

5

29 (2001 – 02)

PRE SEK

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



NORVEŠKA USTANAVLJA ABELOVO NAGRADO ZA MATEMATIKO

Lani avgusta je norveška vlada naznanila ustanovitev Abelove nagrade, nove med narodne nagrade za matematiko. Nagrado so Norvežani poimenovali po svojem rojaku Nielsu Henriku Abelu (1802–1829), enem največjih matematikov vseh časov. Prvič jo bodo podelili leta 2003. Začetni kapital nagradnega sklada je 200 milijonov norveških kron, kar je približno 23 milijonov ameriških dolarjev. Višina vsakoletne nagrade bo odvisna od donosa sklada in bo približno tolikšna kot pri Nobelovi nagradi (ki je, kot vemo, za matematiko ne podeljujejo). Ocenjujejo jo na 5 milijonov norveških kron.

Sama ideja Abelove nagrade za matematiko je stara že sto let, sega v čas ustanovitve Nobelove nagrade. Prvi pobudnik je bil norveški matematik Sophus Lie konec 19. stoletja. Leta 1902 je Oscar II, kralj unije Švedske in Norveške, predlagal ustanovitev take nagrade, vendar je predlog zamrl, ko je leta 1905 zveza med narodoma (miroljubno) razpadla. Zadnjo pobudo je podal matematični oddelek Univerze v Oslu, ki bo, od 3. do 8. junija letos, gostitelj mednarodne konference v počastitev 200-letnice Abelovega rojstva. Tedaj bo tudi slovesno objavljena ustanovitev nagrade.

Z Abelovo nagrado bo upravljala Norveška akademija za znanost in humanistiko v Oslu. Imenovala bo petčlanski izbirni odbor in širše svetovalno telo, ki ga bo sestavljalo dvajset do trideset članov. Sestavi odbora in svetovalnega telesa bosta mednarodni z opaznim deležem nenorveških matematikov. Vseh pravil v zvezi s podeljevanjem nagrade še niso določili. Gotovo pa je, da za dodelitev nagrade ne bo nobene starostne omejitve, kakršna npr. velja za Fieldsovo medaljo, najprestižnejšo matematično nagrado doslej. To lahko prejmejo le matematiki, mlajši od štirideset let. Prav tako ne bo nobene omejitve glede matematičnih področij, za katere naj bi nagrado podeljevali.

Norvežani žele z Abelovo nagrado po eni strani dvigniti splošni ugled matematike, radi pa bi se tudi predstavili kot narod z bogato kulturno in znanstveno tradicijo. Upravičeno lahko postavijo matematika Nielsa Henrika Abela ob stran drugim velikim rojakom, kot so pesnik in dramatik Henrik Ibsen, slikar Edvard Munch ali skladatelj Edvard Grieg.



Kip N.H. Abela, delo kiparja Vigeland, ki stoji na Abelovem griču pred kraljevo palačo v Oslu.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
29. letnik, leto 2001/02, številka 5, strani 257–320

VSEBINA

MATEMATIKA	Kristalne mreže – 1. del (Peter Legiša)..... 264-269 Ime rože, labirint in pregled grafa (Štefko Miklavič, Martin Juvan) 292-297
FIZIKA	Atomi in Perrinova merjenja (Janez Strnad)..... 274-279 Avogadrov zakon (Janez Strnad)..... 285-287
ASTRONOMIJA	Zenitne zvezde – reš. na str. 291 (Marijan Prosen)..... 280-284
RAČUNALNIŠTVO	Pozabljena naloga (Martin Juvan)..... 290-291
NOVICE	Norveška ustanavlja Abelovo nagrado za matematiko (Marija Vencelj)..... II Niels Henrik Abel (1802–1829) – Ob dvestoletnici rojstva (Marija Vencelj) 259-263
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Skoraj gotov dogodek – Utrinek (Dušan Murovec) 258 Binetu je vroče (Jože Pahor)..... 270-273 Križanka "Matematiki antike" – reš. na str. 299 (Marko Bokalič) 288
NALOGE	Produkt = vsota – Nagradna naloga (Martin Juvan)..... 258 Črke in števila 2 - reš. na str. 299 (Boštjan Jaklič) 284
REŠITVE NALOG	Tim, Fermat in količniki – Rešitev s str. 203 (Marija Vencelj)..... 298-299
TEKMOVANJA	Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike v šolskem letu 2000/2001 – s str. 251 (Bojan Golli)..... 300-307 22. mednarodno matematično tekmovanje mest – Naloge pomladanskega kroga (Gregor Cigler) 307-311 22. mednarodno matematično tekmovanje mest – Rešitve nalog pomladanskega kroga s str. 307 (Gregor Cigler)..... 311-318 42. mednarodna matematična olimpiada – rešitvi izbranih nalog s str. 149 (Matjaž Željko) .. 318-320
NA OVITKU	Nil je bil, je in bo vir življenja (foto Jože Pahor) I Slika k članku na str. 270 (foto Jože Pahor) III Motivi iz današnje Norveške, domovine matematika Nielsa H. Abela (vse fotografije Matjaž Vencelj) IV

NAGRADNA NALOGA

Zaradi spremenjenega urnika tekmovanj prihaja 5. številka letošnjega Preseka k našim bralcem prej kot pretekla leta. Zato v njej ne objavljamo rešitve nagradne naloge Tri enice in enajst fizičkov iz 4. številke, ker ob oddaji pričujoče številke v tiskarno še ni potekel razpisani rok za njeno rešitev. Pač pa vam ponujamo novo nagradno nalogo Produkt = vsota, ki jo je sestavil Martin Juvan. Izmed reševalcev, ki nam bodo poslali pravilno rešitev naloge, bomo izžrebali nagrajenca, ki bo prejel knjižno nagrado.

Rešitve pošljite najkasneje do 30. aprila na naš naslov:

Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Rešitvi in rezultate nagradnega razpisa za obe nalogi, iz te in iz 4. številke, bomo objavili v 6. številki.

Marija Vencelj, odg. ur.

PRODUKT = VSOTA – Nagradna naloga

Za vsako naravno število $k \geq 2$ ima enačba

$$a_1 \cdot \dots \cdot a_k = a_1 + \dots + a_k$$

rešitev

$$a_1 = k, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = \dots = a_k = 1.$$

Če enačbo rešujemo v naravnih številih in od rešitve zahtevamo še $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0$, potem je za $k = 2, 3$ in 4 to tudi edina rešitev. Pri $k = 5$ pa obstaja več rešitev. Poskusite jih poiskati!

Martin Juvan

SKORAJ GOTOV DOGODEK – Utrinek

Janez ne ve, kaj bi počel. Pa vzame kovanec in sklene: "Tale kovanec bom vrgel v zrak. Če pade cifra, grem na nogometno tekmo. Če pade mož, grem v kino. Če bo kovanec obstal na robu, grem spat. Če pa bo kovanec ostal v zraku, se bom učil."

Dušan Murovec

NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) – Ob dvestoletnici rojstva

Abelova zapuščina bo zaposlovala rodove matematikov še petsto let.

Charles Hermite, fr. mat. 19. stol.

Niels Henrik Abel se je rodil 5. avgusta 1802 na otoku Finnøy na jugozahodu Norveške. Bil je drugi od sedmih otrok protestantskega pastora Søren G. Abela, ki je leta 1804 nasledil svojega očeta v župniji Gjerstad blizu Risørja. Pastor Abel je bil v odmaknjenem Gjerstadu tudi prvi učitelj svojih otrok.

Niels je odraščal v nemirnih letih Napoleonovih vojn. Norveška je bila zaradi tedanje skupne države z Dansko pritegnjena v vojno na strani Francije, kar je plačala s hudim pomanjkanjem zaradi britanske blokade svoje obale. Po Kielski mirovni pogodbi je Danska prepustila Norveško Švedom. Norvežani so se želeli osamosvojiti, toda po kratki in jalovi vojni, v kateri slabo oboroženi Norvežani niso mogli biti kos Švedom pod Bernadottovim poveljstvom, je bila ustanovljena personalna unija Švedske in Norveške, v kateri je imela Norveška lastno ustavo. Nielsov oče je imel vidno vlogo v nacionalnem gibanju in je bil eden od članov izrednega stortinga, norveškega parlamenta, ki je bil jeseni 1814 sklican za dokončno oblikovanje nove ustave.



Ko je bilo Nielsu Abelu 13 let, so ga poslali v škofijsko šolo v Kristianiji, današnjem Oslu. Leta 1817 je bil za učitelja matematike na šoli nastavljen Bernt Holmboe, le sedem let starejši od Abela, ki je hitro odkril Abelov izjemni talent za matematiko. Skupaj sta začela študirati Eulerjeva in kasneje Lagrangeova ter Laplaceova dela o integralnem računu. Abelov napredek je bil tako hiter, da je v kratkem času prekosil svojega učitelja. Holmboe, ki je uvidel, da ima pred seboj enega največjih matematikov vseh časov, je na vse načine poskušal svojemu mlademu varovancu in prijatelju najti materialno podporo. Toda v osiromašeni Norveški je vladala lakota in denarja za podporo ni bilo.

Abelove razmere so se dodatno poslabšale kmalu zatem, ko je bil pastor Abel po dveletnem premoru leta 1818 ponovno izvoljen v storting. Njegovi neutemeljeni in grobi napadi na ostale predstavnike parlamenta,

združeni z alkoholizmom, so bili razlog za njegov politični in osebni propad. Ko je leta 1820 umrl, je bilo to za okolico pravzaprav olajšanje. Družino je zapustil z majhno pokojnino in globoko v dolgovi. Nielsu je bilo tedaj 18 let. Ker je bil starejši brat duševno bolan, je skrb za številno družino padla na Nielsova ramena. Optimistični mladi genij je nepričakovano odgovornost brez oklevanja sprejel. Z vso pravico je računal, da bo v nekaj letih, kot uspešen in spoštovan matematik, dosegel akademsko kariero. To bi njega in njegovo družino potegnilo iz revščine. Medtem je privatno poučeval in matematično delal, kolikor je mogel. V ta čas revščine in neprestanega dela, s katerim si je matematik Abel postavil neminljiv spomenik, segajo, žal, tudi zametki tuberkuloze, bolezni revežev, ki ga je ubila, preden je napol opravil svoje delo.

