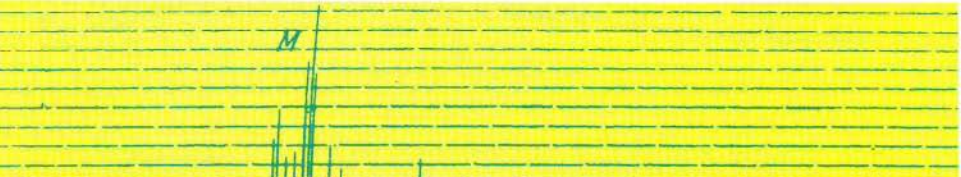
presek

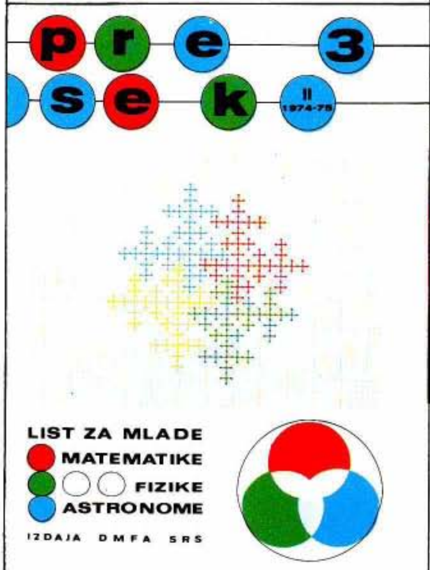
1

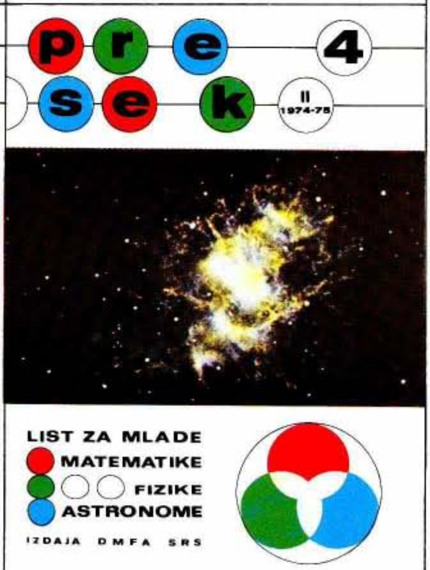
III
1975-76



LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS





VSEBINO DRUGEGA LETNIKA PRESEKA LAHKO PREBERETE NA STRANI 62 IN 63

UVODNIK

BRALCEM PRESEKA

Naš PRESEK stopa v tretje leto in z veseljem ugotavljamo, da je revija dosegla skoraj vse slovenske osemletke in srednje šole in mnogi učenci že težko pričakujejo vsako številko. S tem je PRESEK dokazal, da si je pridobil prav posebno mesto med našimi strokovnimi revijami. Sodelavci se ves čas kritično sprašujemo, ali opravlja revija tisto nalogo, ki si jo je zastavila, res dobro. Zavedamo se, da včasih tudi ne, saj je revija za nekatere preveč učena, drugim ni všeč kaj drugega. Prepričani smo, da s PRESEKOM utrjujemo in tudi širimo matematično, fizikalno in astronomsko kulturo med mladino in prav ta zavest nas vse sodelavce PRESEKA ves čas vzpodbuja in podžiga, pa naj delujemo kot člani uredniškega odbora, pisci ali kot tisti, ki tako požrtvovalno skrbe za razširjanje lista. S prispevki, ki praviloma niso vezani na učno snov, skušamo pri bralcih razvijati sposobnosti in znanja, ki so potrebna za samostojni študij naših pa tudi drugih ved.

Priljubljenost revije med tolikimi mladimi bralci zagotavlja, da bo revija uspešno živela in se razvijala tudi v tretjem letu, pa četudi bo kdaj tanjša ali manj pisana, pač odvisno predvsem od finančnih možnosti. Tudi v tem letniku se bomo potrudili, da bo PRESEK tak, da bo razveseljeval vse tiste, ki že čutijo veselje do matematike, fizike in astronomije in da si bo med mladimi pridobil še nove prijatelje.

Gabrijel Tomšič

PRESEK - LIST ZA MLADE MATEMATIKE, FIZIKE IN ASTRONOME 1 (1975/76) 1-64

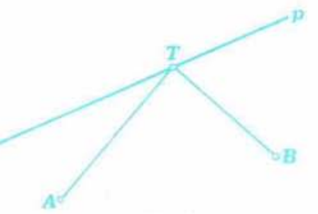
VSEBINA

MATEMATIKA

NEKAJ PREPROSTIH PRIMEROV EKSTREMOV

Pri obravnavanju ekstremov se vedno vprašujemo po n a j m a n j š e m ali pa po n a j v e č j e m elementu kakšne množice reči, ki so med seboj na določen način primerljive po velikosti. Če je dana množica neskončna, se prav lahko zgodi, da takih e k s t r e m a l n i h elementov sploh nima. Brž pa ko ugotovimo, da najmanjši ali pa največji element v njej obstaja, je naša naloga, da ga najdemo. Splošno obravnavanje ekstremalnih problemov predpostavlja že kar precej znanja matematike. Zato si bomo v naslednjem ogledali le nekaj zelo preprostih primerov, ki jih lahko rešimo brez posebne učenosti.

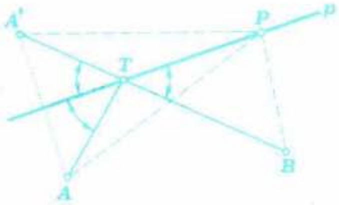
1. primer: Izberimo si v ravnini premico p in točki A, B, ki sta na istem bregu premice p, tako kot kaže sl.1. Vsaki točki T na premici p priredimo vsoto daljic $\overline{AT} + \overline{TB}$. Sami se lahko prepričate, da neskončna množica teh vsot ne premore največje vsote, da pa očitno obstaja neka najmanjša vsota. Poiščimo torej tisto točko T na premici p, za katero je vsota $\overline{AT} + \overline{TB}$ najmanjša. Da rešimo našo nalogo, ravnajmo takole: Poiščimo zrcalno sliko A' točke A glede na premico p. Ker sta zdaj točki A' in B na različnih bregovih premice p, seka daljica $\overline{A'B}$ premico p v natanko eni točki T. Trdimo, da je to tista točka T, za katero je vsota $\overline{AT} + \overline{TB}$ najmanjša. Pa naj bo P poljubna druga točka na premici p. Iz sl.2 odčitamo: $\overline{AT} = \overline{A'T}$ in $\overline{AP} = \overline{A'P}$, saj je premica p simetrala daljice $\overline{AA'}$. Torej je $\overline{AT} + \overline{TB} = \overline{A'T} + \overline{TB}$



Sl.1

in $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB}$. Toda $\overline{A'T} + \overline{TB}$ je ena stranica trikotnika $A'BP$ in zato mora biti manjša od vsote drugih dveh stranic $\overline{A'P} + \overline{PB}$. S tem smo našo trditev res dokazali.

Iz konstrukcije točke T pa je tudi razvidno, da so koti, ki so označeni na sl.2, enaki. Zakaj? Potemtakem lahko rečemo: vsota daljic $\overline{AT} + \overline{TB}$ je najmanjša za tisto točko T na premici p, v kateri oklepata daljici $\overline{AT}$ in $\overline{TB}$ e n a k a kota s premico p.



Sl.2

Ta rezultat nas seveda spominja na znani odbojni zakon v optiki. Če hočemo namreč usmeriti svetlobni žarek iz točke A na "zrcalo" p tako, da pride po odboju v točko B, potem ga moramo po odbojnem zakonu uperiti v tisto točko T "zrcala" p, v kateri oklepata vpadni žarek $\overline{AT}$ in odbiti žarek $\overline{TB}$ enaka kota z "zrcalom" p. Toda zdaj vemo, da je v tem primeru tudi vsota daljic $\overline{AT} + \overline{TB}$ najmanjša. Svetlobni žarek se torej pri odboju obnaša tako, da "izbere" n a j k r a j š o pot.

2. <u>primer</u>: Oglejmo si množico vseh produktov $x.y$ realnih števil x, y, ki imajo dano vsoto $x + y = a$. Ker je

$$x \cdot y = ((x+y)^2 - (x-y)^2)/4 = (a^2 - (x-y)^2)/4$$

takoj vidimo, da je tak produkt največji, kadar je $x = y$. Zakaj? Potemtakem je produkt dveh realnih števil, katerih vsota je dana, največji takrat, kadar sta števili enaki. Ker je seveda

$$x + y = (x+y)/2 + (x+y)/2$$

velja torej za poljubni realni števili x, y neenakost

$$x \cdot y \leq (x+y)^2/4$$

Ako sta pri tem x in y nenegativni števili, smemo na obeh straneh te neenakosti koreniti, pa dobimo

$$\sqrt{x \cdot y} \leq (x+y)/2$$

To neenakost izrazimo z besedami: za nenegativni realni števili

x, y je njuna geometrijska sredina $\sqrt{x \cdot y}$ vedno manjša ali kvečjemu enaka njuni aritmetični sredini $(x+y)/2$.

3. primer: Morda najstarejša ekstremalna naloga, ki jo je rešil že Evklid, je naslednja:

Izmed vseh pravokotnikov z danim obsegom je treba najti tistega, ki ima največjo ploščino.

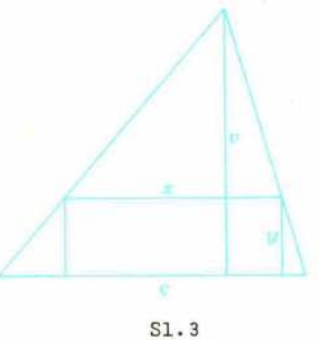
To nalogo bi sicer lahko rešili na čisto geometrijski način, kot smo to storili v 1. primeru. Vendar pridemo prej do cilja, če se je lotimo takole:

Ako sta x, y merski števili stranic pravokotnika, je njegova ploščina $x \cdot y$, njegov obseg pa $2(x+y)$. Z danim obsegom pa je seveda dana tudi vsota $x + y$. Iz 2. primera pa že vemo, da je produkt $x \cdot y$ pri dani vsoti $x + y$ največji, če je $x = y$. Torej je odgovor na dlani:

Izmed vseh pravokotnikov z danim obsegom ima največjo ploščino kvadrat.

Uporabimo preprosti izrek o produktu števil, ki imajo dano vsoto, še enkrat.

4. primer: Poljubnemu trikotniku z dano osnovnico c in predpisano višino v je treba včrtati pravokotnik, ki ima največjo ploščino, tako kot kaže sl.3.



Sl.3

Iz sl.3 razberemo, da je ploščina včrtanega pravokotnika $P = x \cdot y$ in da je $x : c = (v-y) : v$. Zakaj? Potemtakem je $x = c \cdot (v-y)/v$ in zato $P = (c/v) \cdot (v-y) \cdot y$. Ker je c/v dano število, je seveda ploščina P največja takrat, kadar je največji produkt $(v-y) \cdot y$. Toda to je očitno produkt dveh števil, katerih vsota $(v-y) + y = v$ je dana. Torej mora biti $v-y = y$, se pravi $y = v/2$ in zato $x = c/2$. Včrtani pravokotnik z največjo ploščino pokrije torej natanko polovico trikotnika.

5. primer: Posplošimo zdaj rezultat iz 2. primera, vendar se hkrati omejimo le na nenegativna realna števila. Vzemimo torej na piko množico vseh produktov n nenegativnih realnih števil $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$, ki imajo dano vsoto $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$. Tr-

dimo, da je tak produkt največji takrat, kadar so vsa števila enaka, se pravi, če je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a/n$. V tem primeru je produkt P enak

$$P = (a/n)^n$$

Da to dokažemo, moramo pokazati, da je vsak drug produkt iz naše množice manjši od P. Pa naj bo $P_1 = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ kak tak produkt, pri katerem niso vsi faktorji enaki a/n. Zaradi dane vsote $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, mora biti v P_1 vsaj en faktor manjši od a/n in vsaj en faktor večji od a/n. Pišimo prvega $(a/n)-h$, drugega pa $(a/n)+k$, kjer sta h, k ustrezni pozitivni števili. Zdaj pa napravimo nov produkt P_2 tako, da v produktu P_1 zamenjamo faktor $(a/n)-h$ s faktorjem a/n, faktor $(a/n)+k$ s faktorjem $(a/n)+k-h$, vsi drugi faktorji pa ostanejo nespremenjeni. Očitno je vsota faktorjev v produktu P_2 še vedno a. Zakaj? Brž vidimo, da je produkt P_2 večji od produkta P_1, saj je

$$(a/n)\cdot((a/n)+k-h) > ((a/n)-h)\cdot((a/n)+k)$$

ker sta h in k pozitivni realni števili. Poleg tega je v produktu P_2 vsaj en faktor a/n več, kot v produktu P_1. Ako so v P_2 že vsi faktorji enaki a/n, je seveda $P_2 = P$ in dokaz je končan. Če pa to še ni res, pravkar opisani postopek ponovimo na produktu P_2 in pridemo do nekega produkta P_3, ki je večji od P_2 in zato tudi večji od P_1, pa ima spet vsaj en faktor a/n več kot P_2. Po največ n-1 ponovitvah tega postopka torej dosežemo, da so vsi faktorji enaki a/n, se pravi, da pridemo do produkta P, ki je potemtakem res večji od produkta P_1, s katerim smo začeli. S tem je trditev dokazana.

Ako so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ poljubna nenegativna realna števila, je seveda

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n\cdot(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$$

in zato je po pravkar dokazani trditvi veljavna neenakost

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leq [(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n]^n$$

če vzamemo torej na obeh straneh n-ti koren, dobimo

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq (x_1 + x_1 + \ldots + x_n)/n$$

To neenakost preberemo: geometrijska sredina n nenegativnih realnih števil je vedno manjša ali kvečjemu enaka njihovi aritmetični sredini.

6. <u>primer</u>: Postavimo si podobno nalogo kakor v 3. primeru:

Izmed vseh kvadrov z dano površino je treba najti tistega, ki ima največjo prostornino.

Ako so x, y, z merska števila robov kvadra, je njegova prostornina $V = x \cdot y \cdot z$, njegova površina pa $P = 2 \cdot (x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x)$. Z dano površino je seveda dana tudi vsota $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$. Očitno pa je prostornina V največja natanko tedaj, kadar je največji njen kvadrat V^2, ki ga lahko pišemo $V^2 = (x \cdot y) \cdot (y \cdot z) \cdot (z \cdot x)$. Na osnovi 5. primera pa je pri dani vsoti $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$ izraz V^2 največji, kadar je $x \cdot y = y \cdot z = z \cdot x$. Ker smemo predpostaviti, da so x, y, z različni od nič, dobimo iz teh enakosti, da je $x = y = z$. Odgovor se torej glasi:

Izmed vseh kvadrov z dano površino ima največjo prostornino kocka.

Zdaj pa poskusite še sami rešiti naslednje ekstremalne naloge. Vse je mogoče prevesti na 2. in 5. primer. Vendar je treba pri nekaterih nalogah za to tudi nekaj iznajdljivosti. Torej mnogo uspeha!

<u>Naloge</u>:

1. *Včrtaj v dani kvadrat tisti kvadrat, ki ima n a j m a n j š o ploščino! (Upoštevaj, da so pri tem "odrezki" danega kvadrata, n a j v e č j i.)*
2. *Izmed vseh trikotnikov z danim obsegom in dano osnovnico določi tistega, ki ima n a j v e č j o ploščino!*
3. *Kateri izmed pravokotnikov, ki imajo predpisani obseg o, je tisti, ki nam da pri rotaciji okrog ene izmed svojih stranic valj z n a j v e č j o prostornino?*
4. *Včrtaj krogu s polmerom R enakokraki trikotnik z n a j v e č - j o ploščino!*
5. *Včrtaj pokončnemu stožcu, ki ima višino v in polmer osnovne ploskve r, valj z n a j v e č j o prostornino!*
6. *Očrtaj krogli z radijem R pokončni stožec z n a j m a n j š o prostornino! (Upoštevaj, da je neki pozitivni izraz najmanjši, kadar je njegova recipročna vrednost največja.)*
7. *Včrtaj krogli z radijem R pokončni stožec, ki ima n a j v e - č j i plašč!*
8. *Včrtaj polkrogu s premerom 2r trapez z n a j v e č j o ploščino!*

Rezultati:

1. Oglišča kvadrata razpolavljajo stranice danega kvadrata.
2. Enakokraki trikotnik.
3. Osnovnica pravokotnika meri $o/3$, višina pa $o/6$.
4. Enakostranični trikotnik.
5. Prostornina valja $(4\pi/27)\cdot(r^2\cdot v)$.
6. Prostornina stožca meri $(8/3)\cdot(\pi R^3)$.
7. Višina iskanega stožca je 4/3 polmera krogle.
8. Trapez je polovica pravilnega šesterokotnika.

Niko Prijatelj

P R E S E K - list za mlade matematike, fizike in astronome.
3. letnik, šolsko leto 1975/76, 1.številka, september 1975, str.1 -64.

Izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije.

Rokopis je natipkala Anuša Rode, jezikovno je pregledala Sandra Oblak, opremila pa Borut Delak in Višnja Kovačič, slike sta narisala Slavko Lesnjak in Berto Žitko.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61001 Ljubljana, p.p. 227, tel. 61-564/53, štev. žiro računa 50101-678-48363, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 50100-620-107-900. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 20.- din, za skupinska pa 18.- din, za inozemstvo 2 \$ = 34.- din, 2400.- Lit, 56.- Asch. Posamezna številka stane 5.- din.

List sofinancirajo Republiška in temeljne izobraževalne skupnosti v Sloveniji ter Raziskovalna skupnost Slovenije.

Ofset tisk Časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana. List izhaja štirikrat letno v nakladi 14.500 izvodov.

ZAGONETNI FERMAT

1. Mirno življenje

V malem mestecu Beaumont-de-Lomagne na skrajnem jugu Francije, v vojvodini Gascogni, se je 4. avgusta 1601 rodil eden največjih matematikov vseh časov Pierre de Fermat. Umrl je dobrih 63 let kasneje, 12. januarja 1665 v bližnjem kraju Cartresu, kjer je tudi pokopan.

O življenju človeka, katerega genij še danes občudujemo, vemo le malo. Njegov oče Dominique je bil trgovec z usnjem in beaumonški uradnik, mati Claire de Long pa je izvirala iz pravniške družine. Šolal se je v rojstnem kraju in v bližnjem Toulousu, kjer je končal študij prava ter postal sodni uradnik. Kasneje se je tudi za stalno naselil v Toulousu, se poročil in imel pet otrok. Njegova pravniška kariera je bila počasna in mirna ter je dosegla svoj vrh takrat, ko je bil imenovan za kraljevega svetnika v lokalnem parlamentu v Toulousu. Nekateri viri pričajo o tem, da se je odlikoval po svojem poštenju, obzirnosti in zglednem vedenju. Svoj prosti čas je Fermat posvečal matematiki in dosegal izredne rezultate.

