

30 (2002 – 03)

1

PRE SEK



ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



PIERIS (zgoraj) in RODODENDRON (spodaj) imata filotakso $\frac{3}{8}$.



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, leto 2002/03, številka 1, strani 1–64

VSEBINA	
MATEMATIKA	Urejena lepota rastlin – Filotaksa in Fibonaccijeva števila (Marija Vencelj) 5-11 Tetraedri s ploščinsko enakimi mejnimi ploskvami (Ivan Vidav) 26-31
FIZIKA	O gibanju dinosavrov (Janez Strnad) 12-15 Barometrično svetlikanje (Janez Strnad) 34-36 Kako stari so sandali? (Jože Pahor) 41-45
ASTRONOMIJA	Izsev zvezde – reš. str. 40 (Marijan Prosen) 22-24
RAČUNALNIŠTVO	Programerske prigode (Martin Juvan) 16-21
NOVE KNJIGE	Marijan Prosen: Skrivnosti dneva in noči (Marija Vencelj) 25
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Križanka "Matematiki 17. in 18. stoletja" – reš. na str. 47 (Marko Bokalič) 32-33 Presek, salama in sinus (Robert Bakula in Aleksandar Jurišić) 37-40
NOVICE	To pot pa kar zlato! – Čestitka našim olimpijcem (Iz uredništva) 2
NALOGE	Dva kamna – Nagradna naloga (Marija Vencelj) 2 Naloga o Fibonaccijevem zaporedju (Viktor Velkavrh in Roman Drnovšek) 4 Nenavadno število – reš. str. 46 (Martin Juvan) 31
REŠITVE NALOG	Štiri muhe – Rešitev nagradne naloge iz 6. številke XXIX. letnika Preseka, str. 322 (Marija Vencelj) 3-4
TEKMOVANJA	38. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 48-49 22. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce in osnovnošolke za Zlata Stefanova priznanja (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) 49-52 2. tekmovanje dijakov ter dijakin srednjih poklicnih šol v znanju matematike (Dušanka Vrenčur) 52 2. tekmovanje dijakov ter dijakin srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike (Sonja Perko) 53-54 46. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) 54-55 40. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko) 55-58 23. mednarodno matematično tekmovanje mest – Rešitve nalog jesenskega kroga iz XXIX, P-6, str. 376 (Gregor Cigler) 58-64
NA OVITKU	Slike k članku Urejena lepota rastlin na str. 5 (foto Matjaž Vencelj) I, II, III, IV

TO POT PA KAR ZLATO! – Čestitka našim olimpijcem

Novega letnika Preseka ne bi mogli začeti lepše, kot ga tokrat. Med počitnicami sta na 43. mednarodni matematični in 33. mednarodni fizikalni olimpiadi naši srednješolski ekipe dosegli izjemna uspeha.

Na matematični olimpiadi, ki je bila letos v Glasgowu v Veliki Britaniji, je **Klemen Šivic** z Gimnazije Bežigrad iz Ljubljane prejel **bronasto medaljo**, Erik Štrumbelj z Gimnazije Kočevje pa pohvalo.

Še bolje so se na fizikalni olimpiadi v Nusa Dui na indonezijskem otoku Bali odrezali naši mladi fiziki. **Matija Perne** z Gimnazije Škofja Loka je osvojil **zlato medaljo**, Matjaž Humar (Šolski center Nova Gorica – Gimnazija), Gašper Žerovnik (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana) in Andraž Stožer (II. gimnazija Maribor) pa so dobili pohvale.

Zlata medalja Matije Perneta je prva slovenska fizikalna zlata medalja nasploh. Edini Slovenec, ki je doslej osvojil zlato medaljo na mednarodni matematični olimpiadi, pa je bil Franc Dacar predavnimi 39 leti.

**Obema ekipama, posebej pa nagrajencem,
iskreno čestitamo.**

Več o obeh tekmovanjih boste lahko prebrali v 3. številki Preseka.

Iz uredništva

DVA KAMNA – Nagradna naloga

- Z višine $h = 20$ m spustimo kamen, da prosto pada. Istočasno sprostimo navpično s tal drug kamen z začetno hitrostjo $v_0 = 20$ m/s. Čez koliko časa se kamna srečata? Zračni upor zanemarimo.
- Nalogo rešite še pri podatkih $h = 30$ m in $v_0 = 10$ m/s.

**Rešitve pošljite najkasneje do 15. oktobra na naš naslov:
Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.**

Izmed reševalcev, ki bodo poslali pravilno rešitev naloge, bomo izžrebali nagrajenca, ki bo prejel knjižno nagrado.

Marija Vencelj

ŠTIRI MUHE – Rešitev nagradne naloge iz 6. številke XXIX. letnika Preseka, str. 322

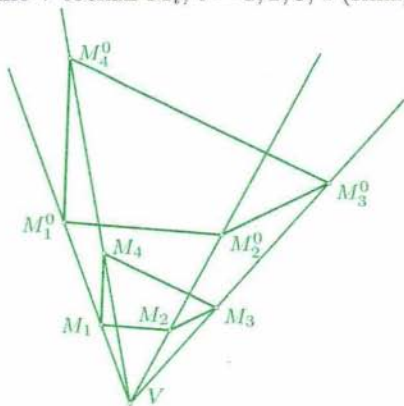
Ker nas od časa zastavitve naloge ločijo počitnice, nalogo ponovimo!

Z vrha 3 m visokega droga, ki stoji na kmečkem dvorišču, odlete točno opoldne v zrak štiri muhe. Vsaka leti premočrtno in s konstantno hitrostjo: prva 36 m/min, druga 49 m/min, tretja 64 m/min in četrta 81 m/min. Ob 12⁰⁵ se izkaže, da so vse štiri muhe v isti ravnini. Ali so še ob kakšnem času vse štiri v isti ravnini, če nobena od njih med letom ne naleti na oviro? Če so, navedite vse možnosti!

Na nalogo smo prejeli en sam odgovor. Poslala nam ga je Marta Cvijič iz Nomenja. Njena domneva, da so muhe v vsakem trenutku po 12. uri v isti ravnini, je pravilna. Četudi je ni pravilno dokazala, smo ji prisodili knjižno nagrado.

Rešitev naloge

Označimo z V vrh droga, s katerega vzlete muhe, ter z v_1, v_2, v_3 in v_4 hitrosti posameznih muh. Po pogojih naloge je $t_0 = 5$ min čas, po katerem so muhe v isti ravnini, pri čemer naj bodo posamezne muhe v točkah $M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0$ te ravnine (muha, ki leti s hitrostjo v_i , v točki M_i^0). Po času t naj bodo muhe v točkah $M_i, i = 1, 2, 3, 4$ (slika).



Ker lete muhe premočrtno in s konstantnimi hitrostmi, velja za $i = 1, 2, 3, 4$:

1. Točki M_i^0 in M_i ležita na istem poltraku z vrhom V .
2. $VM_i^0 = v_i t_0$, $VM_i = v_i t$ in zato $VM_i = \frac{t}{t_0} VM_i^0$.

To pa pomeni, da je točka M_i slika točke M_i^0 pri raztegu $\delta(V, \frac{t}{t_0})$, s središčem v točki V in z od i neodvisnim količnikom $\frac{t}{t_0}$. Raztegi preslikajo ravnine v vzporedne ravnine. Zato leže točke M_1, M_2, M_3, M_4 vse v isti ravnini, ki je slika ravnine točk $M_1^0, M_2^0, M_3^0, M_4^0$ pri raztegu $\delta(V, \frac{t}{t_0})$. Ker smo v tem premisleku čas t poljubno izbrali, sledi, da so vse štiri muhe, če niso ovirane, v vsakem trenutku po vzletu v isti ravnini.

Ugotovili smo celo več. Ravnine, v katerih se v posameznih trenutkih muhe nahajajo, so med seboj vzporedne. Lahko bi rekli, da se ravnina, v kateri so muhe, z enakomerno hitrostjo odmika od vrha droga. Miruje le v primeru, če muhe lete v ravnini, ki vsebuje vrh V .

Opazimo pa še nekaj. V nalogi je cel kup odvečnih podatkov. Precej očitno je, da ni pomembna višina droga, s katerega odlete muhe, odveč so tudi ostali številski podatki, saj so se npr. v računu hitrosti pokrajšale. Pomembno je le, da muhe odlete hkrati z istega mesta, da lete premočrtno in s konstantnimi hitrostmi ter da so vsaj enkrat med letom vse štiri v isti ravnini.

Marija Vencelj

NALOGA O FIBONACCIJEVEM ZAPOREDJU

Fibonaccijevo zaporedje je bilo in je še vedno deležno veliko pozornosti. Tudi Presek je že večkrat pisal o njem. Zaporedje je generirano s preprostim pravilom: Vsako število po prvih dveh enicah je vsota prejšnjih dveh števil. Če zaporedje označimo s $f_1, f_2, f_3, \dots$, potem je $f_1 = f_2 = 1$ in $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ za $n \geq 3$.

Poišči naslednji vsoti, sestavljeni iz členov Fibonaccijevega zaporedja:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n \quad (1)$$

in

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2. \quad (2)$$

Če si rezultata uganil, potem dokaži njuno veljavnost. S pomočjo (1) in (2) poišči vsa naravna števila, za katera je vsota

$$f_1(f_1 - 1) + f_2(f_2 - 1) + \dots + f_n(f_n - 1) \quad (3)$$

praštevilo.

Viktor Velkavrh in Roman Drnovšek

UREJENA LEPOTA RASTLIN – Filotaksa in Fibonaccijeva števila

Ob pogledu na nežen cvet, vejo ali drevo marsikdo vzklikne: "Kako lepo!"

Rastline pa niso le lepe, so tudi zelo zanimive. In to ne le z botaničnega vidika. Urejena lepota rastlin privlači pozornost matematikov že stoletja. Največ so se ukvarjali z najopaznejšimi geometrijskimi značilnostmi, kot so osna simetrija listov, rotacijska simetrija cvetov ali npr. spiralasta razporeditev lusk pri storžu pinijske. Po H. Weylu, avtorju knjige *Symmetry*, je *"lepota povezana s simetrijo"*.

Vendar k lepoti rastlin prispevajo tudi drugi faktorji. Eden od njih je eleganca in relativna preprostost pravil, ki opisujejo časovni razvoj rastlin. Še zanimivejša je samopodobnost rastlin, to je lastnost, da je posamezen kos geometrijsko podoben celoti. Tako so včasih lističi peresasto deljene lista še enkrat razrezani na manjše lističe, pri čemer je del lista na naslednji stopnji enake oblike kot ves list. Taka je npr. praprota. S tema dvema vprašanjema se ukvarja zanimiva knjiga *The Algorithmic Beauty of Plants* P. Prusinkiewicza in A. Lindenmayerja (Springer-Verlag, New York, 1990).



Slika 1.

Knjiga uspešno povezuje biologijo z matematiko in računalništvom. Primerjava pravih rastlin z računalniško narisanimi modeli je v veliko pomoč pri presoji, kako dobri so modeli. Lahko pa bi tudi rekli, da gre za povezavo med znanostjo in umetnostjo. Iz knjige vam predstavljamo računalniško narisani javor (slika 1) in cvet sončnice (slika 2). V knjigi sta sliki barvni in zato še prepričljivejši. Knjigo hrani tudi matematična knjižnica Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani.



Slika 2.

Filotaksa

V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali posebno značilnost nekaterih rastlin, poznano pod imenom **filotaksa**. Dobesedni prevod besede je urejenost listov, vendar pod njo razumemo tako pravilno urejenost listov na veji kot urejenost lusk na storžu ali cvetov v cvetnem košku.

Če vzamemo v roke lipovo vejico (slika na strani III, spodaj) in sledimo njenim listom od začetka do konca vejice, vidimo, da izraščajo listi izmenično na nasprotnih straneh vejice. Podobno razporeditev listov lahko opazimo še pri nekaterih drugih rastlinah, npr. pri brestu in lovri-kovcu. Koti med zaporednimi listi na vejici (natančneje, med mesti, kjer listi izraščajo) so med seboj enaki, merijo 180° , to je $\frac{1}{2}$ polnega obrata. Pri pokonci postavljeni vejici lahko tudi rečemo, da moramo od danega lista **enkrat** (po vijačnici) obiti vejico, da pridemo do prvega naslednjega lista, ki izrašča navpično nad njim. Pri tem pridobimo vzdolž veje **dva** lista. Pravimo, da imajo take rastline polovično filotakso (filotakso $\frac{1}{2}$).

Pri bukvi, leski, ognjenem trnu (slika na strani III, spodaj) ali oslezu potrebujemo za prehod od enega lista k naslednjemu zasuk za tretjino polnega obrata. Govorimo o filotaksi $\frac{1}{3}$.

Marelica ima filotakso $\frac{2}{5}$, torej je kot med dvema zaporednima listoma enak $\frac{2}{5} \cdot 360^\circ = 144^\circ$. To pomeni, da moramo **dvakrat** okrog veje, da pridemo do lista, ki prvi po vrsti izrašča natanko nad izbranim. To se zgodi pri **petem listu**. Tako filotakso imata tudi hrast in krvenka (sliki na strani III, zgoraj).

Nadalje imajo topol in hruška ter okrasna grma rododendron in pieris (slike na strani II) filotakso $\frac{3}{8}$, vrba in mandelj filotakso $\frac{5}{13}$ itd.

Vidimo, da so števci in imenovalci ulomkov, s katerimi se izraža filotaksa, Fibonaccijeva števila

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Posamezna filotaksa je kvocient dveh Fibonaccijevih števil $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$, katerih vrstni indeks v Fibonaccijevem zaporedju se razlikuje za 2. Enako dobro bi lahko uporabili pare zaporednih Fibonaccijevih števil. Matematik takoj vidi, da je negativnemu zasuku za $\frac{3}{8}$ polnega obrata enakovreden pozitivni zasuk za $\frac{5}{8}$ polnega obrata. V splošnem preide na ta način $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$ v $\frac{f_k}{f_{k+1}}$. Toda filotakso so seveda definirali botaniki. (Najnujnejše o Fibonaccijevih številih in zlatem razmerju najdete na koncu članka, v delu teksta, ki smo ga osenčili.)

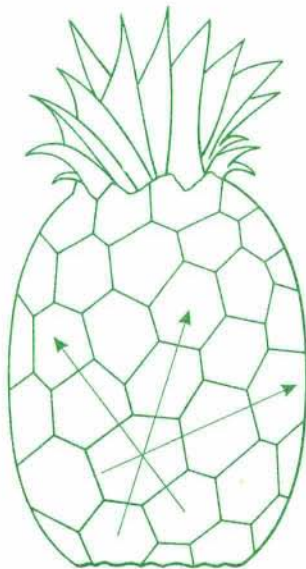
Drugačen tip filotakse srečamo pri urejenosti cevastih cvetov nekatereh košaric, npr. socvetja v sredini koška sončnice ali marjetice, pri urejenosti ananasovih lusk ali lusk storža jelke in pinije. Tu so cvetovi oziroma luske urejeni v spiralastih ali vretenastih zavojih.

Pri cvetu marjetke in ivanjščice (slika na naslovni strani) lahko sledimo, gledano iz centra glavice, 34 spiralam v negativni smeri in 21 spiralam v pozitivni smeri. Pri manjših sončnicah je v dveh smereh razločno vidnih 34 oziroma 55 spiral, pri večjih tja do 89 in 144 ali celo

144 in 233 pri nekaterih posebnih vrstah, ki imajo v košku tudi preko 2000 cvetov. Pri računalniško narisani sončnici na sliki 1 poteka 34 spiral v negativni smeri in 55 v pozitivni smeri.

Štirikotne luske storža pinije (slika na zadnji strani ovitka) so urejene v treh polžastih spiralah. Proti levi se od osnove rahlo dvigajo 3, nekoliko bolj strmih je 5 spiral, ki so usmerjene v desno, 8 najbolj strmih spiral pa spet poteka v levo. Posebno razločni so zavoji pri ananasu (slika 3), katerega bolj ali manj šestkotne luske so vidno urejene v vijačnice, ki potekajo v treh različnih smereh. Opazimo lahko 5 vzporednih vrst, ki vodijo v desno položno navzgor, 8 vrst gre nekoliko bolj strmo levo navzgor, 13 vrst pa se strmo ovija desno navzgor. (Včasih so smeri ustrezno zamenjane.)

Vidimo, da se tudi pri tem tipu filotakse pojavljajo samo Fibonaccijeva števila.



Slika 3.

Lista smo imenovali zaporedna, če med njima, vzdolž vejice, ne izrašča noben drug list. Govorimo tudi o zaporedju listov na vejici, pri čemer jih navadno številčimo od osnove vejice proti njenemu koncu. Tudi cevaste cvetove košaric ali luske storžev lahko postavimo v zaporedje, glede na njihovo oddaljenost od osnove, čeprav so, posebej pri glavicah košaric, te razdalje izredno majhne. Koti med zaporednimi listi, cvetovi ali luskami so pri večini rastlin natanko določeni, odvisni so le od rastline oziroma njene filotakse. Na fotografijah, ki smo jih posneli za Presek, tega razumljivo ne moremo razločno opazovati, v naravi pa je snovi za opazovanje dovolj.

Koti, ki pripadajo posameznim vrednostim filotakse, so enaki $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}} \cdot 360^\circ$, $k = 2, 3, 4, \dots$. To so zapored koti

$$180^\circ, 120^\circ, 144^\circ, 135^\circ, 138.5^\circ, 137.1^\circ, \dots$$

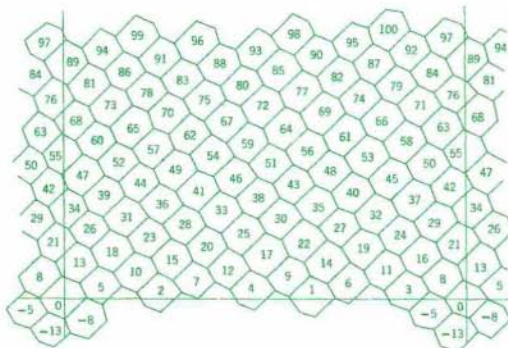
Ker zaporedje kvocientov $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ zaporednih Fibonaccijevih števil konvergira k razmerju zlatega reza $\tau = 1.6180339 \dots$, konvergira zaporedje filotaks k vrednosti $1 - \tau^{-1} = 0.3819660 \dots$ in z njim zgornje zaporedje kotov

proti kotu

$$(1 - \tau^{-1}) \cdot 360^\circ = 0.3819660 \cdot 360^\circ = 137.5^\circ.$$

Ta kot imenujemo tudi Fibonaccijev kot.

Zanimivo povezavo med posameznimi vrednostmi filotakse najdemo v knjigi *Introduction to geometry* H. S. M. Coxeterja, od koder je tudi slika 4. Na sliki je prikazano površje ananasa kot plašč pokončnega krožnega valja, razgrnjenega v ravnino. Šestkotne luske so oštevilčene v vrstnem redu glede na njihovo oddaljenost od vodoravne osnove. Da se videti, da je kot med zaporednima luskama približno Fibonaccijev kot. Luska 0 ima za sosede luske z oznakami 5, 13 in 8, ki določajo vidne smeri v vzorcu.



Slika 4.

Če enakomerno raztegujemo sliko v navpični smeri, se manjša topi kot med smerema od središča luske 0 proti luskama 5 in 8, dokler ne postane pravi kot. Tedaj šestkotne luske preidejo v pravokotnike. Vrste (na valju so to vijačnice), ki pripadajo luski 13, postanejo manj razločne, 3 nove vrste, dvigajoče se proti levi, pa postanejo bolj opazne. Tako preprostejšo ureditev smo opazili pri storžu pinije. Nadaljnje raztegovanje bi zakrilo smeri, ki pripadajo številu 8, in odkrilo 2 novi smeri, usmerjeni proti desni. Tako ureditev listov smo npr. opazili pri hrastu.

Če pa vzorec stiskamo v navpični smeri, raste kot med smerema od luske 0 proti luskama 8 in 13, dokler ne postane pravi. Tedaj nastopi Fibonaccijevo število 21 kot sosed števila 0, odmakne pa se število 5.