Leta 1821 se je Abel vpisal na Det Kongelige Frederiks Universitet v Kristianiji in v enem letu dosegel stopnjo Candidatus Philosophiae. Od tu dalje je bil samouk. Na univerzi ni bilo nobenega nadaljnjega kurza iz matematike ali fizike, a kaže, da pomoči učiteljev sploh ni potreboval. Bral je in prebral vse razpoložljive matematične vsebine, pomembne in nepomembne. Pri tem je dela svojih predhodnikov dopolnjeval in nadgrajeval. Leta 1823 je nova norveška znanstvena revija *Magazin for Naturvidenskaben* objavila prvi Abelov članek o funkcijskih enačbah in nekaj kasneje članek, ki je vseboval prvo rešitev kake integralske enačbe sploh. Pozimi 1822–1823 je sestavil daljše delo o integraciji elementarnih funkcij in ga predložil univerzitetnemu kolegiju, a so ga izgubili. Verjetno pa nekatera kasnejša Abelova dela vsebujejo v tem delu prikazane rezultate.

Poleti 1823 mu je Rasmussen, edini profesor matematike na univerzi v Kristianiji, finančno omogočil obisk pri odličnem danskem matematiku Ferdinandu Degenu v Københavnu. Tam je Abel spoznal svojo bodočo zaročenko Christine Kemp.

Po vrnitvi v Kristianijo se je Abel vrnil k problemu, s katerim se je ukvarjal že prej. Še pred vstopom na univerzo se je namreč z vso mladostno vnemo lotil iskanja algebraične rešitve enačbe pete stopnje, naloge, s katero so se neuspešno ukvarjali domala vsi veliki matematiki od 16. stoletja dalje. Sprva je verjel, da je našel izraz, ki podaja rešitev. Kasneje je sam odkril, da metoda ni korektna, in problem odložil na stran. Po obisku na Danskem je na nalogo pogledal z druge strani in premagal stoletja star problem. Dokazal je, da splošne algebraične enačbe pete ali višje stopnje niso rešljive z radikali, t.j., rešitve takih enačb niso algebraično izrazljive s koeficienti enačb (za enačbe do vključno četrte stopnje taki izrazi obstajajo). Abel se je zavedal pomembnosti svojega rezultata, zato je na lastne stroške delo natisnil in ga poslal največjim živečim evropskim matematikom. Da bi zmanjšal stroške, je ves dokaz

skrčil na šest strani. Morda je bilo zato delo teže razumljivo. Kakorkoli, odgovora ni dobil od niti enega tujega matematika, tudi od velikega Gaussa ne.

V tem času je Abel pravzaprav živel od podpore svojih profesorjev. Vendar se je želel finančno osamosvojiti. Toliko bolj, ker se je zaročil s Christine Kemp, ki je prišla na Norveško za guvernanto k družini, ki je živila blizu Kristianije.

Zaprosil je za državno potovalno podporo, ki mu je bila dodeljena leta 1825. Potoval naj bi v Göttingen h Gaussu in v Pariz, tedanjo svetovno prestolnico matematike. Pustimo ob strani razloge, zaradi katerih se je Abel, namesto v Göttingenu, znašel v Berlinu, kjer je ostal pet mesecev. Gaussa tudi kasneje ni obiskal.

Za Abela, ki je bil vsekakor sposoben v matematiki delati sam, je bila to pravzaprav srečna odločitev. V Berlinu je srečal Augusta Leopolda Crella, vplivnega inženirja, ki ga je matematika zelo zanimala. Crelle je tedaj ustanavljal *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, imenovan tudi *Crellov Journal*, ki je bil v 19. stoletju vodilna nemška matematična revija. Crelle je že v prvi zvezek vključil sedem Abelovih člankov in v naslednje še veliko več. Številni med njimi so bili izjemnega pomena za razvoj matematike.

Med prvimi deli je bil v Journalu objavljen tudi razširjeni dokaz trditve, da splošna rešitev enačbe pete ali višje stopnje z radikali ni možna. V članku je Abel izpeljal tudi potrebno algebrsko ozadje, vključno z algebrائيčnimi razširitvami obsegov. Trditev poznamo pod imenom Abel–Ruffinijev izrek¹. V berlinski čas sodi med drugim posplošitev binomske formule in npr. integriranje izrazov, v katerih nastopajo kvadratni koreni.

Abel je presenečen odkril veliko pomanjkanje strogosti v sodobni matematiki. Prijatelju Holmboeju je pisal: "Če izvezamemo najpreprostejše primere, ni v vsej matematiki niti ene neskončne vrste, katere vsota bi bila strogo definirana. Številni pomembni deli matematike so neutemeljeni. Res je, da številni med njimi veljajo, kar je zelo presenetljivo. Pred menoj je izjemno zanimiv problem, da z zamudo odkrijem razloge za to." Rezultat tega odkrivanja z zamudo je Abelovo klasično delo o potenčnih vrstah s številnimi pomembnimi splošnimi izreki.

Medtem je v Cristianiji profesor Rasmussen, ki je bil tudi pomemben javni delavec, zaradi preobremenitve zapustil mesto na univerzi. Na izpraznjeno mesto, na katero je Abel v prihodnosti z gotovostjo računal, je fakulteta imenovala Bernta Holmboeja. Abel je svojemu prvemu učitelju

¹ Kaže, da je trditev poskušal dokazati tudi italijanski matematik Ruffini, a je njegov članek tako zapleten, da je težko presoditi korektnost njegovih sklepov.

toplo čestital in ostala sta dobra prijatelja. Očitno pa je bil Abel od tedaj dalje v skrbeh za svojo prihodnost. V njegovi lastni domovini ni bilo na obzorju zanj nobenega znanstvenega položaja, ki bi mu zagotavljal finančno gotovost.

V Pariz je Abel dopotoval julija 1826 in doživel veliko razočaranje. Najpomembnejši francoski matematiki niso pokazali nikakršnega zanimanja za neznanega Norvežana. Mimogrede se je srečal edino z Legendrom, ki se je v poznih letih ukvarjal z eliptičnimi integrali, področjem, ki je bilo tudi Abelova specialnost. Vendar je Abel svoj čas v Parizu dobro izkoristil. Dokončal je svoje najpomembnejše delo o algebrائيh integralih. Rokopis, za katerega je pričakoval, da ga bodo natisnili, je oktobra predložil francoski akademiji znanosti. Ocenila naj bi ga Cauchy in Legendre, Cauchy kot predsednik. Abel je vso jesen čakal na odgovor, toda zaman. Njegovo delo so izgubili, oziroma, kot se je kasneje izkazalo, založili.

Konec leta si je Abel z zadnjim denarjem plačal vožnjo iz Pariza v Berlin. Kmalu po prihodu v Berlin je zbolel. Verjetno je šlo za prvi napad tuberkuloze. Hrepenel je po Norveški, toda čutil se je dolžnega, da ostane v tujini, dokler ne poteče čas, za katerega mu je bila podeljena štipendija. Nekaj denarja mu je poslal Holmboe, verjetno mu je pomagal tudi Crelle. Crelle je Abela želel zadržati v Berlinu, dokler mu ne bi našel mesta na berlinski univerzi. Za vmesni čas mu je ponudil mesto urednika svojega Journala.

V Berlinu je Abel z veliko vnemo pisal nov članek, razpravo o eliptičnih funkcijah, ki je njegovo najobsežnejše delo. V tem delu je radikalno prevedel teorijo eliptičnih integralov na teorijo eliptičnih funkcij, pri čemer je izhajal iz njihove medsebojne inverznosti. Ker je večino teorije eliptičnih funkcij razvil že kot študent v Kristianiji, jo je bil sposoben predstaviti z vsem bogastvom detajlov, vključno z dvojno periodičnostjo, razvoji v neskončne vrste in v neskončne produkte ter z adicijskimi izreki.

V Kristianijo se je Abel vrnil konec maja 1827 in spoznal, da se je upravičeno bal temne prihodnosti. Prostega mesta zanj na univerzi ni bilo, imel je obilo dolgov. Prošnjo za podaljšanje štipendije je državni finančni oddelek zavrnil, dobil je le majhno podporo iz skromnega univerzitetnega fonda. V tem času je njegova zaročenka dobila novo zaposlitev pri prijateljih njegove družine v Frolandu, daleč od Kristianije.

Naslednje leto se je stanje izboljšalo. Vodilni znanstvenik na univerzi, astronom Hansteen, ki je predaval tudi matematiko, je za dve leti odpoštoval raziskovat zemeljski magnetni pol v neraziskano Sibirijo. Abel ga je nadomestil na univerzi in na norveški vojaški akademiji.

Medtem je septembra 1827 v Crellovem Journalu izšel prvi del Abelove razprave o eliptičnih funkcijah, drugi del je Abel dopolnil preko zime. Živel je izoliran v Kristianiji, kamor pozimi ni prišla nobena pošta. Tako ni niti slutil, kakšno zanimanje je zbudila njegova razprava med evropskimi matematiki, niti ni vedel, da je na področju eliptičnih funkcij dobil konkurenta. Zgodaj leta 1828 mu je Hansteen pokazal septembrsko izdajo *Astronomische Nachrichten*, v kateri je mladi nemški matematik Carl Gustav Jacob Jacobi brez dokaza navedel nekaj trditev v zvezi s transformacijsko teorijo eliptičnih integralov. Abel je v naglici dodal drugemu delu svoje razprave opombo, v kateri je pokazal, kako Jacobijevi rezultati slede iz njegovih.

To je bil začetek silovite matematične bitke med dvema pomembnima matematikoma, ki sta se medsebojno spoštovala in spoštovala delo drug drugega. Abel je zaradi tega matematičnega dvoboja celo prekinil s pisanjem daljšega članka o določitvi vseh enačb, ki jih lahko rešimo z radikali. Objavljeni del vsebuje teorijo enačb, ki jih danes imenujemo Abelove enačbe. V naglem zaporedju je napisal serijo člankov o eliptičnih funkcijah. Pripravil je tudi obsežen Pregled teorije eliptičnih funkcij, ki je izšel po njegovi smrti. Nasprotno je Jacobi objavljaval le kratke notice z rezultati, ki niso razkrivali njegovih metod. Te so bile rezervirane za njegovo knjigo *Nove osnove teorije eliptičnih funkcij*. Ni pomembno, kdo je dobil bitko, ki jo je evropski matematični svet z občudovanjem opazoval. Pomembno je, da je teorija eliptičnih funkcij v enem samem letu napredovala bolj, kakor v preteklih 50 letih.

Kljub čedalje slabšemu zdravju je Abel z neverjetno naglico pisal članek za člankom. Za božič 1828 je v hudem mrazu s konjskimi sanmi odšel na nakajdnevno pot v Frolands Verk na obisk k svoji zaročenki. Po lepem božičnem praznovanju je obležal. Zdravnik je ugotovil tuberkulozo in predpisal daljše počivanje. Kmalu se je bolezen poslabšala in Abel je 6. aprila 1829 umrl, star komaj dobrih 26 let. Pokopan je v Frolandu.

