

p r e 4
s e k III
1975-76



LIST ZA MLADE

 **MATEMATIKE**

   **FIZIKE**

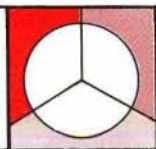
 **ASTRONOME**

ZDAJA DMFA SRS



VSEBINA

UVODNIK	161 Kako nastane Presek (Peter Petek in Ciril Velkovrh)
MATEMATIKA	163 Kako spravimo ulomek v škatlo (Peter Petek)
	166 Trisekcija (raztretinjenje) kota (Gregor Pavlič)
	169 Ali je del enak celoti? (N.I. Vilenkin, prev. Marjan Vagaja)
	172 Dvojiški številski sistem - nadaljevanje (Tomislav Skubic)
FIZIKA	177 Demokritovo jabolko (Tomaž Fortuna)
	178 Veter, voda, jadrnanje in malo fizike (Zvonko Trontelj)
	186 Uporovna vezja (Dušan Repovš)
ASTRONOMIJA	189 Nove in supernove (Andrej Čadež)
PREMIŠLJANJE in REŠEVANJE	192 Ljubo Kostrevec in Jože Dover
IZ LABORATORIJA	195 Merjenje gostote tekočin (Tomaž Fortuna)
FIZIKALNO	197 Znanstvena metoda (Marjan Hribar)
RAZMIŠLJANJE	198 Fizikalni dokaz Pitagorovega izreka (Dušan Repovš)
NALOGE -	199 Poročilo s tekmovanj najmlajših matematikov za Vegova priznanja (Bogomila Kolenko)
TEKMOVANJA	202 Predtekmovanje srednješolcev iz matematike (Mirko Dobovišek)
NALOGE	204 Izračunajmo ploščino Presekovega znamenja (Andrej Grobler)
	206 Igra s kartami - rešitev 213 (Dušan Repovš)
	206 Določimo oglišča kvadrata samo s šestilom - rešitev - 215 (Jože Kotnik)
MATEMATIČNO	207 Trije sinovi in modrec na kameli (Peter Petek)
RAZVEDRILLO	207 Mreži kvadratov in trikotnikov (Karel Šmigoc)
	208 Računska križanka (Zvonimir Bohte)
REŠITVE NALOG	212 Nekaj predstavljajnic - rešitev 216 (Vladimir Batagelj)
	213 Poljubno število s tremi dvojkami (Zvonimir Bohte)
	217 Slikovna križanka (Pavel Gregorc)
	218 Reševalcem nalog (Ciril Velkovrh)
NOVE KNJIGE	219 Sonja Kovalevska (Ivanka Kočevar in Meta Kokošinc)
PISMA BRALCEV	221 Kažipot po nebu (Ciril Velkovrh)
	222 (Matilda Lenarčič)
	224 Popravka (Peter Petek)
BOLJ ZA ŠALO	168 Med ognjem in krokodili - rešitev 218 (Peter Petek)
KOT ZARES	171 Zanimivo množenje (Anica Šoper)
	176 Vprašanja (Franci Oblak)
	191 Naloga o ovci (Karel Šmigoc)
	194 Koliko vžigalic je v škatli? (Peter Petek)
	196 Krožno razmišljanje (Tomo Pisanski)
	201 Novo računstvo (Ciril Velkovrh)
NA OVITKU:	I Jadrnica T-430 (Foto Elan)
	II Vsebina
BISTROVIDEC	III Razpredelnica - rešitev (Dušan Repovš)
	Ali se je Pitagora zmotil - rešitev (Peter Petek)
	IV Mozaik (France Dacar)



KAKO NASTANE PRESEK

Ko pride članek v uredništvo (oglejte si tretjo stran ovitka v Preseku III/1), najprej ugotovimo, kateri od urednikov naj ga dobi v roke: urednik za matematiko, za fiziko ali za astronomijo. Ta članek prebere, si v grobem ustvari mnenje o njem, potem pa prosi tega ali onega člana uredniškega odbora, da prispevek uredi. Navadno razdelimo članke v urejanje na sejah uredniškega odbora, ki jih imamo približno enkrat na mesec. O čem se še pogovarjamo na sejah? Odločamo glede na razpoložljiva finančna sredstva in tudi glede na število člankov na zalogi, koliko strani bo imela številka Preseka. Izberemo nalogo za rubriko "Premisli in reši", poiščemo izmed več predlogov primerne "Bistrovidca", določimo čim lepšo naslovno stran. Uredniki skupaj z odgovornim urednikom predlagajo vsebino Preseka. Pri tem moramo paziti, da ohranimo pravo razmerje med resnimi in zabavnimi prispevki, v vsaki številki naj bi bilo nekaj iz naših treh strok: matematike, fizike in astronomije.

Kako članek uredimo? Urednik članek najprej prebere. Ugotovi, ali je strokovno v redu, ali so zraven vse slike, ki jih tekst omenja, popravi manjše tipkarske napake ali morda še kakšno malenkost. Označiti mora, katere črke, besede oz. stavki, naj bodo stavljene kurzivno (poševno), če tega še ni storil avtor sam.

Če je treba večjih sprememb in dopolnitev, poišče urednik avtorja in mu predlaga, kaj naj popravi in doda. Ko dobi urednik spet članek v roke, ga odnese, sedaj že lepo urejenega, odgovornemu uredniku. Ta zbira urejene članke v posebni mapi in ko se jih nekaj nabere, jih pošlje lektorju, ki popravi morebitne slovnične in stilistične napake. Ko je tako poskrbljeno za lepo slovenščino, dobi članek v roke tehnični urednik. On sodeluje s strojepiskama Nušo Rode, diplomirano inženirko matematike in

Metko Zitnik, študentko matematike, ki nam tipkata Presek. Saj ste gotovo opazili, da je Presek natipkan in ni postavljen v tiskarni. Tehnični urednik tudi pošlje predloge za slike k članom tovarišu Slavku Lesnjaku, absolventu matematike, ki izdelava slike s tušem. Za vsako barvo, ki je na sliki, mora izdelati svojo risbo. No, znotraj Preseka pomeni to največ dve risbi, za slike na ovitku, ki je štiribarven, pa je treba včasih tudi štirih risb. Natipkan in z risbami opremljen članek pošljemo avtorju ali uredniku, da ga še enkrat pogleda.

Zdaj pride na vrsto zlaganje Preseka. Tudi to delo opravi tehnični urednik. V roke vzame škarje in lepilo in reže in lepi, da dobi vsaka stran svojo dokončno obliko. Tako zložen Presek še enkrat pregleda jezikovni korektor. Nato ga odnesemo v tiskarno, kjer ga pregledajo in nas "pokarajo", če smo kaj po tehnični plati slabo pripravili. Tedaj tudi izberemo drugo oziroma tretjo barvo v Preseku. Po morebitnih zadnjih korekturah v tiskarni razporedijo stran za stranjo po tiskarski poli tako, kot je potrebno, da si strani, potem ko je pola zložena, pravilno sledijo. Tako postavljeni tipkopis preslikajo na filme, iz katerih napravijo odtis - imenovan ozolit, ter nam ga pošljejo v pregled. Korektur je navadno zelo malo. Iz filmov prenesejo odtise na za svetlobo občutljive osojene cinkove plošče, ki jih nato vpnejo na vrtljive bobne v ofset tiskarskih strojih. Vsak stroj tiska hkrati po 32 strani - to je dve tiskarski poli ali eno polo papirja. Pri večbarvnem tisku pa so taki stroji postavljeni zaporedoma v natančno določenih razdaljah. Ovitek tiskajo posebej. Potiskane pole zložijo, preganejo, obrežejo in vežejo s stroji. Presek je gotov. Še toplega že kar v tiskarni spravijo v zavitke in razpošljejo po šolah, kjer ga dobite vi, dragi bralci.

Peter Petek in Ciril Velkovich

UVODNIK



KAKO SPRAVIMO ULOMEK V ŠKATLO

Ulomek v škatlo? Zakaj pa ne! Oglejmo si, kako to napravimo z ulomkom $\frac{135}{46}$

Najprej ga zapišemo kot mešano število

$$\frac{135}{46} = 2\frac{43}{46}$$

Dvojko skrbno odnesemo v prvi predalček škatle. Ostanek prekucnemo, da dobimo obratno (recipročno) vrednost

$$\frac{43}{46} \rightarrow \frac{46}{43} = 1\frac{3}{43}$$

Spet odnesemo pridelek - enico - v škatlo. Ostanek obrnemo

$$\frac{3}{43} \rightarrow \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3}$$

Pospravimo 14 v škatlo in obrnemo ostanek

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{1} = 3$$

Še trojko damo v škatlo, ostanka ni več, ulomek je ves v škatli, štiri predalčke smo napolnili.

Naloga: Spravi v škatlo ulomke $\frac{9}{23}$, $\frac{1600}{563}$, $\frac{427}{312}$, $\frac{17}{550}$!

Oglejmo si zgornji postopek. V prvi predalček smo dali celi del števila, to je največje celo število, ki je še manjše od našega ulomka. Prav lahko bi se zgodilo, da bi bilo to celo število nič. Pač pa v naslednjih predalčkih ne more biti ničle, ker vsakič obrnemo ostanek, ki je manjši od 1 in je zato recipročna vrednost večja od 1. Števci in imenovalci se zmanjšujejo, ko dobimo v imenovalcu 1, je igre konec, ker ni več ostanka, s kate-

2

2 1 14 3

rim bi jo nadaljevali. Pozorni bralec bo v igrici spoznal Evklidov algoritem.

Pred seboj imamo sedaj namesto ulomka škatlo, kamor smo spravili ulomek. Ali bi mogli spet sestaviti ulomek? 0, seveda gre, le začeti moramo pri zadnjem predalčku in vso pot preiti v obratni smeri. Komentar najbrž ni potreben.

$$3 \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$14\frac{1}{3} = \frac{43}{3} \rightarrow \frac{3}{43}$$

$$1\frac{3}{43} = \frac{46}{43} \rightarrow \frac{43}{46}$$

$$2\frac{43}{46} = \frac{135}{46}$$

2	1	14	3
---	---	----	---

$$+ \frac{135}{46}$$

Torej vsaki škatli z naravnimi števili - nič je dovoljena le v prvem predalčku - priredimo ulomek, racionalno število. Zapisu s pomočjo "škatle" rečemo *verižni ulomek*

$$\frac{135}{46} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{14 + \frac{1}{3}}}$$

Ime je res upravičeno, opazimo pa tudi, da utegne biti takle zapis precej dolg in neroden, saj imamo že v našem skromnem primeru trojni ulomek. Zato navadno uporabljamo zapis v eni sami vrsti: $\frac{135}{46} = [2, 1, 14, 3]$

Naloga: Izračunaj vrednosti verižnih ulomkov $[0, 1, 4, 3]$, $[5, 67, 8, 8, 3]$, $[a, b, c]$, $[a, b, c, d]$ (a, b, c, d so naravna števila)!

Recimo, da smo stresli in izgubili nekaj zadnjih predalčkov škatle. Res nerodno, a nesreča le ni prehuda. Seveda prvotnega ulomka ne moremo več sestaviti, dobimo pa še vedno približek. Vzemimo kar naš primer! Če izgubimo celo škatlo, je seveda stvar brezupna. Zato si najprej mislimo, da smo izgubili vse razen prvega predalčka. Ustrezni ulomek je potem kar 2, to je približek,

ki je za $\frac{43}{46}$ premajhen.

Prav, kaj pa, če sta nam ostala prvi in drugi predalček

$$[2, 1] = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

Ta približek je za $\frac{3}{46}$ prevelik, napaka je manjša kot prej. če

poznamo vsebino prvih treh predalčkov, dobimo približek:

$$[2, 1, 14] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{14}} = 2\frac{14}{15} = \frac{44}{15}$$

Razlika $\frac{135}{46} - \frac{44}{15} = \frac{101}{690}$ je pozitivna, zato je ta približek spet premajhen, je pa boljši od prejšnjega. Brez dokaza povejmo, da je vedno tako, kot smo opazili na našem primeru. Lihi približki (prvi, tretji, peti, ...) so premajhni, sodi (drugi, četrti, ...) preveliki. In napaka, ki jo naredimo, je tem manjša, čim kasneje si približek vzamemo.

Razen ulomkov obstajajo še druga števila, t. im. iracionalna števila. Med njimi sta na primer $\sqrt{2}$ in π . Taka števila zahtevajo neskončno škatlo. Zaradi zanimivosti si oglejmo, kaj je v teh škatlah za zgoraj omenjeni iracionalni števili!

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$$

Enici v prvem predalčku sledi neskončno dvojok.

O tem se moremo brž prepričati! Koren iz dva leži med 1 in 2, zato sodi v prvi predalček enica. Razliko $\sqrt{2} - 1$ obrnemo in racionaliziramo

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

To število leži med 2 in 3, zato je v drugem predalčku dvojka, ostanek $\sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1$ je isti kot prej in zato dobimo dvojko v vseh nadaljnjih predalčkih.

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, \dots]$$

Tu pa ne opazimo nobenega reda, po katerem bi se pojavljala števila v predalčkih. In na žalost pravila res ni.

Naloga: Iz zgornjih dveh verižnih ulomkov poišči po pet približkov za vsako od števil $\sqrt{2}$ in π !

TRISEKCIJA (RAZTRETINJENJE) KOTA

Grški matematiki so se se že zelo zgodaj znašli pred nekaj nalogami, ki so bile konstrukcijske narave in jih niso znali rešiti z "evklidskim orodjem" (to pomeni šestilo in neoznačeno ravnilo). Ena od teh je tudi trisekcija kota.

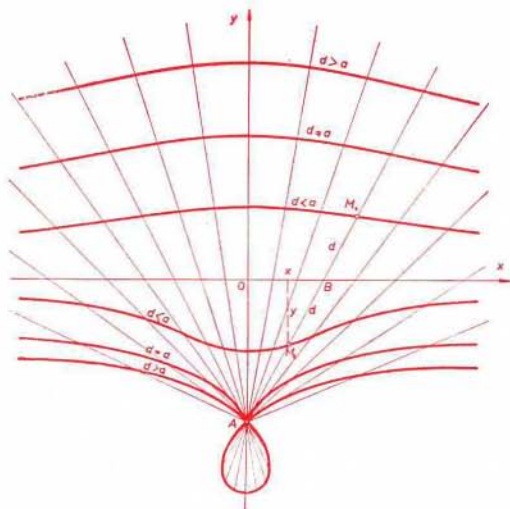
Rešitev za pravi kot je prava šala, toda če poskusimo narediti isto za poljuben kot, se nam ustavi. Ta naloga je namreč nerešljiva.

Ker ni šlo samo z ravnilom in šestilom, so poskusili rešitev dobiti na drugačen način. Menda je od vseh najlepša in zato tudi najbolj znana Nikomedesova. Ta grški matematik je živel okoli leta 180 pr. n. št. in je pri rešitvi uporabil krivuljo konhoido:

$$x^2 y^2 = (d^2 - y^2)(a - y)^2$$

1. KAKO NARIŠEMO KONHOIDO?

Kot lahko vidimo iz enačbe, je konhoida odvisna od 2 parametrov a in d , ki si ju lahko poljubno izberemo. Tako dobimo 3 tipe konhoide, kajti velja natanko ena od 3 možnosti $a < d$, $a > d$ in $a = d$ (to je znani zakon trihotomije).



S1.1

Točke krivulje dobimo takole: najprej narišemo pravokotni koordinatni sistem (x, y) z izhodiščem O in v njem točko $A(0, -a)$. Skozi to točko potegnemo poljubne premice tako, da seka jo abscisno os (ena od njih je kar ordinatna os koordinatnega sistema). Iz presečišč premic z abscisno osjo odmerimo s šestilom na vsaki strani razdaljo d in tako dobimo iskane točke.

Vidimo, da ima konhoida dve veji - eno nad in drugo pod abscisno osjo.

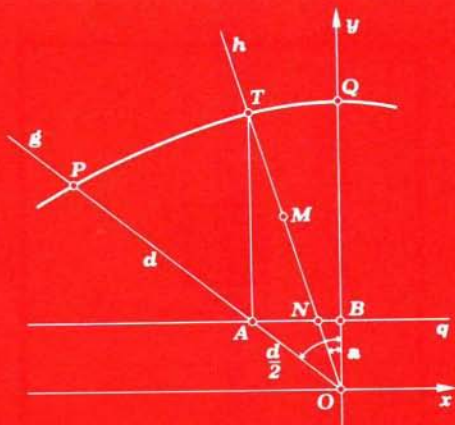
2. POTEK REŠITVE

Zdaj, ko poznamo problem in krivuljo konhoido, imamo pripravljeno že vse za konstrukcijo rešitve. Dan je poljuben kot

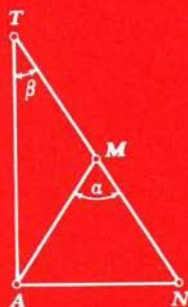
$\angle(g, 0, y)$, ki ga moramo razdeliti na 3 enake dele. Narišemo ga tako, da en krak kota sovпада z ordinatno osjo y pravokotnega koordinatnega sistema, drug krak pa označimo z g . Vrh kota je izhodišče O . Skozi izhodišče O narišemo še abscisno os x in v točki $B(0, a)$ vzporednico q k abscisni osi. Premica q naj seka krak g v točki A , tako da je $\overline{OA} = d/2$ (prej smo že povedali, da si lahko d poljubno izberemo).

V koordinatnem sistemu nam manjka samo še konhoida. Njena parametra sta dolžini a in d (obe smo ravnokar omenili), zato nam je ne bo težko narisati.

Na kraku g odmerimo od točke A s šestilom razdaljo navzgor (rabimo le zgornjo vejo krivulje) in že dobimo prvo točko. Recimo ji P . Ostale točke poiščemo tako, kot smo povedali pod 1. točko. Pa recimo, da je krivulja že narisana. Iz točke A potegnemo pravokotnico na premico q , ki seka konhoido v točki T . Narišemo še premico h skozi točki T in O , ki seka premico q v točki N ; razpolovišče daljice $\overline{TN}$ pa označimo z M . Končno lahko trdimo: kot $\angle(h, 0, y)$ je tretjina kota $\angle(g, 0, y)$.