Danes velja za začetnika diferencialnega računa in skupaj z drugim znanim francoskim matematikom Blaiseom Pascalom za tvorca teorije verjetnosti. Njegova verjetno najpomembnejša odkritja pa sodijo v področje matematike, ki mu danes pravimo teorija števil. Na žalost nimamo pravega pregleda nad celotnim njegovim matematičnim delom, saj je svoje rezultate redko objavljal. Nekaj o njegovem delu lahko izvemo iz pisem, ki jih je pisal drugim matematikom in fizikom svojega časa. Dopisoval si je s Pascalom, Renéjem Descartesom in mnogimi drugimi, po nekaterih virih celo z Isaacom Newtonom. Navadno je Fermat svoje matematične domisleke pripisal kar na robove knjig, ki jih je prebiral. Njegov sin Samuel je imel težko delo, ko je poskušal po očetovi smrti zbrati njegovo delo in ga izdati v knjižni obliki. Kljub temu je knjiga leta 1679 izšla pod naslovom *Varia opera mathematica*, ta knjiga pa je hkrati tudi edino pričevanje, ki nam je ostalo o Fermatovem delu. Precejšnje število Fermatovih trditev je ostalo nedokazanih, bodisi da so se dokazi izgubili, bodisi jih zagonetni, a genialni mož ni nikdar zapisal. Cela desetletja so minila, preden so najboljši matematiki Evrope uspeli razvozlati nekatere Fermatove uganke. Ena med njimi je še dobrih 300 let po njegovi smrti ostala nerazrešena, to je sloviti "poslednji izrek".

2. Tangenta na krivuljo

Tangenta na krivuljo je eden najpomembnejših pojmov, ki jih je vpeljal Fermat in prav to ga postavlja na čelo tistih, ki jih danes imamo za začetnike diferencialnega računa.

Zamislimo si poljubno krivuljo v ravnini, npr. tako, kakršna je na sl.1 in izberimo točko T na krivulji. Tisti premici, ki bo šla skozi to točko in se bo najbolje prilegala krivulji v bližini te točke, bomo rekli *tangenta na krivuljo* v dani točki. Vprašanje je, kako priti do te premice?

Izberimo si na krivulji še dve nadaljni točki P in Q, eno npr. desno, drugo pa levo od točke T. Premica skozi ti dve točki je *sekanta krivulje*. Če bosta točki začeli drseti po krivulji vsaka s svoje strani proti točki T, pa bo sekanta najbrž vse bližje tangenti! In ko bosta končno točki zdrsnili v T, bo sekanta skočila v tangento!

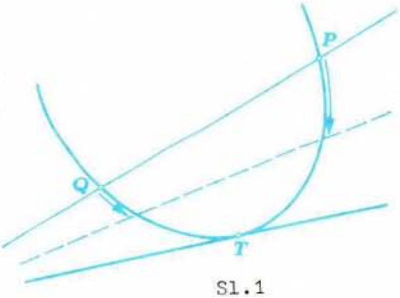
Že prav, boste rekli, toda kako to izračunati? Pa naj bo odslej krivulja podana kot graf neke funkcije $f(x)$ (sl.2). Na krivulji si izberimo točko T s koordinatama $(x_0,f(x_0))$ in točko P s koordinatama $(x_0+h,f(x_0+h))$. Danes si delo poenostavimo s tem, da drugo točko Q kar takoj postavimo v T. Naklon sekante je tedaj očitno

$k_s = \frac{1}{h}|f(x_0+h) - f(x_0)|$,

naklon tangente pa dobimo, če v zgornji izraz postavimo $h=0$. Funkcija, narisana na sl.2, ima enačbo

$f(x) = x^2 + 1$.

Kaj hitro lahko izračunamo naklon sekante v točki x_0: $k_s = 2x_0 + h$,
naklon tangente : $k_t = 2x_0$
in tangento: $y = (2x_0)x + (1-x_0^2)$.



Sl.1

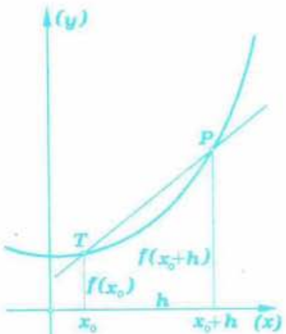
Poglejmo si še tole: smiselno je reči, da ima pri nekem številu x_0 funkcija največjo vrednost (maksimum), če ima v vseh bližnjih točkah manjšo vrednost. Podobno lahko definiramo minimum funkcije. Tako ima funkcija na sl.3 maksimum v točkah x_1 in x_3, minimum pa v točki x_2. Točkam obeh vrst pravimo s skupno besedo *lokalni ekstremi funkcije*. Iz slike pa lahko kaj hitro razberemo tole resnico: v točkah, kjer ima funkcija ekstrem, so tangente vodoravne! To pa pomeni, da je v teh točkah naklon tangente na krivuljo enak 0.

Funkcija na sl.2 ima očitno minimum pri $x=0$ in res je tangenta v točki 0, kakor smo že izračunali, $y=1$, torej vodoravna!

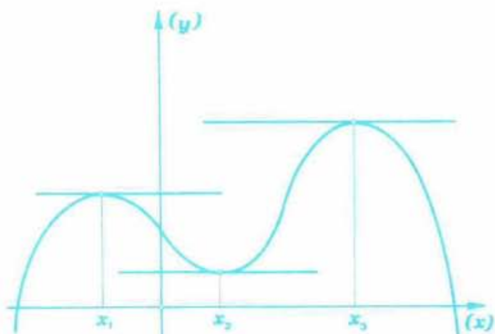
3. Fermatov princip

Fermat pa se ni ukvarjal samo z matematiko, ampak je včasih posvetil svoj čas tudi nekaterim fizikalnim problemom. Med njegova najpomembnejša odkritja s tega področja štejemo danes njegovo trditev o širjenju svetlobe v optiki. To je znameniti *Fermatov princip*, ki pravi, da se svetloba širi po taki poti, za katero porabi najmanj časa. Fermatov sodobnik Descartes je ta princip v svojih pismih žolčno napadal in poskušal pri tem mirnega Fermata celo žaliti. Descartes je namreč v zvezi s širjenjem svetlobe zagovarjal svoje lomne in odbojne zakone, ki so sicer pravilni, ni pa sprevidel, da Fermat vidi dlje, saj so Descartesovi zakoni samo ena izmed posledic Fermatovega principa.

Prejšnje razmišljanje o tangentah nas je dovolj podkovalo, da bomo znali to razumeti!



Sl.2



Sl.3

Sl.4

Sl.5

Na sl.4 naj pomeni os x mejo med dvema optičnima sredstvoma. Recimo, da je nad osjo x zrak, pod njo pa voda. V sredstvu, ki leži nad osjo x, naj ima svetloba hitrost v_1, v tistem pod osjo pa hitrost v_2. V točki $A(0,a)$ prižgemo svetilko, enega izmed žarkov, ki jih svetilka pošilja na vse strani, prestrežemo v točki $B(c,-b)$.

Vprašamo se, kako je svetlobni žarek, ki smo ga prestregli, potoval do nas? Denimo, da je na mejo med sredstvoma, torej na os x, zadel žarek v točki $T(x,0)$. Po Fermatovem principu je od točke A do točke T potoval tako, da je za pot porabil najmanj časa. Na tej poti je ves čas potoval z enako hitrostjo in zato izbral najkrajšo pot med obema točkama, to je daljico $\overline{AT}$. Od točke T do točke B pa je prav tako potoval po daljici $\overline{TB}$. Iz fizike vemo, da je pot, ki jo naredimo v času t, če se gibljemo z enakomerno hitrostjo v, enaka $v \cdot t$; če zdaj upoštevamo še Pitagorov izrek, dobimo, da je čas, ki ga je svetlobni žarek porabil za pot od točke A do točke T

$$t_1 = \frac{\overline{AT}}{v_1} = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2+a^2}$$

in čas za pot od točke T do točke B

$$t_2 = \frac{\overline{TB}}{v_2} = \frac{1}{v_2}\sqrt{(c-x)^2+b^2}$$

Če torej izberemo x in s tem točko T, bomo lahko izračunali čas, ki bi ga žarek porabil, če bi tudi on "izbral" isto točko T za pot od A do B! Celotni čas za to pot $t=t_1+t_2$ je torej še odvisen od izbire x, to je funkcija spremenljivke x! Na sl.5 je narisana ta funkcija.

Po Fermatovem principu mora biti točka T izbrana tako, da bo čas za pot od A do B izmed vseh možnih najmanjši! Točka T mora biti torej izbrana tako, da bo funkcija $t(x)$ imela v tej točki ekstrem, kar pomeni, da bo naklon tangente na funkcijo v tej točki enak 0. Naklon sekante na krivuljo je:

$$k_s = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{v_1}\sqrt{(x_0+h)^2+a^2} - \frac{1}{v_1}\sqrt{x_0^2+a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(c-x_0-h)^2+b^2} - \frac{1}{v_2}\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}\right]$$

Po kratkem računu dobimo:

$$k_s = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{2x_0 + h}{\sqrt{(x_0+h)^2+a^2}+\sqrt{x_0^2+a^2}} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{-2(c-x_0) + h}{\sqrt{(c-x_0-h)^2+b^2}+\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}} ,$$

pri tem smo po dva in dva člena združili na skupni imenovalec in na znani način spravili korene iz števca v imenovalec. Naklon tangente dobimo pri $h=0$

$$k_t = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+a^2}} - \frac{1}{v_2}\cdot\frac{c - x_0}{\sqrt{(c-x_0)^2+b^2}}$$

Povrnimo se k sliki 4, tu smo vrisali kota α in β. Očitno je

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{in} \quad \sin\beta = \frac{c - x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}} ,$$

zato je

$$k_t = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2}$$

in iz pogoja $k_t=0$ dobimo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \; !$$

To pa je ravno Descartesov lomni zakon! Svetlobni žarek, ki smo ga prestregli v točki B, je potoval tako, da je bil na meji med obema optičnima sredstvima izpolnjen ta zakon!

4. Teorija števil in poslednji izrek

Za konec naj navedem še dva Fermatova problema iz teorije števil. Najprej moram omeniti znameniti Fermatov izrek, ki ga je kakih 20 let po Fermatovi smrti prvi dokazal nemški matematik in filozof Gottfried Wilhelm Leibniz. Njegova vsebina je kaj preprosta: *Pri poljubnem naravnem številu n in praštevilu p je število*

$$M(n,p) = n^p - n$$

deljivo s p!

Da bi se prepričali o pravilnosti te trditve, si oglejmo nekatere primere. Tako je npr. $M(n,2) = n^2-n = n(n-1)$. Če je n deljiv z 2, tedaj je očitno tudi $M(n,2)$ deljiv z 2, če pa n ni deljiv z 2, tedaj je $n-1$ prav gotovo deljiv z 2 in spet je $M(n,2)$ deljiv z 2. S podobnim premislekom se prepričamo, da velja Fermatov izrek v naslednjih primerih:

$M(n,3) = n^3-n = n(n-1)(n+1)$
$M(n,5) = n^5-n = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+1) + 5(n^3-n)$
$M(n,7) = n^7-n = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)(n-3)(n+3) + 7(n^3-n)(2n^2-5).$

Ta izrek sodi, kot sem že omenil, v posebno vejo matematike, imenovano teorija števil, ki se ukvarja predvsem z naravnimi in celimi števili. Začetki te matematične teorije segajo še v stari vek, saj je že starogrški matematik Diofant iz Aleksandrije zastavljal in reševal probleme, ki sodijo v to vejo. Fermat je imel v svoji knjižnici tudi neko izdajo Diofantove matematike iz leta 1621, ki jo je vneto prebiral in včasih tudi zapisoval vanjo na robove svoje ideje. In prav na robu te knjige so našli trditev, ki se je glasila nekako tako: *Če je n poljubno naravno število, večje kot 2, potem ne obstajajo nobena taka cela števila x, y in z, da bi bila izpolnjena enačba*

$$x^n + y^n = z^n \ !$$

Ob tej trditvi je Fermat zapisal v isto knjigo, da pozna čudovit dokaz za to, da pa je na robu knjige premalo prostora, da bi lahko dokaz zapisal. S tem je Fermat zastavil matematičnemu svetu uganko, ki je doslej ni še nihče razrešil. Največji matematiki sveta so se ukvarjali s tem "poslednjim izrekom", toda nihče ga doslej ni znal niti dokazati, niti ovreči!

Jasno je, da pri $n=2$ celoštevilske rešitve zgornje enačbe obstajajo! Rešitve so tedaj npr. $x=3$, $y=4$, $z=5$; $x=5$, $y=12$, $z=13$; $x=7$, $y=24$, $z=25$; $x=8$, $y=15$, $z=17$; itd., nove rešitve pa dobimo iz teh, če vsa tri števila množimo z istim faktorjem. Tako so rešitve tudi $x=6$, $y=8$, $z=10$; $x=9$, $y=12$, $z=15$; $x=12$, $y=16$, $z=20$; itd. Vidimo, da je rešitev kar neskončno. Toda že za $n=3,4,5$ in še za nekatera druga naravna števila n so matematiki dokazali, da zgornja enačba sploh nima rešitev.

To pa še ni vse. Fermat je trdil še mnogo več!

Matjaž Omladič

NEKAJ O RAZCEPU NEKATERIH VEČČLENIH IZRAZOV

Iz različnih razlogov hočemo večkrat spremeniti vsoto v produkt. Ta postopek se seveda ne posreči vedno. V nekaterih primerih pa gre prav lepo in take primere si bomo ogledali. Navedimo najprej nekaj znanih formul, ki jih preverimo preprosto tako, da izraz na desni zmnožimo in dobimo izraz na levi strani enakosti.

1. $ax + ab = a(x+b)$
2. $x^2 - a^2 = (x+a)\,(x-a)$
3. $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)(x+a) = (x+a)^2$
4. $x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = (x+a)(x+b)$
5. $acx^2 + (bc+ad)x + bd = acx^2 + bcx + adx + bd = (ax+b)(cx+d)$

Prve tri formule menda vsi dobro poznate:

1. je izpostavljanje skupnega faktorja
2. je formula za razliko kvadratov
3. je formula za kvadrat tričlenika
4. in 5. pa sta formuli za razstavljanje tričlenih izrazov.

Včasih nam koristi še formula za razstavljanje štiričlenih izrazov:

6. $ax + bx + ay + by = (a+b)x + (a+b)y = (a+b)(x+y)$,

ki je v bistvu zaporedna uporaba formule 1, ta pa je eden osnovnih računskih zakonov: distributivnost množenja glede na seštevanje ali razčlenitveni zakon, prebran z uporabo simetričnosti enakosti. (Simetričnost enakosti je naslednja lastnost enakosti: če je $a = b$, potem je tudi $b = a$, torej čitanje enakosti z desne na levo!)

Omejili se bomo le na cele vrednosti parametrov a, b, c in d. Torej $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ \ldots\}$. To je množica celih števil!

Poglejmo nekaj zgledov uporabe prvih treh pravil:

1. $x^2 - 81 = x^2 - 9^2 = (x+9)(x-9)$
2. $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2.5x + 5^2 = (x+5)^2$

3. $x^2 - 100 = x^2 - 10^2 = (x+10)(x-10)$

4. $x^2 - 14x + 49 = x^2 + 2.(-7)x + (-7)^2 = (x+(-7)^2) = (x-7)^2$

5. $6x + 18 = 6x + 6.3 = 6(x+3)$

Kdaj pravimo, da znamo razstavljati po prvih treh formulah? Vsa umetnost je v tem, da hitro računamo na pamet in "vidimo", da je npr. $81 = 9^2$, da je $-14 = 2\cdot(-7)$, pa hkrati še $49 = (-7)^2$ itd. Nujno je dobro poznavanje seštevanke in poštevanke celih števil!

Pa se lotimo še formule 4. Najprej jo opazujmo:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

Izraz ima tri člene: x^2 je kvadratni člen, mislimo si ga zapisanega kot $1\cdot x^2$, pravimo, da je koeficient kvadratnega člena 1, $(a+b)x$ je linearni člen s koeficientom $(a+b)$. Pa še prosti člen ab.

$$\underbrace{1\cdot x^2}_{\text{kvadratni člen}} + \underbrace{\overset{\text{koeficient lin. člena}}{(a+b)}x}_{\text{linearni člen}} + \underbrace{ab}_{\text{prosti člen}}$$

Po formuli 5 vidimo, da se da razstaviti v $(x+a)(x+b)$.
Npr.: $x^2 + (3+9)x + 3\cdot 9 = (x+3)(x+9)$. Zakaj sploh nastanejo preglavice pri razstavljanju tričlenika? Vsa skrivnost je v tem, da sta vsota in produkt navadno že izračunana. Tako ne dobimo za razstavljanje tričlenik $x^2 + (3+9)x + 3\cdot 9$, temveč tričlenik $x^2 + 12x + 27$ in sedaj moramo s poskušanjem ugotoviti, kateri celi števili sta taki, da je njun produkt 27 (prosti člen) in njuna vsota 12 (koeficient linearnega člena). Če pa hitro računamo, je za eno- in dvomestna cela števila postopek res preprost. Kar poglejmo:

Razstavi: $x^2 + 3x + 2$; na pamet premišljujemo takole: prosti člen je 2, ki pa mora biti produkt dveh takih celih števil, da bo vsota teh dveh števil 3. V hipu vidimo, da sta to števili 1 in 2, ker je $2 = 1\cdot 2$ in je $3 = 1 + 2$. Tako tričlenik razstavimo: $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Brez komentarja poglejmo drug primer:

$x^2 + 10x + 21 = (x+3)(x+7)$, saj je: $21 = 1\cdot 21$ ne pride v poštev
$= 3.7$ in $3 + 7 = 10$

$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$;

$-3 = -1\cdot 3 = 1\cdot(-3)$ in $-1 + 3 = 2$.

Premišljamo: produkt je negativen, zato je en faktor negativen. Vsota je pozitivna, torej je pozitiven faktor z večjo absolutno vrednostjo.

In še : $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ $\quad$ $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

$-6 = -3\cdot 2 = 1\cdot(-6)$ $\quad$ $12 = -1(-12) = (-2)\cdot(-6) =$

$-3 + 2 = -1$ $\quad$ $= (-3)\cdot(-4)$

(Vse te račune napravimo na pamet!) $-3 + (-4) = -7$

In še: $x^2 - 2x + 3 = ?$ $\quad$ $3 = 1\cdot 3 = (-1)\cdot(-3)$

(Primer, da se razcep ne posreči vedno.)