Pri raztegovanju in stiskanju valja njegovega obsega nismo spremenjali. Za spreminjanje vzorca je torej odločilno razmerje višine in premera valja. Če se valj hitreje debeli, kot pridobiva na višini, lahko en par Fibonaccijevih števil preide v drugega, kar se včasih res zgodi pri rasti iste rastline.

Če valj nadomestimo s stožcem, kot je primer pri jelki, ne dobimo vijačnic, ampak polžaste spirale. Če privzamemo, da so tvorilke stožca čedalje bolj pravokotne na os stožca, dobimo mejni primer (marjetica, sončnica), pri katerem polžaste spirale preidejo v logaritmčne spirale.

Kako razkriti skrivnost očitne naklonjenosti narave zlatemu razmerju? Ali morda velja, da rastline sledo naslednjima praviloma, ki ju je za Fibonaccijev kot odkril Vogel:

1. Vsak nov list ali cvet je postavljen na mesto, ki je za fiksen kot α zavrnjeno od položaja prejšnjega lista ali cveta.
2. Pozicijski vektor vsakega novega lista ali cveta kaže v najširšo obstoječo vrzel med pozicijskimi vektorji starejših listov ali cvetov.

Gotovo ne gre ugovarjati tema osnovnima predpostavkama (druga je z vidika iskanja svetlobe še kako smiselna), vendar sta nezadostni, kot ugotavlja Ridley, strokovnjak s tega področja. Pojasnjuje:

Medtem, ko je razumno domnevati, da rastline vsebujejo genetsko informacijo za določanje velikosti fiksnega vmesnega kota, je povsem nemogoče samo na tej osnovi fiksirati vmesni kot do take neverjetne natančnosti, kot jo opažamo v naravi, kajti naravna variacija je pri bioloških pojavih normalno precej velika.

Natančnost je res neverjetna. Pri številnih cvetovih sončnic sta npr. opazni spirali 55 in 89. To pa pomeni, da mora pri njih ležati izbrani kot med $\frac{21}{55} \cdot 360^\circ$ in $\frac{34}{89} \cdot 360^\circ$, kar zahteva relativno napako manjšo od $\frac{1}{1869}$.

Povejmo še, da se pri nekaterih rastlinah filotaksa izraža s posplošenimi Fibonaccijevimi števili, npr. 2, 1, 3, 4, 7, 11, ..., pa 3, 1, 4, 5, 9, ... ali 5, 2, 7, 9, 16, ..., katerih zaporedni kvocienti konvergirajo k zlatemu razmerju.

Zato neobremenjeni zaključimo z mislijo, da filotaksa ni kak splošni zakon, ampak osupljivo prevladujoča težnja rastlin.

Fibonaccijeva števila

Zaporedje Fibonaccijevih števil $\{f_k, k \in \mathbb{N}\}$ je določeno s predpisom

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{k+2} = f_k + f_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Začetek zaporedja je torej takle:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Zaporedje kvocientov zaporednih Fibonaccijevih števil $\frac{f_k}{f_{k+1}}$ je

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \dots,$$

vrednosti filotakse pa so kvocienti $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$, kjer je $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}} = \frac{f_{k+1}-f_k}{f_{k+1}} = 1 - \frac{f_k}{f_{k+1}}$.

Zlato razmerje

Če daljico razdelimo na dva dela tako, da je razmerje dolžin večjega in manjšega dela enako razmerju dolžin dane daljice in večjega dela, pravimo, da smo daljico razdelili v zlatem rezu. Delilno razmerje imenujemo zlato razmerje in ga običajno označimo s τ .

Zlato razmerje je pozitivna rešitev enačbe $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ in sicer je

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.6180339 \dots$$

Zveza med zlatim razmerjem in Fibonaccijevimi števili

Številu τ pripada neskončni verižni ulomek, v katerem so vsi členi enaki 1, torej

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Med vsemi verižnimi ulomki ta ulomek najpočasneje konvergira.

Delni ulomki verižnega ulomka števila τ so enaki kvocientom $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ zaporednih Fibonaccijevih števil. Za ilustracijo izračunajmo nekaj začetnih vrednosti:

$$1 = \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1} = 2 = \frac{2}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2},$$

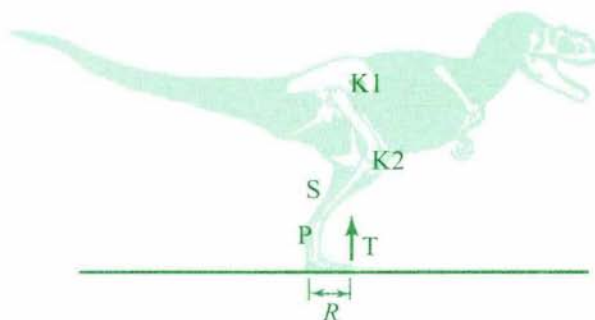
$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}, \dots$$

To pomeni, da zaporedje kvocientov $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ zaporednih Fibonaccijevih števil konvergira k τ . Zaporedje recipročnih števil $\frac{f_k}{f_{k+1}}$ konvergira k $\tau^{-1} = \tau - 1 = 0.6180339 \dots$, količniki $\frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$, s katerimi se izraža filotaksa, pa konvergirajo proti $1 - \tau^{-1} = 2 - \tau = 0.3819660 \dots$

O GIBANJU DINOZAVROV

Članek *Kako hitro so se gibali dinozavri?* (Presek **27** (1999/2000) 142) je opisal, kako so fiziki pomagali določiti hitrost izumrlih plazilcev. Privzeti smemo, da so vsi vretenčarji *geometrijsko podobni* in se gibljejo *dinamično podobno*. Potem je razmerje dolžine koraka in dolžine nog linearno odvisno od hitrosti, deljene s korenem iz zmnožka težnega pospeška in dolžine nog. Dolžino nog so določili po izkopanih okamenelih kosteh in dolžino koraka po okamenelih sledih stopinj. Ugotovili so, da so plazilci z majhno maso tekli hitro, dvonožni plazilci z maso pol tone npr. s hitrostjo do 12 m/s. Plazilci z veliko maso pa naj bi se premikali znatno počasneje, strah zbujaajoči dvonogi tiranozaver z maso 5 ton npr. s hitrostjo do 2 m/s.

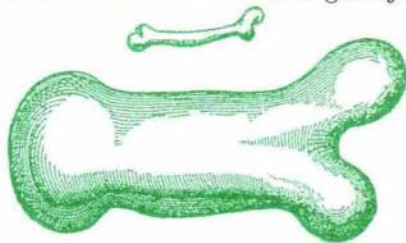
Prav pri tiranozavrih, ki so jim ameriški znanstvenofantastični filmi namenili pomembno vlogo, pa so se pojavile težave. Zanje, kot za druge mesojede velike plazilce, namreč ni bilo mogoče neposredno določiti dolžine koraka, ker ni bilo okamenelih sledi stopinj. Ohranile so se le sledi stopinj manjših plazilcev s krajšim korakom. Po primerjavi okostja tiranozavra z okostji izumrlih velikih ptic in drugih hitrih tekačev so nekateri raziskovalci sklepali, da je tiranozaver lahko dosegel hitrost 20 m/s. Takemu plenilcu z 2,5 metra dolgimi nogami in zelo močnimi čeljustmi ne bi mogla ubežati nobena žival (slika 1). Drugi pa so trdili, da bi se tiranozaver resno poškodoval, če bi se spotaknil pri hitrosti, večji od 10 m/s, in da zato ni mogel doseči tolikšne hitrosti. V Presekovem članku smo kot mejo hitrosti pettonskega tiranozavra navedli 2 m/s. Mnenja o največji hitrosti tiranozavra so se potemtakem močno razhajala.



Slika 1. Model odraslega tiranozavra z nazakanim okostjem: K1 kolčni sklep, K2 koleno, S skočni sklep, P sklep prsta na nogi, T prijemališče sile tal, ki bi pri ročici R ob odzivu na sredi koraka, ko bi med tekom bilo težišče tiranozavra najnižje, dosegla 2,5-kratno težo.

Zato je zbudil precej pozornosti članek Johna R. Hutchinsona in Mariana Garcie *Tiranozaver ni bil hiter tekač*, ki je izšel v februarški številki londonske revije *Nature*. Osnovne zamisli članka so razmeroma preproste.

Podobne je uporabil že Galileo Galilei v knjigi *Razprave in matematični dokazi v dveh novih znanostih, ki zadevata mehaniko in lokalna gibanja* leta 1638. "Mehanika" ali "prva nova znanost" je zajela razpravo o trdnosti: "Po rečenem preprosto vidite, da ni mogoče izdatno povečati velikosti predmetov v umetnosti ali v naravi. Niti ni na primer mogoče zgraditi zelo velikih ladij, palač ali svetišč, da bi njihova vesla, jadralni prečniki, železne vezi, skratka vsi deli, opravljali svoje naloge, niti ne more narava ustvariti izredno velikih dreves, ker bi se njihove veje odlomile zaradi lastne teže. Tako ne bi bilo mogoče sestaviti kosti ljudi, konj in drugih živali, da bi opravljale svojo običajno nalogo, če bi močno povečali višino teh živali" (slika 2).



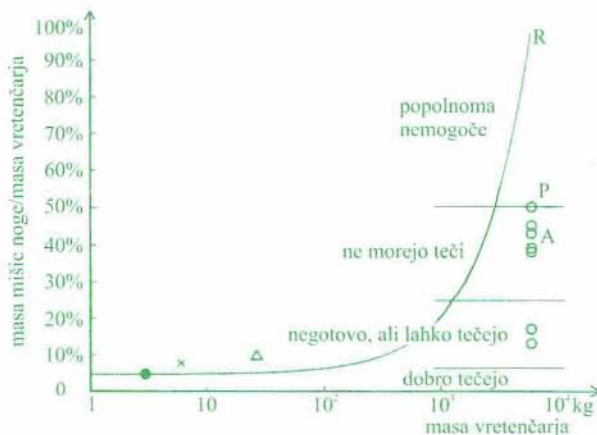
Slika 2. Galilei je narisal kost in trikrat daljšo kost s trikrat večjo trdnostjo. "S slike lahko razberete, kako nesorazmerna se zdi večja kost. Jasno, če kdo pri velikanu želi obdržati enako razmerje udov kot pri navadnem človeku, mora najti tršo in močnejšo sestavino kosti, ali se mora sprijazniti z zmanjšano močjo glede na ljudi. Če bomo povečali višino, bo [velikan] padel in ga bo stisnila lastna teža."

Prostornina geometrijsko podobnih teles in z njo masa naraščata sorazmerno s kubom linearnih razsežnosti, trdnost kosti pa sorazmerno z njihovim presekom, to je sorazmerno s kvadratom linearnih razsežnosti. Iz tega izhaja približni *potenčni zakon*, da je trdnost sorazmerna s kvadratom linearne razsežnosti, ki je sorazmeren z maso na eksponent $\frac{3}{2}$. Glede na tak razmislek bi moral imeti zelo velik kopenski vretenčar zelo debele kosti. Smiselno je namreč privzeti, da imajo vsi vretenčarji približno enako zgrajene kosti.

Podobno je mogoče sklepati za mišice. Tudi sila, s katero more delovati mišica vretenčarja, je sorazmerna s presekom mišice. Učinkovitost mišic je po tem približno sorazmerna z maso na eksponent $\frac{2}{3}$ in specifična, to je na enoto mase preračunana, učinkovitost mišic sorazmerna z maso na eksponent $-\frac{1}{3} = -0,33$. Mišice potemtakem delujejo tem bolj učinkovito, čim manjša je masa vretenčarja. (Podrobnejša raziskovanja so pokazala, da je specifična učinkovitost sorazmerna z maso na eksponent $-0,26$.) Tako sta sklepala tudi Hutchinson in García, ki sta poleg tega podrobno raziskala razmere v štirih sklepih na nogi: kolčnem, kolenskem, skočnem sklepu in sklepu v prstih. Izračune sta naredila za tiranozavra, manjšega dinosavra ter za piščanca in aligatorja kot zastopnika sedanjih vretenčarjev. Podatke za sedanja vretenčarja je mogoče izmeriti enako kot podatke za dolžino kosti izumrlih plazilcev, maso slednjih pa je mogoče

dokaj zanesljivo oceniti po podobnosti. Predvsem ju je zanimalo razmerje med skupno maso glavnih mišic v štirih sklepih noge in maso vretenčarja. Ugotovila sta, da to razmerje z naraščajočo maso vretenčarja izrazito narašča.

Hutchinson in Garcia sta uporabila več modelov za izumrle plazilce in jih preskusila z modeloma piščanca in aligatorja. Piščanec ima skoraj dvakrat večje razmerje od razmerja, ki omogoča hiter tek, in zato lahko hitro teče. Aligator, bližnji sorodnik tiranozavra, pa ima približno dvakrat manjše razmerje od razmerja, ki omogoča hiter tek, ter se giblje počasi, in to po štirih, ne po dveh. Vretenčar na dveh nogah ima razmerje veliko manjše kot 50%, ker bi ga sicer sestavljale le mišice obeh nog. Po dobljenih izidih sta znanstvenika sklepala, da tiranozaver ni mogel teči. Končni izid sta izrazila dokaj previdno, kar je glede na negotovost nekaterih podatkov in privzetkov pri modelih razumljivo. Po njunem mnenju tiranozaver zagotovo ni dosegel hitrosti 20 m/s in najbrž ne hitrosti 10 m/s, morda v skrajnem primeru 5 m/s. Zanj je bila bolj značilna hoja s hitrostjo 1 do 2 m/s. Ta sklep je mogoče razširiti tudi na druge izumrle plazilce z veliko maso. Tudi ti so se gibal počasi, tako da so lahko postali plen tiranozavrov. Na splošno je mogoče reči, da so kopenski vretenčarji postajali vse počasnejši, ko je naraščala njihova masa.



Slika 3. Razmerje med skupno maso mišic ene same noge vretenčarja in telesno maso izrazito narašča z maso vretenčarja. Krivulja kaže odvisnost za piščanca z vse večjo maso in ustrezno povečanimi drugimi podatki. Pri šesttotskem tiranozavru bi razmerje doseglo 98% (R). Pri dvonožnem vretenčarju je teoretična zgornja meja za razmerje 50%, praktična meja pa je veliko nižja. Tiranozaver ni mogel teči! Votli krožci ustrezajo raznim modelom tiranozavra z maso 6 ton (P z značilnostmi piščanca, A z značilnostmi aligatorja), trikotnik majhnemu dinozavru, križec aligatorju in polni krožec piščancu.

Razprava še enkrat potrjuje misel, da je fizika zelo koristna v drugih vejah naravoslovja in v drugih znanostih.

Vzemimo, da ima glavna mišica v sklepu i z vodoravno osjo gostoto ρ , dolžino l in presek S . Masa mišice je $m_i = \rho Sl$. Mišica lahko uravnesi silo $F = \sigma S$, če na enoto preseka prenese silo σ . Navor te sile je $M = rF$, če prijemlje mišica z ročico r glede na os. Za razmerje med maso mišice in maso vretenčarja m sledi

$$\frac{m_i}{m} = \frac{\rho l S}{m} = \frac{\rho l F}{\sigma m} = \frac{\rho l M}{\sigma r m}.$$

Gostota mišic je pri vseh vretenčarjih približno $1,06 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ in sila na enoto preseka približno $3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Pri teku naj bi v trenutku, ko je sredi koraka težišče najnižje in se začne pospešeno gibati navzgor, tla na nogo delovala z 2,5-kratno težo vretenčarja (pri noju so izmerili 2,7-kratno težo). Tedaj smemo vzeti, da je vsota sil v sklepih enaka sili tal in navor sil v sklepih enak navoru sile tal z ročico R od prstov do sklepa v prstih. Pri tem privzamemo, da teče vretenčar s hitrostjo 20 m/s , ko je kvocient te hitrosti in korena iz zmnožka dolžine nog s težnim pospeškom enak 4.

V kolčnem sklepu tiranozavra je npr. navor mišice $7,5 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{N}$, dolžina mišice $1,2 \text{ m}$ in ročica $r = 0,37 \text{ m}$. To da za razmerje med maso glavne mišice v kolčnem sklepu in maso tiranozavra 15%. Za tri druge sklepe dobimo v tem primeru razmerja 4%, 15% in 9%, kar da skupaj 43% in za obe nogi 86%. Različni modeli so dali za tiranozavra z maso 6 ton v teku za omenjeno razmerje od 26% do 100%. Nasprotno od tega so za razmerje mišic noge in mase telesa pri tiranozavru neposredno izmerjeni podatki dali veliko manj, samo 7% do 10%. To je dopustilo sklep, da je tiranozaver imel premalo mišic, da bi izravnale silo tal in njen navor pri odzivu med tekom, torej ni mogel teči. Za piščanca in aligatorja izračunamo razmerji 4,7% in 7,7%, medtem ko dajo merjenja 8,8% in 3,6%. Po tem smo prej trdili, da ima piščanec skoraj dvakrat večje razmerje od razmerja, ki omogoča hiter tek, in aligator razmerje približno dvakrat manjše od razmerja, ki omogoča hiter tek, kar pomeni, da piščanec lahko hitro teče, aligator pa se giblje le počasi.

PROGRAMERSKE PRIGODE

Včasih, ko mi čas dopušča, rešujem programerske naloge z različnih študentskih in srednješolskih tekmovanj. Že kar nekaj časa naloge izbiram s strežnika Univerze v Valladolidu v Španiji, ki je dosegljiv na naslovu

<http://acm.uva.es/problemset/>

Na strežniku pa ni samo obsežna zbirka nalog. Na njem je nameščen tudi Sodnik – posebna programska oprema, ki omogoča, da lahko po elektronski pošti pošljemo svoje rešitve nalog v (avtomatsko) preverjanje.

Pri sestavljanju rešitev, ki jih pošiljamo v preverjanje Sodniku, se moramo držati nekaterih pravil. Vhodne podatke vedno beremo s standardnega vhoda (to je običajno tipkovnica, operacijski sistemi pa omogočajo, da ob zagonu programa za standardni vhod uporabimo npr. datoteko), izpisovanje pa poteka na standardni izhod. Oblika vhodnih in izhodnih podatkov je natančno opisana v besedilu naloge in se je moramo strogo držati. Običajno Sodnik rešitev preveri tako, da prejeti program (ta mora biti napisan v jeziku C, C++, pascal ali java) prevede, nato pa ga požene na nam neznanih vhodnih podatkih. Odgovore, ki jih izpiše naša rešitev, primerja s tistimi, ki jih ima shranjene v svoji bazi pravilnih rešitev. Če se ujemajo, je rešitev sprejeta, sicer je zavrnjena. Pri nalogah, ki dopuščajo več različnih rešitev, je preverjanje bolj zapleteno in vključuje tudi posebne programe, napisane posebej za preverjanje rešitev takih nalog.

Sodnik postavlja še nekaj drugih omejitev. Velikost programov, ki jih lahko pošljemo v presojo, je omejena na 40000 znakov. Sodnik tudi ni “neskončno” potrpežljiv. Ko požene prevedeno rešitev, na odgovore čaka le določen čas (ta je v splošnem odvisen od naloge). Včasih je bil ta čas pri večini nalog enak 90 sekund, po posodobitvi Sodnika pa so ga skrajšali na 30 sekund. Torej: rešitve, ki jih pripravimo, morajo delovati povsem pravilno, ne smejo biti preveč “razvlečene”, pa še dovolj hitro morajo najti odgovore (kar včasih ni prav preprosto).

Pred časom sem imel precej opraviti z nalogo številka 106 (na Sodniku so jo poimenovali *Fermat vs. Pythagoras*). Gre za ne prezahtevno matematično nalogo o pitagorejskih trojkah. Spomnimo se, da trojici naravnih števil x , y , z pravimo *pitagorejska trojka*, če zadošča enakosti $x^2 + y^2 = z^2$. Trojka je *primitivna*, če so si števila x , y in z paroma tuja. Kratek razmislek pokaže, da za primitivnost trojke zadošča, da sta si tuji le števili x in y . Najbolj znana pitagorejska trojka je gotovo $x = 3$, $y = 4$ in $z = 5$: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Ta trojka je tudi primitivna.