S1.2



S1.3

DOKAZ:

$\overline{MN} = \overline{MT} = \overline{MA}$. Iz narave krivulje sledi

$$\overline{NT} = \overline{AP} = 2 \overline{OA} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{MA}$$

Iz enakokrakega trikotnika $\triangle OAM$ dobimo $\angle AOM \equiv \angle AMO$

Iz slike 3 vidimo $\beta = (180^\circ - (180^\circ - \alpha))/2 = \alpha/2$ in tako dobimo

$$\angle AMO \equiv \angle AOM \equiv \angle (g, O, h) \equiv 2 \angle ATM \equiv 2 \angle (h, O, y)$$

To pomeni, da je $\angle (g, O, h) = 2/3 \angle (g, O, y)$ in sledi rešitev

$$\angle (h, O, y) = 1/3 \angle (g, O, y)$$

Gregor Pavlič

LITERATURA

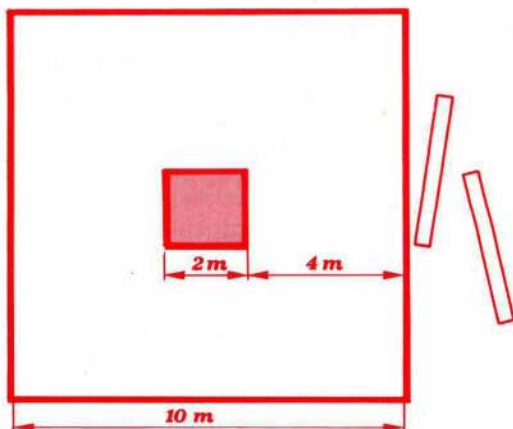
- 1 D. E. Smith, *History of mathematics*, vol 2, New York, Dover publications 1953
- 2 A. Vadnal, *Funkcije I*, Ljubljana, Mladinska knjiga 1965, str. 178-179

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

MED OGNJEM IN KROKODILI

Janezek je na poti po Afriki zašel v savani. In da bo smola še večja, začne visoka trava, ki raste po savanah, goreti. Na begu pred ognjem pride Janezek do kvadratnega ribnika s stranico 10 m. Ravno na sredi ribnika pa leži kvadraten otoček s stranico 2 m. Že se naš junak razveseli, da bo splaval na otok in se tako rešil strašne smrti v plamenih, ko spozna, da je ribnik poln požrešnih krokodilov. K sreči ležita ob ribniku dve deski, dolgi po 4 m. Toda ojoj, to je ravno premalo za varen prehod, saj desak ni kam opreti in bi padle z Janezkom vred med krokodile. Sila kola lomi, Janezek se le domisli kako bi si pomagal z obema deskama in se rešil na otok ter ubeži tako eni kot drugi grozeči nevarnosti. Kaj je napravil z deskama?

Peter Petek



ALI JE DEL ENAK CELOTI ?

Osnovno načelo, ki ga je bilo treba zavreči, je bila trditev, utemeljena na samem začetku razvoja matematike: "Del je manjši kot celota." Ta trditev, brezpogojno točna za končne množice, izgubi svojo moč na področju neskončnih množic. Spomnite se, kako je direktor nenavadnega hotela* premeščal kozmologe v sobe s sodimi številkami. Pri tej selitvi se je gost sobe št. n preselil v sobo št. $2n$. Z drugimi besedami, selitev je tekla po sledeči shemi:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

Ta shema ugotavlja vzajemno enolični odnos med množico naravnih števil

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

in njenim delom - množico sodih števil

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

Po dogovoru smatramo, da imata množici enako elementov, če med njima obstaja vzajemno enolična preslikava. Pomeni torej, da ima množica naravnih števil prav toliko elementov kot njen del - množica sodih števil.

Prav tako moremo vzpostaviti vzajemno enolični odnos med množico naravnih števil in množico števil oblike

$$10, 100, 1000, 10000, \dots$$

Potrebno je le vsakemu naravnemu številu prirediti število 10^n :

$$n \rightarrow 10^n$$

S tem je dosežen želeni vzajemno enolični odnos. Prav tako obstaja vzajemno enolični odnos med množico naravnih števil in množico kvadratov vseh naravnih števil:

$$n \rightarrow n^2,$$

ali množico kubov vseh naravnih števil:

$$n \rightarrow n^3$$

itd.

Splošno moremo vzpostaviti vzajemno enolični odnos med množico vseh naravnih števil in poljubnim njenim neskončnim delom. Zato je dovolj le po vrsti numerirati števila tega dela.

Ne govore zastonj, da ta trditev ni nova pod soncem, novo je le - davno pozabljeno staro. Že na začetku XVII stoletja je Gali-

*Presek 1 (1973/74) str. 10

lei razmišljal o protislovjih neskončnosti in odkril možnost vzajemno enoličnega odnosa med množico naravnih števil in množico njihovih kvadratov. V njegovi knjigi "Razgovori in matematični dokazi, ki se nanašajo na mehaniko lokalnega gibanja" (1638) je naveden dialog, v katerem Salviatti, izražajoč misel Galileja, pravi:

"To, kar smo povedali, se nanaša na težave, ki nastanejo, ko z našim omejenim razumom razpravljamo o neskončnosti in ji pripisujemo lastnosti, ki smo jih spoznali na končnih in omejenih stvareh. Toda to je nepravilno, ker pojmov, kot sta večja in manjša količina in enakost, ne moremo uporabiti za neskončnost, ker ne moremo reči, da je neka neskončnost večja ali manjša ali da sta neskončnosti enaki."

Za potrditev svoje misli Salviatti ugotavlja, da je po eni strani "kvadratov toliko kot je korenov, ker ima vsak kvadrat svoj koren in vsak koren - svoj kvadrat (vsakemu kvadratu pripada le en koren in vsakemu korenu le en kvadrat...(to se nanaša na naravna števila)). Pri tem je število korenov enako celokupni količini vseh števil, ker ni nobenega števila, ki ne bi mogel biti koren nekega kvadrata; torej moramo reči, da je število kvadratov enako celotni količini vseh naravnih števil..."

Po drugi strani, ugotavlja Salviatti, je "količina vseh števil skupaj - kvadratov in nekvadratov - večja kot samo kvadratov", pri čemer število kvadratov nenehoma in v velikem razmerju upada, ko prehajamo na večja števila." Kot edini izhod iz ugotovljenega protislovja Salviatti predlaga:

"Ne vidim nobene druge rešitve, kot da priznam, da je količina vseh števil neskončna, da je neskončno število kvadratov in da je neskončno število korenov. Napačno je reči, da je število kvadratov manjše od količine vseh števil, a poslednje večje: končno so lastnost enakosti, prav tako pa tudi večja in manjša količina nesmiselni, ko se govori o neskončnosti in so uporabljivi le za končne količine."

Vidimo, da je Galilei v bistvu poznal idejo vzajemne enolične pripadnosti in ugotovil, da je takšen odnos mogoče vzpostaviti med množico vseh naravnih števil in množico kvadratov, ter je mogoče smatrati, da imata množici enako število elementov. Prav tako je razumel, da je pri neskončnih množicah del lahko enak celoti. Od tod njegov nepravilni sklep, da so vse neskončnosti

enake, ker je operiral le z neskončnimi podmnožicami zaporedja naravnih števil, ki jih je mogoče numerirati.

Galilei si ni mogel predstavljati, da se množica vseh točk daljice ne da numerirati. Podobno kot atomisti preteklosti je postavil, da je daljica sestavljena iz množice točk, ki jih je mogoče prešteti.

Prevedel Marjan Vagaša

Prevod je iz knjige Vilenkin: Рассказы о множествах

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

ZANIMIVO MNOZENJE

Napišimo število 12 345 679 in ga pomnožimo z 9! Presenetljivo! Dobimo število, ki ga zapišemo z devetimi enkami. Pa vzemimo namesto 9 za faktor število 18. Zmnožek predstavlja devet dvojk. Če bi vzeli za faktor število 27, bi imel zmnožek devet trojk. Zanimivo!

Kako bi dobili zmnožek samih štiric, petic itd.?

Premislimo in poskusimo, kakšen bi moral biti drugi faktor, če je prvi faktor 12 345 679, da bi dobili za zmnožek število, ki je zapisano z devetimi enakimi ciframi?

REŠITEV:

Rezultat množenja števila 12 345 679 z 9 je število
111 111 111.

111 111 111 . a = aaa aaa aaa, če je a naravno število in manjše od 10.

Če število 12 345 679 pomnožimo z 18, je isto, kot če bi 111 111 111 pomnožili z 2, ker je $18 = 9 \cdot 2$.

Če torej hočemo dobiti zmnožek, zapisan z devetimi enakimi ciframi a, moramo število 12 345 679 množiti z 9.a.

Npr. $12\,345\,679 \cdot 72 = 888\,888\,888$, ker je $72 = 9 \cdot 8$

Anica Šoper

DVOJIŠKI ŠTEVILSKI SISTEM

NADALJEVANJE

4. Aritmetika v dvojiškem sistemu

a) Seštevanje

Za seštevanje v dvojiškem sistemu velja naslednja tabela:

$$\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 10 \quad (1 + 1 = 0 \text{ in ostane } 1) \end{array}$$

Zgledi:

$$\begin{array}{r} 1011 \\ + 101 \\ \hline 10000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001100 \\ + 10101 \\ \hline 1100001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111000 \\ + 101011 \\ \hline 11100011 \end{array}$$

b) Odštevanje

Tabela za odštevanje v binarnem sistemu je tudi zelo preprosta:

$$\begin{array}{l} 0 - 0 = 0 \\ 1 - 1 = 0 \\ 1 - 0 = 1 \\ 0 - 1 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{in } 1 \text{ si moramo izposoditi na} \\ \text{naslednjem višjem mestu.} \end{array}$$

Zgleda:

$$\begin{array}{r} 101111 \\ - 10011 \\ \hline 11100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101100010 \\ - 10101010 \\ \hline 10111000 \end{array}$$

Če je minuend manjši od subtrahenda, ga odštejemo od subtrahenda, diferenci pa damo negativni znak.

c) Množenje

Poštevanko v desetiškem sistemu zelo dobro poznamo iz vsakdanjega življenja. V dvojiškem sistemu je poštevanka zelo preprosta:

$$\begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Oglejmo si zgled za množenje!

$$\begin{array}{r}
 1011011 \times 1101 \\
 \hline
 1011011 \\
 1011011 \\
 0000000 \\
 1011011 \\
 \hline
 10010011111
 \end{array}$$

Pri seštevanju smo morali paziti. Na sedmem mestu z desne smo računali takole: 1 (ostanek od šestega mesta) in 1 in 1 in 1 je 100. Zapišemo 0 in ostane 10. Na osmem mestu dobimo 1, na devetem pa 0 (zaradi ostanka 10 od sedmega mesta) in ostane 1 in tako dalje.

Pri vsakem množenju s posamezno številko multiplikatorja pomaknemo multiplikand za eno mesto v desno, če je številka multiplikatorja enaka 1. Če pa je številka multiplikatorja enaka 0, zapišemo namesto multiplikanda ničle.

d) Deljenje

Kadar delimo v desetiškem sistemu, odštevamo divizor od dividenda tolikokrat, kolikorkrat je možno. Isto velja za deljenje v drugih številskih sistemih.

Oglejmo si zgled za deljenje v dvojiškem sistemu!

$$\begin{array}{r}
 1101101 : 1011 = 1001 \\
 1011 \\
 \hline
 0010101 \\
 1011 \\
 \hline
 1010 \text{ ostanek}
 \end{array}$$

5. Pretvarjanje celih števil iz desetiškega sistema v dvojiški sistem

V 2. razdelku smo obravnavali številski sistem z osnovo B . Na ravno število N smo razčlenili po potencah osnove B in ga potem zapisali v obliki

$$N = \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_1 \beta_0$$

Spoznali smo, da so $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ ostanki, ki jih dobimo pri

delitvi števil $N, N_1, \dots, N_n$ z osnovo B . Če govorimo manj eksaktno, pravimo, da so koeficienti $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ ostanki, ki jih dobimo po $(n+1)$. deljenju števila N z osnovo B .

Če želimo pretvoriti naravno število iz desetiškega sistema v dvojiški sistem, moramo torej dano število kar naprej deliti z osnovo dve in zapisovati ostanke po vrsti od desne proti levi.

Vzemimo, da je treba pretvoriti število $(27)_{10}$ v dvojiški sistem! Najprej si oglejmo naslednji račun:

$$27 = \frac{27}{2} \cdot 2 = (13 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 13 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Ker je

$$13 = \frac{13}{2} \cdot 2 = (6 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 6 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

je

$$27 = (6 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 6 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Nadalje je

$$6 = \frac{6}{2} \cdot 2 = (3 + 0) \cdot 2 = 3 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

in

$$27 = (3 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Ker je

$$3 = \frac{3}{2} \cdot 2 = (1 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

je končno

$$\begin{aligned} 27 &= (1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Dobili smo naslednji rezultat:

$$(27)_{10} = (11011)_2$$

Iz tega računanja je razvidno, da pretvorimo število $(27)_{10}$ v dvojiški sistem tako, da število kar naprej delimo z 2 in zapisemo ostanke po vrsti od desne proti levi:

27 : 2 = 13	in ostanek 1	1
13 : 2 = 6	in ostanek 1	11
6 : 2 = 3	in ostanek 0	011
3 : 2 = 1	in ostanek 1	1011
1 : 2 = 0	in ostanek 1	11011

Torej je

$$(27)_{10} = (11011)_2$$

6. Prevedba desetiškega ulomka v dvojiški sistem

V 2. razdelku smo zapisali ulomljeni del ulomka v sistemu z osnovo B takole:

$$0, \beta_{-1} \beta_{-2} \dots \beta_{-m}$$

Spoznali smo, da so števila $\beta_{-1}, \beta_{-2}, \dots, \beta_{-m}$ celi deli produktov $BN^{(1)}, BN^{(2)}, \dots, BN^{(m)}$.

Vzemimo, da je treba prevesti ulomek $(0,62)_{10}$ v dvojiški sistem. Račun poteka takole:

$$0,62 = \frac{0,62}{2} \cdot 2 = \frac{1,24}{2} = 1 \cdot 2^{-1} + (0,24) \cdot 2^{-1}$$

$$0,24 = \frac{0,24}{2} \cdot 2 = \frac{0,48}{2} = 0 \cdot 2^{-1} + (0,48) \cdot 2^{-1}$$

$$\begin{aligned} 0,62 &= 1 \cdot 2^{-1} + (0 \cdot 2^{-1} + 0,48 \cdot 2^{-1}) \cdot 2^{-1} = \\ &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + (0,48) \cdot 2^{-2} \end{aligned}$$

$$0,48 = \frac{0,48}{2} \cdot 2 = \frac{0,96}{2} = 0 \cdot 2^{-1} + 0,96 \cdot 2^{-1}$$

$$\begin{aligned} 0,62 &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + (0 \cdot 2^{-1} + 0,96 \cdot 2^{-1}) \cdot 2^{-2} = \\ &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0,96 \cdot 2^{-3} \end{aligned}$$

$$0,96 = \frac{0,96}{2} \cdot 2 = \frac{1,92}{2} = 1 \cdot 2^{-1} + 0,92 \cdot 2^{-1}$$

$$\begin{aligned} 0,62 &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + (1 \cdot 2^{-1} + 0,92 \cdot 2^{-1}) \cdot 2^{-3} = \\ &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0,92 \cdot 2^{-4} = \\ &= (0,1001 \dots)_2 \end{aligned}$$

Z računanjem lahko nadaljujemo toliko časa, kolikor želimo. V splošnem je dvojiški ulomek, ki ga dobimo, neskončen. Lahko ga izračunamo poljubno natančno.

Pri pretvarjanju ulomkov iz enega številskega sistema v drugi se navadno zgodi, da končni ulomki v enem sistemu niso končni v drugem in obratno. Tako je na primer ulomek $\frac{1}{3}$ v desetiškem sistemu neskončen, v sistemu z osnovo tri pa se glasi $(0,1)_3$ in je končen. Ker je zgoraj navedeni račun zamuden, si oglejmo hitrejšo pot za prevedbo desetiškega ulomka v dvojiški! Ulomek pomnožimo z dve:

$$0,62 \cdot 2 = 1,24$$

Ker je celi del produkta 1, zapišemo na prvo mesto za dvojiško vejico 1, torej $0,1$.

Ulomljeni del produkta pomnožimo z dve:

$$0,24 \cdot 2 = 0,48$$

Ker je celi del produkta enak 0, zapišemo na drugo mesto za dvojiško vejico 0, torej 0,10.

Celotni račun poteka takole:

$0,62 \cdot 2 = 1,24$	$0,1$
$0,24 \cdot 2 = 0,48$	$0,10$
$0,48 \cdot 2 = 0,96$	$0,100$
$0,96 \cdot 2 = 1,92$	$0,1001$
$0,92 \cdot 2 = 1,84$	$0,10011$
$0,84 \cdot 2 = 1,68$	$0,100111$

Desetiški ulomek, ki ima celi in ulomljeni del, prevedemo v dvojiški sistem običajno tako, da prevedemo vsak del posebej in nato oba dela seštejemo.

Tomislav Skubic

VPRAŠANJA

V enakokrakem trikotniku je krak trikrat daljši od osnovnice. Koliko merijo stranice, če je obseg 91 cm?

Peter je dobil nalogo: danemu številu prištej 12 in rezultat deli s 13. Peter pa je slabo poslušal in je od danega števila odštel 13 in razliko delil z 12. Ko pa je povedal odgovor, je bil rezultat pravilen. Katero število je bilo dano in kakšen je bil odgovor?

Napisana so števila od 1 do 99999. Kolikokrat je napisana cifra 1?

Marjanca si je izmislila število s tole lastnostjo: vsota polovice in tretjine tega števila je za 7 večja od njegove četrtine. Določi to število in ga povej Marjanci!

Janez je dve leti mlajši od Petra. Peter je štiri leta starejši od Štefana, Andrej je tri leta starejši od Petra. Janez je toliko star, kot Štefan. Kdo je starejši: Andrej ali Janez?

Franci Oblak



DEMOKRITOVO JABOLKO

Med prvimi je zamisel o atomu razvil grški filozof Demokrit. Ne bomo razglabljali o razločku med Demokritovimi in sodobnimi pogledi na atom. Iz zgodbe same bomo videli, kaj je Demokrit razumel pod pojmom atom.