VAJE

Razcepi:

1. $x^2 - 4 =$
2. $x^2 + 6x + 9 =$
3. $x^2 + 7x + 10 =$
4. $3a + 6b =$
5. $a^2 - 121 =$
6. $a^2 - 8a + 16 =$
7. $a^2 - 10a + 21 =$
8. $6a^2 + 4ab =$
9. $x^2 - 10\,000 =$
10. $x^2 + 30x + 225 =$
11. $x^2 + 2x - 24 =$
12. $2x^3 + 2x^2 - 24x =$
13. $1 - a^2 = 1^2 - a^2$
14. $-c^2 + 2c - 1 = -(c^2 - 2c + 1) =$
15. $z^2 - 9z - 36 =$
16. $4a^2b - 36b =$

Po vseh teh vajah smo dovolj oboroženi, da se lotimo še zadnjega primera, kjer je vsa umetnost v pravilnem prepisu tričlenika v štiričlenik!

$$acx^2 + (bc+ad)x + bd = acx^2 + bcx + adx + bd = cx(ax+b) + d(ax+b) =$$
$$= (ax+b)(cx+d)$$

Takole razmišljamo: če zmnožim $(ac)(bd) = acbd = (bc)(ad)$, sem spet dobil dva faktorja, katerih vsota je koeficient pri linearnem členu $(bc+ad)$. To je pa tudi vse. Kar na delo:

1. $6x^2 + 7x + 2 = 6x^2+3x+4x+2=3x(2x+1)+2(2x+1)=(2x+1)(3x+2)$
   $6\cdot 2 = 12 = 3\cdot 4$, ker je $3 + 4 = 7$
2. $15x^2 + 23x + 4 = 15x^2+3x+20x+4=3x(5x+1)+4(5x+1)=(5x+1)(3x+4)$
   $15\cdot 4 = 60 = 1\cdot 60 = 2\cdot 30 = 3\cdot 20$, ker je $3 + 20 = 23$
3. $6x^2 + x - 15 = 6x^2-9x+10x-15=3x(2x-3+5(2x-3)=(2x-3)(3x+5)$
   $6\cdot(-15) = -90 = -1\cdot 90 = -2\cdot 45 = -3\cdot 30 = \ldots = -9\cdot 10$, ker je $-9+10 = 1$ (ta pri x sicer ni napisan, ampak $x = 1\cdot x$)
4. $12x^2 - 19x - 21 = 12x^2-28x+9x-21=4x(3x-7)+3(3x-7)=(3x-7)(4x+3)$
   $12\cdot(-21) = -252 = -28\cdot 9$, ker je $-28+9 = -19$

Možnosti, ko je negativni faktor po absolutni vrednosti manjši od pozitivnega, sploh ne preizkusimo, ker mora biti vsota negativna.

Primere, kot (7·(-36)) in podobno, pa kaj hitro na pamet preletimo. Seveda pa zaradi kontrole vedno napravimo preskus na pamet z množenjem rezultata.

Za konec še nekaj vaj!

Razcepi in napravi preskus:

17. $2x^2 - 3x - 14 =$
18. $12a^2 - 23a + 5 =$
19. $4b^2 + 6b + 2 =$
20. $9a^2 - 9a + 2 =$
21. $35m^2 - 2m - 1 =$
22. $15a^2 + a - 2 =$
23. $14x^2 - 17x - 6 =$
24. $24a^2 - 22a - 35 =$
25. $54x^2 - 231x - 490 =$
26. $3x^2 - 4x + 2 =$

27. (Iz knjige Franceta Križaniča: Križem po matematiki, MK Ljubljana 1960)

Opic trop je skrit v votlini.
Tri odvzemi vseh petini
in kvadriraj, kar ostane.
To vseh skritih je število.
Eni le se ni ljubilo
med tovarišice zbrane,
pa se urno vzpne med veje,
prekopica se in smeje
razposajenost igriva.
Jasnooka Lilavati!
Daj, poskusi razvozlati,
koliko se opic skriva?

REŠITEV, (omenjena knjiga, str.23)

To nalogo je postavil Bhaskara Učeni (Bhaskara Acarya, rojen leta 1114). Mi bomo kaj urno zapisali te verze v moderni pisavi - matematiščini. Število vseh opic zaznamujemo s črko x. Od petine vseh opic $x/5$ odštejemo 3, kakor nam naroča Učeni. Tako dobimo $x/5 - 3$. Kvadrat tega števila $(x/5 - 3)^2$ pove, koliko opic tiči v votlini. Če k tem dodamo še razposajenko, ki rogovili po drevju, dobimo celoten trop:

$(x/5 - 3)^2 + 1 = x$ in naprej

$x^2/25 - 6x/5 + 10 = x \quad /\cdot 25$

$x^2 - 55x + 250 = 0$

Uporabi, kar si se naučil pri razcepljanju tričlenih izrazov!

$(x-5)(x-50) = 0 \qquad x_1 = 5, \quad x_2 = 50$

ali glej omenjeno knjigo, str.168,169.

REŠITVE VAJ:

1. $(x+2)(x-2)$
2. $(x+3)^2$
3. $(x+2)(x+5)$
4. $3(a+2b)$
5. $(a+11)(a-11)$
6. $(a-4)^2$
7. $(a-3)(a-7)$
8. $2a(3a+2b)$
9. $(x-100)(x+100)$
10. $(x+15)^2$
11. $(x+6)(x-4)$
12. $2x(x+4)(x-3)$
13. $(1-a)(1+a)$
14. $-(c-1)^2$
15. $(z-12)(z+3)$
16. $4b(a+3)(a-3)$
17. $2x^2 - 7x + 4x - 14 = (x+2)(2x-7)$
18. $12a^2 - 20a - 3a + 5 = (4a-1)(3a-5)$
19. $2(2b^2 + 2b + b + 1) = 2(2b+1)(b+1)$
20. $9a^2 - 3a - 6a + 2 = (3a-2)(3a-1)$
21. $35m^2 - 7m + 5m - 1 = (5m-1)(7m+1)$
22. $15a^2 + 6a - 5a - 2 = (3a-1)(5a+2)$
23. $14x^2 - 21x + 4x - 6 = (7x+2)(2x-3)$
24. $24a^2 - 42a + 20a - 35 = (4a-7)(6a+5)$
25. $54x^2 + 84x - 315x - 490 = (6x-35)(9x+14)$
26. Ne znamo razstaviti.

Franci Oblak

POPRAVKI

V zadnji številki drugega letnika nam jo je tiskarski škrat nekajkrat prav grdo zagodel. Naj se opravičimo za najbolj neprijetne spodrsljaje:

Na drugi strani ovitka bi moral biti na sličici 3 rumeni trikotnik zavrten okrog daljše stranice navzgor in ne navzdol. (Krivda je naša in ne reševalkina.)

Na strani 135 je v sedmi vrstici omenjena slika 5, ki jo boste zaman iskali, ker se je skrila kar pod sam tekst.

Na strani 167 je v osmi vrstici diagrama izpadla trojka.

Čeprav ste kot dobri matematiki gotovo sami izračunali rojstno letnico profesorja Čermelja, bi bilo vendar prav, če bi v drugi vrstici na strani 192 navedli popolne rojstne podatke slavljenca.

Peter Petek

FIZIKA

O BREZTEŽNOSTI

"Kaj je breztežnost? Kakšno je breztežno stanje?" Navadno pomislimo na breztežnost v zvezi s sateliti in z astronavti. Zdi se nam, da astronavt zaradi breztežnosti "plava" v zraku, da se z lahkoto premika po notranjosti vesoljske ladje. Manj znano je, da je mogoče breztežnost doživeti tudi na Zemlji.

Okrog Zemlje je zrak, na površju Zemlje je voda, so različna telesa, gibljiva in pritrjena. Zrak je pri tleh najgostejši, z višino se redči. Voda teče navzdol, ustavi se na najnižjem možnem mestu. Prosta telesa padajo. Mirujoča telesa pritiskajo navzdol. To je posledica zemeljske privlačnosti. Privlačevanje Zemlje izrazimo s silo, ki se imenuje gravitacijska sila Zemlje ali po domače teža.

Teža telesa se zmanjšuje, če se telo oddaljuje od Zemlje. V bližini Lune deluje na telesa tudi gravitacijska privlačna sila Lune. Na medsebojni zveznici delujeta Zemlja in Luna na telesa z nasprotnima silama. Na telo, ki je na zveznici v oddaljenosti okrog 38 000 km od Lune, delujeta Zemlja in Luna z enako velikima silama. Če se ne menimo za majhne gravitacijske sile oddaljenega Sonca in ostalih nebesnih teles, trdimo, da v tem predelu ni gravitacijskih sil in so telesa tu zares v breztežnem stanju. V breztežnem stanju so tudi telesa daleč stran od nebesnih teles v medzvezdnem prostoru.

Vrnimo se na Zemljo! Zaradi teže telesa tu padajo, silijo navzdol in pritiskajo na druga telesa, ki zavirajo padanje. Jabolko na drevesu nateguje pecelj; nategnjeni pecelj se odtrga od veje, jabolko pade. Kamen na tleh pritiska na tla; tla se nekoliko upognejo ali ugreznejo, tako uravnovesijo težo kamna in preprečujejo padanje.

Tudi na človeka deluje teža. Vemo, da je človek zgrajen iz kosti, ki so povezane z mišicami in z drugimi vezmi. Mišice preprečujejo, da bi človek zaradi teže razpadel, se sesul in se raztresel po tleh. Da človek stoji pokonci na tleh, morajo biti mišice ves čas napete. Ta napetost mišic je vsakdanja, normalna, zato je ne čutimo ali drugače: je del našega vsakdanjega počutja. Normalno počutje človeka je prilagojeno ravnovesnemu stanju, v katerem učinkuje na človeka teža v smeri navzdol in enako velika sila podlage v smeri navzgor.

Napetost mišic v telesu se spremeni, če sila podlage ni enako velika kot teža telesa, npr. če telo pospešeno pada. Potniki v letalu, ki zaide v "zračno luknjo" in prosto pade nekaj metrov, začutijo v svoji notranjosti čudno praznino. Podobno praznino zaznajo padalci takoj po odskoku iz letala ali potniki v dvigalu, ki se začne pospešeno spuščati. V skrajnem primeru, ko človek prosto pada, napetost mišic v telesu popolnoma odneha. Vsak del telesa v tem primeru prosto pada, medsebojno pritiskanje ali napenjanje preneha, mišice se sprostijo. Notranje stanje človeka med prostim padanjem je takšno, kot da teže ne bi bilo. To je breztežno stanje. Potrebna je dolgotrajna vaja, da se človek privadi breztežnemu stanju, da v tem stanju nemoteno dela in misli.

Ne le fiziološki občutek, tudi medsebojno gibanje prosto padajočih teles kaže na breztežno stanje. Vsa telesa imajo med prostim padanjem enak pospešek. Če telo prosto pada in če obenem prosto pada tudi vsa bližnja okolica, je gibanje telesa glede na prosto padajoča okoliška telesa takšno, kot da teže ni. Za ilustracijo si mislimo, da človek stoji na tleh prosto padajočega dvigala. Že majhen odriv od tal zadostuje, da se človek odlepi od tal (ki prosto padajo) in zadene ob strop (ki prosto pada), kot da bi bil brez teže. Človek v notranjosti prosto padajočega dvigala ne more ugotoviti, ali je sam brez teže in se zato z lahkoto premika v dvigalu ali pa dvigalo in vsa telesa v njem prosto padajo.

Med prostim padanjem nas običajno ne zanima, kakšno je breztežno stanje, temveč kako se bo to stanje končalo. Pogrešamo izkušnje z breztežnostjo. Moderna raketna tehnika je ponesla človeka v vesolje, kjer lahko dalj časa prosto pada, ne da bi končal na Zemlji.

Če kamen spustimo, pada navpično navzdol. Drugače je, če kamen odvržemo v vodoravni smeri. Sila roke dá kamnu začetno hitrost, s katero odleti le-ta v vodoravni smeri. Kamen sicer prosto pada, a se zaradi začetne hitrosti obenem premika v vodoravni smeri. Kamen pada po paraboli, slej ko prej pa pade na tla. Če je začetna hitrost kamna v vodoravni smeri večja, pade kamen na tla v večji oddaljenosti. Moderni čas je postregel z močnimi napravami, ki izstrelijo predmete z veliko začetno hitrostjo. Raketa, ki jo izstreli letalo v vodoravni smeri, n.pr. preleti celino in pade nekje v oceanu ali celo preleti ocean in pade na drugo celino. Če v okolici Zemlje izstrelimo predmet v vodoravni smeri z začetno hitrostjo okoli 8 km/s, ne pade na tla, ampak zakroži okrog Zemlje. Med kroženjem okrog Zemlje predmet ves čas pada proti Zemlji, vendar ostaja ves čas v isti višini, ker je Zemlja okrogla.

Astronavt v satelitu ima občutek breztežnosti. Kljub teži astronavt namreč ne pritiska na tla satelita, saj tudi tla padajo in se mu umikajo. Vsak del astronavta prosto pada, mišice niso napete.

Na televizijskih posnetkih iz notranjosti satelita opazujemo gibanje astronavta v satelitu. Enako kot pri prostem padanju navpično navzdol tudi v notranjosti satelita teža ne vpliva na medsebojno gibanje teles. Astronavt se z enako lahkoto premika od tal do stropa, kot se premika od stropa do tal. V notranjosti krožečega satelita ni nobenega zgoraj ali spodaj, navzgor ali navzdol; ti pojmi v satelitu niso pomembni. Recimo, da astronavt razbije steklenico vode, ki jo drži v roki. Sproščena voda prosto pada, toda enako padajo tudi tla, roka in drugi predmeti. Torej voda ostane na enaki oddaljenosti od tal; vidimo, da lebdi v zraku. Kako astronavt požira tekočo hrano? Kako izlije vodo iz steklenice? Kaj moramo napraviti, da se lahko premika po tleh, da vsaj nekoliko pritiska na tla?

Breztežni občutek astronavta med kroženjem okrog Zemlje je enake vrste kot breztežni občutek med prostim padanjem navpično navzdol. Razlika je le v tem, da astronavt v satelitu lahko za nekaj časa pozabi, kako bo varno pristal na tleh.

Rudi Kladnik

GOSPOD TOMPKINS IN SOČASNOST

Odlomek iz knjige "Gospod Tompkins"

George Gamov*

Tompkinsu so se zdele dogodivščine v relativističnem mestu zelo zanimive. Žal mu je bilo le, da ni bil z njim profesor, ki bi mu lahko pojasnil nekatere čudne zadeve. Posebno veliko je razmišljal o strojevodji, ki je z zaviranjem vlaka ohranjal potnike mlade. Marsikateri večer je šel spat v upanju, da bo spet zagledal tisto zanimivo mesto, a sanje so ga obiskale le redkokdaj in še tedaj niso bile posebno prijetne. Nazadnje je sanjal o direktorju banke, ki ga je vrgel iz službe, ker je vpeljal v bančne račune pojem nedoločenosti... Zato je sklenil, da si bo privoščil kratke počitnice in se za kak teden odpeljal na morje. In tako se je znašel v vlaku, ki je počasi vozil mimo sivih predmestnih streh zelenemu podeželju naproti. Vzel je v roke časopis in se skušal poglobiti v vietnamsko vojno, a članek je bil strašansko dolgočasen in vagon se je tako prijetno zibal...

Pokrajina je bila nenavadno spremenjena, ko je odložil časopis in spet pogledal skozi okno. Brzojavni drogovi so se tiščali skupaj kakor pri ograji in drevesa so bila ozka in vitka kakor italijanske ciprese. Na sedežu nasproti je sedel njegov stari prijatelj profesor in z zanimanjem gledal skozi okno. Najbrž je stopil v vlak, ko je Tompkins bral časopis.

"Saj smo v relativistični deželi, kajne?" je vprašal Tompkins.

"O, ali že veste? Kako pa ste zvedeli zanjo?" je vzkliknil profesor.

"Bil sem že v njej, le da nisem imel te časti, da bi bil v vaši družbi. Videl sem celo množico nenavadnih reči, a domačini, s katerimi sem govoril, sploh niso razumeli, kaj naj bi bilo na njih nenavadnega,"

**Ameriški fizik ruskega rodu G.Gamov je raziskoval razvoj vesolja, energijsko preskrbo zvezd in razpad atomskih jeder. Posebno znan je po poljudnih knjigah z glavnim junakom gospodom Tompkinsom. V njih je opisan fantazijski svet, v katerem veljajo fizikalni zakoni našega sveta, vendar s samovoljno spremenjeno velikostjo kake bistvene fizikalne konstante. Sestavek o sočasnosti se dogaja v "relativistični deželi", v kateri je naravna meja hitrosti, to je hitrost svetlobe, več kot milijonkrat manjša od prave hitrosti svetlobe v praznem prostoru.*

"Seveda," je rekel profesor. "Rodili so se tukaj in pojavi, s katerimi se srečujejo, se jim zdijo sami po sebi umevni. Gotovo pa bi se zelo čudili svetu, v katerem živite vi. Zdel bi se jim nenavaden."

"Ali vas smem nekaj vprašati? Zadnjič sem tukaj govoril z nekim strojevodjo in rekel mi je, da se potniki v vlaku zaradi ustavljanja in speljavanja počasneje starajo kakor ljudje v mestu. Ali je to kaka čarovnija ali pa se ujema z moderno znanostjo?"

"Zakaj bi segali po čarovnijah," je odvrnil profesor. "To je vendar naravna posledica fizikalnega zakona, ki ga je odkril Einstein. Fizikalni pojavi tečejo počasneje v sistemu, ki spreminja svojo hitrost. V našem svetu so taki učinki zanemarljivo majhni, a tukaj, kjer je hitrost svetlobe majhna, jih razločno vidimo. Ko bi recimo hoteli v relativističnem mestu skuhati jajce v mehko in bi lonček premikali po kuhalniku, namesto da bi ga pustili pri miru, bi potrebovali za to morda kar šest minut. Tudi procesi v človeškem telesu potekajo počasneje, če se recimo zibljemo na gugalniku ali če se peljemo z vlakom, ki zavira in speljuje. Ker postanejo vsi pojavi počasnejši v enaki meri, pravijo fiziki, da teče čas v neenakomerno gibajočem se sistemu počasneje."

"Pa znanstveniki v našem domačem svetu zares opazijo take pojave?"

"Da, samo za kaj takega potrebujejo veliko spretnosti. Zelo težko je tehnično uresničiti potrebne pospeške. Vendar so razmere v neenakomerno se gibajočem sistemu podobne - naj raje rečem, enake - razmeram v prostoru, v katerem deluje zelo velika sila težnosti. Morda ste že sami opazili, kako se človek počuti lažjega v dvigalu, ki se pospešeno spušča, oziroma težjega v dvigalu, ki se pospešeno dviga. Silo zaradi pospešenega gibanja je treba odšteti ali prišteti človekovi teži. Ker je težnost na Soncu veliko večja kot na zemeljskem površju, bi morali tam vsi pojavi teči nekoliko počasneje kakor na Zemlji. Astronomi to v resnici opazijo. A mimogrede" - se je prekinil profesor - "ali veste, kako se imenuje tale mala postaja, mimo katere se peljeva?"

