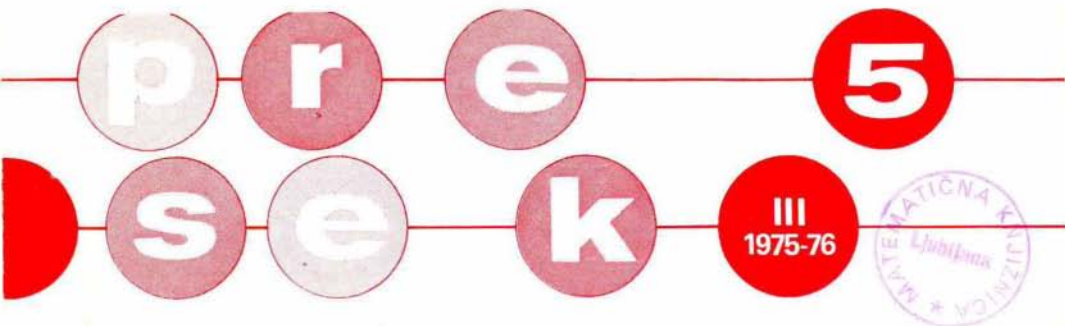




Ivan Vidav

JOSIP PLEMELJ

ob stoletnici rojstva



1 OCT. 1978

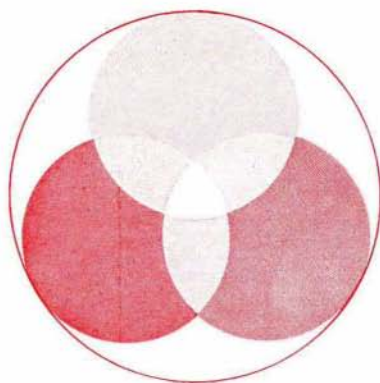
LIST ZA MLADE

 **MATEMATIKE**

   **FIZIKE**

 **ASTRONOME**

IZDAJA DMFA SRS



$$u \frac{du}{dy} = \frac{a}{y} (1+u^2)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{u}$$

Prva leh dvuh enačb ima ločljive spremenljivki in da:

$$\log(1+u^2) = 2a(\log y - \log k)$$

ali $1+u^2 = \left(\frac{y}{k}\right)^{2a}$

bedaj pa dobimo iz druge enačbe

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^{2a} - 1}}$$

Integracijska konstanta je tu k x-u aditivna. Pri poljubnem a da integral ne ~~je~~ ^{izraža} elementarnimi funkcijami. Posebno zanimivi pa so primeri, kjer ima a vrednosti $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

Pri $a = \pm 1$ je krivinski radij absolutno enak dolžosti normale, tj. pa pri -1 isto smeren, pri +1 pa nasprotno smeren.

$a = -1$ $x = \int \frac{y dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \sqrt{k^2 - y^2} + C$

$(x-C)^2 + y^2 = k^2$ krog

$a = +1$

$x = \int \frac{k dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = k \log\left(\frac{y}{k} + \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1}\right) + C$ ali

$\frac{y}{k} + \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1} = e^{\frac{x-C}{k}}$

odtod pa $y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x-C}{k}} + e^{-\frac{x-C}{k}} \right)$ verižnica.

$a = -\frac{1}{2}$

$x = \int \sqrt{\frac{y}{k-y}} dy$, če se tu vpelje $y = \frac{k}{2}(1 - \cos u)$

potem pride $x = \frac{k}{2}(u - \sin u) + x_0$ cikloida

$a = +\frac{1}{2}$

$x = \int \sqrt{\frac{k}{y-k}} dy = 2\sqrt{k} \cdot \sqrt{y-k} + C$

ali $(x-C)^2 = 4k(y-k)$ parabola

$a = \frac{3}{2}$

$x = \int \frac{y dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^3 - 1}}$, $y = k \wp\left(\frac{x-x_0}{2k}\right)$, $\wp^2 = 4\wp^3 - 4\wp$

$a = +2$

$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^4 - 1}}$, $y = k \frac{\wp'(\frac{x-x_0}{2k})}{2\wp(\frac{x-x_0}{2k})}$, $\wp^2 = 4\wp^3 + \wp$



Društvo matematikov, fizikov
in astronomov SR Slovenije
Ljubljana 1975

Ivan Vidav

Josip Plemelj

Ob stoletnici rojstva

Iz

Tiska

S

UDK 92:51

AMS Subj. Class. (1970) 01 A 70
00 A 15

© 1973, 1975 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije

F

Jc
O

K
v

K
v

B

Ivan Vidav

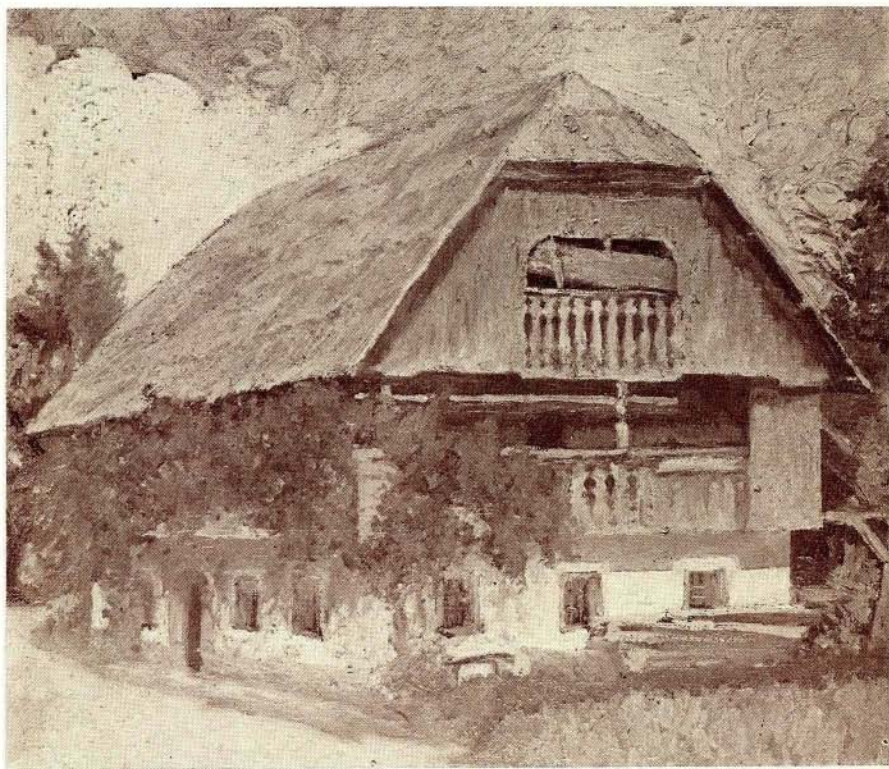
Josip Plemelj

Ob stoletnici rojstva

Profesor Josip Plemelj je bil rojen 11. decembra 1873 v vasi Grad na Bledu. Oče Urban (1831—1875) je bil mizar in rezbar, hkrati pa mali kmet. Poročen je bil trikrat. Druga žena je prinesla v hišo jetiko in od nje umrla. Jetike so se našli tudi oče, sin iz prvega zakona in seveda vsi otroci druge žene. Od tretje žene Marije roj. Mrak (1845—1919) so bili trije otroci. Najstarejša je bila hčerka Ivana (1872—1956), drugi sin Josip in tretji Urban (1875—1947), ki pa se je rodil po očetovi smrti. Mati Marija je imela veliko odpornost proti tuberkulozi in njeni otroci so odpornost podedovali. Vsi so se sicer našli jetike, vendar so bolezen premagali in čakali lepo starost. Pač pa so oče in otroci iz prvih dveh zakonov kmalu pomrli za jetiko.

Po očetovi smrti je doma zavladata revščina, saj je mati le s težavo preživljala družino. Osnovno šolo je mali Joža obiskoval na Bledu. Sprva ni bil namenjen za šolanje, čeprav si je tega zelo želel, posebno, ko je videl, da so se šolali otroci bogatega sosedu. Nazadnje se je materi le posrečilo, da je našla neko

možnost in poslala sina v Ljubljano, najprej eno leto v pripravljalnico na Grabnu in nato v gimnazijo (1886—1894). V nižji gimnaziji se je preživiljal s skromnimi prispevki od doma in s podporami dobrih ljudi. V višji gimnaziji se je vzdrževal sam z inštruiranjem. Poučeval je v glavnem svoje sošolce in si s tem zaslužil vedno dovolj denarja, tako da ni bil več v stiski.



J. Erbežnik: Rojstna hiša Josipa Plemelja na Bledu — olje, 1913

Ker je zrasel brez očeta in se vzdrževal sam, je postal zelo samostojen in neodvisen in se je zato težko podvrgel šolski disciplini. Hranil se je pogosto v gostilnah, gimnazijcem pa ni bilo dovoljeno obiskovati gostilne. Tako si je »prislužil« v petem razredu dve uri šolskega zapora, v šestem razredu pa kar pet ur. To je imelo za posledico, da ni bil več oproščen šolnine.

V osmi razred pa se sploh ni mogel vpisati. Med počitnicami je bil namreč v družbi s sošolci, ki so v mladostni razposajenosti vrgli neko klop iz Tivolija v ribnik. Pri tem jih je zasačil policaj. Plemelj je tedaj sam poravnal škodo. Zadeva bi bila pozabljena, če se ne bi o njej razpisal *Slovenski narod*. Dijaki, ki so vrgli klop v ribnik, so bili namreč razen Plemelja* vsi Nemci. In *Slovenski narod* je pisal, kaj vse si lahko nekaznovano dovolijo nemški dijaki. Tako je za zadevo zvedel ravnatelj gimnazije in v jeseni se Plemelj ni več mogel vpisati v šolo. Osmi razred



Josip Plemelj — drugi z desne v predzadnji vrsti

je potem študiral kot privatist. Prvi semester je delal izpite na novomeški gimnaziji, drugi semester in maturo pa je opravil na ljubljanski gimnaziji.

Velik talent za matematiko je pokazal zelo zgodaj. Vso gimnazijsko snov iz matematike je obvladal že v začetku četrtega razreda, tako da je kot četrtošolec pomagal maturantom pri nalogah. Sam je odkril vrsti za $\sin x$ in $\cos x$. Pravzaprav je našel najprej vrsto za ciklometrično funkcijo $\arcsin x$, potem

* Profesor Plemelj je povedal, da so na Bledu njegovo ime sklanjali takole: Plemeljna, pri Plemeljnovih itd. Zato je mislil, da se mora pri sklanjatvi „e“ ohraniti.

pa vrsto obrnil in uganil zakonitost med koeficienti. Vendar korektnega dokaza tedaj ni imel.

Od četrte do osme gimnazije je bil njegov profesor V. Borštner, v četrtem razredu samo za fiziko, od petega razreda naprej pa tudi za matematiko. V četrtem razredu je imel za matematiko profesorja Westra, s katerim se pa ni razumel. Do spora je prišlo zaradi neke šolske naloge. Profesor je namreč eno izmed nalog napačno rešil, trdil pa je, da je Plemeljova rešitev napačna, čeprav je bila pravilna. Svoje napake ni hotel priznati in sploh ni pokazal korigiranih nalog. Prof. Borštner pa je Plemelja takoj spoznal in zelo cenil. Niti enkrat ga ni vprašal za red, za oceno so zadostovale pismene naloge. Le če nobeden v razredu ni znal rešiti kake naloge, je poklical Plemelja in mu rekel, naj jo on reši. V humanističnih predmetih je bil Plemelj povprečen dijak. Kljub temu so tudi drugi profesorji upoštevali njegov poseben položaj. Nikoli ga niso vprašali novih lekcij. Kljub temu pa se je naučil toliko latinščine, da je še v pozni starosti zlahka prebiral slavno Gaussovo knjigo *Disquisitiones Arithmeticae*.

Plemelj je imel veliko veselje za težke konstrukcijske naloge v geometriji. K njim se je tudi v poznejšem življenju vedno rad vračal. Posebno znamenita je naloga, ki jim jo je dal Borštner v petem razredu (glej [31]): Načrtaj trikotnik, če je dana ena stranica, višina nanjo in razlika kotov ob njej. Seveda nihče v razredu ni znal rešiti te naloge. Tudi Plemelj jo je najprej rešil trigonometrično in poiskal za dobljeno rešitev čisto geometrijsko razlago. Pozneje je našel za to nalogo še številne druge rešitve, zadnjo v Silvestrovi noči leta 1939.