Opis naloge. Naloga zahteva, da napišemo program, ki bo z vhoda bral naravna števila in za vsako prebrano število n na izhod v svojo vrstico izpisal dve števili. Prvo število mora biti število primitivnih pitagorejskih trojk x, y, z , za katere je $1 \leq x < y < z \leq n$; drugo število pa pove, koliko števil iz množice $\{1, 2, \dots, n\}$ ne nastopa v nobeni pitagorejski trojki x, y, z , ki zadošča omejitvi $1 \leq x < y < z \leq n$. Branje se konča, ko na vhodu zmanjka števil (pogoj *end of file*). Na primer, če so na vhodu števila

10
25
100

mora program izpisati

1 4
4 9
16 27

Da bomo nalogo bolje razumeli, pogledjmo, kako iz števila $n = 10$ pridemo do odgovorov 1 in 4. S poskušanjem hitro ugotovimo, da je že omenjena trojica $x = 3, y = 4, z = 5$ edina primitivna pitagorejska trojka, ki izpolnjuje zahtevo $1 \leq x < y < z \leq 10$ (trojka $x = 6, y = 8, z = 10$ tudi ustreza neenakostim, a ni primitivna). Drugi odgovor, 4, pa pomeni, da so med števili $1, 2, \dots, 10$ natanko 4, ki niso del nobene pitagorejske trojke x, y, z , ki ustreza omejitvam $1 \leq x < y < z \leq 10$. To so števila 1, 2, 7 in 9.

Nadaljevanje opisa naloge. Pri opisu naloge sem izpustil še eno zelo pomembno podrobnost. Ko sem se naloge lotil prvič, je veljalo, da nobeno število na vhodu ne bo večje od 1000.

Kadar je število različnih možnih vhodnih podatkov majhno (pri naši nalogi 1000), se reševanja lahko lotimo tako, da vnaprej izračunamo vse možne odgovore, te vgradimo v program, dodamo še branje vhodnih podatkov ter pravilen izpis pripadajočih odgovorov in že imamo delujočo rešitev. Ker taka rešitev ne opravlja nobenega zamudnega računanja, saj vse odgovore pozna že vnaprej, je tudi zelo hitra.

Odgovorov seveda nisem iskal s svinčnikom in papirjem, ampak sem sestavil pomožni program, ki je to opravil namesto mene. Program je ob nekaj omejitvah pregledal vse dopustne trojice. Ker pa sem ga zagnal le enkrat, me ni skrbelo, ker ni bil ravno najhitrejši. Izračunane vrednosti sem v primerni obliki shranil na datoteko, dodal še nekaj vrstic kode in že sem imel rešitev (zapisano v jeziku C). Njen bistveni del je podan v nadaljevanju:

```

#include <stdio.h>

#define MAXN 1000

int stevci[MAXN][2] = {
    {0,1},{0,2},{0,3},{0,4},{1,2},
    {1,3},{1,4},{1,5},{1,6},{1,4},

    :      (tu manjka 196 vrstic, narejenih s pomožnim programom)

    {157,202},{157,203},{157,204},{157,205},{157,203},
    {157,204},{158,204},{158,205},{158,205},{158,205}
};

int main(void)
{
    int n;

    while (scanf("%d", &n) == 1)
        printf("%d %d\n", stevci[n - 1][0], stevci[n - 1][1]);

    return 0;
}

```

Nekaj časa sem se lahko ponašal z eno od najhitrejših rešitev, a sčasoma se je na Sodniku nabralo ogromno podobno hitrih rešitev, zato so se sestavljavci nalog odločili, da nalogo nekoliko otežijo. Zgornjo mejo za velikost števil na vходу so s 1000 dvignili na 10000.

Seveda se je bilo tudi spremenjene naloge moč lotiti na enak način, le da je imela dobljena rešitev namesto nekaj čez 200 več kot 2000 vrstic. In, zlomka, več kot 40000 znakov. Seveda sem takoj pomislil, da bi izračunane vrednosti lahko zapisal v bolj strnjeni obliki, z manj znaki. Do $n = 10000$ obstaja le 1593 primitivnih pitagorejskih trojk, v nobeni trojki pa ne sodeluje 1669 števil. V program bi tako lahko zakodiral le vrednosti, kjer se spremeni število trojk, na začetku rešitve pa bi iz teh podatkov hitro naračunal prave odgovore. A nisem imel prave volje za take dopolnitve. Raje sem vzel že napisani pomožni program, s katerim sem štel trojke, mu dodal branje podatkov ter prilagodil izpis. Tako sem dobil naslednjo rešitev:

```
#include <stdio.h>

#define MAXN 10000

extern long gcd(long, long); /* Poišče največji skupni */
                             /* delitelj števil. */

int main(void)
{
    int stevci[MAXN][2]; /* tabela odgovorov */
    int vtrojki[MAXN + 1] = {0}; /* Ali je število v kaki trojki? */
    int zunaj = 0; /* Koliko števil od 1 do n ni v nobeni trojki. */
    int trojke; /* Koliko primitivnih trojk z z ≤ n smo našli. */
    long x, y, z; /* long: kvadrati morda lahko presežejo INT_MAX. */
    int n;

    for (n = 1; n ≤ MAXN; n++) {
        /* Iščemo trojke, pri katerih je z = n. */
        zunaj++;
        for (x = 1, y = n - 1, z = n; x < y; x++) {
            while (x * x + y * y > z * z) y--;
            if (x * x + y * y == z * z) { /* nova trojka */
                /* Za primitivnost zadošča, da sta si tuja le x in y. */
                if (gcd(x, y) == 1) trojke++;
                if (!vtrojki[x]) { vtrojki[x] = 1; zunaj--; }
                if (!vtrojki[y]) { vtrojki[y] = 1; zunaj--; }
                if (!vtrojki[z]) { vtrojki[z] = 1; zunaj--; }
            }
        }
        /*for x,y,z*/
        stevci[n - 1][0] = trojke; /* Zapomnimo si število trojk */
        stevci[n - 1][1] = zunaj; /* in število števil zunaj trojk. */
    } /*for n*/

    while (scanf("%d", &n) == 1)
        printf("%d %d\n", stevci[n - 1][0], stevci[n - 1][1]);

    return 0;
}
```

Ko sem se počasi le sprijaznil z ugotovitvijo, da moja rešitev ni več med najhitrejšimi, so na Sodniku ponovno popravili nalogo. Tokrat so zgornjo mejo za števila na vходу povečali na 100000. Nič posebnega, sem si mislil. Popravim vrednost MAXN na 100000, spremenim tip n-ja v long, pa bo. A to je bil račun brez krčmarja. Rešitev je bila tako počasna,

da je prekoračila časovno omejitev, ki jo postavlja Sodnik. Tudi majhne izboljšave niso pomagale. Čas je bil za korenite posege.

Poznal sem formule, s katerimi opišemo primitivne pitagorejske trojke. V vsaki primitivni pitagorejski trojki sta števili x in y različne parnosti. Vse primitivne trojke, pri katerih je x sodo število, dobimo iz formul

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2 \quad \text{in} \quad z = a^2 + b^2,$$

kjer sta a in b , $a > b$, naravni števili različne parnosti, ki sta si tuji. Z zgornjimi formulami vsako primitivno pitagorejsko trojko dobimo na en sam način. Dokaz naštetih trditev ni težak, najdete ga npr. v [1, razdelek 10]. Gornje formule opisujejo primitivne trojke, pri katerih je x sodo (y pa potem liho) število. Za dano vrednost komponente z je takih trojk seveda natanko toliko kot tistih, pri katerih je $x < y$.

Na osnovi zgornjih formul sem sestavil naslednjo rešitev, ki je na Sodnikovem seznamu še vedno ena od najhitrejših:

```
#include <stdio.h>

#define MAXN 100000

extern long gcd(long, long);

int main(void)
{
    const int meja = 316; /* koren iz MAX je zgornja meja za a */
    long n, x, y, z, xx, yy, a, b;
    long stevci[MAXN][2] = {{0,0}};
    long prva[MAXN] = {0}; /* največje število v najmanjši trojki */

    /* Generiranje pitagorejskih trojk. */
    for (a = 2; a <= meja; a++)
        for (b = 1; b < a && (z = a * a + b * b) <= MAXN; b++)
            if (a % 2 != b % 2 && gcd(a, b) == 1) {
                /* Imamo novo primitivno pitagorejsko trojko. */
                x = 2 * a * b; y = a * a - b * b;
                stevci[z - 1][0]++; /* ena primitivna trojka več */
                /* Pregledamo večkratnike in beležimo "najmanjše" trojke. */
                for (xx = x, yy = y, n = z; n <= MAXN;
                    xx += x, yy += y, n += z) {
                    if (prva[xx-1] == 0 || prva[xx-1] > n) prva[xx-1] = n;
                    if (prva[yy-1] == 0 || prva[yy-1] > n) prva[yy-1] = n;
                    if (prva[n-1] == 0 || prva[n-1] > n) prva[n-1] = n;
                } /*for*/
            } /*if*/
}
```

```

for (n=1; n < MAXN; n++) stevci[n][0] += stevci[n-1][0]; /*(1)*/
for (n=0; n < MAXN; n++)                               /*(2)*/
    if (prva[n] != 0) stevci[prva[n]-1][1]++;
for (n=1; n < MAXN; n++) stevci[n][1] += stevci[n-1][1]; /*(3)*/
for (n=0; n < MAXN; n++) stevci[n][1] = n+1-stevci[n][1]; /*(4)*/

while (scanf("%ld", &n) == 1)
    printf("%ld %ld\n", stevci[n - 1][0], stevci[n - 1][1]);

return 0;
}

```

Program zahteva kratko razlago. Z zankama `for` pregledamo vse primerne vrednosti za a in b ($1 \leq b < a \leq \sqrt{10^5}$, test parnosti in test tujosti) ter tako odkrijemo vse primitivne pitagorejske trojke do 10^5 . V prvem delu tabele `stevci` štejemo, koliko je takih trojk z izbrano vrednostjo z -ja. Te kasneje v zanki (1) še seštejemo od začetka do tekočega elementa in tako ugotovimo, koliko je primitivnih trojk, ki imajo vse komponente manjše od izbrane vrednosti.

Za izračun drugih delov odgovorov pa je pomembna pomožna tabela `prva`. V njej za vsako število zabeležimo najmanjšo pitagorejsko trojko (glede na vrednost komponente z), ki to število vsebuje. Vrednost $k > 0$ v i -tem elementu tabele (ta ima indeks $i - 1$) tako pomeni, da smo našli pitagorejsko trojko, ki vsebuje število i , katere komponenta z je enaka k , trojke z manjšo vrednostjo komponente z pa nismo našli. Vrednost $k = 0$ po koncu obeh zank `for` pomeni, da število i ne nastopa v trojkah s komponentami do 10^5 . V nadaljevanju iz vrednosti v tabeli `prva` izračunamo druge dele odgovorov. Najprej v zanki (2) za vsako število $n \leq 10^5$ ugotovimo, koliko je števil m , za katera je n največje število v najmanjši pitagorejski trojki, ki vsebuje m . Ta števila so se pri tem n -ju prvič znašla v kaki pitagorejski trojki. Nato v (3) podobno kot v (1) izračunamo vsote začetkov tabele, da ugotovimo, koliko števil do tekočega je v kaki pitagorejski trojki. V (4) nato v tabelo vpišemo "nasprotno" vrednosti, tiste, ki povedo, koliko števil do tekočega ni v nobeni pitagorejski trojki. Pri vseh operacijah z elementi tabel moramo paziti na indekse, saj ima v C-ju prvi element tabele indeks 0.

Nedavno so na Sodniku zgornjo mejo za števila na vhodu še enkrat dvignili, in sicer na 10^6 . Rešitve skoraj ni bilo treba spremeniti, le vrednosti za konstanti `MAX` in meja je bilo treba popraviti na 10^6 oz. 1000.

Literatura

[1] J. Grasselli, Diofantske enačbe, Knjižnica Sigma 38, DMFAS, 1984

Martin Juvan

IZSEV ZVEZDE

Zasledil sem, da pri pisanju o zvezdah nekateri nepravilno uporabljajo izraz *izsev zvezde*. Ker gre za eno najpomembnejših karakteristik zvezde, sem se odločil, da za Presek o tem napišem kratek prispevek.

Izsevani ali oddani svetlobi oz. svetlobni moči zvezde rečemo izsev zvezde. To je količina, ki pove, koliko svetlobe (sevanja, energije) zvezda v sekundi izseva (odda) na vse strani v prostor. Izsev zvezde označimo s črko P (power), enota pa je ista kot enota za moč, t.j. vat ($W=J/s$). Čim več vatov izseva zvezda, večji je njen izsev.

Izsev Sonca je okoli $4 \cdot 10^{26}$ W (oz. Sonce ima izsev okoli $4 \cdot 10^{26}$). Druge zvezde imajo večji ali pa manjši izsev glede na izsev Sonca (lahko več desetkrat, stokrat, tisočkrat večji oz. manjši izsev).

Zvezda kot žareča plinska krogla enakomerno na vse strani izseva izsev P . Če zanemarimo svetlobne izgube, se P porazdeli po krogli s površino $4\pi r^2$, kjer je r oddaljenost zvezde. Opazovalčevo oko na Zemlji v razdalji r od zvezde prestreže svetlobni tok z gostoto $j = P/4\pi r^2$. Ta vrednost za gostoto toka je odločilna za vtis na mrežnici človeškega očesa. Vtis je tem močnejši, čim večji je izsev zvezde in čim bližje nam je zvezda (kar neposredno razberemo iz zapisanega ulomka). Drugače povedano, tudi če ima zvezda zelo velik izsev, a je zelo daleč, se zdi za oko šibka, bližnja zvezda z majhnim izsevom pa svetlejša.

Omenimo še eno svetlobno količino, *sij zvezde*. Sij in izsev zvezde sta dve povsem različni svetlobni količini in ju ne smemo zamenjevati. Če izsev označuje v časovni enoti izsevano (oddano) svetlobo zvezde, sij meri svetlobo, ki jo zazna človeško oko (ali tudi drug sprejemnik svetlobe).

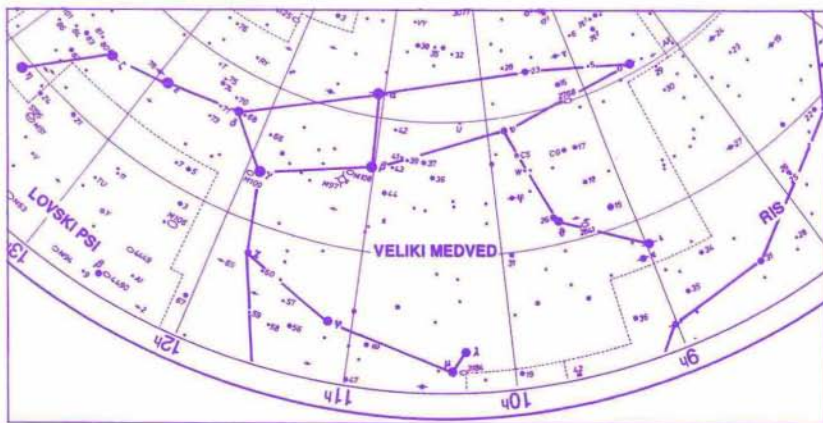
Človek vidi oz. opazuje zvezde. Na nebu zaznava navidezno sliko. Sploh so vsa telesa in gibanja na nebu navidezna, saj jih tja projiciramo. Pogled na temno zvezdno nebo nam pove, da zvezde različno močno sijajo. Samo zvezde Velikega voza je treba pogledati, pa to takoj opazimo. Vtisu (občutku), ki ga ima človeško oko, ko sprejme njegova mrežnica svetlobo oddaljene zvezde ali kakega drugega vesoljskega telesa, rečemo *sij*. Izraz je pri nas vpeljal srednješolski učbenik astronomije, velja že več kot 30 let (angl. brightness of a star).

Beseda sij je vezana na občutek, človeškemu očesu se torej zvezda takšna zdi, zato pred besedo sij ni treba postavljati dodatne besede navidezni (da bi izraz nosil ime navidezni sij). Zadostuje, da rečemo sij zvezde je tolikšen in tolikšen.

Sij zvezde je povezan z gostoto vpadne svetlobe z zvezde na mrežnico očesa (ali kak drug merilnik svetlobe). Ni pomembno, ali je zvezda daleč ali blizu, velika ali majhna. Seveda, čim večja je, čim več seva in čim

bližje je zvezda, tem večja je sprejeta gostota svetlobe. Kakor ima dolžina svojo enoto meter, izsev svojo enoto vat, ima enoto tudi sij. Rečemo ji magnituda. V latinščini magnitudo pomeni velikost, vendar ta enota nima nobene zveze z velikostjo, t.j. polmerom zvezde, ampak le z velikostjo svetlobnega vtisa na mrežnici človeškega očesa.

Z definicijo sija in magnitude je precej težav. Nekateri namesto sija zvezde radi uporabljajo kar izraz magnituda zvezde, vendar velja dogovor: najsvetlejšje zvezde imajo sij prve magnitude (oznaka 1^m , beri "ena m") ali so prve magnitude, manj svetle imajo sij 2^m , še manj svetle 3^m , ..., s prostim očesom komaj vidne 6^m . Severnica ima sij $2,1^m$ (zvezda sije z magnitudo $2,1^m$). Z daljnogledom so vidne zvezde s sijem 7^m , 8^m , ..., 22^m , 23^m , menda ob novejši tehnologiji vidimo že sij okoli 30^m in celo več. Sij vesoljskega telesa pa je lahko tudi nič in negativen. Venera v največjem siju doseže -4^m , Luna ob ščipu $-12,5^m$, Sonce kot najsvetlejšje svetilo na nebu pa kar -27^m .

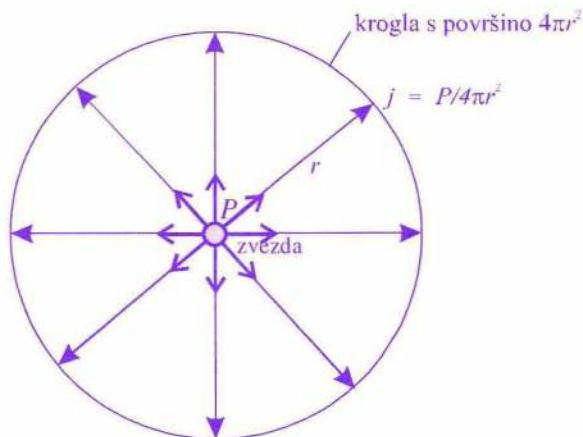


Slika 1. Zvezde Velikega medveda (Ursa maior) in drugih ozvezdij imajo različen sij.

Pomembno je, da povemo medsebojno odvisnost sija in gostote sprejetega toka z zvezde (z vesoljskega telesa). Povezuje ju enačba

$$\frac{j}{j'} = 10^{-0,4 \cdot (m - m')},$$

kjer sta npr. m in m' sija dveh zvezd, j in j' pa gostoti svetlobnega toka, ki ju s teh dveh zvezd sprejememo na Zemlji. Z zvezde s sijem $m' = 1^m$ sprejememo gostoto svetlobnega toka $j' = 10^{-8} \text{ W/m}^2$. Tako lahko za vsak m izračunamo j in obratno.



Slika 2. Zvezda z izsevom P . V človeško oko na Zemlji v razdalji r od zvezde pade svetlobni tok z gostoto $j = P/4\pi r^2$. Gostota svetlobnega toka, ki pada s kvadratom oddaljenosti zvezde, je torej odločina za jakost sija.

Da bi obravnavane količine utrdili, navedimo poučno vajo.

Zvezda Sirij ima sij $m = -1,5^m$, od nas pa je oddaljena $r = 2,7$ parsek (en parsek je $3,3$ svetlobnega leta, to je $3,1 \cdot 10^{16}$ m). Izračunaj izsev P Sirija.

