Trente s kolesom odpeljala na Vršič. Navzgor je peljala s hitrostjo 12 km/h, nazaj v Trento pa s hitrostjo 20 km/h. Koliko kilometrov je iz Trente do Vršiča, če je Neža za pot navzdol potrebovala 16 min manj kot za pot navzgor?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 20

23. Največ koliko različnih presečišč imajo lahko tri premice in dve krožnici?

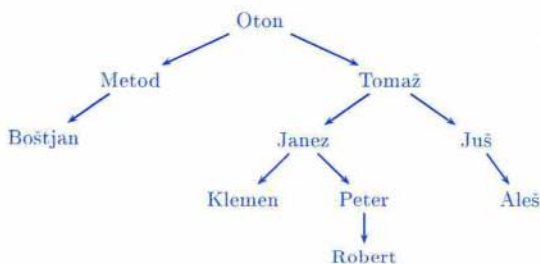
- (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

24. Na košarkarskem turnirju je sodelovalo 32 moštev. V vseh kolih, z izjemo zadnjega, so bila moštva razdeljena v skupine po štiri. Vsako moštvo je igralo eno tekmo z vsakim moštvom v svoji skupini. Zadnji dve moštvi v vsaki skupini sta izpadli, prvi dve pa sta se uvrstili v naslednje kolo. V zadnjem kolu sta preostali dve moštvi igrali za zmago. Koliko tekem je bilo odigranih na turnirju?

- (A) 49 (B) 89 (C) 91 (D) 97 (E) 181

Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A

1. Na družinskem drevesu puščice kažejo od očeta k sinu. Kako je ime sinu od brata starega očeta od brata Robertovega očeta?



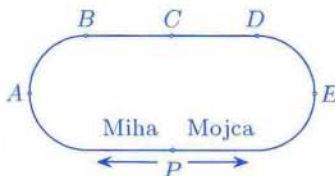
- (A) Aleš (B) Tomaž (C) Klemen (D) Boštjan (E) Oton

2. Računalniški virus briše podatke s trdega diska. Prvi dan izbriše $\frac{1}{2}$ podatkov, drugi dan $\frac{1}{3}$ preostalih podatkov, tretji dan $\frac{1}{4}$ podatkov, ki so še ostali po drugem dnevu, in četrti dan $\frac{1}{5}$ podatkov, ki so še ostali po tretjem dnevu. Kolikšen del prvotnih podatkov ostane na disku?

- (A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{5}$

3. Miha teče trikrat hitreje kot Mojca. Teči sta začela hkrati iz točke P , vendar v nasprotnih smereh (glej sliko). V kateri točki na tekaški stezi sta se srečala?

- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E



4. Na zabavi je šest otrok skupaj pojedlo 20 piškotov. Barbara je pojedla 1 piškot, Nataša 2 piškota in Simona 3 piškote. Aleš je izmed vseh otrok pojedel največ piškotov. Najmanj koliko piškotov je pojedel Aleš?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

5. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 17.

6. V trgovini prodajajo sadje le v košaricah po 1 kg: košarica kivija stane 2 evra, košarica grozdja 3 evre in košarica jagod 4 evre. Nataša ima 23 evrov in bi rada kupila 8 kg sadja. Največ koliko kilogramov jagod lahko kupi, če naj porabi ves denar?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

7. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 24.

8. Stari grad je poln miši, 25 % miši je belih, 75 % pa črnih. Sive oči ima 50 % belih in 20 % črnih miši, skupaj ima sive oči 99 miši. Koliko miši živi v gradu?

- (A) 99 (B) 240 (C) 340
(D) 360 (E) Nemogoče je določiti.

9. Ena od mejnih ploskev telesa je petkotnik. Najmanj koliko mejnih ploskev ima to telo?

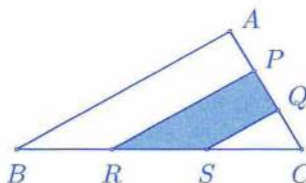
- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10

10. Število M je zmnožek prvih 2002 praštevil. Koliko ničel je na koncu števila M ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 10 (D) 20 (E) 100

11. Trikotnik ABC ima ploščino 1. Na straneh trikotnika označimo točke P , Q , R in S tako, da velja $|AP| = |PQ| = |QC|$ in $|BR| = |RS| = |SC|$. Koliko meri ploščina osenčenega lika?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

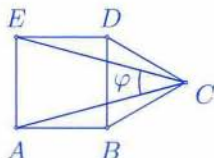


12. S šolskega plesa je najprej odšlo 15 deklet. Ostalo je dvakrat več fantov kot deklet. Nato je s plesa odšlo 45 fantov in ostalo je petkrat več deklet kot fantov. Koliko deklet je prišlo na ples?

- (A) 20 (B) 25 (C) 35 (D) 40 (E) 75

13. Štirikotnik $ABDE$ je kvadrat, trikotnik BCD pa je enakostraničen. Koliko meri kot φ ?

- (A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 90°

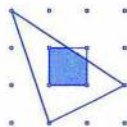


14. Kadar tekoče stopnice ne delujejo, hodi Leon iz pritličja v prvo nadstropje 90 sekund, kadar pa Leon stoji na tekočih stopnicah, ki delujejo, potrebuje 60 sekund. Koliko sekund potrebuje, da pride v prvo nadstropje, če hodi po tekočih stopnicah, kadar delujejo?

- (A) 30 (B) 36 (C) 45 (D) 50 (E) 75

15. V kvadratni mreži je razdalja med sosednjima točkama enaka 1. Koliko meri ploščina osenčenega lika?

- (A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{9}{10}$ (C) $\frac{11}{12}$ (D) $\frac{14}{15}$ (E) $\frac{15}{16}$

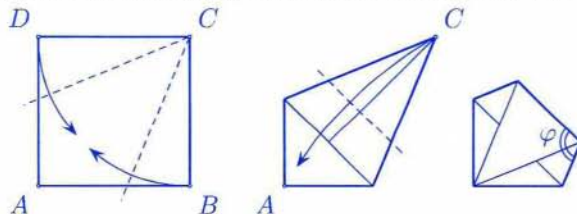


16. Dan pred svojim rojstnim dnevom je Klemen dejal: "Če bi bila včeraj sredo, bi bil čez 72 ur tisti dan v tednu, ki bo pojutrišnjem." Kdaj je imel Klemen rojstni dan?

- (A) v ponedeljek (B) v četrtek (C) v petek
(D) v soboto (E) v nedeljo

17. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 23.

18. Na kvadratnem kosu papirja označimo oglišča z A , B , C in D .



Najprej papir prepognemo tako, da prideta oglišči B in D v isto točko in da ležita stranici BC in CD na diagonali AC . Nato list še enkrat prepognemo tako, da pride oglišče C v točko A . Koliko meri kot φ ?

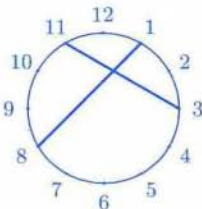
- (A) 104° (B) 106.5° (C) 108° (D) 112.5° (E) 114.5°

19. Dolžine stranic pravokotnika z obsegom 32 so naravna števila. Koliko lahko meri njegova ploščina?

- (A) 24 (B) 48 (C) 76 (D) 192 (E) 384

20. Potres je povzročil dve ravni razpoki na grajski uri. Prva poteka od 1 do 8, druga pa od 3 do 11. Kolikšen kot oklepata?

- (A) 70° (B) 75° (C) 80° (D) 85° (E) 90°



21. Dolžine robov tristrane piramide $ABCD$ so $|AB| = 9$, $|BC| = 12$, $|CA| = 8$, $|AD| = 6$, $|BD| = 12$ in $|CD| = 4$. Koliko parov podobnih trikotnikov je med mejnimi ploskvami piramide?

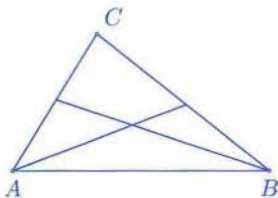
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

22. Andraž vedno laže. Nekega dne je sosedu Filipu dejal: "Vsaj eden izmed naju nikoli ne laže." Kaj vemo?

- (A) Filip vedno laže. (B) Filip ne govori vedno resnice.
(C) Filip vedno govori resnico. (D) Filip ne laže vedno.
(E) Filip vedno molči.

23. Trikotnik ABC razdelimo na štiri dele. Ali je mogoče, da so vsi štirje deli ploščinsko enaki?

- (A) Ne.
(B) Da, vendar samo za enakostranični trikotnik.
(C) Da, vendar samo za pravokotni trikotnik.
(D) Da, vendar samo za topokotni trikotnik.
(E) Da, vendar samo za ostrokotni trikotnik.



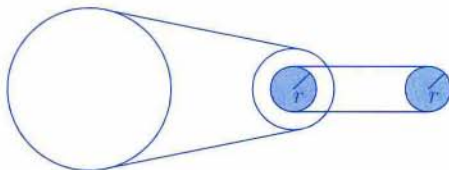
24. Imenujmo *trikot* množico treh točk, ki ne ležijo na isti premici, ena izmed treh točk pa je od ostalih dveh točk enako oddaljena. Koliko *trikotov* je na sliki?

- (A) 6 (B) 18 (C) 20 (D) 30 (E) 36



Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A

1. Veliko kolo naredi 100 obratov v eni minuti, majhno kolo pa 200 obratov v eni minuti. Koliko obratov v eni minuti naredi srednje kolo?



- (A) 100 (B) 150 (C) 175
(D) 200 (E) Nemogoče je določiti.

2. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 9.

3. Hotel je v treh poletnih mesecih zaseden 88-odstotno, v preostalih mesecih pa 44-odstotno. Koliko odstotna je povprečna zasedenost v vsem letu?

- (A) 44 (B) 55 (C) 66 (D) 90 (E) 111

4. Največji skupni delitelj naravnih števil a in b je 3. Koliko je zmnožek ab , če je $\frac{a}{b} = 0.4$?

- (A) 10 (B) 18 (C) 30 (D) 36 (E) 90

5. Prizma ima 2002 oglišči. Koliko robov ima?

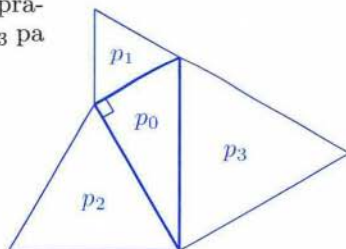
- (A) 1001 (B) 2001 (C) 2002 (D) 3003 (E) 4002

6. Ko voda zmrzne, se njena prostornina poveča za $\frac{1}{11}$ prvotne prostornine. Za kolikšen del prostornine ledu se zmanjša prostornina, ko se led stopi?

- (A) za $\frac{1}{14}$ (B) za $\frac{1}{13}$ (C) za $\frac{1}{12}$ (D) za $\frac{1}{11}$ (E) za $\frac{1}{10}$

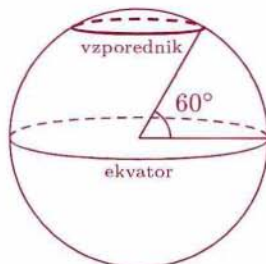
7. Trikotnik, katerega ploščina je p_0 , je pravokoten, trikotniki s ploščinami p_1 , p_2 in p_3 pa so enakostranični (glej sliko). Kaj velja?

- (A) $p_1 + p_2 = p_3$
(B) $p_1^2 + p_2^2 = p_3^2$
(C) $p_1 + p_2 + p_3 = 3p_0$
(D) $p_1 + p_2 = \sqrt{2}p_3$
(E) $p_1 + p_2 + p_3 = \sqrt{3}p_0$



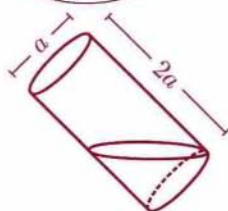
8. Ekvator meri približno 40000 km. Koliko kilometrov meri vzporednik na 60° geografske širine (do 100 km natančno)?

- (A) 23500 (B) 26700 (C) 30000
(D) 34600 (E) drugo



9. V kozarec, ki ima obliko valja in je nagnjen za 45° , natočimo vodo (glej sliko). Koliko odstotkov prostornine kozarca smo napolnili z vodo?

- (A) manj kot 25 (B) 25 (C) 33
(D) $33\frac{1}{3}$ (E) več kot $33\frac{1}{3}$



10. Na nogometnem turnirju je vsako od desetih moštev igralo z vsakim od ostalih moštev natanko eno tekmo. Za zmago je moštvo dobilo 3 točke, za poraz 0 točk, pri neodločenem izidu pa sta moštvi dobili vsako po 1 točko. Skupno število vseh doseženih točk na turnirju je bilo 130. Koliko tekem se je končalo z neodločenim izidom?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

11. Marko in njegov sin ter Janez in njegov sin so lovili ribe. Marko je ujel toliko rib kot njegov sin. Janez je ujel trikrat več rib kot njegov sin. Skupaj so ujeli 35 rib. Markovemu sinu je ime Luka. Kako je ime Janezovemu sinu?

- (A) Matej (B) Janez (C) Marko
(D) Luka (E) Nemogoče je določiti.

12. Iz kocke s prostornino 512 dm^3 smo izrezali kvader. Koliko kvadratnih decimetrov meri površina dobljenega telesa?

- (A) 320 (B) 336 (C) 384
(D) 468 (E) Nemogoče je določiti.

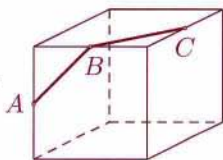


13. V podjetju so posodobili proizvodno linijo in zmanjšali stroške za 50 %. Nato so zamenjali dobavitelja surovin in zmanjšali stroške še za 40 %. Nazadnje so spremenili način pakiranja izdelkov in zmanjšali stroške še za 10 %. Za koliko odstotkov so se zmanjšali stroški v podjetju?

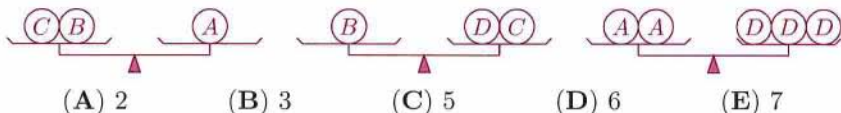
- (A) za 67 (B) za 73 (C) za 87 (D) za 92 (E) za 100

14. Točke A , B in C so razpolovišča robov kocke. Koliko meri kot med daljicama AB in BC ?

- (A) 90° (B) 100° (C) 110° (D) 120° (E) 135°



15. Koliko uteži C tehta toliko kot 1 utež B ?



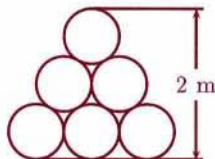
- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 7

16. Kenguru skače iz Bukarešte v Pariz. Njegov prvi skok je dolg 1 m, vsak naslednji pa je dvakrat daljši od predhodnega. Po koliko skokih bo kenguru najbližje Parizu, ki je od Bukarešte oddaljen 2500 km?