Iz gimnazijske dobe izvira tudi njegova konstrukcija pravilnega sedmerokotnika, in sicer natančna s trisekcijo kota. Iz nje takoj razberemo staro indijsko ali babilonsko približno konstrukcijo. Do rešitve je prišel takole: Naj bo s stranica pravilnega sedmerokotnika, ki je vrtan krogu s polmerom $r = 1$. Če zvežemo središče kroga z vsemi oglišči, smo razrezali sedmerokotnik na sedem skladnih enakokrakih trikotnikov s krakom dolžine 1 in s kotom $2\pi/7$ ob vrhu. Torej je iskana stranica $s = 2\sin(\pi/7)$.

Po adicijskem teoremu izračunamo

$$\sin 7\varphi = -\sin\varphi(2^6 \sin^6\varphi - 7 \cdot 2^4 \sin^4\varphi + 14 \cdot 2^2 \sin^2\varphi - 7)$$

Vstavimo $\varphi = \pi/7$ v to identiteto. Ker je $\sin 7\varphi = \sin \pi = 0$ in $2 \sin(\pi/7) = s$, je stranica s koren enačbe

$$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$$

Polinom na levi $x^6 - 7(x^2 - 1)^2$ lahko razstavimo v produkt dveh polinomov tretje stopnje. Brez težave ugotovimo, da ustreza stranica s enačbi

$$x^3 + \sqrt{7}(x^2 - 1) = 0 \quad (1)$$

Ugodno je uvesti $1/x = y$ kot novo neznanko, ker ima kubična enačba za y

$$y^3 - y - 1/\sqrt{7} = 0 \quad (1^*)$$

obliko, ki je primerna za reševanje s Cardanovo formulo. Cardanovo formulo je Plemelj poznal že v srednji šoli. Ker so vsi koreni enačbe (1^*) realni, jih dobimo v trigonometrični obliki. Naj bo α oster kot, ki ga določa enačba

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/3\sqrt{3} \quad (2)$$

Koreni se potem izražajo takole

$$y_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{1}{3}(\alpha + k\pi), \quad k = 0, 1, 2$$

stranico s dobimo pri $k = 0$

$$s = (\frac{1}{3}\sqrt{3})/\cos \frac{1}{3}\alpha$$

Izraz $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$ pomeni višino enakostraničnega trikotnika s stranico r . Kot α , ki ga določa enačba (2), leži v pravokotnem trikotniku, katerega ena kateta je višina enakostraničnega trikotnika, druga pa šestina stranice, nasproti drugi kateti. Stranica pravilnega sedmerokotnika je enaka hipotenuzi pravokotnega trikotnika, ki ima en kot $\frac{1}{3}\alpha$, ena stranica pa je višina enakostraničnega trikotnika. Torej je preveden problem konstrukcije pravilnega sedmerokotnika na tretinjenje kota. Kot $\frac{1}{3}\alpha$ je razmeroma majhen. Zato se stranica s le malo razlikuje od višine enakostraničnega trikotnika. Pri tako imenovani indijski približni konstrukciji vzamemo za s kar višino.

Če namesto kota α razdelimo nasprotno kateto na tri dele, dobimo boljšo aproksimacijo, kakor je indijska. Stranica s je približno enaka hipotenuzi trikotnika, katerega ena kateta je višina, druga pa osemnajstina osnovnice enakostraničnega trikotnika s stranico r . Ta konstrukcija je tako natančna, da je pri polmeru $r = 1$ m razlika med pravo stranico in stranico, dobljeno po tej konstrukciji, samo 0.038 mm.

Konstrukcijo pravilnega sedmerokotnika je Plemelj našel že leta 1892, objavil pa jo je dvajset let pozneje. Leta 1911 je namreč izšla knjiga Th. Vahlen: *Konstruktionen und Approximationen*, ki vsebuje najrazličnejše konstrukcijske naloge. Navedene konstrukcije pravilnega sedmerokotnika pa v njej ni. Zato je Plemelj sodil, da ni še znana in jo je objavil.

Z višjo matematiko se je začel ukvarjati v četrtem in petem razredu gimnazije. V Ljubljani je bilo tedaj težko priti do matematične literature. V začetku petega razreda pa se mu je posrečilo dobiti v antikvariatu knjigo A. Burg: Höhere Mathematik. To delo je izšlo že okoli leta 1830, in sicer v treh zvezkih. V njih so bili diferencialni in integralni račun, diferencialne enačbe, variacijski račun in še marsikaj drugega. O kaki matematični strogosti ni bilo govora. Plemelj je kmalu vse tri zvezke predelal. Zelo je bil razočaran, ko je v njih našel vrsti za $\sin x$ in $\cos x$, ki jih je že sam odkril.



Leta 1894 je Josip Plemelj (stoji v spodnji vrsti 7. z leve) maturiral v Ljubljani.

Poleg matematike se je zanimal za astronomijo in rad opazoval zvezde. Imel je zelo ostre oči in je videl planet Venero tudi pri belem dnevu. Že v gimnaziji je študiral nebesno mehaniko.

Po maturi je odšel jeseni 1894 na Dunaj, kjer se je vpisal na filozofsko fakulteto in študiral matematiko, fiziko in astronomijo. Denar za potovanje in za začetek bivanja si je izposodil od znancev na Bledu. Njegov izredni talent je že prvi

mesec pri seminarju odkril prof. G. von Escherich, tedanji predstojnik katedre za matematiko. Povabil ga je k sebi na razgovor. Vprašal ga je, kje je do tedaj študiral, da se je naučil toliko matematike, in kaj želi postati. Plemelj mu je odgovoril, da ima za seboj samo gimnazijo in da se je iz knjig naučil, kar zna. Rad bi pa postal astronom. Escherich mu je povedal, da v astronomiji ni kruha, zato naj študira matematiko, saj se bo kot matematik lahko ukvarjal tudi z astronomijo. Misliti mora na univerzitetno kariero. Napravil mu je ustrezni študijski program na fakulteti in delovni načrt in program podiplomskega



Josip Plemelj kot študent na Dunaju, 1896

študija. Gmotno mu je omogočil študij s tem, da mu je prekrbel Knafljevo štipendijo, ki jo je podeljevala dunajska univerza. Tudi pozneje se je zanj stalno zanimal in mu pogosto pomagal, tako da ga je Plemelj vse življenje ohranil v hvaležnem spominu.

Na Dunaju so bili Plemeljevi profesorji poleg Eschericha, ki je predaval analizo, še Gegenbauer in Mertens za aritmetiko in algebro, Weiss za astronomijo, Boltzmann za fiziko in drugi. Maja 1898 je predložil disertacijo »Über lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffi-

zienten«. Glede na izkazani študij mu je ministrstvo za uk in bogočastje izjemoma dovolilo, da sme delati rigorozne že na koncu letnega semestra 1898. Rigoroz iz matematike in fizike je opravil julija, rigoroz iz filozofije in psihologije pa decembra.

Ker je vse izpite opravil z odliko, ga je filozofska fakulteta na Dunaju določila kot prvega kandidata za univerzitetno kariero. Takoj po doktoratu je dobil mesto v ustanovi Österreichisches Gradmessungs-Bureau. Univerza mu je potem dala štipendijo za podiplomski študij, in sicer po 1600 kron na leto. Najprej je odšel za eno leto v Berlin, kjer je poslušal



Felix Klein



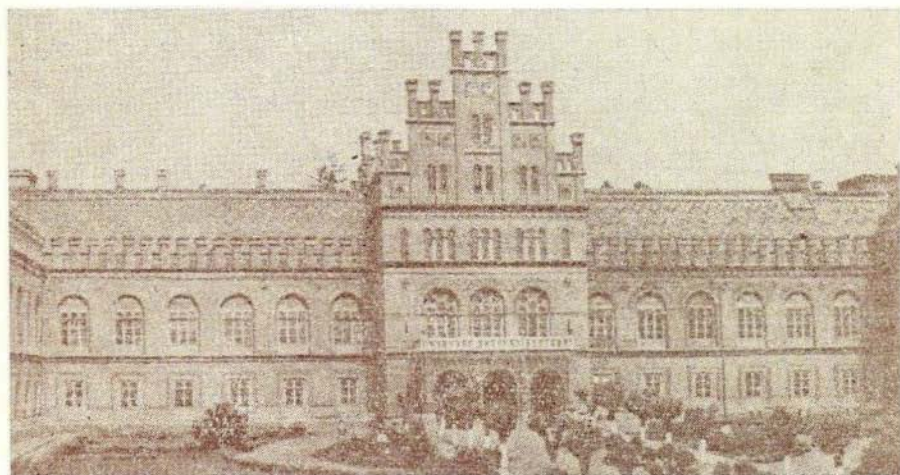
David Hilbert

predavanja pri profesorjih Fuchsu in Frobeniusu, naslednje leto (1900/1) pa je bil v Göttingenu pri profesorjih F. Kleinu in D. Hilbertu. Göttingen je bil tedaj eno izmed najpomembnejših matematičnih središč in so tja prihajali študirat z vsega sveta. Precej razvito je bilo družabno življenje. Tu se je Plemelj seznanil s številnimi mladimi matematiki. Z nekaterimi, kakor npr. z G. Fabrom, je ostal v prijateljskih stikih do konca življenja.

Jesen 1901 se je vrnil na Dunaj, kjer je dobil službo v ustanovi Österreichisches Regional-Bureau für die internatio-

nale naturwissenschaftliche Bibliographie — Hofbibliothek. Kakšnega posebnega dela v tej ustanovi ni imel in je lahko znanstveno delal. To je bila nekakšna pripravljalna služba za univerzitetne učitelje. Tedaj so bila namreč vsa mesta na univerzah strogo sistemizirana in je bilo treba čakati na izpraznjeno mesto. Aprila 1902 je postal privatni docent za matematiko na dunajski univerzi. Mesto privatnega docenta ni bilo plačano in ni mogel od njega živeti. Leta 1906 je bil imenovan tudi za asistenta na Tehniški visoki šoli na Dunaju.

Leta 1907 je postal izredni profesor za matematiko na uni-



Univerzitetna zgradba v Černovicah

verzi v Černovicah. Nastavitev univerzitetnih učiteljev je tedaj potekala takole: fakulteta je dala predlog, ki je moral vsebovati tri imena, kandidata na prvem, drugem in tretjem mestu. Imenovanje je bilo prepuščeno ministrstvu za uk in bogočastje, ki je po navadi izbralo prvega kandidata. Filozofska fakulteta v Černovicah je predlagala Plemelja na tretjem mestu, najbrž zato, ker je bil Slovenec, univerza v Černovicah pa je imela misijo širiti nemško kulturo na vzhod. Toda matematiki so napravili poseben predlog in v njem navedli Plemelja kot edinega kandidata. Ministrstvo je v tem primeru bolj upoštevalo

mnenje matematikov kakor filozofske fakultete. Profesor Plemelj mi je povedal, da so ga kolegi na filozofski fakulteti v Černovicah sprejeli zelo korektno in mu niso dali v ničemer čutiti, da jim je bil »vsiljen«.

Odlok o imenovanju je tedaj podpisal sam cesar in tudi sprejel vsakega novega univerzitetnega profesorja v avdienco. Ob imenovanju Plemelja pa je bila ravno vladna kriza in je bil cesar z njo preveč zaposlen. Tako je bil Plemelj prikrajšan za čast, da bi bil sprejet pri cesarju.

Že naslednje leto je bil imenovan za rednega profesorja



Leta 1906 se je Josip Plemelj poročil z Julko Hočevar

v Černovicah. V dekretu so bile tedaj navedene dolžnosti profesorja: moral je imeti najmanj pet ur predavanj tedensko iz svoje stroke, voditi seminar in proseminar. Redni profesor je moral imeti vsak tretji semester še poseben collegium publicum. Prav tako so bili v dekretu navedeni dohodki: kot izredni profesor je Plemelj prejemal 3600 kron letne plače in 1172 kron dodatka, kot redni profesor pa 6400 kron plače in 1472 kron dodatka.