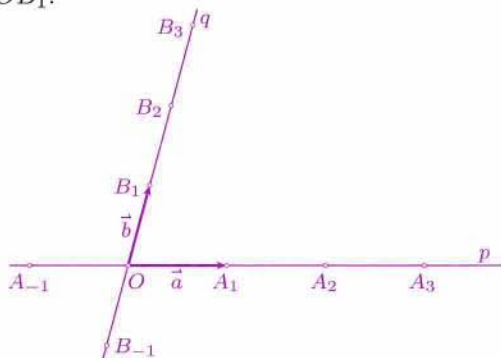
Pismo, ki ga je dva dni kasneje Abelu iz Berlina poslal Crelle, je vsebovalo naslednje sporočilo: "Ministrstvo za vzgojo vas je sklenilo poklicati nazaj v Berlin in vam ponuditi mesto profesorja matematike na Univerzi v Berlinu."

Leta 1830 je francoska akademija znanosti podelila svojo veliko nagrado Abelu in Jacobiju za njune izjemne matematične dosežke. Na pritisk norveške vlade so leta 1841 v Parizu po intenzivnem iskanju našli založeni Abelov rokopis o algebrainih integralih in ga natisnili. Med tiskom je rokopis spet izginil, očitno je bil ukraden. Ponovno so ga našli v Firencah leta 1952.

Marija Vencelj

KRISTALNE MREŽE – 1. del

V ravnini imamo nekolinearna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Izberemo ju tako, da je njuno izhodišče tudi izhodišče koordinatnega sistema (slika 1), torej $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{OB_1}$.



Slika 1.

Na premici p skozi O in A_1 izberemo še točke $A_{-1}, A_2, A_{-2}, A_3, A_{-3}, \dots$ tako, da je za vsako celo število k

$$\overrightarrow{OA_k} = k\vec{a}.$$

Prav tako na premici q skozi O in B_1 izberemo še točke $B_{-1}, B_2, B_{-2}, B_3, \dots$ tako, da je za vsako celo število n

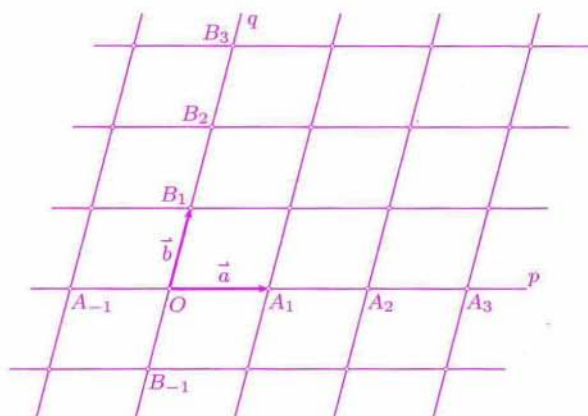
$$\overrightarrow{OB_n} = n\vec{b}.$$

Skozi točke A_k konstruiramo vzporednice premici q , skozi točke B_n vzporednice premici p . Te premice razrežejo ravnino na skladne paralelograme (slika 2). Dobili smo *tlakovanje* ravnine s skladnimi paralelogrami.

Presečišča dobljenih premic sestavljajo neskončno *mrežo* točk v ravnini. Krajevni vektorji točk v mreži so natančno vektorji

$$k\vec{a} + n\vec{b}, \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

(Seveda *mreža* tu pomeni nekaj drugega kot mreža poliedra, ki je površje poliedra, razgrnjeno v ravnino.)

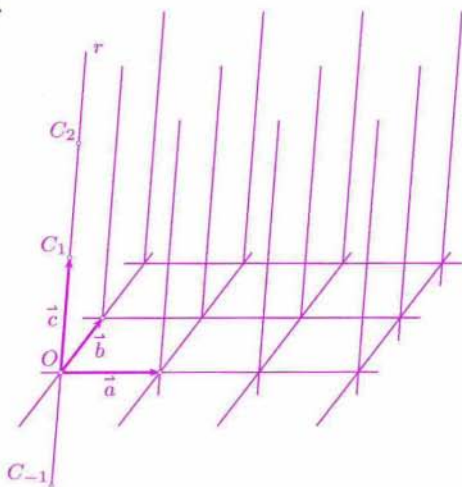


Slika 2. Del dvorazsežne mreže. Dobimo jo z zlaganjem skladnih paralelogramov.

Vzemimo še vektor $\vec{c}$, ki ne leži v ravnini Π vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Naj bo $\vec{c} = \overrightarrow{OC_1}$. Na premici r skozi O in C_1 izberemo še točke C_{-1} , C_2 , C_{-2} , C_3 , $C_{-3}, \dots$ tako, da je za vsako celo število p

$$\overrightarrow{OC_p} = p\vec{c}.$$

Skozi vse točke prej dobljene ravninske mreže konstruiramo vzporednice premici r (slika 3).



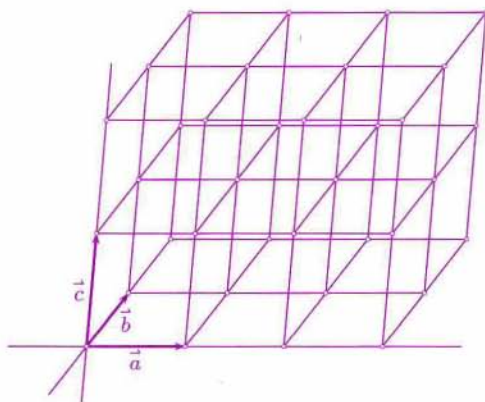
Slika 3.

Skozi točke C_p pa izberemo ravnine, vzporedne ravnini II. Presečišča teh ravnin in narisanih vzporednic premici r sestavljajo neskončno *trirazsežno mrežo* točk v prostoru (slika 4).

Krajevni vektorji točk v mreži so natančno vektorji

$$k\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c},$$

kjer so k, n, p cela števila. Pravimo, da je ta mreža *napeta* na vektorje $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$.

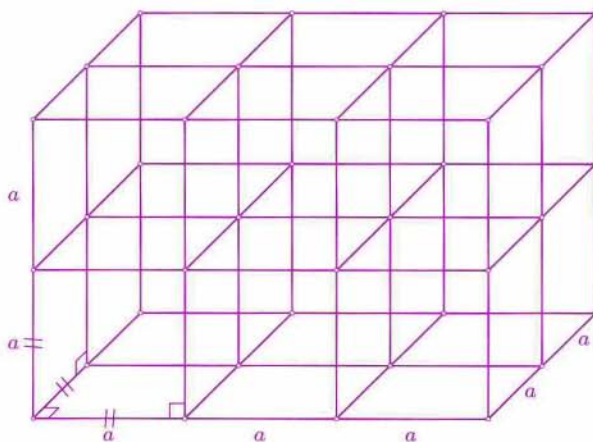


Slika 4. Del trirazsežne mreže, napete na vektorje $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$. Dobimo jo z zlaganjem skladnih paralelepipedov.

Obenem smo dobili razdelitev prostora na *skladne paralelepipede*.

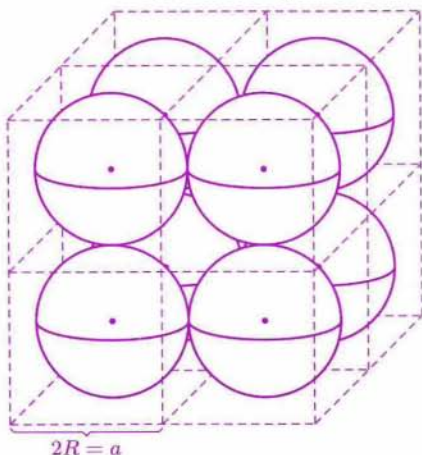
Mreže ste srečali pri pouku kemije in fizike. Točke mreže so npr. središča atomov ali ionov v kristalu.

Če so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ enako dolgi ($a = b = c$) in paroma pravokotni, je ustrezna mreža *enostavni kubični sklad*. Temu ustreza razdelitev prostora na skladne kocke (slika 5).



Slika 5. Del enostavnega kubičnega sklada, ki ga dobimo z zlaganjem skladnih kock z robom a .

Vsaka točka te mreže naj bo središče krogle s premerom $2R = a$. Vsaka krogla se dotika šestih sosednjih krogel. Tak sestav skladnih krogel prav tako imenujemo *enostavni* (primitivni) *kubični sklad* (slika 6).



Slika 6. Krogle, zložene v enostavni kubični sklad.

Do tega sklada lahko pridemo tudi takole: Vsaki krogli očrtamo (namišljeno) škatlo v obliki kocke. Nato te škatle tesno zlagamo, tako da se sosednji ploskvi povsem prekrivata. Na sliki 6 so škatle narisane črtkano.

Delež prostora, ki ga zavzemajo krogle v tem skladu, je enak količniku med prostornino krogle in prostornino njej očrtane škatle, torej

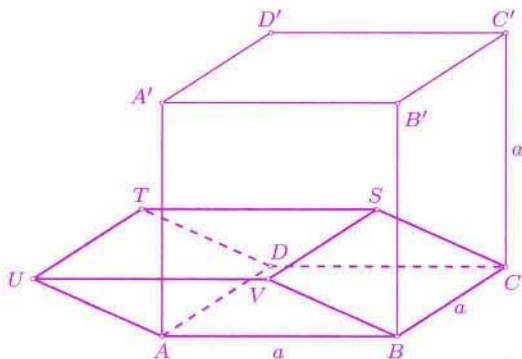
$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^3} = \frac{\pi}{6} \doteq 52,4\%.$$

Če moramo zlagati pomaranče, verjetno ne bomo uporabili zgoraj opisanega načina. Tudi v naravi je enostavni kubični sklad izredno redek. Radioaktivni element polonij lahko kristalizira v tej obliki.

Spet vzamemo kocko $ABCD A' B' C' D'$ z robom a in s središčem S (slika 7). Paralelepiped $ABCDUVST$ ima za osnovno ploskev kvadrat $ABCD$, stranski rob je SC . Pri tem je

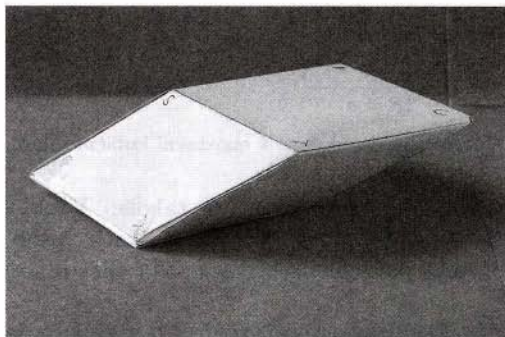
$$|CS| = \frac{1}{2}|CA'| = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

polovica telesne diagonale kocke.



Slika 7.

Naredite iz papirja model paralelepipeda $ABCDUVST$ (slika 8)!



Slika 8.