- (A) po 10 (B) po 11 (C) po 12 (D) po 20 (E) po 21

17. Na gradbišču je kup cevi enakih polmerov visok 2 m. Koliko metrov meri polmer cevi?

- (A) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (B) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ (C) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$
(D) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ (E) $1+\sqrt{3}$



18. Ahil in želva se približujeta mestu. Želva je 990 m pred Ahilom. Koliko časa bo potreboval Ahil, ki preteče 10 m v 1 s, da bo ujel želvo, ki preplazi 1 m v 10 s?

- (A) 1 min 39 s (B) 1 min 40 s (C) 1 min 50 s
(D) 990 s (E) Ahil ne bo nikoli ujel želve.

19. Vsak od členov nekega zaporedja, razen prvih dveh, je vsota vseh predhodnih členov. Vsi členi zaporedja so pozitivni, prvi člen je 1, enajsti člen pa 1000. Koliko je vrednost drugega člena tega zaporedja?

- (A) 2 (B) $\frac{93}{32}$ (C) $\frac{250}{64}$
(D) $\frac{109}{16}$ (E) Nemogoče je določiti.

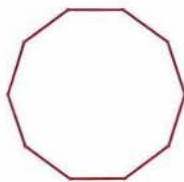
20. Na koliko različnih načinov lahko pobarvamo enakostranični trikotnik, ki je razdeljen na tri enake dele (glej sliko), s tremi od petih barv? Trikotnika na prvi in drugi sliki sta pobarvana na različna načina, trikotnika na prvi in tretji sliki pa na enak način.



- (A) 20 (B) 30 (C) $\frac{5^3}{3}$ (D) 60 (E) 125

21. Koliko trikotnikov, ki niso paroma skladni, ima oglišča v ogliščih pravičnega desetkotnika?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8
(D) 9 (E) 10



22. Koliko je vsota vseh štirimestnih števil, ki imajo štiri različne števke 1, 2, 3 in 4?

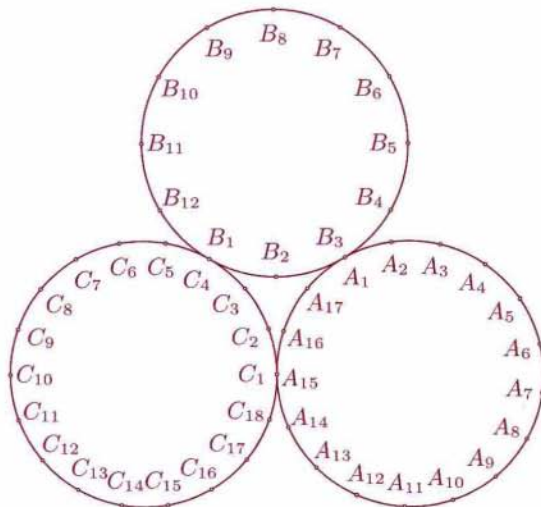
- (A) 55550 (B) 66660 (C) 98760 (D) 99990 (E) 100000

23. Če je $a + b + c = 7$ in $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$, koliko je $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$?

- (A) $\frac{9}{7}$ (B) $\frac{10}{7}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{17}{10}$ (E) $\frac{19}{10}$

24. Kovanec, ki je na začetku na točki A_1 , premikamo skladno z naslednjim pravilom: na kateremkoli koraku lahko kovanec premaknemo na točko, ki je oddaljena za dve mesti in je na isti krožnici. Dovoljeno zaporedje premikov je na primer $C_5 \rightarrow C_3 \rightarrow C_1 = A_{15} \rightarrow A_{13} \rightarrow A_{11} \rightarrow A_{13}$, ni pa na primer dovoljeno premakniti kovanca s točke C_2 na točko A_{16} . Koliko je takih točk, kamor nikoli ne moremo položiti kovanca?

- (A) 0 (B) 6 (C) 15 (D) 27 (E) 30



Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija B

1. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 1.
2. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 2.
3. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 3.

4. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 4.
5. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 17.
6. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 6.
7. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 24.
8. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 12.
9. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 9.
10. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 10.
11. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 11.
12. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 12.
13. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 13.
14. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 10.
15. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 14.
16. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 12.
17. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 2.
18. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 23.
19. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 18.
20. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 19.
21. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 18.
22. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 21.
23. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 22.
24. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 24.

Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija B

1. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 1.
2. Koliko je $\frac{a-b}{b-c}$, če je $\frac{a}{b} = \frac{9}{4}$ in $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$?
(A) $\frac{7}{12}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{25}{8}$
(D) $\frac{4}{1}$ (E) Nemogoče je določiti.
3. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 9.
4. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 2.
5. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 3.
6. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 4.
7. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 5.
8. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 13.

9. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 6.
10. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 7.
11. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 8.
12. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 14.
13. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 22.
14. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 12.
15. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 13.
16. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 16.
17. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 10.
18. Naloge za 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 18.
19. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 11.
20. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 15.
21. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 17.
22. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 18.
23. Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole, naloga 23.
24. Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategorija A, naloga 21.

Naloge za vse letnike SŠ, kategorija C

1. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 8.
2. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 2.
3. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 7.
4. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 6.
5. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 6.
6. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 9.
7. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 10.
8. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 11.
9. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 14.
10. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 20.
11. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 14.
12. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 3.
13. Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole, naloga 13.
14. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 17.
15. Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 10.

Rešitve nalog

2. razred OŠ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	B	A	D	D	E	B	D	D

3. in 4. razred OŠ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	C	D	E	D	C	C	C	A	D	E	C	B	C	C

5. in 6. razred OŠ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
C	E	B	E	A	A	D	C	A	B	C	A	B	B	C	E	D	C	B	A	E	B	A	D

7. in 8. razred OŠ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	C	D	B	A	C	D	A	C	C	C	E	C	E	B	C	D	E	A	D	A	A	D	C

1. in 2. letnik SŠ, kategorija A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	E	E	D	D	C	D	D	B	B	B	D	B	B	C	D	D	D	B	B	B	B	A	C

3. in 4. letnik SŠ, kategorija A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	B	B	E	D	C	A	E	B	E	C	C	B	D	C	E	B	B	B	A	C	B	E	B

1. in 2. letnik SŠ, kategorija B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	C	E	D	D	C	D	A	B	B	B	D	B	C	C	E	E	D	D	B	E	B	B	C

3. in 4. letnik SŠ, kategorija B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	C	B	E	B	E	D	B	C	A	E	B	B	C	B	E	E	D	C	C	B	B	D	C

Vsi letniki SŠ, kategorija C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	E	D	A	C	A	D	C	C	A	B	B	B	D	B

Področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje

A1. Kolikšen je najmanjši skupni večkratnik vseh deliteljev števila 72?

- (A) 12 (B) 18 (C) 36 (D) 72 (E) 144

- A2.** Katero število vsebuje 12 tisočic, 12 stotic, 12 desetic in 12 enic?

- (A) 12121212 (B) 121212 (C) 13332
(D) 12321 (E) Nobeno od ponujenih števil.

- A3.** Koliko naravnih števil je večjih od $\frac{352}{3}$ in manjših od $\frac{745}{4}$?

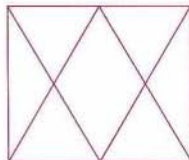
- (A) 67 (B) 68 (C) 69
(D) 70 (E) Nobeno od ponujenih števil.

- A4.** Ana je imela nekaj jabolk. Tini je dala tretjino jabolk, Darji četrtno jabolk, njej pa jih je ostalo 35. Koliko jabolk je imela na začetku?

- (A) 60 (B) 84 (C) 96 (D) 108 (E) 420

- A5.** Koliko enakokrakih trikotnikov je narisanih na sliki?

- (A) dva (B) štiri (C) šest
(D) osem (E) dvanaajst

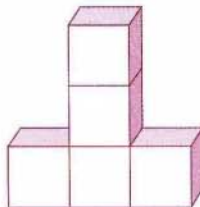


- A6.** Eva se je rodila 31. 10. 1981. V letu 2002 ima rojstni dan na četrtek. Na kateri dan se je rodila Eva?

- (A) v soboto (B) v nedeljo (C) v ponedeljek
(D) v torek (E) v četrtek

- A7.** Telo na sliki je sestavljeno iz petih enakih kock z robom 1 cm. Kolikšna je površina tega telesa?

- (A) 18 cm^2 (B) 22 cm^2 (C) 24 cm^2
(D) 26 cm^2 (E) 28 cm^2



- A8.** Točki A in B sta od premice p oddaljeni 3 cm, od točke T , ki leži na premici p , pa 4 cm. Točke A , B in T ležijo na skupni premici. Kolikšna je razdalja med točkama A in B ?

- (A) 3 cm (B) 4 cm (C) 6 cm (D) 7 cm (E) 8 cm

A6. Pravokotno dvorišče $5,7 \text{ m} \times 4,2 \text{ m}$ bi radi tlakovali s kvadratnimi ploščicami. Kolikšna je največja možna mera ploščice, če rezanje ni mogoče?

(A) $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$

(B) $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$

(C) $60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$

(D) $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$

(E) $45 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$

A7. Rok in Jure živita v istem bloku, Rok v šestem nadstropju, Jure v tretjem. Rok mora iz prvega nadstropja do svojega stanovanja prehoditi 60 stopnic, Koliko stopnic mora prehoditi Jure?

(A) 15

(B) 20

(C) 24

(D) 30

(E) 36

A8. Kolikšna je velikost kota x na sliki?

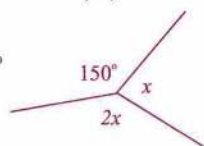
(A) 50°

(B) 70°

(C) 110°

(D) 140°

(E) 210°



B1. Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{4} + 100 \cdot 20}{-2 - 2000} + \frac{\sqrt{16} \cdot (-5)^3 \cdot \sqrt{(-4)^2} - 2}{1000 + 1^{2002}} + \frac{(\sqrt{16} \cdot 10^4 + (-1)^{2002}) \cdot \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}}}{((-1)^{2003} + 2) \cdot 1^{2002}}.$$

B2. Atletinja Jolanda Čeplak je na evropskem prvenstvu postavila nov svetovni rekord v teku na 800 m. Prejšnji rekord je bil 1:56.40, njen rekord pa je za 58 stotink sekunde boljši.

a) Za koliko odstotkov je izboljšala svetovni rekord?

b) V kolikšnem času je atletinja Čeplakova pretekla 800 m?

B3. V pravokotnem trikotniku $\triangle ABC$ je oglišče C vrh pravega kota. Na stranici AB določi točki K in M tako, da bo $|AK| = |AC|$ in $|BM| = |BC|$. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle KCM$.

8. razred

A1. Veš, da je $65^2 - 56^2 = 33^2$. Koliko je tedaj $\sqrt{6565^2 - 5656^2}$?

(A) 909

(B) 3300

(C) 3333

(D) 6556

(E) 8181

A2. Za koliko odstotkov se spremeni količnik, če deljenec povečamo za 20 %, delitelj pa zmanjšamo za 20 %?

(A) Poveča se za 50 %.

(B) Poveča se za 40 %.

(C) Poveča se za 20 %.

(D) Zmanjša se za 40 %.

(E) Se ne spremeni.

A3. Enačba $\frac{y^2-64}{y-n} = 0$ ima za $y \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ($y \neq n$) eno samo rešitev. Kolikšen je n ?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

A4. Obseg prednjega kolesa vozila je 28 dm, zadnjega pa 35 dm. Kolikšno pot mora prevoziti vozilo, da naredi prednje kolo 100 obratov več kot zadnje?

- (A) 28 km (B) 14000 m (C) 2,8 km
(D) 1400 m (E) 700 m

A5. Vrednosti izrazov $2n$, $n^2 + 1$ ter $n^2 - 1$ so dolžine stranic trikotnika. Kakšen je ta trikotnik?

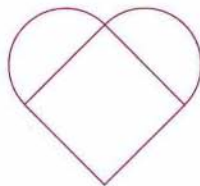
- (A) pravokoten (B) enakostraničen
(C) enakokrak (D) enakokrak pravokoten
(E) Ni mogoč.

A6. V trikotniku $\triangle ABC$ velja $a : b = 2 : 3$. V tem trikotniku je

- (A) $\alpha : \beta = 2 : 3$ (B) $v_a : v_b = 3 : 2$ (C) $\alpha : \beta = 3 : 2$
(D) $v_a : v_b = 2 : 3$ (E) Nobena od ponujenih možnosti.

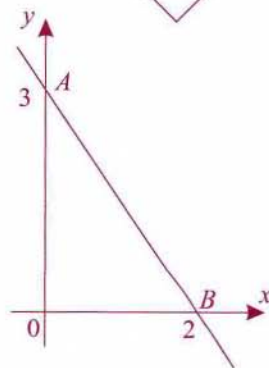
A7. "Srček" na sliki je sestavljen iz kvadrata s stranico 20 cm in dveh polkrogov nad sosednjima stranicama tega kvadrata. Približno kolikšna je ploščina "srčka"?

- (A) 714 cm^2 (B) 557 cm^2
(C) 463 cm^2 (D) 394 cm^2
(E) Nobena od ponujenih vrednosti.



A8. Katera od enačb je enačba premice AB ?

- (A) $y = \frac{3}{2}x + 3$ (B) $y = -\frac{2}{3}x$
(C) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ (D) $y = 2x + 3$
(E) $y = -\frac{3}{2}x + 3$



B1. Poenostavi izraz:

$$\frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}}.$$

- B2.** V knjižnici imajo določeno število miz. Vse mize imajo skupaj 39 nog, nekatere imajo tri, druge štiri noge. Za vsako mizo so štirje stoli. Vsi stoli imajo po štiri noge, skupaj 176 nog. Koliko miz ima tri in koliko štiri noge?
- B3.** V enakokrakem trapezu $ABCD$ sta osnovnici v razmerju 5 : 2, diagonala pa razpolavlja ostri kot. Obseg trapeza je 33 cm. Izračunaj dolžine stranic in višino trapeza.

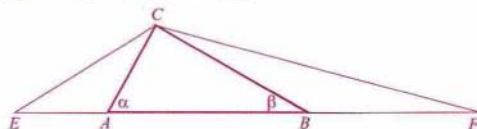
Rešitve nalog s področnega tekmovanja

6. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	D	C	C	B	D	A	B	E

- B1.** Po posameznih rezih ostane Jožetu $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ kartončka. Na koncu mu ostane šestina prvotnega kartončka.
- B2.** Ugotovimo, da porabi vsak moški pet obrokov na dan, vsaka ženska pa štiri obroke na dan. Zaloga bi za osem znanstvenikov, od katerih je polovica žensk, zadoščala za 125 dni.
- B3.** Najprej ugotovimo, da je $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = \frac{\alpha}{2}$ in $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BCF = \frac{\beta}{2}$, zato je $\sphericalangle ECF = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Ker je $\alpha + \beta = 90^\circ$, je $\sphericalangle ECF = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.