Leto dni pred imenovanjem za profesorja v Černovicah se je poročil z Julko Hočevar (1882—1950). Imela sta enega

samega otroka, hčerko Nado (1907—1964), ki se je poročila z ing. K. Kavčičem, dolgoletnim ravnateljem Centralne tehnične knjižnice v Ljubljani.

Na univerzi v Černovicah je bil profesor za matematiko še H. Hahn, za matematično fiziko pa M. Radaković. Predstojnik matematičnega seminarja je bil Plemelj, ki je bil 1912/13 tudi dekan filozofske fakultete. Asistentov za matematiko ni bilo niti na dunajski univerzi.

V času sarajevskega atentata na avstrijskega prestolona-

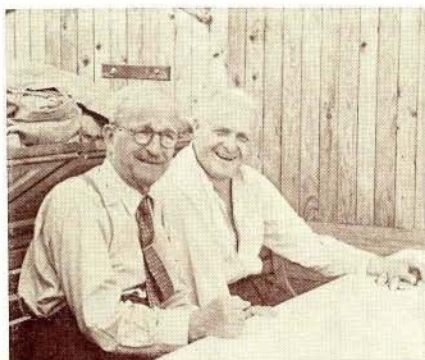


Josip Plemelj na Dunaju, 1918

slednika je bil Plemelj v Černovicah, začetek vojne pa je dočakal na počitnicah na Bledu. Jeseni 1914 se je vrnil v Černovice, a je potem dvakrat pribežal na Dunaj in na Bled, ker so Černovice menjavale gospodarja. Plemelj je bil hudo protiavstrijsko usmerjen. Sam je o tisti dobi zapisal [31]: »Zadnja desetletja pred prvo vojno so bila v stari monarhiji karakterizirana z neprestanimi notranjimi boji med nemškim in drugimi narodi, pri prvem za nadvlado, pri drugih za enakopravnost. Mene je politična napetost in očitna krivičnost v stari državi tako raz-

dvojila z državo samo, da sem, ko je Avstrija svetovno vojno cinično izzvala, z vsakim utripom svojega srca želel pogin te države.« Ker svojih nazorov ni skrival, je bil med vojno od avstrijske tajne policije označen kot P. V. (politisch verdächtig). Septembra 1917, ko je bil z družino na Bledu, so ga poklicali na policijo v Ljubljano in ga čez nekaj dni odpeljali v konfinacijo na Moravsko. Slovenski politiki in dunajski matematiki so tedaj dosegli, da je bil premeščen na Dunaj, ki ga ni smel zapustiti. Redne vojske ni nikdar služil. V konfinaciji je bil kot navaden vojak zaposlen v nekem vojaškem institutu za preizkušanje topovskih izstrelkov.

Po razsulu avstroogrške monarhije se je vrnil z Dunaja na



Prof. dr. Josip Plemelj s prof. dr. ing. Antonom Kuhljem na jahti Burja v Benetkah leta 1957

Bled. Leta 1919 je postal član univerzitetne komisije pri pokrajinski vladi v Ljubljani. Avgusta 1919 je bil imenovan za rednega profesorja matematike na filozofski fakulteti univerze v Ljubljani. Bil je izvoljen za prvega rektorja nove univerze. Tudi tedaj je bila stanovanjska stiska in ni mogel najti takoj stanovanja v Ljubljani. Zato se je nekaj časa vozil z vlakom z Bleda v Ljubljano na predavanja in seje. Na filozofski fakulteti, ali na naravoslovni, ki je nastala po drugi svetovni vojni, je predaval matematiko 40 let. V pokoj je šel leta 1957. Še nekaj let po upokojitvi pa je predaval kot honorarni profesor. Razen nekaj let je ves ta čas predaval matematiko tudi na tehniški fakulteti.

Drugo svetovno vojno je preživel v Ljubljani. Po atentatu na Natlačena leta 1942 so ga dali Italijani skupaj s številnimi drugimi slovenskimi kulturnimi delavci na seznam morebitnih talcev. Enkrat so ga poklicali na italijansko poveljstvo, drugih težav pa ni imel.

Plemelj je bil vzgojen v katoliški veri. Njegova mati je bila globoko verna žena. Ko se je pripravljala na prvo obhajilo, mu je govorila: »Pazi, Joža, da boš vredno prejel prvo obhajilo. Kakršno bo namreč prvo obhajilo, takšno bo vse tvoje življenje.« Dan pred prvim obhajilom je šel k sosedovim gledat mlade zajčke. Ko je med njimi opazil zelo temnega, je vzkliknil: »Ta je pa črn kot hudič.« To je bilo seveda huda kletev. Ko je šel drugi dan k prvemu obhajilu, je bil prepričan, da ga je prejel po nevrednem, kar ga je kot otroka strašno težilo, saj si je po materinih besedah pokvaril življenje. Ko je pozneje prvič slišal za protiverske nazore, je videl v njih rešitev od velike more. Zato se jih je kmalu oklenil in postal odločen nasprotnik vere. Tak je ostal vse življenje. Kot naravoslovec je bil prepričan, da je človek del narave in da nima izjemnega položaja v svetu. Svoje nazore je v gimnaziji širil tudi med sošolci. Rad je pripovedoval, kaj je katehet prof. Svetina rekel dijakom: »S Plemeljem pa se ne smete družiti. On je zmožen, da vam odvzame sveto vero, največjo dobroto človeka.« Vendar njegovi nazori niso vplivali na odnos do drugih ljudi, še zlasti ne do študentov drugačnega prepričanja.

Po značaju je bil preprost in odkrit. Vsakemu je povedal svoje mnenje v obraz. Za težave soljudi, posebno študentov, je imel vedno razumevanje in rad jim je pomagal.

Poleg matematike se je živo zanimal za politiko. Večkrat je izjavil, da bi se povsem posvetil politiki, če bi imel govorniški dar. Bil je vedno narodno zaveden, toda dolgo je bil mnenja, da smo Jugoslovani en narod in da je slovenščina le narečje. Po političnem prepričanju je bil napreden v tedanjem pomenu besede. Povedal je, da je pred prvo vojno na Dunaju in v Čer-

novicah volil socialiste. Dolgo je tudi s simpatijó spremljal dogajanje v Sovjetski zvezi, predvsem njen gospodarski vzpon, dokler ga ni razočarala Stalinova politika.

Zelo je bil navezan na svoj rojstni kraj. Pri srcu mu je bil razvoj Bleda in okolice. Posebno pa ga je zadnja leta zanimala sanacija jezera. Njegova rojstna hiša je bila še s slamo krita in ne stoji več. Skoraj na istem mestu je dal sezidati večjo hišo, po nasvetu prijateljev preveliko. Začetni kapital za zidavo sta mu bili nagradi, ki ju je dobil pred prvo vojno. Počitnice je



Klub slovenskih naravoslovcev na Dunaju, 1897/98. Na sliki z leve proti desni stojijo: Kraigher, Klasinc, Kreft, Verčon, Bevk, Rus, Stojc, Plemelj, Plečnik in Jesenko. Sedijo: Reisner, Regen, Kušar, Tičar in Hinterlechner

po navadi z družino preživel na Bledu. Veliko veselje je imel s sadnim drevjem, ki ga je nasadil okóli hiše in ga je pomagal obirati še v pozni starosti. Pri tem je pogosto sam splezal na drevesa. Rad je imel naravo in še posebej planine. Bil je vnet hribolazec in se je neštetokrat povzpел na Triglav. Tudi po drugi svetovni vojni je večkrat poskušal priti na vrh. Posrečilo pa se mu je samo enkrat, leta 1950, ko je imel že 77 let. Pri drugih poskusih mu je spodletelo zaradi vremena in slabe kondicije, ker ni prej treniral v hoji.

Od dijaških let je imel rad veselo družbo. S prijatelji je tedaj pogosto zahajal v gostilno in tudi dobre kapljice se ni branil. Vendar mu vino ni moglo do živega. Imel je tako naravo, da ni bil nikoli pijan. Čeprav ga je več spil kot tovariši, ki so ga pošteno čutili, je sam ostal trezen. Ni pa postal suženj alkohola. Ko se je moral pozneje zaradi bolezni držati diete, se je pijači zlahka odrekel.

Zelo mu je bila všeč glasba, predvsem opera. Za leposlovje se je manj zanimal. Pač pa je pogosto prebiral Prešerna in znal mnogo njegovih pesmi na pamet. Rad je imel knjige z naravoslovno vsebino, zgodovinske knjige in memoarsko literaturo.



*Pred planinsko kočo Planika (2440 m)
Na sliki z leve proti desni:
Gradnik, Kuščer, Plemelj, Vidav.
Foto A. Moljk*

Kakor med drugimi ljudmi najdemo tudi med matematiki dobre, povprečne in slabe računarje. Gauss je rad in veliko računal, Poincaré pa je tožil, da mu računanje ne gre od rok. Plemelj je sodil med dobre računarje. Na pamet je lahko množil petštevlična števila. Rad se je ukvarjal z numeričnimi nalogami in še posebej z računi, ki izvirajo iz teorije števil. V tej zvezi je treba omeniti njegovo prizadevanje, da bi v slovenščini uvedli dekadični način štetja, kakor je v drugih slovanskih jezikih, torej dvajsetpet namesto petindvajset. Naš način štetja je namreč vir velikega števila napak pri računanju.

Plemelj je jetiko premagal že v mladih letih. Pozneje si je nakopal novo bolezen, čir na dvanajsterniku. Ta bolezen mu je

pogosto grenila življenje. Ker se je moral držati diete, je bil vezañ na domačo prehrano in je zato zelo redko potoval. Kljub bolezni pa je ostal dolgo telesno in duševno čil. Morda bi čakal sto let, če ga ne bi na starost doletela dva huda udarca. Marca 1958, ko mu je bilo 85 let, si je pri padcu na poledeneli cesti zlomil nogo v kolku. Operiral ga je tedaj prof. Lavrič. Operacija je dobro uspela in je kmalu lahko hodil brez palice. Vendar je zaradi operacije in hude krvavitve v želodcu telesno in duševno precej opešal. Še hujši udarec pa je bila smrt edine hčerke Nade, ki je decembra 1964 umrla za levkemijo. Od tedaj je



Na poti k predavanjem, 1957

vidno hiral. Ker se mu je poslabšala tudi stara bolezen, ga je spomladi 1967 zet ing. Kavčič spravil v bolnišnico P. Deržaja v Ljubljani. Tu je 22. maja umrl zaradi izliva krvi v želodec.

Glavna matematična področja, na katerih je Plemelj delal, so bila diferencialne in integralne enačbe, teorija potenciala (harmoničnih funkcij) in funkcijska teorija.

Na prelomu devetnajstega v dvajseto stoletje se je začela naglo razvijati teorija integralnih enačb. Novo teorijo so uporabili na številnih področjih matematike in fizike, predvsem v

teoriji diferencialnih enačb. Ko je Plemelj študiral v Göttingenu, je tam Šved E. Holmgren poročal o Fredholmovi teoriji linearnih integralnih enačb prve in druge vrste. Göttingenski matematiki so se z D. Hilbertom na čelu takoj lotili raziskovanja novega področja. Med njimi je tudi Plemelj dosegel lepe uspehe. V razpravi [9] je dokazal, da ima integralska enačba

$$\phi(t) + \lambda \int f(t, \theta) \phi(\theta) d\theta = \chi(t)$$

rešitev v obliki

$$\phi(t) = \chi(t) - \lambda \int F(t, \theta) \chi(\theta) d\theta$$

kjer je $F(t, \theta)$ tako imenovana resolventa, ki ustreza integralni enačbi

$$F(s, t) + \lambda \int F(s, \theta) f(\theta, t) d\theta = f(s, t)$$

V odvisnosti od parametra λ je $F(s, t)$ kvocient dveh celih funkcij, pri čemer pa imenovalec $D(\lambda)$ ni odvisen od s in t . Če je $\lambda = \lambda_0$ ničla p -te stopnje funkcije $D(\lambda)$, toda pol prve stopnje za resolvento $F(s, t)$, potem ima homogena enačba

$$\phi(t) + \lambda \int f(t, \theta) \phi(\theta) d\theta = 0$$

in prav tako adjungirana homogena enačba p linearno neodvisnih rešitev. Glavni del resolvente v točki $\lambda = \lambda_0$ se preprosto izraža z rešitvami obeh homogenih enačb.