Zgodba pripoveduje, da je nekoč sedel Demokrit na kamnu ob morski obali, držal v roki jabolko in takole razmišljal: če razrežem jabolko na polovico, dobim pol jabolka, če nadaljujem s polovico, dobim četrtino itd. Ali lahko režemo tako kar naprej?

Demokrit je iz tega razmišljanja povzel, da je število delitev omejeno. Po N -tem deljenju bi dobili delec, ki ga ne moremo deliti naprej. Ta delec je imenoval atom. Koliko delitev je potrebnih, da dobimo atom? (gr. atomos - nedeljiv)

Oglejmo si približen račun: Zaradi enostavnosti vzemimo jabolko s takim premerom, da je prostornina približno 10^3 cm^3 . Pri vsakem rezu se zmanjša prostornina dela, ki ga delimo, na polovico. Po N -tem rezu bo prostornina

$$V_N = \frac{V}{2^N} = \frac{10^3 \text{ cm}^3}{(10^{0,3})^N} = 10^{3-0,3N} \text{ cm}^3$$

ker je $2 \approx 10^{0,3}$. Danes vemo, da je prostornina atoma okoli 10^{-24} cm^3 . Zato postavimo:

$$10^{3-0,3N} \text{ cm}^3 = 10^{-24} \text{ cm}^3 \Rightarrow 3 - 0,3N = -24 \Rightarrow 0,3N = 27$$

Rešitev je

$$N = 90$$

Že po devetdesetih rezih pridemo do atoma!

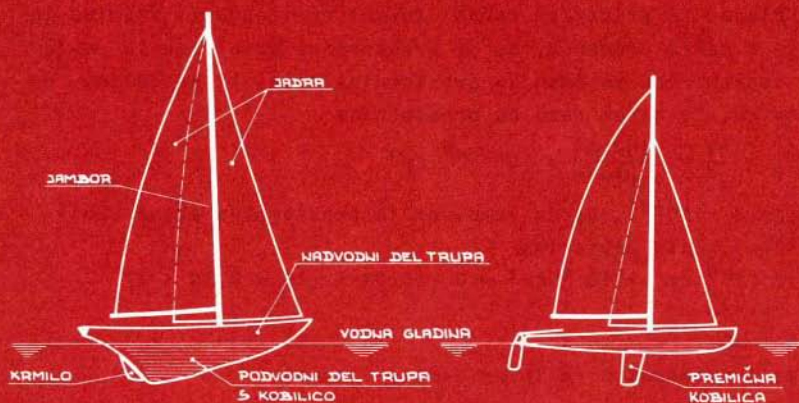
Tomaž Fortuna

VETER, VODA, JADRANJE IN MALO FIZIKE

Kdo izmed nas še ni postal ob bregu jezera ali morja in se zazrl za jadrnico, ki se vozi sem in tja, zdaj skoraj proti vetru, pa spet z vetrom, ali še kako drugače. Kadar gladina ni zelo nemirna, se nam zdi, da se jadrnica giblje s tako lahkoto kot galebi nad njo. Morda smo se že kdaj vprašali, kako je sploh mogoče, da se jadrnica giblje skoraj v vseh smereh, veter pa piha ves čas v isti smeri? Kako to, da se kar precej nagne, prevrne pa se le redko, pa še to le tedaj, če je majhna? In kako to, da vozi domala proti vetru?

Skušajmo odgovoriti na ta vprašanja in poleti, če bo nanesea prilika, se popeljimo z jadrnico in se spomnimo teh odgovorov.

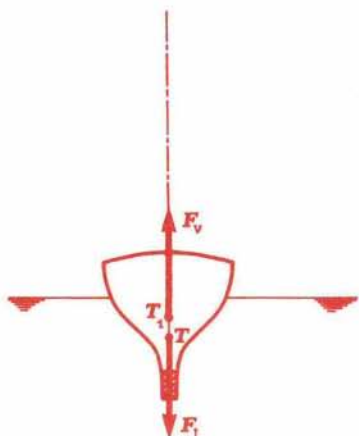
Najprej si na hitro ogledjmo bistvene dele jadrnice. Pomagala nam bo slika 1. Težje jadrnice imajo podvodni del trupa podaljšan v *kobilico* (sl. 1a), manjše, lažje jadrnice pa imajo vgrajeno *premično kobilico*, t.j. posebno železno ploščo, ki jo lahko dvigamo ali spuščamo (sl. 1b). Na palubi in trupu je pritrjen *jambor*, ki nosi *jadra*. Največkrat imajo jadrnice eno ali dve jadri: večje - *glavno jadro* in manjše - *prečko*. Če omenimo še *krmilo*, smo tako spoznali vse bistvene dele jadrnice.



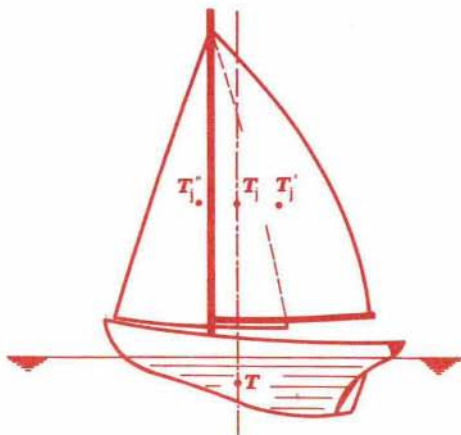
Sl. 1 Bistveni deli jadrnice: a) jadrnica s pritrjeno kobilico
b) jadrnica s pomično kobilico

Postavimo jadrnico v vodo in se pozanimajmo za njeno ravno-
vesje in stabilnost. Najprej pogledjmo mirujočo jadrnico z ne-
razpetimi jadri. Če naj jadrnica miruje, mora biti vsota vseh
zunanjih sil in navorov enaka nič. Na sliki 2 sta označeni zu-
nanji sili, ki delujeta na mirujočo jadrnico. To sta teža F_t s
prijemališčem v težišču jadrnice T in vzgon F_v s prijemališčem
v težišču izpodrinjene vode T_1 . Sili ležita na isti premici in
sta nasprotno enaki. Tako je tudi njun skupni navor enak nič.

Razpnimo jadra in "uravnovesimo" jadrnico! Jadra naj bodo v
takem položaju, da bosta med vožnjo prijemališči sile vetra T_j
in težišče podvodnega dela trupa T na isti navpični ravnini,
pravokotni na vzdolžno os (sl. 3). Če bi bilo prijemališče sile
vetra T_j za težiščem podvodnega dela, bi jadrnica med vožnjo
počasi zavijala v veter, če bi krmar spustil krmilo. Do tega
pride zaradi navora tiste komponente sile vetra, ki je pravo-
kotna na jadra.



Sl. 2 Prečni presek trupa mirujoče
jadrnice in sile, ki deluje-
jo na trup.



Sl. 3 Vzdolžni presek jadrnice in
lega težišča jader ter teži-
šča podvodnega dela trupa.

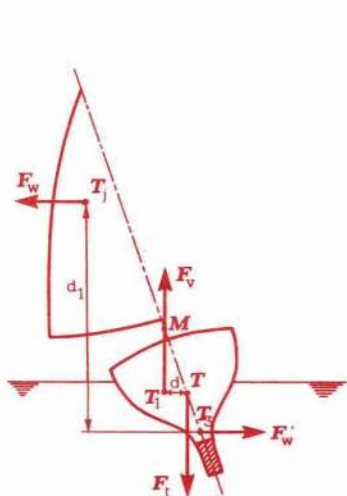
V primeru, da bi bilo prijemališče sile vetra T_j pred teži-
ščem podvodnega dela, pa bi jadrnica zavijala v smer od vetra
stran, če bi krmar spustil krmilo.

Poglejmo sedaj „uravnovešeno“ jadrnico med enakomerno vožnjo. Ponavadi je jadrnica nagnjena; zasukana je okrog vzdolžne osi, ki gre skozi težišče jadrnice. Sl. 4 kaže presek jadrnice z ravnino, ki je pravokotna na vzdolžno os skozi težišče. V tej ravnini naj bodo prijemališča vseh sil. Za prečno ravnotežje jadrnice so pomembne sile ali komponente sil, ki so v ravnini preseka. V ravnotežju sta komponenta sile vetra F_w s prijemališčem v T_j (ta komponenta povzroči tudi uhajanje iz smeri pri „neuravnovešeni“ jadrnici), in sila vode F'_w s prijemališčem v točki T_3 . Sila vode F'_w se pojavi med vožnjo pri nagnjeni jadrnici na podoben način kot prečna sila pri gibajočem se letalskem krilu.

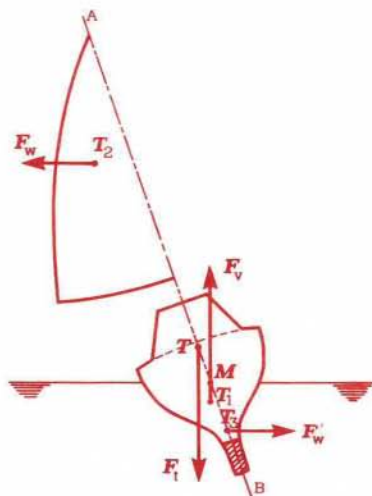
Iz slike 4 vidimo, da se pri nagnjeni jadrnici premakne težišče izpodrinjene vode. Navor dvojice sil F_v in F_t uravnoveša navor dvojice F_w in F'_w , zato velja:

$$F_w d_1 = F_t d$$

Ko se spreminja hitrost vetra, se spreminjata sili F_w in F'_w ter lega težišča izpodrinjene vode, pa tudi razdalji d in d_1 .



Sl. 4 Prečni presek jadrnice v vožnji in sile, ki leže v prečni ravnini. Težišče jadrnice je pod metacentrom.



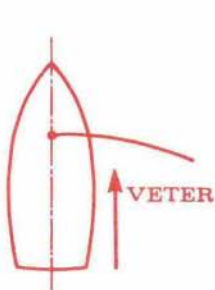
Sl. 5 Prečni presek jadrnice v vožnji in sile, ki leže v prečni ravnini. Težišče jadrnice je nad metacentrom.

Zato je nagib jadrnice različen pri različni hitrosti in smeri vetra. Vprašamo se: Ali se bo jadrnica z nagibanjem vselej ustavila v ravnovesni legi? Vzemimo primer, da je težišče jadrnice T v taki legi, da seka premica, na kateri leži sila vzgona, simetralo $\overline{AB}$ pod težiščem (sl. 5). Presečišču M pravimo *metacenter*. Iz slike 5 vidimo, da tedaj obe dvojici sil sučeta jadrnico tako, da se veča njen nagib. Jadrnica se prevrne! Jadrnica je stabilna le takrat, kadar je metacenter nad težiščem jadrnice. Kadar je težišče pod metacentrom, je ravnovesje jadrnice labilno in jadrnica se lahko prevrne, kadar se dovolj nagne.

Doslej smo govorili le o jadrnici s pritrjeno kobilico. Do enakih zaključkov pridemo tudi pri jadrnici s premično kobilico, le da pri njej ne smemo pozabiti na posadko. Te jadrnice so namreč tako lahke, da ni vseeno, na katerem delu jadrnice se nahaja posadka.

Jadro na jadrnici je tisto, kar je motor za motorni čoln in vemo, da je za mnoge motor najzanimivejši del motornega čolna. Tale naš "motor" je na moč preprost in človek bi rekel, da o njem res ni vredno izgubljati besed. Res je v nekaterih legah delovanje jadra samo po sebi razumljivo. Tako je, kadar piha veter v jadro od zadaj in potiska jadrnico pred seboj (sl. 6). Veliko zanimivejši je primer, ko se giblje jadrnica ostro proti vetru (sl. 7).

Zaradi boljšega pregleda obravnavajmo jadrnico, ki ima samo glavno jadro. Iz slike 9 vidimo, da spominja presek jadra z vo-



Sl. 6 Lega jadra pri jadrnici, ki vozi z vetrom v krmo.



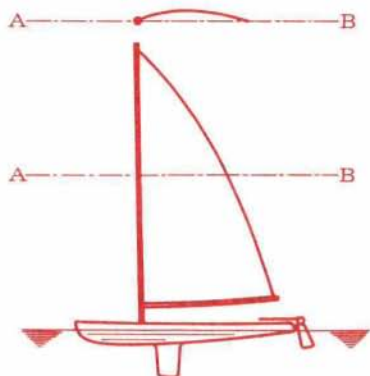
Sl. 7 Lega jadra pri jadrnici, ki vozi ostro proti vetru.



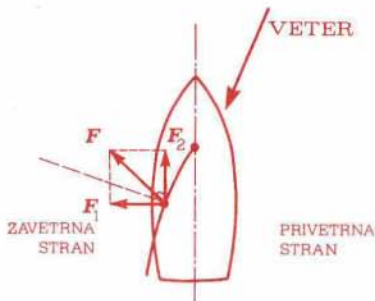
Sl. 8 Presek letalskega krila

doravno ravnino na presek letalskega krila (sl. 9). Gibanje zraka okoli krila je takšno, da je hitrost ob zgornji ploskvi krila večja kot ob spodnji ploskvi. Zato je tlak zraka ob spodnji ploskvi krila večji kot ob zgornji ploskvi. Hitrost in tlak vzdolž tokovnic v vodoravnem toku plina ali tekočine povezuje Bernoullijeva enačba:

$$p + (\rho v^2)/2 = \text{konst.}$$



Sl. 9 Presek jadra z vodoravno ravnino na mestu AB.



Sl. 10 Rezultirajoča sila F na jadro jadrnice, ki vozi ostro proti vetru. V sili F je upoštevana tako sila zaradi tlaka vetra na jadro v privetrni strani, kot tudi sila, ki se pojavi v zavetrni strani zaradi gibanja zraka okrog jadra. Narisani sta tudi komponenti sile F , ki prispevata k gibanju jadrnice naprej (F_2) in k bočnemu zanašanju jadrnice (F_1).

V enačbi je p tlak, v je hitrost zraka in ρ gostota zraka. Ob krilu se tok zraka razdeli. Če je ob zgornji ploskvi hitrost v_1 in tlak p_1 , ob spodnji ploskvi pa hitrost v_2 ter tlak p_2 , velja:

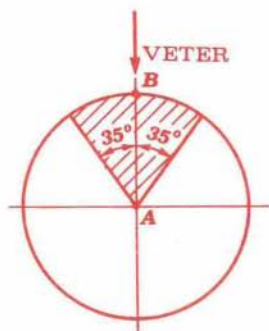
$$p_1 + (\rho v_1^2)/2 = p_2 + (\rho v_2^2)/2,$$

ker je $v_1 > v_2$, je $p_2 > p_1$. Razlika tlakov povzroča silo, ki ji v letalstvu pravijo dinamični vzgon, in uravnoveša težo letala med letom. Tudi ob zavetrni strani jadra pri jadrnici, ki vozi proti vetru, je hitrost zraka večja kot ob privetrni strani in zato je tudi tlak na obeh straneh različen.

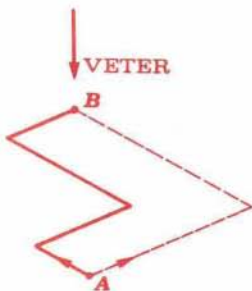
Slika 10 nam kaže silo vetra F na jadro jadrnice, ki vozi ostro v veter. Ni težko ugotoviti, da vleče jadrnico naprej sa-

mo komponenta F_2 , medtem ko povzroča komponenta F_1 bočno zanašanje jadrnice.

Jadrnica lahko vozi proti vetru, dokler je kot med smerjo vetra in vzdolžnico jadrnice (označen z α na sliki 7) večji od okoli 35° . Če je ta kot manjši, začne jadro trepetati in jadrnica kmalu obstane. Vzemimo, da smo z jadrnico v središču kroga na sliki 11. Tedaj lahko dosežemo točke v črtkanem območju le s križarjenjem, vse ostale točke pa so dosegljive z vožnjo naravnost. Križarjenje proti vetru je tisti način jadranja, ki je



Sl. 11 Lega točk na horizontu, ki jih dosežemo brez križarjenja in lega tistih, ki so dosegljive le s križarjenjem (črtkano področje).



Sl. 12 Dva izmed mnogih možnih načinov križarjenja.

gotovo najbolj zahteven. Tedaj pride do izraza vsa izkušnost in spretnost krmarja, saj ima na voljo poljubno število kombinacij za pot med izbranimi točkama (sl. 12). Na tekmovanju je treba izbrati tisto kombinacijo, ki pripelje jadrnico na cilj v najkrajšem času.

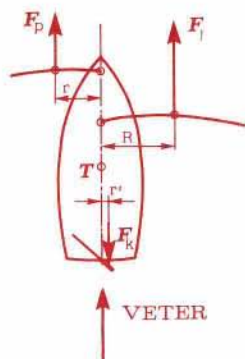
Pomudimo se še pri jadranju z vetrom v krmo. Poglejmo razmere pri jadrnici, ki ima glavno jadro in prečko (sl. 13). Sili vetra na jadro in na prečko sta F_j in F_p . Ti sili povzročata navore $M_j = F_j R$ in $M_p = F_p r$ okrog navpične osi skozi težišče jadrnice. Ker je navor sile F_j večji od navora sile F_p , bo jadrnica silila v veter, kot pravijo jadralci; na sliki 13 je to naznačeno s puščico ob premcu. Če hoče krmar obdržati jadrnico v smeri vetra, mora zasukati krmilo (sl. 13) tako, da bo navor

vode $M_k = F_k r'$, ki tišči na krmilo, uravnovesil razliko navorov:

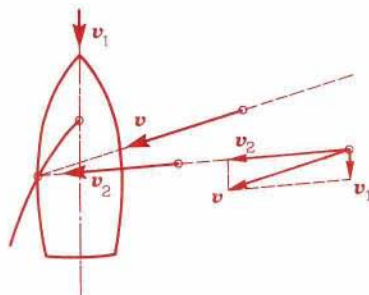
$$M_k = M_j - M_p,$$

zato je tudi vožnja počasnejša. Velikokrat zamenjajo prečko z večjim jadrom polkroglaste oblike, ki mu pravimo *spinaer*. Ker je spinaer veliko večji od prečke, je potisna sila vetra večja in s tem tudi hitrost jadrnice. Hkrati je navor sile vetra na spinaer dovolj velik, da uravnovesi M_j . Zato je lahko obremenitev krmila veliko manjša.