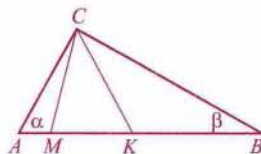
7. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	C	D	B	D	B	A	C	B

- B1.** Vrednost izraza je 2002.
- B2.** a) Svetovni rekord je izboljšala za približno pol odstotka.
b) Atletinja Čeplakova je pretekla 800 m v času 1:55.82.

- B3.** Najprej je $\sphericalangle AKC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ in $\sphericalangle BMC = \frac{180^\circ - \beta}{2}$, zato je $\sphericalangle AKC + \sphericalangle BMC = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ in $\sphericalangle KCM = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.



8. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	C	A	C	D	A	B	A	E

B1. Izrazimo $\frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}} = \frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{\frac{x^2+1}{x+1}} = 1$.

B2. Število stolov je $176 : 4 = 44$, število vseh miz je $44 : 4 = 11$. Če označimo z x število miz s štirimi nogami, dobimo enačbo $x \cdot 4 + (11 - x) \cdot 3 = 39$, ki ima rešitev $x = 6$. Torej ima šest miz štiri noge, pet miz pa tri noge.

B3. Vidimo, da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$

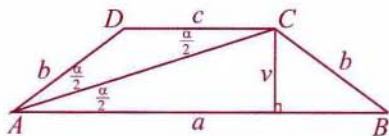
(izmenična kota), zato je $b = c$

in $a + 3b = 33$, torej $5t + 6t = 33$

in $t = 3$. Dolžine stranic so $a =$

$= 15$ cm, $b = c = 6$ cm. Nato je $v^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = 6^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$ in

$v = \frac{\sqrt{63}}{2}$ cm $\doteq 4$ cm.



Državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza

$$\left(\sqrt[3]{-27} - \frac{5}{6} + \left(2 - 18\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,2 \right)^2 + (9 - 4,5) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^3 \right) : (1 - 3) \right) \cdot 2^2.$$

2. Akvarij, ki je visok 35 cm, stoji na mizi. Ko vanj nalijemo 50 litrov vode, sega voda 20 cm visoko. Največ koliko litrov vode lahko nalijemo v akvarij?

3. Smrkla in Kenguru sta skupaj kolesarila. Ko sta imela do doma še 15 km, se je Smrkla ustavila in si privoščila pet minut počitka. Kenguru pa ni počival, ampak je vozil dalje s hitrostjo $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ko se je Smrkla odpočila, je nadaljevala pot proti domu s 25 % večjo hitrostjo kot Kenguru.

a) Kdo je prvi prikolesaril domov?

b) Kolikšna je bila časovna razlika med prihodoma domov?

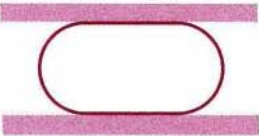
4. Izračunaj vrednosti števila x ($x \in \mathbb{Z}$), za katere je tudi vrednost ulomka $\frac{x+9}{x+4}$ celo število.

5. Trapez $ABCD$ ima ploščino p . Točko E , ki je središče (razpolovišče) kraka AD , zvežemo z ogliščema B in C . Kolikšen del ploščine trapeza je ploščina trikotnika $\triangle BCE$? Utemelji z računom.

8. razred

1. Reši enačbo

$$10101 \cdot \left(\frac{5}{111 \ 111} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} + \frac{5}{2002 \cdot x} \right) = \frac{7}{22}.$$

2. Trгоvec je dobil pošiljko, v kateri je bilo 480 kozarcev več majoneze kot kozarcev gorčice. Potem ko je prodal 80 % kozarcev majoneze in četrtno kozarcev gorčice, je ugotovil, da ima 300 kozarcev več gorčice kot majoneze. Koliko kozarcev majoneze in koliko kozarcev gorčice je bilo v pošiljki?
3. Tone je na mizi iz najlonske vrvi oblikoval krožnico s polmerom 10 cm. Nato jo je z dveh strani stiskal z vzporednima zidakoma (glej sliko), dokler razdalja med njima ni bila 10 cm. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje stisnjena vrv.
- 
4. V tristrano prizmo, katere osnovna ploskev je enakokrak pravokotni trikotnik, lahko včrtamo kroglo (dotika se vseh mejnih ploskev prizme) s premerom 2 cm. Izračunaj prostornino prizme.
5. Dan je trapez $ABCD$ ($|AB| > |CD|$). Nariši premico p , ki poteka skozi eno oglišče (npr. D) in trapez razdeli na dva plosčinsko enaka dela. Opiši in utemelji potek načrtovanja.

Rešitve nalog z državnega tekmovanja

7. razred

1. Vrednost izraza je -16 .
2. V akvarij lahko nalijemo $\frac{35}{20} \cdot 50 = 87,5$ litrov vode.
3. Kenguru porabi do doma 45 minut, Smrklja pa 41 minut. Torej je Smrklja prva prikolesarila domov in je bila doma štiri minute pred Kengurujem.
4. Zapišemo $\frac{x+9}{x+4} = 1 + \frac{5}{x+4}$. Ulomek $\frac{5}{x+4}$ mora biti celo število, zato je $x+4 = 1$ ali $x+4 = -1$ ali $x+4 = 5$ ali $x+4 = -5$, torej $x \in \{1, -3, -5, -9\}$.

**TEKMOVANJE DIJAKOV SREDNJIH
POKLICNIH ŠOL****Regijsko tekmovanje****I. del**

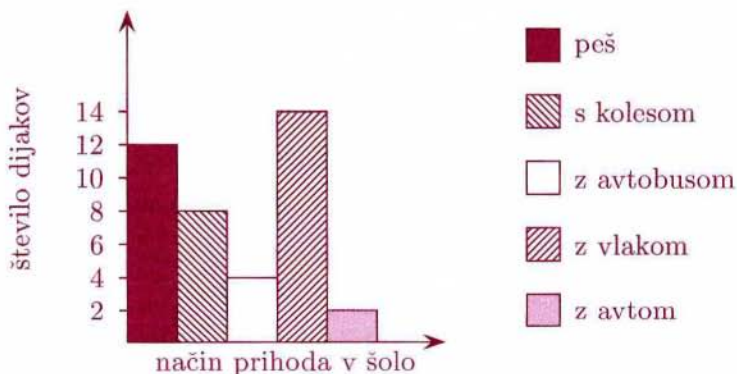
- Oče in sin imata od vsega sadja najraje jabolka. Oče poje v treh dneh 1 kg jabolk, sin pa v dveh dneh 1 kg jabolk. V koliko dneh bosta oče in sin skupaj pojedla 15 kg jabolk?
(A) v 20-ih dneh (B) v 5-ih dneh (C) v 8-ih dneh
(D) v 12-ih dneh (E) v 18-ih dneh
- Dnevna prenosna smučarska karta na smučišču stane 5000 SIT. Nejc se je peljal 15-krat, Jure pa 10-krat. Stroške sta si pravično razdelila. Koliko je prispeval Nejc?
(A) 1500 SIT (B) 2000 SIT (C) 3000 SIT
(D) 2500 SIT (E) 1000 SIT
- Najvišja zgradba na svetu je približno 450 m visoka stolpnica Petronas towers v Kuala Lumpurju v Maleziji. Koliko nadstropij je v njej, če računamo, da je vsako nadstropje visoko 250 cm?
(A) 18 (B) 180 (C) 55 (D) 200 (E) 1800
- Hleb kruha smo dali v pečico ob 16.25. Kdaj moramo kruh vzeti iz pečice, če ga moramo peči tričetrt ure?
(A) ob 17.10 (B) ob 17.15 (C) ob 16.55 (D) ob 16.70 (E) ob 17.05
- Kolikšen del kvadrata je obarvan?
(A) 15 % (B) 20 % (C) 25 %
(D) 30 % (E) 50 %
- Maja ima v omari pet različnih bluz in štiri različna krila. Na koliko načinov se lahko obleče?



7. Za pol kilograma moke plačamo 30 SIT več kot za četrt kilograma moke. Koliko stane kilogram moke?
 (A) 60 SIT (B) 75 SIT (C) 90 SIT (D) 120 SIT (E) 180 SIT
8. Kmet pokosi travnik, ki meri 10-krat 10 metrov, v 4 urah. Koliko časa bo potreboval, da bo pokosil travnik, ki meri 5-krat 5 metrov?
 (A) 2 uri (B) 1 uro (C) 30 min (D) 3 ure (E) 45 min
9. V anketi po projekciji filma je desetina gledalcev menila, da je film odličen, petina, da je dober, šestina, da je slab, tretjina, da je zelo slab, 60 gledalcev pa sploh ni odgovorilo na anketno vprašanje. Koliko ljudi si je ogledalo film?
 (A) 300 (B) 60 (C) 360 (D) 420 (E) 215
10. Koliko presečišč NE morejo imeti štiri premice?
 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

II. del

1. Slika prikazuje, na kakšen način prihajajo dijaki neke poklicne smeri v šolo.



- A. Koliko dijakov je na tej poklicni smeri?
 B. Koliko jih prihaja v šolo peš?
 C. Koliko odstotkov jih prihaja v šolo s kolesom, z avtobusom, z vlakom, z avtom?

2. Ob praznovanju rojstnega dneva želimo torto razrezati takole: polovico torte na šest enakih delov, tretjino torte na štiri enake dele, preostanek torte pa na dva enaka dela. Vsak udeleženec praznovanja dobi košček torte in noben košček ne ostane.
- A. Koliko je udeležencev praznovanja?
B. Ali so vsi koščki enako veliki? Odgovor utemelji z računom.
3. Cisterna za kurilno olje ima obliko kvadra; njena dolžina je 2 m, širina 1 m in višina 2 m.
- A. Koliko litrov kurilnega olja lahko natočimo vanjo, če jo želimo popolnoma napolniti?
B. Koliko bomo plačali ob nakupu olja, če je cena za liter kurilnega olja 85 SIT?
C. Za koliko zimskih dni bi zadoščala omenjena količina olja, če je povprečna mesečna poraba v času kurilne sezone 1050 litrov? (Računaš lahko, da ima mesec 30 dni.)
D. Koliko litrov olja bo v cisterni tri mesece po začetku kurilne sezone?
4. Profesor matematike si je zapomnil številko svoje osebne izkaznice takole:
- številka ima šest števk,
 - vsota števk je 30,
 - četrta števka je dvakrat večja od druge, peta je trikrat večja od druge, prva je štirikrat večja od druge,
 - tretja in šesta števka sta enaki.

Katero številko osebne izkaznice ima profesor?

Rešitve nalog z regijskega tekmovanja

I. Pravilni odgovori so zbrani v preglednici.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	B	A	C	E	D	B	A	B

II/1. Iz prikaza s stolpci razberemo, da peš prihaja v šolo 12 dijakov, s kolesom 8, z avtobusom 4, z vlakom 14 in z avtom 2 dijaka. Na tej poklicni smeri je skupaj $12 + 8 + 4 + 14 + 2 = 40$ dijakov. Torej prihaja s kolesom $\frac{8}{40} = 20\%$ dijakov, z avtobusom $\frac{4}{40} = 10\%$, z vlakom $\frac{14}{40} = 35\%$ in z avtom $\frac{2}{40} = 5\%$ dijakov.

II/2. Vseh kosov torte je $6 + 4 + 2 = 12$. Prvih šest koščkov meri po $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ torte, drugi štirje po $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ torte, preostala dva pa po $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ torte. Torej res dobijo vsi udeleženci enako velike koščke.

II/3. Prostornina cisterne je $2 \cdot 1 \cdot 2 \text{ m}^3$, kar je enako 4000 l. Vrednost kurilnega olja v polni cisterni je $4000 \cdot 85 = 340000 \text{ SIT}$. Omenjena količina olja bi zadoščala za $\frac{4000}{1050} \cdot 30 \approx 114$ dni. Tri mesece po začetku kurilne sezone bomo porabili $3 \cdot 1050 = 3150 \text{ l}$ olja, v cisterni bo ostalo $4000 - 3150 = 850 \text{ l}$ olja.

II/4. Označimo drugo številko z a , tretjo pa z b . Teda so števke po vrsti enake $4a, a, b, 2a, 3a, b$. Ker je njihova vsota enaka 30, lahko zapišemo $10a + 2b = 30$. Sledi $5a + b = 15$. Ker je $4a \leq 9$ in $a > 0$, mora biti $a = 2$ in $b = 5$. Številka osebne izkaznice je torej 825465.

Državno tekmovanje

I. del

- Na zabavi naštejemo 28 rokovanj. Koliko ljudi je na zabavi, če se je vsak enkrat rokoval z vsakim?
(A) 14 (B) 28 (C) 9 (D) 8 (E) 7
- Direktor na tajničino mizo odlaga pisma, ki jih kasneje tajnica pretipka. Pisma zлага na kupček tako, da novo pismo postavi na vrh. Ko ima tajnica čas, vzame vedno pismo z vrha in ga pretipka. Denimo, da je nekega dne direktor postavil na mizo pet pisem, in sicer po vrsti 1, 2, 3, 4 in 5. Kateri od vrstnih redov ne more biti red, po katerem je tajnica pisma pretipkala?
(A) 12345 (B) 24351 (C) 32415 (D) 45231 (E) 54321
- Površina Zemlje je 510 milijonov km^2 . Velik del Zemljine površine, in sicer kar 362 milijonov km^2 , pokriva morje. Približno koliko odstotkov Zemljine površine obsega kopno?
(A) 1.4 (B) 29 (C) 71 (D) 39 (E) 42

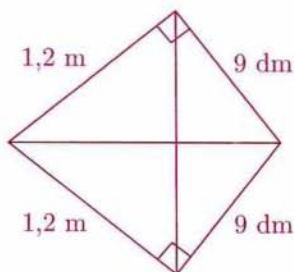
4. Stara ura zaostane vsakih 24 ur za 8 minut. Koliko minut naprej moramo ob 22. uri zvečer nastaviti uro, če hočemo, da bo ob 7. uri zjutraj kazala pravi čas?
- (A) 1 min 40 s (B) 2 min 20 s (C) 3 min
(D) 4 min 30 s (E) 6 min
5. Knjiga s pravljicami ima 124 strani. Razmerje med stranmi, ki jih je prebral oče, in tistimi, ki jih je prebrala mama, je 5 : 3, 28 strani je ostalo še neprebranih. Koliko strani je prebral oče?
- (A) 15 (B) 75 (C) 36 (D) 12 (E) 60
6. Razrednik je zadnjemu učencu tik pred odhodom domov povedal, da jim naslednji dan odpade prva ura pouka. Ta učenec je o tem obvestil štiri sošolke, vsaka od njih po dva sošolca in vsak od teh po dva preostala sošolca. Koliko učencev je v razredu, če je bil na ta način vsak od učencev o odpadli uri obveščen natanko enkrat?
- (A) 25 (B) 16 (C) 32 (D) 29 (E) 28

II. del

1. Mama ima sedaj petkrat toliko let kot hči Mateja. Čez 21 let pa bo imela samo dvakrat toliko let kot Mateja. Koliko je sedaj stara mama in koliko Mateja?
2. Liter bencina je maja stal 96 SIT. Najprej so ga junija podražili za 8 %, nato pa še avgusta za 5 %.
- A. Kolikšna je bila cena za liter bencina po zadnji podražitvi? Rezultat zaokroži na desetine.
- B. Koliko odstotna bi morala biti enkratna podražitev, da bi privedla do cene po zadnji podražitvi?
3. Oče je Alešu obljubil novo kolo, če mu bo Aleš pomagal pri raznih opravilih.
- A. Koliko časa bosta oče in Aleš zlagala 100 m² tlakovcev, če bi jih oče sam zlagal 5 ur in 30 min? Upoštevaj, da oče in Aleš delata enako hitro.
- B. Koliko časa bi jih zlagala, če oče dela dvakrat hitreje kot Aleš?
- C. Koliko časa bi skupaj zlagala 175 m² tlakovcev, če delata enako hitro?