Približno iste rezultate je našel skoraj istočasno tudi I. Fredholm.

V razpravah [10] in [11] je Plemelj uspešno uporabil integralne enačbe v teoriji potenciala. Odkril je formulo za vsoto normalnih odvodov enoplastnega potenciala v zunanost in notranost območja. Ko je dve njegovi razpravi znameniti francoski matematik E. Picard, ki se je veliko ukvarjal prav s teorijo potenciala, označil kot »deux excellents mémoires«, je Plemelj postal na mah znan v matematičnem svetu.

Najpomembnejše njegovo delo v teoriji potenciala pa je knjiga *Potentialtheoretische Untersuchungen*, ki je dobila na-

PREISSCHRIFTEN
GEKRÖNT UND HERAUSGEGEBEN VON DER
FÜRSTLICH JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT
ZU LEIPZIG.



NR. XVI DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN SEKTION.

XL. JOSEF PLEMELJ: POTENTIALTHEORETISCHE
UNTERSUCHUNGEN.



DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1911.

*Naslovna stran Plemeljeve knjige, ki je dobila nagrado znanstvenega društva
kneza Jablonowskega*

POTENTIALTHEORETISCHE UNTERSUCHUNGEN.

VON

DR. JOSEF PLEMELJ,

O. Ü. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT IN CZECHOWITZ.



DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1911.

grado znanstvenega društva kneza Jablonowskega v Leipzigu leta 1911. To društvo je vsako leto razpisalo temo za delo, ki naj bi bilo nagrajeno. Za leto 1910 je bil razpis takle: Željeno je delo, ki bi pomenilo bistven napredek teorije potenciala glede na jasnost in strogost izvajanja ali pa glede na obseg in popolnost izsledkov.

Plemeljova knjiga ima štiri dele. V prvem delu so osnove potencialne teorije. Logaritmični potencial je enolična odvedljiva funkcija $U(x, y)$, ki ustreza Laplaceovi enačbi v ravnini

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

Newtonov potencial pa je funkcija $U(x, y, z)$, ki ustreza Laplaceovi enačbi v prostoru

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$$

Plemelj je podal novo definicijo regularnosti potenciala v neskončnosti. Potencial $U(p)$ je pri $p = \infty$ regularen, če obstaja $U(\infty)$ in je $\lim RU_x = 0$, $R \rightarrow \infty$, pri logaritmičnem, in $\lim R^2 U_x = 0$, $R \rightarrow \infty$, pri Newtonovem potencialu za vsako smer x . Tu pomeni R oddaljenost točke p od izhodišča in U_x odvod v smeri x . Če je $V(p) = m \log(1/R) + U(p)$, oziroma $V(p) = m/R + U(p)$, kjer je $U(p)$ v neskončnosti regularen, se imenuje m celotna masa potenciala $V(p)$. Namesto normalnega odvoda na robu dU/dn , ki ne obstaja vselej, je Plemelj uvedel integral po kosu roba $\int (dU/dn) ds$ in ga imenoval tok. Enoplastni potencial pa je posplošil s Stieltjesovim integralom

$$V(p) = \int \log(1/r_{ps}) d\mu_s \quad (3)$$

Drugi del knjige vsebuje Fredholmovo teorijo integralnih enačb s poenostavljenimi dokazi.

Tretji del obravnava obe robni nalogi. Posplošeni Poincaréjev robni problem se glasi: Najti je treba dvoplastni potencial

$$W(p) = \pi^{-1} \int v(s) d \arctg(y - y_s) / (x - x_s) \quad (4)$$

ki na robu območja ustreza enačbi

$$(1 + \lambda) W^+(s) - (1 - \lambda) W^-(s) = 2\lambda f(s) \quad (5)$$

Tu je λ realen parameter, $f(s)$ dana robna funkcija, nadalje so $W^+(s)$ notranje in $W^-(s)$ zunanje robne vrednosti dvoplastnega potenciala $W(p)$. Pri $\lambda = 1$ preide enačba (5) v $W^+(s) = f(s)$, pri $\lambda = -1$ pa v $W^-(s) = f(s)$. Torej imamo pri $\lambda = 1$ robno nalogo za notranjost in pri $\lambda = -1$ za zunanost območja. Določiti je treba v integralu (4) funkcijo $v(s)$. Zanj se dobi integralna enačba druge vrste. Rešitev se glasi

$$v(s) = f(s) - \lambda \int f(\sigma) H(\sigma, s) d\sigma$$

kjer je resolventa $H(\sigma, s)$ kvocient celih funkcij parametra λ . Poli za λ so vsi realni in po absolutni vrednosti ≤ 1 . Točka $\lambda = 1$ ni pol, pač pa $\lambda = -1$. Tam velja razvoj

$$H(\sigma, s) = m'(\sigma) (\lambda + 1)^{-1} + \mathcal{H}(\sigma, s)$$

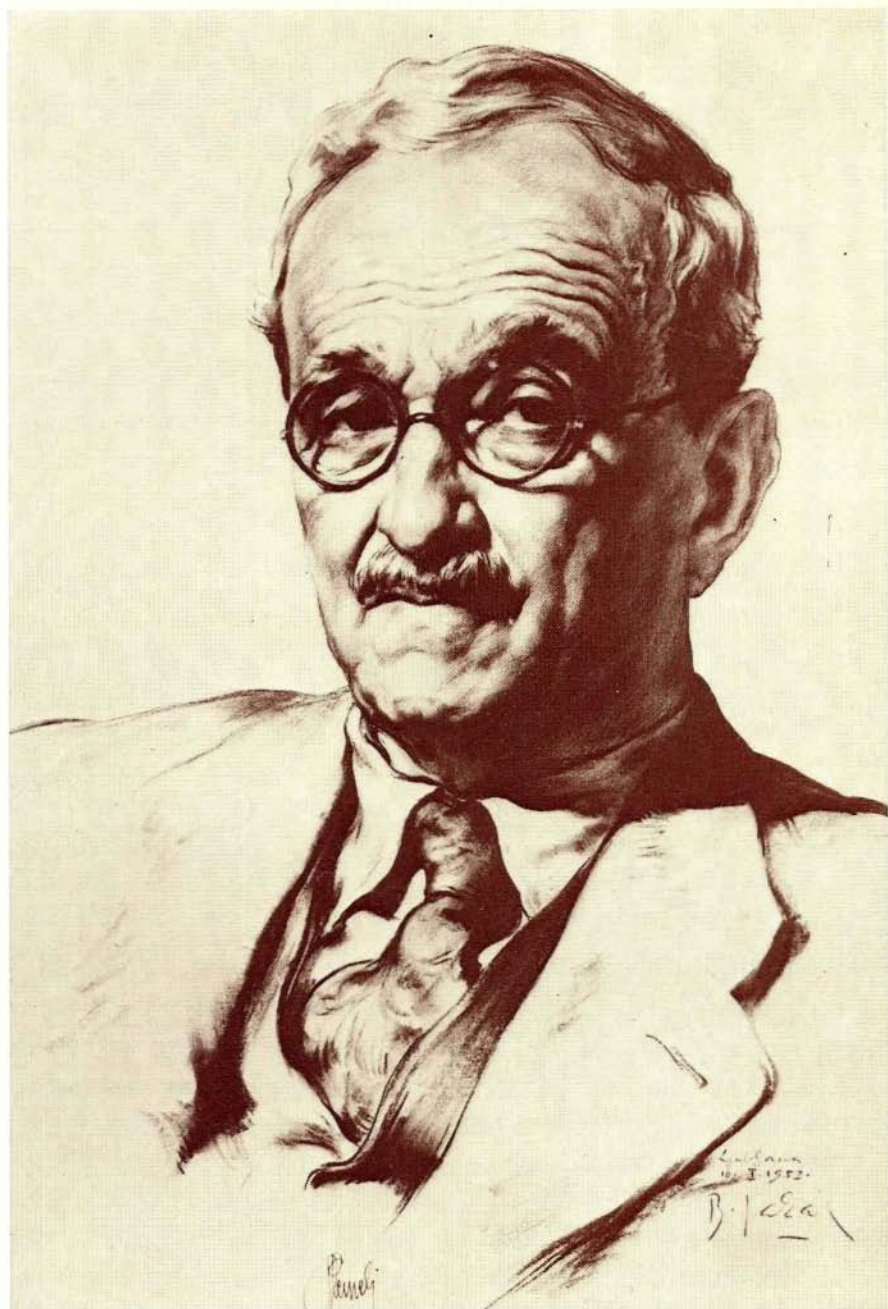
Tu je $m'(\sigma)$ gostota, ki daje enoplastni potencial s konstantnimi robnimi vrednostmi.

Funkcije $H(\sigma, s)$, $m(\sigma)$ in $\mathcal{H}(\sigma, s)$ so odvisne samo od oblike območja v ravnini. Plemelj jih je izračunal za krog in elipso.

Četrty del je vsebinsko in metodično nov. Obravnava zvezo med rešitvami robne naloge za notranje in zunanje območje. Robno nalogo za notranjost lahko rešimo, če poznamo funkcijo $H_{+1}(\sigma, s)$, za zunanost pa, če poznamo funkcijo $H_{-1}(\sigma, s)$. Obe sta odvisni samo od geometrijske oblike območja. Če postavimo $K = \frac{1}{2}(H_{+1} + H_{-1})$ in $K_1 = \frac{1}{2}(H_{+1} - H_{-1})$, se da K_1 izračunati iz K s kvadraturami. Plemelj je uvedel še funkcijo $P_\lambda(\sigma, s)$, tako da je $H_\lambda(\sigma, s) = dP_\lambda(\sigma, s) / d\sigma$. Funkcija $P_\lambda(\sigma, s)$ je povsod na robu končna in zvezna. Zanj velja simetrija $P_{-\lambda}(s, \sigma) = P_\lambda(\sigma, s)$. Za elipso se $P_\lambda(\sigma, s)$ izraža kot logaritem neskončnega produkta, ki spominja na Jacobijeve funkcije theta.

Na koncu knjige je podana rešitev robne naloge z enoplastnim potencialom. Obstaja samo od oblike območja odvisna simetrična robna funkcija $\Delta(\sigma, s)$ s tole lastnostjo: Za vsako zvezno robno funkcijo $f(s)$ je

$$\mu(s) = \int \Delta(s, \sigma) df(\sigma)$$



Božidar Jakac: *Josip Plemelj* — risba, 1952

taka porazdelitev, da se ustrezni enoplastni potencial (3) ujema na robu z danimi vrednostmi $f(s)$ do aditivne konstante.

V teoriji diferencialnih enačb se je Plemelj veliko ukvarjal s problemi, ki so povezani z monodromijsko grupo. Do monodromijske grupe pridemo takole: Naj bodo v homogeni linearni diferencialni enačbi

$$w^{(n)} + p_1(z)w^{(n-1)} + \dots + p_n(z)w = 0 \quad (6)$$

koeficienti $p_k(z)$ racionalne funkcije. Na vsakem enostavno povezanem območju ravnine kompleksnih števil, kjer so vsi koeficienti regularni, so tudi vse rešitve $w(z)$ regularne in sestavljajo n -razsežen vektorski prostor. Imejmo v ravnini sklenjeno pot K , ki se izogne vsem singularnim točkam koeficientov. Vsaka rešitev $w(z)$ se da iz poljubne začetne točke analitično nadaljevati vzdolž te poti. Ko pridemo nazaj v začetno točko, se $w(z)$ v splošnem ne povrne vase, temveč preide v neko funkcijo $w^+(z)$, ki je seveda spet rešitev enačbe (6). Ker velja to za vsako rešitev $w(z)$, pripada sklenjeni poti K transformacija A , ki deluje v vektorskem prostoru rešitev. A transformira rešitev $w(z)$ v $w^+(z)$, ki jo dobimo iz $w(z)$ z analitičnim nadaljevanjem po sklenjeni poti K . Torej lahko zapišemo $w^+(z) = Aw(z)$. Očitno je transformacija A linearna. Množici vseh sklenjenih poti K , ki se izognejo singularnim točkam koeficientov, ustreza množica linearnih transformacij A . Ni težko dokazati, da je ta množica za komponiranje transformacij grupa. Če se npr. pot K skrči v točko, je A identična transformacija. Če pa opišemo K v nasprotni smeri, dobimo inverzno transformacijo A^{-1} . Ta grupa se imenuje monodromijska grupa diferencialne enačbe.