Vlak je vozil po peronu majhne podeželske postaje, na katerem sta bila samo postajenačelnik in mlad nosač, ki je sedel na svojem vozičku in bral časopis. Nenadoma je postajenačelnik zakrilil z rokami in padel na obraz. Tompkins ni slišal strela, najbrž zaradi ropotanja vlaka, videl pa je mlako krvi, ki je rasla okrog postajenačelnikovega trupla. Profesor je takoj potegnil za zavoro in vlak se je sunkoma ustavil. Ko sta izstopila, je mladi nosač tekel proti mrliču, z druge strani pa je prihajal policist.

"Ustreljen v srce," je rekel policist, ko si je ogledal truplo. Položil je roko nosaču na ramo in nadaljeval: "Aretirani ste zaradi umora postajenačelnika."

"Nisem ga ubil!" je vzkliknil nesrečni nosač. "Bral sem časopis, ko sem slišal strel! Gospoda z vlaka sta me prav gotovo videla in lahko potrdita, da sem nedolžen."

"Da," je takoj rekel Tompkins. "Na svoje oči sem videl, da je tale človek bral časopis, ko je bil postajenačelnik ustreljen. To lahko prisežem."

"Toda vi ste sedeli v gibajočem se vlaku in vaše pričevanje je zato brez vrednosti," je odločno rekel policist. "Če bi gledali dogodek s perona, bi nosač v tistem trenutku lahko streljal. Kaj ne veste, da je sočasnost odvisna od sistema, iz katerega opazujete dogodka?"

"Oprostite, narednik," se je vmešal profesor, "tokrat ste se zmotili. Mislim, da vašim predstojnikom to ne bo všeč. Zares je v vaši deželi sočasnost odvisna od gibanja opazovalca. A celo v vaši deželi opazovalec ne more videti posledice pred vzrokom. Saj še nikoli niste dobili brzojavke, preden je bila odposlana, ali se napili, preden ste odprli steklenico? Če vas prav razumem, sklepate, da bi midva zaradi gibanja vlaka videla streljanje veliko kasneje kakor njegovo posledico. Izstopila sva, brž ko sva videla postajenačelnika pasti, in vi mislite, da streljanja še nisva mogla videti. Vem, da se morate na policiji strogo držati pismenih navodil. Poglejte, prosim, v vašo knjižico, tam boste najbrž našli potrebne napotke."

Profesorjev odločni nastop je napravil na policista močan vtis. Mož je potegnil iz žepa knjižico z navodili in se poglobil vanjo. Počasi se mu je rdeči obraz razlezel v širok nasmešek.

"Prav imate," je rekel. "Paragraf e, člen 37, odstavek 12: *Za popoln alibi velja izjava priče v kakorkoli se gibajočem sistemu, ki je v času zločina ali čas* s/c *prej ali pozneje (pri tem je* c *naravna meja hitrosti in* s *razdalja priče od kraja zločina) videla osumljenca na kakem drugem kraju.*"

"Prosti ste, dragi moj," je rekel policist nosaču in se zahvalil profesorju. "Zdaj pa moram poročati o umoru." Minuto kasneje se je vrnil iz telefonske celice in povedal, da so morilca že ujeli, ko je bežal s postaje.

"Morda sem res neumen," je rekel Tompkins, ko sta se s profesorjem odpeljala dalje, "a kako je s to preklemano sočasnostjo? Ali je v tej deželi res brez smisla?"

"Ima ga, a le do določene meje," je odgovoril profesor. "Zaradi tega sem tudi lahko pomagal nosaču. Pojem sočasnosti nima več pravega smisla, ker je hitrost gibanja ali širjenja kateregakoli signala omejena. Morda boste laže razumeli tole prispodobo: recimo, da živi neki vaš prijatelj v oddaljenem kraju, do katerega potuje pošta tri dni. Recimo še, da je to najhitrejša možnost obveščanja. Če se vam bo kaj zgodilo v nedeljo, ne boste mogli prijatelja obvestiti o tem prej kakor v sredo. Če bi on vnaprej vedel, kaj se bo zgodilo vam, bi vam moral·to sporočiti najpozneje prejšnji četrtek. Od četrtka do naslednje srede torej vaš prijatelj ni mogel vplivati na vašo usodo v nedeljo in ne izvedeti zanjo. S stališča vzročnosti je bil ločen od vas šest dni."

"Kaj pa brzojavka?"

"Rekel sem, da naj bi bila pisemska pošta najhitrejši način obveščanja."

"A tudi, če bi bilo to res, kaj bi imela s tem opraviti sočasnost? Midva s prijateljem bi še vedno jedla nedeljsko kosilo ob istem času, ali ne?"

"Ne, kajti taka izjava v tem primeru ne bi imela nobenega smisla. Enemu opazovalcu bi se morda zdelo tako, kak drug, ki bi se vozil z drugačnim vlakom, pa bi rekel, da vaš prijatelj tedaj jé petkov zajtrk. Vendar pa nihče ne bi mogel videti vas in vašega prijatelja sočasno ob kosilu, če bi kosila v večjem razmiku kakor tri dni."

"Ampak, kako je to mogoče?" je nejeverno vzkliknil Tompkins.

"Zelo preprosto, kot ste morali razbrati iz mojih predavanj. Zgornja meja hitrosti mora ostati v vseh različno gibajočih se sistemih enaka. Če privzamemo to za izhodišče, je ..."

Tedaj pa se je vlak že ustavil na postaji, kjer je moral Tompkins izstopiti.

Prevedla in priredila

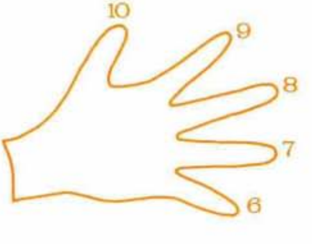
Seta Oblak

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

MNOŽENJE NA PRSTE

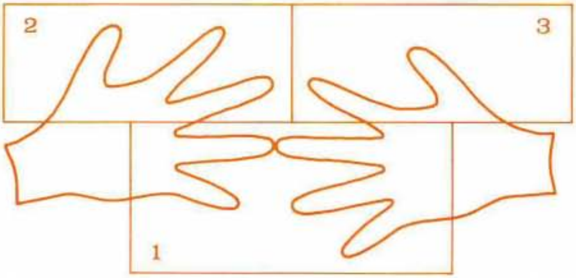
Ne bom vas vprašal, ali znate seštevati na prste. Tako dolgo je že, odkar ste se tega naučili, da ste že pozabili, kako je bilo, ko še niste znali. Ali pa znate tudi množiti na prste ? Seveda, boste rekli, saj je množenje (vsaj množenje naravnih števil) le seštevanje več enakih sumandov. Na primer: $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$; in ta račun je kaj lahko napraviti na prste. Toda v mislih imam drugačno tehniko množenja. Od prej omenjene se loči predvsem v treh stvareh: hitrejša je, privede nas malo dlje kot do 10 in še daleč ni tako "sama po sebi razumljiva", kot je seštevanje na prste. Gotovo se vsakomur zdi, da bi seštevanje na prste sam odkril, če se ga ne bi bil naučil od drugih. Za metodo množenja, ki jo nameravam opisati, pa česa takega najbrž ne boste trdili. Seveda pa je moral tudi to metodo nekdo odkriti. Kdo je to bil, ni znano, kajti metoda je stara že več tisočletij. V starih časih je bila splošno znana in baje se je ponekod ohranila prav do današnjih dni.

Pa naj bo dovolj uvoda, preidimo k stvari. Privzeli bomo, da znamo na pamet poštevanko do 5, in pokazali, kako na prste zmnožimo dve izmed števil 6,7,8, 9,10 (za ta račun bomo potrebovali v resnici le poštevanko do 4).



Vsakemu prstu na roki prirediEmo eno od števil med 6 in 10; mezincu 6, prstancu 7, sredincu 8, kazalcu 9, palcu 10.

Množenje bomo razložili na primeru. Recimo, da hočemo izračunati, koliko je $7 \cdot 8$. Položimo obe roki predse z dlanmi obrnjenimi proti sebi. Staknimo prstanec leve roke (predstavljajoč število 7) s sredincem desne roke (število 8); sicer pa naj se prsti ne dotikajo. Mislimo si vse prste razdeljene v tri skupine (glej sliko):

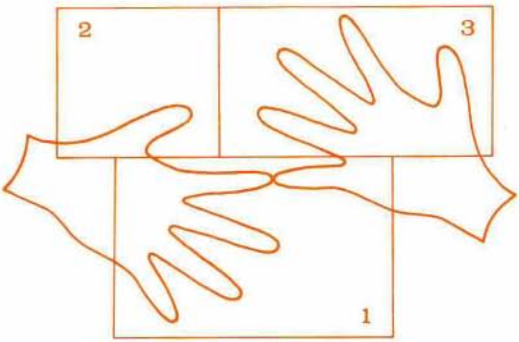


v prvi skupini naj bosta prsta, ki se dotikata, in vsi prsti pod njima; v drugi skupini prsti leve roke nad dotikajočima se prstoma; in v tretji skupini prsti desne roke nad dotikajočima se prstoma. Produkt, ki ga iščemo, je zdaj enak

$$\text{(število prstov v 1.skupini)} \times 10 + \text{(število prstov v 2.skupini)} \times \text{(število prstov v 3.skupini)};$$

v našem primeru torej $7 \cdot 8 = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 56$.

Preprosto, kajne ? Z malo vaje se lahko človek tako izuri, da vidi rezultat v trenutku. Toda, ali res pride vedno pravi rezultat? Poizkusimo še $9 \cdot 6$:



$9 \cdot 6 = 5 \cdot 10 + 1 \cdot 4 = 54$

Zdaj najbrž že verjamete v pravilnost te metode (čeprav sicer veste, da z dvema primeroma ni mogoče dokazati pravilnost kake splošne trditve). Če pa kdo še dvomi, naj sam preizkusi vse možne primere. Gotovo ste tudi že ugotovili, da vam ta računska metoda življenja ne bo kdo ve kako olajšala; saj najbrž obvladate poštevanko do 10. Zabavna je pa le!

Za marsikoga bi bila s tem stvar opravljena. Za nas pa še ne sme biti. Ne spodobi se za Presek, da se ne bi na koncu vprašali, od kod pravilnost te čarobne metode. No, odgovor je takle: metodo utemeljuje enačba, ki velja, kot se prav lahko sami prepričate, za poljubni števili x in y:

$$(5+x)(5+y) = 10(x+y) + (5-x)(5-y)$$

Takoj bomo pokazali zvezo med to enačbo in našo računsko metodo. Za x in y si moramo izbrati taki števili, da bo na levi strani enačbe stal prav produkt, ki ga želimo izračunati; v našem primeru $7 \cdot 8$ bi torej vzeli $x=2$, $y=3$. Na desni strani enačbe je

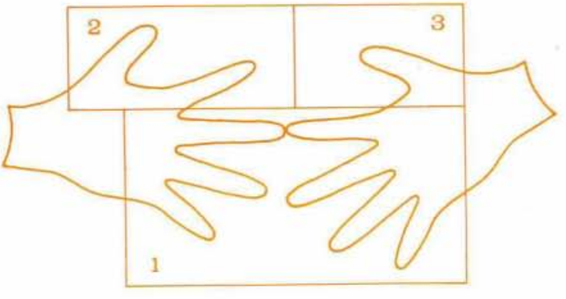
$x+y$ = število prstov v 1.skupini
$5-x$ = število prstov v 2.skupini
$5-y$ = število prstov v 3.skupini

Tako je stvar jasna!

Seveda pa je zgornja enačba še vedno pravilna, če število 5 nadomestimo s poljubnim drugim številom. Za vsako število a velja torej

$$(a+x)(a+y) = 2a(x+y) + (a-x)(a-y)$$

Od tod lahko dobimo nova računska pravila. Na primer, če obvladamo poštevanko do 9, lahko dve števili med 11 in 15 zmnožimo podobno kot prej, le da zdaj upoštevamo relacijo, ki jo dobimo, če vstavimo v zadnjo enačbo $a=10$. Izračunajmo za primer $13 \cdot 14$:



$$13 \cdot 14 = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 6 = 182$$

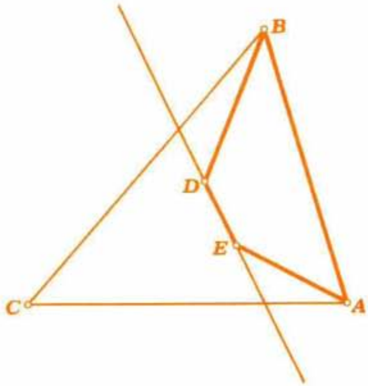
Podobno lahko množimo poljubni dve števili med 16 in 20, če poznamo produkt vsakih dveh števil med 10 in 14; v zgornji enačbi moramo vzeti a=15. In tako naprej.

Po knjigi: N.A.Court, *Mathematics in Fun and in Earnest.*

Jože Vrabec

PET TOČK

Pet točk leži v ravnini tako, da nobene tri ne ležе na premici. Dokaži, da štiri med njimi oblikujejo konveksen četverokotnik!



Rešitev.
Najmanjši konveksen lik, ki vsebuje te točke, je gotovo mnogokotnik, katerega oglišča določajo nekatere od teh petih točk, ostale pa ležijo v notranjosti lika.
Obstajajo tri možnosti:

1) *Točke sestavljajo konveksen petkotnik. Tedaj poljubne štiri med njimi zadoščajo pogoju naloge.*
2) *Štiri med njimi sestavljajo konveksen četverokotnik, peta leži v njem. Tudi v tem primeru je nalogi zadoščeno.*
3) *Tri točke, denimo* A, B, C, *oblikujejo trikotnik, preostali točki* D *in* E *pa ležita v notranjosti trikotnika* ABC. *Premica skozi* D *in* E *seka točno dve stranici trikotnika. Ti dve stranici določata oglišče, v katerem se stikata, npr.* C. *Tedaj točki* D *in* E *s preostalima točkama* A *in* B *dajeta zaželeni četverokotnik.*

Tomo Pisanski

PLOŠČINE NEKATERIH TRIKOTNIKOV

V trikotniku s stranicami a, b, c je kot nasproti a 60°. Dokaži brez uporabe trigonometrije, da je njegova ploščina

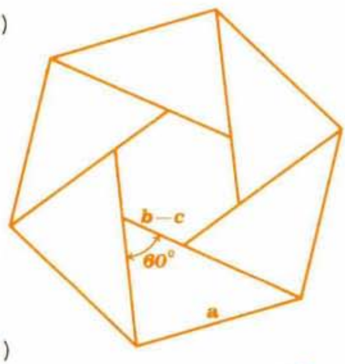
$$P = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(a^2 - (b - c)^2\right) \quad !$$

V trikotniku s kotom 120° nasproti a pa

$$P = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(a^2 - (b - c)^2\right) \quad !$$

Dokaz: Trikotnike zložimo kot kažeta sliki a) in b)

a)

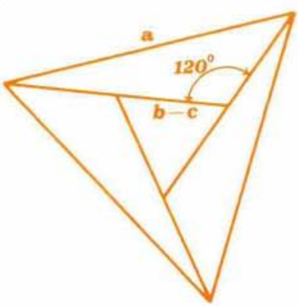


Ploščina trikotnika je enaka šestini razlike ploščin obeh pravilnih šesterokotnikov

$$P = \frac{1}{6} \left(\frac{6a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{6(b-c)^2 \sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(a^2 - (b - c)^2\right)$$

b)



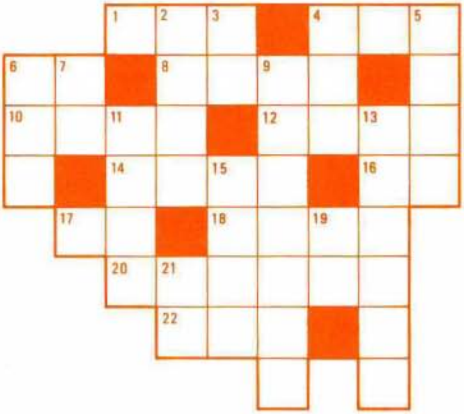
Ploščina trikotnika je enaka tretjini razlike ploščin obeh enakostraničnih trikotnikov

$$P = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \frac{(b-c)^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

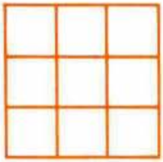
$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(a^2 - (b - c)^2\right)$$

Danijel Bezek

MATEMATIČNA KRIŽANKA



VODORAVNO:



1. Izračunaj: $12^2 - 1$!
4. Naš ljudski avto.
6. Koliko kvadratov je na desni sliki?
8. Izračunaj: $62^2 + 56^2 - 69$!
10. Seštej: $1 + 2 + 3 + \dots + 100$!
12. Andrej se je rodil 77 let po rojstvu Nikole Tesle. Kdaj je bil rojen Andrej?
14. Na koliko načinov lahko sede 8 ljudi okrog okrogle mize?
16. Koliko je ostanek pri deljenju $(2^8 - 10) : 111$?
17. Osnovo številskega sestava, v katerem velja $24 \cdot 23 = 574$, pomnoži z 2!
18. Piramida ima za osnovno ploskev trikotnik s stranicami: a = 62 mm, b = 0,073 m in c = 0,98 dm. Prostornina piramide je 9,04 cm^3. Koliko m meri višina piramide?
20. Vsota šestih števil je 16. Druga in četrta številka sta enaki. Razlika med prvo in drugo številko je pet. Vsota druge, četrte in pete številke je pet. Produkt med vsoto druge in četrte številke s peto številko je enak prvi številki. Tretja številka je 16.črka slovenske abecede.
22. Na koliko načinov lahko prenočijo štirje gostje v hotelu s šestimi enoposteljnimi sobami?

NAVPIČNO:

2. Določi vrednost polinoma $2x^5 - 7x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 10x - 848$ v točki 6!
3. Koliko cm meri ploščina tangentnega enakokrakega trapeza, če meri daljša osnovnica 9 cm, krajša pa 4 cm?
4. Izračunaj: $\sqrt[3]{13481272} : 2$!
5. Prepiši število 11000010 iz dvojiškega sistema v petiški!
6. Določi število, katerega 161,29% je vrednost izraza:

$$\frac{(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1{,}75 \cdot 1\frac{1}{8}) : \frac{7}{12}}{(\frac{17}{80} - 0{,}0325) : 400} : (6{,}79 : 0{,}7 + 0{,}3)$$

7. Reši enačbo in rezultat povečaj desetkrat:

$$\frac{x - 1/2}{0{,}75} - \frac{1}{12} - \frac{2x - 1/3}{0{,}8} + 1{,}25x = 0$$

9. Prepiši število 202 iz sedmiškega v dvojiški sestav!
11. Če deliš iskano število z 10, dobiš 556 in ostanek 6!
13. Izračunaj: $\{(6 + 9)^2 + (3/2 + 7/5)^3 \cdot (1/2)^{-2}\}$!
15. Osnovna ploskev piramide je tangentni četverokotnik. Koliko meri volumen piramide, če meri višina piramide 2 cm, obseg četverokotnika 4006 cm, polmer četverokotniku včrtanega kroga pa 3 cm?
19. Šesto praštevilo.
21. Dvomestno praštevilo, pri katerem je številčna vsota dvakratnik razlike enic in desetic.