Vse rezultate zaokroži na minuto natančno.

4. Matej ima kos blaga štirikotne oblike, iz katerega bi rad naredil zmaj (glej sliko). Blago bi rad pritrdil na dve letvici vzdolž diagonal. Kako dolgi sta letvici?



Rešitve nalog z državnega tekmovanja

I. Pravilni odgovori so zbrani v preglednici.

1	2	3	4	5	6
D	D	B	C	E	D

II/1. Označimo z x Matejino starost danes. Njena mama je danes stara $5x$ let. Čez 21 let bo veljalo $5x + 12 = 2(x + 21)$, kar nam da $x = 7$. Mateja je tako danes stara 7 let, njena mama pa 35 let.

II/2. Po junijski podražitvi je bencin stal $96 \cdot (1 + \frac{8}{100})$ SIT, po avgustovski pa $96 \cdot (1 + \frac{8}{100}) \cdot (1 + \frac{5}{100}) \approx 108.9$ SIT. V juniju in avgustu se je bencin skupaj podražil za $(1 + \frac{8}{100}) \cdot (1 + \frac{5}{100}) - 1 = 0,135 = 13,5 \%$.

II/3. Oče in sin bi skupaj položila 100 m^2 tlakovcev v polovičnem času, torej v 2 urah 45 minutah. Če oče dela dvakrat hitreje od sina, bi v 5 urah 30 minutah položila 150 m^2 tlakovcev, zato bi 100 m^2 tlakovcev položila v $\frac{2}{3}$ časa; torej v 3 urah 40 minutah. Če oba zlagata tlakovce enako hitro, v 5 urah 30 minutah položita 200 m^2 tlakovcev, zato bi 175 m^2 tlakovcev položila v $\frac{175}{200}$ časa, torej v 4 urah 49 minutah.

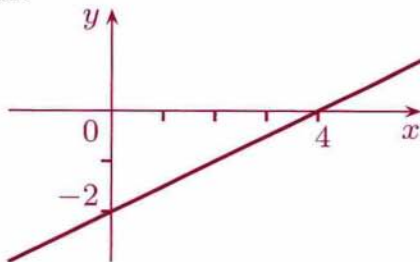
II/4. Vodoravna diagonal je hipotenuza pravokotnega trikotnika s kate-tama 12 dm in 9 dm, zato meri $\sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ dm. Ploščina polovice zmaja meri $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54 \text{ dm}^2$, zato meri polovica navpične letvice $\frac{54}{15} = 3,6$ dm. Navpična letvica torej meri 7,2 dm.

TEKMOVANJE DIJAKOV SREDNJIH TEHNIŠKIH
IN STROKOVNIH ŠOL

Regijsko tekmovanje

1. letnik

1. Riba in pol stane en evro in pol. Koliko evrov stane pet rib?
(A) 2,5 (B) 10 (C) 3 več kot dve ribi
(D) 7,5 (E) Nič od navedenega.
2. Kakšno število je vsota treh zaporednih lihih števil?
(A) sodo (B) liho (C) iracionalno
(D) število 0 (E) Nič od navedenega.
3. Iz enačbe $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$ izrazimo spremenljivko y . Kolikšna je?
(A) $\frac{1}{x} - 2$ (B) $2 - \frac{1}{x}$ (C) $x - \frac{1}{2}$
(D) $\frac{x}{1-2x}$ (E) Nič od navedenega.
4. Izraz $27a^3 - 64$ je enak
(A) $(3a - 4)^3$, (B) $(3a - 4)(3a + 4)^2$,
(C) $(3a - 4)(9a^2 + 12a + 16)$, (D) $(a^3 - 8)(3^3 + 8)$,
(E) nič od navedenega.
5. Kolikšna je natančna rešitev enačbe $4 - \sqrt{2}x = \sqrt{6}$?
(A) $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$ (B) 1,096 (C) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$
(D) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (E) Nič od navedenega.
6. Kakšna je enačba premice na sliki?
(A) $4x - 2y + 1 = 0$
(B) $-2x + 4y + 1 = 0$
(C) $x + y - 8 = 0$
(D) $x - 2y - 4 = 0$
(E) Nič od navedenega.



7. Pred petimi leti je bil oče petkrat starejši od sina, čez tri leta pa bo le še trikrat starejši. Koliko je star oče in koliko sin? Zapiši odgovor.
8. Točki $A(-3, 1)$ in $C(1, -1)$ sta nasprotni oglišči kvadrata $ABCD$. Izračunaj ploščino kvadrata. Rezultat naj bo natančen.
9. V tovarni izdelujejo mobilne telefone dveh znamk, 60 % števila proizvedenih telefonov predstavljajo telefoni prve znamke. Zaradi tovarniških napak izločijo 10 % telefonov druge znamke in 2 % telefonov prve znamke. V celem letu so izločili 5291 mobilnih telefonov. Koliko mobilnih telefonov so izdelali v enem letu? Zapiši odgovor.
10. Z uporabo Pitagorovega izreka dokaži, da sta premici z enačbama $2x - y = 0$ in $2y + x = 0$ med seboj pravokotni.

2. letnik

1. Vsota središčnega in obodnega kota nad istim lokom je $78^{\circ} 18' 57''$. Koliko meri središčni kot?

(A) $52^{\circ} 12' 38''$ (B) $25^{\circ} 6' 19''$ (C) $37^{\circ} 9' 28''$
 (D) $38^{\circ} 9' 29''$ (E) Nič od navedenega.
2. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 7x + 12$. Katera trditev je pravilna?

(A) Funkcija ima natanko eno realno ničlo.
 (B) Vsota obeh ničel funkcije je 12.
 (C) Graf funkcije se dotika premice $y = 2$.
 (D) Za vsak realen x je $f(x) \geq 0$.
 (E) Graf funkcije je parabola, simetrična glede na premico $x = \frac{7}{2}$.
3. Kaj velja za vsako realno število x , ki reši neenačbo $x(x - 6) < -5$?

(A) $1 < x < 5$, (B) $-5 < x < -1$, (C) $(x > 5) \wedge (x < 1)$,
 (D) $1 \leq x \leq 5$, (E) $1 < x \leq 5$.
4. Kaj velja za vsako realno število x ?

(A) $x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^2$ (B) $x^2 + x^3 = x^5$ (C) $\sqrt{x^2} = |x|$
 (D) $\sqrt[6]{x} : \sqrt[3]{x} = \sqrt{x}$ (E) $\sqrt{x^2 + 1} = x + 1$
5. Okrajšaj ulomek $\frac{5^{x-1} + 3 \cdot 5^x}{5^{x+1} - 5^{x-1}}$. Kaj dobiš?

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) 1 (E) 0

5. Kakšna je funkcija $f(x) = 2^{3x} + 1$?
- (A) konstantna (B) Seka ordinatno os pri 2.
(C) padajoča (D) navzgor omejena
(E) Ima začetno vrednost -3 .
6. Katere rešitve ima enačba $\log_x(x+12) = 2$?
- (A) $x = 4$ (B) $x = 4, x = -3$
(C) $x = -3$ (D) $x = 4, x = -3, x = 3$
(E) Nič od navedenega.
7. Reši enačbo

$$\left(\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^3}\right)^x = \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^{2x-3}}.$$

8. Izračunaj

$$\log_{\frac{a+1}{a}}(1+a^{-3}) - \log_{\frac{a+1}{a}}(a^{-2} - a^{-1} + 1)$$

za $a > 0$.

9. Krožnici s polmerom r je včrtan in očrtan kvadrat. Zapiši razmerje ploščin kvadratov in razmerje poenostavi.
10. Dana je funkcija

$$f(x) = \cos\left(4x - \frac{11\pi}{6}\right) - \cos\left(4x + \frac{11\pi}{6}\right).$$

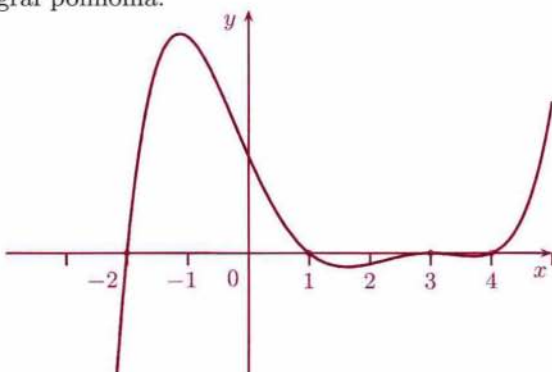
- a) Dokaži, da je $f(x) = -\sin 4x$.
b) Kje doseže dana funkcija največjo vrednost?

4. letnik

1. Tone je prodal tri parcele po 400 m^2 po 35 evrov za m^2 in 7 parcel po 500 m^2 po 42 evrov za m^2 . Koliko evrov je povprečna cena za m^2 zemljišča?

- (A) 39,2 (B) 39,9 (C) 38,5 (D) 42,7 (E) 40,2

2. Narisan je graf polinoma.



Katera funkcija mu ustreza ($a \in \mathbb{R}$)?

- (A) $p(x) = a(x - 4)(x - 1)(x - 3)^2(x + 2)$
 (B) $p(x) = a(x - 4)(x - 1)(x - 3)(x + 2)$
 (C) $p(x) = a(x + 4)(x - 1)(x - 3)(x + 2)$
 (D) $p(x) = a(x + 4)(x + 1)(x + 3)^2(x - 2)$
 (E) $p(x) = a(x - 4)(x + 1)^2(x - 3)(x - 2)$
3. Katera od naštetih funkcij ni polinom?
- (A) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ (B) $f(x) = -\frac{x^2 + 6x}{5}$
 (C) $f(x) = 3x^2(3x - 1)$ (D) $f(x) = 2^{-1}x^3 + 2^{-2}x - 1$
 (E) $f(x) = x^{-3} + 2x^{-2} + 1$
4. Katere pole ima racionalna funkcija $f(x) = \frac{x - 2}{x^3 + x^2}$?
- (A) $x = 2$ (B) $x = 0, x = -1$
 (C) $x = 2, x = 0, x = -1$ (D) $x = 0, x = 1$
 (E) $x = 0, x = 2$
5. Prvi člen geometrijskega zaporedja je $a_1 = 7\sqrt[3]{4}$, količnik pa je enak $q = \sqrt[6]{2}$. Kolikšen je deveti člen?
- (A) $14\sqrt[6]{2}$ (B) $\sqrt[6]{28}$ (C) 28
 (D) 784 (E) Nič od navedenega.

6. Kolikšna je vsota izraza $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-3}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$?

- (A) $\frac{n}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{n+1}{2}$ (D) $\frac{n-1}{2}$ (E) $\frac{n}{2}$

7. Izračunaj ploščino in obseg enakostraničnega trikotnika, če je stranica a rešitev enačbe $a^3 + a - 10 = 0$.
8. Določi n tako, da se bosta grafa funkcij $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ in $g(x) = -2x + n$ dotikala. Nariši grafa obeh funkcij v isti koordinatni sistem.
9. Preglednica prikazuje, koliko uslužbencev nekega podjetja pride na svoje delovno mesto v določenem času.

čas(min)	25	30	35	40	45	50	55
f_n	70	120	220	280	190	90	30

Izračunaj povprečni čas, ki ga uslužbenci potrebujejo za prihod na delo, in ponazori podatke iz preglednice s histogramom.

10. Na globini 25 m je povprečna temperatura zemlje 9°C , potem pa se vsakih 33 m globine temperatura poveča za 1°C . Na kateri globini je izvir termalne vode, ki ima temperaturo 70°C ? Zapiši odgovor.

Rešitve nalog z regijskega tekmovanja

1. letnik

naloga	1	2	3	4	5	6
odgovor	C	B	D	C	D	D

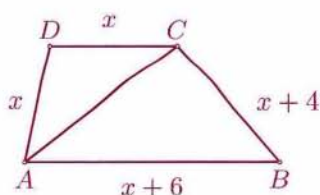
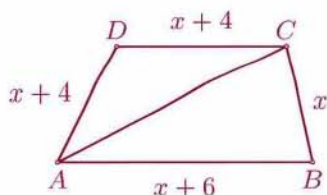
7. Če označimo z x očetovo, z y pa sinovo starost, potem velja $x - 5 = 5(y - 5)$ in $x + 3 = 3(y + 3)$, od koder izračunamo $x = 45$ in $y = 13$. Oče je star 45 let, sin pa 13 let.
8. Izračunamo dolžino diagonale $d(A, C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2\sqrt{5}$, nato pa takoj še ploščino kvadrata $S = \frac{d^2}{2} = 10$.
9. Upoštevamo, da v tovarni izločijo 10 % telefonov druge znamke, kar je $\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5} \cdot x$, in 2 % telefonov prve znamke, kar je $\frac{1}{50} \cdot \frac{3}{5} \cdot x$, če z x označimo število vseh telefonov. To pomeni, da je $\frac{1}{25}x + \frac{3}{250}x = 5291$, in od tod $x = 101750$. V enem letu so izdelali 101750 telefonov.

10. Najprej ugotovimo, da se premici sekata v koordinatnem izhodišču. Nato izberemo po eno točko na vsaki premici, na primer $A(x_1, 2x_1)$ in $B(x_2, -\frac{x_2}{2})$, ter izrazimo kvadrate razdalj $d^2(A, B) = 5x_1^2 + \frac{5x_2^2}{4}$, $d^2(A, P) = 5x_1^2$ in $d^2(P, B) = \frac{5x_2^2}{4}$. Vidimo, da velja $d^2(A, P) + d^2(P, B) = 5x_1^2 + \frac{5x_2^2}{4} = d^2(A, B)$. Premici se sekata pod pravim kotom.