Monodromijsko grupo lahko definiramo tudi v primeru, ko so koeficienti $p_k(z)$ algebraične funkcije. Algebraične funkcije so enolične na neki Riemannovi ploskvi. Sklenjena pot K poteka v tem primeru po Riemannovi ploskvi.

V svojih prvih razpravah je Plemelj obravnaval diferencij-

alne enačbe, pri katerih se monodromijska grupa odlikuje s posebnimi lastnostmi. Tako je v članku [5] dokazal, da se da diferencialna enačba s komutativno monodromijsko grupo prevesti na sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda z enoličnimi koeficienti. V članku [7] pa je pokazal, kako reduciramo linearno diferencialno enačbo z algebrainimi koeficienti, če ima njena monodromijska grupa bazo, sestoječo iz parov A_k, B_k , kjer A_k in B_k med seboj komutirata.

Najpomembnejše Plemeljjevo delo je brez dvoma čudovita rešitev Riemannovega problema. Dokazati je treba eksistenco linearne homogene diferencialne enačbe, če so dane singularne točke in monodromijska grupa. Že Riemann je formuliral ta problem v obliki, ki je pozneje privedla do rešitve: Naj bo L enostavno sklenjena krivulja, ki razdeli ravnino kompleksnih števil na notranje polje D^+ in zunanje polje D^- . Iščemo sistem n funkcij, torej vektorsko funkcijo $\phi(z) = (\phi_1(z), \dots, \phi_n(z))$, s temile lastnostmi: (1) $\phi(z)$ je na D^+ in na D^- povsod regularna (to pomeni, da so vse komponente $\phi_k(z)$ regularne); (2) ko se točka z iz notranjosti približuje točki t na krivulji L , limitira $\phi(z)$ proti $\phi^+(t)$, če pa gre z po zunanjih točkah proti t , obstaja limita $\phi^-(t)$; (3) med limitnima vektorjema $\phi^+(t)$ in $\phi^-(t)$ je zveza

$$\phi_k^-(t) = \alpha_{k1}(t)\phi_1^+(t) + \dots + \alpha_{kn}(t)\phi_n^+(t), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

kjer so koeficienti $\alpha_{kl}(t)$ dane funkcije. Krajše zapišemo sistem (7) takole

$$\phi^-(t) = A(t)\phi^+(t) \quad (7^*)$$

Tu je $A(t)$ matrika z elementi $\alpha_{kl}(t)$.

Pri Riemannovem problemu izberemo krivuljo L tako, da gre skozi vse singularne točke $a_1, a_2, \dots, a_m$ diferencialne enačbe. V tem primeru so koeficienti $\alpha_{kl}(t)$ konstante na vsakem loku krivulje L med dvema zaporednima singularnima točkama a_r in a_{r+1} .

Najprej je Plemelj rešil problem za primer, ko so $\alpha_{kl}(t)$ zvezne funkcije. Pri reševanju so mu pomagale formule, ki jih je izpeljal v članku [13]. Te formule dajejo odgovor na vprašanje, kakšnemu pogoju ustrezajo robne vrednosti regularne funkcije. Poljubno dane vrednosti na robu namreč niso vrednosti regularne funkcije. Velja tole: $f^+(z)$ so robne vrednosti v notranjosti polja regularne funkcije natanko tedaj, kadar je izpolnjena enačba

$$(\pi i)^{-1} \int (\zeta - z)^{-1} [f^+(\zeta) - f^+(z)] d\zeta = 0 \quad (8)$$

$f^-(z)$ pa so robne vrednosti v zunanosti regularne funkcije $f(z)$ z vrednostjo c v neskončnosti natanko tedaj, če velja

$$(\pi i)^{-1} \int (\zeta - z)^{-1} [f^-(\zeta) - f^-(z)] d\zeta + 2f(z) - 2c = 0 \quad (9)$$

Integrala v (8) in (9) se raztezata po robu polja.

Formuli (8) in (9) je našel že J. V. Sohocki leta 1873 in ju objavil v svoji disertaciji, ki pa je ostala neopažena. Zdaj se imenujeta formuli Plemelja—Sohockega.

Z (8) in (9) je Plemelj prevedel problem (7) na sistem integralnih enačb

$$\phi^-(z) - (2\pi i)^{-1} \int [A(z)A^{-1}(\zeta) - E](\zeta - z)^{-1} \phi^-(\zeta) d\zeta = \gamma(z)$$

Tu je $A^{-1}(z)$ inverzna matrika od $A(z)$, E enotna matrika, $\gamma(z)$ pa vektor s komponentami $\gamma_1(z)$, ..., $\gamma_n(z)$. Z obravnavanjem tega sistema in sistemov, ki so z njim v zvezi, je dokazal, da ima problem n rešitev $\phi^{(1)}(z)$, ..., $\phi^{(n)}(z)$, s katerimi se da linearno izraziti vsaka druga rešitev $\phi(z)$, ki je povsod na ravnini regularna, na krivulji L zvezna, v neskončnosti pa ima kvečjemu pol. Koeficienti v tej izražavi so polinomi.

Prvotni problem, kjer so koeficienti $\alpha_{kl}(t)$ samo odsekoma zvezni, je prevedel s pomožnimi funkcijami na primer z zveznimi koeficienti. Dokazal je, da obstaja med rešitvami sistem $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, ..., $Y^{(n)}$, imenoval ga je primitivni sistem, ki zadošča sistemu n linearnih homogenih diferencialnih enačb prvega reda z racionalnimi koeficienti. S tem je bil Riemannov problem v celoti rešen.

Z Riemannovim problemom so se ukvarjali tudi drugi matematiki. Med njimi je bil Hilbert prvi, ki je leta 1905 prevedel problem na neko rešljivo integralno enačbo. Vendar je bila njegova metoda zamotana in ni dala pregleda nad celotno množico rešitev.

Veliko se je trudil s tem problemom tudi matematik L. Schlesinger. Lotil se ga je na povsem drug način, namreč s kontinuitetno metodo. V razpravi [14] Plemelj omenja Schlesingerjeve poskuse in v pripombi pod črto pravi, da njegova metoda ne vodi do cilja. Zaradi te pripombe je nastala s Schlesingerjem polemika, ki je izhajala v časopisu Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Najprej je Plemelj pojasnil svojo pripombo. Pokazal je, da bi Schlesinger s svojo metodo dokazal obstoj rešitve tudi v primeru, ko rešitve ni. Schlesinger se je skušal ogniti kritiki tako, da je dal problemu novo formulacijo. Plemelj mu je odgovoril, da njegova metoda kljub novi formulaciji problema ni uspešna. Schlesinger je nato umolknil, napake pa ni priznal.

V teoriji linearnih diferencialnih enačb je Plemelj podal tudi nov dokaz za eksistenco in analitičnost rešitev [17]. Iz tega dokaza je razvidno vedenje rešitve v okolici Fuchsove singularne točke. Študiral je nadalje odvisnost rešitve od parametrov [24]. Ugotovil je, da je rešitev enačbe drugega reda

$$y'' + [a(x) + \lambda b(x)]y = 0$$

cela funkcija parametra λ Borelovega reda $\frac{1}{2}$. Ta izsledek je uporabil pri Kleinovem problemu za diferencialno enačbo Fuchsovega tipa s štirimi singularnimi točkami [30]. V tej enačbi nastopa parameter λ linearно. Kleinova naloga zahteva, da je treba določiti λ tako, da se kvocient dveh neodvisnih rešitev enačbe povrne vase pri obhodu okoli dveh izbranih singularnih točk.

Zadnja desetletja pred prvo svetovno vojno je bil v funkcijski teoriji v ospredju problem uniformizacije algebrائيh funkcij. Algebrائيčno funkcijo $w(z)$ določa enačba oblike

$$F(z, w) = 0 \quad (10)$$

ker je $F(z, w)$ polinom spremenljivk z in w . Če je $F(z, w)$ erazcepen in najmanj druge stopnje glede na w , potem funkcija $w(z)$, ki jo izračunamo iz (10), ni enolična. Npr. enačba $z^2 + w^2 = 1$ določa dvolično funkcijo $w = (1 - z^2)^{1/2}$. Če pa postavimo $z = \cos t$, $w = \sin t$, je enačba $z^2 + w^2 = 1$ izpolnjena za vsak t , z in w pa sta enolični funkciji t -ja. Postavimo si nalogo, a pri poljubni algebraični enačbi (10) iščemo enolični analitični funkciji $z = \phi(t)$, $w = \Psi(t)$, ki ustrezata (10). Pravimo, da enolični funkciji $\phi(t)$ in $\Psi(t)$ uniformizirata algebraično funkcijo. /časih dosežemo uniformizacijo z racionalnima funkcijama $\phi(t)$ in $\Psi(t)$. Če ima enačba (10) obliko $w^2 - P(z) = 0$, kjer je $P(z)$ polinom tretje ali četrte stopnje, dobimo uniformizacijo z liptičnimi funkcijami. V splošnem primeru pa je treba iskati $\phi(t)$ in $\Psi(t)$ med avtomorfnimi funkcijami, zato je problem uniformizacije tesno povezan s teorijo avtomorfnih funkcij.

S problemom uniformizacije so se ukvarjali matematiki Poincaré, Klein, Koebe in drugi. Obstoj uniformizirajočih spremenljivk različnih tipov je dokazal P. Koebe. Prispevek P. Koebeja na tem področju pa je preprost dokaz izreka o uniformizaciji z mejnim krogom (izrek sam je že prej dokazal Koebe).

Pripomoček za obravnavanje problema uniformizacije je teorija konformnega upodabljanja in univalentnih (enolistnih) funkcij. Pomembno vlogo je tu igral izrek o analitičnem raztegu slik. Če ravninski lik konformno upodobimo, se koti ohranjajo, upodobitveno razmerje pa se v splošnem spreminja od točke do točke. Koebe je dokazal izrek o analitičnem raztegu v kvalitativni obliki: Če leži polje D' vse v notranjosti prvotnega lika D in ne sega nikjer do roba, ostane kvocient med upodobitvenim razmerjem v poljubnih dveh točkah polja D' omejen. Pri tem je meja odvisna od polja D' , prav nič pa ne od konformne upodobitve. Ta izrek je posledica neke druge trditve: Obstaja pozitivno število d s tole lastnostjo: Če konformno upodobimo

notranjost kroga s polmerom $r=1$ tako, da je v središču kroga upodobitveno razmerje enako 1, potem je rob slike kroga za najmanj d oddaljen od točke, kamor se upodobi središče. Tudi to trditev je dokazal že Koebe in domneval, da je $d=1/4$. S Koebejevo domnevo so se ubadali številni matematiki, dokazal pa jo je G. Faber šele leta 1916.

Nekaj let prej (1913) pa je Plemelj prvi opozoril na kvantitativno stran izreka o analitičnem raztegu in mu dal najostrejšo formulacijo: Če je

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

konvergentna v krogu $|z| < 1$ in zavzame tam vsako vrednost največ enkrat, velja $|a_2| \leq 1/2d$. Izpeljal je tudi ocene za funkcijo $f(z)$ in njen odvod $f'(z)$. Te ocene so bile odvisne od števila d . Za $d=1/4$ se glase

$$|z|/(1+|z|)^2 \leq |f(z)| \leq |z|/(1-|z|)^2$$

in

$$(1-|z|)/(1+|z|)^3 \leq |f'(z)| \leq (1+|z|)/(1-|z|)^3$$

Vse te ocene so ostre, ne dajo se več izboljšati. Doseže jih funkcija $f(z) = z/(1-z)^2 = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$

Iz teorije uniformizacije z avtomorfnimi funkcijami Schotkyjevega tipa izvira tale naloga: Ravninski kolobar, v katerem so si točke na zunanjem in notranjem robu med seboj analitično prirejene, je treba konformno upodobiti v kolobar tako, da bo prirejenost robnih točk linearna. Rešitev te naloge je v članku [27].