Iz $\frac{j}{j'} = 10^{-0,4 \cdot (m - m')}$ sledi $j = 10^{-8} \cdot 10^{-0,4 \cdot (-1,5 - 1)} \text{ W/m}^2 = 10^{-7} \text{ W/m}^2$. Izsev zvezde pa je $P = j \cdot 4\pi r^2 = 10^{-7} \text{ W/m}^2 \cdot 4\pi (2,7 \cdot 3,1 \cdot 10^{16})^2 \text{ m}^2 = 88 \cdot 10^{26} \text{ W} = 22$ izsevov Sonca. Sirij torej v prostor oddaja svetlobo za 22 Sonc.

Za doma pa predlagam naslednje vaje:

1. Severnica ima sij $m = 2,3^m$ in leži v oddaljenosti $r = 240$ parsekov. Kolikšen je P ?
2. Nova (zvezda) je ob izbruhu pošiljala na Zemljo svetlobni tok z gostoto $j = 3,6 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$. Kolikšen sij je tedaj imela?
3. Sij Sonca je $m = -26,8^m$. Izračunaj sij Sonca, če bi ga opazovali z najbližje zvezde Proksime Kentavra v razdalji 270 000 astronomskih enot (oddaljenost Zemlja-Sonca). Ali bi Sonce videli s prostim očesom?

Rešitve so na str. 40.

Marijan Prosen: SKRIVNOSTI DNEVA IN NOČI

V zadnji številki lanskega letnika Preseka smo vam predstavili priročnik Spoznavajmo Zemljo in vesolje avtorjev Marijana in Stane Prosen, tokrat pa bi vas radi opozorili na knjižico Skrivnosti dneva in noči, ki jo je napisal Marijan Prosen. Podnaslov Knjiga za mlade vedeže pove, da je tudi to delo namenjeno najmlajšim bralcem.

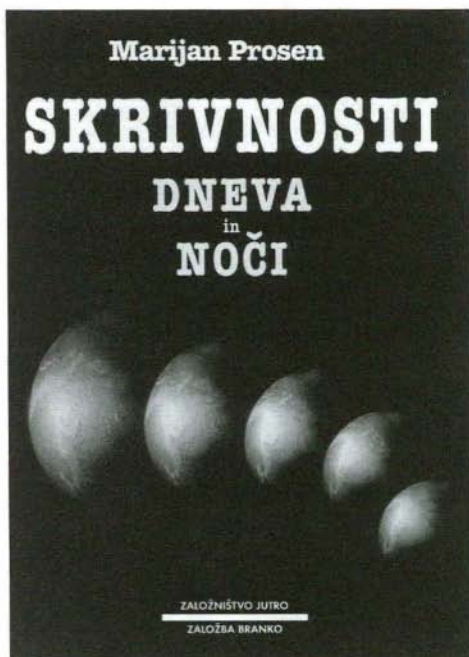
Knjigo sta izdala Založništvo Jutro iz Ljubljane in Založba Branko iz Nove Gorice. Bogato ilustrirani zvezek velikega formata na 48 straneh prinaša opise in razlage nekaterih vsakdanjih pojavov, povezanih z gibanjem Zemlje, Lune in Sonca.

Knjižica v prvih treh poglavjih na preprost, privlačen ter zanimiv način pojasni vzroke in posledice izmenjavanja dneva in noči, razloži, kako, kdaj in zakaj nastajajo letni časi, opiše gibanje Lune, nastanek men ter pojav plime in oseke. Spotoma se naučimo, kako naredimo preprosto sončno uro, zvemo, kaj je zodiak, kdaj vidimo zajčka na Luni ter kako naj opazujemo plimo in oseko.

Četrto poglavje prinaša nekaj vaj in iger za posnemanje dogajanj v vesolju: posnemanje vrtenja in kroženja Zemlje, prikaz Sončeve poti, posnemanje Luninega gibanja in prikaz Luninih men.

V petem poglavju najdemo nekaj osnovnih podatkov o Zemlji, Soncu in Luni, preglednic o trajanju dneva in noči (v odvisnosti od zemljepisne širine) ter o trajanju letnih časov. Na koncu je dodan še slovarček s kratko razlago obravnavanih pojmov.

Knjiga je tudi na pogled lepa in s svojo zanimivo vsebino primerno darilo za mlade radovedneže.

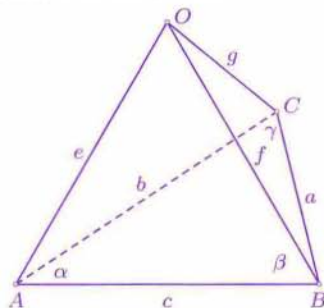


TETRAEDRI S PLOŠČINSKO ENAKIMI MEJNIMI PLOSKVAMI

Skladni liki imajo enako ploščino, toda hkrati ne drži, da bi bili liki z enako ploščino vselej skladni.

Tetraeder (tristrana piramida) je omejen s štirimi trikotniki. Kaj lahko rečemo o tetraedru, če imajo vse štiri njegove mejne ploskve enako ploščino? Bangov izrek trdi, da so v tem primeru mejne ploskve skladni trikotniki. Poskušajmo ta izrek dokazati. Dokaz je elementaren in matematično prav nič zahteven, le nekoliko dolgovezen je in v njem je precej dolgočasnega računanja. Če se bralcu računanje upira, naj kar neha brati ta članek. (Dokaz se precej poenostavi, če uporabimo vektorsko algebro.)

Imejmo tetraeder $ABCO$ (slika 1). Njegova osnovna ploskev je trikotnik ABC , njegov vrh pa O . Stranice osnovne ploskve zaznamujmo z $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ in $\overline{AC} = b$, stranske robove pa z $\overline{AO} = e$, $\overline{BO} = f$ in $\overline{CO} = g$. Stranske ploskve so trikotniki ABO , BCO in ACO ; prvi ima stranice e , f , c , drugi f , g , a in tretji e , g , b .



Slika 1.

Ploščino trikotnika s stranicami a , b , c izračunamo po Heronovem obrazcu

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kjer je s polovični obseg, tako da je $2s = a + b + c$. Če to vstavimo v izraz na levi, ga kvadriramo in pomnožimo s 16, dobimo enačbo

$$16p^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4. \quad (1)$$

Denimo, da imajo vse stranske ploskve našega tetraedra $ABCO$ enako ploščino kakor osnovna ploskev, torej ploščino p . Potem veljajo poleg (1) tudi te tri enačbe:

$$\begin{aligned} 2e^2f^2 + 2c^2e^2 + 2c^2f^2 - c^4 - e^4 - f^4 &= 16p^2 \\ 2f^2g^2 + 2a^2f^2 + 2a^2g^2 - a^4 - f^4 - g^4 &= 16p^2 \\ 2e^2g^2 + 2b^2e^2 + 2b^2g^2 - b^4 - e^4 - g^4 &= 16p^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Leve strani teh enačb določajo ploščine stranskih ploskev ABO , BCO in ACO . Dobimo jih tako, da v formuli (1) zamenjamo najprej a z e in b z f , nato b z f in c z g , nazadnje pa a z e in c z g . Vse mejne ploskve imajo enako ploščino natanko tedaj, kadar zadoščajo robovi a , b , c , e , f in g enačbam (1) in (2).

Če je $e = a$, $f = b$ in $g = c$, so vse enačbe (1) in (2) izpolnjene. Mejne ploskve so štirje skladni trikotniki s stranicami a , b , c . Ali obstaja še kakšna druga rešitev teh enačb?

Zaznamujmo $e^2 - a^2 = x$, $f^2 - b^2 = y$ in $g^2 - c^2 = z$, torej

$$e^2 = a^2 + x \quad f^2 = b^2 + y \quad g^2 = c^2 + z. \quad (3)$$

Vstavimo te izraze v enačbe (2). Če upoštevamo enačbo (1), ki določa $16p^2$, dobimo po nekoliko dolgovoznem računu tale sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2(b^2 + c^2 - a^2)x + 2(a^2 + c^2 - b^2)y + 2xy - x^2 - y^2 &= 0 \\ 2(a^2 + c^2 - b^2)y + 2(a^2 + b^2 - c^2)z + 2yz - y^2 - z^2 &= 0 \\ 2(b^2 + c^2 - a^2)x + 2(a^2 + b^2 - c^2)z + 2xz - x^2 - z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Zaradi krajše pisave zaznamujmo

$$b^2 + c^2 - a^2 = q, \quad a^2 + c^2 - b^2 = r, \quad a^2 + b^2 - c^2 = s. \quad (4)$$

Potem lahko zapišemo zgornji sistem v razmeroma pregledni obliki:

$$\begin{aligned} 2qx + 2ry &= x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \\ 2ry + 2sz &= y^2 - 2yz + z^2 = (y - z)^2 \\ 2qx + 2sz &= x^2 - 2xz + z^2 = (x - z)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Seštejmo prvo in tretjo enačbo (5) in od vsote odštejmo drugo. Če krajšamo z 2, dobimo

$$2qx = x^2 - xy - (x - y)z \quad (6)$$

in od tod

$$(x - y)z = x^2 - xy - 2qx. \quad (7)$$

Pomnožimo zdaj tretjo enačbo (5) z $(x - y)^2$ in dobimo

$$2qx(x - y)^2 + 2sz(x - y)^2 = x^2(x - y)^2 - 2xz(x - y)^2 + z^2(x - y)^2.$$

Vstavimo za produkt $(x - y)z$ izraz (7). Po krajšem računu pridemo do enačbe

$$2qx(x - y)^2 + 2s(x - y)(x^2 - xy - 2qx) = 4q^2x^2,$$

ki jo lahko zapišemo tudi takole:

$$(2qx + 2sx)(x - y)^2 - 4qsx(x - y) = 4q^2x^2.$$

Prva enačba (5) pove, da je $(x - y)^2 = 2qx + 2ry$, torej

$$(2qx + 2sx)(2qx + 2ry) - 4qsx(x - y) = 4q^2x^2.$$

Če to uredimo, je pred nami tale preprosta enačba:

$$4(qr + qs + rs)xy = 0. \quad (8)$$

Tako smo ugotovili, da vsaka trojka, ki zadošča sistemu (5), zadošča tudi enačbi (8).

Spet nekoliko dolgovezen račun pokaže, da je

$$qr + qs + rs = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16p^2,$$

kjer seveda pomeni p ploščino osnovnega trikotnika ABC . V tetraedru imajo mejne ploskve od nič različno ploščino, torej je $p \neq 0$. Zato smemo (8) krajšati s $64p^2$ in pridemo do enačbe

$$xy = 0. \quad (9)$$

Tri možnosti imamo:

$$\text{a) } x \neq 0, y = 0 \quad \text{b) } x = 0, y \neq 0, \quad \text{c) } x = 0, y = 0.$$

Oglejmo si najprej možnost a). Iz prve enačbe (5) dobimo $2qx = x^2$. Ker $x \neq 0$, smemo krajšati z x in je v tem primeru $x = 2q$. Če to vstavimo v (7), dobimo $xz = 0$, torej $z = 0$. Tako smo dobili rešitev $x = 2q, y = 0, z = 0$.

V primeru b) je $x = 0$. Enačba (7) nam da $yz = 0$. Ker $y \neq 0$, sledi od tod $z = 0$. Iz prve enačbe (5) pa dobimo $2ry = y^2$, torej $y = 2r$. Pripadajoča rešitev se glasi $x = 0, y = 2r, z = 0$.

Nazadnje si oglejmo še zadnji primer c), ko je $x = 0$ in $y = 0$. Druga enačba (5) nam da $2sz = z^2$. Od tod izhajata dve možnosti: ali je $z = 2s$ ali $z = 0$.

Tako smo ugotovili, da obstajajo natanko štiri rešitve sistema (5), namreč:

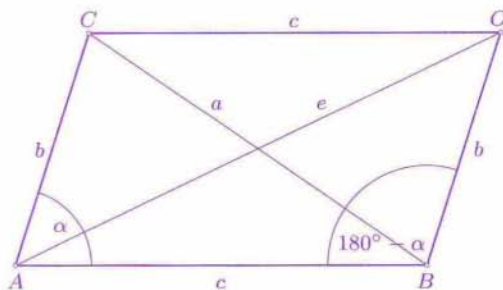
1. $x=2q, y=0, z=0$.
2. $x=0, y=2r, z=0$.
3. $x=0, y=0, z=2s$.
4. $x=0, y=0, z=0$.

Oglejmo si prvo rešitev. Ker je $y = 0$ in $z = 0$, dobimo iz enačb (3) $f = b$ in $g = c$. (Robovi se izražajo s pozitivnimi števili. Zato iz $f^2 = b^2$ in $g^2 = c^2$ sledi $f = b, g = c$.) Enakost $x = 2q$ pa nam da $e^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Torej so robovi med seboj povezani takole:

$$f = b, \quad g = c, \quad e^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2. \quad (10)$$

Kakšen je pripadajoči tetraeder?

Vzemimo v ravnini paralelogram $ABOC$, pri katerem naj bosta nevzporedni stranici $\overline{AB} = c$ in $\overline{AC} = b$, diagonala $\overline{BC}$ pa naj bo enaka a . S temi podatki je paralelogram natanko določen (slika 2). Drugo diagonalo označimo z e , torej $\overline{AO} = e$.



Slika 2.

V vsakem paralelogramu je vsota kvadratov vseh štirih stranic enaka vsoti kvadratov obeh diagonal. V našem primeru je zato

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + e^2. \quad (11)$$

Kako ugotovimo, da velja zveza (11)? Oglejmo si trikotnika ABC in ABO na sliki 2. Če je pri oglišču A notranji kot α , je v paralelogramu pri oglišču B notranji kot $180^\circ - \alpha$. Po kosinusnem izreku dobimo iz prvega trikotnika

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

iz drugega pa

$$e^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

Če ti dve enačbi seštejemo, je pred nami zveza (11).

Paralelogram $ABOC$ imamo lahko za izrojeni tetraeder, vsa njegova oglišča so namreč v isti ravnini. Robovi osnovne ploskve ABC so $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ in $\overline{AB} = c$, stranski robovi pa $\overline{AO} = e$, $\overline{BO} = f = b$ in $\overline{CO} = g = c$. Ker velja zveza (11), so robovi takšni, kakor jih določa prva rešitev (10). Mejne ploskve tega "tetraedra" so trikotniki ABC , ABO , ACO in BCO . Če paralelogram ni pravokotnik, ti trikotniki, ki imajo vsi enako ploščino (namreč polovico ploščine paralelograma), niso vsi med seboj skladni.

Tetraeder je s svojimi robovi natanko določen: dva tetraedra z enakimi robovi sta bodisi skladna bodisi zrcalni sliki drug drugega. Zato je vsak tetraeder, katerega robovi so povezani z enačbami (10), skladen s paralelogramom $ABOC$, torej izrojen. Njegov rob $\overline{AO}$ je diagonala paralelograma.

Podobno kakor izraža Heronov obrazec ploščino trikotnika z njegovimi stranicami, obstaja formula, ki izraža prostornino V tetraedra z njegovimi robovi. Tako formulo najde bralec v [1] na strani 130. Če v formulo za prostornino V vstavimo izraze (10), izračunamo, da je $V = 0$. Tako se ponovno lahko prepričamo, da določajo robovi (10) izrojeni tetraeder.

Kar smo povedali za prvo rešitev sistema (5), velja tudi za drugo in tretjo. Pripadajoči tetraeder je paralelogram, pri drugi rešitvi je njegova diagonala rob $\overline{BO}$, pri tretji pa rob $\overline{CO}$.

Preostane nam še zadnja, četrta rešitev, ko je $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$. Iz enačb (3) dobimo $e = a$, $f = b$ in $g = c$. Mejne ploskve so skladni trikotniki s stranicami a , b , c . Edino ta rešitev nam da neizrojeni tetraeder. Tako smo dokazali:

IZREK (Bang). Če imajo v (neizrojenem) tetraedru vse štiri mejne ploskve enako ploščino, so te ploskve skladni trikotniki.

Pravilni tetraeder omejujejo štirje skladni enakostranični trikotniki. Kakšen mora biti trikotnik, da lahko s štirimi kopijami tega trikotnika sestavimo površje tetraedra?

V tetraedru na sliki 1 je oglišče A vrh treh kotov, namreč kota $\sphericalangle BAC$, kota $\sphericalangle BAO$ in kota $\sphericalangle CAO$. Če so mejne ploskve trikotniki, ki so skladni s trikotnikom ABC , le-ta pa ima pri ogliščih A , B in C zaporedoma notranje kote α , β in γ , so zgoraj navedeni koti enaki

$$\sphericalangle BAC = \alpha, \quad \sphericalangle BAO = \beta, \quad \sphericalangle CAO = \gamma.$$

Vsota katerihkoli dveh kotov pri istem oglišču (neizrojenega) tetraedra pa je vselej večja od tretjega kota. Zato veljajo v našem primeru neenačbe

$$\alpha + \beta > \gamma, \quad \alpha + \gamma > \beta, \quad \beta + \gamma > \alpha.$$

Ker je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, dobimo iz prve neenačbe, da je $180^\circ - \gamma > \gamma$, torej $180^\circ > 2\gamma$ oziroma $\gamma < 90^\circ$. Podobno sledi iz druge neenačbe, da je $\beta < 90^\circ$, iz tretje pa $\alpha < 90^\circ$. Trikotnik ABC je ostrokoten. Zato lahko sestavimo površje tetraedra le s štirimi skladnimi kopijami ostrokotnega trikotnika.

Bralec se lahko brez težav prepriča, da je trikotnik s stranicami a , b , c ostrokoten natanko tedaj, kadar so vsi trije izrazi q , r in s , podani z enačbami (4), pozitivni.

Literatura

[1] I. Vidav, O neki posplošitvi Heronovega obrazca. Obzornik za matematiko in fiziko, 46 (1999), str. 129 – 135.

Ivan Vidav

NENAVADNO ŠTEVILO

Ali znate določiti število, katerega decimalni zapis je

$$0.c_1c_2c_3c_4\dots,$$

kjer je c_n zadnja številka decimalnega zapisa števila n^n ? Torej $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 7$, $c_4 = 6$ itd.

Martin Juvan

Rešitev je na str. 46.

KRIŽANKA “MATEMATIKI 17. IN 18. STOLETJA”¹

	AVTOR MARKO BOKALIČ	VAS NA VZHODU ŠAVRINSKEGA GRICEVJA V SLOVENSKI ISTRI	PRIPADNIK NEKD. LJUDSTVA NA BALKANU	FR. MATEMATIK (PIERRE, ENACBA $x^n + y^n = z^n$)	NARA/NI LOGARITEM	AGENTKA	CEVAST PROSTOR POD ZEMLJO	PALIČICA NITRAT RAN
	SLABŠALNI IZRAZ ZA UČENCA, KI SE UČI NA FAMET							FR. MAT. (PIERRE, SIAKON DIFERENCIAL ENACB)
	BIVŠI SAVDSKI KRALJ							USTREZ
	IT. PESNIK, BENE. DIKTINSKI MENIH (TEOFILO)							REKA NA PELOPONEZU EVROTA
	HRIBOVITA POKRAJINA V SZ GRČJI				NARKOTIK ZA KRATKO OMAMO BETELOVA PALMA			
	GNUS, STUD, OGABNOST	VZHOD PO ANGLEŠKO EL. VOONIK Z ZAŠČIT. OVOJEM		ZGODOVINSKA POKRAJINA V SEVERNI FRANCJI			PAPESKO MESTO	
	PRIČESNA LEČA PRI OPTIČNIH INSTRUMENTIH			POŽVILO V PRAVEM ČAJU SLIKAR ŠUBIC				TISTA O REKA, KI TUDI NA BERE EN
	IT. NARAVOSLOVEC, MATEMAT. V FIRENCAH (GALILEO)				SLOV. PESNICA MAJDA AM. PEVEC (BOB)			IME GL. DRŽAV. TOŽILN. CERA
	JAPONSKI PISATELJ (KOBŌ, ŽENSKA S PESČIN)	PROSTORSKA LIKOVNA UMETNINA	NAZIV ZA IZBOR SLOVENSKE POPEVKE	IZGUBA BOJA PRED KONCEM IZDELKI IZ LESA				TVORBA ŽEL. OČ. PREZVE VALCE ŽAFRA
	BRITANSKI FILOZOF IN MATEMATIK (GEORGE)					NJORKA VAS NAD HRASTNIKOM		
	ZNAK ZA ALUMINIJ	BESEDA, KI OZNAČUJE OSEBEK		LOJZE PETERLE AMERIŠKA PEVKA (MARIAH)			VZDEVEK IGRALCA RADKA POLICA SILA MED ATOMI V MOLEKULI	
							ZAHODNA A/STRU. DEŽELA REKA V POSARJU	
	MATERIAL, KI GA NANESETA VETER ALI VODA, NANOS							
	ZMAGA PRI ŠAHU							
	SPOKOJNOST, TIŠINA				NAJVIŠJA SL. ZNANST. USTANOVA ENAKI ČRKI			
	FARNC. NOGO. METAS (NICOLAS)							JUNAK IZ ILIADE Z ZELO MOČNIM GLASOM
	ANGLEŠKI MATEMATIK (BROOK, POTENČNE VRSTE)							ZELO RAZGLEDAN ČLOVEK, "ŽIV LEKSIKON"

¹ Knjižico D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike* lahko kupite pri DMFA – Založništvo.