2. letnik

naloga	1	2	3	4	5	6
odgovor	A	E	A	C	B	C

7. Poenostavimo lahko vsak člen v vsoti. Tako imamo $\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{4}}} = 2\sqrt{2}$, $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = -3 + 2\sqrt{2}$ in $0, 125^{-\frac{1}{3}} = 2$, nato pa te rezultate seštejemo: $2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} + 2 = 4\sqrt{2} - 1$.
8. Zapišemo enačbo $x^2 - 4x + c = kx - 2$, ki ji zadoščata abscisi točk P_1 in P_2 : $c + k = -7$, $c - 6k = -14$. Od tod izračunamo $c = -8$ in $k = 1$, nato pa še ordinati presečišč, tako da imamo $P_1(-1, -3)$ in $P_2(6, 4)$.
9. Upoštevamo $a + b = 17$ in $c^2 = a^2 + b^2$, pri čemer je $c = 13$, pa dobimo enačbo $169 = a^2 + (17 - a)^2$ oziroma $a^2 - 17a + 60 = 0$ z rešitvama $a_1 = 5$ in $a_2 = 12$. Dovolj je, če upoštevamo prvo rešitev, to je $a = 5$ in $b = 12$, saj se pri drugi le zamenjata dolžini stranic a in b med seboj. Tako imamo $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ oziroma $\alpha = 22^\circ 37'$ in pa $\sin \beta = \frac{b}{c}$ oziroma $\beta = 67^\circ 23'$.
10. Nastopita dve možnosti. Narišimo skici.



Ker je diagonala AC simetrala kota $\sphericalangle DAB$, je $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ in je trikotnik ACD enakokrak.

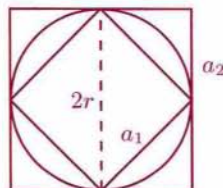
Prva možnost v resnici sploh ni možna. Če potegnemo vzporednico k AD skozi C , dobimo "trikotnik" s stranicami dolžine 2, x in $x + 4$, ki ne obstaja, saj bi bila vsota dolžin prvih dveh stranic manjša od dolžine tretje stranice.

Pri drugi možnosti pa dobimo $3x + 4 = 40$, od tod $x = 12$ in obseg $o = 58$ cm.

3. letnik

naloga	1	2	3	4	5	6
odgovor	B	E	D	C	B	A

7. Pretvorimo potence na enako osnovo $(\frac{4}{7})^{\frac{3x}{2}} = (\frac{4}{7})^3 \cdot (\frac{4}{7})^{-\frac{2x+3}{2}}$, od tod povzamemo $\frac{3x}{2} = 3 + \frac{3-2x}{2}$ in izrazimo $x = \frac{9}{5}$.
8. Izraz zapišemo v obliki $\log_{\frac{a+1}{a}} \frac{1+\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}+1}$ oziroma $\log_{\frac{a+1}{a}} \frac{a^2(a+1)(a^2-a+1)}{a^3(a^2-a+1)}$ in po krajšanju $\log_{\frac{a+1}{a}} \frac{a+1}{a}$, kar je enako 1.
9. Očitno je $2r = a_1\sqrt{2}$ oziroma $a_1 = r\sqrt{2}$ in $a_2 = 2r$, zato je $S_2 : S_1 = 4r^2 : 2r^2 = 2 : 1$.



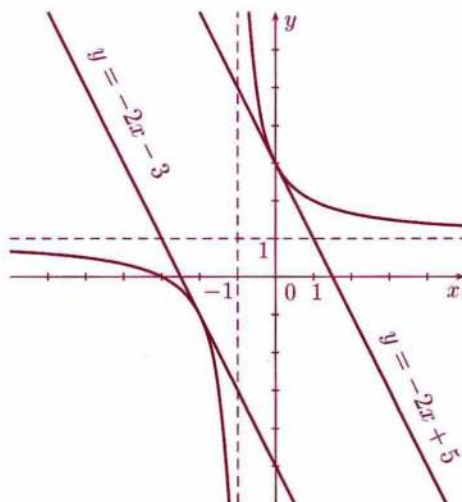
10. Izraz preoblikujemo z uporabo adicijskega izreka, nato pa zapis poenostavimo: $\cos 4x \cdot \cos \frac{11\pi}{6} + \sin 4x \cdot \sin \frac{11\pi}{6} - \cos 4x \cdot \cos \frac{11\pi}{6} + \sin 4x \cdot \sin \frac{11\pi}{6} = 2 \sin 4x \sin \frac{11\pi}{6} = -\sin 4x$. Funkcija doseže največjo vrednost, ko je $4x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, to je pri $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. letnik

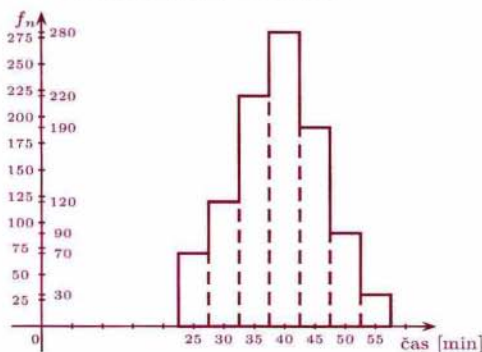
naloga	1	2	3	4	5	6
odgovor	E	A	E	B	C	D

7. Edina realna rešitev enačbe je $a_1 = 2$. Obseg enakostraničnega trikotnika s stranico a_1 je $o = 3a_1 = 6$, ploščina pa $S = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

8. Grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ se bosta dotikala, če bo imela enačba $\frac{x+3}{x+1} = -2x + n$ dvojno rešitev ($x \neq -1$), to je, če bo diskriminanta kvadratne enačbe $2x^2 + x(3-n) + 3-n = 0$ enaka 0. Pogoji $D = 0$ je izpolnjen pri dveh vrednostih parametra n : $n_1 = 3$, ko dobimo $g_1(x) = -2x + 3$, in $n_2 = -5$, ko dobimo $g_2(x) = -2x - 5$.



9. Povprečni čas, ki ga uslužbenci potrebujejo za prihod na delo, je $\mu = \frac{25 \cdot 70 + 30 \cdot 120 + 35 \cdot 220 + 40 \cdot 280 + 45 \cdot 190 + 50 \cdot 90 + 55 \cdot 30}{70 + 120 + 220 + 280 + 190 + 90 + 30} = 38,95$ min, podatke pa ponazorimo s histogramom takole:

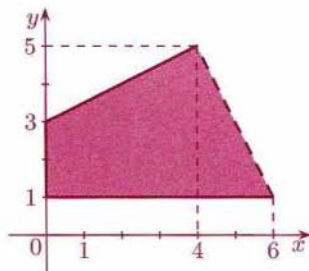


10. Ker vemo, da je na globini 25 m povprečna temperatura 9°C in da se nato na vsakih 33 m poveča za 1° , je temperatura 70°C na globini $25 + (70 - 9) \cdot 33 = 25 + 2013 = 2038$ m.

Državno tekmovanje

1. letnik

- Oče želi razdeliti trem sinovom 14 560 SIT tako, da vsak naslednji sin dobi 20 % večji znesek kot njegov mlajši brat. Koliko dobi vsak sin? Zapiši odgovor.
- Zapiši pogoje, ki enolično določajo množico točk na sliki.
- Pri deljenju števila a s 7 dobimo ostanek 3, pri deljenju števila b s 7 pa ostanek 4. Kolikšen je ostanek pri deljenju kvadrata vsote števil a in b s 7? Odgovor utemelji.



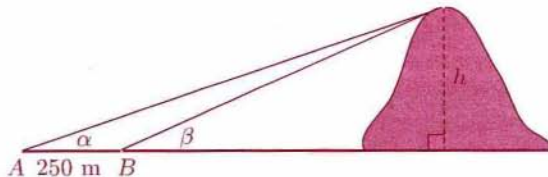
- Premer prednjega kolesa je 1,1 m, zadnjega pa 0,8 m. Kolikšno razdaljo smo prevozili, če je prvo kolo naredilo 69 obratov manj kot zadnje? Rezultat zaokroži na centimeter natančno. Za π uporabi približek $\frac{22}{7}$. Zapiši odgovor.
- Nariši graf funkcije s predpisom $f(x) = -\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ in izračunaj ploščino lika, ki ga oklepa graf dane funkcije s koordinatnima osema.

2. letnik

- Poenostavi

$$\left[\frac{3b^{-3}}{2a(x-y)^{-1}} \right]^{-3} : \left[\frac{(2a^{-1}b^3)^2}{(x-y)^4} : \frac{9a^{-5}b^{-3}}{(x+y)^{-1}} \right]$$

- Skupina geometrov želi določiti višino hriba. Iz kraja A v ravnini vznožja vidijo vrh hriba pod kotom $\alpha = 19^\circ 40'$, ko pa se po ravnem približajo hribu za 250 m, vidijo vrh pod kotom $\beta = 24^\circ$. Kako visok je hrib? Vmesne rezultate zaokroži na štiri decimalke, rezultat pa na celo število. Zapiši odgovor.



3. Kvadratna funkcija $f(x)$ doseže minimalno vrednost -2 za $x = 1$. Določi $f(x)$ tako, da bo veljalo $f(-3) + 4f(0) = 0$. Izračunaj $f(1 + \sqrt{5})$.
4. Kateta a in hipotenuza pravokotnega trikotnika sta v razmerju $12 : 13$. Če skrajšamo hipotenuzo za 23 cm in kateto a za 27 cm, dobimo nov pravokotni trikotnik, ki se mu dolžina druge katete ni spremenila. Izračunaj stranice prvotnega trikotnika.
5. Izdelati moramo 1320 parov smuči. Pri izdelavi s strojem A bi porabili dve uri manj kot pri uporabi stroja B . Stroj B naredi pet parov smuči manj na uro kot stroj A . Izračunaj čas izdelave smuči, če uporabimo oba stroja.

3. letnik

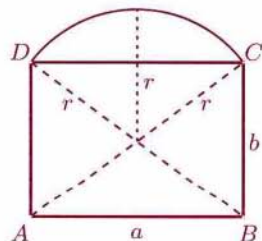
1. Reši enačbo

$$\left(2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4.$$

2. Kje dosežeta funkciji $f(x) = \sin 4x$ in $g(x) = -\cos 2x$ enako vrednost?
3. V živalski vrt naselijo družino risov. Število risov N po t letih ($t \geq 0$) določa funkcija $N = 10 \cdot e^{\frac{2}{5}t}$.
 - a) Koliko risov šteje družina ob naselitvi?
 - b) Koliko let bi potrebovali v živalskem vrtu, da bi družina risov štela 100 članov? Rezultat zaokroži na celo število.

Zapiši odgovora.

4. Pavel ima podstrešno sobo v obliki pravokotnika $ABCD$ s stranicama $a = 4$ m in $b = 3$ m. Ker mu je pretesna, si jo bo razširil tako, kot kaže slika. Izračunaj, za koliko odstotkov se bo povečala površina sobe. Rezultat zaokroži na eno decimalno mesto.
5. Žleb za vodo je dolg 5 m in lahko zajame 1440 l vode. Presek žleba je enakokraki trapez s krakoma 52 cm in višino 48 cm. Koliko vode je v žlebu, če je napolnjen do polovice višine (glej sliko)?



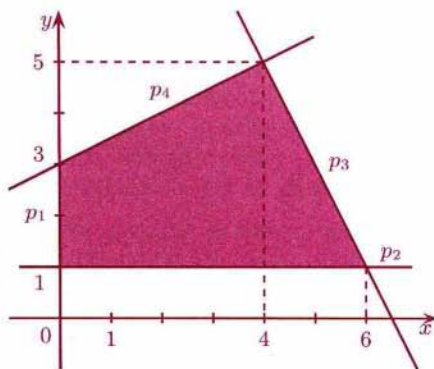
4. letnik

1. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x-2}$. Za katere vrednosti x bo graf funkcije $f(x)$ ležal nad premico z enačbo $y = 1$?
2. Od 25 učencev so pri pisni nalogi štirje dobili oceno 5, pet oceno 4 in pet oceno 2. Koliko učencev je dobilo oceno 1 in koliko učencev oceno 3, če je bila povprečna ocena natanko 3? Zapiši odgovor.
3. Ničle polinoma $p(x) = x^3 - 13x^2 + 39x - 27$ so prvi trije členi naraščajočega geometrijskega zaporedja.
 - a) Zapiši prvih pet členov in splošni člen zaporedja.
 - b) Kateri člen danega geometrijskega zaporedja je rešitev enačbe $\log(15 - 3x) - \log x = \log(x - 1)$?
4. Dani so štirje pravokotniki z dolžino $a = 18$. Njihove širine tvorijo geometrijsko zaporedje. Obseg drugega pravokotnika je 60, tretji pravokotnik je kvadrat. Določi širine pravokotnikov.
5. Trije Butalci, Bingo, Bunko in Balko, so oropali banko in odnesli 22 vreč z bankovci. Postavili so jih v vrsto tako, da je bilo v prvi vreči najmanj denarja, v vsaki naslednji pa en šop bankovcev več kot v tisti pred njo. Šef Bingo je ukradene vreče denarja delil po načelu: prva meni (Bingu), druga tebi (Bunku), tretja meni (Bingu), četrta tebi (Balku), peta meni (Bingu), šesta tebi (Bunku) ... Nato so denar prešteli. Bunko in Balko sta ugotovila, da imata skupaj bajno vsoto 6 710 000 SIT. Veselila sta se tudi dejstva, da imata skupaj 110 000 SIT več kot njun šef. Tvoja naloga je, da ugotoviš, koliko denarja je bilo v prvi vreči. Zapiši odgovor.

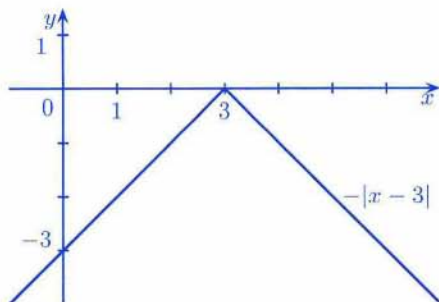
Rešitve nalog z državnega tekmovanja

1. letnik

1. Sinovi dobijo x , $1,2x$ in $1,44x$ tolarjev. Iz $x + 1,2x + 1,44x = 14560$ izračunamo $x = 4000$ SIT, kolikor dobi prvi sin. Drugi sin dobi 4800 SIT, tretji pa 5760 SIT.
2. Množico točk omejujejo premice $p_1: x = 0$, $p_2: y = 1$, $p_3: y = -2x + 13$ in $p_4: y = \frac{1}{2}x + 3$. Pogoji, ki enolično določajo množico točk, so $(x \geq 0) \wedge (y \geq 1) \wedge (y < -2x + 13) \wedge (y \leq \frac{1}{2}x + 3)$.