Ker leži pri jadranju z vetrom v krmo sila vetra v smeri



Sl. 13 Sile, ki delujejo na jadra in na krmilo pri vožnji z vetrom v krmo.



Sl. 14 Hitrost navideznega vetra je sestavljena iz hitrosti pravega vetra in nasprotne hitrosti jadrnice glede na obalo.

vožnje, ni bočnega zanašanja jadrnice. Zato lahko jadrnice, ki imajo premično kobilico, le-to dvignejo in tako zmanjšajo upor trupa v vodi. Jadrnica je sedaj manj stabilna za bočna gibanja in se mora posadka zato zelo skrbno premikati po jadrnici.

Kadar piha veter z boka nekako pod kotom 90° na vzdolžnico jadrnice, je jadranje najbolj prijetno, saj je tedaj le malo presenečenj, ki lahko dolete jadralce. Dolgočasno pa jadranje tudi pri tej smeri vetra ni. Pri lahki jadrnici kake novejšje konstrukcije s premično kobilico (n.pr. "leteči Holandec -

F. D.", "470" ali kaj podobnega) se trup jadrnice zaradi večje hitrosti precej dvigne iz vode in se zdi, kot da jadrnica drsi (planira) po vodni gladini. Drsenje je možno ne samo pri bočnem vetru, ampak pri vsakem vetru, ki piha iz krmnega kvadranta, če je le hitrost jadrnice dovolj velika in niso valovi previsoki.

Velikokrat mora biti krmar spreten, da pripravi jadrnico do drsenja in da jo zadrži v tem stanju čim dalj časa. Hitrost, ki jo doseže jadrnica med drsenjem, je znatno večja od hitrosti pri običajni vožnji. Zato je razumljivo, da velikokrat zmaga na tekmovanjih tisti krmar, ki izkoristi več priložnosti za drsenje.

Morda se je že kdo vprašal, v katerem sistemu obravnavamo hitrost in smer vetra. Smer in hitrost vetra sta različna za opazovalca na gibajoči se jadrnici in za onega na kopnem. Pri tistem, ki je na jadrnici, je treba upoštevati tudi veter, ki nastane zaradi gibanja jadrnice. Rezultirajočo hitrost in smer vetra dobimo, če vektorsko seštejemo hitrosti obeh vetrov (sl. 14). Tako dobljeni veter smo imeli ves čas v mislih. Včasih mu rečejo tudi "navidezni" veter. Iz slike 14 vidimo, da piha navidezni veter proti vzdolžnici jadrnice pod manjšim kotom kot pravi veter, kadar vozi jadrnica proti vetru. Hitrost navideznega vetra je lahko večja, pa tudi manjša od hitrosti pravega vetra. Dober krmar bo upošteval spremembe, ki nastanejo v navideznem vetru, ko se spreminja hitrost in smer gibanja jadrnice.

Končajmo tole kramljanje z željo, da bi nas čimveč lahko popleti preverilo na jadrnici nekatere od teh ugotovitev.

Zvonko Trontelj

ELAN

Tovarna športnega orodja,
Begunje na Gorenjskem, je
po večletnem prizadevanju
usvojila proizvodnjo treh
tipov jadrnic: T-430 J

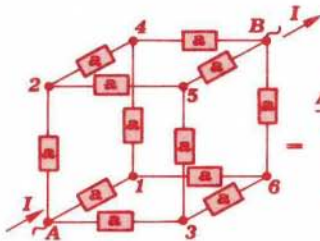
Pasara J

Pasara S

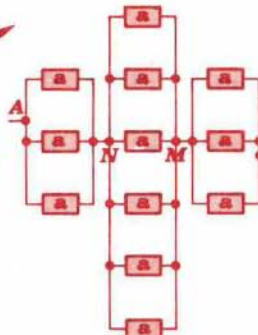


UPOROVNA VEZJA

Če hočemo obravnavati *električne kroge*, moramo poznati *izreke* o napetostih in tokovih. Pogosto nam ni treba pisati enačb, ampak lahko pridemo do rešitve s *premislekom* in domiselnostjo. Zlasti pri iskanju nadomestnih uporov na različne načine vezanih enakih upornikov premislek zelo poenostavi delo. Nekaj zgledov smo povzeli iz članka v reviji za mlade matematike in fizike KVANT, ki izhaja v Sovjetski zvezi. V vseh primerih bomo iskali nadomestni upor za uporovno vezje iz *enakih* upornikov.



SI.1

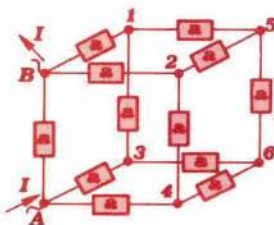


SI.2

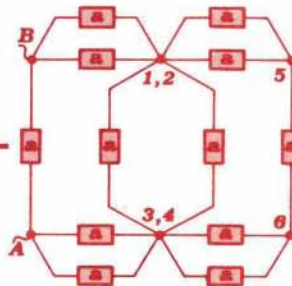


SI.3

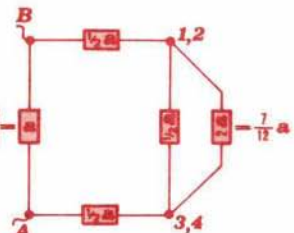
Poglejmo si kocko na sliki 1. Zaradi *simetrije* je očitno, da so napetosti med priključkom A in točkami 1, 2 in 3 *enake*. Zato ne bi stekel po žici, ki bi vezala točke 1, 2 in 3, noben tok. To velja tudi za točke 4, 5 in 6, zato lahko vezje poenostavimo (slika 2). Dobili smo tri skupine *vzporedno* vezanih upornikov,



SI.4



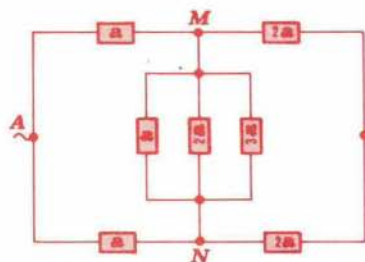
SI.5



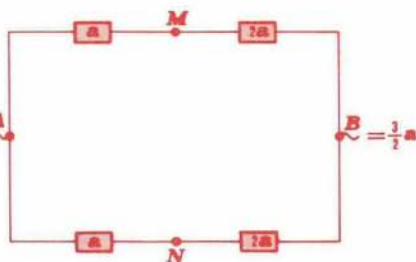
SI.6

ki so zaporedno povezane med seboj. Tudi to hitro uženemo, saj vemo, kakšni so upori vzporedno in zaporedno vezanih upornikov (slika 3). S podobnim premislekom rešimo nalogo na sliki 4 (slika 5 in 6).

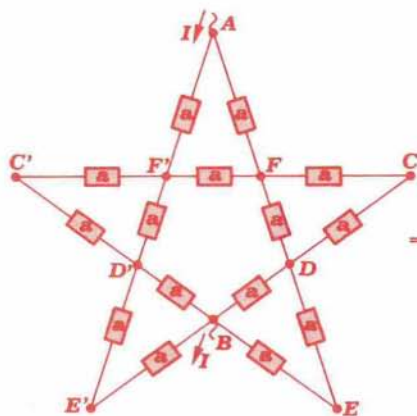
V vezju na sliki 7 vidimo, da je napetost med točkama A in M enaka napetosti med točkama A in N . Zato med M in N ne more teči noben tok. Tako lahko vezje med M in N kar izločimo (slika 8). Rešitev je na dlani. Enako rešimo primer na sliki 9 (slika 10).



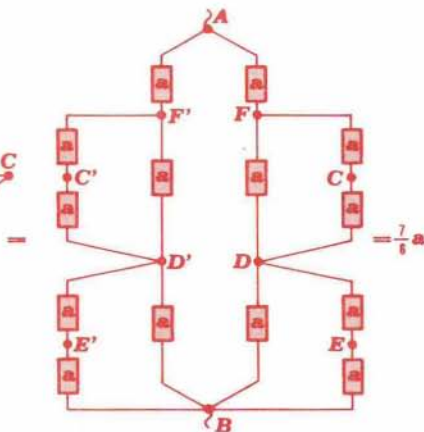
SI. 7



SI. 8

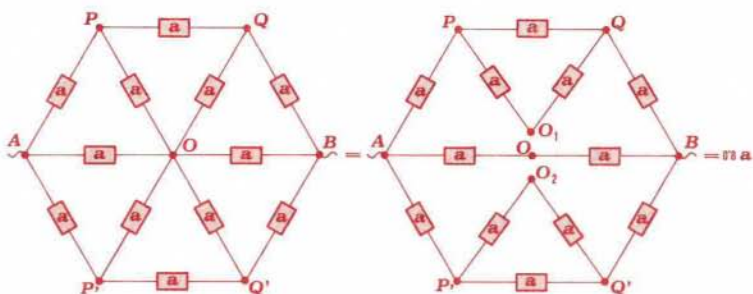


SI. 9



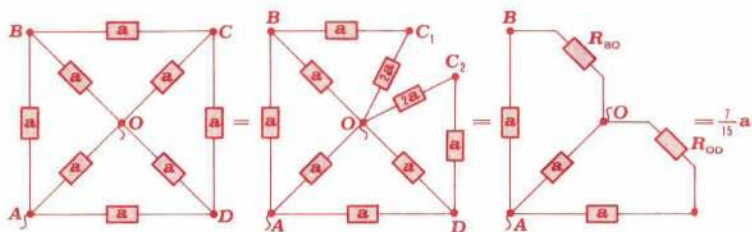
SI. 10

Vezje na sliki 11 ima to lepo lastnost, da ga lahko v točki O razdelimo (slika 12). Napetosti med priključoma A in točkama O_1 ter O_2 sta enaki, enake pa so tudi napetosti med točkami A in P , A in O ter A in P' . Na enak način rešimo tudi primer na sliki 13 (sliki 14 in 15).



SI.11

SI.12

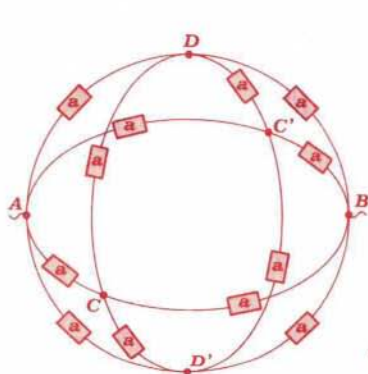


SI.13

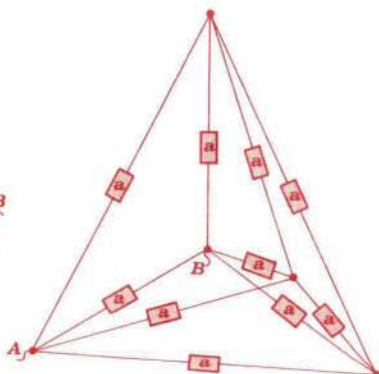
SI.14

SI.15

Poskusite rešiti nalogi na slikah 16 in 17.



SI.16



SI.17

Nekaj podobnih zgledov lahko najdete tudi v zbirki M. Hribar, *Rešene naloge iz fizike z republiških tekmovanj*, Knjižnica Sigma, 21, Ljubljana, Mladinska knjiga, 1975.

Dušan Repovš



NOVE IN SUPERNOVE

Lani smo večkrat brali o novi zvezdi - posebno o tisti, ki se je pojavila v ozvezdju Laboda in jo je med prvimi opazil tudi naš amater Andrej Kuzman. Ta zvezda je močno svetila približno dva dni.

Beseda *nova* (zvezda) je tehnični izraz, ki ga je prvi uporabil Tycho Brahe l. 1572, ko je opazil, da je v ozvezdju Kasiopije nenadoma močno zasvetila zvezda, ki je dotlej ni bilo na nebu. Ta zvezda, ki jo je Tycho Brahe imenoval *Stella Nova*, je ostala vidna osemnajst mesecev, nato pa je izginila. Ob času največjega sijaja je bila svetla kot Venera - to je za Soncem in Luno najsvetlejši objekt na nebu. Ohranjeni zapiski poročajo še o treh podobnih pojavih: l. 1006 v ozvezdju Volka (Lupus), l. 1054 v ozvezdju Bika (Taurus) in l. 1604 v ozvezdju Kačenosca (Ophiuchus).

Pojav nove zvezde, o kateri smo brali lani, ni bil tako dramatičen kot pravkar naštetí pojavi. Zvezdo je bilo mogoče videti z malo boljším daljnogledom že prej; ob času izbruha se ji je povečal sijaj "le" za kakih milijonkrat, medtem ko je bil ta faktor v gornjih primerih vsaj tisočkrat večji.

Danes imenujemo zvezde, ki zasvetijo tako veličastno kot *Stella Nova*, *supernove*, zvezde, katerih sijaj se ob izbruhu poveča le od nekaj stokrat do milijonkrat pa *nove*. Nove se pojavljajo mnogo bolj pogosto kot supernove. Računajo, da zasveti supernova v naši Galaksiji v povprečju enkrat vsakih štiristo let, medtem ko so opazili v zadnjih šestdesetih letih okrog 150 nov - to je dve do tri na leto. Eksplozije nov in supernov opazujejo danes tudi v drugih galaksijah, ki so od nas oddaljene milijone in milijone svetlobnih let. Posebno zanimive so eksplozije supernov, saj svetijo ob izbruhu skoraj tako močno kot

galaksije, ki jim pripadajo (v povprečni galaksiji je sto milijard zvezd - to je približno toliko kot je žitnih zrn v sto vagonih žita). Do danes so opazili že nekaj sto nov in preko sto supernov.

Če bi pregledali zapiske astronomov o novah, bi dobili približno tole sliko o povprečni "novi". Pred eksplozijo se zvezda ne razlikuje od ostalih zvezd; sveti za spoznanje močnejše kot Sonce in ima na površini nekoliko višjo temperaturo. Ob eksploziji se ji sijaj naglo poveča, upade pa pri nekaterih novah v nekaj dneh, pri drugih pa v nekaj mesecih ali celo letih. Pri nekaterih novah se izbruh periodično ponavljajo. Čas med zaporednimi izbruhi je tem daljši, kolikor sijajnejša je zvezda ob izbruhu. Nekateri astronomi menijo, da so vse nove periodične, le da najmočnejših še nismo dovolj dolgo opazovali, da bi opazili ponavljanje. Če v spektrografu razklonimo svetlobo zvezde v spektrum (= mavrico), lahko iz zastopanosti posameznih barvnih sestavin sklepamo na to, v kakšnem stanju je bila snov, ko je izsevala svetlobo. Pri novah so ugotovili, da je svetloba ob času največjega sija taka, kot jo oddaja močno segret razredčen plin. Dejstvo, da gre za razredčen plin, podpirajo še fotografije po izbruhu, na katerih vidimo, da se nova resnično napihne. V zadnjem času so odkrili, da ima mnogo nov zvezdo-spremljevalko, s katero krožijo v tesnem paru. Ker je tako spremljevalko pri zelo oddaljenih zvezdah težko odkriti, so mnogi astronomi mnenja, da so vse nove dvojne, le da za nekatere posebno težavne primerе dvojnost še ni potrjena z opazovanji.

Kaj pravijo o novah teoretiki? Pomemben podatek je, da se izbruh pri novah periodično ponavljajo. To pomeni, da izbruh zvezde ne spremeni bistveno. Z analizo svetlobe in fotografij nove je mogoče ugotoviti, da se sprosti v plinski oblak le desettisoči do milijonti del mase zvezde in da ta plin odnese stotino notranje energije. Plin torej nosi za svojo maso nesorazmerno veliko količino energije, ki jo lahko dobi le, če se v njem sprožijo jedrske reakcije. Najverjetnejši ključ za razumevanje tega nesorazmerja je obstoj zvezde spremljevalke. Kaže, da pritlikava spremljevalka potegne nekaj snovi od večje zvezde (že omenjeni milijonti do desettisoči del njene mase). Ta snov se pri padcu na površje pritlikavke tako segreje, da se sproži jedrska reakcija, ki vpadlo snov še bolj razžari in razpihne v

vroč oblak, kakor ga vidimo na fotografijah.

Kaj pa supernove? Njihove eksplozije so nekaj tisočkrat močnejše od eksplozij nov. Masa, ki je udeležena pri eksploziji, je skoraj celotna masa zvezde. Tako močna eksplozija seveda zvezdo popolnoma spremeni. Večji del zvezde se ob eksploziji razpihne v oblak, ki sveti in se še dolgo zatem širi v vesolje. Od prvotne zvezde z maso, ki je nekajkrat večja od sončne mase, ostane le pritlikavka z radijem dobrih 10 km, snov pa je v tej zvezdi tako neznansko gosta, da je njena masa še vedno približno enaka masi Sonca. Če bi lahko prinesli tako snov na Zemljo in bi iz nje naredili tiskarsko barvo, bi pika na koncu stavka tehtala nekaj sto ton. S tem pa nenavadnih lastnosti male zvezde še ni konec. Zvezda se zelo hitro vrti okrog svoje osi (od doslej znanih se najhitrejša obrne 33 krat v sekundi) in se obnaša kot neznansko močan, vrteč se magnet. Zaradi tega oddaja zvezda radijske valove v izredno enakomernih sunkih. Po tem so zvezdi dali ime *pulzar*.

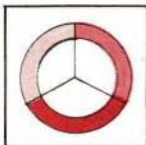
Še bolj kot pulzar, ki je edini trdni ostanek po eksploziji supernove, je morda pomemben oblak, ki je ostal po eksploziji. Ta se počasi razprši po prostoru, njegova masa pa še vedno zadošča za nekaj Sonc. Prav ta snov se po dovolj dolgem času umiri in ohladi in predstavlja surovino za nastanek mladih zvezd. Tudi Sonce in planeti so verjetno nastali iz take snovi, kajti samo ob eksploziji supernove so temperature dovolj visoke, da lahko nastajajo elementi, ki so težji od železa. Vse zlato, srebro, uran, svinec itd., ki ga imamo danes na Zemlji, izvira od veličastne eksplozije supernove, ki se je zgodila pred petimi ali več milijardami leti v tem delu vesolja.

Andrej Čadež

NALOGA O OVCI

Ovca je na travniku privezana z vrvjo na kol. Prvi dan popase vso travo, ki je v krogu, katerega polmer je dolžina vrvi. Drugi dan privežemo ovco na isti kol. Ker je prejšnji dan popasla vso travo v krogu, moramo vrv podaljšati. Koliko mora biti dolga vrv drugi, tretji, ... dan, da bodo ploščine, ki jih popase ovca, enake ploščini prvega dne? (Predpostavljamo, da je trava povsod enako gosta).