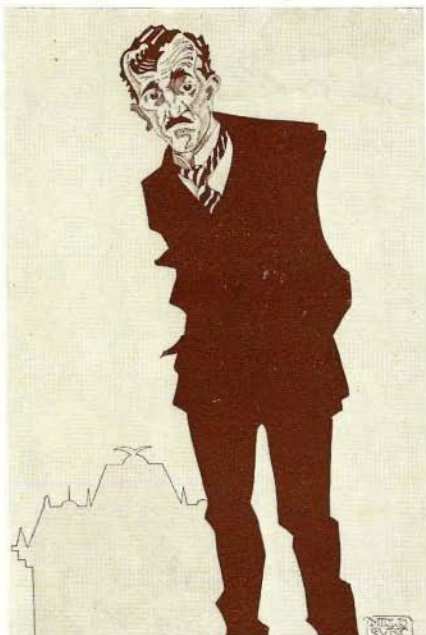
Plemelj se je zelo rad ukvarjal z algebro in teorijo števil, objavil pa je malo prispevkov iz teh področij: preprost dokaz Fermatove trditve, da je enačba $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ v celih številih nerešljiva, in preprost dokaz izreka, da je enačba za krožno delitev nerazcepna, če je stopnja potenca praštevila. Razvozlal je tudi Galoisov dokaz, da se stopnja modulske enačbe ne da znižati. Galois je dokaz na kratko skiciral v pismu, ki ga je



Mirko Šubic: *Josip Plemelj* — risba, 1923

napisal dan pred svojo smrtjo. Trditev je pozneje dokazal C. Jordan po drugi poti. Šele Plemelj je rekonstruiral Galoisov dokaz, ki je izredno lep.

Za svoja dela je Plemelj dobil številna priznanja. Poleg nagrade društva kneza Jablonowskega v višini 1500 mark mu je dunajska akademija znanosti podelila nagrado R. Liebena v znesku 2000 kron, in sicer prav tako za knjigo *Potential-theoretische Untersuchungen*. V utemeljitvi piše, da je to na področju čiste in uporabne matematike najodličnejše delo, ki



*Mirko Šubic:
Josip Plemelj — karikatura, 1923*

ga je v zadnjih treh letih napisal kak avstrijski matematik. Leta 1954 je prejel v Ljubljani Prešernovo nagrado. Dopisni član Jugoslovanske akademije znanosti in umetnosti v Zagrebu je postal leta 1923, Srpske akademije nauka pa leta 1931. Bavarska akademija v Münchnu ga je imenovala za dopisnega člana leta 1954. Redni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti je bil od njene ustanovitve leta 1938. Ob devetdesetletnici rojstva leta 1963 mu je univerza v Ljubljani podelila častni doktorat.

Pred prvo svetovno vojno so nemški in francoski matematiki začeli skupno izdajati enciklopedijo matematičnih znanosti, ki naj bi zajela vse tedanje znanje matematike in njene uporabe. Posamezni zvezki so izhajali v nemščini in francoščini. Vojna je to delo prekinila. Po vojni so ga nadaljevali in dokončali samo Nemci. Skoraj vsa Plemeljova dela so v enciklopediji bilo citirana.

Svoje razprave je Plemelj povečini objavljaj v časopisu Monatshefte für Mathematik und Physik, ki ga je izdajal na



*leta 1954 se je udeležil proslave 200-letnice rojstva Juriija Vege v Zagorici. Na
liki z leve proti desni stojijo: Benkovič, Povšič, Vidav, Čermelj, E. Branc, Prijatelj,
Plemelj, Ziegler in Ahlin. Čepijo: Breskvar, Gabrovšek, J. Branc*

Dunaju njegov prijatelj W. Wirtinger. Ta časopis si je pridobil
gled v matematičnem svetu prav zaradi Plemeljevih del.

Za Plemelja kot matematika sta značilni ostrina in globina.
Velik poudarek je dajal estetski plati matematike. Nekoliko
aljivo je lepo karakteriziral njegov talent kolega iz Černovic:
Če se pogovarjamo s Plemeljem, se nam sprva zdi, da sploh
nič ne razume; potrebno je potrpljenje, zakaj še vedno govori
na videz brez razumevanja; toda že delujejo ti mogočni možgani
n kmalu mu ne moremo več slediti, toliko že ve novega o
predmetu našega razgovora.«

Najpomembnejša Plemeljeva dela so iz dobe pred prvo svetovno vojno. Zadnja razprava nosi letnico 1912. Torej je trajala pri njem intenzivna ustvarjalna doba le dobrih deset let. Živel pa je od tedaj še nad petdeset let. Po prvi svetovni vojni je objavil precej razprav, vendar o stvareh, ki jih je imel, kakor je sam povedal, dognane v glavnem že pred vojno. Kako to, da pozneje ni več dosti znanstveno delal? Sam pravi takole [31]: »Imam občutek, da me je narava usposobila za neko misijo v matematičnem svetu, usoda pa mi je po kratkih letih odtegnila pogoje, v katerih bi se mogel svoji naravi primerno udeleževati.« In dalje: »Povojne težave v strokovnem stiku s svetom, moja tukajšnja strokovna osamljenost, potreba po organizacijski in upravni sposobnosti, ki je prav nič nimam, in še drugi vzroki v meni in izven mene so povzročili, da sem od tedaj (namreč po prvi vojni) skorajda le še učitelj matematike, pa prav malo ustvarjalec novega.« Pogosto je pripovedoval, kako ga je prva vojna čustveno prizadela in tako odvracala od znanstvenega dela. »Čutil sem, da je šlo tedaj za veliko pomembnejše stvari, kakor je matematika,« je večkrat omenil. Torej se je v nekoliko nenavadni obliki uveljavilo staro pravilo, da »inter arma silent Musae«. Vendar naštetí vzroki ne razložijo vsega. Njegova intenzivna znanstvena aktivnost se je nehala že dve leti pred vojno. Zato niti vojna, niti bolezen, niti osamljenost v provincialnem mestu, kakršno je bila Ljubljana pred 50 leti, niso edini vzroki. Plemelj se je loteval samo zanimivih in zato težkih matematičnih problemov. Objavil je rezultate svojega dela šele tedaj, ko je imel vse do podrobnosti dognano in izbrušeno. Pri njem je štela samo kvaliteta, prav nič pa obseg in število razprav. Njegova rešitev Riemannovega problema je dokončna, pomeni sklepní kamen na ustreznem področju teorije diferencialnih enačb. Vsaj takrat ni pomenila začetka kake nove teorije. Šele dosti let pozneje je iz njegovih metod zrasla teorija singularnih integralnih enačb, ki jo je utemeljila sovjetska šola z Mushelišvilijem na čelu. Tudi njegova raziskovanja v teoriji potenciala

so prej zaključek kakor nastajanje nove teorije. Ko so bili rešeni Riemannov problem, problemi v teoriji uniformizacije itd., je Plemelj zmanjkalo zanimivih problemov, ki bi ga z vso močjo pritegnili. Njegov talent je bil tak, da je bolj reševal probleme kakor pa postavljajl nove. Morda je bil tudi v tem eden izmed vzrokov, da je nehal znanstveno delati. Da se je loteval samo težkih problemov, pove tale dogodek: Nekč je skušal dokazati Fermatovo domnevo, da enačba $x^n + y^n + z^n = 0$ pri nobenem praštevilu $p > 2$ ni netrivialno rešljiva s celimi števili. Prepričan je že bil, da se mu je posrečilo dokazati pravilnost domneve za



Pri otvoritvi fizikalnega inštituta v Ljubljani 8. februarja 1953. Na sliki z leve proti desni: V. Sedlar, A. Kuhelj, F. Zwitter, F. Stelè, J. Plemelj in Ž. Markovič

žeji primer, ko je eno izmed števil x, y, z deljivo s p . Ko pa je začel pisati o tem članek, je odkril v svojem sklepanju luknjo, ki je ni mogel premostiti. To ga je tako ujezilo, da je rokopis trgal in se ni več hotel ukvarjati s Fermatovim problemom. Pozneje mu je bilo žal, da je rokopis vrgel stran, ker nekaj pomembnih izsledkov je le dobil.

Cenil je samo klasično matematiko, v sodobno matematiko je ni nikoli vživel. Dolgo je skeptično gledal na moderno fiziko z atomsko in kvantno teorijo. Šele atomska bomba ga je prepričala o pravilnosti atomske fizike. Tudi ni verjel, da bi se

dala matematika uspešno uporabiti kje drugje kakor v fiziki, astronomiji ali tehniki. Nekoč je prišel v Černovicah k njemu kolega s pravne fakultete s prošnjo, naj mu svetuje kako dobro knjigo o diferencialnih enačbah. Ukvarja se namreč z matematično ekonomijo in tam uporablja tudi diferencialne enačbe. »V ekonomiji potrebujete samo štiri osnovne računske operacije in še deljenje pride tam redko v poštev,« mu je odgovoril Plemelj. Ko je pozneje pripovedoval to zgodbo, je hudomušno dodal, da je postal tisti profesor kmalu po prvi svetovni vojni avstrijski



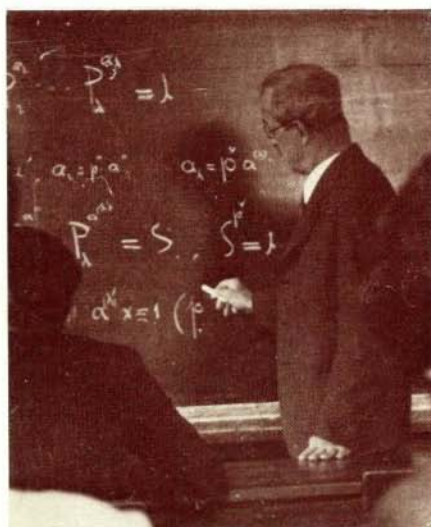
Profesor Josip Plemelj s študenti zadnjih treh letnikov leta 1953

finančni minister in ravno med njegovim ministrovanjem je zajela Avstrijo znana huda inflacija, ki je ohromila njeno gospodarstvo.

Plemeljev prihod v Ljubljano leta 1919 je bil velikega pomena za novo univerzo in za razvoj matematike na Slovenskem. Vzgojil je več generacij matematikov. Vsi starejši učitelji matematike pa tudi fizike na ljubljanski univerzi smo njegovi učenci. Držal je pouk matematike za prihodnje profesorje in tudi za inženirje na visokem nivoju. Zanj pa je pomenila Ljubljana žrtev

a znanstveno kariero. Kot Slovenec je čutil dolžnost delati za svoj narod. Zato je leta 1928 odklonil vabilo univerze v Gradcu, da bi tam prevzel stolico za matematiko. Tedanji prosvetni minister mu je ob tej priliki obljubljal dodatne kredite. Toda vlada je kmalu nato padla in obljube so bile pozabljene.

Na filozofski fakulteti je Plemelj predaval ves čas za študente matematike triletni cikel, ki je obsegal algebro s teorijo števil, teorijo analitičnih funkcij in diferencialne enačbe z variacijskim računom. Za študente tehniške fakultete pa je predaval predmeta Matematika I in Matematika II za prvi in drugi letnik. Ta



Med predavanjem iz algebre

redavanja so poslušali tudi matematiki. Skupaj je imel 16 ur tedensko predavanj in vaj. Asistenta pred vojno ni bilo in je vaje odil sam.

Za predavanja se ni pripravljaj, ni imel nobenih zapiskov. Pravi je, da je premislil temo predavanja med potjo od doma v Gradišću do univerze na Trgu revolucije. Predaval je odlično. Slušatelji smo imeli vtis, kakor da pred nami ustvarja snov in risostvujemo nastajanju novega. Izredno lepo je pisal na tablo formule, pa naj so sestajale iz latinskih, grških ali gotških črk. Tudi od študentov je zahteval, da pišejo razločno.