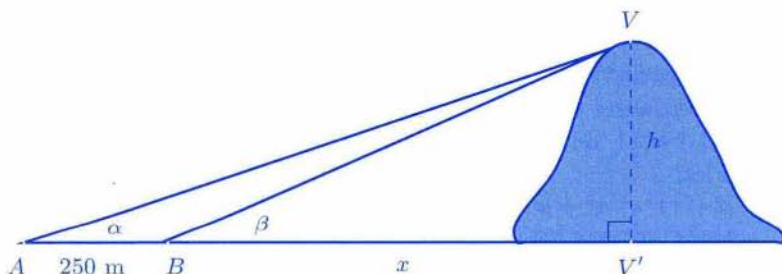


3. Ker je $a = 7 \cdot x + 3$ in $b = 7 \cdot y + 4$, je vsota števil a in b deljiva s 7: $a + b = 7x + 7y + 7$, zato je tudi kvadrat vsote deljiv s 7.
4. Recimo, da je prednje kolo napravilo x obratov. Tedaj je prednje kolo prevozilo razdaljo $x \cdot 1,1\pi$ m, zadnje pa $(x + 69) \cdot 0,8\pi$ m. Iz $x \cdot 1,1\pi = (x + 69) \cdot 0,8\pi$ izračunamo $x = 184$. Prevozili smo 636,11 m.
5. Funkcijo lahko zapišemo v obliki $f(x) = -|x - 3|$, nato pa ni težko narisati njenega grafa, ki ima ničlo $x = 3$ in seka ordinatno os v $T(0, -3)$. Lik, ki ga oklepa graf funkcije s koordinatnima osema, je pravokoten trikotnik s ploščino $S = \frac{9}{2}$.



2. letnik

1. Izraz poenostavimo v obliko $\frac{2^3 a^3 b^9}{3^3 (x-y)^3} \cdot \frac{a^2 (x-y)^4 \cdot 9(x+y)}{2^2 b^6 a^5 b^3} = \frac{2}{3}(x^2 - y^2)$ (ali $\frac{2}{3}(x-y)(x+y)$).
2. Najprej je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{250+x}$ in $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{x}$, nato pa zapišemo $x \cdot \operatorname{tg} \beta = (x + 250) \cdot \operatorname{tg} \alpha$, od koder izrazimo $x = \frac{250 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} = 1017,6538$ in nato še $h = x \cdot \operatorname{tg} \beta = 453,0595$. Hrib je visok 453 m.

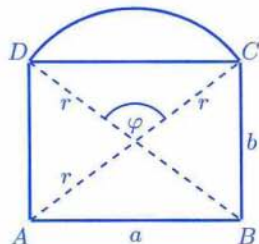


3. Kvadratno funkcijo zapišemo v obliki $f(x) = a(x-1)^2 - 2$. Enakost $f(-3) + 4f(0) = 0$ se zapiše v obliki $16 \cdot a - 2 + 4(a - 2) = 0$, od koder izračunamo $a = \frac{1}{2}$. Tako je $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$ oziroma $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$. Končno izračunamo še $f(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$.

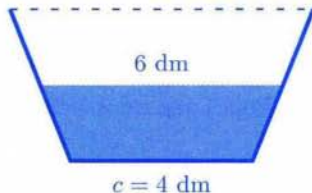
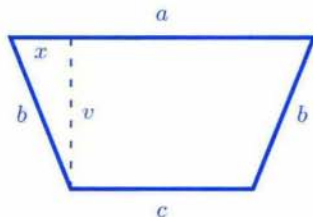
4. Naj bodo $a = 12x$, b in $c = 13x$ stranice prvega trikotnika, $a' = 12x - 27$, $b' = b$ in $c' = 13x - 23$ pa stranice drugega trikotnika. Iz $b^2 = c^2 - a^2 = c'^2 - a'^2$ dobimo enačbo $(13x)^2 - (12x)^2 = (13x - 23)^2 - (12x - 27)^2$, od koder izrazimo $x = 4$. Tako pridemo do stranic prvega trikotnika: $a = 48$ cm, $b = 20$ cm, $c = 52$ cm.
5. Recimo, da stroj A naredi na uro x parov smučí in da za 1320 parov porabi t ur. Analogno: stroj B naredi na uro $(x - 5)$ parov in za 1320 parov porabi $(t + 2)$ ur. Izrazimo $t = \frac{1320}{x}$ in zapišemo enačbo $t \cdot x = (t + 2)(x - 5)$, ki jo preoblikujemo v $x^2 - 5x - 3300 = 0$. Od tod dobimo $x = 60$ in končno izračunamo čas izdelave smučí, če uporabimo oba stroja: $t_1 = \frac{1320}{(60+55)} = 11,48$ h.

3. letnik

1. Enačbo zapišemo v obliki $\left(2^{\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 2^2$ oziroma $2^{\frac{(3\sqrt{x}+3) \cdot 2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 2^2$. Od tod preberemo $\frac{(3\sqrt{x}+3) \cdot 2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2$ in uredimo v obliko $5\sqrt{x} = 2x - 3$. Po kvadriranju in ureditvi dobimo enačbo $4x^2 - 37x + 9 = 0$ z rešitvama $x_1 = \frac{1}{4}$ in $x_2 = 9$, a prva rešitev te enačbe ne zadošča začetni enačbi. Edina rešitev začetne enačbe je $x = 9$.
2. Enačbo $\sin 4x = -\cos 2x$ preoblikujemo v $\cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$, ki je izpolnjena, če je $\cos 2x = 0$ ali $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. Tako imamo rešitve $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ in $x_3 = \frac{7\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Ob naselitvi ($t = 0$) šteje družina $N = 10 \cdot e^{\frac{2}{5} \cdot 0} = 10$ risov. V živalskem vrtu bo 100 risov, ko bo veljalo $100 = 10 \cdot e^{\frac{2}{5}t}$ oziroma $\ln 10 = \frac{2}{5}t$, od tod pa izračunamo $t = \frac{5}{2} \ln 10 \doteq 5,76$, to je približno 6 let.
4. Iz $(2r)^2 = a^2 + b^2$ izračunamo $r = 2,5$ m. Določimo tudi kot $\varphi = 106,3^\circ$ (iz $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{1,5}$). Površina sobe se bo povečala za $S_1 = \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi = 2,8$ m². Ker sedaj soba meri 12 m², se bo povečala za $\frac{2,8 \cdot 100}{12} = 23,3$ %.



5. Ploščino preseka žleba izračunamo kot kvocient prostornine in dolžine: $S = \frac{V}{l} = 28,8 \text{ dm}^2$. Ker poznamo dolžino kraka in višino, lahko iz $x^2 = b^2 - v^2$ izrazimo $x = 2 \text{ cm}$, nato pa zapišemo $a = c + 2x = c + 4$. Uporabimo formulo za ploščino trapeza $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$, da izračunamo $c = 4 \text{ dm}$ in $a = 8 \text{ dm}$. Če je žleb napolnjen do polovice višine, je v njem $V = \frac{4 \text{ dm} + 6 \text{ dm}}{2} \cdot 2,4 \text{ dm} \cdot 50 \text{ dm} = 600 \text{ dm}^3 = 600 \text{ l}$ vode.



4. letnik

- Pogoj $\frac{x-2}{x^2+x-2} > 1$ preoblikujemo v $\frac{-x^2}{x^2+x-2} > 0$. Funkcija, ki nastopa na levi strani zadnje neenakosti, ima dvojno ničlo v $x = 0$ in pola $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Neenakost je izpolnjena za $x \in (-2, 0) \cup (0, 1)$.
- Vemo, da je $\frac{4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + x + 3y}{25} = 3$ in $x + y = 11$. Od tod dobimo $x = 4$ in $y = 7$. Ocenjo 3 je dobilo sedem učencev, oceno 1 pa štirje učenci.
- Polinom ima ničle $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 9$, zato je prvih pet členov naraščajočega geometrijskega zaporedja 1, 3, 9, 27, 81, splošni člen pa $a_n = 3^{n-1}$. Iz $\log \frac{15-3x}{x} = \log(x-1)$ sledi $\frac{15-3x}{x} = x-1$ oziroma $x^2 + 2x - 15 = 0$ z rešitvama $x_1 = -5$ in $x_2 = 3$, pri čemer x_1 ne ustreza logaritemski enačbi. Rešitev logaritemске enačbe je drugi člen zaporedja.
- Vsi pravokotniki imajo dolžino $a = 18$. Označimo njihove širine z b , bq , bq^2 , bq^3 . Vemo, da je $2a + 2bq = 60$, od koder sledi $bq = 12$. Ker je tretji pravokotnik kvadrat, velja $a = bq^2$ oziroma $bq^2 = 18$. Sedaj lahko izračunamo $q = \frac{3}{2}$ in $b = 8$. Širine pravokotnikov so 8, 12, 18, 27.
- Recimo, da je bilo v vsakem šopu bankovcev k tolarjev in da je bilo v prvi vreči x šopov bankovcev. Tedaj je Bingo dobil $x + (x+2) + \dots + (x+20) = 11(x+10) = \frac{6\,600\,000}{k}$ šopov, Bunko in Balko skupaj pa $(x+1) + (x+3) + \dots + (x+21) = 11(x+11) = \frac{6\,710\,000}{k}$ šopov. Iz sistema enačb izračunamo $x = 50$ in $k = 10\,000$. V prvi vreči je $x \cdot k = 500\,000$ SIT.

MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Izbirno tekmovanje

1. letnik

1. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom pri oglišču C označimo z S razpolovišče stranice AB , z V pa nožišče višine na stranico AB . Koliko merijo koti trikotnika ABC , če je $|SV| = 1$ in $|SC| = 2$?
2. Poišči vse celoštevilске rešitve enačbe $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.
3. Naj bo $a + b = 1$ in $ab \neq 0$. Dokaži, da velja $\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b - a)}{a^2b^2 + 3}$.
4. Alenka in Barbara naročita pico. Z medsebojno pravokotnima rezoma, ki ne potekata skozi središče pice, jo razdelita na štiri dele. Alenka izbere en kos, nato Barbara vzame sosednjega v smeri urinega kazalca, potem vzame naslednji kos v smeri urinega kazalca spet Alenka, zadnji kos pa vzame Barbara. Kateri kos naj najprej izbere Alenka, da bo dobila več pice kot Barbara?

2. letnik

1. Koliko celoštevilskih rešitev ima neenačba $|x| + |2y| < 7$?
2. Naj bosta D in E taki točki na katetah AB in BC pravokotnega trikotnika ABC , da je $|AE| = \sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{2}$, $\sphericalangle BAE = 30^\circ$ in $\sphericalangle BDC = 45^\circ$. Presečišče daljic AE in CD označimo z F . Koliko je točka F oddaljena od daljice AB ?
3. Poišči tri zaporedna liha števila a , b in c , za katera je $a^2 + b^2 + c^2$ štirimestno število s samimi med seboj enakimi števki.
4. Babica je za devet vnukov spekla torto v obliki kvadra višine 7 cm in z osnovno ploskvijo 36×36 cm. Ob straneh in po vrhu je torto obložila z marcipanom. Kako naj babica razreže torto na devet delov tako, da bodo vsi vnuki dobili enako torte in enako marcipana?

3. letnik

1. Poišči vse take pare naravnih števil m in n , da je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \cdot m + 3 = n^2$.
2. Dana je kocka s celoštevilsko prostornino in kvadrat s celoštevilsko ploščino. Stranica kocke je za 1 daljša od stranice kvadrata. Dokaži, da sta dolžina stranice kocke in dolžina stranice kvadrata celi števili.
3. Naj bodo a , b in c stranice trikotnika Δ ($a \leq c$ in $b \leq c$), $2s$ njegov obseg, p pa ploščina. Dokaži, da je trikotnik Δ pravokoten natanko tedaj, ko velja

$$(s-a)(s-b) = p.$$

4. Alenka in Barbara naročita pico. Izbereta naključno, od središča različno točko P na pici in skozi točko potegneta tri ravne reze, ki se paroma sekajo pod kotom 60° ter razdelijo pico na šest kosov. Rezi ne potekajo skozi središče pice. Alenka izbere en kos, nato Barbara vzame sosednjega v smeri urinega kazalca, potem vzame naslednji kos v smeri urinega kazalca spet Alenka in tako dalje. Kateri kos naj najprej izbere Alenka, da bo dobila več pice kot Barbara?

4. letnik

1. Dokaži, da velja

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \cdot n = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) - 1.$$

2. Poišči vse injektivne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ zadoščajo pogoju

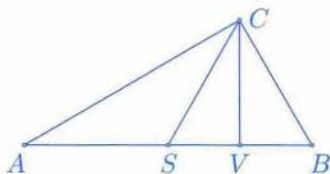
$$f(xy) = f(f(x) f(y)).$$

Funkcija je *injektivna*, če je $f(x) \neq f(y)$ za vse $x \neq y$.

3. Višinsko točko H trikotnika ABC prezrcalimo preko stranic BC , CA in AB ter dobimo točke A' , B' , C' . Koti trikotnika $A'B'C'$ merijo 40° , 60° in 80° . Koliko merijo koti trikotnika ABC ?
4. Babica je za pet vnukov spekla torto v obliki prizme višine 7 cm in z osnovno ploskvijo, ki je pravilni šestkotnik s stranico 10 cm. Ob straneh in po vrhu je torto obložila z marcipanom. Kako naj babica razreže torto na pet delov tako, da bodo vsi vnuki dobili enako torte in enako marcipana?

Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

I/1. V pravokotnem trikotniku SVC je $|SC| = 2|SV|$, torej je $\sphericalangle VSC = 60^\circ$. Točka S je središče trikotniku ABC očrtane krožnice, torej je trikotnik SBC enakokrak. Ker je $\sphericalangle SBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle VSC) = 60^\circ$, je $\sphericalangle BAC = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.



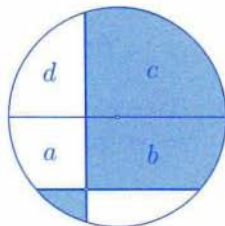
I/2. Očitno sta x in y različna od 0, zato lahko enačbo preoblikujemo v $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$, od koder sledi $y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}$. Število $x-2$ deli 4 natanko tedaj, ko je $x-2 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ oziroma $x \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$. Rešitve so torej pari $(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$ in $(6, 3)$.