Matematični krožek na gimnaziji v Kopru

OBVESTILO AVTORJEM

Avtorje prispevkov za Presek prosimo, da upoštevajo ob oddaji rokopisa uredniškemu odboru naslednja določila:

1. *Prispevek mora biti natipkan.*
2. *Slike, fotografije, tabele in podobno morajo biti priložene že ob oddaji rokopisa. V tekstu pa je potrebno pustiti prostor zanje.*
3. *Avtor naj po možnosti predlaga obliko članka, določi težje dele, katere bomo stavili v gostejšem tekstu, poudarjene odstavke, stavke ali besede, ki naj jih postavimo kurzivno ali na rastru ipd. Besede in matematični simboli, ki bodo postavljeni kurzivno, morajo biti valovito podčrtani.*
4. *Ob oddaji rokopisa mora avtor obvezno priložiti točen naslov, občino in številko žiro računa ali pa izjavo, da žiro računa nima.*
5. *Avtor je dolžan opraviti tiskarske korekture.*
6. *Točnejša navodila avtorjem so bila objavljena v Obzorniku za matematiko in fiziko 21 (1974) str.62.*

Tomo Pisanski

GEOFIZIKA

KAJ JE ZANIMIVO VEDETI O POTRESIH

Potresi spadajo med tiste naravne pojave, ki imajo lahko najtežje posledice: porušena mesta, na tisoče ranjenih in mrtvih, epidemije, glad itd., posebej še zato, ker nastopajo nepričakovano, brez reda in brez posebnih poprejšnjih znakov.

Pojavi, ki spremljajo potres, so zamotani in nepregledni. Zato jih je začel človek sorazmerno pozno preučevati na znanstveni osnovi. Seizmologija, veda o potresih, je zato še mlada znanost, ki pa se izredno hitro razvija. Seizmološke raziskave niso le pojasnile mnogih podrobnosti v zvezi s potresi, ampak so tudi prispevale k boljšemu spoznavanju notranje zgradbe Zemlje.

Ker so potresi pogosti v naši ožji in širši domovini in ker so njihov sestavni del tudi fizikalni pojavi, si oglejmo nekaj metod dela in dosežkov sodobne seizmologije.

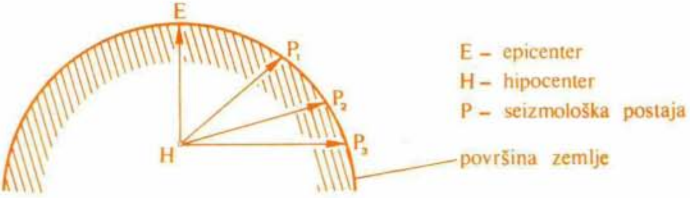
1. Osnovni podatki o potresu

Potresi nastanejo v notranjosti Zemlje. Njihov nastanek je lahko različen. Zaradi delovanja vode na rudnine (apnenec) nastanejo pod zemljo velike votline. Ko oporne stene ne morejo več nositi velikega bremena, se podzemeljska votlina zruši, kar povzroči potres. Take vrste potresov imenujemo udorne potrese. Ti potresi so razmeroma slabi, predstavljajo pa le 3% vseh potresov.

Mnogo bolj nevarni in razširjeni so tektonski potresi, saj jih je kar 90%. Njihov nastanek je povezan z geološkimi procesi, kot so lomljenje in drsenje zemeljskih plasti. Pravimo tudi, da jih povzročajo tektonske ali gorotvorne sile. Njihova jakost je velika in sežejo na velike razdalje.

Preostalih 7% potresov so vulkanski potresi, ki nastanejo ob vulkanskih izbruhih. Jakost teh potresov je sicer velika, vendar se ne občutijo na velikih razdaljah, ker se pojavljajo v majhnih globinah.

Prostor v Zemljini notranjosti, kjer nastane potres, imenujemo žarišče potresa ali hipocenter H (sl.1). Nihanje delcev, ki nastane ob potresu, se razširja od hipocentra na vse strani v obliki valov, ki jih imenujemo tudi potresni valovi. Tisto



Sl.1 *Širjenje potresnih valov*

mesto na površini Zemlje, ki ga potresni valovi najprej dosežejo (ki je hipocentru najbližje), imenujemo epicenter E. Po času prihoda potresnih valov do seizmološke postaje in po fizikalni naravi lahko na grobo razdelimo potresne valove na dve skupini. Prvi ali primarni valovi (imenujemo jih tudi P valovi), ki prispejo do opazovališča, so podobni zvočnim valovom. Podobno kot zvočni so tudi ti valovi sestavljeni iz zgoščin in razredčin. V fiziki jim pravimo longitudinalni valovi.

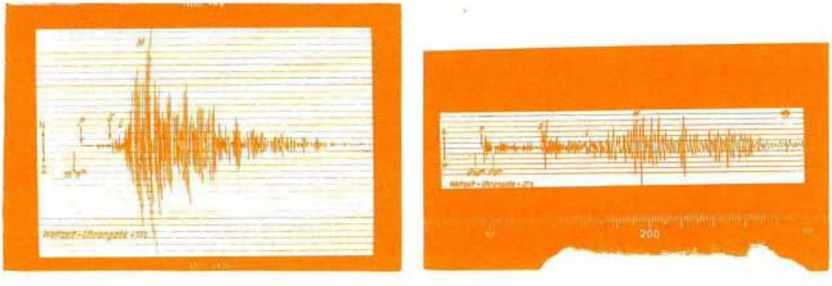
Druga skupina valov, ki prispejo do opazovalne postaje, so transverzalni valovi. Ker prispejo za longitudinalnimi valovi, jih tudi imenujemo sekundarne (S) valove. Pri longitudinalnih valovih nihajo delci v smeri širjenja valov, pri transverzalnih valovih pa pravokotno na smer širjenja. Hitrost transverzalnih valov je nekoliko manjša od hitrosti longitudinalnih valov (obe vrsti valov sta na sl.2 označeni s P in S).

2. Merjenje in opazovanje potresov

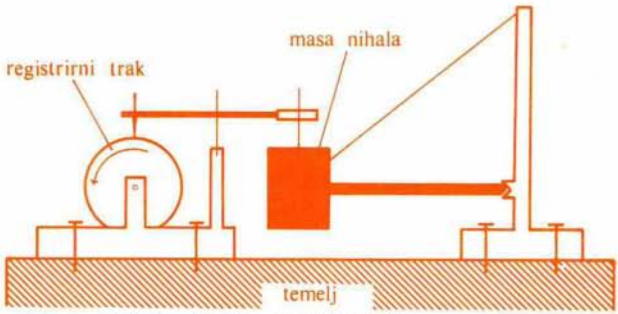
Začetki sistematičnega opazovanja potresov so temeljili samo na opazovanju posledic potresov in zbiranju raznih podatkov od ljudi, ki so preživeli potres. Tako so lahko določili čas nastanka potresa, ocenili njegovo moč in lego epicentra. Tak način zbiranja podatkov brez uporabe merilnih naprav se imenuje makroseizmična metoda za proučevanje potresov. Čeprav je to že zastarela metoda, nudi mnogokrat seizmologu dragocene podatke.

Na osnovi podatkov, ki jih zberemo po makroseizmični metodi, lahko razvrstimo potrese glede na njihovo rušilno moč v skupine. Na osnovi teh skupin so nastale prve lestvice za jakost potresov. Danes se največ uporablja v makroseizmični metodi raziskovanja potresov Mercalli-Cancani-Siebergova lestvica (MCS), ki jo je leta 1917 priznalo Mednarodno seizmološko združenje. Po tej lestvici se potresi razvrstijo na 12 stopenj. Tako npr. potres VI. stopnje ruši dimnike na zgradbah, povzroča razpoke v stenah, v zvonikih zazvonijo zvonovi, itd. Potres v Skopju, ki je bil 26. julija 1963, spada po tej lestvici v IX. stopnjo. Maksimalna jakost nedavnega potresa na Kozjanskem pa v VII. stopnjo. Potres predzadnje, XI. stopnje, je že katastrofalen. Ruši vse zidane zgradbe, povzroči razpoke v Zemljini skorji, ruši mostove, sprosti zemeljske plazove, itd.

Makroseizmična metoda za proučevanje potresov kmalu ni mogla več zadovoljiti seizmologe, saj so bili tako dobljeni podatki preveč subjektivni in odvisni od slučajnih okolnosti. Zato se je pokazala potreba po merilni napravi, ki bi objektivno beležila potresne pojave na osnovi fizikalnih zakonitosti. Prva taka priprava se je imenovala seizmoskop. S seizmoskopom lahko zabeležimo čas nastanka potresa, njegovo smer in jakost prvega sunka. Kasneje so opremili seizmoskop s pisalno napravo, ki sestoji iz valja, na katerem je pritrjen papirnat trak. Na tem traku se v obliki valovite črte zabeleži celoten potek potresa. Ta valovita črta se imenuje seizmogram (sl.2). Seizmoskop, opremljen s tako pisalno napravo, pa imenujemo seizmograf.



Sl.2 *Seizmogram*



Sl.3 *Shema seizmografa*

Osnovni princip zgradbe in delovanja seizmografa je zelo preprost. Seizmograf sestoji iz valja ali krogle z maso od nekaj deset do nekaj tisoč kilogramov, v obliki, ki je tako nameščena, da je vpliv gibanja okolice nanjo najmanjši (slika). Na to telo je pritrjen vzvod, ki je povezan s pisalno konico. Konica beleži na podlago, pritrjeno na zemljo, nastale tresljaje. Dobra ponazoritev za delovanje seizmografa je človek, ki piše v močno tresočem vlaku. V tem primeru ustreza masi seizmografa masa človeka, pisoča roka pa pisalnemu mehanizmu seizmografa. Seveda pa to, kar nastane, ni podobno seizmogramu.

Z iznajdbo seizmografa se je izboljšala metoda za določanje jakosti potresov. Ameriški seizmolog Richter je postavil novo, tako imenovano magnitudno lestvico potresnih jakosti, ki temelji na največji registrirani amplitudi potresnih valov na določeni vrsti seizmografa (Wood-Andersonov seizmograf).

Razpon magnitudne lestvice sega od magnitude M=0 do magnitude M=8,5. Spodnjo mejo (M=0) določa potres, ki povzroči na Wood-Andersonovem seizmografu v razdalji 100 km od epicentra amplitudo enega mikrona. Torej magnituda nič ne pomeni, da potresa sploh ni. Zgornja meja je postavljena empirično in tako visoko, da je do sedaj ni presegel noben potres.

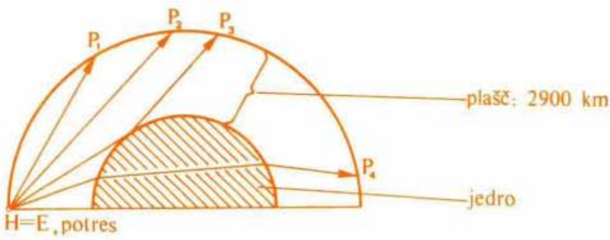
Zanimiva je primerjava med magnitudno lestvico potresov in makroseizmično lestvico MCS. Ker temelji magnitudna lestvica na merjenjih, so podatki po tej lestvici mnogo zanesljivejši. Tako moremo dobiti iz magnitud zelo točne vrednosti za energijo potresa. Nadaljna posebnost te lestvice je tudi razpon med magnitudami. Po MCS lestvici je jakost potresa npr. VI. stopnje šestkrat tolikšna kot jakost potresa I. stopnje in trikrat tolikšna kot jakost potresa II. stopnje. Pri magnitudni lestvici ne velja več tako enostavna zveza med magnitudo in jakostjo potresa. Magnitudna lestvica je logaritemska. To pomeni, da se pri desetkratni amplitudi na seizmogramu poveča magnituda za eno enoto. Magnituda je namreč po definiciji enaka logaritmu kvocienta med amplitudo potresa, ki ga merimo in amplitudo, ki je določena s karakteristikami za standardni seizmograf (Wood-Andersonov). Tako npr. povzroči potres z magnitudo 6 desetkrat tolikšno amplitudo, kot potres z magnitudo 5, stokrat tolikšno amplitudo, kot potres z magnitudo 4, itd. Zato moramo paziti pri navajanju podatkov o potresu, da ne zamenjujemo stopenj po MCS skali z magnitudami. Po MCS lestvici povzroči jakost VI. stopnje komaj vidne posledice, potres z magnitudo 6 pa ruši že cela naselja. Za primerjavo navedimo še dva podatka. Jakost potresa v Skopju, kot smo že omenili, je bila po MCS lestvici IX. stopnje, njegova magnituda pa je bila 5,5 do 6. Magnituda največjega potresa na slovenskem ozemlju, ki je bil leta 1511, je dosegla 7,37.

3. Potresni valovi nam odkrivajo Zemljino notranjost

Prodiranje človeka v Zemljine globine zelo zaostaja za raziskovanjem Zemljine površine, atmosfere in vesolja. To je zato, ker je zelo težak direkten poseg v globino zemeljske skorje. Najglobja vrtina, ki jo je uspelo napraviti v zemeljsko skorjo, je 7724 m, kar je zelo malo v primerjavi z njenim polmerom 6370 km. Zato morajo dobiti znanstveniki podatke o Zemljini notranjosti iz drugih virov, ki so posredno povezani z zgradbo Zemlje. Eden izmed takih virov so ravno potresni valovi.

Zelo stara je zamisel, da se nahaja v Zemljini notranjosti jedro, katerega gostota je veliko večja kot je gostota Zemljine skorje. Obstoj takega jedra je bilo treba potrditi in določiti globino, v kateri se jedro začne. To se je posrečilo znanemu seizmologu B.Gutenbergu že leta 1913 s pomočjo longitudinalnih potresnih valov (P valovi).

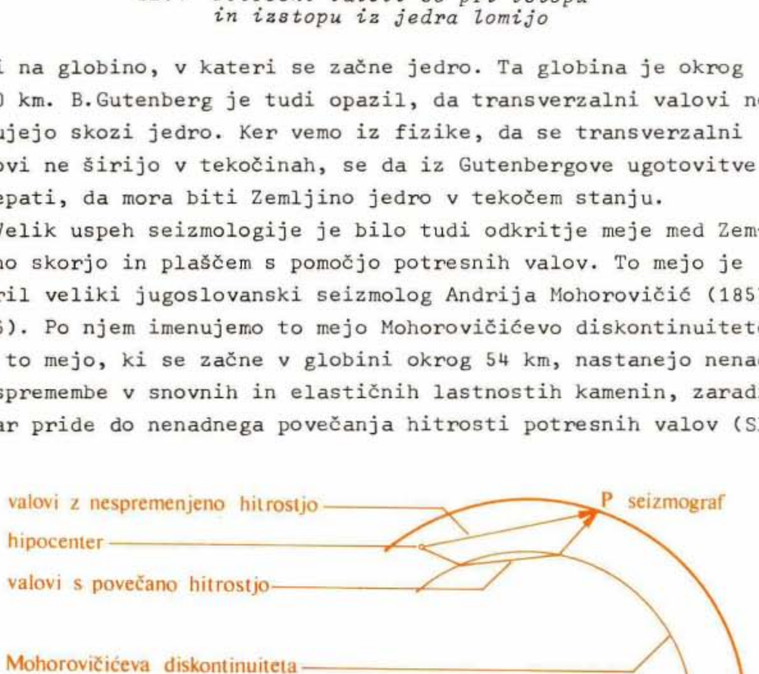
Potresni val, ki je tekel skozi Zemljin plašč, je zadel ob Zemljino jedro (Sl.4). Zaradi večje gostote jedra je nastal pri vstopu vala v jedro lom. Podobno se je val prelomil pri izstopu iz jedra. Če primerjamo tiste P valove, ki ne potekajo skozi jedro, s tistimi, ki se odbijejo ali lomijo v jedru, moremo skle-



Sl.4 *Potresni valovi se pri vstopu in izstopu iz jedra lomijo*

pati na globino, v kateri se začne jedro. Ta globina je okrog 2900 km. B.Gutenberg je tudi opazil, da transverzalni valovi ne potujejo skozi jedro. Ker vemo iz fizike, da se transverzalni valovi ne širijo v tekočinah, se da iz Gutenbergove ugotovitve sklepati, da mora biti Zemljino jedro v tekočem stanju.

Velik uspeh seizmologije je bilo tudi odkritje meje med Zemljino skorjo in plaščem s pomočjo potresnih valov. To mejo je odkril veliki jugoslovanski seizmolog Andrija Mohorovičić (1857-1936). Po njem imenujemo to mejo Mohorovičićevo diskontinuiteto. Pod to mejo, ki se začne v globini okrog 54 km, nastanejo nenadne spremembe v snovnih in elastičnih lastnostih kamenin, zaradi česar pride do nenadnega povečanja hitrosti potresnih valov (Sl.5).



Sl.5 *Širjenje potresnih valov nad in pod diskontinuitetno površino*

Navedena primera uporabe seizmologije v znanosti sta le del dosežkov moderne seizmologije. Posebno velik razvoj doživlja seizmologija v sedanjem času. Mogoče ni več daleč čas, ko človeštvo ne bo več čakalo nepripravljeno na spremembe v Zemljini notranjosti.

Karel Šmigoc

PREMISLI IN REŠI

Za nalogo "O NEPRIČAKOVANEM PRIHODU", ki je bila objavljena v 3.številki 2.letnika Preseka na str.115, smo prejeli 42 rešitev, od teh je bilo 37 pravilnih. Prijetno nas je presenetil reševalec iz Vojvodine!