Plemelj je hodil v nemško gimnazijo in študiral na nemški univerzi. V Černovicah je predaval v nemščini in vse razprave z izjemo dveh, ki sta izšli v Radu Jugosl. Akademije, je pred vojno napisal v tem jeziku. Predavanja na ljubljanski univerzi pa so bila od začetka v slovenščini. Izdelati je bilo treba slovensko terminologijo za višjo matematiko. Plemelj je imel zelo

enizbe po tej poti. Eulerjeva diferencialna je izpeljana pri vsaki vrednosti parametra b , če v njej vstavimo $y = y(x, b)$. Taka pa cvenatli paster pa same v gni y' zato je parcialni odvod leve strani na parametru b vedno $= 0$. Imamo tedaj

$$-\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Upoštevajmo, da leži b same v y in y' in v poljubno razpombo

$$P = \frac{\partial f}{\partial y y}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y y'}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial y' y'}$$

potem dobimo

$$-(P_u + Q'u') + \frac{d}{dx} (Q_u + R'u) = 0$$

ali

$$\frac{d}{dx} (R'u') + (Q' - P)u = 0.$$

u in Q' je odvisni, u in Q na x . Dobljena enačba je Jacobijska diferencialna enačba variacijskega računa. Enačba ima red 2 in je linearna in homogena. Koeficienti so funkcije x -a, ki jih dobimo, če v P, Q, R vstavimo za y in y' vrednosti, ki jih dobimo pri $b = b_0$.

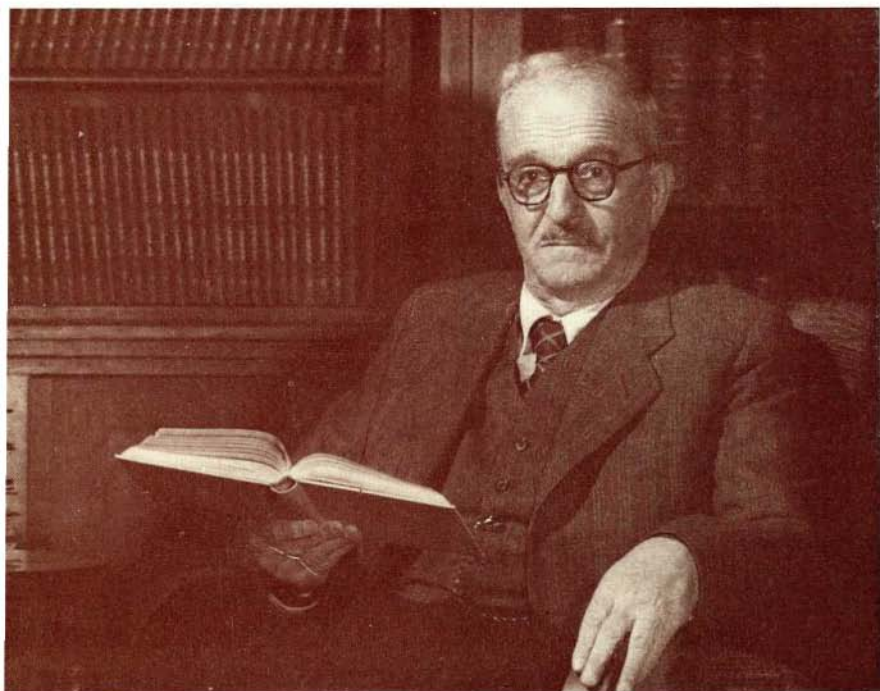
Splošna Jacobijska diferencialna enačba je linearna s konstantnimi koeficienti, sestavljena iz dveh partikularnih rešitev. Vagno je, da pomenimo rešitev dobiti iz Eulerjeve enačbe, če smo to popolnoma rešili. Oba parcialni odvodi $\frac{\partial y}{\partial a}$ in $\frac{\partial y}{\partial b}$ sta specialni rešitvi, ki se izpolnijo, da sta

Rokopis dela Diferencialne in integralne enačbe

tenek posluh za jezik in je ustvaril solidno osnovo za razvoj slovenske matematične terminologije. Sploh se je rad ukvarjal z jezikovnimi vprašanji in je pogosto razpravljal o njih s prof. F. Ramovšem. Tudi študente je navajal na lep jezik, predvsem pa na jasno in logično izražanje. Jezil se je npr., če smo namesto besede potrebovati rekli rabiti. Rabiš lahko reč, ki jo imaš.

reči nimaš, pa jo kvečjemu potrebuješ, nam je pojasnjeval. Tej zvezi je znana tudi njegova trditev: Inženir, ki matematike ne zna, je nikoli ne potrebuje. Če pa jo zna, jo pogosto rabi.

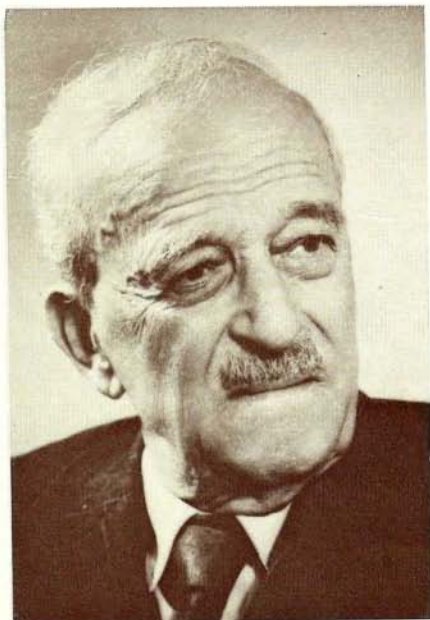
Pred vojno ni nikdar mislil na to, da bi napisal kak učbenik. Nemškem jeziku je bilo takih knjig dovolj in ni se mu zdelo otrebno, da bi on množico učbenikov povečal. Da bi v slovenskem jeziku izdali poleg srednješolskih knjig še kako drugo



Josip Plemelj v matematičnem seminarju. Foto Janko Branc, 1953

matematično delo, pa tedaj ni bilo upanja. Ko je bil leta 1949 na Bledu prvi kongres matematikov in fizikov Jugoslavije, so mu številni nekdanji učenci izrazili željo, da bi izdal svoj triletni cikel predavanj. Odločil se je za to, ko je zvedel, da si je napravil prof. O. Sajovic v študentskih letih dobre zapiske njegovih predavanj. Po teh zapiskih je sestavil trilogijo, ki jo je izdala Slovenska akademija znanosti in umetnosti. Najprej je izšla leta 1953 knjiga Teorija analitičnih funkcij. V njej je izčrpno

obdelan tudi problem uniformizacije. Naslednja knjiga so Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba. Njena vsebina je bogatejša, kakor je predaval. Obsega Fredholmovo teorijo integralnih enačb, rešitev Riemannovega problema in Newtonov potencial rotacijskega elipsoida z dano maso. Problem Newtonovega potenciala je Plemelj rešil že pred vojno, rešitve pa ni objavil in so ga drugi prehiteli. Zadnji del trilogije Algebra s teorijo števil je izšel leta 1962. Zadnja njegova knjiga pa je Problems in the Sense of Riemann and Klein, ki jo je v



Prof. dr. Josip Plemelj ob 90-letnici

angleščino prevedel J. Radok. Obsega področja, na katerih je največ delal.

van Vidav

Josip Plemelj

On the centenary of birth

Josip Plemelj was born on December 11, 1873 at Bled. His father, who was a carpenter and a small farmer, died when Josip Plemelj was one year old. His mother, Marija née Mrak, was hardly able to support her family. Only by a lucky chance could he send her son to school in Ljubljana. Plemelj attended primary and secondary school from 1886 to 1894. After the final examination he entered Vienna University, where he read mathematics and physics. Escherich, Gegenbauer and Boltzmann were among his professors. He obtained his doctor's degree in 1898 for the dissertation »*Über lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffizienten*«. He continued his studies in Berlin (1899/1900), and Göttingen (1900/1901) under F. Klein and D. Hilbert.

In 1902 Plemelj became privatdozent at Vienna University. He spent one year as assistant professor of mathematics at the Technical High School of Vienna (1906/1907). In 1907 he was appointed associate professor, and in the next year full professor, at the University of Černovice. After the First World War, in 1919, the Slovene University was founded in Ljubljana, and

Plemelj became its first rector and professor of mathematics. He taught mathematics until his retirement in 1957. He died on May 22, 1967 in Ljubljana.

Plemelj showed his mathematical talent even in primary school. While in the fourth form he used to help the students of the top form with their examination papers. He particularly enjoyed solving difficult constructive geometrical problems. For instance, his construction of a regular septagon using the trisection of an angle originates from his secondary school period. He began to study higher mathematics in his fifth form. He was also interested in astronomy, especially in celestial mechanics.

The main fields of Plemelj's work were differential and integral equations, potential theory (theory of harmonic functions), and the theory of analytic functions.

While studying in Göttingen Plemelj heard E. Holmgren's report on Fredholm's theory of integral equations. The Göttingen school, led by D. Hilbert, began to work on this new field. Plemelj was among the first to achieve significant new results. He published several papers which attracted the attention of the mathematical world of that time. Plemelj's most important contribution to the application of integral equations in potential theory is his book, *»Potentialtheoretische Untersuchungen«* (Leipzig, 1911). The book brought him the prize of Prince Jablonowski's Scientific Society.

Speaking of Plemelj's greatest achievements his ingenious solution of Riemann's problem must be singled out. In 1905 Hilbert reduced Riemann's problem to a solvable integral equation. Plemelj found the key to the solution in the theorem on the boundary values of analytic functions (now known as Plemelj's formulae). Using these formulae he could reduce the problem to a simple system of linear integral equations. His methods were to form the foundation of the theory of singular integral equations developed by the Soviet school under the leadership of N. I. Mushelišvili.

Also of importance is Plemelj's work on the theory of the uniformization of algebraic equations and on the theory of univalent functions. He was the first to discover the sharp formulation of Koebe's distortion theorem. Within the theory of differential equations he worked mostly on equations of the Fuchs type and on Klein's theorems.

Plemelj was awarded three prizes for his achievements. Besides the Prince Jablonowski prize he was given the Richard Lieben award in Vienna in 1912, and in 1954, in Ljubljana, he was awarded the prize Prešernova nagrada. He was elected foreign member of the Yugoslav Academy in Zagreb in 1923, of the Serbian Academy in 1930, and to the Bavarian Academy in 1954. He had been a member of the Slovene Academy of Sciences and Arts since its foundation in 1938.

Accepting a chair at the University of Ljubljana Plemelj in fact sacrificed his scholarly career. What with the post-war lack of contact with the scientific world, his professional loneliness, and his illness, Plemelj taught, rather than created much new during his Ljubljana years.

Plemelj's presence in Ljubljana was of paramount importance for the development of mathematics and other exact sciences among Slovenes. Several generations of mathematicians benefited from his teaching. He used to hold a general course of mathematics and a three-year cycle of lectures on the differential equations, the theory of analytic functions, and algebra including the number theory. After the Second World War he published these lectures in three books: »*Teorija analitičnih funkcij*« (Ljubljana, 1953), »*Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba*« (Ljubljana, 1960), and »*Algebra s teorijo števil*« (Ljubljana, 1962). His last book, »*Problems in the Sense of Riemann and Klein*« (translated into English by Professor J. R. M. Radok) appeared in 1964; it is about the parts of mathematics which Plemelj was specially interested in, and to whose development he had contributed most.

ван Видав

Йосип Племель

{ столетию рождения

Йосип Племель родился 11 декабря 1873 года на Бледе семье небогатого крестьянина-столяра. Его отец умер, когда было мальчику только год, и мать, Мария, уроженная Мрак, после его смерти с трудом содержала семью. Счастливым случаем ей удалось послать сына в школу в Любляну, где он потом, с 1886 по 1894 г. посещал гимназии. Получив аттестат зрелости, он поступил в университет в Вене, на факультет математики и физики. Его профессорами были Эшерих, Гегенбауэр и Больцман. Высшую степень он получил в 1898 г., защитив диссертацию на тему *»Über lineare homogene Differentialgleichungen mit eindeutigen periodischen Koeffizienten«*. Начальные занятия он продолжил сначала в Берлине (1899 до 1900), а затем в Геттингене (1900/1901 г.) у Ф. Клейна и Д. Гильберта.