I/3. Ker je $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$, je $\frac{b}{a^3-1} = -\frac{1}{a^2+a+1}$ in podobno $\frac{a}{b^3-1} = -\frac{1}{b^2+b+1}$. Torej je

$$\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{b^2+b-a^2-a}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)} = \frac{(b-a)(b+a+1)}{a^2b^2+a^2b+b^2a+a^2+b^2+ab+a+b+1},$$

kar nam z upoštevanjem $a^2b^2 + a^2b + b^2a + a^2 + b^2 + ab + a + b + 1 = a^2b^2 + ab(a+b) + ((a+b)^2 - 2ab) + ab + a + b + 1 = a^2b^2 + 3$ da željeni rezultat $\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

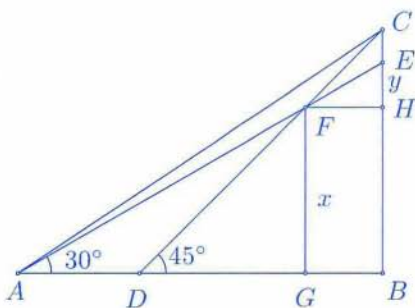
I/4. Potegnimo k enemu od rezov vzporednico, ki poteka skozi središče pice. Pica sedaj razpade na šest kosov. Označimo plosčine štirih izmed njih z a , b , c in d , kot kaže slika. Vodoravni rez, ki poteka skozi središče pice, razdeli pico na dva plosčinsko enaka kosa. Ploščina osenčenega dela meri $b+c+d-a$, ploščina neosenčenega dela pa $d+a+c-b$.



Dokažimo, da je $b+c+d-a > d+a+c-b$ oziroma $b-a > a-b$. Slednje pa očitno drži, saj je $b > a$. Alenka naj torej najprej izbere kos, ki vsebuje središče pice.

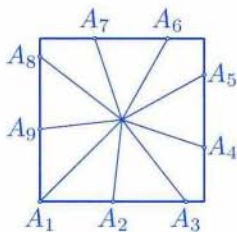
II/1. Če je $y = 0$, potem je x lahko $0, \pm 1, \dots, \pm 6$. Skupaj je v tem primeru $1 + 2 \cdot 6 = 13$ rešitev. Če je $y = \pm 1$, potem je x lahko $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, skupaj je v tem primeru $2 \cdot (1 + 2 \cdot 4) = 18$ rešitev. Če je $y = \pm 2$, je x lahko $0, \pm 1, \pm 2$, skupaj je $2 \cdot (1 + 2 \cdot 2) = 10$ rešitev. Če pa je $y = \pm 3$, je $x = 0$, skupaj sta dve rešitvi. Vseh možnih rešitev je torej $13 + 18 + 10 + 2 = 43$.

II/2. Označimo z G pravokotno projekcijo točke F na stranico AB in s H pravokotno projekcijo točke F na stranico BC . Označimo še $x = |FG|$ in $y = |HE|$. Ker je $\angle HFE = 30^\circ$, je $|FH| = |EH|\sqrt{3} = y\sqrt{3}$. Ker je $|AE| = \sqrt{3}$ in $\angle HFE = 30^\circ$, je $|BE| = x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ker je $\angle BDC = 45^\circ$ in $|DC| = \sqrt{2}$, je $|DB| = |DG| + |GB| = 1$. Torej je $x + y\sqrt{3} = 1$. Ko iz enačbe $x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ izrazimo y in ga vstavimo v $x + y\sqrt{3} = 1$, lahko izpeljemo $x = \frac{1}{2(\sqrt{3}-1)}$.



II/3. Naj bo $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ in $c = 2n + 3$. Vsota kvadratov teh števil je $(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 12n^2 + 12n + 11 = 12n(n + 1) + 11$ in je enaka štirimestnemu številu s samimi med seboj enakimi števki, torej je lahko enaka 1111, 2222 ... 8888 ali 9999. Če od vsote odštejemo 11, dobimo število, ki je deljivo z 12. Zato izmed števil 1100, 2211, 3322, 4433, 5544, 6655, 7766, 8877 in 9988 izločimo vsa tista, ki niso deljiva s 3 ali s 4. Ostane le število 5544, ki ga zapišemo kot zmnožek $12 \cdot 462 = 12 \cdot 21 \cdot 22$. Tako je $5555 = (2 \cdot 21 - 1)^2 + (2 \cdot 21 + 1)^2 + (2 \cdot 21 + 3)^2 = 41^2 + 43^2 + 45^2$.

II/4. Naj bodo $A_1, \dots, A_9$ točke na obodu osnovne ploskve, ki razdelijo obod na devet enako dolgih odsekov. Ker rezi potekajo iz sredine torte, imajo vsi dobljeni liki enako ploščino (in zato imajo ustrezni kosi torte enako prostornino). Vsak odsek je torej dolg $\frac{4 \cdot 36}{9} = 16$ cm. Babica naj zareže devetkrat iz središča osnovne ploskve do točk $A_1, \dots, A_9$. Dobljeni kosi imajo enako prostornino, enaka pa je tudi površina, obložena z marcipanom.



III/1. Če je $m \geq 4$, da število $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m + 3$ ostanek 3 pri deljenju s 4, kvadrat naravnega števila pa ima lahko ostanek le 0 ali 1. Torej mora biti $m \leq 3$, kar nam da edini rešitvi $m = 1$ in $n = 2$ ter $m = 3$ in $n = 3$.

III/2. Naj bo a dolžina stranice kocke in b dolžina stranice kvadrata. Naloga pravi, da je $a = b + 1$ ter $a^3 \in \mathbb{Z}$ in $b^2 \in \mathbb{Z}$. Ker sta $(b + 1)^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$ in b^2 celi števili, mora biti $b^3 + 3b = b(b^2 + 3) = m$ celo število. Ker je tudi število $b^2 + 3$ celo, je zato $b = \frac{m}{b^2 + 3}$ racionalno število. Ker je kvadrat tega racionalnega števila enak $b^2 \in \mathbb{Z}$, mora biti tudi b celo število. Torej je tudi $a = b + 1$ celo število.

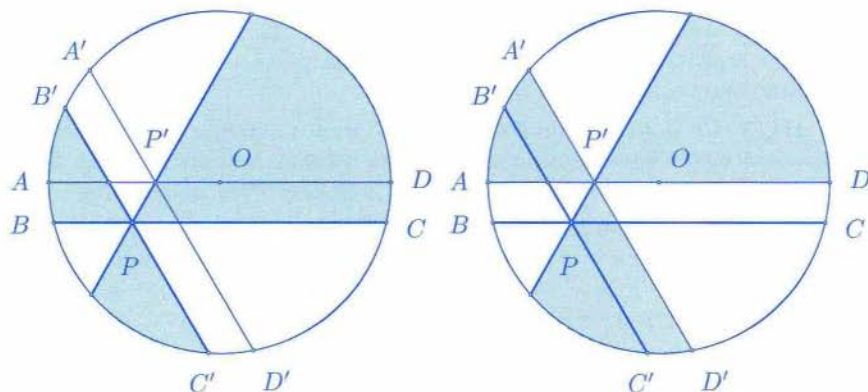
III/3. Računajmo: $(s-a)(s-b) = \frac{1}{4}(b+c-a)(a+c-b) = \frac{1}{4}(c^2 - (a-b)^2) = \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab) = \frac{1}{2}(ab - ab \cos \gamma)$, kjer smo po kosinusnem izreku upoštevali, da je $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Po drugi strani pa je $p = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, zato velja $(s-a)(s-b) = p$ natanko tedaj, ko je $1 - \cos \gamma = \sin \gamma$.

Če je trikotnik pravokoten, je $\gamma = \frac{\pi}{2}$, saj je c njegova najdaljša stranica. V tem primeru enakost $1 - \cos \gamma = \sin \gamma$ drži.

Za dokaz v drugo smer pa rešimo enačbo $1 - \cos \gamma = \sin \gamma$. Ker je $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$, imamo $1 - \cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$ oziroma $1 - 2 \cos \gamma + \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma$. Ker je $\gamma \in (0, \pi)$, je $\gamma = \pi/2$ edina rešitev te enačbe.

III/4. Alenka naj najprej izbere kos, ki vsebuje središče pice. Pokazati moramo, da je ploščina osenčenega dela večja od ploščine neosenčenega dela. Pico postavimo v koordinatni sistem tako, da je njeno središče točka $O(0, 0)$. Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je en rez vzporeden osi x . Naj bo P' presečišče osi x z rezom pod kotom 60° .

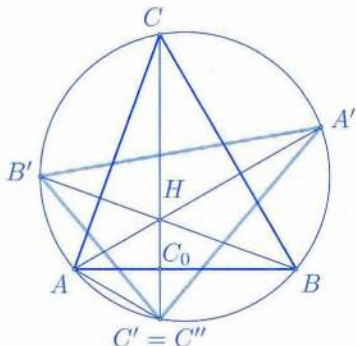
Pasova $ABCD$ in $A'B'C'D'$ imata enaki širini. Ker je $|AD| > |A'D'|$, je ploščina pasu $ABCD$ večja od ploščine pasu $A'B'C'D'$. Če od ploščine osenčenega dela odštejemo ploščino pasu $ABCD$, prištejemo pa ploščino pasu $A'B'C'D'$, je novi osenečeni del ploščinsko ravno enak polovici ploščine pice. Ker se je pri tem ploščina osenčenega dela lahko le zmanjšala, je bila pred tem večja od ploščine neosenčenega dela.



IV/1. Enakost dokažemo z indukcijo. Za $n = 1$ enakost velja. Denimo, da velja za neko naravno število n . Potem je po induksijski predpostavki $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + \dots + 1 \cdot 2 \dots n \cdot n) + 1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1) \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \dots (n+1) - 1 + 1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1) \cdot (n+1) = 1 \cdot 2 \dots (n+1) \cdot (n+2) - 1$, torej enakost velja tudi za $n+1$. Po indukciji sledi, da enakost velja za vsako naravno število.

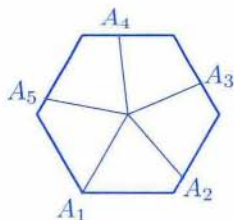
IV/2. Vstavimo $y = 1$ in dobimo $f(x) = f(f(1) \cdot f(x))$. Iz injektivnosti sledi $x = f(1) \cdot f(x)$. Ker to velja za vsak $x \in \mathbb{R}$, vidimo, da mora biti $f(1) \neq 0$, od koder sledi $f(x) = x/f(1)$. Če zdaj vstavimo še $x = 1$, dobimo za $f(1)$ enačbo $f(1)^2 - 1 = 0$, torej je $f(1) = 1$ ali $f(1) = -1$. Edini možni rešitvi sta funkciji $f_1(x) = x$ in $f_2(x) = -x$. Zlahka preverimo, da obe zadoščata dani enačbi.

IV/3. Dokažimo najprej, da ležijo točke A' , B' in C' na očrtani krožnici trikotnika ABC . Označimo s C_0 in C'' presečišče premice CH s premico AB in tistim krožnim lokom $\widehat{AB}$ trikotniku ABC očrtane krožnice, na katerem ni točke C . Tedaj je $\sphericalangle C''AB = \sphericalangle C''CB = \sphericalangle BAH$, saj je $AH \perp BC$ in $CH \perp AB$. Torej sta pravokotna trikotnika $C''AC_0$ in HAC_0 skladna in je po konstrukciji $C'' = C'$.



Naj bo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Tedaj je $\sphericalangle B'A'A = \sphericalangle B'BA = 90^\circ - \alpha$ in $\sphericalangle AA'C' = \sphericalangle ACC' = 90^\circ - \alpha$. Torej je $\sphericalangle B'A'C' = 180^\circ - 2\alpha = 40^\circ$, kar nam da $\alpha = 70^\circ$. Podobno iz $\sphericalangle C'B'A' = 180^\circ - 2\beta = 60^\circ$ izrazimo $\beta = 60^\circ$, iz $\sphericalangle A'C'B' = 180^\circ - 2\gamma = 80^\circ$ pa izrazimo $\gamma = 50^\circ$.

IV/4. Naj bodo $A_1, \dots, A_5$ točke na obodu osnovne ploskve, ki razdelijo obod na 5 enako dolgih odsekov. Vsak odsek je torej dolg $\frac{6 \cdot 10}{5} = 12$ cm. Babica naj zareže petkrat iz središča osnovne ploskve do točk $A_1, \dots, A_5$. Dobljeni kosi imajo enako prostornino, enaka pa je tudi površina, obložena z marcipanom.



Državno tekmovanje

1. letnik

1. Najmanjše naravno število, katerega kvadrat se konča s tremi štiricami, je 38, saj je $38^2 = 1444$. Katero je naslednje najmanjše naravno število s to lastnostjo?
2. Tine je zbiral znamke. Za rojstni dan je dobil nov album, v katerega bo lahko spravil veliko znamk. Iz hranilnika je vzel 2002 tolarja in sklenil, da bo ves denar porabil za nakup znamk. Prijatelj mu je ponudil manjše znamke po 10 tolarjev in večje po 28 tolarjev. Tine se je odločil, da bo kupil čim večje število znamk. Koliko znamk bo lahko kupil?
3. Naj bo M razpolovišče osnovnice AB trapeza $ABCD$. V notranjosti daljice AC leži taka točka E , da se premici BC in ME sekata v točki F , premici FD in AB se sekata v točki G ter premici DE in AB v točki H . Dokaži, da je M razpolovišče daljice GH .
4. Najmanj koliko zvezdic moramo narisati v tabelo velikosti 4×4 , da bo po brisanju poljubnih dveh stolpcev in poljubnih dveh vrstic ostala v tabeli vsaj ena zvezdica?

2. letnik

1. Za katere vrednosti realnega parametra a ima sistem enačb

$$x + y = a^3 - a \quad \text{in} \quad xy = a^2$$

realni rešitvi x in y ?

2. Poišči najmanjše naravno število, ki ga lahko zapišemo kot vsoto devetih, desetih in enajstih zaporednih naravnih števil.
3. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica v ravnini, $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ pa disjunktni krožnici, ki se od znotraj dotikata krožnice $\mathcal{K}$ v točkah A in B . Naj bo t skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki se ju dotika v točkah C in D tako, da sta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ obe na istem bregu premice t , središče krožnice $\mathcal{K}$ pa na njenem drugem bregu. Označimo z E presek premic AC in BD . Dokaži, da leži točka E na krožnici $\mathcal{K}$.
4. Ali lahko pokrijemo šahovnico velikosti 15×15 s 55 dominami velikosti 4×1 tako, da ostanejo središčno polje in vsa polja ob ogliščih šahovnice nepokrita? (Domine morajo v celoti ležati na šahovnici in se ne smejo prekrivati.)