IZ SREBROVEGA A ZA IZZIGANJE IN BRADAVIC	KAJNOV IN ABELOV OČE, EVIN MOŽ	SLOV. SMUČAR (PETER)	LADKO KOROSEČ	LETALO	BIVŠI FR. SMUČAR (MICHEL)	SEDMA GRSKA CRKA	
EM. E (N.C. E)							
NIK							
IA O- AS			HRVAŠKI NAFTAR ŠVICARSKA DRUŽINA MATEMAT.				
		UDAV				NAJDALJŠA SIBIRSKA REKA	
		LISTAVCI Z BELIM LUBJEM					
	OSNOVNI AROMATSKI OGLIKO- VODIK, BENZEN					FR. IZDELOVALEC HARF IN KLAVIRJEV (SEBASTIEN)	NEKDANJI ŽELEZNIŠKI DELAVEC, KI JE ROČNO UPRAVLJAL ZAPORNICE
FR. SE ZAJA AKO	ROBERT REDFORD PREDZAD- NJA IN DRU- GA CRKA	FR. MATEM. (RENE, KOORDIN. SISTEM)		HRVAŠKI PISATELJ (VJEKOSLAV, ČUDEŽNI PRAH)	AMERIŠKA PEVKA (JOAN) ZNAK ZA ARGON		FR. MATE- MATIK IN FILOZOF (JEAN LE ROND)
AV. NE E R						KOTNA ENOTA, STOTINA PRAVEGA KOTA	
A V CU KO- V N						PUBLI- CISTKA SUKLJE ANG. FIZIK (JOHN)	
GLAVNO MESTO JUŽNE KOREJE					SKLADAT. PAHOR NAJHT- REJŠA ZVER		
100 m ²		FR. MATEM. (ADRIEN MARIE) MESTO NA SL. KOROS.					
						NOVO MESTO	
						VISOKA VZPETINA	
ITAL. RADIO- TELEVIZIJA				ROB PRI ZAPOGNI. TKANINE SVETOPIŠ. OČAK			
KRATICA ZA TELE- VIZIJO V OBE SMERI			ZNAK ZA NATRUJ SOSEDI ČRKE U			MOŠKI V ODNOSU DO SVOJIH OTROK VIDENJE MOŽNE REŠITVE IZ TEŽKEGA POLOŽAJA	
						SERVISER ČASO- MERILNIH NAPRAV	
						POSAMEZNI VOKALNI DEL VEČGLASNE SKLADBE	

BAROMETRSKO SVETLIKANJE

Razvoj merilne tehnike omogoča, da tudi o pojavih, ki jih že dolgo poznamo, zvemo kaj novega. *Barometriško svetlikanje* poznajo tri stoletja in četrt, a šele najnovejša merjenja so razkrila o njem nekaj zanimivih podrobnosti. Čeprav ne gre za pomemben pojav, ga je iz spoštovanja do fizikov preteklosti in do zmogljivosti sodobnih merilnih naprav vredno opisati.

O "barometriški svetlobi" je prvi poročal leta 1676 Jean Picard francoski akademiji znanosti v Parizu. Na mestu, na katerem se je živo srebro umaknilo s steklene stene v cevi, je bilo mogoče zaznati šibko svetlikanje. Picard je poklicno pot menda začel kot vrtnar in postal znan astronom. Izboljšal je zemljevid Francije in izmeril dolžino stopinje na Zemlji. Izračunal je razdaljo med notredamsko cerkvijo v Parizu ter katedralo v Amiensu in ugotovil, da obseg Zemlje meri – v današnjih enotah – blizu 40 tisoč kilometrov. Po njegovi zaslugi je prišel v Pariz danski astronom Ole Rømer, ki je ugotovil, da potuje svetloba s končno hitrostjo.

V letih 1700 in 1701 je povzel razpravo o zanimivem pojavu znani matematik in mehanik Jacob Bernoulli. Potem pojavu dolgo časa niso posvečali posebne pozornosti. To je mogoče pojasniti s tem, da ga nekateri raziskovalci niso mogli ponoviti. Danes vemo, da mora biti živo srebro dobro očiščeno. Če ga pustimo nekaj časa stati na zraku, postane svetlikanje najprej celo izrazitejše, a po daljšem času svetlikanja sploh ni več opaziti.

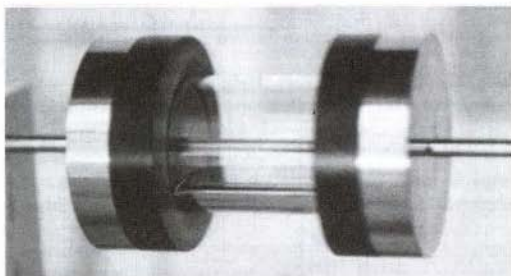
Za podobne pojave so se raziskovalci zanimali, ko so izboljšali vakuum in so začeli raziskovati električni tok po razredčenih plinih. Tako je Heinrich Geissler leta 1868 objavil članek o *Novih izkušnjah na področju svetlobnih pojavov*. Stene vijačne evakuirane cevke so se svetlikale, ko jih je podgrnil s kožuhom ali ebonitom. Barva svetlobe je bila odvisna od ostanka plina v cevki in je bila podobna kot pri električnem toku po plinu. Svetloba je bila pri nižji temperaturi močnejša kot pri višji. Tako so barometriško svetlikanje povezali z elektriko.

Preskočimo čas do leta 1998, ko je raziskovalna skupina s kalifornijske univerze v Los Angelesu, ki so jo sestavljali R. Budakian, K. Weninger, R. A. Hiller in S. J. Putterman, v reviji *Nature* objavila kratek članek *Pikosekundne razelektritve in trenje z zatikanjem ob gibajoči se gladini živega srebra na steklu*. Poskusov se je lotila, ker se je v zadnjih desetih letih povečalo zanimanje za *sonoluminiscenco*. Močan zvok v kapljevini lahko povzroči nastanek drobnih mehurčkov, ki se periodično večajo in manjšajo. Lord Rayleigh je že leta 1917 opazil, da mehurček odda šibek

blisk, ko doseže najmanjši polmer. Novi merilni načini so omogočili, da so pojav podrobneje raziskali. Raziskovalci so bili presenečeni, da so bliski zelo kratkotrajni. Omenjeno skupino je zanimalo, ali so podobno kratkotrajni tudi bliski pri barometriškem svetlikanju.

Valjasto stekleno posodico so počasi vrteli okoli vodoravne geometrijske osi (slika 1). V posodici je bilo malo živega srebra in nad njim neon ali kak drug plin pri znižanem tlaku. Živo srebro so skrbno prečistili in ga pred poskusom še posebej pustili kapljati skozi aceton. Svetlobo ob gladini na steni cevi so opazovali s televizijsko kamero. Poleg tega so s hitrim katodnim osciloskopom zasledovali časovni potek napetosti na drobnem kondenzatorju, ki je bil nameščen z zunanje strani posodice ob gladini. Kot kondenzator so uporabili kar kratek odsek koaksialnega kabla, ki so mu odstranili polovico zunanjega vodnika. Svetlobo so merili še s fotopomnoževalko, ki je lahko sledila hitrim spremembam.

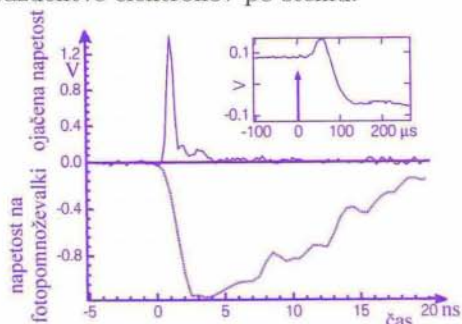
Slika 1. V 5 cm dolgi stekleni cevki z zunanjim premerom 2 cm je bilo malo živega srebra in neon pri tlaku 450 milibarov. Vrtljaj je trajal 12 s. S prostim očesom je mogoče videti (rdečkasto, za neon značilno) svetlobo, ki jo seva stena cevke in tesnilo iz plastične mase.



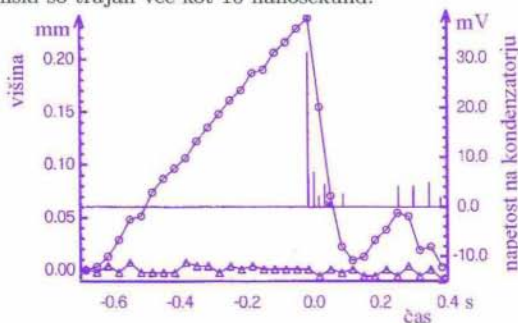
Ugotovili so, da oddaja centimetrski odsek gladine svetlobo z močjo $2 \cdot 10^{-8}$ W, kar je zlahka mogoče opazovati s prostim očesom. Svetlobo sestavljajo kratkotrajni bliski. Trajajo nekaj več kot 10 nanosekund (1 nanosekunda je milijardina sekunde, 10^{-9} s, pikosekunda je tisočina nanosekunde, 10^{-12} sekunde). Sunki električne napetosti trajajo precej krajši čas, manj od 1 nanosekunde. Gladina pa se vrne v začetno lego po precej daljšem času (slika 2).

Pojav so pojasnili s prehodom elektronov iz živega srebra na steklo. S kvadratnega milimetra površine živega srebra ob dotiku s steklom preide kak milijon elektronov. Steklo se naelektri negativno, živo srebro pa pozitivno. Zaradi električne sile gladina živega srebra lepi na steklu in mu sledi, ko se dviga steklena stena posodice. Nenadoma pa elektroni preidejo nazaj s stekla k živemu srebru (slika 3). Zelo kratkotrajni sunek električne napetosti spremlja kratkotrajen blisk in gladina živega srebra se po precej daljšem času zniža, ker je električna sila prenehala delovati. Če so gladino živega srebra obsevali z močno ultravijolično svetlobo, ki

je pri fotoefektu izbijala elektrone iz živega srebra, ni bilo svetlikanja. Zaradi obilice elektronov se je sproti izravnal naboj, ni bilo električne sile med živim srebrom ter steklom in živo srebro ni lepilo na steklu. Posamezni bliski so si sledili po naključju. Za zdaj ni mogoče pojasniti, kako so elektroni z živega srebra prešli na steklo, prav tako še ne moremo pojasniti porazdelitve elektronov po steklu.



Slika 2. Zgornji diagram kaže časovni potek napetosti na kondenzatorju, ki so ga zasledovali s hitrim osciloskopom. Napetostni sunki so trajali del nanosekunde. Manjši diagram kaže časovni potek višine gladine, ki se je po blisku (puščica) v približno 100 mikrosekundah (1 mikrosekunda je 1000 nanosekund) vrnila v začetno lego. Spodnji diagram kaže časovni potek gostote svetlobnega toka v blisku, ki ga je dala fotopomnoževalka. Bliski so trajali več kot 10 nanosekund.



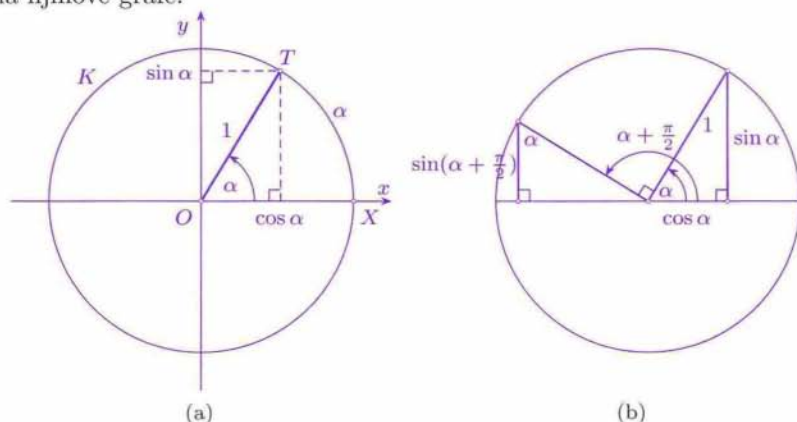
Slika 3. S televizijsko kamero so zasledovali višino gladine na ozkem delu cevi z dušikom pri tlaku 150 milibarov. En vrtljaj je trajal 12 s. Krožci kažejo, da se je najprej gladina dvigala, kot se je dvigala steklena stena, nato pa je zdrknila nazaj. Trikotniki kažejo, da se pri obsevanju z močno ultravijolično svetlobo gladina živega srebra ni dvignila. Desna stran diagrama kaže sunke napetosti na kondenzatorju ob zunanji steni posodice.

Zatikanje, pri katerem telesi lepita drugo na drugem, nato pa zdrsne, je značilno za *trenje z zatikanjem*. Preiskani pojav utegne pomagati pri razlagi takega trenja.

PRESEK, SALAMA IN SINUS

V naravi srečujemo različne geometrijske oblike, ko pa jih zagledamo na tabli pri matematiki ali fiziki, jih včasih ne prepoznamo ali nas celo prestrašijo. To so na svoji koži občutili tudi antični matematiki, ko so želeli dokazati kakšno navidez očitno geometrijsko resnico. V tem sestavku bomo pokazali, kje vse srečamo sinusoido.

Premice in ravnine si dobro predstavljamo. Kaj pa krivulje? Krožnico, elipso, parabolo in hiperbolo (tako imenovane *krivulje drugega reda*) lahko najdemo na stožcu (vsi možni preseki plašča stožca z ravnino) in jih zato imenujemo *stožnice*. Kje pa najdemo kotne oziroma trigonometrične funkcije? Že samo ime pove, da so povezane s koti in s trikotniki. Z njimi jih definiramo (slika 1), lahko pa se tudi vprašamo, kje v naravi naletimo na njihove grafe.



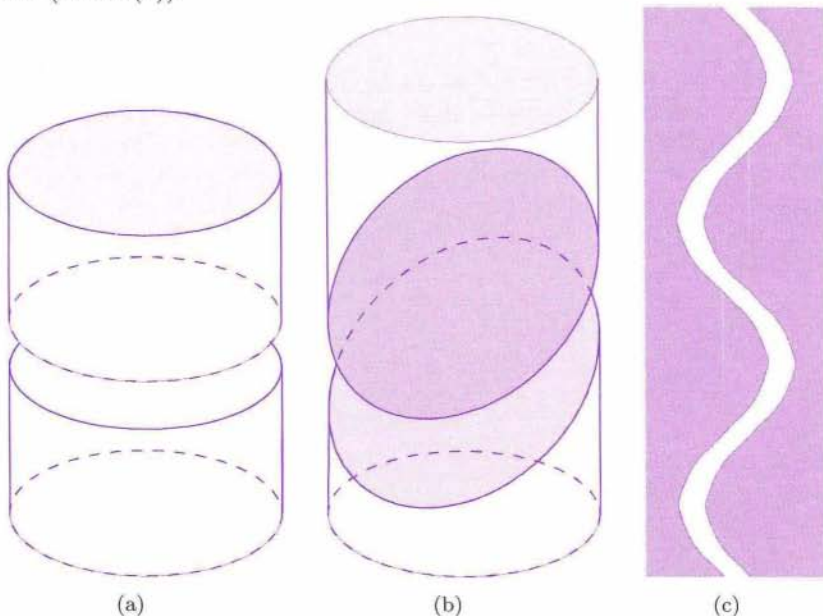
Slika 1. (a) Definiciji funkcij *sinus* in *kosinus*. V ravnini narišemo enotsko krožnico K s središčem O v izhodišču koordinatnega sistema. Iz točke $X = (1, 0)$ se v smeri, nasprotni gibanju urinega kazalca, poda na pot po krožnici K točka T . Ko ima za seboj "prehojen" lok dolžine α (takrat kot $\angle XOT$ meri α radianov), ima točka T koordinato x enako $\cos \alpha$ in koordinato y enako $\sin \alpha$. Funkcija sinus je pozitivna v prvem in drugem kvadrantu, funkcija kosinus pa v prvem in četrtem. Obe funkciji sta periodični s periodo 2π (tj. 360°). (b) Iz Pitagorovega izreka sledi zveza $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, še lažje pa se prepričamo o veljavnosti zveze $\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$.

Iskanje sinusoide

Ker beremo Presek, bomo sinusoido našli s pomočjo preseka. Na valj z radijem 1 navijemo papir. Primer je črevo, ki objema salamo. (Saj veste, to je tisti nadležni "papir", ki ga moramo odstraniti, kadar želimo narezati salamo, ali pa se ga znebiti po rezanju, če tega nismo storili prej.) Velja:

Če prerežemo salamo (valj z radijem 1) z ravnim nožem pod kotom 45° glede na os valja in razvijemo črevo (papir), dobimo sinusoido (sliki 2(b) in 2(c)).

Prepričajmo se, da je res tako. Vzemimo pravokotni presek pokončnega valja (slika 2(a)). To je enotski krog; njegovo središče označimo z S (slika 3(a)).



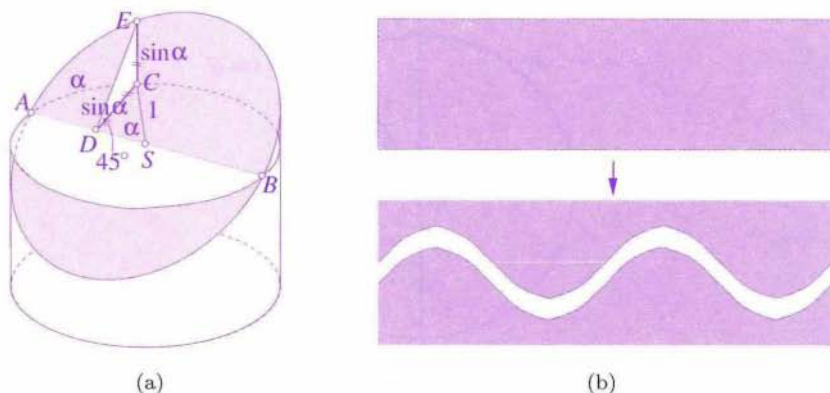
Slika 2. Sinusoida na valju. V našem primeru smo papir dvakrat ovili okoli valja.

Na sliki 3(a) je AB premer kroga, obarvan pa je presek valja z ravnino, ki seka enotski krog vzdolž daljice AB pod kotom 45° . Po tej ravnini je med rezanjem drsel nož. Presek je seveda elipsa (pa naj je videti še tako okrogla), a tega pravzaprav ne bomo nikjer uporabili.

Iz točke A se podajmo na sprehod po robu izbranega enotskega kroga. Za tisti del, ko leži pot pod elipso, bomo pokazali, da smo od točke navpično nad nami oddaljeni natanko za sinus poti, ki smo jo že prehodili.