В 1902 г. он стал приват-доцентом в университете в Вене. Одновременно он работал ассистентом математики в техническом высшем учебном заведении (1906/1907 г.). В 1907 г. он был назначен внештатным, а в следующем году ординарным преподавателем в университете в Черновицах.

В 1919 г., после первой мировой войны, в Любляне был основан словенский университет, и Племель стал первым его ректором. В люблянском университете Племель преподавал математику до своего ухода на пенсию, т. е. до 1957 г. Он умер 22 мая 1967 г. в Любляне.

Его математический талант обнаружился уже в младших классах гимназии. Будучи учеником четвертого класса, он помогал писать задания на аттестат зрелости старшим гимназистам. Особенно он любил решать трудные задачи по конструкции. Его построение правильного семиугольника путем трисекции угла, например, относится еще ко времени, когда он посещал гимназию. Высшей математикой Племель начал заниматься в пятом классе гимназии. Не меньше он интересовался астрономией, особенно небесной механикой.

Племель, в основном, занимался дифференциальными и интегральными уравнениями, теорией потенциала (гармонических функций) и теорией функций.

Во время его занятий в Геттингене, Е. Хольмгрен выступил с докладом о Фредгольмовой теории интегральных уравнений. Геттингенская школа во главе с Д. Гильбертом приступила к изучению этой новой области. Племель был одним из первых, которые достигли хороших результатов. Он опубликовал ряд работ, очень заинтересовавших математиков того времени. Самым значительным его трудом из области применения интегральных уравнений в теории потенциалов это книга *«Potentialtheoretische Untersuchungen»* (Лейпциг 1911 г.), за которую он получил награду ученого общества им. князя Яблоновского.

Самым большим успехом Племеля несомненно можно считать его остроумное решение проблемы Риманна. В 1905 году, Гильберт перевел проблему Риманна на разрешимое интегральное уравнение. Племель нашел ключ к решению этой проблемы в теореме о граничных значениях аналитических функций (известной сейчас как формулы Племеля). При помощи этих формул можно было перевести проблему на простую систему линейных интегральных уравнений. На его методах основалась теория сингулярных интегральных уравнений, которую

уже развила советская школа под руководством Н. И. Гуселишвили.

Важна роль Племеля в изучении теории униформизации алгебраических уравнений и теории однолистных функций. Он первый открыл точную оценку в теореме Келли о искажении изображений. О области теории дифференциальных уравнений он занимался, в основном, уравнениями класса Фукса и теоремами Клейна.

За свои труды Племель получил ряд премий. Кроме премии им. князя Яблоновского, он в 1912 г. получил в Вене премию им. Рихарда Либена, а в 1954 г. в Любляне премию им. Прешерна. В 1923 г. он стал членом-корреспондентом Югославской академии в Загребе, в 1930 г. членом Сербской академии наук и в 1954 г. членом-корреспондентом Баварской академии. Членом Словенской академии наук и искусств он являлся со дня ее основания в 1938. Отдавая все силы педагогической деятельности в Люблянском университете, Племель частично принес жертву свою научную карьеру. Трудности, с которыми он встречался после войны в сношениях с окружением, одиночество ученого в небольшом городе и болезнь были причиной того, что он превратился, в основном, в преподавателя математики и в меньшей степени открывателя чего-то нового.

Приезд Племеля в Люблянскую имел исключительное значение для развития математики и других точных наук у словенцев. Он воспитал несколько поколений математиков. Кроме общего курса математики он читал лекции о трехлетнем цикле, который охватывал дифференциальные уравнения, теорию аналитических функций и алгебру с теорией чисел. После второй мировой войны эти лекции вышли в трех томах под названиями: *»Teorija analitičnih funkcij«* (Любляна 1953 г.), *»Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba«* (Любляна 1960 г.) и *»Algebra in teorija števil«* (Любляна 1962 г.). Последний его труд *»Problems in the Sense of Riemann and Klein«* (в английском переводе профессора И. Р. М. Радока) вышел в 1964 году. В нем освещаются вопросы, над которыми Племель больше всего работал и в которые он внес свой самый большой вклад.

Bibliografija

a) *Knjige*

- [1] Potentialtheoretische Untersuchungen. Preisschriften der fürstl. Jablonowischen Gesellschaft in Leipzig. 1911. Str. XIX+100.
- [2] Teorija analitičnih funkcij. Ljubljana. Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1953. Str. XVI+516.
- [3] Diferencialne in integralne enačbe. Teorija in uporaba. Ljubljana. Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1960. Str. XVI+388.
- [4] Algebra in teorija števil. Ljubljana. Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1962. Str. XIV+278.
- [5] Problems in the Sense of Riemann and Klein. Edited and translated by J. R. M. Radok. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 16. New York — London — Sydney. Str. VIII+175.

b) *Razprave*

- [6] Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen. Monatshefte für Math. und Physik, XII, 1901, 2—96.
- [7] Über Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit doppelt-periodischen Koeffizienten. Prav tam XII, 1901, 203—218.
- [8] Über lineare Differentialgleichungen mit vertauschbarer Basis der Monomengruppe. Prav tam XIII, 1902, 1—14.
- [9] Über die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Potentialtheorie. Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien 1903.

[10] Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. Monatshefte für Math. und Physik XV, 1904, 93—128.

[11] Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie. I Teil. Prav tam XV, 1904, 337—412.

[12] Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie. II Teil. Prav tam XVIII, 1907, 181—211.

[13] Über einen neuen Existenzbeweis des Riemannschen Funktionssystems mit gegebener Monodromiegruppe. Anzeiger der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften 1906, 1—4.

[14] Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen. Monatshefte für Math. und Physik XIX, 1908, 205—210.

[15] Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Prav tam XIX, 1908, 211—246.

[16] Über Schlesinger's »Beweis« der Existenz Riemannschen Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-vereinigung XVIII, 1909, 15—20.

[17] Über Schlesinger's »Beweis« der Existenz Riemannschen Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Prav tam XVIII, 1909, 340—343.

[18] Existenzbeweis der Lösung linearer Differentialgleichungen insbesondere an einer Fuchs'schen singulären Stelle. Monatshefte für Math. und Physik XXII, 1911, 339—344.

[19] Die Unlösbarkeit von $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ im Körper $k(\sqrt[5]{5})$. Monatshefte für Math. und Physik XXIII, 1912, 305—308.

[20] Die Siebenteilung des Kreises. Prav tam XXIII, 1912, 309—311.

[21] Die Grenzkreisuniformisierung analytischer Gebilde. Prav tam XXIII, 1912, 297—304.

[22] Über den Verzerrungssatz von P. Koebe. Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. Verhandlungen, 1913.

[23] Sur l'abaissement du degré de l'équation modulaire. Bulletin des Sciences Mathématiques XLVII, 1923, 146—153.

[24] Rešitev linearne diferencijalne enačbe kot funkcija akcesoričnih parametrov. Rad Jugosl. akademije 228, 1923, 38—42.

[25] O analitičnem raztegnjenju slik. Prav tam 1923, 228, 43—49.

[26] Ein Abschätzungssatz der Potentialtheorie. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade II, 1933, 150—153.

[27] Die Abbildung eines Ringbereiches mit analytischer Zuordnung der Randkurve auf einen mit linearer Zuordnung. Prav tam II, 1933, 154—160.

[28] Über die Transformation des elliptischen Gebildes in die Normalform von Weierstrass. Prav tam II, 1933, 161—163.

[29] Die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung. Prav tam II, 1933, 164—165.

[30] Zur Theorie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit vier Fuchs'schen singulären Stellen. Monatshefte für Math. und Physik XLIII, 1936, 321—339.

[31] Iz mojega življenja in dela. Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ. naučna saopštenja i obaveštenja 1951, 1—6.

[32] O krogih na krogli. Obzornik za matematiko in fiziko I, 1951, 41—46.

[33] Rešitev sistema enačb $X^2 + 5 Y^2 = U^2$, $X^2 - 5 Y^2 = V^2$ v celih številih. Prav m III, 1955, 41—44.

Kazalo

Josip Plemelj 100. obletnici rojstva	7
Priloga vsebina angleščini	47
Priloga vsebina ruščini	51
Bibliografija Josipa Plemelja	55

Josip Plemelj

Ob stoletnici rojstva

Ivan Vidav

dalo in založilo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS

Urednik Ciril Velkovrh

Lektor Janko Moder

*arske korekture
je bral* Zvonimir Bohte

*likovni material
so izbirali* France Križanič
Anton Moljk
Matija Suhadolc
Ciril Velkovrh
Ivan Vidav

Oprema Matija Suhadolc

Tiskala tiskarna ČGP Delo
v Ljubljani 1975

Naklada 3000 izvodov

Sofinancirala Raziskovalna skupnost Slovenije
in kulturna skupnost Slovenije

*zbornik pominske publikacije
izdane ob stoletnici rojstva*

Prof. dr. Josipa Plemlja

Integralne, diferencialne in funkcionalne enačbe.

Mednarodni simpozij. Bled, 29. maja — 2. junija 1973.

Bled, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije 1973.

van Vidav: *Josip Plemelj. Ob stoletnici rojstva.*

Ljubljana, Državna založba Slovenije 1973.

van Vavpotič: *Josip Plemelj — razglednica.*

Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS 1973.

ožidar Jakac: *Josip Plemelj (risba) — stenska slika.*

Založila Državna založba Slovenije 1973.

van Vidav: *Josip Plemelj. Ob stoletnici rojstva. Ponatis.* Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije 1975.

ožidar Jakac: *Josip Plemelj (risba) — razglednica.* Izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije 1975.

$$u \frac{du}{dy} = \frac{a}{y} (1+u^2)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{u}$$

Prva jednačina je u obliku diferencijalne jednačine u da

$$\log(1+u^2) = 2a(\log y - \log k)$$

ali $1+u^2 = (y/k)^{2a}$

odakle po dobimo iz druge jednačine

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(y/k)^{2a} - 1}}$$

Integracijska konstanta je tu k x-u aditivna. Pri poljubnom a da integral ne ~~može~~ ^{izraziti} elementarnim funkcijama. Posebno zanimivi su za primeri, kada je a vrednosti $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$

Pri $a = \pm 1$ je krivinski radij absolutno enak, dolgoši normale, je po pri -1 istosmeren, pri +1 pa nasprotnosmeren.

$$a = -1 \quad x = \int \frac{y dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \sqrt{k^2 - y^2} + C$$

$$(x-C)^2 + y^2 = k^2 \quad \text{krug}$$

$$a = +1 \quad x = \int \frac{k dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = k \log\left(\frac{y}{k} + \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1}\right) + C \quad \text{ali}$$

$$\frac{y}{k} + \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1} = e^{\frac{x-C}{k}}$$

odtuda je $y = \frac{k}{2} \left(e^{\frac{x-C}{k}} + e^{-\frac{x-C}{k}} \right)$ verižnica.

$$a = -\frac{1}{2} \quad x = \int \sqrt{\frac{y}{k-y}} dy, \text{ Će se tu upotrebi } y = \frac{k}{2}(1 - \cos u)$$

potem foride $x = \frac{k}{2}(u - \sin u) + x_0$ cikloida

$$a = +\frac{1}{2} \quad x = \int \sqrt{\frac{k}{y-k}} dy = 2\sqrt{k} \cdot \sqrt{y-k} + C$$

$$(x-C)^2 = 4k(y-k) \quad \text{parabola}$$

$$a = +\frac{3}{2} \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{(y/k)^3 - 1}}, y = k \wp\left(\frac{x-x_0}{2k}\right), \wp'^2 = 4\wp^3 - 4\wp$$

$$a = +2 \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{(y/k)^4 - 1}}, y = k \frac{\wp'(\frac{x-x_0}{2k})}{2\wp(\frac{x-x_0}{2k})}, \wp'^2 = 4\wp^3 + \wp$$



1. Vidav Ivan, JOSIP PLEMELJ - Ob stoletnici rojstva (2. natis), 1975
2. Zajc Pavle, TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA - Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev šestih, sedmih in osmih razredov osnovnih šol SRS, 1977
3. Prosén Marijan, ASTRONOMSKA OPAZOVANJA - Kako v astronomiji s preprostimi napravami opazujemo in merimo, 1978