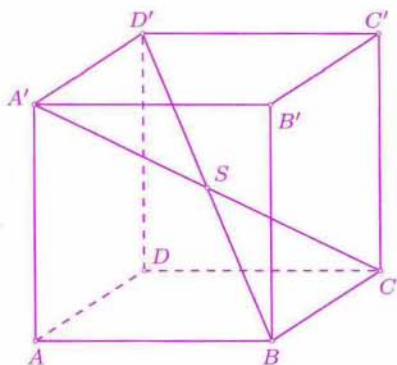
Trirazsežno mrežo, napeto na vektorje $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ in $\overrightarrow{CS}$, dobimo tudi z zlaganjem skladnih kopij paralelepipeda $ABCDUVST$.

Takoj vidimo, da je A' točka naše mreže. Z nekaj risanja, računanja ali z zlaganjem modelov ugotovimo, da ta mreža vsebuje tudi točke B' , C' in D' in da jo lahko dobimo tudi tako, da zlagamo skladne kopije osnovne celice na sliki 9. V tej osnovni celici je 9 točk mreže: A , B , C , D , A' , B' , C' , D' in središče S kocke. Pravimo, da je osnovna celica *telesno centrirana kocka*.

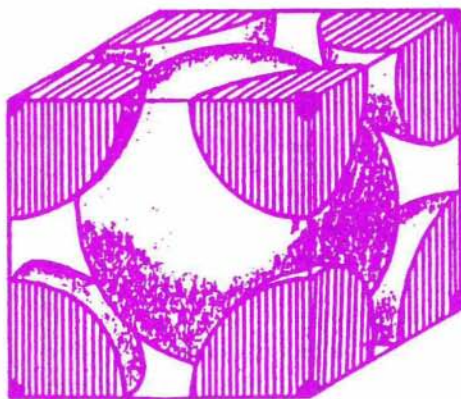
Vsaka točka naše mreže naj bo središče krogle s polmerom

$$R = \frac{1}{4}a\sqrt{3}.$$

Potem se krogla s središčem v S dotika krogel s središči v preostalih točkah osnovne celice (slika 10).



Slika 9. Telesno centrirana kocka.



Slika 10.

Delež prostornine, ki jo zavzemajo krogle v tem skladu, lahko izračunamo kar v osnovni celici. V vsakem oglišču je osmina krogle in še ena cela krogla v središču. Skupaj imamo prostornino dveh krogel s polmerom R , to je $2 \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$. To moramo deliti z $a^3 = \frac{64}{3\sqrt{3}} R^3$ in dobimo

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{8} \doteq 68,0 \, \%.$$

V tej obliki kristalizirata natrij in kalij.

Peter Legiša

BINETU JE VROČE

Bilo je vroče, saj je bil avgust. Bine Umnik je sedel pred televizorjem in se potil.

“Pravzaprav ni pošteno, da nam je zdaj vroče,” je premišljal, “medtem ko nas bo pozimi spet zeblo. Bi ne mogli toplote in mraza lepo enakomerno porazdeliti prek vsega leta? Tudi krompir nakoplujemo jeseni in ga kuhamo do nove letine. Jeseni oberemo jabolka, da jih hrustamo do pomladi.”

Seveda, ozimnica! Torej bo izumil, kako naj si nabere pozimi zaloge mraza, da si jih bo lahko dotakal poleti. Pozimi je mraz zastoj. Le kako bi ga vskladiščil? V pijače mečemo kocke ledu, da jih ohladimo. Led se stopi in porabi toploto. Led bo pravi odgovor! Toda, koliko ga potrebuje? To bo gotovo prvo vrašanje Dr. Nule na patentnem uradu. Zato se je Bine zelo razveselil Matjaževega obiska. Matjaž je bil namreč njegov nečak in je študiral fiziko.

“Polovico dohodkov od novega patenta ti obljubljam, če mi pomagaš,” je bil radodaren Bine. “Koliko ledu potrebujeva, da dostojno preživiva poletje?”

Matjaž ga seveda ni razumel, zato mu je Bine lepo počasi razložil srž nove zamisli.

“Takole se lotiva naloge,” je predlagal Matjaž. “Razmisliiva, koliko toplote morava posrkati iz tvoje sobe vsak dan in koliko preko vsega poletja. Toploto bo srkal led in se pri tem topil. Tudi ledena voda bo še vedno koristna za ohlajanje.”

“Kar ti jo srkaj, saj si fizik.” Očitno bi Bine raje srkal hladni uni.

“Pomagati mi moraš. Namesto da bi računala, si poskusiva pomagati z izkušnjami. Pozimi si si grel sobo z električno pečico. Zunaj je bilo okoli ničle, sobna temperatura pa je bila 20 stopinj Celzija. Torej ti je pečica zadoščala.”

Bine je bil varčen. “Še preveč je grela. Ponavadi sem izbiral drugo ali celo prvo stopnjo gretja od treh možnih. Ampak saj hočeva hladiti in ne greti.”

“To bi pomenilo okoli 1000 vatov,” je prevajal Matjaž, ki se ni dal ustaviti. Polna moč takih pečic je namreč od 1800 vatov do 2000 vatov. Nato se je lotil pojasnjevanja.

“S 1000 vatnim grelcem dovajamo v sobo dovolj toplote, da je njena temperatura 20 stopinj nad temperaturo okolice. S 500 vati bi bila temperaturna razlika le polovico, torej 10 stopinj. Zdaj pa k hlajenju, kjer pričakujemo podobne zakonitosti kot pri gretju. Sonce sobo segreva, najin hladilni sistem pa golta toploto. S 500 pogoltanimi vati bova najbrž uspela

ustvariti 10 stopinj temperaturne razlike. Kadar bo zunaj 30 stopinj, bo torej v sobi prijetnih 20.”

Binetu je postajalo razmišljanje všeč. Šmentana reč, saj Matjaževa fizika niso nerazumljive enačbe, ampak opazovanje in sklepanje.

“Če na dan hladiva 12 ur, bo treba pogoltati kakih 60 kilovatur. Vroče je dobre tri mesece, torej morava goltati okoli 100 dni. To da 6000 kilovatur.”

Bine si je poskusil kilovature predstavljati v obliki računa za električno. Kako jih bo spremenil v kup ledu?

Matjaž je vzel v roke računalno. “Da bi stopili kilogram ledu, potrebujemo 80 kilokalorij. Tudi z ledeno vodo tja do 10 stopinj lahko še hladimo sobo. To nam navrže še 10 kilokalorij. 90 kilokalorij je okoli 378 tisoč vatsekund. Tisoč zamenjamo za kilo in dobimo 378 kilovats sekund. Ko delimo 378 s 3600, kolikor premore ura sekund, dobimo 0,105 kilovature. Skoraj 10 kilogramov ledu moramo porabiti, da pogoltnemo kilovaturo toplote. Ur je 6000 krat več. To da 60 000 kilogramov ledu, ki zavzemajo 60 m^3 .”

“Saj to je 60 ton,” je zavzdihnil Bine, ki mu je dohodek od patenta vidno kopnel. Pravzaprav le polovica. Drugo polovico je tako ali tako obljubil Matjažu.

“Nad svojo sobo lahko zgradiš še eno, da boš v njej hranil led. Tri metre visoka soba razsežnosti 4 krat 5 metrov bi bila pravno pravnja.”

“60 ton,” je stokal Bine. “Saj te celo z desetonskim kamionom ne puste na vsako cesto, kaj šele na most. Led s stropom vred bi mi padel na glavo.”

“Toda to še ni vse,” je nadaljeval Matjaž, ki je očitno prepogosto gledal reklamne prodaje po televiziji. “Led boš shranil januarja. Vsaj do maja ga ne boš rabil. Treba ga bo varovati, da se ne bo stopil.”

Bine je računal na stiropor. Le kako debel bi moral biti ovoj?

“Tako je bova izračunala,” se je ponujal Matjaž. “Vso sobo z ledom bova obdala z 10 centimetrov debelo stiroporno plastjo in izračunala toplotni tok, ki ga poganja 15 stopinjska temperaturna razlika. Poznati moram toplotno prevodnost stiropora.”

Matjaž je pritiskal na gumb računalna. “Okoli 400 vatov nama topi led.”

“Je to dobro ali slabo?” je zanimalo Bineta.

“Slabo, saj nama odteka skoraj polovica tega, kar potrebujeva za hlajenje. Do poletja bi zato izgubila večino ledu. Šele desetkrat debelejši stiroporni ovoj bi omogočil kolikor toliko razumno skladiščenje.”

Tako je izum dokončno propadel. Matjažu se je Bine zasmilil, zato mu je skušal pri hlajenju pomagati.

“Morda poskusiva drugače. Tvoj led je goltal toploto, da se je talil. Voda golta toploto, da izpareva, a celo sedemkrat več je potrebuje, da se vplini. Lahko bi v mokri pižami sedel pred ventilator. Profesor, ki se je nekoč klatil po Sudanu, nam je pripovedoval o kartumskih hladilnikih. V zaboj na oknu nabašes ločje, ki ga narežeš ob Nilu, ga dobro poliješ z vodo in z ventilatorjem ustvariš preprih, ki ti srka zunanji vroč zrak preko zaboja v sobo. Suh zrak se pri prehodu skozi mokro ločje napije vode do sitega in se pri tem ohladi. S 40 stopinj prideš lahko pod 10 stopinj Celzija.

Še starejši izum so glinasti vrči, ki so rahlo prepustni za vodo. Napolnjene vrče obesiš v senco, voda mezi skozi stene in takoj izpari v suh okoliški zrak. Celo brez ventilatorja je voda v takih vrčih lepo hladna.” (Glej slike na ovitku.)

“Imenitno,” se je navdušil Bine. “Kako bova šele hladila pri nas, kjer redko pride temperatura preko tridesetih stopinj!”

“Zapik,” ga je hladil Matjaž. “V Sudanu je zrak zelo suh in zato rad pije vodo. Zrak vsebuje le desetino tega, kar bi lahko. Bolj učeno bi rekli, da je relativna vlaga 10 odstotna. V naših krajih je vlaga, denimo, 80 odstotna. Tak zrak bi se s 30 stopinj ohladil le za dve stopinji.

Bineta ni mikalo, da bi se preselil v Sudan, zato je sklenil, da se bo raje hladil z osvežilnim unijem.

Matjaž neukemu Binetu ni mogel vsega razložiti. Pa poskusimo mi.

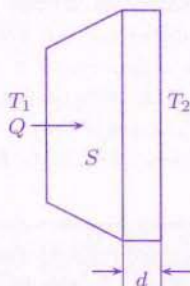
Enačba za prevajanje toplote je

$$\frac{Q}{St} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}$$

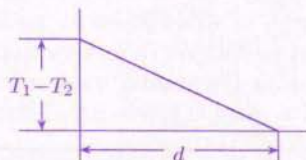
(slika 1). Izraz na levi strani je gostota toplotnega toka, to je toplote, ki se v časovni enoti pretoči prek ploskve S z debelino d . Tok je sorazmeren strmini temperaturnega klanca (slika 2). Sorazmernostni faktor je λ , koeficient toplotne prevodnosti. Za tega je Matjaž uporabil kar vrednost, ki jo je poznal za zrak: 0,026 W/m K.