Nalogo so pravilno rešili:

Zdravko Balorda, TEŠ, Ljubljana; Janko Brajnik, gimnazija, Koper; Ivan Čibej, gimnazija, Idrija; Stanislava Dešnik, Osn.š. KAREL DESTOVNIK-KAJUH, Murska Sobota; Vilko Domanjko, gimnazija M.ZIDANŠKA, Maribor; Peter Dovč, gimnazija, Kočevje; Jadran Drlje, TEŠ, Ljubljana; Milan Forštner, TEŠ, Velenje; Janez Gluhodedov, gimnazija BEŽIGRAD, Ljubljana; Barbara Gradišek, gimnazija, Kamnik; Iztok Hudoklin, Osn.š. JOŽE MOŠKRIČ, Ljubljana; Jože Kociper, gimnazija M.ZIDANŠEK, Maribor; Sonja Kocjančič, ZZUIM, Kamnik; Nadja Kogoj, Osn.š., Deskle; Marko Kogoj, gimnazija, Jesenice; Matjaž Kolenc, gimnazija, Koper; Darinko Kores, gimnazija M.ZIDANŠEK, Maribor; Jože Kos, gimnazija M.ZIDANŠEK, Maribor; Diana Lavrih, gimnazija, Kranj; Marko Lovrenčič, Osn.š. DUŠAN BORDON, Koper; Samuel Majcen, TEST šola, Maribor; Marko Majer, gimnazija Celje; Marko Malnar, gimnazija, Kočevje; Branko Mihelič, TEST šola, Maribor; Janez Potočnik, gimnazija, Ljubljana; Franjo Pungeršič, TSŠ Krško; Marija Ravnak, gimnazija, Celje; Miran Ravnjak, gimnazija, Velenje; Boštjan Resman, Osn.š. A.T.LINHART, Radovljica; Edita Rožman, EŠC, Murska Sobota; Ivan Stojmenović, J.J.Zmaj, Odžaci; Nada Širca, gimnazija, Koper; Barbara Špička, gimnazija M.ZIDANŠEK, Maribor; Maksi Tuta, gimnazija, Tolmin; Stojan Ulenik, ZZUIM, Kamnik; Bojan Zadel, gimnazija, Koper; Pavel Zatler, Osn.š. DANILA KUMAR, Ljubljana.

Žreb je izbral Marka Kogoja z Jesenic, Jožeta Kosa iz Maribora in Boštjana Resmana iz Radovljice. Nagrajenci prejmejo knjigo Ivan Vidav: Rešeni in nerešeni problemi matematike.

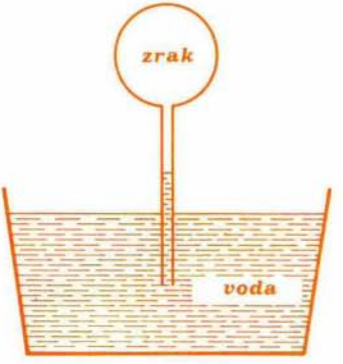
Objavljamo rešitev, ki nam jo je poslal Pavel Zatler, dijak osmega razreda osnovne šole.

Če sta mož in žena prispela 10 minut prej domov, je imela žena 5 minut manj vožnje v vsako smer, torej je srečala moža 5 minut pred določenim časom; mož pa je odšel s postaje 1 uro pred določenim časom in je hodil 5 minut manj kot 1 uro, torej 55 minut.

Jože Dover

GALILEJEV TERMOMETER

Galilei si je za merjenje temperature zraka napravil takle termometer:
Na kakšnem pojavu je Galilei osnoval termometer, kakšne muhe je ta imel in kdaj je kazal prav? Napravi si tak termometer sam, ga umeri in opazuj!



Rešitve s kuponom pošljite na naslov: PRESEK - Premisli in reši, Jadranska 19, p.p.227, 61001 Ljubljana.

Jože Dover

Zgornja podjetja so sofinancirala republiško tekmovanje iz matematike v Postojni leta 1975.

KUPON 1
1975 1976
PREMISLI IN REŠI

REŠITVE NALOG

BISTROVIDEC

Rešitev naloge BISTROVIDEC, PRESEK **2** (1974/75)3

V uredništvo je prispelo veliko rešitev, kar 24 smo jih našteli, vendar samo 12 pravilnih. Pravo pot so ubrali naslednji mladi bralci: *Miran Baloh, Osnovna šola dr. Vita Kraigherja, Ljubljana; Jože Jan, Knezdol 4, Trbovlje; Vojko Kraševec, Gimnazija Trbovlje; Marjan Penšek, Gimnazija Ravne na Koroškem; Saša Predovič, Osnovna šola Prežihov Voranc, Ljubljana; Gregor Starman, Gimnazija Kranj; Nada Širca, Gimnazija Koper; Vojko Zavodnik, Osnovna šola Žirovnica; Minka Zavrl, Pedagoška gimnazija, Ljubljana; Dušan Zorenč, Grosuplje, Zagradec 12; Ester Zimic, Osnovna šola Kanal in nepodpisani reševalec.*

Reševalci so delali naslednje napake (označimo z M misijonarja in z L ljudožerca):

1) ... M in L se peljeta na drugi breg, M se izkrca, L odvesla in se vrne še z enim L, ga pusti na bregu, odvesla,..
2) ... M-ji in L-i se bodo peljali trikrat: vsakič gresta čez en M in en L ...
3) ... dva se peljeta v čolnu, dva plavata poleg njega ...

Eden izmed reševalcev je poleg obširne rešitve priložil še vžigalice, ki so mu pomagale ugnati nalogo in jih toplo priporoča vsem, ki jim naloga ne gre. Večina reševalcev je priložila tudi diagram prevažanja, nekateri so se zadovoljili samo z opisom.

Poglejmo pravilno rešitev: *Najprej se odpeljeta dva L-a. Eden ostane na bregu, drugi gre iskat še tretjega L-a in ga takisto prestavi na drugo stran. Nato se vrne in prepusti čoln dvema M-jema. Ko ta dva prideta na novi breg, se v čoln vkrca en L, en M pa poprej izstopi na kopno. Tako se M in L vrneta na stari breg in zopet gresta dva M-ja na novega. Čoln prepustita L-u, ki v dveh prevozih pripelje po enega od L-ov na drugo stran.*

Ali ste se vprašali, če je to *najmanjše* število prevozov? Poskusite! Poskusite poiskati tudi koliko najmanj ljudi mora znati veslati iz obeh skupin, če naj bo problem še rešljiv! Tudi za ta primer poiščite najmanjše število prevozov in tudi dokažite, da hitreje ne gre! Pišite nam, kako vam je uspelo!

Problem, ki smo ga ravnokar obravnavali, sodi pravzaprav v danes izredno razvito in popularno matematično vejo - *teorijo grafov*. Kogar kaj več zanima o tej stvari, ga vabimo, da si pogleda zanimiv članek *dr. Alojzija Vadnala*, ki je izšel pred leti v *Proteusu* (*letnik* 32, *št.* 5).

Dušan Repovš

KUPON 1

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

REŠETO POSEBNE VRSTE, Presek **2** (1973/74) str.47 - Rešitev

4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
7	12	17	22	27	32	37	42	47	52
10	17	24	31	38	45	52	59	66	73
13	22	31	40	49	58	67	76	85	94
16	27	38	49	60	71	82	93	104	115
19	32	45	58	71	84	97	110	123	136
22	37	52	67	82	97	112	127	142	157
25	42	59	76	93	110	127	144	161	178
28	47	66	85	104	123	142	161	180	199
31	52	73	94	115	136	157	178	199	220
34	57	80	103	126	149	172	195	218	241

Dokazati je treba tole: če je število n v zgornji tabeli, potem $2n + 1$ ni praštevilo, če ga ni, je $2n + 1$ praštevilo.

Ugotovimo najprej, katero število se nahaja v k-ti vrstici in m-tem stolpcu. V prvem stolpcu je v k-ti vrstici število $4 + (k-1)\cdot 3 = 3k + 1$. V k-ti vrstici je pa aritmetično zaporedje z razliko $3 + (k-1)\cdot 2 = 2k + 1$. Zato je na m-tem mestu v k-ti vrstici število $n = 3k + 1 + (m-1)(2k+1) = 2km + k + m$.

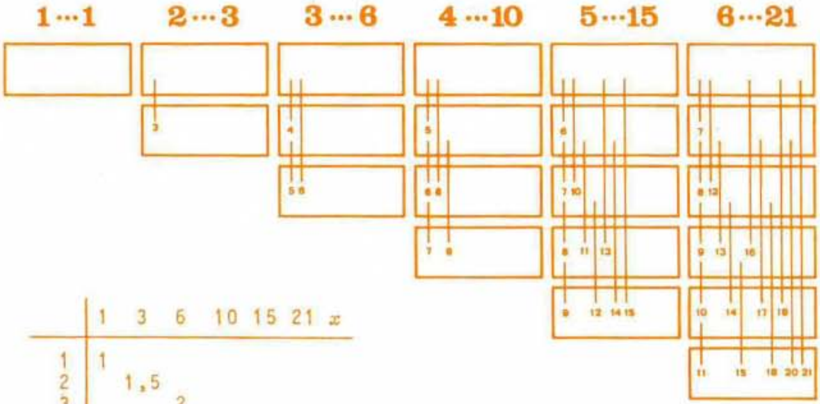
Tedaj je $2n + 1 = 4km + 2k + 2m + 1 = (2k+1)(2m+1)$ produkt dveh števil, ki sta obe večji od 1 in seveda ni praštevilo.

Recimo, da števila n ni v tabeli. Število $2n+1$ je liho. Če bi ne bilo praštevilo, bi ga mogli zapisati kot produkt dveh lihih števil (morda na več načinov) $2k+1$ in $2m+1$. S tem bi pa že ugotovili, da se število n nahaja v k-ti vrstici in m-tem stolpcu, torej nekje v tabeli. Protislovje nas prepriča, da se $2n+1$ ne da razstaviti in je zato praštevilo.

Peter Petek

REŠITEV NALOGE PRISPEVKA **VESELA GEOMETRIJA**
Presek 2, 1973/74, str.45

Naloga s pravokotniki



	1	3	6	10	15	21	x
1	1						
2		1,5					
3			2				
4				2,5			
5					3		
6						3,5	
n							$\frac{x}{n}$

$$x = n\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Obrazložitev: Ob načrtovanju in preštevanju pravokotnikov sem prišel do lestvice, ki je prikazana na diagramu. Kot izhodišče za formulo sem vzel n (število pravokotnikov), ker je od njega odvisno število "kombiniranih pravokotnikov". S primerjanjem števila n z x (število "kombiniranih" pravokotnikov) sem prišel do zaključka, da pri deljenju števila x z n dobimo števila, ki si sledijo za 0,5 naprej.

N.pr. za n= 4

10 : 4 = 2,5 je polovica n plus 0,5

$\frac{4}{2} = 2, \quad 2 + 0,5 = 2,5$

Nato sem naredil obratno računsko operacijo od deljenja - množenje. Dobil sem število x in s tem tudi ključ do formule. Formulo sem sestavil takole:

$$n\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = x.$$

Nato sem seštel števili v oklepaju in dobil: $x = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$

Srečko Starič

Naloga s trikotniki:

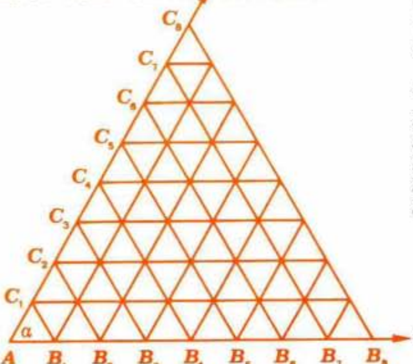
Naj bo k dolžina stranice velikega trikotnika. Tedaj je malih trikotnikov k^2.

V ravnini izberemo enakostranični trikotnik AB_1C_1 s stranico 1. Dodajamo mu nove nize trikotnikov. Tako dobimo trikotnike AB_2C_2, AB_3C_3, AB_4C_4, ..., AB_kC_k, ki imajo skupen kot α.

Najprej skušamo ugotoviti, koliko novih trikotnikov (s poljubnimi legami in ploščinami) nastane, če dodamo nov niz malih trikotnikov. Vzemimo niz $B_{k-1}B_kC_kC_{k-1}$, kjer je k poljubno naravno število. Nastanejo trikotniki z lego Δ in lego ∇. Z opazovanjem slike pridemo do naslednje razpredelnice:

$S_1\Delta$	$S_2\nabla$	stranica
k	$k-1$	$1s$
$k-1$	$k-3$	$2s$
$k-2$	$k-5$	$3s$
$k-3$	$k-7$	$4s$
$k-4$	$k-9$	$5s$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
1	0	ks

(s je stranica malega trikotnika.)



Število vseh novih trikotnikov označimo z S_k. $S_k = S_1 + S_2$

1) $k = 2m \Longrightarrow S_k = (1+2+3+...+k) + (1+3+5+...+(k-1)) =$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{2k^2+2k+k^2}{4} = \frac{3k^2+2k}{4} = \frac{12m^2+4m}{4} = 3m^2 + m$$

2) $k = 2m-1 \Longrightarrow S_k = (1+2+3+...+k) + (2+4+6+...+(k-1)) =$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + \frac{k-1}{2} = \frac{2k^2+2k+k^2-2k+1+2k-2}{4} = \frac{3k^2+2k-1}{4} =$$

$$= 3m^2 - 2m$$

Vsota vseh trikotnikov je vsota vseh S_k.

1) $k = 2m \Longrightarrow \Sigma = \sum_{i=1}^{m}(3i^2+i) + \sum_{i=1}^{m}(3i^2-2i) = \sum_{i=1}^{m}(6i^2-i) =$

$$= 6\sum_{i=1}^{m} i^2 - \sum_{i=1}^{m} i = 6\cdot\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{4m^3+5m^2+m}{2}$$

2) $k = 2m-1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} = \frac{4m^2+5m^2+m}{2} - (3m^2+m) = \frac{4m^3-m^2-m}{2}$

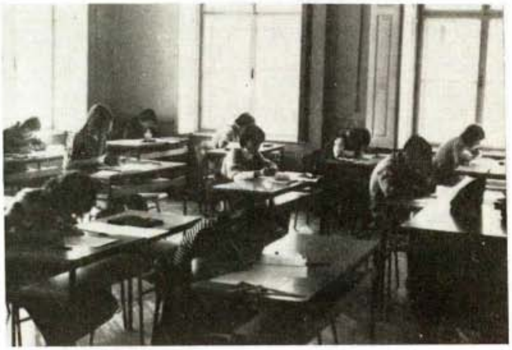
m	1		2		3		4		m	
k	1	2	3	4	5	6	7	8	$2m-1$	$2m$
$p\Delta$	1	4	9	16	25	36	49	64	$4m^2-4m+1$	$4m^2$
Σ	1	5	13	27	48	78	118	170	$\frac{4m^3-m^2-m}{2}$	$\frac{4m^3+5m^2+m}{2}$

Monika Kapus

NALOGE-TEKMOVANJA

OBČINSKA TEKMOVANJA ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE V LETI 1975

17. maja je bilo v vseh slovenskih občinah tekmovanje učencev 6., 7. in 8. razreda osnovnih šol za srebrno Vegovo priznanje. Sodelovalo je 3 500 učencev, od katerih je 1 250 dobilo srebrno Vegovo priznanje.



Učenci med reševanjem tekmovalnih nalog

VI. razred

1. Če seštejemo zmanjševanec, odštevanec in razliko, dobimo 624. Razlika je za 56 večja od odštevanca. Koliki so zmanjševanec, odštevanec, razlika?
2. V tovarni so povečali načrtovano proizvodnjo v prvem polletju za 18%, v drugem polletju pa še za 12% glede na prvo polletje. Kolikšno je bilo skupno povečanje glede na načrtovano proizvodnjo?
3. V pravokotnem trikotniku ABC je stranica AB hipotenuza. Podaljšaj jo preko krajišča A za dolžino stranice AC in preko krajišča B za dolžino stranice BC. Dobljeni krajišči E in F poveži z ogliščem C! Koliko meri kot ECF?
4. V enakokrakem trapezu $ABCD$ merita osnovnici 8 cm in 12 cm, višina 5 cm. Razpolovišča trapezovih stranic so oglišča novega štirikotnika.
   a) Kakšen lik je to?
   b) Primerjaj njegovo ploščino s ploščino trapeza!

VII. razred

1. $((-\frac{4}{9})^2 : ((-\frac{2}{3})^3)^2)^2 : (-\frac{3}{4})^2 =$

2. Poišči dva taka ulomka z enomestnim imenovalcem, ki sta večja od $\frac{7}{9}$, toda manjša od $\frac{8}{9}$!

3. V enakokrakem trapezu je krajša vzporednica za 12 cm daljša od kraka, krak pa je za 22 cm krajši od daljše vzporednice. Obseg trapeza meri 86 cm. Izračunaj njegovo ploščino!

4. Na premici p so točke A, B in C tako, da je $\overline{AB} = 2{,}5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm. V točki A postavi pravokotnico na premico p in določi na njej točko M tako, da je $\overline{AM} = 2$ cm; na pravokotnici iz točke C na isti strani premice p določi točko N tako, da je $\overline{CN} = 7{,}5$ cm. Pokaži, da je trikotnik MBN pravokoten!

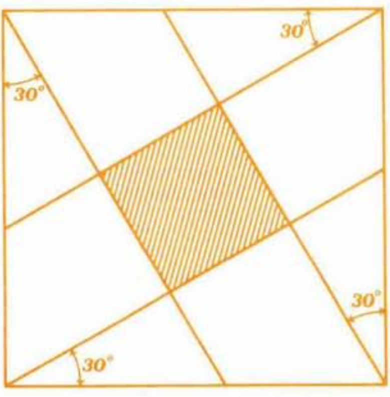
VIII. razred

1. Kraja A in B sta 200 km vsaksebi. V kraju A stane tona premoga 400 dinarjev, v kraju B pa 480 dinarjev. Prevoz stane 20 dinarjev za kilometer in tono.
   a) Za katere kraje med krajema A in B je ugodneje kupovati premog v kraju B?
   b) Za kateri kraj med krajema A in B je vseeno, kje nabaviti premog?

2. V škatli so bele in črne kroglice. Njihovo število je večje od 300, pa manjše od 400. Če jemljemo iz škatle po 10 kroglic ali če jih jemljemo po 12, jih v škatli ostane vselej po 7. Črnih kroglic je za 25 več kot belih. Koliko je belih in koliko črnih kroglic?

3. Valju s prostornino 18π dm^3 je včrtana piramida, ki ima za osnovno ploskev enakokraki pravokotni trikotnik s hipotenuzo $3\sqrt{2}$ dm. Izračunaj prostornino te piramide!

4. Iz kovinske plošče, ki ima obliko kvadratne prizme z osnovnim robom $a = 1$ dm in debelino 5 mm, izsekamo odprtino, kakor kaže slika. V kakšnem razmerju sta masa prvotne in masa sedanje plošče?



Pavle Zajc

POROČILO O ŠOLSKIH TEKMOVANJIH IN O REPUBLIŠKEM TEKMOVANJU SREDNJEŠOLCEV V MATEMATIKI

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS organizira vsako leto republiško tekmovanje v matematiki za srednješolce. Na tekmovanju se dijaki gimnazij in srednjih tehniških šol pomerijo v reševanju zahtevnejših matematičnih nalog, ki jih lahko rešijo z znanjem, pridobljenim v šoli, so pa težje kot običajne šolske naloge in zahtevajo več premišljevanja. Srednješolska tekmovanja v matematiki so tradicionalna, saj je bilo letošnje republiško tekmovanje že devetnajsto.