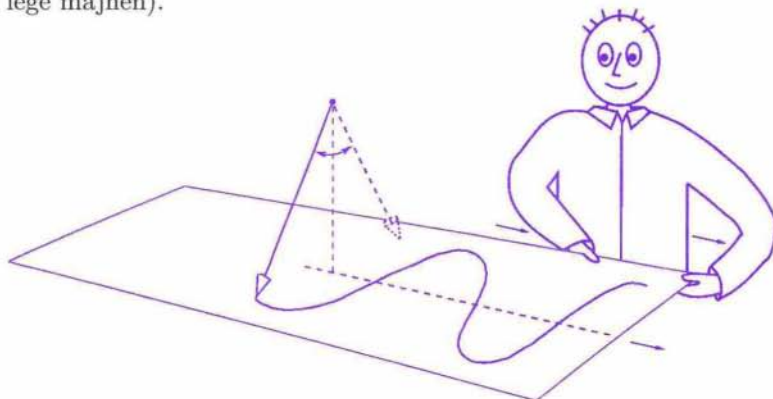
Na enotski krožnici izberimo tako točko C , da bo kot $\angle ASC$ enak α . Potem je dolžina loka AC enaka α , kjer je kot α merjen v radianih. Narišimo pravokotnici iz točke C na premer AB in na ravnino, v kateri leži izbrani enotski krog. Pravokotnici sekata premer AB in elipso zaporedoma v točkah D in E . S slike 1 smo si zapomnili, da je dolžina daljice CD

enaka $\sin \alpha$. Trikotnik DCE je pravokotni trikotnik, kot pri oglišču D pa je enak 45° . To pomeni, da gre za enakokraki trikotnik, zato je $\overline{CE} = \overline{CD} = \sin \alpha$. Ko črevo salame razvijemo, preide enotska krožnica v del premice, ki jo vzamemo za abscisno os. Obravnavani del elipse preide v del sinusoide, ki leži nad abscisno osjo. Podobno premislimo, da preide preostali del elipse v del sinusoide pod abscisno osjo.



Slika 3.

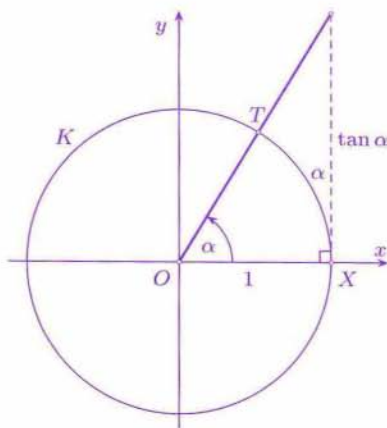
Kje pa najdemo sinusoido v fiziki? Najpogosteje naletimo nanjo pri raznih periodičnih pojavih, kot so mehanska ali elektromagnetna nihanja in valovanja (npr. pri matematičnem nihalu, dokler je odmik od ravnovesne lege majhen).



Slika 4. Fantič vleče papir pod nihalom, ki pušča črnilo.

Naloge

Za konec zastavimo še nekaj vprašanj. Kako priti do kosinusoide čivkajo že ptiči (slika 1 (b)), medtem ko je iskanje tangensoide ($\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, slika 5) precej trši oreh.



Slika 5. Neposredno iz definicije funkcije tangens sledi, da je za $0 \leq \alpha < \pi/2$ vrednost $\tan \alpha$ enaka razdalji med točko X in presečiščem premice OT s pravokotnico na os x v točki X .

1. Dokaži, da je presek plašča valja in ravnine elipsa (slika 2(b)).
2. Zapiši enačbo krivulje, ki jo dobimo, če z nožem prerežemo valj s polmerom 1 pod kotom 60° glede na os valja.
3. Kakšno senco meče luč s cilindričnim senčnikom na navpično steno? (Nasvet: Najprej si ogledamo konkreten primer, ko za luč izberemo točko $(0,0,0)$, za senčnik $x^2 + y^2 = 1$, $-1 < z < 1$, snop luči je rob sence oziroma stožec $x^2 + y^2 = z^2$, stena pa ravnina $x = 2$.)

Robert Bakula in Aleksandar Jurišić

REŠITVE VAJ OB ČLANKU IZSEV ZVEZDE – s str. 24

1. 5200 izsevov Sonca
2. $2,1^m$
3. $0,4^m$; da.

Marijan Prosen

KAKO STARI SO SANDALI?

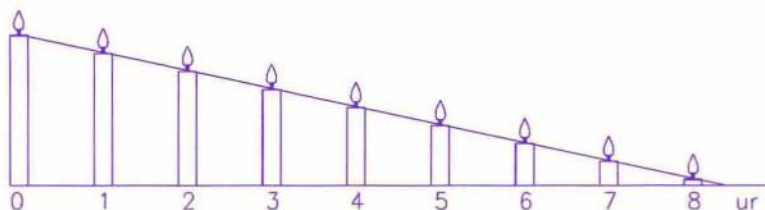
Miha koraka skozi prostore Egiptovskega muzeja v Kairu in obstoji pred zanimivim predmetom z napisom *Sandali iz leta 2300 pred Kristusom*.

“Oče, kako vedo, od kdaj so sandali? Saj Egipčani niso vnaprej vedeli, da se bo Kristus rodil in kdaj bo to.”

“Drži. Ampak sandali imajo vgrajeno naravno uro. Fiziki znajo pogledati na to uro in povedati zgodovinarjem, kaj naj napišejo o starosti.”

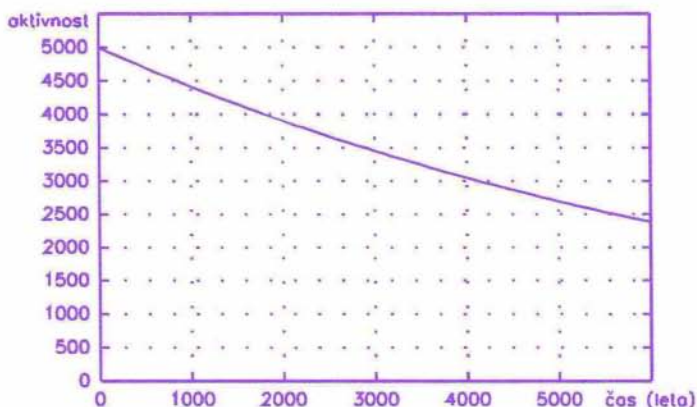
Mihu je bilo jasno čedalje manj, zato mu je oče obljubil daljšo razlago.

Pozabi na sandale. Začela bova s svečo. Misliva si, da imava pol metra dolgo svečo, o kateri veva, da pogori vsako minuto za milimeter. Ta sveča gori lahko le 500 minut, to je 8 ur in 20 minut. Če najdemo ob desetih zvečer tako gorečo svečo, ki je dolga le še 30 centimetrov, si prav lahko izračunamo, da je morala goreti 200 minut, da je je toliko pogorelo. Nekdo jo je prižgal torej 20 minut pred sedmo. Ta račun velja seveda le tedaj, če je sveča res ves čas gorela. Najdaljši čas, ki ga s tako uro lahko še izmerimo, je osem ur in dvajset minut. Potem je s svečo konec.



Slika 1. Svečo lahko uporabimo kot uro.

Podobno kot opisana sveča se obnašajo tudi viri radioaktivnega sevanja. V njih razpadajo atomska jedra, zato vsebujejo čedalje manj radioaktivnih atomov in zato polagoma usiha njihova sposobnost oddajanja sevanja. Ta sposobnost, ki je odvisna od njihovega razpolovnega časa in začetne aktivnosti, pa ne pada enakomerno kot dolžina sveče, ampak kot kaže za radioaktivni ^{14}C slika 2. Ker znaša njegov razpolovni čas približno 5600 let, pade torej v tem času aktivnost na polovico. Za vir ogljika ^{14}C lahko napravimo podoben račun kot za gorenje sveče. Če ugotovimo v viru 3000 razpadov v sekundi, povedali pa so nam, da je v viru ob pripravi razpadlo vsako sekundo povprečno po 5000 jeder, lahko iz naše slike ugotovimo, kdaj so ga pripravili. Od naše izmerjene vrednosti 3000 napravimo korak v desno do krivulje, od nje pa korak navzdol. Tako pridemo do vrednosti 4130 let, kar je starost vira (slika 2).



Slika 2. Tudi aktivnost ogljika ^{14}C služi kot ura.

Če bi torej kdo ob smrti vsakega drevesa vložil vanj tak radioaktivni vir, bi lahko z ugotavljanjem števila razpadov vsak trenutek ugotovili, koliko časa je že preteklo od tedaj. Lahko bi rekli, da je v drevo vgrajena ura. Tako nekako merjenje starosti tudi v resnici poteka. Natančno določene vire radioaktivnega ^{14}C je v vse žive organizme vložila že narava. Na to uro je že leta 1946 opozoril ameriški fizik Libby. Seveda pa ti viri še zdaleč niso tako močno aktivni, kot je bil naš namišljeni vir. To je celo dobro, saj bi bila sicer vsaka lesena klop mnogo preveč aktivna, da bi mogli brez nevarnosti sedeti na njej.

Poglejmo, kaj se je dogajalo že davno, morda pred deset tisoč leti.

Atom dušika 14 se je trdno oklepal drugega atoma dušika in opazoval Zemljo, ki je zelenela petnajst tisoč metrov pod njim. Počutil se je popolnoma varno, saj je tako lebdel že milijone let. Poleg tega se je držal za roke z drugim atomom dušika. Čez približno deset tisoč let bodo znanstveniki na Zemlji take skupke poimenovali molekule. Kdaj pa kdaj si je s trkom v drug atom ali molekulo izmenjal pozdrav. Vendar pa je nenadoma treščilo kot strela z jasnega povsem drugače kot pri trkih. Ko se je naš atom spet zavedel, je bil sam. Nič več ni bil atom dušika. Zadel ga je bil nevtron in obtičal v njem, iz jedra pa mu je odneslo proton. To mu je spremenilo ime v ogljik, pa tudi usodo. Prej je bil praktično nesmrten, če se je le izogibal kozmičnim žarkom, ki bombardirajo Zemljo. Zdaj, ko je postal atom ogljika 14, bo umrl po povprečno 5600 letih. Prazaprav ne bo umrl, prek radioaktivnega razpada se bo preobrazil v atom dušika 14 in pri tem izseval elektron, ki mu pravimo tudi delec beta.

Naš atom pa ni edini doživel take usode. Nova jedra ogljika 14 ves čas nastajajo in ves čas umirajo. Pri enakomernem obsevanju Zemlje s kozmičnimi žarki se je že davno vzpostavilo ravnovesje. Vsako sekundo nastane prav toliko ogljika 14, kolikor ga razpade. Zato ostaja množina radioaktivnega ogljika v ozračju ves čas enaka. V gramu ogljika razpade vsako minuto približno 16 jeder ogljika 14.

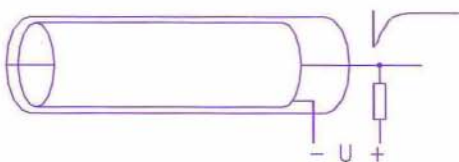
Novonastali atom ogljika 14 pa ni dolgo ostal sam. Srečal je dva atoma kisika in se spojil z njima v molekulo ogljikovega dioksida CO_2 . Spet bo preteklo precej časa, da bo novo molekulo zaneslo v nižje plasti ozračja. Tam jo bo morda preko fotosinteze pogoltnil drevesni list, travna bilka ali smrekova iglica. Kisik bo izšel, ogljik pa si rastlina prisvoji. Živali se hranijo z rastlinami, torej se bo radioaktivni ogljik znašel tudi v živalih. Volk požre srno, zato bo tudi volk deležen radioaktivnega ogljika. Ljudje uživamo hrano rastlinskega in živalskega izvora ter tako postanemo tudi sami radioaktivni. Ogljikova jedra v vsej živi naravi razpadajo, obenem pa se s presnavljanjem obnavlja njihova koncentracija. Ko pa katerikoli organizem umre, jedra ogljika 14 le še razpadajo. Premog, ki je nastal iz pradreves pred nekaj sto milijoni let, ne kaže več znakov radioaktivnosti. Šota, ki leži pod zemljo deset tisoč let, je precej manj radioaktivna kot svež les. Če torej uspemo izmeriti število razpadov, ki se zgode v gramu ogljika vsako sekundo, lahko povemo, kdaj je organizem umrl.

Pot do takega podatka pa ni niti lahka niti kratka. Pri meritvi namreč naletimo na celo vrsto težav in nevšečnosti.

Pri naši meritvi moramo čim natančneje ugotoviti število delcev, ki jih vsako minuto izseva ogljik znane teže, recimo enega grama. Razpadi jeder pa so naključni. To pomeni, da nikoli ne vemo, kdaj bo posamezno jedro razpadlo. Šele pri velikem številu jeder lahko natančneje napovemo število razpadov v časovni enoti, to je aktivnost. Če preštevamo delce iz grama svežega ogljika eno minuto, bo rezultat štetja le redko pričakovanih 16. Zakoni statistike pravijo, da bosta dve tretjini rezultatov med 12 in 20, tretjina pa celo več od 20 ali manj od 12. Če hočemo natančneje opredeliti starost, moramo prešteti veliko več razpadov, to pa zahteva daljše štetje ali pa več ogljika. Običajno trajajo take meritve več dni.

Za zanesljivost meritve je pomembno tudi to, da pri štetju ne prezremo nobenega delca, saj bi se nam pri taki meritvi vsi predmeti zdeli starejši, kot so v resnici. Kosov lesa gotovo ne kaže vtikati v merilce jedrskega sevanja, ker bi lahko iz njih neovirano izstopali le delci iz ogljikovih jeder prav blizu površine. Tisti pa, ki bi se rodili globlje, bi prav gotovo ne mogli ven. Takim napakam se najlaže izognemo, če les sežgemo, torej pripravimo ogljik spet do tega, da se spoji s kisikom v ogljikov dioksid. Če s tem plinom napolnimo merilnik jedrskega sevanja, gotovo ni več

nevarnosti, da bi delce izgubljali. V ta namen sta pripravna geigerski in proporcionalni števec. Oba sta valjaste oblike s tanko žico, napeto po osi valja. Običajno ju polnimo z argonom, ki mu dodamo alkoholne pare ali metan. Kot delovni plin pa je uporaben tudi naš ogljikov dioksid. Če priključimo primerno električno napetost med cilindar in sredinsko žico, se na upor R pojavi električen sunek kot odgovor na prehod vsakega delca (slika 3).



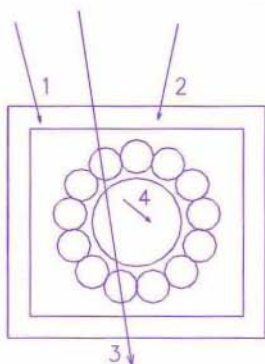
Slika 3. Sestava geigerskega ali proporcionalnega števca. Med kovinskim cilindrom in tanko žico, napeto po osi, je primerna električna napetost. Števec javi prehod delca z električnim sunkom, ki se pojavi na uporu.

Tu naletimo na drugo težavo. Tudi števec, ki ga napolnimo z neaktivnim ogljikovim dioksidom, ki smo ga dobili s sežigom na milijone let starega premoga, najavlja delce. Iz vesolja nas neprestano bombardirajo kozmični žarki, sevanje pa prihaja tudi iz radioaktivnih snovi, ki jih najdemo v zemeljski skorji. Sevanje iz ogljika 14 je tako neznatno, da ga je težko zaznati v prisotnosti obeh virov.

Pa poskusimo zazidati svoj števec v svinčen grad, ki naj bi ustavil sevanje od zunaj. Svinčene opeke sicer precej sevanja oslabe, v zameno pa vsiljujejo svoje sevanje. Svinec je namreč nastal iz urana, torija in aktinija, ko so ti razpadali. Zato ne preseneča, da vsebuje še nekaj svojih aktivnih prednikov. Svinec bomo uporabljali torej le za zunanje stene gradu, za notranje je primernejše železo, ki nima radioaktivnih prednikov. Kljub skrbni zazidavi pa se zunanjega sevanja ne moremo povsem iznebiti. Če že vsiljivcev ne moremo ustaviti, pa lahko postavimo okoli svojega števca stražo, ki nas bo posvarila vsakokrat, preden bo vsiljivec dosegel naš števec. Posvarjeni takega dogodka ne bomo šteli.

Kot stražo namestimo okoli svojega valjastega števca obroč drugih valjastih števcov. Elektronski sistem, ki zazna vdor delca od zunaj, šteje dogodek v glavnem števcu le tedaj, kadar obroč ni zaznal ničesar. Tedaj dogodek velja. Pripišemo ga razpadu jedra ogljika 14 (slika 4).

Zdaj imamo končno vse, da se lahko lotimo določanja starosti. Meja zaznavnosti sega nazaj tja do 40 tisoč let. Vzorci tako starega ogljika oddajo vsako minuto v povprečju le približno 0,1 delca, torej lahko pričakujemo v desetih minutah le en sam razpad.



Slika 4. Glavni števec varujejo svinčene stene in zaščitni obroč. Svinčene stene so ustavile delec 1 in delec 2. Zelo prodorni delec 3 je pred vstopom v glavni števec najavil obroč, zato smo ga izločili. Delec 4 je prispeval ogljik 14 v glavnem števcu. Zaradi majhne prodornosti je delec končal svojo pot v glavnem števcu. Šteli smo le njega.

Aktivnost nekega radioaktivnega vira izražamo tako, da povemo število razpadlih jeder v časovni enoti, recimo v sekundi ali pa minuti, kadar je aktivnost zelo majhna. Aktivnost $A(t)$ ogljika ^{14}C upada eksponentialno s t.i. razpolovnim časom 5600 let:

$$A(t) = A(0) \cdot 2^{-t/5600},$$

$A(0)$ je začetna aktivnost, t pa vstavimo v letih. Po 5600 letih se torej aktivnost zmanjša na polovico.

Rekli smo, da lahko negotovost pri preštevanju delcev zmanjšamo, če preštejemo več delcev. Pri preštetih N delcih je ta napaka $\pm\sqrt{N}$. Pri preštetih 100 delcih je potemtakem relativna napaka 10 odstotkov, na odstotek pa se zmanjša, če preštejemo 10000 delcev. Zato poskušamo pri meritvah uporabiti več ogljika kot pa le gram. Liter ogljikovega dioksida pri atmosferskem tlaku vsebuje približno 0,6 grama ogljika. Geigerski števeci, ki jih je uporabljal tudi Libby, drže le 100 do 200 ml plina. Bolj pripravljeni so kovinski proporcionalni števeci, ki jih lahko naredimo poljubno velike in jih tudi lahko polnimo s plinom do tlaka nekaj atmosfer. Seveda pa ne bomo dragocenih zgodovinskih predmetov v celoti pokurili, da bi tako pridobili čim več ogljikovega dioksida.

Groba ocena za sevanje iz vesolja – kozmične žarke – je 2 na kvadratni centimeter na minuto. Zato so tudi števeci z večjim presekom bolj dovzetni zanje. Skrbna zaščita in uporaba zaščitnega števca pa lahko zmanjšata vpliv nezaželenega sevanja do 200 krat.

Danes uporabljamo za določanje starosti scintilacijske števeci s tekočim scintilatorjem, ki mu dodamo primerno ogljikovo spojino. Kaj je scintilacijski števec, pa bomo morda zvedeli kdaj drugič.

NENAVADNO ŠTEVILO – Rešitev s str. 31

Naj bo x iskano število. Najprej bomo pokazali, da imata števili $(n+20)^{n+20}$ in n^n enako zadnjo števk. Od tod bo sledilo, da se v (neskončnem) decimalnem zapisu števila x številke ponovijo na vsakih 20 mest. Število x bo torej racionalno, njegov zapis v obliki ulomka pa bomo našli tako, da bomo izračunali prvih 20 števk in rešili pripadajočo linearno enačbo.

Trdimo torej, da je za vsako naravno število n razlika

$$(n+20)^{n+20} - n^n = \left((n+20)^{n+20} - n^{n+20} \right) + \left(n^{n+20} - n^n \right)$$

deljiva z 10. Prvi sumand je deljiv celo z 20, saj je oblike

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

kjer je $a = k = n+20$ in $b = n$. Z drugim sumandom je nekaj več dela. Zapišimo ga kot

$$n^{n+20} - n^n = n^n \cdot \left((n^4)^5 - 1 \right) = n^n (n^4 - 1)(n^{16} + n^{12} + n^8 + n^4 + 1).$$

Števili n^n in $n^4 - 1$ sta različne parnosti, tako da je njun produkt vedno deljiv z 2. Ostane še deljivost s 5. Tu uporabimo mali Fermatov izrek (druga možnost je, da vsakega od petih možnih ostankov obravnavamo ločeno). Ta izrek pravi, da je za vsako praštevilo p in vsako naravno število n , ki je tuje s p , razlika $n^{p-1} - 1$ deljiva s p . Za $p = 5$ to pomeni, da je bodisi izraz $n^4 - 1$ deljiv s 5 ali pa da n ni tuj s 5 (tedaj pa je izraz n^n deljiv s 5). Dokazali smo torej deljivost z 2 in s 5, kar je enakovredno deljivosti z 10. Matematično bolj izurjeni bralci ste gotovo tudi opazili, da bi bilo moč gornji razmislek precej skrajšati z uporabo kongruenc.