Fiziki pa radi uporabljamo preverjene podatke. Toplotno prevodnost stiropora bi zlahka izmerili tako, da bi npr. sestavili votel kvader iz centimeter debelih stiropornih plošč. V kvader bi vložili 25 vatno žarnico in jo pustili goreti. Temperatura znotraj bi vse počasneje rasla, slednjič pa bi se rast ustavila. Tedaj je toplotni tok Q/S , ki uhaja iz kvadra prek vseh sten, enak toploti, ki jo daje 25 vatna žarnica. Če torej

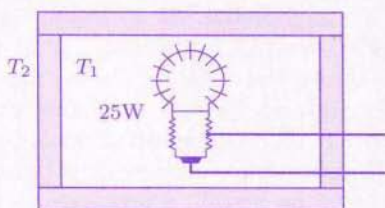
izmerimo zunanjo temperaturo in temperaturo znotraj kvadra, lahko izračunamo toplotno prevodnost. Stranice kvadra naj bodo dolge vsaj po nekaj deset centimetrov (slika 3).



Slika 1. Pretok toplote skozi ploščo.



Slika 2. Toplotni tok je sorazmeren strmini $(T_1 - T_2)/d$.



Slika 3. Določamo toplotno prevodnost stiropora.

Pa se res kvader hladi prek vseh ploskev, saj s spodnjo počiva na podlagi? Je temperatura zunanjih sten povsod enaka in enaka tudi temperaturi prostora? Je mogoče termometer znotraj kvadra prejemal toploto tudi neposredno od žarnice prek sevanja in zato pokazal višjo temperaturo? Prek kolikšne površine uhaja toplota? Notranja temperatura ni enaka zunanji. Morda bi v prvem približku zadoščala aritmetična sredina med obema? Je napetost na žarnici res natanko 220 voltov in žarnica natanko 25 vatna? Vse to in še kaj bi natančen fizik upošteval pri svojih meritvah, pri naši oceni pa to ne bo potrebno.

Poskusite torej sami določiti toplotno prevodnost stiropora. Delo si olajšate, če škatle ne lepitate, ampak zatlačite posamezne plošče v lepenkasto škatlo in verjamete, da tanka lepenka dobro prevaja v primerjavi z debelim stiroporom. Lahko si tudi ogrevate samo lepenkasto škatlo, da ugotovite njene izolacijske sposobnosti.

Še opozorilo: stiropor ne bo prenesel neposrednega stika z vročo steno žarnice.

ATOMI IN PERRINOVA MERJENJA

“Katera izjava bi vsebovala največ podatkov v najmanj besedah, če bi katastrofa uničila vse, kar vemo o naravi, in bi samo en stavek predali naslednjemu rodu? Mislim, da je to spoznanje o atomih [...]: Vse stvari sestavljajo atomi, ki se nenehno gibljejo, se privlačijo, če so v majhni razdalji, in odbijajo, če jih tiščimo skupaj. [...] Stavek vsebuje neznansko veliko podatkov, če le uporabimo malo domišljije in razmišljanja.” Izjavo Richarda Feynmana v znamenitih *Feynmanovih predavanjih iz fizike* je najti v marsikaterem učbeniku fizike.

Predzgodovina. Meglene misli o atomih so se pojavile že v antiki, ko so razmišljali o deljenju snovi na vse manjše delce. Te predhodnike današnjih atomov pogosto imenujejo *praatomi*. Demokrit iz poznega 5. stoletja pr.n.št. je zagotavljal, da so atomi najmanjši in nedeljivi gradniki snovi. Tedaj so mislili, da sestavljajo snov štirje *praelementi*: ogenj, zrak, voda in zemlja. Njihovi atomi naj bi se združevali in razdruževali zaradi dveh sil, ljubezni in sovraštva. Epikur je v 4. in 3. stoletju pr.n.št. mislil, da imajo atomi sicer notranjo zgradbo, a da jih ni mogoče deliti. Rimski pesnik Lukrecij je v 1. stoletju pr.n.št. zapel, da so “atomi – omejeni po vrstah, a neomejeni po številu – in prazen prostor edine večne in nespremenljive sestavine sveta”. Anaksagora v 5. stoletju pr.n.št. in njegovi somišljeniki so nasprotovali obstoju atomov in trdili, da je snov neomejeno deljiva. To je mislil tudi Aristotel v 4. stoletju pr.n.št. in odklonil obstoj atomov. Njegovo stališče je prevladalo za dolgo.

Slika 1. Demokrit si je predstavljal, da lastnosti praelementov odražajo lastnosti praatomov. Te lastnosti so se mu zdele bistvene, ne pa velikost atomov. Tako naj bi bili npr. praatomi vode okrogli (na sliki), ker nas voda gladko obliva, praatomi ognja pa naj bi imeli trne, ker nas ogenj opeče.

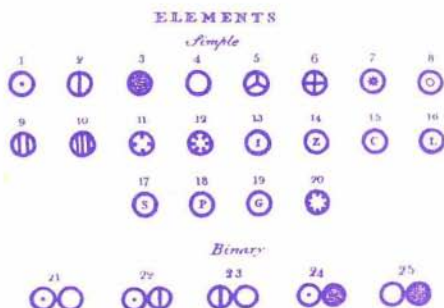


Okoli leta 1661 je Robert Boyle na novo vpeljal *element* kot snov, ki je ni mogoče razstaviti na preprostejše snovi. Antoine Laurent Lavoisier se je okoli leta 1783 s skrbnim tehtanjem prepričal, da se pri kemijskih reakcijah ohrani skupna masa udeleženih snovi. *Atome* je na novo vpeljal

John Dalton v letih od 1808 do 1810. Z njimi je bilo mogoče pojasniti zakon o stalnih masnih razmerjih in zakon o večkratnih masnih razmerjih. Po prvem se dva elementa spojita v dano spojino v natanko določenem razmerju mas, npr. vodik s kisikom v vodo v razmerju 1 : 8. Po drugem so mase elementa, ki se z določeno maso drugega elementa spoji v različne spojine, v razmerju majhnih celih števil, npr. mase kisika v didušikovem oksidu N_2O , dušikovem oksidu NO in dušikovem dioksidu NO_2 so v razmerju 1 : 2 : 4.

Dalton je razmišljal tudi o sestavljenih atomih, o današnjih molekulah (slika 2). Prav negotovosti pri razločevanju atomov in molekul so povzročale težave in zavirale širjenje zamisli o atomih med kemiki.

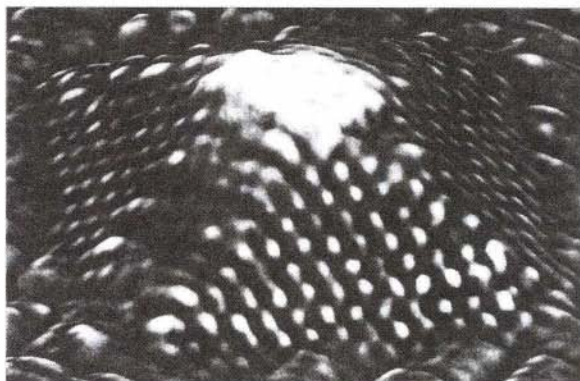
Slika 2. Daltonovi simboli za elemente iz njegovega Novega sistema kemijske filozofije iz leta 1808. Atomu vodiku sledijo atomi dušika, ogljika, kisika, fosfora, žvepla. Na desetem in devetem mestu sta "atoma" sode in pepelike, čeprav je Dalton vedel, da gre za spojini ("kovinska oksida"). V četrti vrsti so "sestavljene atomi" vode, amoniaka, dušikovega oksida, metana, dušikovega dioksida. Dalton je za sestavljeni atom vode navedel HO .



O njej še leta 1860 na prvem velikem mednarodnem kongresu kemikov v Karlsruheju niso dosegli soglasja. Nekateri so predlagali, da naj bi kemijsko rabo obeh pojmov ločili od fizikalne. Še tedaj vsi kemiki niso sprejeli zakona, ki ga je že leta 1811 izrekel Amedeo Avogadro: V enakih prostorninah plinov je pri danem tlaku in dani temperaturi enako število molekul. Še dolgo časa so atome in molekule imeli le za pripravna pojma pri računanju mase snovi pri kemijskih reakcijah in so dvomili v obstoj atomov in molekul kot delcev.

Pri fizikah so atomi in molekule na splošno naleteli na manj pomislekov. Prvi je z gibanjem molekul in z njihovimi trki s steno posode pojasnil tlak plina že leta 1738 Daniel Bernoulli. Pred tem so navadno trdili, da tlak plina na steno posode nastane zaradi odbojnih sil med molekulami v posodi. Leta 1816 je Thomas Young ocenil, da je "premer delca vode ali razdalja sosednjih delcev vode v kapljevini dve tisočini do deset tisočin milijonine cole", to je od 0,05 nm do 0,25 nm (nanometer je milijardina metra ali milijonina milimetra). Youngove ocene niso upoštevali in jo še danes pogosto preskočijo. Leta 1865 je Joseph Loschmidt določil premer

molekule kisika in sklepal, da je "na področju atomov in molekul pripravna enota za dolžino milijonina milimetra". Loschmidtova ocena je naletela na boljši odziv kot Youngova. Lord Kelvin "je imel za sprejeto dejstvo, da plin sestoji iz gibajočih se molekul". V letih 1870 in 1871 je zagotovil, da je polmer molekule vode večji kot 0,025 nm, in Jožef Stefan leta 1872, da meri 0,03 nm. James Clerk Maxwell je leta 1873 za polmer molekul vodika in kisika navedel 0,29 nm in 0,38 nm. Primerjajte to z današnjima vrednostma 0,124 nm in 0,181 nm. K uveljavitvi atomov in molekul v fiziki so potem prispevali uspehi kinetične teorije plinov. Okoli leta 1890 so se razne ocene premera molekule vodika stekle na pas od 0,1 do 0,2 nm.



Slika 3. Atomi germanija – kroglice na sliki – so se uredili v piramido z osnovnim robom 10 nm, ko se je germanij izločil na siliciju. V nekaj sekundah se je oblikovala milijarda takih piramid na 0,1 cm² veliki mejni ploskvi silicijevega kristala. Fotografijo so naredili v laboratoriju družbe Hewlett-Packard.