Zadnja leta se je republiških tekmovanj udeleževalo precejšnje število dijakov, vedno več kot 200, zato republiškega tekmovanja ni bilo mogoče organizirati v kakem manjšem kraju. Ker pa smo želeli, da bi bilo mogoče organizirati republiško tekmovanje tudi v manjših krajih in da bi tekmovalo čim večje število dijakov, smo se pri Društvu letos prvič odločili za predtekmovanja po posameznih šolah, od koder bi potem le najboljši prišli na republiško tekmovanje. Predloge, da bi organizirali šolska tekmovanja, smo poslali na 58 srednjih tehniških šol in gimnazij. Tekmovanja je organiziralo okoli 30 šol in v celoti je tekmovalo na šolskih tekmovanjih več kot 800 dijakov. Šolska tekmovanja so bila na vseh šolah 22. marca in tekmovalci so povsod reševali iste naloge, ki smo jih prej pripravili pri Društvu. Kljub temu, da je bilo s šolskimi tekmovanji pritegnjenih veliko število dijakov, štirikrat toliko, kot jih je v zadnjih letih tekmovalo na republiških tekmovanjih, bi želeli, da bi bila šolska tekmovanja še na več šolah.

Na osnovi uspehov na teh in na prejšnjih republiških tekmovanjih smo za letošnje republiško tekmovanje izbrali 88 dijakov. Republiško tekmovanje je bilo 5. aprila na gimnaziji v Postojni, tekmovalo je 82 dijakov. Aktiv profesorjev matematike na gimnaziji je pod pokroviteljstvom Skupščine občine Postojna tekmovanje v zadovoljstvo vseh prisotnih tekmovalcev in članov komisije zelo dobro organiziral. Tekmovalci so si po tekmovanju, ki je bilo dopoldne, ogledali Postojnsko jamo, popoldne pa so prisostvovali razglasitvi rezultatov. Tekmovalna komisija je podelila 5 prvih, 5 drugih in 8 tretjih nagrad in 24 pohval.

Nagrajeni so bili naslednji dijaki:

v 1.razredu:	2.nagrada:	Oskar Jericijo, gimn. Nova Gorica;
		Edmond Rusjan, I.gimn. Ljubljana;
	3.nagrada:	Marko Majer, gimn. Celje
v 2.razredu:	1.nagrada:	Gorazd Cvetič, gimn. M.Zidanška, Maribor;
		Marjan Kromar, gimn. M.Zidanška, Maribor;
		Luka Šušteršič, I.gimn. Ljubljana;
	2.nagrada:	Janez Pleško, I.gimn. Ljubljana;
	3.nagrada:	Igor Jenčič, II.gimn. Ljubljana;
		Leon Žlajpah, gimn. Celje;
		Matjaž Vidmar, gimn. Nova Gorica;
		Jolanda Babič, gimn. Postojna;
v 3.razredu:	3.nagrada:	Vasja Vehovar, gimn. Ajdovščina
v 4.razredu:	1.nagrada:	Mirjam Cvetič, gimn. M.Zidanška, Maribor;
		Bojan Mohar, gimn. Kočevje;
	2.nagrada:	Rajko Krivec, gimn. Idrija;
		Robert Reinhardt, I.gimn. Ljubljana;
	3.nagrada:	Franc Forstnerič, V.gimn. Ljubljana;
		Bogdan Vuk, gimn. Nova Gorica.

Za zvezno tekmovanje srednješolcev v matematiki, ki je bilo 19.aprila v Beogradu, je komisija izbrala 15 tekmovalcev.

NALOGE S ŠOLSKIH TEKMOVANJ

1.razred

1. Izračunaj $\dfrac{3xy(x+y) + x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + 2xy}$, če je $x = 1 + \sqrt[4]{2}$, $y = 1 - \sqrt[4]{2}$

2. S katerekoli točke na osnovnici enakokrakega trikotnika potegni pravokotnici na oba kraka. Dokaži, da je vsota odsekov na pravokotnicah do presečišč s krakoma enaka višini na krak trikotnika.

3. Dokaži, da je razlika kvadratov dveh naravnih števil, ki nista deljivi s 3, deljiva s 3.

4. Nad krakoma enakokrakega trikotnika $\Delta\, ABC$ ($AC \equiv BC$) sta v zunanjosti trikotnika konstruirana enakostranična trikotnika $\Delta\, ACD$ in $\Delta\, BEC$. Dokaži, da sta daljici BD in AE skladni, ter da se sekata na višini na osnovnico AB!

2.razred

1. Pokaži, da so točke $A(0,2,-4)$, $B(2,5,2)$, $D(3,-4,-2)$ oglišča pravokotnika in določi koordinate neznanega oglišča!

2. Določi parameter λ tako, da bo sistem

$$2x + 2\lambda y = 1 + \lambda$$
$$\lambda x - 3\lambda y = 5$$

enolično rešljiv in bosta vrednosti neznank enaki. Poišči tudi njegovo rešitev!

3. Kako je treba presekati s premico trikotnikovi stranici AB in AC v točkah P ($P \in AB$) in Q ($Q \in AC$), da bo $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$?

4. Reši enačbo

$$9^x - 2\cdot 15^x - 3\cdot 25^x = 0 \quad !$$

3. razred

1. Poišči vse rešitve enačbe $x^{10} - 25x^8 + 144x^6 = 0$!

2. Poišči vse rešitve enačbe $|\sin x| = |\cos x|$

3. Naj bodo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ostri koti in naj bo
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{7}$, $\mathrm{tg}\delta = \frac{1}{8}$
Dokaži, da je $$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{\pi}{4}$$

4. Dokaži:
a) za poljubni pozitivni števili p, q velja $\frac{p^2 + q^2}{2pq} \geqq 1$
b) če je v trikotniku $ab = c$, tedaj je
$$0 \leqq \gamma \leqq 60^\circ \text{ !}$$

4. razred

1. Reši enačbo $3 + 12 + 48 + \ldots + x = 4095$!

2. Določi x tako, da bo četrti člen v razvoju binoma
$$\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x + 1}} + \sqrt[12]{x}\,\right]^6 \quad \text{enak } 200.$$

3. O funkciji $y = f(x)$ vemo naslednje:
a) definirana je za vsak $x \in R$
b) $f(x) = -f(-x)$ za vsak $x \in R$ (funkcija je liha)
c) $f(x) = f(x+1)$ za vsak $x \in R$ (funkcija je periodična s periodo 1)
d) $f(x) = 1$ za $0 < x < \frac{1}{2}$
Nariši graf funkcije in poišči vse točke, v katerih funkcija ni zvezna !

4. Na koliko različnih načinov lahko pridemo po celoštevilski premici iz izhodišča (točka 0) po n korakih v točko $m \geq 0$, če se lahko v vsakem koraku premaknemo ali za eno mesto v levo ali za eno mesto v desno. Ali lahko pri vsakem n pridemo v točko m ?

NALOGE Z REPUBLIŠKEGA TEKMOVANJA

1. razred

1. Dokaži, da sta trikotnika z enakima obsegoma in paroma skladnimi koti skladna.

2. Dokaži, da vsota kvadratov petih zaporednih celih števil ne more biti kvadrat celega števila.

3. Bodita p in q vzporedni premici, $A \in p$, $B \in p$, $C \in q$, $D \in q$. Premica r naj bo vzporedna s p in q in naj seka daljico AC. Dokaži, da r seka tudi daljico BD.

4. Naj bodo a_1, b_1, c_1 in a_2, b_2, c_2 stranice pravokotnih trikotnikov (c_1 in c_2 sta hipotenuzi). Dokaži, da velja $a_1a_2 + b_1b_2 = c_1c_2$ natanko tedaj, ko je
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

2.razred

1. Dokaži, da med stranicami trikotnika velja odnos $a - b + 3c = 0$, če je nosilka težiščnice na stranico b pravokotna na nosilki stranice c.

2. Dokaži, da velja
$$\frac{\log_a x \cdot \log_x (b/a)}{\log_x b \cdot \log_{ab} x} = \log_a b - \log_b a ,$$
če so a, b, x realna števila, večja od 1.

3. Reši sistem 101 enačb s 101 neznankami
$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} + x_{101} = 0$$
$$x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = \dots = x_{100} + x_{101} = 1$$

4. Dokaži, da velja neenakost $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ za poljubni realni nenegativni števili a,b.
Dokaži nato, da je
$$p \le \left[\frac{\sigma(\sqrt{2} - 1)}{2}\right]^2 ,$$
če je p ploščina, σ pa obseg pravokotnega trikotnika.

3.razred

1. Kakšnemu pogoju morata zadoščati a in b, da bosta rešitvi enačbe
$$x^2 - 2ax + b = 0$$
sinusa dveh komplementarnih kotov?

2. Pri katerih celih k ima kvadratna enačba $x^2 + kx + k + 17 = 0$ celoštevilske korene?

3. Poišči stranici b in c trikotnika, če poznaš a, v_a in kot α! Kdaj naloga ni rešljiva?

4. Poišči tisti kompleksni koren enačbe $x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 4 = 0$, katerega argument je $\pi/4$!

4.razred

1. Za katere točke $T(x,y)$ v ravnini je $\frac{(y-x)(xy-1)}{(y-x)^2+(xy-1)^2} = 0$?

2. Skozi točko $T_1(-1,0)$, ki leži na krožnici $x^2 + y^2 = 1$, položi šop premic.
   a) Naj bo naklonski koeficient premice šopa enak k. Izrazi s k koordinati drugega presečišča $T(x,y)$ te premice s krožnico!
   b) Izrazi x, y in k s kotom ϕ, ki ga oklepa normala na krožnico v $T(x,y)$ s pozitivno smerjo osi x. Odtod izrazi $\cos\phi$ in $\sin\phi$ s $\mathrm{tg}(\phi/2)$!

3. Pri kakšnih vrednostih parametra a ima enačba $x = e^{ax}$ vsaj eno rešitev?

4. Zaporedje $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ je simetrično: $a_j = a_{n-j}$ $(j=0,1,\dots,n)$
   a) poišči vsoto $\sum_{j=0}^{n} j a_j$, če veš, da je vsota zaporedja enaka S.
   b) s pomočjo dobljenega rezultata izračunaj vsoto $\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j}$

Josip Globevnik in Jože Malešič

NOVE KNJIGE

REVIJE ZA MLADE

V Jugoslaviji izhaja več revij namenjenih mladim bralcem. V nadaljevanju objavljamo seznam najbolj zanimivih z nekaterimi podatki, ki bi zanimale nove naročnike.

MATEMATIKA

ARHIMEDES - naučno-popularni matematički časopis za učenike 5. do 8.razreda osnovne škole. Klub mladih matematičara "Arhimedes", Beograd, Narodnog fronta 43, pp 988. Izhaja petkrat letno. Jezik srbohrvatski.

MATEMATIČKI LIST za učence osnovne šole. Društvo matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije. Beograd, Knez Mihajlova 35. Izhaja petkrat letno. Jezik srbohrvatski.

MATEMATIKA-FIZIKA

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učence srednjih šol. Društvo matematičara i fizičara SR Hrvatske. Zagreb, Ilica 16. Izhaja štirikrat letno. Jezik srbohrvatski.

PRESEK - List za mlade matematike, fizike in astronome. Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije. Ljubljana, Jadranska 19, pp 227. Izhaja štirikrat letno. Jezik slovenski.

MATEMATIKA-NARAVOSLOVNE VEDE

PRIRODA - Hrvatsko prirodoslovno društvo. Zagreb, Ilica 16/III. Izhaja mesečno. Jezik srbohrvatski.

PROTEUS (z dodatkom Naše nebo) - Prirodoslovno društvo Slovenije, Mladinska knjiga, Ljubljana, Titova 145. Izhaja mesečno. Jezik slovenski.

ASTRONOMIJA

ASTRO AMATER - Akademsko astronomsko društvo. Sarajevo. Jezik srbohrvatski.

VASIONA - Časopis za astronomijo in astronavtiko. Astronomsko društvo "Rudjer Bošković". Beograd. Narodna observatorija, Kalemegdan. Izhaja tromesečno. Jezik srbohrvatski.

TEHNIČNE VEDE

ABC tehnike - Narodna tehnika SR Hrvatske. Zagreb, Dalmatinska 12. Izhaja mesečno. Jezik srbohrvatski.

ČOVJEK I SVEMIR - Poljudnoznanstveni časopis. Zvjezdarnica u Zagrebu i Astronomsko-astronautičko društvo SRH. Zagreb, Opatička 22. Izhaja dvomesečno. Jezik srbohrvatski.

GALAKSIJA - Časopis za popularizacijo znanosti s časopisom za zrakoplovstvo. Novinsko izdavačko preduzeće "Duga" Beograd, Vlajkovićeva 8. Izhaja mesečno. Jezik srbohrvatski.

NAUČNI PODMLADAK - TEHNIČKE NAUKE - Stručno udruženje studenata Univerziteta u Nišu, Mike Paligorića 2. Izhaja tromesečno. Jezik srbohrvatski.

OTO ZABAVNIK - Znanost-tehnika-priroda. "Tehnika", izdavačko preduzeće. Beograd, Kneza Miloša 7/IV. Izhaja tedensko. Jezik srbohrvatski.

RADIO AMATER - Časopis Saveza radioamatera Jugoslavije. Novinsko izdavačko preduzeće "Tehnička knjiga". Beograd, Bulevar revolucije 44. Izhaja mesečno. Jezik srbohrvatski.

TEHNIČKE NOVINE - Jugoslovanski list za znanost in tehniko. List Veća Narodne tehnike-Saveza organizacija za tehničku kulturu Jugoslavije. Tehnička knjiga, izdavačko preduzeće. Beograd, 7.jula 26/I. Izhaja mesečno. Jezik srbohrvatski.

TIM - Revija za tehnično in znanstveno dejavnost mladine. Tehniška založba Slovenije. Ljubljana, Lepi pot 6. Izhaja mesečno. Jezik slovenski.

ŽIVLJENJE IN TEHNIKA - Revija za poljudno tehniko, znanost in amaterstvo. Tehniška založba Slovenije. Ljubljana, Lepi pot 6. Izhaja mesečno. Jezik slovenski.

Tomaž Fortuna

V Sloveniji je več kot dvesto fizikov. Velika večina je v svojem poklicu zelo zadovoljna. Njihovo delo je vznemirljivo in vedno na pragu novega

ALI NE BI TUDI TI POSTAL FIZIK

- **Ali te zanima raziskovanje v fiziki ali sorodnih vedah, astronomiji, meteorologiji in biofiziki**
- **ali uvajanje novih dosežkov znanosti in merilne tehnike v industrijo**
- **ali delo v šoli, razlaganje osnovnih zakonitosti narave**
- **ali reševanje obsežnih raziskovalnih in tehničnih problemov z računalnikom**
- **ali uvajanje sodobnih fizikalnih metod v medicino**
- **ali raziskovanje pojavov v ozračju v zvezi z vremenom in varovanjem zdravega okolja**

Če te zanima katero od teh delovnih področij, se odloči za študij fizike na ljubljanski univerzi. V okviru tega študija lahko izbiraš med naslednjimi študijskimi smermi: fiziko z dodatnimi usmeritvami v raziskovanje, v tehnologijo, v pouk fizike in v računalništvo ter astronomijo in meteorologijo.

V fiziki se ne uveljavljajo samo izredni talenti. Dobrodošel je vsak mlad človek z veseljem do dela.

V naših tovarnah, šolah in laboratorijih, ob merilnih instrumentih in računalnikih je za fizike dovolj zanimivega dela

Oddelek za fiziko
VTO Fakultete za naravoslovje in tehnologijo
Ljubljana, Jadranska 19, tel. 61-432

NALOGE

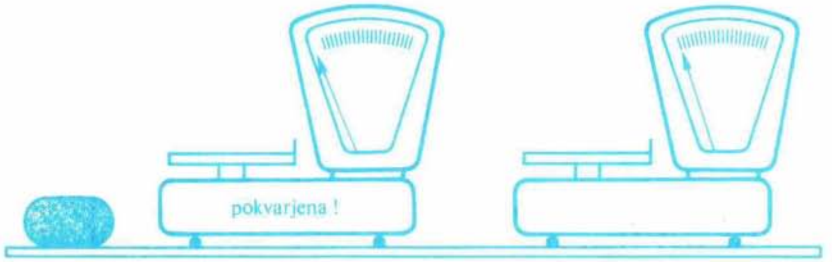
KAKO REŠUJEMO NALOGE IZ MATEMATIKE IN FIZIKE?

Matematik in fizik skušata novo nalogo prevesti na reševanje že znane naloge. Poglejmo primer!

Naloga 1. Na pokvarjeni tehtnici je zavitek, ki ga moramo stehtati. Poleg pokvarjene tehtnice stoji dobra tehtnica. Kaj moramo napraviti?

Ne dvomim, da boste pravilno odgovorili. Zavitek je treba preložiti na dobro tehtnico in ga stehtati. Prav! Zdaj pa k drugi nalogi!

Naloga 2. Zavitek, ki ga moramo stehtati, stoji poleg pokvarjene tehtnice, poleg te pa stoji dobra tehtnica. Kaj moramo napraviti?



Zdaj pa gotovo mislite, da je treba zavitek položiti na dobro tehtnico in ga stehtati. Ne! Treba ga je položiti na pokvarjeno tehtnico, potem pa ... Kaj potem? I, saj to je naša naloga št.1, ki jo že znamo rešiti. Kar poglejte zgoraj, kako se reši!

Dušan Modic

DVE NALOGI

1. V menzuro z notranjim polmerom 8 cm natočimo vodo in spustimo vanjo lesen valj s polmerom 4 cm, višino 12 cm in specifično težo 0,6 kp/dm^3. Za koliko se pri tem dvigne voda v menzuri ?

   (x=2,4 cm)

2. V valju z notranjim polmerom 4 cm je voda. V ta valj potisnemo votel valj, katerega zunanji polmer je enak polmeru valja z vodo. Kolik mora biti manjši polmer votlega valja, da se dvigne v njem voda za toliko, za kolikor smo potisnili votli valj v valj z vodo ?

   ($x=2\sqrt{2}$ cm)

Karel Šmigoc

NALOGE, KATERE SO NAM POSLALI NAŠI BRALCI

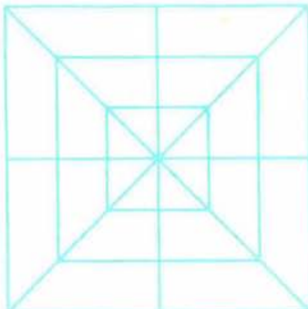
1. Če odplačamo $\frac{1}{4}$ dolga, nato polovico ostanka in še 5400 din, je ves dolg poravnan. Izračunaj znesek dolga!

2. Petkratnik nekega števila je $16\frac{4}{5}$. Katero število je to?

Irena Ribič

3. Oglejte si sliko in povejte:
   Koliko vrst likov je?
   Katere vrste likov so?
   Koliko je posameznih likov?
   Koliko je vseh likov skupno?

Matilda Šemrl



1 Reši naslednji nalogi:

1. Janez se vzpenja na goro s hitrostjo 2 km/h, spušča pa se s hitrostjo 6 km/h. Izračunaj srednjo hitrost!

2. Peter gre v mesto. Najprej hodi s hitrostjo 6 km/h. Ko preide neko razdaljo, se utrudi in zmanjša hitrost na 2 km/h. Ko pa pride v mesto, se izkaže, da je hodil s hitrostjo 6 km/h ravno toliko časa, kot s hitrostjo 2 km/h. Določi srednjo hitrost!