Karel Šmígoe



PREMISLI IN REŠI

Za nalogo šest točk iz Preseka III/2 smo dobili 86 rešitev, od teh je bilo 8 nepravilnih. Nalogo so pravilno rešili:

Oliver Avsec, osn. š. Bičevje, Ljubljana; Bojan Avenik, gimnazija, Jesenice; Igor Bahovec, osn. š. A. Kebeta, Ljubljana; Janko Brajnik, gimnazija, Koper; Vitomir Bric, D. d. Peter Skalar, Tolmin; Nataša Bučar, Novo mesto; Lučka Celarc, Biotehniška fakulteta, Ljubljana; Silva Čačovič, osn. š. Murska Sobota; Janez Češnjever, II. gimnazija, Ljubljana; Igor Dolinšek, gimnazija, Trbovlje; Janez Drobnič, gimnazija - Poljane, Ljubljana; Iztok Emeršič, osn. š. Martin Konšak, Maribor; Peter Fajfar, gimnazija, Jesenice; Zmagoslav Fras, gradbeni šolski center, Maribor; Janez Galzinja, gimnazija, Kranj; Viljana Gašparin, D. d. Peter Skalar, Tolmin; Breda Gobec, osn. š. M. Konšak, Maribor; Miro Golobič, gimnazija, Novo mesto; Franc Gorup, gimnazija Ajdovščina; Barbara Gradišek, gimnazija, Kamnik; Marko Hojan, gimnazija, Velenje; Vid Jeršan, osn. š. dr. Jože Potrč, Ljubljana; Dušan Jesenšek, gimnazija, Tolmin; Peter Jovanovič, Šenčur; Igor Jurinčič, osn. š. Elvire Vatovec Prade, Koper; M. Kadenšek, pedagog. šolski center, Celje; Stanko Kajba, gimnazija, Celje; Milojka Kofol, gimnazija Poljane, Ljubljana; Marko Kogoj, gimnazija, Jesenice; Zdenka Kojnik, gimnazija, Celje; Marjan Koren, gimnazija, Koper; Vera Kovačič, gimnazija, Celje; Ivan Kresnik, gimnazija, Ravne; Marko Majer, gimnazija, Celje; Danilo Marinšek, elektrotehnična šola, Ljubljana; Vojko Matko, elektrotehnična šola, Velenje; Darja Menard, osn. š. J. Mihevca, Idrija; Joško Mesarič, osn. š. Majde Vrhovnikove, Ljubljana; Bernard Nežmah, I. gimnazija, Ljubljana; Nada Obad, gimnazija, Koper; Mirela Pahor, gimnazija, Tolmin; Brane Penca, gimnazija, Novo mesto; Marija Pekolj, TŠ KMP, Ljubljana; Boris Petelin, gimnazija Koper; Tine Petkovšek, gimnazija Poljane, Ljubljana; Nevenka Petrič, Metlika; Marinka Pilpahr, gimnazija, Celje; Vinko Pišek, osn. š. Cirkovce; Vera Pogačar, gimnazija, Velenje; Miran Pravdič, osn. š. Dravograd; Gorazd Pristov, Jesenice; Tomaž Schara, osn. š. Bičevje, Ljubljana; Jernej Sluga, gimnazija Poljane, Ljubljana; Milan Stavanja, osn. š. M. Konšak, Maribor; Ivan Stojmenovič, gimnazija J. J. Zmaj, Odžaci; Marija Šolar, gimnazija, Kranj; Miran Špelič, osn. š. Zvonka Runka, Ljubljana; Igor Štefanec, I. gimnazija, Maribor; Iztok Takač, I. gimnazija, Maribor; Lojze Trček, osn. š. I. Cankar, Vrhnika; Zvone Trtnik, VI. gimnazija, Ljubljana; Jelena Vilman, osn. š. Koroška Bela; Jasna Vitez, gimnazija, Postojna; Pavel Zatler, TŠ, Ljubljana; Vincenc Žitnik, TŠ, Ljubljana; Stane Bobek, gimn. pedagoške smeri, Celje; Borut Guzej, gimnazija pedagoške smeri, Maribor; Drago Elikan, TŠ, Ljubljana; Alenka Keršmanc, gimnazija, Kamnik; Karmen Kompara, osn. š. Drago Bojc, Vipava; Tomaž Košir, osn. š. Simon Jenko, Kranj; Bogdan Paternoster, gimnazija Poljane, Ljubljana; Marko Paternoster, osn. š. Polje, Ljubljana; Igor Plemenitaš, TŠ, Celje; Pavel Troha, gimnazija, Idrija; Anita Veternik, Kranj; Tatjana Welzer, I. gimnazija, Maribor; Fani Žnidaršič, srednja ekonomska šola, Ljubljana; Mirza Šabovič, gimnazija M. Zidanška, Maribor; Bernarda Drganc, gimnazija, Stična; Barbara Špička, gimnazija M. Zidanška, Maribor;

Izžrebani so bili: Miro Golobič, Novo mesto

Vinko Pišek, Cirkovice

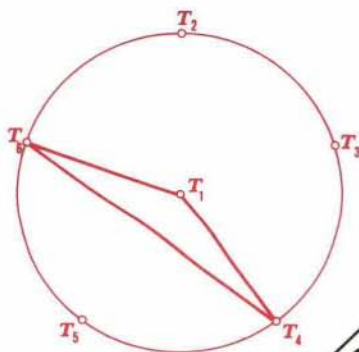
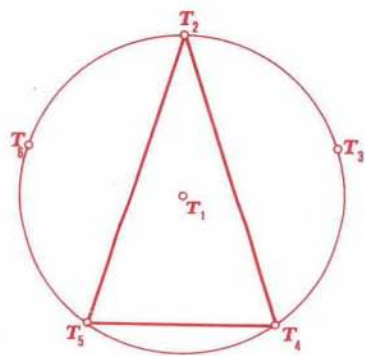
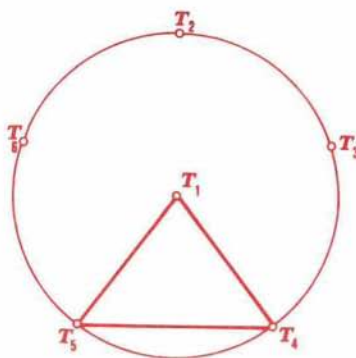
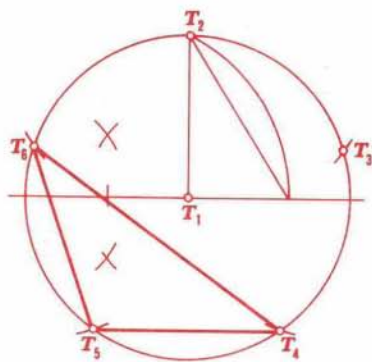
Marija Pekolj, Ljubljana

Za nagrado prejmemo knjigo: Rajko Jamnik, *Teorija iger*, ki je izšla v knjižnici Sigma

Objavljamo rešitev, ki jo je poslal Iztok Takač iz Maribora:

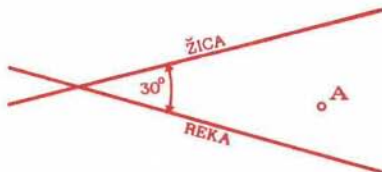
Načrtam krog in mu vrišem pravilni peterokotnik. Za točke, ki so oglišča peterokotnika in za točko, ki je središče kroga, velja, da poljubne 3 točke določajo enakokrak trikotnik. Dobimo pa 4 vrste enakokranih trikotnikov:

Načrtati je seveda možno 20 trikotnikov ($4 \cdot 5 = 20$).



KUPON
4

Telegrafske žice sekajo reko pod kotom 30° . Partizan, ki je v točki A, bi rad čimprej prerezal žice, vendar mora spotoma napojiti na reki konja. Poišči najkrajšo pot.



Ljubo Kostreva

Vsem reševalcem mnogo uspeha in prijetne počitnice. Rešitve pošljite do 1. junija 1976.

Jože Dover

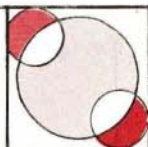
KOLIKO VŽIGALIC JE V ŠKATLICI?

Za tole igrico potrebuješ le škatlico vžigalic in prijatelja, ki je voljan sodelovati. Naročiš mu, naj od 50 vžigalic, kolikor jih je v škatlici, pusti v škatlici toliko vžigalic, kolikor ga je volja. Prešteje naj jih, seveda tako, da ti ne vidiš. Nato naj odvzame od vsebine škatlice še toliko vžigalic, kolikor znaša številčna vsota. N. pr. če je pustil v škatlici 27 vžigalic, jih bo odvzel še 9, tako da jih ostane 18. Nato izroči zaprto škatlico tebi, ti jo malo potreseš in ugotoviš, koliko je še vžigalic.

Kako? Recimo, da je v škatlici prijatelj najprej pustil $10a + b$ vžigalic (a pomeni število desetnic in b enic). Številčna vsota, ki jo odvzame, je enaka $a + b$, tako da ti dobiš v roke škatlico z $9a$ vžigalicami. Možnosti je tedaj šest: 0, 9, 18, 27, 36, 45. S prav malo posluha in vaje boš zlahka ugotovil, katero od zgornjih števil vžigalic škreblja po škatlici.

Peter Petek

OBEMERICI
1975
KUPON
1976
REŠI



MERJENJE GOSTOTE TEKOČIN

Mogoče ste že slišali indijsko pravljico o preprostem fantu, ki je stehal slona pri eni izmed mnogih preizkušenj, ki jih je moral prestati. Slona je zapeljal na čoln in na eni steni zaznamoval gladino vode. Nato je znosil na čoln toliko kamenja, da se je čoln znova potopil do značke. Kamenje je seveda stehal brez težav.

Znamo si razložiti njegovo tehtanje. Plavajoča telesa so vselej potopljena toliko, da vzgon uravnoveša težo telesa. Če telo dodatno obtežimo, se še nekoliko potopi do novega ravnesja.

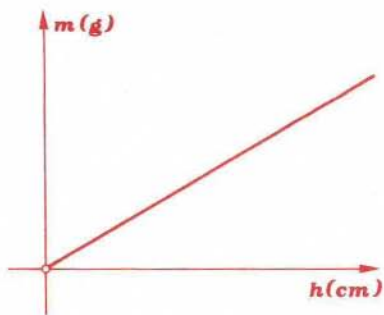
To spoznanje lahko uporabimo za določanje gostote kapljevín. Za merilno napravo - našo tehniko potrebujemo prazno fiolo C-vitamina, kos milimetrskega papirja, lepilo in nekaj peska ali šiber, namesto uteži pa uporabimo kovance za 5 par, ki imajo maso natanko po 1 g. Milimetrski papir odreži po centimetrskih črtah tako, da se bo zvit v valj natanko prilegal notranji steni fiole. Da boš lažje odčitaval ojači centimetre črte, ki bodo v fiole vzporedne z robom, in označi skalo tako, da bo ničla pri dnu fiole, lahko pa tudi drugače.

Preizkusi napravo in način merjenja z določitvijo gostote vode, za katero vemo, da je 1g/cm^3 .

Natresi v fiolo nekaj peska ali šiber, da bo plavala fiola v vodi stabilno v navpični legi, in odčitaj na milimetrski skali lego gladine vode. Nato dodaj nekaj kovancev in odčitaj novo lego gladine. Vzemimo, da smo dodali kovance s skupno maso m in se je zato fiola potopila za h . Teža dodatno izpodrinjene vode $F_g = \pi r^2 h \rho g$ je uravnovesila težo uteži $F_g = mg$.

Iz enačbe

$$\pi r^2 h \rho g = mg$$



Sl.1

izračunamo gostoto

$\rho = m/(\pi r^2 h)$. Zunanji radij fiole r lahko izmerimo s kljunastim merilom, lahko pa ga določimo tudi posredno, tako da izmerimo dolžino vrvice, ki jo na tesno nekajkrat ovijemo okoli fiole.

Ko ste uspešno izmerili gostoto vode, se lahko igrate naprej. Mogoče bi bilo zanimivo vedeti, kolikšna je

lahko največ gostota slane ali osladdkane vode ali za koliko se razlikujeta gostoti vroče in hladne vode.

Napravo lahko uporabimo tudi za tehtanje. Najprej tehtnico umerimo. Polagajmo v fiolo zaporedoma enega, dva, tri ... kovance in vsakič odberimo, za koliko je potopljena fiola! Izmerke vnesemo v diagram: kot ordinate vzamemo maso kovancev, kot abscise pa globine (sl. 1). Z diagrama, ki nam ponazarja enačbo

$$m = \rho \pi r^2 h,$$

lahko odčitavamo maso neznanih predmetov, ki jih polagamo v fiolo. Premisli, kako bi uporabil tehtnico tudi za tehtanje drugih sil!

Tomaž Fortuna

KROŽNO RAZMIŠLJANJE

Na krožni stezi poteka avtomobilsko tekmovanje za Grand Prix Blatne vasi. Srečko Presečko je opazil, da je število avtomobilov na stezi enako vsoti tretjine avtomobilov pred modrim avtom in treh četrtin avtomobilov za modrim avtom.

Koliko avtomobilov je tekmovalo?

Odgovor: 13

Tomo Pisanski



ZNANSTVENA METODA*

Na sprejemnem izpitu je moral študent pojasniti, kako bi izmeril z barometrom višino nebotičnika. Nanizal je več možnosti:

1. Odnese bi barometer na vrh stavbe, ga navezal na dolgo vrv in ga spustil do ulice, potem pa izmeril dolžino vrvi.
2. Odnese bi barometer na vrh stavbe in se nagnil čez rob. Spustil bi barometer, da bi prosto padel, in s štoparico izmeril čas padanja. Iz formule $s = at^2/2$ bi izračunal višino.
3. Ob sončnem dnevu bi izmeril dolžino sence navpično postavljenega barometra in dolžino sence nebotičnika. Višino stavbe bi določil iz sorazmernosti med dolžinama senc.
4. Vzel bi barometer in se napotil z njim po stopnicah. Barometer bi pokladal po steni navzgor in določil višino stavbe.
5. Potrkal bi na hišnikova vrata v pritličju in mu takole predlagal: "Imam lep barometer. Če mi poveste višino tele hiše, vam ga dam".

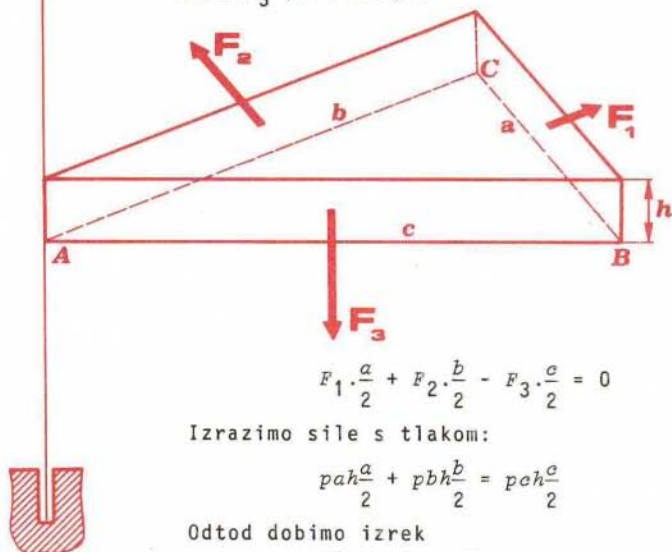
Študent je bil sprejet, češ da ve "pravo" metodo, ki jo je mislil profesor. Toda ves je še pod vtisom šole, kjer so ga učili znanstveno razmišljati in natančno raziskovati globoko notranjo logiko stvari, kot se to pogosto dela v novi matematiki, niso pa ga učili stvari same.

Marjan Hribar

*Povzeto iz članka: Alexander Calandra, *Angels on a pin*, Saturday Review, 21. 12. 1968

FIZIKALNI DOKAZ PITAGOROVEGA IZREKA*

Vzemimo pokončno prizmo, ki ima za osnovno ploskev pravokotni trikotnik ABC s stranicami a , b , c . Višino prizme označimo s h . Posoda naj bo vrtljiva okoli navpičnega roba nad ogliščem A , v katerem se stikata hipotenuza in ena od katet trikotnika ABC . Napolnimo posodo s plinom do tlaka p_0 . Plin pritiska na stene posode s silami $F_1 = ahp$, $F_2 = bhp$, $F_3 = chp$, ki so pravokotne na steno posode. Sile so v ravnovesju, saj glede na izbrano os posoda miruje. Prav tako so v ravnovesju tudi navori teh sil glede na izbrano os. Sili F_1 in F_2 vrtita posodo v eno smer, sila F_3 pa v drugo:



$$F_1 \cdot \frac{a}{2} + F_2 \cdot \frac{b}{2} - F_3 \cdot \frac{c}{2} = 0$$

Izrazimo sile s tlakom:

$$p a h \frac{a}{2} + p b h \frac{b}{2} = p c h \frac{c}{2}$$

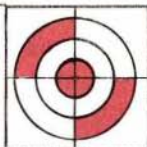
Odtod dobimo izrek

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

ki ga imenujemo po *Pitagori*, zgodovinarji pa trdijo, da so ga poznali že dosti pred njim.

Dušan Repovš

* Povzeto po knjižici Kogan B.J. - *Vloga mehanike v geometriji*, Nauka, Moskva 1965 (v ruščini)



POROČILO S TEKMOVANJ NAJMLAJŠIH MATEMATIKOV ZA VEGOVA PRIZNANJA

V 6 JUŽNOPRIMORSKIH OBČINAH (ILIRSKA BISTRICA, IZOLA, KOPER, PIRAN, POSTOJNA IN SEŽANA).

Srebrna Vegova priznanja 17. maja 1975

Osnovnošolci so pokazali, da so vredni pomoči in prizadevanj delovnih organizacij, ki so letos prevzela pokroviteljstvo nad tekmovanji.

Tekmovali so učenci 6., 7. in 8. razredov osemletk in sicer:

- iz 6. razredov ... 95 učencev; Srebrni znak prejelo ... 28 uč.
- iz 7. " ... 88 " ; " " " ... 27 "
- iz 8. " ... 91 " ; " " " ... 23 "

Naloge so bile precej zahtevne. Kakor vsako leto, uspejo le tisti učenci, ki jim matematika ni le šolski predmet. Navadno se pokaže na takih tekmovanjih tudi sposobnost učitelja, da pravilno vodi svoje učence, ki kažejo voljo do "zabave" z razmišljanjem.