S podatki za premer molekule in privzetkom, da se molekule v kapljevini dotikajo, ali po kakšni drugi poti, so nekateri fiziki izračunali *Avogadrovo število*, to je število molekul v kilomolu. Loschmidt je navedel zanj $0,5 \cdot 10^{26}$, Maxwell pa osemkrat več. Na splošno so pred koncem 19. stoletja zanj dobili vrednosti med 10^{25} in 10^{27} . To je bil sprejemljiv rezultat, če ga primerjamo z današnjo vrednostjo $6,02 \cdot 10^{26}$ in upoštevamo tedanje možnosti za merjenje. Že pred koncem 19. stoletja je večina fizikov sprejela obstoj atomov. Le izjemoma mu je kdo nasprotoval. Ena od večjih in dokaj vplivnih skupin, ki je nasprotovala obstoju atomov, se je okoli leta 1895 zbrala okoli fizika Ernsta Macha, fizikalnega kemika Wilhelma Ostwalda in matematika Georga Helma.

Za obstoj atomov se je zavzel Ludwig Boltzmann, nekdANJI študent Jožefa Stefana, in pridružili so se mu mlajši fiziki. Prišlo je do spora, o katerem je Max Planck zapisal: "Razumljivo, da je bil boj, v katerem sta

si stala nasproti Boltzmann in Ostwald, dokaj živahen in da je pripeljal do marsikatero ostroti, saj sta bila zagovornika po ostroti in duhovitosti vredna drug drugega." Kljub sporu sta Boltzmann in Ostwald ostala prijatelja in je Boltzmann med bivanjem v Leipzigu veliko časa prebil pri Ostwaldovih. Pisma kažejo, da se tudi Boltzmann in Mach nista sovražila, čeprav Mach kot edini svojih pomislekov ni prekalal.

Perrinova merjenja sedimentacijskega ravnovesja in Brownovega gibanja po letu 1911 so nazadnje ovrгла pomisleke kemikov. Z današnjega vidika se zdi nasprotovanje atomom na koncu 19. in začetku 20. stoletja precej neutemeljeno. Perrinova merjenja niso postregla s presenetljivimi novimi ali natančnejšimi rezultati. Teda pa so bila zelo pomembna, ker so, kot kaže, predvsem s svojo preprostostjo in nazornostjo prepričala še zadnje dvomljivce. Perrin je navdušeno zapisal: "Atomska teorija je zmagala. Do nedavnega še številni nasprotniki, nazadnje premagani, zdaj drug za drugim preklicujejo svoje pomisleke, ki so tako dolgo bili upravičeni in – tega ni mogoče zanikati – koristni." Danes si je spoznanje o atomih utrla pot v sprejeto sliko o naravi in ga učenci usvojijo v zadnjih razredih osnovne šole. O njem tudi zunaj šole precej slišimo in beremo.

Youngova ocena. Vzemimo, da je molekula vode kocka z robom a , prostornino a^3 , površino $6a^2$ in se v kapljevini molekule dotikajo. N molekul ima prostornino $V = Na^3$ in maso $m = \rho Na^3$, če je ρ gostota vode. Kapljevinsko vodo spremenimo v paro, ki jo sestavljajo proste molekule, po dveh poteh. Vodo izparimo pri vrelišču pri navadnem zračnem tlaku, ko ji dovedemo toploto $q_i m = q_i \rho Na^3$. Pri tem je q_i izparilna toplota. Ob razprševanju vode proti površinski napetosti γ opravimo delo γS , ko povečamo površino za $S = 6Na^2$. Oboje izenačimo in dobimo

$$a = \frac{6\gamma}{\rho q_i} = \frac{6 \cdot 0,07 \text{ Jm}^{-2}}{10^3 \text{ kgm}^{-3} \cdot 2,26 \cdot 10^6 \text{ Jkg}^{-1}} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,2 \text{ nm}.$$

To je le ocena, saj s površinsko napetostjo ne bi smeli računati, ko gre za molekule. Molekule tudi niso kocke. Dvakrat manj bi dobili, če bi računali s kroglicami, ki pa ne bi izpolnile prostora. (Nismo upoštevali tudi dela $p(V - V_k) \approx pV = 0,17 \cdot 10^6 \text{ J}$, ki ga vodna para ob izparevanju vode opravi proti zunanemu zračnemu tlaku in za katerega je sprememba energije manjša od dovedene toplote.)

Loschmidtov račun. Za povprečno prosto pot molekule v plinu, to je za povprečno razdaljo, ki jo molekula prepotuje med zaporednima trkoma, je Rudolf Clausius navedel enačbo $\bar{l} = 1/(\frac{4}{3}\pi \cdot (2r_1)^2 n)$, v kateri je n število molekul v prostorninski enoti. Loschmidt je enačbo pomnožil z imenovalcem in še s polmerom r_1 ter dobil $r_1 = \frac{2}{3}\pi\bar{l}(2r_1)^3 n$. Število molekul, pomnoženo s prostornino ene molekule v obliki kocke $N(2r_1)^3$, je izenačil s prostornino kapljevine ob vrelišču in povprečno prosto pot $\bar{l} = 3\eta/\rho\bar{v}$ izračunal iz enačbe za viskoznost plina $\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{l}\bar{v}$. Povprečno velikost hitrosti $\bar{v}$ je še nadomestil s korenom iz povprečja kvadrata hitrosti $(3RT/M)^{1/2}$. Nazadnje je dobil

$$r_1 = \frac{2\pi\eta}{\rho_k} \left(\frac{M}{3RT} \right)^{1/2}.$$

Loschmidt je računal za kisik, ki ga dotlej še niso utekočinili, zato je le ocenil gostoto kapljevinskega kisika ob vrelišču. Nazadnje je za polmer navedel preveliko vrednost.

Vstavimo za viskoznost vodne pare $\eta = 1,2 \cdot 10^{-5}$ kg/ms pri vrelišču vode $T = 373$ K, gostoto kapljevinske vode $\rho_k = 10^3$ kg/m³ ter maso kilomola vode $M = 18$ kg in splošno plinsko konstanto $R = 8313$ J/K pa dobimo oceno za polmer molekule vode 0,1 nm.

Učenci petega, šestega, sedmega in osmega razreda Osnovne šole Mirana Jarca v Ljubljani so odgovarjali na vprašanje, kaj so atomi. Odgovori na mimogrede zastavljeno vprašanje povedo marsikaj zanimivega. Pri tem ne moti, da se je kak učenec odločil za podoben odgovor kot sosed.

V petem razredu je odgovorilo 48 učencev. Slaba polovica je atome povezala z "atomsko" bombo ali z eksplozijami. Približno petina je zapisala, da ne ve, kaj so atomi. Osmina je atome povezala s kemijo in desetina s plini, tudi strupenimi. Šestnajstina je vedela, da gre za drobne delce snovi. Šestnajstina je omenila "močno silo", kar je morda povezano z eksplozijami. Štiriindvajsetina je podobno omenila "velike stvari". Enak delež je atome povezal s topicami, z mikroorganizmi, s prahom, s katastrofo in celo z Afganistanom. Skoraj tretjino je beseda atom spomnila na števila, znake, računske operacije, račune, matematiko, fiziko in podobne neotipljive zadeve. (Ker je večina dala več odgovorov, je vsota večja kot 1.)

“Atomi so bombe, velike, strašne, ki te usmrtijo v minuti. To je atomska bomba ali pa neki računi v zvezi z matematiko. Ali pa nek naslov. Nekaj v zvezi s fiziko. Neki deli pištole ali bombe.”

V šestem razredu je odgovorilo 52 učencev. Tretjina je atome povežala z “atomsko” bombo. Petina je vedela, da gre za “najmanjše” delce snovi. Šestina je zapisala, da ne ve, kaj so atomi. Trinajstina je menila, da gre za sevanje ali žarke, šestnajstina, da gre za “delce mikroorganizmov”, in prav toliko, da gre za “delce energije”. Posamezniki so napisali, da so atomi “sestavni deli molekul”, “jedrski zračni prostor”, “v vesolju plavajoči predmeti”, “oblike”.

“Atomi so majhne pikice, ki jih dajo v atomsko bombo, da lahko eksplodira. Zelo so močne, ker lahko ubijejo celo mesto”.

V sedmem razredu je odgovorilo 31 učencev. Tri četrtine so navedle, da so atomi drobni delci snovi, tretjina od teh je navedla podrobnejšo sestavo: “elektroni, protoni, nevtroni”. Samo desetina je povežala atome z “bombo” in prav tolikšen delež je menil, da gre “za mikroskopsko majhne stvari”. Le petnajstina je zapisala, da ne ve, kaj so atomi.

“Atom je nek mikroskopsko majhen stvar. V kemiji, ne vem, kaj pomeni. Spominja pa me na drekec od zajca ali na neko rožo, ker ima raznobarvne pikice.”

V osmem razredu je odgovarilo 64 učencev. Štiri petine so vedele, kaj so atomi in od teh je četrtnina navedla, da atome sestavljajo elektroni ali elektronske ovojnice ter protoni in nevtroni ali jedra. Četrtnina je poudarila, da sestavljajo atomi neživo in “živo” naravo, nekateri pa so omenili samo neživo ali samo živo naravo. Dvajsetina je zapisala, da je “v jedrih nakopičena energija”, in dvaintridesetina je povežala atome z energijo. Samo eden je zapisal, da ne ve, kaj je atom, in samo enega je atom spomnil na bombo. Eden je pripomnil, da atome vidimo z “dobrim” mikroskopom.

“Mislim, da so atomi najmanjši del v prostoru. So povsod v večih stvareh. Lahko se uporabljajo za različne stvari.”

Lepo se zahvaljujem učitelju Andreju Nardinu, ki je prijazno izvedel anketo med učenci.

Janez Strnad

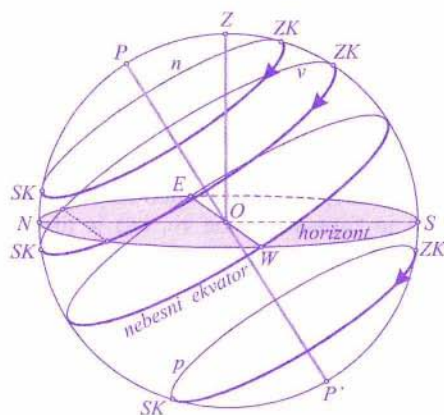
ZENITNE ZVEZDE

Saj vem, da porečete, da so te zvezde na svoj način povezane z zenitom ali nadglaviščem, t.j. najvišjo točko na nebu, ali kot včasih tudi rečemo, z najvišjo točko nad obzorjem (horizontom). Prav imate. To so zvezde, ki pri svojem navideznem dnevnem vrtenju (zaradi vrtenja Zemlje) pridejo v kakem kraju natanko v zenit. Da pa se to zgodi, mora za zvezde veljati določen pogoj. Oglejmo si ga.