Franci Oblak

2 *KATERO ŠTEVILO JE VEČJE?*

Ugotovi, katero število je večje:

$\log_{10} 7$ *ali* $\log_9 5$

in svojo trditev dokaži!

Peter Petek

Rešitve treh nalog poišči na strani 64!

3 DEDEK IN PRAVNUK

Dedek je star toliko kot sin in vnuk skupaj. Produkt starosti drugega vnuka in pravnuka pa je tudi enak dedkovi starosti. Koliko so stari posamezni člani družine, če so njihove starosti kvadrati naravnih števil?

KOD

VPRAŠANJA

S posodama, ki držita 7 in 11 litrov, je treba nameriti v sod 13 litrov vode. Kako?

Besedo AVION šifriramo: BZJPO. Kako s tako šifro šifriramo besedo PUŠKA?

(Stara naloga!)
12 ljudi nese ducat hlebcev. Vsak moški nosi dva hlebca, vsaka ženska nosi pol hlebca in vsak otrok nese četrt hlebca. Koliko je moških, koliko žensk in koliko otrok?

Franci Oblak

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

1. V vrsti stoji 6 kozarcev. V prvih treh je voda, ostali so prazni. Treba je postaviti kozarce v vrsto tako, da bo izmenoma en poln kozarec, en prazen, itd. Premakniti pa smemo le en kozarec. Kako?

Rešitev: Vodo iz drugega kozarca zlijemo v kozarec številka 5 in postavimo drugi kozarec nazaj na njegovo mesto.

2. John Kennedy je bil rojen leta 1917. Predsednik je postal leta 1960. Leta 1963 je bil star 46 let in je bil že tri leta predsednik. Vsota teh števil je točno 3926.
Charles de Gaulle je bil rojen leta 1890. Predsednik je postal leta 1958. Leta 1963 je bil star 73 let in bil že pet let predsednik. Vsota teh štirih števil je tudi 3926. Ali lahko pojasnite to naključje?

Odgovor: Vsota rojstne letnice in starosti je vedno enaka tekoči letnici, vsota leta izvolitve in let predsednikovanja pa prav tako.
3926 = 2.1963

3. Statistik je dal matematičen test vsem 6000 prebivalcem nekega mesteca. Istočasno jim je izmeril dolžino nog in ugotovil, da so skoraj vsi dolgonogi test precej bolje opravili kot kratkonogi. Zakaj?

Odgovor: Med „vsemi 6000 prebivalci", ki jih je testiral, je bilo gotovo precej otrok in dojenčkov.

Luka Dobnikar

MATEMATIK - kakršnega so si predstavljali nekoč

(Karikaturo in tekst smo objavili z dovoljenjem uredništva Matematičkog lista za učenike osnovne škole iz Beograda.)

PISMA BRALCEV

Spoštovani!

Presek prebiram že drugo leto, vendar moram priznati, da mi je vedno manj všeč. Ne, niste se vi poslabšali, nasprotno, vaši članki so zelo zanimivi in z veseljem jih preberem, vendar pogrešam v Preseku naloge iz matematike za srednješolce ...

Nada Širca

Nada iz Kopra, ali bi bila zadovoljna, če bi nam vsi krožki iz Slovenije poslali izvirne naloge in bi tako obogatili izbor nalog v Preseku ?

Spoštovano uredništvo Preseka!

Sem dijak IV. letnika gimnazije Miloša Zidanška v Mariboru. Vaš list mi je všeč, saj vsakdo najde v njem kaj zase, vendar bi ga še raje prebiral, če bi odprli rubriko, kjer bi govorili o stvareh, ki se nam zde nemogoče. V časopisih večkrat preberem kaj takšnega, a tega ne morem jemati povsem resno, saj je vmes preveč rac. Prav gotovo bi takšno rubriko vsi z veseljem prebirali, čeprav vem, da bi jo težko urejali. Lep pozdrav

Milenko Stiplovšek

Milenko, hvala za pismo in vzpodbudo. Bi nam morda za začetek pomagal tako, da bi nam natančneje napisal, kaj si prebral, pa ti bomo ustregli s člankom !

V Mariboru deluje krožek "Pitagora" na osnovni šoli bratov Polančičev, ki sledi vsemu, kar prinaša Presek.

Želimo vam dosti uspeha ! Zakaj ste se odločili za ime Pitagora ? Ali bi nam vedeli povedati kaj zanimivega o tem velikem možu ?

Spoštovani urednik !

Oglašam se vam iz majhne vasice, ki leži 6 km od Ajdovščine. Presek mi je zelo všeč, posebno zato, ker nas, dijake tako neprisiljeno pritegne k reševanju nalog. Že lani sem zvesto prebirala Presek in reševala naloge, vendar sem šele letos zbrala pogum, da vam pišem. Želim vam še mnogo sreče pri urejanju Preseka

vaša bralka Ivica Razpot

Hvala Ti za Tvoj pogum, ki naj bo vzgled še mnogim tihim bralcem.

Moje mnenje o Preseku.

Letos sem prvič naročen na revijo Presek, vendar sem že iz prvih dveh številk razbral njen namen. V glavnem sem z revijo zadovoljen, saj vsakdo lahko v njej najde vsaj nekaj člankov, ki ga zanimajo. Všeč so mi tudi naloge. Moti me le to, da je premalo zanimivih člankov iz fizike, na primer takih, kot je članek v letošnji drugi številki "Fizika na smučeh". Poleg tega pogrešam članke o raznih tehničnih dosežkih v svetu, ki bi marsikoga zanimali.

Lepo pozdravljeni !

Jože Režek

Tudi mi vedno znova ugotavljamo isto ! Trudimo se, da bi ustregli Tvoji želji in željam še mnogih bralcev s prispevki iz fizike. Hvala Ti za zaupanje. Ob tej priliki prosimo vse fizikalne krožke, naj nam pošljejo svoje prispevke.

Matilda Lenarčič

Kaj pomeni enačba $\boxed{52\ T\ =\ 12\ M\ =\ 1\ L}$

C.V.

S T V A R N O   K A Z A L O

P R E S E K - list za mlade matematike, fizike in astronome
2 (1974-1975) številke 1 - 4, strani 1 - 192.

izpolnjevanka (Pavel Gregorc) 187; Problem s kartami (Andrej Kuzman) 188; Nevidne nogavice (Tomo Pisanski) 120.

KRIŽANKE - Plemelj-Einstein (Tomaž Fortuna) 32,96; Slikovna križanka (Pavle Gregorc) 80,128.

PREMISLI IN REŠI - (Jože Dover); Poprečna hitrost kolesarja (Jože Dover) 48,114; Škorec, kje si? (Jože Dover) 82; Koliko trikotnikov je v pravilnem peterokotniku, ki mu včrtamo vse diagonale? (Jože Dover) 91,170; Nepričakovani prihod (Tomo Pisanski) 115; Kako žrebamo? (Jože Dover) 116; Kdaj bo ura kazala natančen čas? (Jože Dover) 171.

NOVICE-ZANIMIVOSTI - Novice, zanimivosti (Tomaž Skulj) 50; Nekaj o klubu V.M.Komarov (Rasto Snoj) 50.

MLADI RAZISKOVALEC - Še o raziskovalni nalogi "Kohoutkov komet" (Marjan Hribar, Rasto Snoj) 51.

KROŽKI - Krožki (Dušan Repovš) 54.

NALOGE-TEKMOVANJA - Naloge (Tomaž Fortuna) 36,92; Zvezno tekmovanje mladih fizikov Jugoslavije, Velenje 1973 in priprave slovenske ekipe v Ljubljani (Dušan Repovš) 56; Republiško tekmovanje mladih matematikov - Ptuj, 6.aprila 1974 (Marjan Gojkovič) 59; Poročilo o osnovnošolskih tekmovanjih za bronasto in srebrno Vegovo priznanje 1973/74 (Jože Kotnik) 63,93; Naloge na V.zveznem tekmovanju mladih matematikov, učencev osnovnih šol - Tuzla, 9.6.1974 (Bogomila Kolenko) 118; Naloge z mednarodne matematične olimpiade (Dušan Repovš) 119; Rešitve nalog z republiškega tekmovanja za zlato Vegovo priznanje v letu 1974 (Jože Kotnik) 121; XII.republiško tekmovanje iz fizike (Tomaž Fortuna) 122; Zvezno tekmovanje mladih matematikov (Bogomila Kolenko) 175; Rešitve nalog za osmi razred na zveznem tekmovanju v Tuzli 1974 (Bogomila Kolenko) 177; Naloge za osmošolce (Biserka Mikoš) 179; Dve vprašanji (Dušan Repovš) 181; Nariši z eno potezo (Franci Oblak) 142.

BISTROVIDEC - Ali znaš pokriti šahovsko desko z dominami? (Egon Zakrajšek) 1/IV,92; Čudni trakovi (Tomaž Pisanski) 2/IV; Misionarji in ljudožerci (Dušan Repovš) 3/III; Trdi kvadrati (Matjaž Omladič) 4/IV; Ali se je Pitagora zmotil? ("Zmrznjeni hrček") 116.

SLOVARČEK - Navor (Janez Strnad) 77.

BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES - Rebus 8; Al' prav se piše ulomek ali zlomek (Tomaž Pisanski) 55; Koliko let imajo otroci? (Peter Petek) 96,128; Zrcalce, zrcalce na steni ... (Danjel Bezek) 124; Rebus 135; Rebusi (Pavle Gregorc) 160,162,166; Rebus 169; Obračanje končnih zaporedij (Vladimir Batagelj) 166; Malce neresno (Dušan Repovš) 168; Še nekaj kratkočasnic (Dušan Repovš) 176; Štirimestno število (KOD) 181.

NOVE KNJIGE - I.Adler, Matematika (Janez Rakovec) 2/III; I.Adler, Fizika (Alojz Kodre) 3/IV; S.Uršič, Zbirka rešenih nalog iz matematike s tekmovanj učencev osmih razredov osnovnih šol Slovenije (Ciril Velkovrh) 3/IV; J.Povšič, Bibliografija Jurija Vege (Ciril Velkovrh) 192.

DOGODKI - Vabimo vas v društvo (Ciril Velkovrh) 189; Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije (Bogomila Kolenko) 189; Ob 85 letnici profesorja dr.Lava Čermelja (Marijan Vagaja) 192.

Ciril Velkovrh

REŠITVE NALOG

REŠITVE NALOG S STRANI 57

1

DVE NALOGI

Preberi, kako je ti nalogi rešil bister učenec!

Nalogi sta si podobni, vendar je razloček med njima. Vsekakor se ujemajo besede in številke; vendar je velik razloček v naslednjem: v prvi nalogi je razdalja, ki jo prehodi Janez s prvo in z drugo hitrostjo, enaka. V drugi nalogi pa sta časa gibanja s prvo in z drugo hitrostjo enaka. V prvem primeru se je Janez gibal z manjšo hitrostjo dlje časa kot z večjo, zato tudi srednja hitrost ni na sredi, ampak je bliže k 2 km/h kot k 6 km/h. V drugem primeru pa se giblje z vsako od hitrosti enak čas, zato je srednja hitrost na sredi - 4 km/h. V prvem primeru pa bo takole: navzgor 1 km v 1/2 h, navzdol 1 km v 1/6 h in v srednjem bo prehojen 1 km v $(1/2 + 1/6):2 = 1/3$ h. To je: srednja hitrost je 3 km na uro.

Kako si pa ti rešil nalogo?

Franci Oblak

2

KATERO ŠTEVILO JE VEČJE

Večje je število $\log_{10} 7$. Pa recimo, da ne bi bilo, tedaj je

$\log_9 5 \geq \log_{10} 7$. Pomnožimo neenačbo s 4

$4 \log_9 5 \geq 4 \log_{10} 7$

Upoštevamo znane lastnosti logaritmov in potenciramo

$\log_9 625 \geq \log_{10} 2401$

Ampak $9^3 = 729 > 625$, zato je $\log_9 625$ manjši od 3. Po drugi strani pa vidimo, da je $\log_{10} 2401$ večji od 3. Protislovje nas privede do tega, da spremenimo zmotno mnenje in spoznamo

$\log_9 5 < \log_{10} 7$

Peter Petek

3

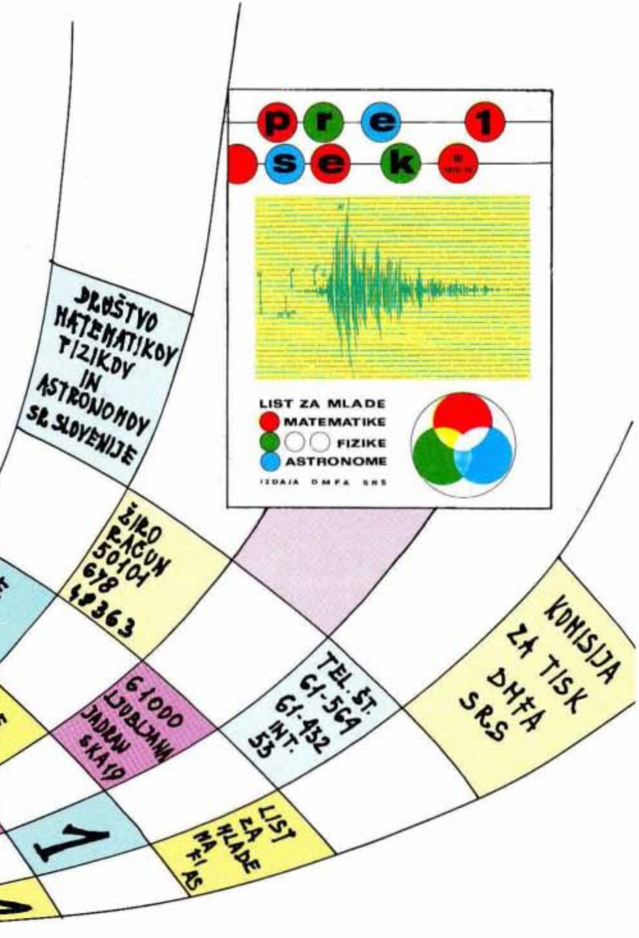
DEDEK IN PRAVNUK

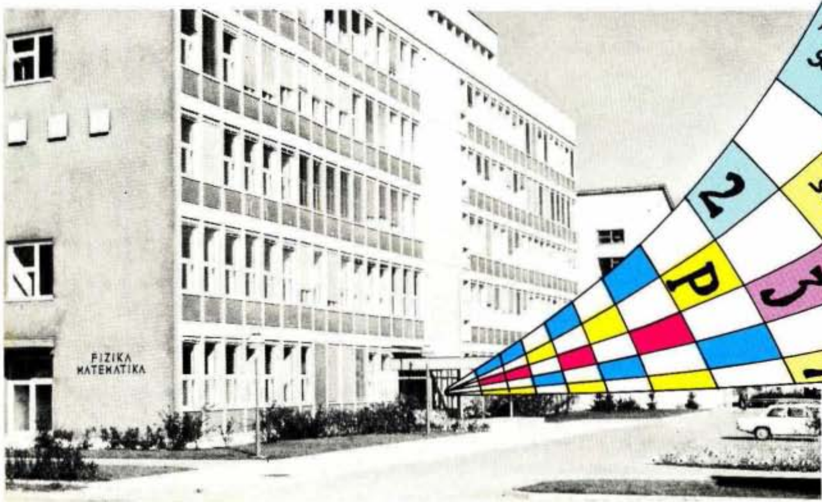
Družinski člani so stari: dedek 100 let, sin 64 let, prvi vnuk 36 let, drugi vnuk 25 let, pravnuk 4 leta.

KOD

INŠTITUT ZA MATEMATIKO, FIZIKO IN MEHANIKO JE LETA 1969 POSTAVIL LEPO ZGRADBO, V KATERI STA DOBILA SVOJ DOM TUDI ODDELEK ZA FIZIKO IN ODSEK ZA MATEMATIKO FAKULTETE ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO. V NJIHOVIH PROSTORIH GOSTUJETA TUDI UREDNIŠTVO IN UPRAVA NAŠEGA PRESEKA.

Ciril Velkovrh



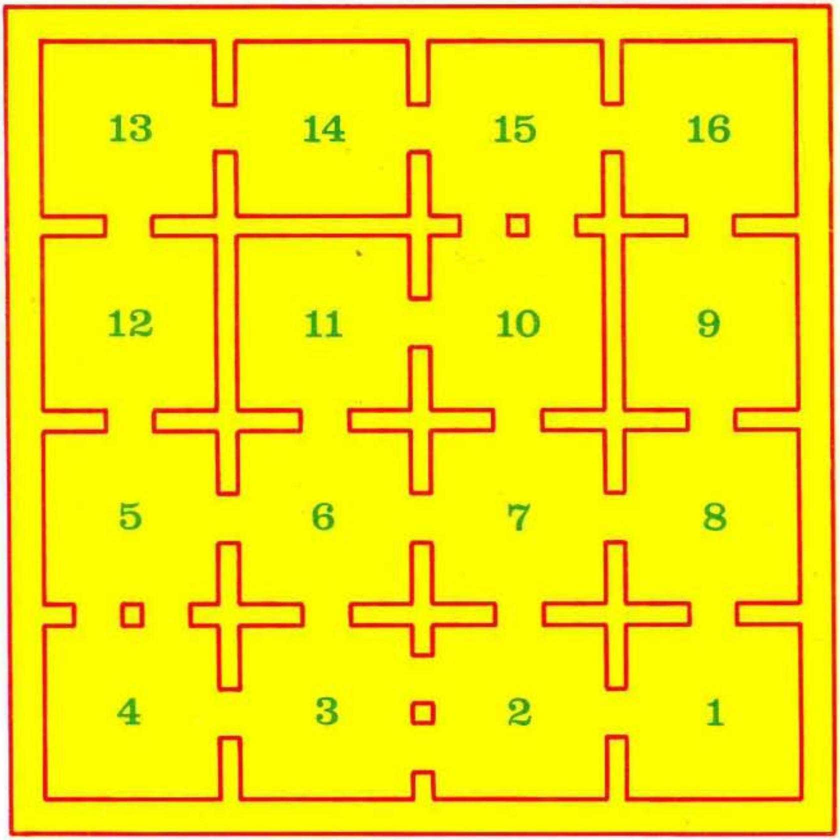


BISTROVIDEC

LABIRINT

Na sliki je narisan tloris labirinta, ki je sestavljen iz 16 sob, povezanih z vrati. Ali je mogoče začeti v sobi št.1 in prehoditi vse sobe tako, da greš skozi vsaka vrata le enkrat?

Nariši pot ali napiši vrstni red obhoda skozi sobe! V kateri sobi se obhod konča? Kaj pa, če začneš v sobi št.13?



E.V.