Letos so bili tekmovalci lahko zadovoljni tudi s pozornostjo pokroviteljev: v Izoli članov kolektiva Mehanotehnike, v Kopru Iplasa in obeh bank: Kreditne banke in filiale Ljubljanske banke. Poleg reklamnega materiala, ki so ga razdelili med vse tekmovalce, so najboljši prejeli tudi praktična darila. Kolektivi so poslali svoje zastopnike, ki so obdarovali učence in jim zaželeli uspeh pri delu. Po tekmovanju so si učenci iz Izole in Kopra ogledali pod strokovnim vodstvom sodelavcev tovarne Mehanotehnike njihove obrate. Otroci so bili te pozornosti zelo veseli. Po končanem ogledu so se vrnili na šole, kjer so tekmovali. Tam so razdelili pokrovitelji še svoja darila najboljšim tekmovalcem.

Zlata Vegova priznanja 30. maja 1975

Nad 50% možnih točk so dosegli in zato prejmejo zlata Vegova priznanja:

	<u>št.točk</u>
1. Marko Lovrečič, osn. šola Dušana Bordona-Semedela Koper	24
2. Irena Fabič, osn. šola Janka Premrla-Vojka, Koper	23
3. Boris Petelin, osn. šola Vojke Šmuc, Izola	16
4. David Jazbec, osn. šola Dušana Bordona-Semedela Koper	15
5. Bojan Grlj, osn. šola Pinka Tomažiča, Koper	13
6. Judita Tome, osn. šola Srečka Kosovela, Sežana	13
7. Dušanka Ljubič, osn. šola Postojna	13
8. Neda Primc, osn. šola Vojke Šmuc, Izola	13

Vsi tekmovalci so prejeli lepa spominska darila kot spomin na udeležbo: knjigo dr. Vidava "Rešeni in nerešeni problemi matematike", značke podjetja "Center", denarnice podružnice Ljubljanske banke in druge spominčke podpornih ustanov (Mehanotehnike, Kreditne banke Koper). Vsi udeleženci so bili povabljeni po tekmovanju na kosilo v Izolo v Stavbenikovo menzo. Po kosilu so se učenci vrnili v šolo, kjer je bila razglasitev rezultatov in razdelitev daril najboljšim tekmovalcem.



Udeleženci občinskega tekmovanja za srebrni Vegov znak, Koper, 17. maja 1975
Na sliki so dobro vidni nagrajenci, ki imajo v rokah praktična darila - prispevek podjetja "Iplas".

Lovrečič je bil izbran tudi v ekipo, ki je predstavljala republiko Slovenijo na zveznem tekmovanju mladih matematikov v Banji Koviljači.

Prvič, odkar Slovenija sodeluje na zveznem tekmovanju, sta bila določena dva zastopnika tudi s Primorske. Ker smo se namreč letos prvič odločili, da bodo tudi sedmošolci sodelovali na zveznem tekmovanju (ostale republike so to delale že prejšnja leta), smo izbrali štiri najboljše tekmovalce iz sedmih razredov izmed tistih, ki so na občinskih tekmovanjih dosegli vse možne točke. To ni bilo težko, ker so po vsej Sloveniji na občinskih tekmovanjih reševali enake naloge.

Pokrovitelj republiškega tekmovanja podjetje "Center" se je s spominsko knjigo spomnil mentorjev - učiteljev sodelujočih tekmovalcev. Po končanem tekmovanju jih je povabil na skupno kosilo. Taka pozornost pokrovitelja in podjetij je navdušila vse sodelujoče. Prepričani smo, da bodo tekmovalci kmalu dokazali, da so bili vredni te pozornosti.

Učitelji so občutili, da se še kdo zanima in jih podpira pri težkem delu z mladino. Tako sodelovanje med društvom matematikov, fizikov in astronomov, šolo in družbo je toliko bolj potrebno v zadnjem času, ko neprestani razvoj znanosti potrebuje povezavo s prakso. Iz vrst tekmovalcev pa moramo poskusiti vzgojiti bodoče učitelje matematike in fizike, ki nam jih vedno več manjka.

Bogomila Kolenko

"NOVO RAČUNSTVO"

Pred letom dni je Juretov oče kupil avtomobil. Takratna cena vozila je bila točno 30.000.-din. Kar precej velik znesek! Do danes pa so se ti avtomobili podražili kar za 10.000.-din. Tako je oče prihranil 10.000.-din. Če od izdatka odštejemo prihranek, pomeni, da je za vozilo dal le še 20.000.-din. Prav toliko pa je dobil posojila pri Ljubljanski banki. Če ne bi moral plačati 20% pologa, bi dobil avto povsem zastonj, tako pa ga je stal le 4.000.-din. Skoraj zastonj! Kje je napaka?

Ciril Velkoverh

PREDTEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Predtekmovanje je bilo v soboto, 13. marca 1976, ob 9^h. Trajalo je dve uri.

Naloge za predtekmovanje iz matematike za srednješolce je izbrala tekmovalna komisija za republiško tekmovanje mladih matematikov na sestanku 26. februarja 1976.

Razpis vseh tekmovanj smo poslali na 60 srednjih tehniških šol in gimnazij. K predtekmovanju, ki je bilo potreben pogoj za sodelovanje na republiškem tekmovanju, se je prijavilo 36 šol. Poročila o rezultatih s predtekmovanja nam je poslalo 29 šol. Skupno je tekmovalo okoli 1180 dijakov, kar je več kot smo pričakovali.

Naloge s predtekmovanja:

I. RAZRED:

1. Dijaki v nekem razredu se ukvarjajo s tremi športi: s košarko se jih ukvarja 60%, z odbojko 40% in z roketom 30%; pri tem se s košarko in odbojko ukvarja 15% dijakov, s košarko in roketom 10%, ter z odbojko in roketom 20%. Z vsemi tremi športi pa se ukvarja 5% od vseh dijakov. Kolik je odstotek dijakov, ki se ne ukvarjajo z nobenim od teh športov? Koliko pa se jih ukvarja samo s košarko, koliko samo z roketom in koliko samo z odbojko?

2. Dokaži, da je za vsako naravno število n produkt $n^2(n^4 - 1)$ deljiv s 60!

3. Kako bi konstruiral simetralo kota med dvema nevzporednima premicama v ravnini zvezka, če njunega presečišča ni na papirju? Utemelji konstrukcijo!

4. Poišči vse pare naravnih števil m, n , ki zadoščajo enačbi:

$$1 + 1.2 + 1.2.3 + \dots + 1.2.3 \dots (n-1).n = m^2$$

II. RAZRED:

1. Reši enačbo:

$$2 \log 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \log 3 - \log(\sqrt[3]{3} + 27) = 0$$

2. Dokaži, da je kot med višino in simetralo kota iz istega oglišča trikotnika enak polovični razliki kotov ob nasprotni stranici.

3. V krogu je dana tetiva t . Konstruiraj tej tetivi vzporedno tetivo tako, da jo bosta polmera, ki pripadata krajiščema dane tetive, delila na tri enake dele!

4. Naj bosta a in b taki pozitivni racionalni števili, da je tudi vsota $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ racionalno število. Pokaži, da sta tedaj tudi $\sqrt{a}$ in $\sqrt{b}$ racionalni števili.

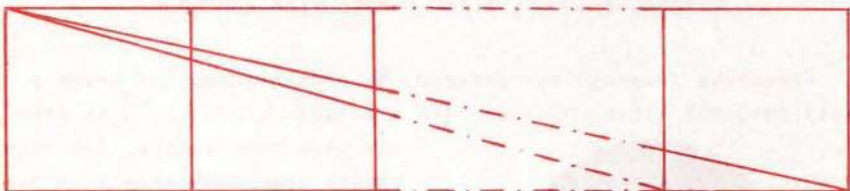
III. RAZRED:

1. Poišči množico tistih števil x , ki ustrezajo neenačbi:

$$x|x| + |x| + 2|x-1| - 2 < 0$$

2. Določi rezultanto sil, ki delujejo pravokotno na mejne ploskve pravilnega tetraedra (tetraedra), proti notranjosti telesa in so sorazmerne s ploščinami ploskev.

3. Postavimo n enakih kvadratov v vrsto drugega poleg drugega, kot kaže slika:



Izračunaj kot, ki ga oklepata zveznici levega zgornjega oglišča prvega kvadrata, s spodnjima ogliščema n -tega kvadrata!

4. Gozd ima obliko kvadrata s površino 1 km^2 . V njem raste 4500 hrastov s pol metra debelimi debli. Pokaži, da v tem gozdu obstaja pravokotnik dimenzij $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$, na katerem ni drevesa!

IV. RAZRED:

1. Izračunaj:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

2. Naj bodo α , β in γ taka različna števila med 0 in $\frac{\pi}{2}$ (koti med 0 in 90 stopinjami), da sta zaporedji α , β , γ in $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$, $\cos^2 \gamma$ aritmetični. Poišči število (kot) β !

3. Izračunaj vsoto vseh števil v tabeli:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 4, & 8, & \dots & 2^n \\ 2, & 4, & 8, & 16, & \dots & 2^{n+1} \\ 4, & 8, & 16, & 32, & \dots & 2^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^n, & 2^{n+1}, & 2^{n+2}, & 2^{n+3}, & \dots & 2^{2n} \end{array}$$

4. Enakostraničen trikotnik razrežemo na več manjših med seboj enakih enakostraničnih trikotnikov. Pokaži, da iz vseh teh manjših trikotnikov ni mogoče sestaviti pravilnega šesterokotnika!

Tiste dijake, ki se tekmovanja niso udeležili, vabimo, da naknadno poskusijo rešiti naloge s tekmovanja.

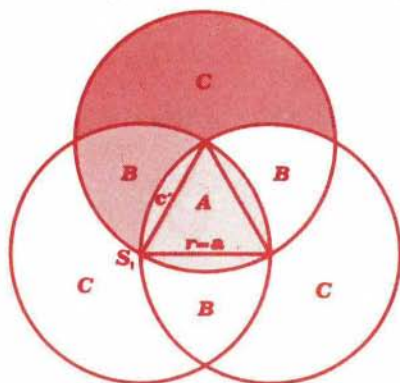
Mirko Dobovišek



NALOGE

IZRAČUNAJMO PLOŠČINO PRESEKOVEGA ZNAMENJA

Presekovo znamenje vsi poznate. Na njem najdemo tri vrste z loki omejenih likov. Označimo jih s črkami A, B, C . Lik A je presek vseh treh krogov, lik B je presek samo dveh krogov, C pa je množica, ki vsebuje elemente (točke) samo enega kroga.



Poizkusimo izračunati ploščino teh likov! Začnimo kar z likom A . Vzemimo, da tvorijo oglišča tega lika enakostraničen trikotnik, katerega stranica je enaka polmeru kroga ($a_{\Delta} = r_0$). Na sliki lahko opazimo, da tvori trikotnik z enim krožnih

odsekov krožni izsek enega krogov. Tako n.pr. tvori trikotnik z odsekom c' izsek kroga s središčem S_1 . Ploščina odseka je torej enaka razliki med ploščino izseka in trikotnika:

$$p_0 = p_i - p_{\Delta} \quad (1)$$

Ploščino enakostraničnega trikotnika poznamo $p_{\Delta} = a^2\sqrt{3}/4$, kaj pa ploščino izseka? To je pa šestina ploščine kroga

$$p_i = \pi r^2/6$$

To vstavimo v (1) in dobimo:

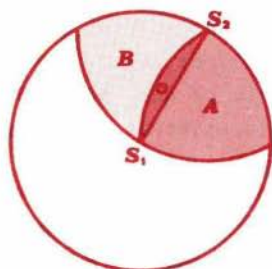
$$\begin{aligned} p_0 &= \pi r^2/6 - a^2\sqrt{3}/4, \text{ ker velja } a = r: \\ p_0 &= (2\pi r^2 - 3r^2\sqrt{3})/12 \text{ ali} \\ p_0 &= (r^2(2\pi - 3\sqrt{3}))/12 \end{aligned} \quad (2)$$

Poglejmo še sliko. Lik A sestavljajo 3 odseki in trikotnik. Ploščina lika A je torej

$$p_A = 3(r^2(2\pi - 3\sqrt{3}))/12 + r^2\sqrt{3}/4$$

enačbo rešujemo: $p_A = r^2(2\pi - 2\sqrt{3})/4$

in nazadnje: $p_A = (r^2(\pi - \sqrt{3}))/2$ (3)



Sedaj pa izračunajmo ploščino lika B . Načrtajmo krog ter izberimo v neki točki krožnice središče novega kroga (sl. 2). Kroga naj bosta med seboj enaka. Tedaj gre krožnica drugega kroga skozi središče prvega (in obratno). Ta lik je podoben liku, ki ga dobimo, če seštejemo lika A in B . Zvežimo središči obeh krogov! Nastala daljica deli lik $A + B$ na dva

skladna lika. Tak lik dobimo tudi, če liku A odštejemo oziroma liku B prištejemo en krožni odsek. Napišimo to:

$$p_A - p_O = p_B + p_O \Rightarrow p_B = p_A - 2p_O$$

V to vstavimo (2) in (3):

$$p_B = (r^2(\pi - \sqrt{3}))/2 - (r^2(2\pi - 3\sqrt{3}))/6 \Rightarrow p_B = \pi r^2/6$$
 (4)

Ploščino lika izračunamo tako (glej sl. 1), da od ploščine kroga odštejemo dvakratno ploščino lika B in ploščino lika A :

$$p_C = p_O - (2p_B + p_A). \text{ Vstavimo (4) in (3):}$$

$$p_C = \pi r^2 - (\pi r^2/3 + (r^2(\pi - \sqrt{3}))/2)$$

enačbo poenostavimo: $p_C = r^2(6\pi - 2\pi - 3\pi + 3\sqrt{3})/6$

in nazadnje: $p_C = r^2(\pi + 3\sqrt{3})/6$ (5)

Za konec izračunajmo še ploščino celotnega Presekovega znamenja. Iz sl. 1 vidimo:

$$p_z = 3p_C + 3p_B + p_A. \text{ V to vstavimo (3), (4) in (5):}$$

(z = znamenje)

$$p_z = r^2(\pi + 3\sqrt{3})/2 + \pi r^2/2 + r^2(\pi - \sqrt{3})/2 =$$

$$= r^2(\pi + 3\sqrt{3} + \pi + \pi - \sqrt{3})/2$$

$$p_z = r^2(3\pi + 2\sqrt{3})/2$$
 (6)

Andrej Grobler

IGRA S TREMI KARTAMI

Na vsaki od treh kart je napisano neko naravno število: p , q ali r . Zanje velja: $0 < p < q < r$. Igralci A , B in C igrajo naslednjo igro: karte zmešajo in razdele med igralce. Vsak dobi toliko kroglic, kolikor znaša število na dobljeni karti. Karte ponovno premešajo in igralci spet dobijo vsak po eno. Nato dobi vsak spet toliko novih kroglic, kolikor piše na karti, in igra se nadaljuje ...

Recimo, da karte dele N -krat ($N \geq 2$). Na koncu igre ima igralec A skupno 20 kroglic, B 10 kroglic in C 9 kroglic. Vemo, da je pri zadnji razdelitvi igralec B dobil r kroglic. kateri igralec je dobil q kroglic pri prvi razdelitvi?

Dušan Repovš

DOLOČIMO OGLIŠČA KVADRATA SAMO S ŠESTILOM

Geometrijske načrtovalne naloge, ki jih rešujemo z običajnim geometrijskim orodjem (ravnalo, trikotnik, šestilo), postanejo mnogo bolj zanimive in zahtevne, če jih poskušamo reševati le z uporabo ravnala in šestila. Že stari Grki so zastavljali, reševali in upoštevali geometrijske konstrukcije, izvedene le z ravnalom in šestilom. Uporaba risalnih trikotnikov za načrtovanje vzporednic in pravokotnic in drugega risalnega pribora je v geometriji novejšega izvora in služi bolj tehnikom in konstruktorjem za hitrejšo delo pri izdelavi načrtov.

Mnogo več miselnega napora in dokazovanja pa je potrebno za reševanje naloge, ki smo si jo zastavili: Nad dano stranico kvadrata (a) določimo njegova oglišča le z uporabo šestila!

Jože Kotnik

MATEMATIČNO RAZVEDRILO



TRIJE SINOVI IN MODREC NA KAMELI

Star Arabec je na smrtni postelji zapustil trem sinovom svoje edino bogastvo, 17 kamel.

"Prvi sin naj dobi polovico, drugi tretjino in tretji devetino", je določil in umrl.

Sinovi so hoteli spoštovati očetovo voljo, a nikakor jim ni uspelo, kamele pa seveda noben pravi Arabec ne bo ubil, da bi jo razrezal in razdelil. Teda j pri jaha na kameli mimo sivolas starec. Povedo mu kako in kaj in ga prosijo za svet.

Starec veli pripeljati vseh sedemnajst kamel in doda čredi še svojo. Potem da prvemu sinu polovico črede, to je devet kamel, drugi dobi tretjino ali šest kamel in tretji sin devetino - dve kameli. Ena kamela še ostane - modrečeva - starec zleze najo in odjezdi, sinovi pa so zadovoljni, ker so tako vestno izpolnili očetovo poslednjo voljo.

Peter Petek

MREZI KVADRATOV IN TRIKOTNIKOV

1. Načrtaj poljuben kvadrat s stranico a . Razpolovi vse štiri stranice in zveži razpolovišča. Stranico dobljenega kvadrata zaznamuj z a_1 . Na ta način nadaljuj delitev do kvadrata s stranico a_2 . Zveži po dve oglišči tega kvadrata z nasprotnim ogliščem prvotnega kvadrata s stranico a . Tako dobiš mrežo pravilne štiristranične piramide. Izračunaj površino in prostornino piramide, ki nastane iz te mreže!
2. Enakostraničnemu trikotniku s stranico a razpolovimo stranice. Zveznice razpolovišč tvorijo zopet enakostraničen trikotnik, katerega stranice zaznamujemo z a_1 . S tako delitvijo nadaljujmo do trikotnika s stranico a_2 . Če zvežemo po dve oglišči tega trikotnika z nasprotnim ogliščem prvotnega trikotnika s stranico a , dobimo mrežo pravilne tristranične piramide. Izračunaj prostornino piramide, ki nastane iz tako dobljene mreže!