Kot veste, v naših krajih večina zvezd vzhaja na vzhodni strani obzorja, se dvigne najvišje na jugu in zahaja na zahodnem delu obzorja. Takim zvezdam rečemo vzhajalke. So pa tudi takšne zvezde, ki ne vzhajajo in ne zahajajo. Prve so stalno nad obzorjem (na nebu), druge pa pod njim. Prvim rečemo nadobzornice, drugim podobzornice. Ker podobzornic ne vidimo, nas ne bodo zanimale (slika 1).

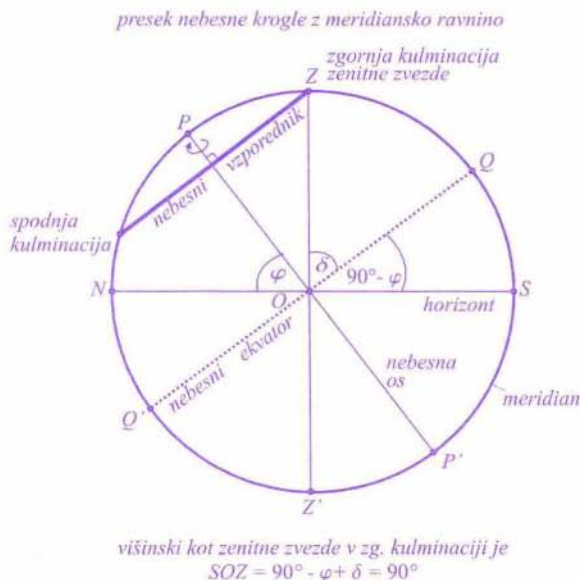
V zenit lahko pridejo le določene vzhajalke in nadobzornice. Zato se bomo tu ukvarjali le s temi zvezdami.

Recimo, da nas zanima, katere zvezde (z deklinacijo $\delta > 0$) lahko v naših krajih (z zemljepisno širino $\varphi > 0$) pridejo v zenit, da torej gredo čez krajevni nebesni poldnevnik (meridian) natanko v zenitu. To pomeni, da se njihova zgornja kulminacija (prehod čez poldnevnik) odigra v zenitu kakega kraja. Višinski kot takšnih zvezd meri 90° . Brez težav izpeljemo $90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ$, od koder sledi splošni pogoj $\delta = \varphi$.



Slika 1. Navidezno kroženje zvezd; n – nadobzornica, v – vzhajalka (in tudi zahajalka), p – podobzornica, ZK – zgornja kulminacija, SK – spodnja kulminacija.

Povejmo ga z besedami: V krajih na severni zemeljski poluti so zenitne tiste zvezde, katerih deklinacija je enaka zemljepisni širini kraja. Samo takšne zvezde lahko opazujemo v zenitu danega opazovališča.



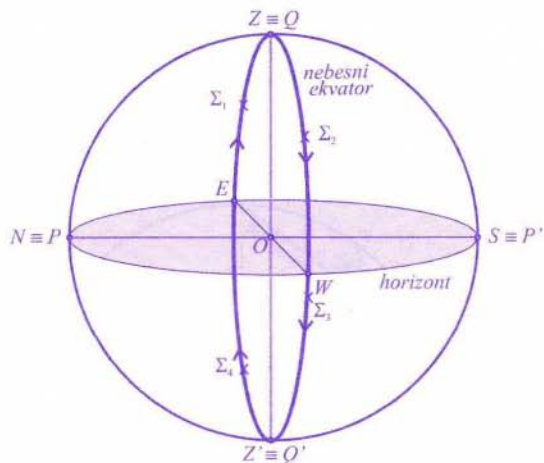
Slika 2. K izpeljavi splošnega pogoja za zenitne zvezde, ki ležijo na nebesnem vzporedniku (shematično označenem z debelo daljico) z deklinacijo $\delta > 0$, če jih opazujemo iz kraja z zemljepisno širino $\varphi > 0$. P – severni nebesni pol, Z – zenit, O – opazovališče, P' – južni nebesni pol, PP' – nebesna os, okrog katere se vrti nebesna krogla, φ – višinski kot severnega nebesnega pola (približno Severnice), kar je enako zemljepisni širini kraja na severni zemeljski poluti; NS – poldnevica, oz. shema za obzorje, QQ' – shema za nebesni ekvator.

Opomba: Če debela daljica seka NS , gre za vzhajalko, če ne, pa za nadobzornico.

Kljub temu, da je pogoj $\delta = \varphi$ preprost in skoraj vse pove, pa si za boljše predstavbo le oglejmo še nekaj posebnih primerov.

- **Razmere na zemeljskem ekvatorju ($\varphi = 0$)**

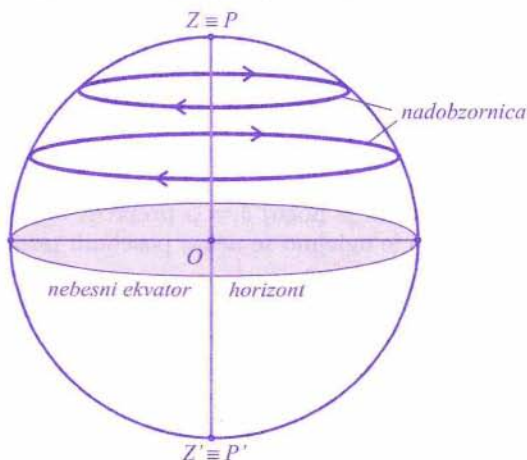
Velja $\delta = 0$. Zenitne zvezde so torej vse zvezde, ki imajo deklinacijo nič. Te zvezde ležijo na nebesnem ekvatorju in so vse vzhajalke. Vzhajajo natanko na vzhodu, so seveda najvišje v zenitu in zahajajo natanko na zahodu (slika 3). Sonce je tudi zvezda vzhajalka, ki pa se ji spreminja deklinacija v mejah od $-23,5^\circ$ (ob božiču) do $+23,5^\circ$ (ob kresu). Ko ima Sonce deklinacijo nič, leži na nebesnem ekvatorju. To se zgodi ob spomladanskem (21. 3.) in jesenskem (23. 9.) enakonočju.



Slika 3. Razmere na zemeljskem ekvatorju. Vse zvezde $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$, ki ležijo na nebesnem ekvatorju ($\delta = 0$), pridejo za opazovalca na zemeljskem ekvatorju v zenit – so torej zenitne zvezde.

- *Razmere na severnem zemeljskem polu ($\varphi = 90^\circ$)*

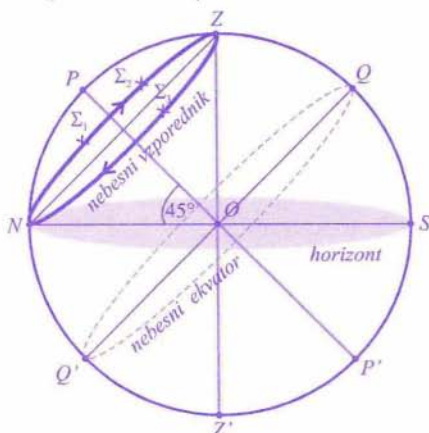
Tu je $\delta = 90^\circ$. To deklinacijo ima samo severni nebesni pol, kjer pa ni nobene zvezde. Severnica ne more biti zenitna zvezda, ker ima deklinacijo $\delta = 89,25^\circ$, in torej navidezno kroži po zelo majčkenem krogu okrog severnega nebesnega pola (slika 4).



Slika 4. Na severnem zemeljskem polu ne zasledimo nobene zenitne zvezde.

- Razmere v krajih na zemeljskem vzporedniku s $\varphi = 45^\circ$

V tem primeru ležijo zenitne zvezde na nebesnem vzporedniku z $\delta = 45^\circ$. Take zvezde navidezno krožijo okrog severnega nebesnega pola tako, da imajo zgornjo kulminacijo v zenitu (kar je jasno), spodnjo pa natanko na severu, tako da se tam navidezno dotaknejo obzorja (slika 5).

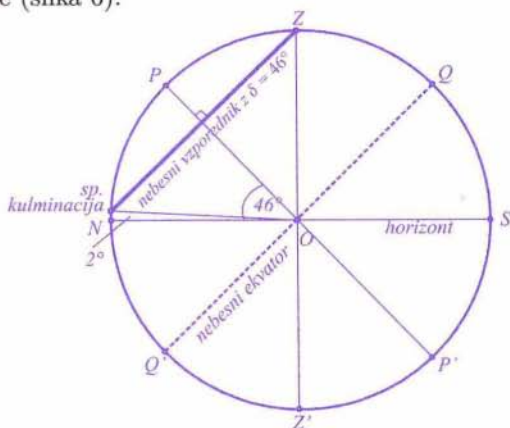


Slika 5. Zenitne zvezde za kraje z zemljepisno širino 45° .

Iz opisanih primerov se z zdravo pametjo dokoplujemo do naslednjega zaključka: V krajih z zemljepisno širino φ ležijo zenitne zvezde na nebesnih vzporednikih z deklinacijo $\delta = \varphi$. Za $0^\circ \leq \varphi < 45^\circ$ so vse vzhajalke, za $45^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ so vse nadobzornice.

- Za zaključek si oglejmo še razmere v naših krajih ($\varphi = 46^\circ$).

Zenitne zvezde ležijo na nebesnem vzporedniku z $\delta = 46^\circ$ in so vse nadobzornice (slika 6).



Slika 6. Zenitne zvezde za naše kraje z zemljepisno širino okoli 46° . Višinski kot zvezd v zgornji kulminaciji je seveda 90° , v spodnji pa je 2° , torej gre za nadobzornice.

Naloge:

1. V katerih krajih na Zemlji je Severnica zenitna zvezda?
2. Razišči lastnosti zenitnih zvezd za kraje z zemljepisno širino:
 - a) $\varphi = 23,5^\circ$
 - b) $\varphi = 30^\circ$
 - c) $\varphi = 60^\circ$

V katerih krajih na Zemlji lahko pride v teh treh primerih Sonce v zenit?

Marijan Prosen

Rešitve nalog so na strani 291.

ČRKE IN ŠTEVILA 2

Vsaka črka v tabeli predstavlja število med 1 in 9. Različne črke pomenijo različna števila. V tabeli so podane še vsote vrstic in stolpcev.

H	I	E	A	15
B	F	G	C	21
D	E	A	B	25
F	D	G	I	20
25	25	15	16	

A	B	C	D	E	F	G	H	I
		6					3	

Poiščite vse vrednosti posameznih črk in jih vpišite v desno tabelo. V pomoč sta vrednosti za dve črki že vpisani v rešitev.

Boštjan Jaklič

Rešitev je na strani 299.