3. letnik

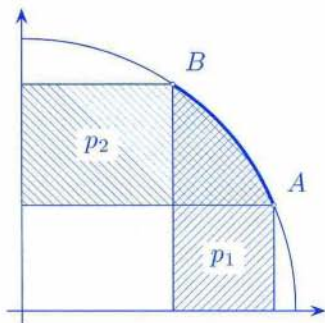
1. Naj bo k tako naravno število, da ima kvadratna enačba

$$kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$$

racionalni rešitvi. Dokaži, da je k zmnožek dveh zaporednih celih števil.

2. Imamo $n \geq 3$ listov, ki jih oštevilčimo od 1 do n . Liste nato razdelimo na dva kupa in ugotovljamo, ali sta v vsaj enem kupu lista, označena s številoma, katerih vsota je popolni kvadrat. Dokaži, da
- (a) če je $n \geq 15$, taka lista obstajata ne glede na to, kako liste razdelimo;
- (b) če je $n \leq 14$, taka lista ne obstajata pri vsaki porazdelitvi.

3. Na enotski krožnici, s središčem v koordinatnem izhodišču, izberemo krožni lok s krajiščema A in B , ki leži v prvem kvadrantu. Naj bo p_1 ploščina lika pod krožnim lokom in nad abscisno osjo, p_2 pa naj bo ploščina lika levo od krožnega loka in desno od ordinatne osi (glej sliko). Dokaži, da je vsota $p_1 + p_2$ odvisna le od dolžine krožnega loka, ne pa tudi od njegove lege.



4. V škofjeloški grajski kleti sedem palčkov hrani svoj zaklad. Zaklad je za dvanajstimi vrati, vsaka vrata pa so zaklenjena z dvanajstimi ključavnicami. Vse ključavnice so različne. Vsak palček ima ključ za nekaj ključavnic. Katerikoli trije palčki imajo skupaj ključ za vse ključavnice. Dokaži, da imajo palčki skupaj vsaj 333 (ne nujno različnih) ključev.

4. letnik

1. Ali obstaja funkcija $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, da bo

$$f(f(2002)) = 17, \quad f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{in} \quad f(n) \leq n$$

za vsaka $m, n \in \mathbb{N}$?

2. Naj bo $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, kjer so a_i različna naravna števila. Vsota števil iz nobene prave podmnožice množice S ni deljiva z n . Dokaži, da je vsota vseh števil iz množice S deljiva z n .

3. Naj bo A' nožišče višine na stranico BC ostrokotnega trikotnika ABC . Krožnica s premerom AA' seka stranico AB v točkah A in D , stranico AC pa v točkah A in E . Dokaži, da leži središče očrtane krožnice trikotnika ABC na nosilki višine na DE trikotnika ADE .
4. V škofjeloški grajski kleti sedem palčkov hrani svoj zaklad. Zaklad je za desetimi vrati, vsaka vrata pa so zaklenjena s tremi ključavnicami. Vse ključavnice so različne. Vsak palček ima ključe za nekaj ključavnic. Katerikoli štirje palčki imajo skupaj ključe za vse ključavnice. Dokaži, da obstajajo trije palčki, ki imajo skupaj ključe za vse ključavnice.

Rešitve nalog z državnega tekmovanja

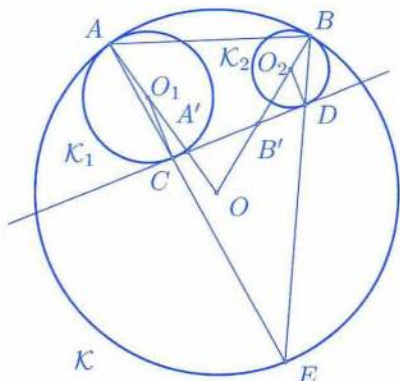
I/1. Naj bo $38 + n$ iskano število. Tedaj je $(38 + n)^2 = 1444 + n(76 + n)$, kjer se število $n(76 + n)$ konča s tremi ničlami oziroma je večkratnik števila 1000. Ker je $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, mora biti ali n ali $76 + n$ deljivo s 5. Toda n in $76 + n$ nista hkrati deljivi s 5, zato mora biti eno izmed teh dveh števil deljivo s $125 = 5^3$ in je torej oblike $125k$.

Oglejmo si še faktor 2^3 . Iz $76 = 2^2 \cdot 19$ sledi, da imata števili n in $76 + n$ enak ostanek pri deljenju s 4. Ker mora biti zmnožek $n(76 + n)$ deljiv z 8, mora biti vsaj eno od števil n ali $76 + n$ deljivo s 4. Torej sta s 4 deljivi obe in je eno od njiju oblike $125 \cdot 4 \cdot m = 500m$, kjer je $m \in \mathbb{N}$. Ker iščemo najmanjšo možno vrednost, izberemo $m = 1$ in iz $76 + n = 500$ izračunamo $38 + n = 462$.

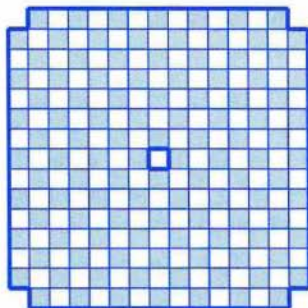
I/2. Denimo, da bo Tine kupil x znamk po 10 tolarjev in y znamk po 28 tolarjev. Tedaj velja $10x + 28y = 2002$ oziroma $5x + 14y = 1001$, od tod pa $5x + 5y = 1001 - 9y$ oziroma $x + y = \frac{1001 - 9y}{5}$. Vrednost vsote bo tem večja, čim manjši bo y . Ker je y naravno število, lahko poskušamo z vrednostmi $y = 1, y = 2, y = 3 \dots$, dokler ne dobimo cele vrednosti za vsoto $x + y$. Sicer pa vemo, da bo vsota $x + y$ celo število, ko bodo enice v razliki $1001 - 9y$ enake 0 ali 5, to je, ko bodo enice v zmnožku $9y$ enake 1 ali 6. Najmanjši y , ko to velja, je $y = 4$. Tedaj je $x + y = \frac{1001 - 36}{5} = \frac{965}{5} = 193$. Tine bo kupil 193 znamk.

I/3. Označimo z N presečišče premic CD in EF . Ker je $DC \parallel GB$ in so točke M, N in F kolinearne, je $\frac{|GM|}{|MB|} = \frac{|DN|}{|NC|}$. Ker je $AH \parallel DC$ in so točke M, E ter N kolinearne, je $\frac{|AM|}{|MH|} = \frac{|NC|}{|DN|}$. Sledi $\frac{|GM|}{|MB|} \cdot \frac{|AM|}{|MH|} = 1$, od koder zaradi $|AM| = |MB|$ sledi $|GM| = |MH|$.

II/3. Označimo z O , O_1 in O_2 središča krožnic, presečišči premice t z daljicama OA in OB pa označimo z A' in B' . Naj bo $\alpha = \sphericalangle CAO_1$. Ker je trikotnik AO_1C enakokrak, je $\sphericalangle CO_1A' = 2\alpha$. Ker je $CD \perp O_1C$, je $\sphericalangle O_1A'C = \pi/2 - 2\alpha$. Če označimo $\beta = \sphericalangle O_2BD$, lahko podobno izpeljemo $\sphericalangle DB'O_2 = \pi/2 - 2\beta$. V trikotniku $OB'A'$ tako velja $\sphericalangle B'OA' = \pi - (\pi/2 - 2\beta) - (\pi/2 - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta$. V trikotniku AEB velja $\sphericalangle BEA = \pi - \sphericalangle EAB - \sphericalangle ABE$. Ker je $\sphericalangle EAB + \sphericalangle ABE = \alpha + \beta + (\pi - \sphericalangle BOA) = \pi - \alpha - \beta$, sledi $\sphericalangle BEA = \alpha + \beta$. Torej je $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BEA$, zato točka E res leži na krožnici $\mathcal{K}$.



II/4. Pobarvajmo šahovnico, kot kaže slika. Vsaka domina velikosti 4×1 pokrije po dve polji vsake barve. Ker število belih polj ni enako številu osenčenih polj, šahovnice ne moremo pokriti na predpisani način.



III/1. Da bosta rešitvi kvadratne enačbe racionalni, mora biti diskriminanta $(1 - 2k)^2 - 4k(k - 2) = 1 + 4k$ enaka m^2 , $m \in \mathbb{N}$. Torej je $k = \frac{(m-1)(m+1)}{4}$. Ker je k naravno število, mora biti m liho število, večje od 1, torej obstaja tako naravno število n , da je $m = 2n + 1$, sledi $k = n(n + 1)$.

III/2. Rešimo najprej prvi del naloge. Dovolj je dokazati trditev za $n = 15$. Če namreč taka lista obstajata za $n = 15$, obstajata tudi za $n \geq 16$, saj lahko liste s številkami od 16 dalje izločimo in sklepamo kot prej. Če pri tem en kup v celoti izpraznimo, ostaneta na drugem kupu, denimo, števili 1 in 3.

Predpostavimo, da to ne bi bilo res in da se torej pri $n = 15$ to ne bi dalo narediti. To pomeni, da bi morala biti 1 in 15 na različnih kupih, prav tako 1 in 3. Tako bi bila 3 in 15 na istem kupu. Na tem kupu ne bi smelo biti števila 6, saj bi sicer imeli $6 + 3 = 9 = 3^2$. Niti števila 10 ne bi

smelo biti na tem kupu, saj bi imeli $10 + 15 = 25 = 5^2$. To pa pomeni, da bi bila lista s številoma 6 in 10 oba na drugem kupu in bi imeli protislovje, saj je $6 + 10 = 16 = 4^2$. Za $n = 15$ torej vedno najdemo vsaj v enem kupu lista s številoma, katerih vsota je popolni kvadrat.

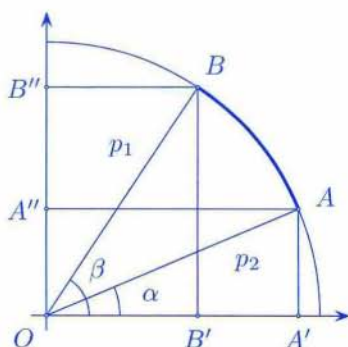
Sedaj rešimo še drugi del naloge. Vzemimo najprej $n = 14$ in poiščimo porazdelitev, ko vsota nobenih dveh števil s posameznega kupa ni popolni kvadrat: na en kup postavimo liste s števili 1, 2, 4, 6, 9, 11 in 13, na drugi pa liste s števili 3, 5, 7, 8, 10, 12 in 14. Če je $3 \leq n < 14$, lahko uporabimo kar rešitev za $n = 14$, le liste s števili, večjimi od n , odstranimo.

III/3. Označimo točke, kot kaže slika.

Ploščina krožnega izseka, ki pripada loku $\widehat{AB}$, je enaka $p_{\widehat{AB}} = \frac{\beta - \alpha}{2}$, kjer smo kota α in β merili v radianih. Sledi

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{\widehat{AB}} + p_{OBB''} - p_{OAA''} = \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_{\widehat{AB}} + p_{OA'A} - p_{OB'B} = \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta. \end{aligned}$$



Torej je $p_1 + p_2 = \beta - \alpha$, kar je enako dolžini loka $\widehat{AB}$.

III/4. Zagotovo obstajajo štiri palčki, od katerih ima vsak vsaj 48 ključev (sicer bi lahko izbrali tri, ki bi skupaj imeli manj kot $3 \cdot 48 = 144$ ključev in ne bi mogli odpreti vseh ključavnic). Preostali trije palčki imajo skupaj vsaj 144 ključev. Torej imamo štiri palčke z vsaj 48 ključi in trojico z vsaj 144 ključi, skupno vsaj $4 \cdot 48 + 144 = 336$ ključev.

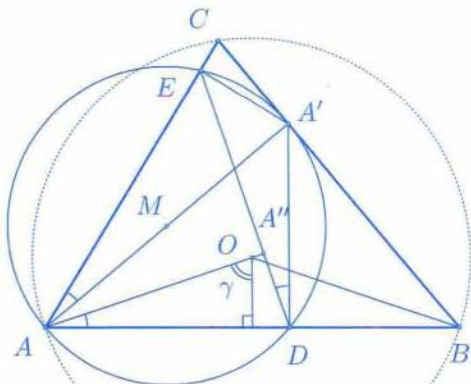
IV/1. Ker je $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, z upoštevanjem zveze $f(xy) = f(x)f(y)$ izpeljemo

$$f(f(2002)) = f(f(2)) \cdot f(f(7)) \cdot f(f(11)) \cdot f(f(13)) = 17.$$

Ker je $f(x) \leq x$, je $f(f(x)) \leq f(x) \leq x$ in zato $f(f(2)) \leq 2$, $f(f(7)) \leq 7$, $f(f(11)) \leq 11$ in $f(f(13)) \leq 13$. Na levi strani enačbe je zmnožek števil, ki so največ 13, število 17 pa je praštevilo in takšna funkcija torej ne obstaja.

IV/2. Označimo $s_j = a_1 + \dots + a_j$. Če za $j < k$ velja $s_j \equiv s_k \pmod{n}$, je $a_{j+1} + \dots + a_k \equiv 0 \pmod{n}$, kar je v protislovju s predpostavko naloge. Torej dajo števila $s_1, \dots, s_n$ vse možne ostanke pri deljenju z n . Ker po predpostavki nobeno od števil $s_1, \dots, s_{n-1}$ ni deljivo z n , mora biti z n deljivo število $s_n = a_1 + \dots + a_n$.

IV/3. Označimo z A'' nožišče višine iz A trikotnika ADE . Središče trikotniku ABC očrtane krožnice leži na premici AA'' , če je $\sphericalangle BAA'' = \frac{\pi}{2} - \gamma$, kjer je $\gamma = \sphericalangle ACB$. Ker je $AA'' \perp DE$ in $AB \perp A'D$ ter je štirikotnik $ADA'E$ tetiven, je $\sphericalangle BAA'' = \sphericalangle A'DE = \sphericalangle A'AE$. Ker pa je $AA' \perp BC$, je tako res $\sphericalangle A'AE = \frac{\pi}{2} - \gamma = \sphericalangle BAA''$.



IV/4. Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da nobena trojica palčkov ne more odkleniti vseh ključavnic. Ker je takih trojic 35, ključavnic pa je 30, obstaja ključavnica, ki je ne moreta odkleniti vsaj dve trojici. Če ti trojici združimo, dobimo vsaj štiri palčke, od katerih nihče ne more odkleniti te ključavnice. To pa je v protislovju s predpostavko, da lahko vsaki štirje palčki odprejo vse ključavnice.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, šolsko leto 2002/03, številka 2, strani 65–128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domažnjak, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2002/03 je za posamezne naročnike **3.300 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.700 SIT**, posamezna številka **825 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino **25 EUR**, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASIX, transakcijski račun številka 03100-1000018787.

List sofinancira MŠZŠ
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1507

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