S krajšim računom poiščemo prvih 20 števk števila x :

$$x = 0.\overline{14765636901636567490}.$$

Izraz pomnožimo z 10^{20} in dobimo enačbo

$$10^{20} \cdot x = 14765636901636567490 + x.$$

Iz nje nazadnje izračunamo

$$x = \frac{14765636901636567490}{10^{20} - 1} = \frac{14765636901636567490}{99999999999999999999}.$$

Če ste se ravno dobro ogreli za računanje, lahko poskusite nalogo rešiti še pri kaki osnovi, različni od 10. Najlažje gre pri dvojiškem zapisu, pa tudi pri osnovi 4 ni veliko računanja. Pri osnovi 2 dobimo vrednost $\frac{1}{2}$, pri osnovi 4 pa (hja, vsega vam pa tudi ne morem povedati)...

Martin Juvan

KRIŽANKA “MATEMATIKI 17. IN 18. STOLETJA” – Rešitev s str. 32



38. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši sedmošolci in osmošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 20. aprila 2002, pomerili v sedmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po veljavnem pravilniku uvrsti 0,5% vseh sedmošolcev s posameznega področja, 1% vseh osmošolcev s posameznega področja in še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija.

REGIJA	7. razred	8. razred
Ljubljana	70	99
Kranj	26	31
Maribor	43	74
Celje	25	46
Koper	17	22
Nova Gorica	16	14
Novo mesto	20	38
SKUPAJ	217	324

Zlato Vegovo priznanje prejmejo sedmošolci, ki so osvojili najmanj 15 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem:

7. razred

I. nagrada

Tomaz Hočevnar, OŠ Prule, Ljubljana; Uroš Marolt, OŠ Mengeš.

II. nagrada

Tim Dobovšek, OŠ Narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana.

III. nagrada

Timotej Lazar, III. OŠ Murska Sobota; Lovro Oražem, OŠ Dr. Franceta Prešerna, Ribnica; Lea Retelj, OŠ Bršljin; Tanja Srednik, OŠ Solkan.

8. razred

I. nagrada

Matjaž Berčič, OŠ Škofja Loka - mesto; Mojca Berden, OŠ Vodmat, Ljubljana; Patricia Cotič, OŠ Miren; Katarina Čakš, OŠ Šmarje pri Jelšah;

Tadej Grobelšek, OŠ Šmarje pri Jelšah; Jože Mužerlin, OŠ Šmarje pri Jelšah; Simon Jazbec, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana; Primož Koželj, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana; Boštjan Kovač, OŠ Log - Dragomer; Vasja Susič, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana; Špela Špenko, OŠ Vodice; Gašper Zadnik, OŠ Vrhovci, Ljubljana.

II. nagrada

Martin Ambrožič, OŠ Franceta Prešerna, Kranj; Nino Bašič, OŠ Ketteja in Murna, Ljubljana; Matej Huš, II. OŠ Celje; Tadej Koderman, OŠ Dob; Zala Lenarčič, OŠ Miroslava Vilharja, Postojna; Neža Rugelj, OŠ Mengeš.

III. nagrada

Ambrož Kregar, OŠ Preserje pri Radomljah; Matej Skernišak, OŠ Prežihovega Voranca, Maribor.

Aleksander Potočnik

22. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE IN OSNOVNOŠOLKE ZA ZLATA STEFANOVA PRIZNANJA

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Oddelek za fiziko Pedagoške fakultete v Mariboru in Zavod RS za šolstvo so bili organizatorji tekmovanja iz fizike za osnovnošolce in osnovnošolke. V predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Mariboru se je 13. aprila 2002 pomerilo 79 učencev in učenk iz 7. razreda ter 84 iz 8. razreda. Tekmovalci in tekmovalke so reševali tri teoretične in dve eksperimentalni nalogi.

Šolskih tekmovanj se je letos udeležilo 4272 učencev in učenk iz 7. razreda ter 4169 iz 8. razreda. Pred državnim tekmovanjem so bila 23. marca 2002 področna tekmovanja v devetih krajih, kjer so tekmovanja organizirali in vodili: Rajko Đudarić (Celje, tekmovalo je 53 ekip iz 7. razreda in 59 ekip iz 8. razreda), Darja Vrhovnik (Ravne na Koroškem, tekmovalo je 16 in 18 ekip), Mirko Cvahte in Zlatko Bradač (Maribor, tekmovalo je 64 in 66 ekip), Janja Bric Pečar (Divača, tekmovalo je 20 in 22 ekip), Valentina Mlakar (Sevnica, tekmovalo je 41 in 44 ekip), Milojka Frank (Nova Gorica, tekmovalo je 16 in 16 ekip), Igor Kulčar (Lendava, tekmovalo je 21 in 21 ekip), Milan Bohinec (Naklo, tekmovalo je 42 in 39 ekip) ter Vesna Harej in Jelka Sakelšek (Ljubljana, tekmovalo je 116 in 119 ekip). Skupno je na področnih tekmovanjih sodelovalo 382 dvočlanskih ekip iz 7. razreda in 401 ekipa iz 8. razreda, skupaj 1566 učencev in učenk. Tekmovalci so na področnih tekmovanjih reševali pet teoretičnih nalog.

Mladim tekmovalkam in tekmovalcem ter njihovim mentorjem iskreno čestitamo za dosežene rezultate, vsem, ki so pripomogli k uspešni izvedbi šolskih, področnih in državnega tekmovanja, pa se najlepše zahvaljujemo.

Na državnem tekmovanju so zlata Stefanova priznanja prejeli:

7. razred

Blaž Kirn	OŠ Preserje
Jure Ausec	OŠ Simona Jenka, Kranj
Jaka Gogala	OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana
Robert Armič	OŠ Log – Dragomer
Rok Sevčnikar	OŠ Polzela
Grega Šoič	OŠ Franceta Prešerna, Kranj
Peter Ferme	OŠ Ljudski vrt Ptuj
Lovro Oražem	OŠ Dr. Franceta Prešerna, Ribnica
Katarina Kosovelj	OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana
Rok Škrlj	OŠ 8 talcev, Logatec
Jaša Markun	OŠ Simona Jenka, Kranj
Timotej Lazar	III. OŠ Murska Sobota
Martina Škorjanc	OŠ Franca Lešnika-Vuka, Slivnica pri Mariboru
Miha Milosav	OŠ Lava, Celje
David Zinrajh	OŠ Kamnica
Uroš Anzeljc	OŠ Trnovo, Ljubljana
Jan Kralj	OŠ Prof. dr. Josipa Plemlja, Bled
Elvis Sladič	OŠ Janka Premrla-Vojka Koper
Aleš Svete	OŠ Log – Dragomer
Jakob Boh	OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka
Monika Grom	OŠ Preserje
Matic Žirovec	OŠ Lava, Celje
Sašo Špan	OŠ Sava Kladnika, Sevnica
Slavko Vujinović	OŠ Franceta Prešerna, Kranj
Rosana Ahčin	OŠ Dr. Franceta Prešerna, Ribnica
Vasja Povše	OŠ Prebold
Miha Otoničar	OŠ Notranjskega odreda, Cerknica
Sabina Pintar	OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka
Jaka Sušnik	OŠ Prof. dr. Josipa Plemlja, Bled
Uroš Žunkovič	OŠ Franca Lešnika-Vuka, Slivnica pri Mariboru
Miha Brenčič	OŠ Ljudski vrt, Ptuj
Bor Gregorčič	OŠ Bežigrad, Ljubljana
Sanja Martinec	OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
Mojca Škafar	OŠ Trnovo, Ljubljana
Valerija Kramarič	OŠ Metlika
Jan Jevšovar	OŠ Gabrovka
Luka Nerad	OŠ Franceta Prešerna, Črenšovci
Andrej Čremožnik	OŠ Polzela
Mateja Pipan	OŠ Milojke Štrukelj, Nova Gorica
Blaž Kramer	JZ OŠ Marjana Nemca, Radeče

8. razred

Matjaž Berčič	OŠ Škofja Loka – mesto
Vasja Susič	OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana
Nino Bašič	OŠ Ketteja in Murna, Ljubljana
Anže Babič	OŠ Naklo
Nejc Jelovčan	OŠ Naklo
Matjaž Krnc	II. OŠ Slovenj Gradec
Marko Weilguny	OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana
Martin Ambrožič	OŠ Franceta Prešerna, Kranj
Lojze Gačnik	OŠ Koseze, Ljubljana
Zala Lenarčič	OŠ Miroslava Vilharja, Postojna
Matjaž Gomilšek	OŠ Tabor II, Maribor
Mitja Zajec	OŠ Tabor II, Maribor
Jure Gujt	OŠ Antona Ingoliča, Sp. Polskava
Simon Jazbec	OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
Tadej Grobelšek	OŠ Šmarje pri Jelšah
Gregor Hostnik	OŠ Gabrovka
Jakob Komel	OŠ Šempas
Andrej Kregar	OŠ Ketteja in Murna, Ljubljana
Uroš Orthaber	OŠ Antona Ingoliča, Sp. Polskava
Rok Močnik	OŠ Idrija
Matej Huš	II. OŠ Celje
Peter Lendero	OŠ Livada, Velenje
Daša Kolar	OŠ Gorica, Velenje
Boštjan Kovač	OŠ Log – Dragomer
Tomaž Šuštar	OŠ Dobropolje
Katja Zalokar	OŠ Šentjernej
Barja Drnovšek	OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka
Miha Marolt	OŠ Franceta Prešerna, Kranj
Jernej Bernik	OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka
Anja Kirn	OŠ Livada, Velenje
Erik Raspet	OŠ Idrija
Matic Vidmar	OŠ Dobrova
Sebastijan Jurendić	OŠ Toneta Čufarja, Maribor
Primož Koželj	OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana
Matevž Pintar	OŠ Škofja Loka – mesto
Špela Špenko	OŠ Vodice
Vid Kočar	OŠ Toneta Čufarja, Maribor
Nina Kušar	OŠ Vodmat, Ljubljana
Anita Mirtič	OŠ Vavta vas, Straža pri Novem mestu
Sara Sabrina Zemljic	OŠ Gornja Radgona
Mojca Berden	OŠ Vodmat, Ljubljana
Drago Brčina	OŠ Gorica, Velenje
Miha Ciringer	OŠ Rače
Ana Matavž	OŠ Gornja Radgona
Tina Vrtič	I. OŠ Slovenj Gradec
Andraž Vrabčič	OŠ Gorica, Velenje

Rezultati državnega tekmovanja so objavljeni na spletni strani Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije <http://www.dmfa.si/>

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

2. TEKMOVANJE DIJAKOV TER DIJAKINJ SREDNJIH POKLICNIH ŠOL V ZNANJU MATEMATIKE

Na šolskih tekmovanjih v znanju matematike za dijake in dijakinje srednjih poklicnih šol je tekmovalo 1592 tekmovalcev. Dne 20. 4. 2002 se je 62 uvrščenih tekmovalcev prvih, drugih in tretjih letnikov iz 35 slovenskih šol zbralo v Tehniškem šolskem centru v Novi Gorici na državnem tekmovanju. Na tem tekmovanju so bila podeljena zlata priznanja tekmovalcem iz trinajstih srednjih poklicnih šol. V vsakem od letnikov je bilo podeljenih po šest zlatih priznanj. Organizator državnega tekmovanja je prvim trem najbolje uvrščenim iz vsakega letnika podelil praktične nagrade. Prejeli so jih:

1. letnik

1. Robert Furman, Srednja strokovna in poklicna šola, Celje
2. Kristina Tavčar, Srednja frizerska šola, Ljubljana
3. Urška Kosančič, Srednja šola za gostinstvo in turizem, Celje

2. letnik

1. Dejan Bukovec, Srednja šola tehniških strok Šiška, Ljubljana
2. Jernej Šeško, Poslovno-komercialna šola, Celje
3. Ana Osredkar, Srednja frizerska šola, Ljubljana

3. letnik

1. Niko Stipetič, Šolski center Ptuj – Poklicna in tehniška elektro šola
2. Slobodan Stjepanović, Srednja elektro-računalniška šola, Maribor
3. Gregor Vogrin, Srednja elektro-računalniška šola, Maribor

Dušanka Vrenčur

2. TEKMOVANJE DIJAKOV TER DIJAKINJ SREDNJIH TEHNIŠKIH IN STROKOVNIH ŠOL V ZNANJU MATEMATIKE

V letošnjem šolskem letu so se dijaki ter dijakinje srednjih tehniških in strokovnih šol drugič spopadli v znanju matematike. Šolskih tekmovanj se je udeležilo 2775 dijakov in dijakinj, od tega jih je 587 nadaljevalo na regijskih tekmovanjih, 104 dijaki in dijakinje pa so se udeležili državnega tekmovanja, ki je bilo v soboto, 20. 4. 2002, na Srednji šoli za gostinstvo in turizem v Celju.

Tekmovanje se je pričelo ob 9.15 uri z otvoritvijo in končalo ob 15. uri s podelitvijo zlatih priznanj in nagrad najboljšim tekmovalcem.

Podeljenih je bilo 34 zlatih priznanj. Najboljši med najboljšimi pa so prejeli praktične nagrade, ki jih je prispevalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Nagrade so prejeli:

1. letnik

1. Miha Nagelj, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana
2. Jožef Klepec, Šolski center Novo mesto – Poklicna in tehniška gradbena in lesarska šola
3. Alojzij Markelj, Srednja elektro in strojna šola, Kranj

2. letnik

1. Đuro Drljača, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana
2. Mojca Sporiš, Srednja šola za farmacijo, kozmetiko in zdravstvo, Ljubljana
Goran Stojakovič, Šolski center Velenje – Poklicna in tehniška elektro-računalniška šola

3. letnik

1. Matevž Perhavec, Tehniški šolski center Nova Gorica – Poklicna in tehniška elektro šola
2. Matej Koprivšek, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana
3. Mihael Rebernik, Šolski center Celje – Poklicna in tehniška strojna šola

4. letnik

1. Uroš Majerič, Srednja elektro-računalniška šola, Maribor
Nina Vodišek, Ekonomska šola, Novo mesto
3. Jerneja Pavlin, Šolski center Novo mesto – Srednja zdravstvena ter
poklicna tehnična in kemijska šola

Sonja Perko

46. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 20. aprila 2002, se je 161 dijakov in dijakinj iz 48 gimnazij in srednjih šol v prostorih Gimnazije Škofja Loka spopadlo z nalogami na 46. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije, popoldan pa so se odpravili na izlet v Železnike ali na ogled mesta in filmske predstave. Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade:

1. letnik**Druga nagrada**

Matjaž Škorjanc, I. gimnazija Maribor; Peter Kacin, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija.

Tretja nagrada

Špela Pohar, Gimnazija Kočevje; Nina Blagovič, Gimnazija Murska Sobota; Mateja Čuden, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Urška Gabršček, Gimnazija Tolmin; Jernej Pavšič, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija.

2. letnik**Druga nagrada**

Peter Nose, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Mediha Šiljić, Gimnazija Novo mesto.

Tretja nagrada

Martin Strojnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Katja Bobovnik, II. gimnazija Maribor; Boštjan Hamler, Gimnazija Frana Miklošiča, Ljutomer; Peter Jakopič, Gimnazija Želimlje; Petra Merčun, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Maja Štalekar, Šolski center Slovenj Gradec – Gimnazija; Gregor Weiss, II. gimnazija Maribor.

3. letnik

Prva nagrada

Rok Končina, Šolski center Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Ivo List, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tine Porenta, Gimnazija Škofja Loka; Janez Šter, Gimnazija Želimlje.

Druga nagrada

Žiga Novšak, I. gimnazija v Celju; Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Tretja nagrada

Tadej Pajnhart Jarc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Anja Jutraž, Gimnazija Šentvid, Ljubljana.

4. letnik

Prva nagrada

Klemen Šivic, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Tretja nagrada

Tone Gradišek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka; Martin Čokl, Šolski center Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Aleksandra Franc, I. gimnazija v Celju.

Po določitih *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja izbrala ekipo, ki bo zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Glasgowu v Veliki Britaniji. V ekipo so se uvrstili: Aleksandra Franc, Tone Gradišek, Tine Porenta, Klemen Šivic, Janez Šter in Erik Štrumbelj.

Matjaž Željko

40. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Tekmovanje je tudi letos potekalo v treh stopnjah: regijsko, državno in izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo. Na prvih dveh stopnjah so bili tekmovalci razdeljeni v tri skupine, ki so se razlikovale po snovi.

Regijskega tekmovanja se je udeležilo okrog 700 dijakov in dijakinj iz 54 srednjih šol. Tekmovanje je potekalo 23. marca 2002 istočasno na osmih srednjih šolah po vsej Sloveniji. Organizirale so ga naslednje srednje šole: Gimnazija Bežigrad, Ljubljana, Gimnazija Ljubljana-Šiška, Škofijska gimnazija Antona Martina Slomška, Maribor, Šolski center Slovenj Gradec – Gimnazija, Gimnazija Jesenice, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija,

Gimnazija Koper in Gimnazija Novo mesto. Tekmovalne komisije, sestavljene iz učiteljev fizike s sodelujočih šol, so popravile izdelke in predložile tekmovalce za državno tekmovanje iz posamezne regije. Na tekmovanju je 165 tekmovalcev osvojilo bronasto priznanje, 125 predlaganih za državno tekmovanje pa tudi srebrno priznanje.

Državno tekmovanje je bilo 13. aprila 2002 na II. gimnaziji Maribor. Po predlogu regijskih komisij se ga je v I. skupini udeležilo 54 tekmovalcev, v II. skupini 39 in v III. skupini 30, skupaj 123 tekmovalcev iz 39 srednjih šol (dva predlagana tekmovalca se nista udeležila tekmovanja). Tekmovanje je izvedlo DMFA Slovenije, stroške pa sta krila Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport ter soorganizator – II. gimnazija Maribor. Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so pomagali študentje in sodelavci FMF, Oddelek za fiziko, ter sodelavci Inštituta Jožef Stefan. Na razglasitvi rezultatov je komisija podelila štiri prve nagrade, sedem drugih, pet tretjih in 35 pohval. Komisija je tudi podelila šestnajst zlatih priznanj.

Podeljene nagrade in pohvale:

Skupina I

I. nagrada

Simon Jesenko, Gimnazija Škofja Loka.

II. nagrada

Gregor Donaj, II. gimnazija Maribor; Gregor Posnjak, Gimnazija Kranj.

III. nagrada

Klemen Pirnat, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matej Urbas, II. gimnazija Maribor; Jernej Leben, II. gimnazija Maribor.

Pohvala

Klemen Blokar, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Igor Cesarec, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Sašo Grozdanov, II. gimnazija Maribor; Domen Stadler, Srednja elektro in strojna šola, Kranj; Peter Nose, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Martin Strojnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Gregor Weiss, II. gimnazija Maribor; Simon Čopar, Gimnazija Litija; Gašper Matič, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Mitja Trampuš, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Domen Zafred, II. gimnazija Maribor; Lan Žagar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matjaž Čebren, Tehnični šolski center Nova Gorica – Poklicna in tehniška elektro šola; Andrej Ondračka, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Andrej Perkuš, Šolski center Slovenj Gradec – Gimnazija; Rok Prislan, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija; Jurij Kodre, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana.

Skupina II**I. nagrada**

Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tadej Pajnhart Jarc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Klemen Žiberna, II. gimnazija Maribor.

II. nagrada

Ivo List, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Simon Kolar, Gimnazija Murska Sobota.

III. nagrada

Rok Končina, Šolski center Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava.