Karel Šmigoc

V današnji računski križanki so podatki v ključu ulomki. Na ustrezno mesto v križanki je treba vpisati periodo tega ulomka, to so tiste cifre, ki se v "decimalnem" zapisu ponavljajo. Perioda se v vseh primerih v ključu začne s prvo cifro za "decimalno" vejico, dolžina periode, to je število cifer v periodi, pa je dana v oklepaju zraven ulomka. Križanka seveda ni tako lahka, kot se zdi na prvi pogled. Reševalec ne ve, v katerem številskem sestavu je zahtevana perioda. Zato smo tudi zgornje besede "decimalnem" in "decimalno" dali v navednice. Vsi nastopajoči številski sestavi imajo osnove od 2 do 8. Reševalcu, ki ne ve, kako bi se lotil križanke, lahko namignemo težaško pot reševanja. Če sestavi tabelo period vseh podanih ulomkov v vseh številskih sestavih od 2 do 8, bo že iz dolžin period in z malo sklepanja lahko križanko rešil. To pa zahteva preveč dela. S sprotnim reševanjem si lahko prihrani marsikatero računanje periode. Seveda pa se mora reševalec najprej naučiti, kako poiščemo periodo ulomka v raznih številskih sestavih.

Vzemimo, da je p/q ulomek med 0 in 1: $0 < p < q$. Ta ulomek želimo razviti v obliki

$$p/q = a_1/b + a_2/b^2 + a_3/b^3 + a_4/b^4 + \dots \quad (1)$$

kjer so a_i cifre v številskem sestavu z osnovo b , to je cela števila 0, 1, ..., $b - 1$. Osnova b je naravno število, večje od 1. Če znamo določiti po vrsti $a_1, a_2, \dots$, lahko hitro odčitamo periodo.

Do zapisa (1) vodi več poti. Najenostavnejša je tale: Ulomek pomnožimo z osnovo b in ga pretvorimo v mešano število. Celi del števila je prva cifra a_1 , ostanek pa je pravi ulomek z istim imenovalcem q . S tem postopamo na enak način kot prej. Tako lahko po vrsti določimo vse cifre $a_1, a_2, \dots$. Lahko se zgodi, da so vsi a_i od nekega dalje enaki nič, tedaj ni periode; ali pa se neka skupina cifer v nedogled ponavlja. To pa je potem perioda ulomka v sestavu z osnovo b .

Bolj strogo se da metoda opisati takole. Vzemimo, da smo že

*Križanka je vzeta iz Proteusa, letnik 17 (1954/55), št. 2, str. 61. Takrat je vzbudila precejšnje zanimanje med reševalci.

določili cifre $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ in da imamo ostanek p_i/q , kjer je $0 < p_i < q$. Pri tem vzamemo $p_1 = p$. Ta ostanek ima obliko

$$p_i/q = a_i/b + a_{i+1}/b^2 + a_{i+2}/b^3 + \dots$$

Če ga pomnožimo z b , dobimo

$$p_i b/q = a_i + a_{i+1}/b + a_{i+2}/b^2 + \dots$$

Celi del tega ulomka je a_i , novi ostanek pa je

$$p_{i+1}/q = a_{i+1}/b + a_{i+2}/b^2 + \dots$$

Sedaj je več možnosti:

a) Če je $p_{i+1} = 0$, so vsi nadaljnji $a_{i+1} = a_{i+2} = \dots = 0$. Ulomek je končno "decimalno" število, periode ni.

b) Če je p_{i+1} enak kakemu od prejšnjih $p_1, p_2, \dots, p_i$, na primer $p_{i+1} = p_k$, se postopek konča in perioda ulomka so cifre $a_k, \dots, a_i$.

c) Če pa je p_{i+1} različen od vseh $p_1, p_2, \dots, p_i$, postopek nadaljujemo.

Ker so vsi p_i/q pravi ulomki, števci p_i so torej cela števila med 0 in q , se proces nujno konča, najpozneje po $q-1$ korakih.

Da ne bo preveč teorije, si metodo ogledjmo na zgledu ulomka $3/5$. Poiščimo njegove periode v vseh sistemih z osnovami 2 do 6. Imamo torej $p = 3$ in $q = 5$.

1) $b = 2$

$$\frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}, \quad a_1 = 1, \quad p_2 = 1$$

$$\frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5} = 0 + \frac{2}{5}, \quad a_2 = 0, \quad p_3 = 2$$

$$\frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5} = 0 + \frac{4}{5}, \quad a_3 = 0, \quad p_4 = 4$$

$$\frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}, \quad a_4 = 1, \quad p_5 = 3$$

Ker je $p_5 = p_1$, se začenjajo cifre ponavljati in imamo periodo

1 0 0 1

Ulomek $3/5$ se v dvojiškem sistemu glasi

$$\frac{3}{5} = (0.1001 \ 1001 \ 1001 \ \dots)_2 = (0.\overline{1001})_2$$

2) $b = 3$

$$\frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}, \quad a_1 = 1, \quad p_2 = 4$$

$$\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}, \quad a_2 = 2, \quad p_3 = 2$$

$$\frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}, \quad a_3 = 1, \quad p_4 = 1$$

$$\frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5} = 0 + \frac{3}{5}, \quad a_4 = 0, \quad p_5 = 3$$

Perioda je

1 2 1 0

in

$$\frac{3}{5} = (0.\overline{1210})_3$$

3) $b = 4$

$$\frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}, \quad a_1 = 2, \quad p_2 = 2$$

$$\frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}, \quad a_2 = 1, \quad p_3 = 3$$

Perioda je

2 1

in

$$\frac{3}{5} = (0.\overline{21})_4$$

4) $b = 5$

$$\frac{3}{5} \cdot 5 = 3, \quad a_1 = 3, \quad p_2 = 0$$

Ulomek je končno petiško število

$$\frac{3}{5} = (0.3)_5$$

5) $b = 6$

$$\frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{18}{5} = 3 + \frac{3}{5}, \quad a_1 = 3, \quad p_2 = 3$$

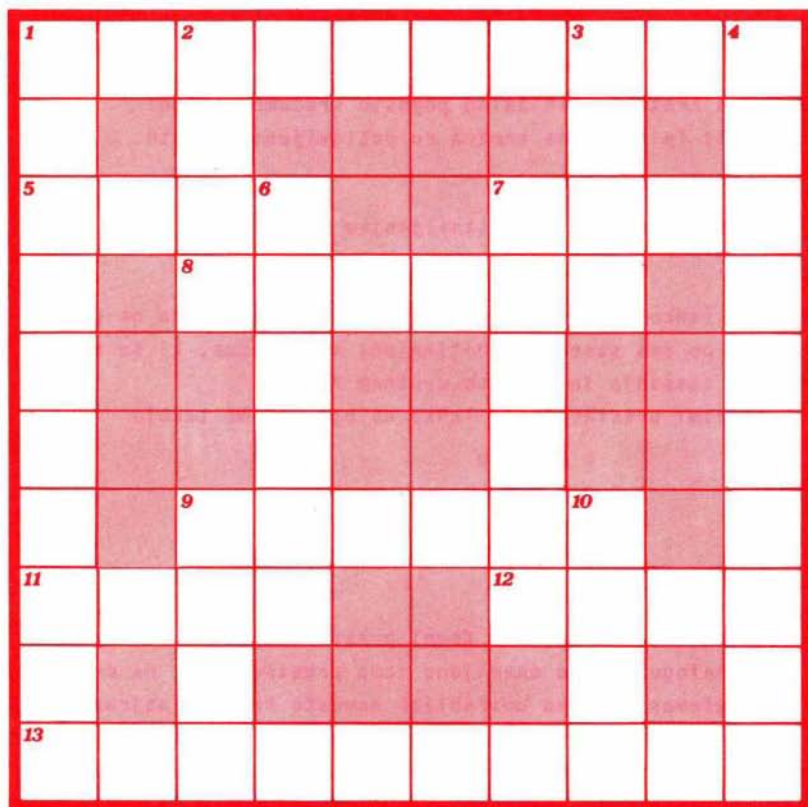
Perioda je

3

in

$$\frac{3}{5} = (0.\overline{3})_6$$

Zdaj pa h križanki.



Vodoravno:

Navpično:

- | | | | |
|--------------|---------------|--------------|-------------|
| 1. 1/11 (10) | 9. 1/7 (6) | 1. 1/11 (10) | 6. 4/13 (6) |
| 5. 2/13 (4) | 11. 3/5 (4) | 2. 6/13 (4) | 7. 5/13 (6) |
| 7. 7/37 (4) | 12. 14/17 (4) | 3. 15/17 (4) | 9. 2/37 (4) |
| 8. 5/7 (6) | 13. 3/11 (10) | 4. 7/11 (10) | 10. 4/5 (4) |

Zvonimir Bohte

NEKAJ PRESTAVLJALNIC

V zbirkah kratkočasnih nalog pogosto srečamo nalogo:
Trije beli in dva črna krožca so postavljeni v vrsto

0 0 0 0 0

Iz nje moramo dobiti s prestavljanjem

0 0 0 0 0

Naenkrat lahko prestavimo na levo ali desno, seveda na prazen prostor, po dva sosednja (dotikajoča se) krožca, ki še naprej ostaneta sosednja in v istem vrstnem redu.

S štirimi prestavljanji lahko nalogo rešimo takole

```
      0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0      0 0 0 0
0 0 0      0 0
0 0 0 0 0
```

1. Poskusi nalogo rešiti s tremi prestavljanji!
2. Reši nalogo, če je dovoljeno samo prestavljanje na desno!
Pri reševanju lahko uporabljaš namesto krožcev najrazličnejše predmete, ki jih imaš pri roki: črne in bele šahovske kmete, kamenčke in koščke opeke ali stekla, gumbe dveh barv ali velikosti, kovance dveh vrednosti, jabolka in hruške, lešnike in orehe, zamaške piva in kokte, itd.

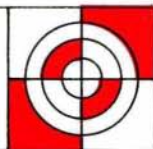
Zastavimo si še nekaj "sorodnih" nalog - nalog, ki imajo ista pravila prestavljanja

- | | | |
|----------------------|------------|-------------------|
| 3. 0 0 0 0 0 0 | prestavi v | 0 0 0 0 0 0 |
| 4. 0 0 0 0 0 0 0 | prestavi v | 0 0 0 0 0 0 0 |
| 5. 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | prestavi v | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |
| 6. 0 0 0 0 0 0 | prestavi v | 0 0 0 0 0 0 |

Nekatere od gornjih nalog so rešljive tudi pri dodatnem pogoju: krožca, ki ju prestavljamo, morata biti različne barve. Katere naloge so to?

Vladimir Batagelj

REŠITVE NALOG



IGRA S KARTAMI - rešitev s strani 204

Recimo, da je igra trajala n krogov (v vsakem krogu razdele karte (in nato kroglice) enkrat): če označimo z a_1 kolikokrat je prejel igralec A po p kroglic, z b_1 kolikokrat je prejel po q kroglic in s c_1 kolikokrat je prejel po r kroglic ter isto naredimo za B (a_2, b_2, c_2) in C (a_3, b_3, c_3), dobimo sistem:

$$20 = a_1p + b_1q + c_1r \quad (1)$$

$$10 = a_2p + b_2q + c_2r \quad (2)$$

$$9 = a_3p + b_3q + c_3r \quad (3)$$

Vemo pa tudi, da velja:

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = n, \quad (4)$$

saj se vsako število (karta) pojavi v vsakem krogu natanko enkrat. Seštejemo enačbe (1), (2) in (3) in upoštevamo (4):

$$39 = n \cdot (p + q + r) \quad (5)$$

Ker je 39 možno razstaviti na prafaktorje na en sam način, in ker sta oba faktorja na desni strani enačbe (5) naravni števili, sledi od tod:

$$\text{I. } n = 3$$

$$p + q + r = 13$$

$$\text{II. } n = 13$$

$$p + q + r = 3$$

I. Upoštevajmo, da velja $0 < p < q < r$. Ker imamo tri korake ($n = 3$) in je B -jeva vsota kroglic 10, je očitno, da je $r \leq 8$, kajti v pogojih naloge piše, da je prejel B v tretjem (zadnjem) krogu maksimalno število kroglic: r . In ker je $p > 0$, je v prvih dveh krogih dobil vsaj dve kroglici (vsakič po eno).

Poglejmo si še igralca A : le-ta je kvečjemu v prvih dveh krogih prejel maksimalno število kroglic r , v tretjem pa gotovo manj. Ker pa je $20 = 2.7 + 6 = 2.8 + 4$ edina dvojica, ki bi nam ustrezala (če vzamemo $r \leq 6$, bi moral biti p ali q vsaj 8, dru-

gače v zadnjem krogu ne dobimo 20 kroglic), pregledamo le njiju:

$$1^0 \quad r = 7$$

potem mora biti $p = 1$ in $q = 2$, da dobimo pri B -ju 10 kroglic. To pa je nemogoče, ker bi moral biti $q = 6$, da bi res C imel 20 kroglic. Torej ta možnost odpade.

$$2^0 \quad r = 8$$

$p = 1$, druge izbire ni in zato je $10 = 1 + 1 + 8$. Očitno je potem $q = 4$. Od tod dobimo potek igre:

	igralec A	igralec B	igralec C
I. krog	r	p	q
II. krog	r	p	q
III. krog	q	r	p

II. Poglejmo si še možnost, ki nam jo ponuja enačba (5). Tako je se vidi, da ne gre: vsota $p + q + r$ je namreč vsaj $1 + 2 + 3 = 6$ zaradi omejitev $0 < p < q < r$.

Odgovor: V prvem krogu je dobil q kroglic igralec C .

Dušan Repovš

Pripomba: Naloga je z 16. mednarodne matematične olimpiade srednješolcev, ki je bila v NDR leta 1974. Na olimpiadi je sodelovalo veliko držav, med njimi tudi naša, ki je zasedla odlično 5. mesto, kar dva naša tekmovalca pa sta prejela prvo nagrado. Zmagala je ekipa Sovjetske zveze. Poleg njih so bili boljši od nas še tekmovalci iz Madžarske, ZRN in ZDA. To je bil največji uspeh jugoslovanskih srednješolcev v zgodovini tekmovanj!

POLJUBNO ŠEVILO S TREMI DVOJKAMI - Rešitev

Presek 3 (1975/76) 138

$$N = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}$$

Na primer

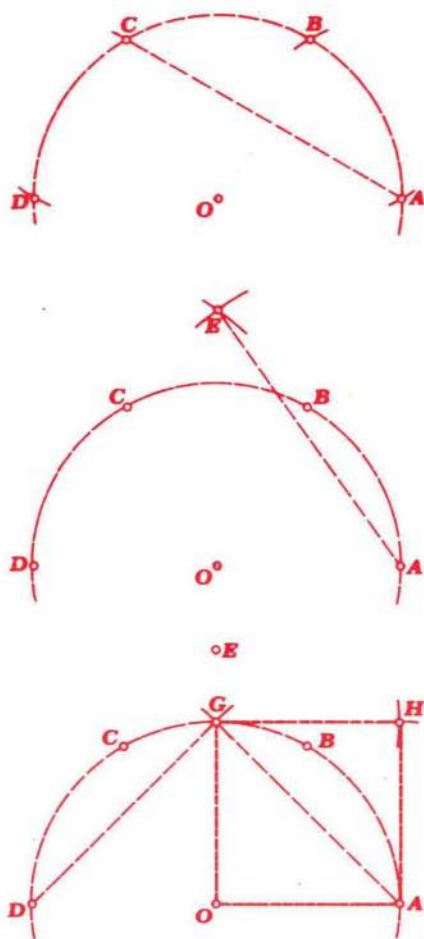
$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \quad ; \quad 4 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} \quad \text{itd.}$$

Zvonimir Bohte

DOLOČIMO OGLIŠČA KVADRATA SAMO S ŠESTILOM
rešitev naloge s strani 44

Šestilo zapičimo v poljubno točko O in načrtamo lok s polmerom enakim dani stranici kvadrata (a). Na lok naneseemo tri polmere $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$. Točke A, B, C in D so oglišča pravilnega šesterokotnika včrtanega krogu s polmerom a . Razdalja $\overline{AC}$ pa je stranica krogu včrtanega enakostraničnega trikotnika, njena dolžina je $a\sqrt{3}$, kar lahko izpeljemo z uporabo Pitagorovega izreka. Iz točke A in iz točke D načrtamo loka s polmerom $\overline{AC}$. Njuno sečišče je točka E . Sedaj pa vzamemo v šestilo razdaljo $\overline{OE}$ in iz točk A in D načrtamo loka, ki se sekata na loku $ABCD$ v točki G , zato ker je

$\overline{OE} = \sqrt{\overline{AE}^2 - a^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$, kar je enako diagonali kvadrata s stranico a . Tako smo določili oglišča A, O in G iskanega kvadrata. Zato da določimo še četrto njegovo oglišče, načrtamo iz A in G loka s polmerom a , katerih sečišče je točka H in naloga je rešena.



Jože Kotnik

Za vsako nalogo obstaja več rešitev. "Lepe" rešitve zahtevajo kar se da majhno število prestavljanj. Upam, da so spodnje rešitve take:

1.a 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0

1.b 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0

1.c 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0

2. Nalogo reši že 1.c, vendar ta rešitev ne zadošča dodatnemu pogoju: eden od prestavljenih krožcev se mora dotikati enega od neprestavljenih krožcev. Zato si oglejmo še nekoliko daljšo rešitev, ki zadošča tudi temu pogoju:

0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0

3. 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0

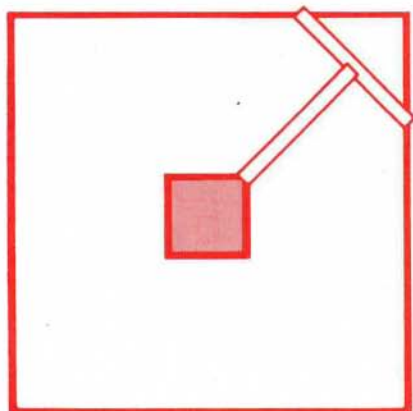
4. 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0

5. 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0

6. 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0

Vladimir Batagelj

		REKLA	NEMŠKI FIZIK (WILHELM CONRAD)	MODEL CIMOSA	ČISTA TEŽA	AMER. PISATELJ (STEPHEN)			VOJAŠKI KRUH	(IZVEDENEC ZA URE	AMER. ZVEZDA DRŽAVA (ORH.)	VAŠ POD KRIMOM	ZVEZDAJI ZAŽARI IN UGAŠNE	Z.IME						
DANSKI ASTRONOM (OLE)		FRANC				MESTO V ZAHODNI SLAVONJI DRŽAVA V ZDA OB PACIFIKU		KUTINA		OREGON		VALEJO		ELEMEN-TARNI DELEC						
TUJE Ž. IME		ANITA				BL. MESTO TURČIJE	DELOVNI SESTANEK		MAX		VA									
KALANICA	ZVEZA TABORNIHOM PREDSEDA ITALIJE (GIOVANNI)		OS. ZAHMEN		MAHOM DELEC SNOVI	YIBA		JAPON. IORA S "KAMNI"		S		P		I		R				
SREMSKA MITROVICA	S	M	Z	T	O	N	A	S		P		I		R		A				
POKLICNI TOVARIŠ	K	O	L	E	G	A	SODELAVEC MARJA PRIEDRICE		E		N		G		E		L			
ATA	O	Č	E	DRŠKA CRKA		E	T	A	RIZEVO ŽIGANJE		S		E		L		S			
SPODNJI DEL POSODE	D	N	O	PREDPIS GEOMET. LIK		N	O	R	M	A	RAZČLEN-VALEC		I		S		T			
ANTENA ZA BREZŽIČNE ZVEZE	L	I	N	K	PRAPRE-VALCI NOVE ZELANDIJE		M	A	O	R	I	MESTO OB PADU V ITALIJI		I		N		G		
TUJA PLOSK. MERA	A	K	E	R	PUJAČA IZ RIŽA		Z	O	L	E	D	E	N	A	S		E		N	
VAS NA KOPRSKEM		O		S		P		ISADORA DUNCAN		LATIN. IME OZVEZDJA LEV		TOMISLAV NERALIČ PIVSKI VZKLIK		T		N		S		
		SISTEM USILJENIH PRAVIL		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		
LATINSKI VEZNIK		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA		S		E		
		E		T		KONICA		O		S		T		P		R		E		
		G		A		L		I		L		E		O		G		A		
		K		O		D		E		K		S		ČRTA SEČNICA</						



Peter Petek

REŠEVALCEM NALOG

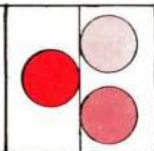
V Preseku objavljamo naloge, zanke in uganke zato, da bi jih vi reševali. Vsakokrat vas vabimo, da nam pošljete rešitve. Najboljše želimo objaviti. S tem hočemo povečati število naših sodelavcev, ki pišejo v Presek.

Rešitve nalog in tudi drugi prispevki so pogosto opremljeni s skicami in risbami. Le-te nam navadno kolega Slavko Lesnjak preriše tako, kot je primerno za objavo. Še bolj prav pa nam bi bilo, če bi bili vaši izdelki taki, da bi jih lahko kar objavili. Če tudi vi to želite, vas prosimo, da pri slikah skušate upoštevati naslednje želje. Slike naj bodo narisane v širini do 16 cm, najozžje 7,5 cm. Črte naj bodo debelejše, manj pomembne pa črtkanne. Prevlečene naj bodo s črnim tušem ali temnim svinčnikom. Točke, premice in ploskve označite s primernimi črkami.

Torej oglejte si slike v dosedanjih številkah Preseka in le korajžno potegnite črto!

Ciril Velkovrh

NOVE KNJIGE



KLARA HOFER, SONJA KOVALEVSKA, prev. Stana Vinšek, Ljubljana,
Mladinska knjiga 1974, 269 str., pl., cena 120.-din



Lani, ob letu žena je izšla knjiga nemške pisateljice Klare Hofer "*Sonja Kovačevska*". Opisuje življenje znamenite ruske matematičarke, ki je za uspeh žrtvovala svojo osebno srečo.

Sonja Kovačevska se je rodila leta 1850 v Moskvi v premožni plemiški družini. Kot otrok v družini ni bila preveč priljubljena, mogoče zato, ker je bila precej svojeglava in ker so si starši želeli sina, pa so dobili spet hčerko. V takem družinskem vzdušju se je Sonja razvijala, postajala je drugačna

od drugih otrok, kar je tudi sama čutila. Želela se je uveljaviti, zato je vse svoje moči usmerila v učenje. Najbolj jo je zanimala matematika. Neznani znaki in števila so jo privlačevali kot magnet.

Že kot otrok je našla zapiske s predavanj o diferencialnem in integralnem računu. Želela je spoznati njihov pomen. Stric ji je poskušal razložiti: "Če pričneš z višjo matematiko, potem se zaloputnejo neka vrata, potem si v nekem drugem svetu, z drugačnimi znamenji, z drugačnimi predstavami. Ta svet je tako različen od našega kot so mogoče marsovci od nas samih."

Kljub vnemi in talentu so ji bila zaprta vsa vrata na uni-

verzo. Bila je ženska, te pa tedaj niso imele nobenih pravic. Edina možnost je bila tujina - Nemčija. Z 19 leti se je poročila s študentom prirodoznanstva Vladimirjem Onufrijevičem Kovalevskim. Tako je lahko odpotovala v tujino in se posvetila študiju matematike. V Heidelbergu v Nemčiji je obiskovala predavanja iz matematike. Že po prvem semestru so jo napotili v Berlin k profesorju Weierstrassu, največjemu matematiku tistega časa.

Weierstrass je hitro odkril Sonjin talent in ji pomagal. S 24 leti je napisala doktorsko disertacijo "O sistemu diferencialnih enačb", ki jo je posvetila svojemu učitelju.

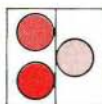
Ženska - znanstvenica se je v tem času zelo težko uveljavila, zato je bila Sonja presenečena, ko ji je bivši Weierstrassov učenec Leffler predlagal, naj bi postala docent na stockholmski univerzi. Kljub veselju nad tem predlogom se Sonja dolgo ni mogla odločiti za ta korak. V tem času je rodila hčerko, kar je zavrlo njeno delo na področju integralnega računa - prevod Abelovih integralov tretje vrste k eliptičnim.

Po smrti svojega moža je odpotovala v Stockholm, kjer je leta 1884 postala izredni profesor matematike na univerzi. Na predlog profesorja Weierstrassa je sprejela težavno nalogo, da se poteguje za nagrado Prix Bourdin. Temo je postavil sam Weierstrass in bil je globoko prepričan, da jo bo Sonja zmogla. In res ji je uspelo to, kar je v 30 letih samo desetim matematikom. Ta tema je bila že šest let prej razpisana, pa se je ni upal lotiti noben matematik. Njen uspeh je bil velikega pomena za žensko gibanje, skoraj tako velikega kot za znanost samo.

Vendar so hudi pretresi v njenem zasebnem življenju, smrt staršev in moža, precej pa tudi naporno delo, opravili svoje. Sonjino šibko telo ni preneslo napora in po hudi bolezni je leta 1891 v Stockholmu umrla stara komaj 41 let.

Njena osnovna dela so iz področja matematične analize, mehanike in astronomije.

Ivanka Kočever in Meta Kokošino



NOVE KNJIGE

NOVE KNJIGE

Pavel Kunaver, KAZIPOT PO NEBU
za opazovanje zvezd s prostim očesom in malimi daljnogledi, Ljubljana, Državna založba Slovenije 1975, 155 str., format 18 x 18 cm. Cena 98.-din.

Bogati poljudnoznanstveni literaturi je avtor dodal v lanskem letu še knjigo, namenjeno najmlajšim ljubiteljem astronomije. Opremljena je z mnogimi skicami in lepimi fotografijami, ki kažejo, kako opazovati nočno nebo. Knjiga je primerno vodilo za delo astronomskih krožkov na šolah. Avtor je svoje zadnje delo poklonil Prirodoslovnemu društvu Slovenije ob njegovi štiridesetletnici.

Ciril Velkovich



P R E S E K - list za mlade matematike, fizike in astronome.
3.letnik, šolsko leto 1975/76, 4.števila, maj 1976, str.161-224.

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Andrej Čadež (urednik za astronomijo), Jože Dover, Tomaž Fortuna, Pavel Gregorc, Marjan Hribar (urednik za fiziko), Andrej Kmet, Ljubo Kostrevec, Jože Kotnik, Matilda Lenarčič, Biserka Mikoš, Franci Oblak, Peter Petek (odgovorni urednik in urednik za matematiko), Tomaž Pisanski, Tomaž Skulj, Gabrijel Tomšič (glavni urednik), Marijan Vagaja, Ciril Velkovich (tehnični urednik).

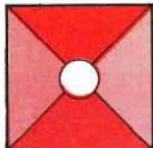
Rokopis je natipkala Metka Žitnik, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike je narisal Slavko Lesnjak.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 61-564/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 50100-620-107-900. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 20.- din, za skupinska pa 18.- din, za inozemstvo 2 \$ = 36.-din, 1300.- Lit, 36.- Asch. Posamezna številka stane 5.- din.

List sofinancirajo republiška izobraževalna skupnost in temeljne izobraževalne skupnosti v Sloveniji ter raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.
List izhaja štirikrat letno v nakladi 16.500 izvodov.

© 1976 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.



PISMA BRALCEV

Dragi Nadi iz Kopra hvala za poslano rešitev in lepe želje v letu 1967.

Tudi mi želimo kar največ uspehov Tebi in vsem Tvojim prijateljem v krožku. Z veseljem pričakujemo vaših prispevkov.

- - -

Vitomir Bric iz Tolmina nam je napisal prijateljsko pismo in rešeno nalogo. Takole pravi:

Sem reden naročnik Preseka in rad berem vse članke, ki jih objavite. Posebno rad berem članke in rešujem naloge iz matematike. Mislim pa, da bi morali objaviti tudi rešitve nalog. V zadnji reviji mi ni všeč reklama, ki zavzema celo stran. Sicer pa je Presek zelo dobra revija in mnogi moji sošolci jo radi prelistavajo.

S spoštovanjem Vitomir

Hvala Vitomir, zelo smo veseli iskrenih in dobrohotnih besed. Tako bomo mogli Presek bolj približati našim zvestim bralcem.

- - -

Nives Javornik iz Semedele pri Kopru piše med drugim: "Po dolgem oklevanju sem se odločila, da vam pišem. Sem naročnica Preseka, ki mi je zelo všeč. Vse, kar je v njem, je zelo zanimivo - vsaj zame."

Kako smo veseli, da si se tudi ti, Nives, pridružila našim sodelavcem. Pogum velja tudi za korak v svet matematike. Želimo Ti na tej poti veliko uspehov in veselja.

- - -

Spoštovani!

Najprej naj vas lepo pozdravim in vam zaželim še mnogo uspehov pri urejanju vaše revije. Preteklo jesen sem postala naročnica Preseka. Zelo mi je všeč, vendar pogrešam križanko. Zelo rada rešujem križanke, zato bi še z večjo vnemo prebiralala Presek, če bi bila v njem slikovna križanka. Tudi meni bi bilo bolj všeč, če bi revija pogostejše izhajala. Na drugo številko sem namreč že komaj čakala. Toda kot pravite, bi bilo pogostejše izhajanje zaenkrat še nemogoče. Škoda! Drugače pa je Presek dober list, saj vsakdo najde v njem svojo priljubljeno stran. Meni je še posebno všeč Bolj za šalo kot zares in Bistrovidec.

Lep pozdrav od vaše odslejš zveste bralke

Nataše Bučar iz Novega mesta

Hvala Nataša! Trudili se bomo, da Ti bo Presek prinesel še več veselja. Hvala tudi za poslano rešitev. Piši nam še!

- - -

Peter Jovanovič iz Senčurja nam je poslal lično izdelano in obrazloženo rešitev. Zraven pa je napisal takole: "Večkrat sem se ubadal z reševanjem nalog iz Preseka, vendar se vam tokrat oglašam prvič. Revija mi je zelo všeč. Mislim pa, da bi jo lahko podaljšali vsaj za kak list, če že ne več."

Hvala. Želimo, da bi nam pisal večkrat. Ali morda veš za kakšne zanimive naloge? Če bomo imeli več prispevkov in več naročnikov, bomo lažje povečali obseg Preseka. Najbolj priljubljene naloge pa so gotovo od naših bralcev.

- - -

Iz Kanala se nam je ponovno oglasila naša prijateljica Mirela s poslano rešitvijo in prijaznimi besedami. Želimo, da bi vztrajala na poti v matematiko. Morda boš tudi ti našla kaj zanimivega za Presek. Pristrčno te pozdravljamo in ti želimo veliko uspeha. Še nam piši!

- - -

Najprej vas prav lepo pozdravljam!

Že na začetku vam moram povedati, da sem na Presek naročen šele letošnje šolsko leto. Prva številka mi ni najbolj ugajala, bolj pa mi je bila vseč druga številka. Z velikanskim zanimanjem sem bral članka iz fizike in astronomije. Želel bi, da bi tudi v naslednji številki našel kaj podobnega.

Še nekaj bi vas vprašal in prosil. Preden napišem rešitev naloge "Premisli in reši", bi vas povprašal še tole. Rad bi vedel naslove klubov astronomov in radioamaterjev v Ljubljani in okolici ter s kolikimi leti bi se lahko včlanil. Star sem 14 let in hodim v 8. razred osnovne šole dr. Vita Kraigherja

Gregor Gross

Zahvaljujemo se za zaupanje, Gregor. Če bi pregledal Preseke iz preteklih dveh let, bi našel še precej zanimivega. Mišlimo pa, da boš z vsako številko bolj zadovoljen. Piši nam večkrat in nam zaupaj, kaj ti ni všeč in zakaj. Naslove Ti bomo poslali v osebnem pismu.

Matilda Lenarčič

Presekov skrat



POPRAVKA

V tretji številki smo ga dvakrat prav grdo polomili (manjših tiskarskih napak ne omenjam):

Na drugi strani ovitka smo naslovno stran opisali kot babilonsko številko 15; seveda ste opazili, da so si spačeni obraz kot zapis števila zamislili Maji v Srednji Ameriki.

Na strani 155 smo pri prvi nalogi z olimpiade izpustili dvojke v eksponentu. Dokazati je treba, da je

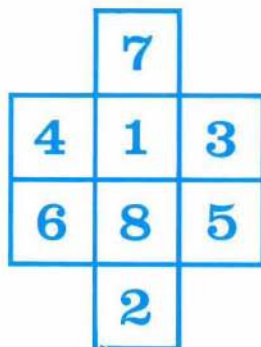
$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

Peter Petek



RAZPREDELNICA - rešitev
naloge iz Preseka 3
(1975/76) št.2, str. III.

Dušan Repovš



ALI SE JE PITAGORA ZMOTIL - rešitev naloge iz Preseka 2 (1974/75)
št. 3, str. IV.

Če velja zveza $(a + b)^2 = c^2$, je trikotnik nemogoče skonstruirati.

Odnos med stranicami v trikotniku namreč pravi:

$$a + b > c$$

Pri odnosu $(a + b)^2 = c^2$

bi veljalo, da je $a + b = c$

Ta odnos označuje daljico in ne trikotnika.

Dokaj pozno objavljamo odgovor na vprašanje, ki nam ga je zastavil "Zmrznjeni hrček". Prejeli smo rešitve tehle bralcev:

Zoran Dernovšek, Ljubljana; Barbara Gradišek, Domžale; Hinko Rosulnik, Vodice; Slavko Treven, Logatec; Nada Širca, Koper; Cvetka Berginc, Laško; Vehovar Vasja, Vipava; Marina Maršnjak, Velenje; Marko Kogoj, Podbrdo; Alojz Ferlan, Koprivnica pri Brestanici; Milan Forštner, Velenje; Stanka Dežnik, Murska Sobota; Metka Dovidija, Maribor; Zdravko Balorda, Ljubljana; Bojan Hvala, Cerklje; Jože Šenica, Dolenjske Toplice; Marko Majer, Celje; Mirela Pahor, Kanal; Matilda Šemrl, Črni vrh nad Idrijo; Milenko Stiplovšek, Maribor in neznani bralec iz Ljubljane.

Zoranu Dernovšku, čigar odgovor objavljamo, bomo poslali knjigo Ivana Puclja: *Neeuklidišne geometrije* iz zbirke Sigma.

Peter Petek

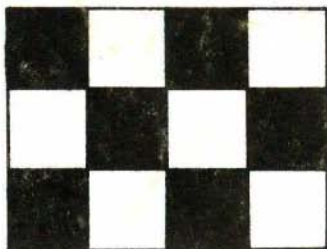


BISTROVIDEOC

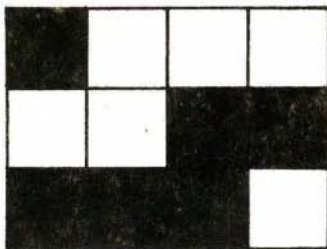
MOZAIK

Imamo 12 barvastih ploščic, ki imajo obliko kvadrata s stranico 1. Če ploščice zložimo v pravokotnik z osnovnico 4 in višino 3, dobimo preprost mozaik. Na sliki 1 vidite primer takega mozaika, ki je sestavljen iz belih in črnih ploščic.

Vsak mozaik lahko s prelaganjem ploščic spremenimo v drug mozaik, ki ima spet obliko pravokotnika z osnovnico 4 in višino 3, če preložimo ploščice takole: ploščice jemljemo iz mozaika po vrsticah, začnemo z levo zgornjo ploščico, obenem pa te ploščice polagamo v nastajajoči mozaik po stolpcih, kjer spet začnemo z levo zgornjo ploščico. Na primer, prve tri ploščice zgornje vrstice mozaika na ta način preložimo v prvi stolpec na levi v novem mozaiku, zadnjo ploščico iz prve vrstice in prvi dve iz naslednje vrstice preložimo v drugi stolpec, itd. Slika 2 prikazuje mozaik, ki je po opisani transformaciji nastal iz mozaika s slike 1.



Slika 1



Slika 2

V splošnem bo mozaik, ki ga bomo dobili po opisani spremembi, drugačen od prvotnega mozaika. Vendar pa obstajajo mozaiki, ki z opisano spremembo preidejo v enake mozaike. *Poišči vsaj en tak mozaik!*

France Dacar