Pohvala

Uroš Kuzman, Šolski center Velenje – Splošna in strokovna gimnazija; Matjaž Žganec, II. gimnazija Maribor; Peter Jakopič, Gimnazija Želimlje; Anton Potočnik, Šolski center Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Matej Rožič, Šolski center Novo mesto – Tehniška gimnazija; Jernej Škvarč, Tehniški šolski center Nova Gorica – Poklicna in tehniška elektro šola; Jure Božič, Gimnazija Brežice; Gorazd Gotovac, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matjaž Kavčič, Srednja elektro in strojna šola, Kranj; Mitja Pišlar, Gimnazija Koper; Matjaž Šega, Gimnazija Kočevje; Bojan Žunkovič, II. gimnazija Maribor; Denis Udovič, Gimnazija Koper.

Skupina III**I. nagrada**

Ni bila podeljena.

II. nagrada

Klemen Šivic, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matjaž Humar, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija; Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka.

III. nagrada

Marko Žagar, Gimnazija Tolmin.

Pohvala

Andraž Briški-Javor, Gimnazija Kranj; Lovro Kušcer, Gimnazija Brežice; Andraž Stožer, II. gimnazija Maribor; Tone Gradišek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Davorin Učakar, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana.

Zlata priznanja so prejeli: Simon Jesenko, Gimnazija Škofja Loka; Gregor Donaj, II. gimnazija Maribor; Gregor Posnjak, Gimnazija Kranj; Klemen Pirnat, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matej Urbas, II. gimnazija Maribor; Jernej Leben, II. gimnazija Maribor; Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tadej Pajnhart Jarc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Klemen Žiberna, II. gimnazija Maribor; Ivo List, Gimnazija

Bežigrad, Ljubljana; Simon Kolar, Gimnazija Murska Sobota; Rok Končina, Šolski center Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava; Klemen Šivic, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matjaž Humar, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija; Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka; Marko Žagar, Gimnazija Tolmin.

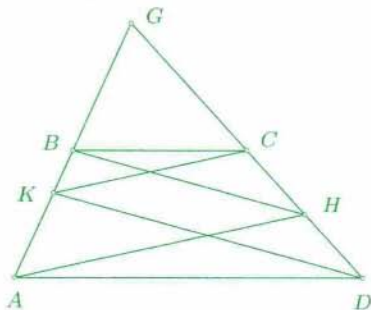
Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 10. maja 2002 na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Udeležilo se ga je devet najboljših tekmovalcev iz III. skupine in trije najboljši iz II. skupine z državnega tekmovanja, tekmovali pa so iz snovi III. tekmovalne skupine. Na letošnjo 33. mednarodno fizikalno olimpiado, ki je potekala med 21. in 30. julijem v mestu Nusa Dua, Bali, Indonezija, so se uvrstili: Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka; Matjaž Humar, Šolski center Nova Gorica – Gimnazija; Gašper Žerovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Davorin Učakar, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana in Andraž Stožer, II. gimnazija Maribor.

Ciril Dominko

23. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Rešitve nalog jesenskega kroga iz XXIX, P–6, str. 376

Prva skupina (prvi del)

1. Naj bo H presečišče stranice CD in premice skozi točko A , vzporedne z daljico KC . Dokazati moramo, da sta daljici BH in KD vzporedni. Če sta stranici AB in CD vzporedni, sta $ABCD$ in $AKCH$ paralelograma, zato je $AB = DC$ in $AK = HC$. Od tod dobimo $BK = AB - AK = DC - HC = DH$, kar pomeni, da je $BHDK$ paralelogram. Če stranici AB in CD nista vzporedni, se njuni nosilki sekata v točki G . Dobimo dva para podobnih trikotnikov: GBC in GAD ter GKC in GAH . Od tod sledi $\frac{GB}{GA} = \frac{GC}{GD}$ in $\frac{GA}{GK} = \frac{GH}{GC}$, od koder z množenjem dobimo $\frac{GB}{GK} = \frac{GH}{GD}$. To pomeni, da sta trikotnika GBH in GKD podobna, zato sta stranici BH in KD res vzporedni.



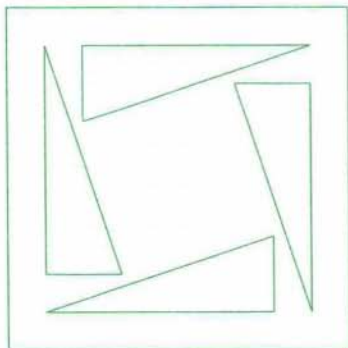
2. Če se Klara in Valerija nista zmotili, je $n! = 2^m m!$, $m \geq 2$. Tedaj je nujno $n > 3$, zato sta obe števili $n!$ in $m!$ deljivi s 3. V vsakem izmed produktov je vsak tretji faktor večkratnik števila 3. Ker morata oba produkta vsebovati isto potenco števila 3, je lahko število n kvečjemu za dva večje od m . Če je $n = m + 1$, iz $n! = 2^m m!$ sledi $m + 1 = 2^m$, kar pomeni $m = 1$. Če je $n = m + 2$, dobimo $(m + 1)(m + 2) = 2^m$, kar je možno le, če je $m = 0$. Obe možnosti sta v protislovju s predpostavko $m \geq 2$, zato se je vsaj eno od deklet zmotilo.
3. Klemen svoj sum lahko potrdi. Najprej označi kovanice s črkami A , B , C in D . Pri prvem tehtanju položi na eno stran tehtnice kovanca A in B , na drugo pa kovanca C in D . Naj oznaka na kovancu v nadaljevanju pomeni hkrati tudi 'težo' tega kovanca. Denimo, da po prvem tehtanju velja $A + B = C + D$. Tedaj v drugem tehtanju položi kovanec A na eno stran in kovanec B na drugo stran tehtnice. Če je $A \neq B$, je natanko eden izmed kovancev A in B ponarejen, prav tako pa je ponarejen natanko eden izmed kovancev C in D . Če po drugem tehtanju ugotovi, da je $A = B$, velja $A = B = C = D$. Denimo, da Klemen po prvem tehtanju ugotovi, da je $A + B \neq C + D$. Tedaj v drugem tehtanju položi na eno stran tehtnice kovanca A in C ter kovanca B in D na drugo stran. Če je po tem tehtanju $A + C = B + D$, je število ponarejenih kovancev sodo in ni enako niti 0 niti 4. Če je $A + C \neq B + D$, je število ponarejenih kovancev liho.
4. Označimo kroglice s števili od 1 do 10. Kadar se dve kroglici zaletita in odbijeta, je položaj po trku enak, kot če bi šli kroglici ob srečanju druga skozi drugo (zamenjamo oznaki na kroglicah). Vsaka kroglica z desne se tako 'prebije' skozi pet kroglic z leve, zato je število vseh trkov enako $5 \times 5 = 25$.
5. Naj bo ABC enakokraki trikotnik, kjer je $AB = AC$ in $\sphericalangle CAB = 36^\circ$. Naj bo D točka na AC , z lastnostjo $BD = BC$. Tedaj je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC = 72^\circ$, od koder sledi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = 36^\circ$, zato je $BD = AD$. Množica $\{A, B, C, D\}$ nima simetrijske osi. Ni se težko prepričati, da ima po odstranitvi katerekoli izmed točk množica preostalih treh točk simetrijsko os.

Druga skupina (prvi del)

1. Naj bo $ABCDE$ dani petkotnik in A' , B' , C' , D' ter E' zapored razpolovišča stranic CD , DE , EA , AB ter BC . Srednjica AA' je kvečjemu daljša od višine iz oglišča A . Ker imajo vse višine in srednjice enako dolžino, je AA' tudi višina. Enako velja tudi za vse

ostale srednjice. Ker je $AA' = CC'$ in $\sphericalangle AA'C = \sphericalangle CC'A = 90^\circ$, sta trikotnika ACA' in CAC' skladna; zato je $CD = 2CA' = 2AC' = EA$. Sledi, da so vse stranice petkotnika $ABCDE$ enako dolge. Iz skladnosti trikotnikov ACA' in CAC' dobimo tudi $\sphericalangle ACD = \sphericalangle EAC$. Ker je $AB = BC$, velja še $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB$, od koder dobimo $\sphericalangle BCD = \sphericalangle EAB$. Od tod sledi, da so tudi vsi koti danega petkotnika enaki, torej je petkotnik res pravilen.

2. Premaknimo dani nabor 1000 števil tako, da vsako število zmanjšamo za 1. Zopet dobimo 1000 zaporednih števil. Ker je med števili od 1 do 1000 več kot pet praštevil in v našem začetnem naboru ni praštevil, z zaporednim premikanjem zagotovo dobimo nabor 1000 zaporednih števil, v katerem je natanko pet praštevil.
3. Glej rešitev 4. naloge za prvo skupino.
4. To ni vedno možno. Slika prikazuje razporeditev štirih skladnih pravokotnih trikotnikov, za katero velja, da zveznica središča kvadrata in oglišča ob manjšem ostrem kotu posameznega trikotnika seka enega od preostalih trikotnikov. Središče pite tako ne more ležati v konveksnem večkotniku, ki bi vseboval natanko en trikotnik.



5. V vsakem trenutku se trdnjave nahajajo v treh ogliščih nekega pravokotnika. Obstajata dve možni vrsti potez. V prvi spremenimo eno od dimenzij pravokotnika, trdnjave pa stojijo v 'istih' ogliščih, v drugi pa se ena izmed trdnjav premakne v sosednje prosto oglišče pravokotnika. V nobenem primeru se ne spremeni orientacija trikotnika, ki ga tvorijo tri obarvane trdnjave. Ker se začetna orientacija razlikuje od orientacije predpisane končne razporeditve, tako zaporedje potez ne obstaja.

Prva skupina (drugi del)

3. V vsakem stolpcu manjkata natanko dve števili in vsako število manjka v natanko dveh stolpcih. Konstruirajmo graf, katerega vozlišča predstavljajo števila od 1 do n . Vozlišči povežemo, če ustrezni števili manjkata v istem stolpcu. Graf, ki ga dobimo, ima tako natanko n povezav, stopnja vsakega vozlišča (t.j. število povezav, ki izhajajo iz tega vozlišča) pa je enaka 2. Tedaj je graf unija ciklov, pri čemer štejemo tudi 'izrojene' cikle (t.j. cikle z dvema ogliščema). Če orientiramo vse cikle v smeri gibanja urinega kazalca, vodi v vsako vozlišče ena povezava in iz njega izhaja ena povezava. Izberimo stolpec razširjene kvadratne tabele in poiščimo usmerjeno povezavo med številoma, ki manjkata v tem stolpcu. Nato na $(n - 1)$ -to mesto stolpca vpišemo začetno število te povezave in na n -to mesto končno število te povezave. Jasno je, da so tedaj števila v vsakem stolpcu različna, ker pa v vsako vozlišče vodi ena povezava in iz njega izhaja ena povezava, se vsako število pojavi natanko enkrat v $(n - 1)$ -ti vrstici in natanko enkrat v n -ti vrstici. S tem je dokaz končan.
4. Opazujmo za $2 \leq k \leq n$ pot iz k zaporednih stranic danega pravilnega $(2n + 1)$ -kotnika. Pravimo, da ima diagonalna raztežaja k . Diagonalna raztežaja 2 tako od večkotnika odreže enakokraki trikotnik, katerega kraka sta sosednji stranici večkotnika. Če tri izmed danih diagonal tvorijo trikotnik, lahko večkotnik razrežemo vzdolž teh treh diagonal in dobimo tri kose, ki vsi vsebujejo kako diagonalno raztežaja 2, torej obstajajo vsaj trije enakokraki trikotniki. V preostalem primeru vsebuje vsak trikotnik vsaj eno stranico večkotnika. Tedaj trikotniki tvorijo zaporedje, v katerem je skupna stranica sosednjih dveh trikotnikov ena izmed diagonal. Prvi in zadnji trikotnik iz tega zaporedja odrežeta diagonalni raztežaja 2, zato sta ta dva trikotnika enakokraka. Če se pomikamo po zaporedju trikotnikov v eno ali drugo smer, raztežaj diagonal na prehodih raste proti n . Ker je diagonal $2n - 2$, najdemo dve diagonalni raztežaja n , ki skupaj s stranico večkotnika tvorita tretji enakokraki trikotnik.
7. Število števk v zaporedju $\{2^k | 1 \leq k \leq 332\}$ je nepadajoče in se ne poveča za več kot 1, če k povečamo za 1. Vsakič, ko se to število poveča, se dobljena potenca števila 2 začne s števko 1. Ker je 2^{333} 101-mestno število s prvo števko 1, je v gornjem zaporedju natanko 99 števil, ki se začnejo z 1. Kadar se število mest ne poveča, se prva števka menja po enem izmed pravil $1 - 2 - 4 - 8$, $1 - 2 - 4 - 9$, $1 - 2 - 5$,

1 – 3 – 6 ali 1 – 3 – 7, torej 99 števil s prvo števk 1 deli zaporedje na 100 blokov dolžin 2 ali 3. Naj bo x število blokov dolžine 2 in y število blokov dolžine 3. Tedaj velja $x + y = 100$ in $2x + 3y = 233$, od koder sledi $x = 67$ in $y = 33$. Ker noben blok dolžine 2 ne vsebuje števila s prvo števk 4, vsak blok dolžine 3 pa vsebuje natanko eno število s prvo števk 4, je v zaporedju 33 števil s prvo števk enako 4.

Druga skupina (drugi del)

- Označimo z a_n n -ti člen zaporedja in ohranimo to oznako, četudi med konstrukcijo spremenimo vrednost tega člena. V prvem koraku definiramo $a_{99} = 9$ in $a_{100} = 10$. Tedaj je $v(a_{99}, a_{100}) = 90$. V k -tem koraku, $1 < k < 100$, definiramo $a_{100-k} = 10a_{101-k} - 1$ in za vse $n > 100 - k$ člen a_n zamenjamo z $10a_n$. V drugem koraku tako dobimo $a_{98} = 10a_{99} - 1 = 89$ ter redefiniramo $a_{99} = 90$ in $a_{100} = 100$, zato je $v(a_{98}, a_{99}) = 8010 > 900 = v(a_{99}, a_{100})$. Ko prvič definiramo člen a_{n-1} , za $n > 1$, velja $a_{n-1} = a_n - 1 = a_{n+1} - 11$. Ker je $a_{n-1} > 1$, velja $10a_{n-1} > a_{n-1} + 11 = a_{n+1}$, zato je $v(a_{n-1}, a_n) = a_{n-1}a_n > \frac{1}{10}a_na_{n+1} = v(a_n, a_{n+1})$. Opazimo, da neenačba $v(a_{n-1}, a_n) > v(a_n, a_{n+1})$ ostane veljavna v vseh nadaljnjih korakih, saj vsa, že definirana števila, pomnožimo s skupnim faktorjem 10. Tako smo definirali iskano zaporedje.
- Dokažimo, da lahko dobimo največ šest neskladnih štirikotnikov. Označimo z a, b, c in d dolžine stranic štirikotnika F_1 ter z x in y vsoti parov nasprotnih kotov v F_1 . Očitno je, da se dolžine stranic ob opisani spremembi ohranijo, prav tako pa se ohranita vsoti parov nasprotnih kotov. Denimo, da se v zaporedju pojavi sedem neskladnih štirikotnikov. Tedaj lahko privzamemo, da obstajata v zaporedju dva štirikotnika F in G , v katerih si stranice a, b, c ter d sledijo v pozitivni smeri in za katera je vsota kotov med stranicama a in b ter stranicama b in c enaka v F in G . Naj bo f dolžina diagonale štirikotnika F , ki deli F tako, da sta a in b na eni strani f ter c in d na drugi strani. Če bi bila dolžina ustrezne diagonale v G večja, bi bila vsota kotov nasproti te diagonale večja kot v F . To pomeni, da sta dolžini ustreznih diagonal v F in G enaki, zato sta F in G skladna. Od tod sledi, da je največje možno število neskladnih štirikotnikov kvečjemu 6. Če za F_1 vzamemo štirikotnik s paroma različnimi stranicami in različnima vsotama x ter y , se lahko prepričamo, da dobimo natanko 6 neskladnih štirikotnikov.

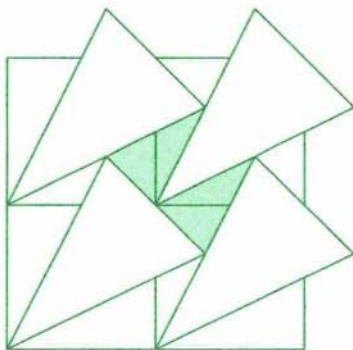
6. Z indukcijo dokažimo, da lahko z opisanim postopkom dosežemo poljubno permutacijo števil od 1 do n (v našem primeru je $n = 23$). Za $n = 1, 2$ trditev očitno drži. Denimo, da drži za vse $k < n$. Z opisanim postopkom lahko torej dobimo poljubno permutacijo števil od 1 do $n - 1$. Če je v zadnji škatli n kroglic, preuredimo le še kroglice v prvih $n - 1$ škatlah.

Denimo, da v zadnji škatli ni n kroglic.

Naj bo n sodo število, $n = 2m$. Števila od 1 do $n - 1$ z opisanim postopkom preuredimo tako, da je m kroglic v zadnji škatli. Tedaj iz škatle z n kroglicami prestavimo m kroglic v zadnjo škatlo, ki po tem vsebuje natanko n kroglic. Nato preuredimo še kroglice v prvih $n - 1$ škatlah v pravilni vrstni red.

V preostalem primeru je n liho število, $n = 2m + 1$. Najprej prestavimo s permutacijo števil od 1 do $n - 1$, število $2m$ v n -to škatlo. Iz škatel z $2m + 1$ in $2m$ kroglicami lahko dobimo škatli s $4m$ kroglicami in z 1 kroglico. Nato iz škatel s $4m$ in $2m - 1$ tvorimo škatli s $4m - 2$ kroglicama in z $2m + 1$ kroglico. Zatem iz škatel s $4m - 2$ in $2m - 2$ tvorimo škatli s $4m - 4$ kroglicami in z $2m$ kroglicami. Če ponavljamo ta postopek, dobimo permutacijo, kjer je v n -ti škatli n kroglic. Nato preuredimo še kroglice v prvih $n - 1$ škatlah v pravilni vrstni red.

7. (a) Slika kaže, da je lahko ploščina trikotnika enaka $\frac{2}{3}$. Trikotnik je enakokrak z vrhom in nožiščem višine v nesosednjih oglišč kvadrata s celoštevilskimi koordinatami oglišč, njegova kraka pa potekata skozi razpolovišči stranic kvadrata.



(b) Predpostavimo lahko, da oglišča trikotnika T ležijo na straneh trikotnikov, slik ustrezno premaknjene trikotnika T , podobno kot kaže slika v točki (a) (v nasprotnem primeru, bi lahko trikotnik T še malo povečali). Denimo, da slika prikazuje ta splošnejši primer, kjer je T trikotnik levo spodaj. Osenčena trikotnika in trikotnik T tvorijo lik L , katerega 'celoštevilski premiki' pokrijejo vso ravnino brez prekrivanja (notranjosti dveh premikov se na sekata). Od tod sledi, da je ploščina lika L enaka 1. Osenčena trikotnika T_1 in T_2 sta podobna trikotniku T , vsota dolžin stranic trikotnikov T_1 in T_2 , ki ustrežata skupni stranici trikotnika T , pa je kvečjemu večja kot dolžina te stranice. Od tod sledi, da je skupna ploščina trikotnikov T_1 in T_2 enaka vsaj polovici ploščine trikotnika T , kar pomeni, da je ploščina trikotnika T kvečjemu $\frac{2}{3}$.

Gregor Cigler

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
30. letnik, šolsko leto 2002/03, številka 1, strani 1–64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281. Naročnina za šolsko leto 2002/03 je za posamezne naročnike **3.300 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.700 SIT**, posamezna številka **825 SIT**, tematska številka **1.650 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, transakcijski račun številka 03100-1000018787.

List sofinancira MŠZŠ
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1502

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana



HRAST (levo zgoraj) in KRVENKA (desno zgoraj) imata filotakso $\frac{2}{5}$,
OGNJENI TRN (levo spodaj) $\frac{1}{3}$, LIPA (desno spodaj) pa $\frac{1}{2}$.