AVOGADROV ZAKON

Ob članku o atomih se je pojavilo vprašanje, po kakšni poti je Amedeo Avogadro leta 1811 prišel do zakona, da je v enakih prostorninah plinov pri enakem tlaku in enaki temperaturi enako število molekul. Vprašanje je zanimivo, ker sega v čas, ko je kemike spravljal v zadrego razločevanje atomov in molekul.

Slika 1. Grof Amedeo Avogadro je bil rojen leta 1776 v Torinu v družini znanega pravnika in javnega delavca. V šolo je hodil v domačem kraju in s šestnajstimi leti dosegel prvo stopnjo prava. Štiri leta pozneje je opravil doktorat in začel pravniško prakso. Že prej ga je zanimalo naravoslovje, v novem stoletju pa se je resno začel ukvarjati z njim. Leta 1806 je postal demonstrator na torinski akademiji in leta 1809 profesor naravoslovja na srednji šoli. Leta 1820 je zasedel mesto profesorja za matematično fiziko na torinski univerzi. Toda mesto, prvo svoje vrste na tej univerzi, so ob političnih spremembah ukinili. Pozneje so ga spet uvedli in leta 1834 ga je Avogadro ponovno zasedel ter ostal na njem do upokojitve leta 1850. Umrli je leta 1856. O njem pišejo, da je bil skromen in je veliko delal.



Leta 1808, ko je izšel *Novi sistem kemijske filozofije* Johna Daltona, so kemiki že sprejeli zakon o stalnih masnih razmerjih in zakon o večkratnih masnih razmerjih. Dalton je zagotovil, da vsakemu elementu ustreza določena *atomska masa* (tedaj so govorili o atomski teži), vendar ni poznal načina, da bi jo zanesljivo določil. Izhajal je iz zamisli, da vsako snov sestavljajo atomi in se v spojini dveh elementov veže atom prvega elementa z atomom drugega elementa v "sestavljene atom".

Joseph Louis Gay-Lussac je leta 1802 z merjenji ugotovil, da je sprememba prostornine plina pri konstantnem tlaku sorazmerna s spremembo temperature.

Danes, ko imamo absolutno temperaturo, lahko rečemo, da je pri konstantnem tlaku prostornina sorazmerna s temperaturo. Gay-Lussac je zapisal *plinsko enačbo* v obliki $pV = p'V'[1 + \alpha(\vartheta - \vartheta')]$. Pri tem tlak p , prostornina V in Celzijeva temperatura ϑ zadevajo končno stanje in ustrezne količine s črticami začetno stanje. Po svojih merjenjih je določil $\alpha = 1/267^\circ\text{C}$, kar se je razlikovalo od današnje vrednosti $1/273^\circ\text{C}$.

Pozneje je Gay-Lussac nadaljeval poskuse s plini in raziskoval kemijske reakcije med njimi. Leta 1809 je objavil *Razpravo o spajanju plinskih snovi druge z drugo*. Meril je prostornini plinov, ki se spojita, in prostornino spojine, če je nastala plinasta spojina. Pri številnih poskusih je ugotovil, da sta prostornini plinov, ki se spojita, v razmerju majhnih celih števil in da velja to tudi za prostornino plinaste spojine. Prostornine je meril pri navadnem zračnem tlaku in sobni temperaturi.

Omenimo nekaj Gay-Lussacovih rezultatov. Določena prostornina kisika se z dvojno prostornino vodika spoji v vodo. Določena prostornina dušika se s trojno prostornino vodika spoji v dvojno prostornino amoniaka. Določena prostornina dušika se spoji s polovično prostornino kisika v didušikov oksid, z enako prostornino kisika v dušikov oksid in z dvojno prostornino kisika v dušikov dioksid. Gay-Lussac je delal tudi poskuse s klorovodikom, z ogljikovim oksidom in dioksidom, z žveplovim dioksidom in trioksidom. Kemijsko sestavo nekaterih plinov mora današnji bralec ugotoviti po relativni atomski masi. Zanje so uporabljali nenavadna stara imena, kemijskih formul in enačb pa tedaj še niso pisali.

Masa in prostornina, ki ju je Gay-Lussac meril, se ob kemijski reakciji obnašata različno. Za maso velja ohranitveni zakon, za prostornino pa ne. Na drugi strani so prostornine udeleženih plinov v razmerju majhnih celih števil, mase pa ne. Gay-Lussac je delal tudi poskuse s plinoma, ki sta se spojila v trdno spojino. Ugotovil je, da se določena prostornina klorovodika spoji z enako prostornino amoniaka v sol, amonklorid. Masa se tudi v tem primeru ohrani, a prostornina soli ni v preprosti zvezi s prostorninama plinov na začetku.

Določena masa vodika se je spojila s 7,537-krat tolikšno maso kisika v 8,537-krat tolikšno maso vode. Če je Gay-Lussac meril na začetku prostornino vodika in kisika pri vrelišču vode, se je prostornina nastale vodne pare ujemala z začetno prostornino vodika.

Določena masa dušika se je z 1,14-krat tolikšno maso spojila v 2,14-krat tolikšno maso dušikovega oksida. Iz teh podatkov izračunamo relativni atomski masi dušika 13,238 in kisika 15,074, če vzamemo – tako je bilo tedaj v navadi – za vodik relativno atomsko maso 1. (Z današnjimi podatki bi dobili v tem merilu za dušik 13,899 in za kisik 15,875. Vendar danes navajamo relativne atomske mase v merilu, v katerem ima ogljikov izotop ^{12}C relativno atomsko maso 12,00000.) Večino merjenj je Gay-Lussac izvedel sam ali s sodelavci, le nekaj podatkov si je sposodil pri drugih. Rezultati kažejo, da zasluži Gay-Lussacovo delo v kemiji enako spoštovanje kot njegovo delo v fiziki.

Gay-Lussac pa obilice podatkov, do katerih se je dokopal, ni do kraja izkoristil. To je storil Amedeo Avogadro, ki je leta 1811 v *Journal de Physique* objavil *Razpravo o načinu določanja relativnih mas elementarnih molekul snovi in razmerij, v katerih vstopajo v te spojine*. Začel je takole: "G. Gay-Lussac je v zanimivi razpravi pokazal, da se plini

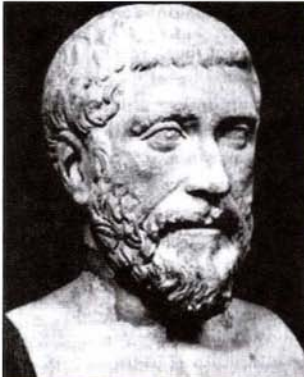
vselej spajajo v zelo preprostem razmerju prostornin in, če nastane plin, je njegova prostornina tudi preprosto povezana s prostornino sestavin. Zdi se, da so kvantitativna razmerja snovi v spojinah odvisna samo od relativnega števila molekul, ki se spojijo, in števila sestavljenih molekul, ki nastanejo. Potem moramo priznati, da obstajajo zelo preproste zveze med prostorninami plinskih snovi in številom preprostih ali sestavljenih molekul, ki nastanejo. Prva domneva, ki se v tej zvezi pojavi, in zdi se, da je tudi edina mogoča, je privzetek, da je število sestavljenih molekul v vsakem plinu vselej enako za enake prostornine ali vselej sorazmerno s prostornino.”

Kakor je Dalton razmišljal le o atomih in vpeljal “sestavljene atome”, je Avogadro obravnaval le molekule. V navedenem kratkem odlomku je omenil “elementarne” in “integralne” ter “preproste” in “sestavljene molekule”. Kaj je pravzaprav mislil z enimi in drugimi? Ali je imel elementarne ali preproste molekule za molekule elementov ter integralne ali sestavljene molekule za molekule spojin? Vendar je, ne glede na to, zakon, ki ga je izrekel, obveljal. Pripomnimo, da tedaj niso poznali enoatomnih molekul; poskusov s kovinskimi parami niso delali, žlahtne pline pa so odkrili šele proti koncu stoletja.

Avogadrovega dela sodobniki niso opazili. Šele na prvem velikem mednarodnem kemijskem kongresu v Karlsruheju leta 1860, to je štiri leta po Avogadrovei smrti, so se nekateri italijanski kemiki zavzeli zanj. Med njimi je bil znani zdravnik in kemik Stanislao Cannizzaro. Udeležence je prepričeval, da je mogoče z Avogadrovim zakonom določiti relativne mase molekul in posredno tudi relativne mase atomov. Vendar Avogadrovega zakona vsi še vedno niso bili pripravljeni upoštevati. Številni kemiki so bili prepričani, da se različna atoma zaradi različnih električnih nabojev privlačita in se lahko spojita. Enaka atoma pa naj bi se zaradi enakih nabojev odbijala in se ne bi mogla vezati v molekulo. Tako si niso mogli zamisliti, da bi se dva enaka atoma vodika vezala v molekulo vodika. Dalton je od vsega začetka odklonil možnost, da bi iz določene prostornine kisika in dvojne prostornine vodika nastala dvojna prostornina vodne pare. Ker je vztrajal pri svoji zamisli, mu ni preostalo drugega, kot da je poskusil razvrstevati Gay-Lussacovo delo.

Nekatere kemike so italijanski kemiki na kongresu prepričali. Lothar Meyer, nemški kemik, ki je pred Mendelejevim sestavil zasnovano periodne preglednice, je zapisal, da si je vzel ponatis članka enega od italijanskih kemikov o Avogadrovem delu in ga na poti domov prebral: “Bilo je, kakor da bi spregledal. Dvom je izginil, nadomestil ga je občutek mirne jasnosti.” Zgodovinarji pripominjajo, da so “redkokdaj delo kakega moža tako v celoti spregledali” kot delo Amedea Avogadra.

KRIŽANKA “MATEMATIKI ANTIKE”

			AVTOR MARKO BOKALIC	NAJVIŠJI ČIN V MORNARICI	MESTO SV OD RIMA	KOLU PODOBEN ROMUNSKI PLES	ORESTOVA IN ELEKTRINA SESTRA	NEPRIDI- PRAVI, KI KRADEJO	DRAMA HRVAŠK. PISCA NA BRESANA	RI PREI ZAI
			PITAGO- REJEC Z TARENTA							
			ZAČETNIK ALGEBRE (ENACBE) IZ ALEK- SANDRIJE							
			MERJENJE							
			ANGLEŠKA PIVNICA							
				P						
MODREC IZ MILETA, AVTOR IZREKA O OBODNEM KOTU NAD PREMEROM	TRAVA POLETNE (DRUGE) KOŠNJE	PRAKANTON V SVICI		U			FR. MATEMATIK GALOS			
		KROŽNO KRIŽIŠČE, KROŽIŠČE					ČLAN DRUŽINE			
PRIPRAVA ZA PRE- NAŠANJE PRILJAGE				B		3. OSEBA MNOŽINE			DOBESED. PREVOD TUJE BESEEDNE ZVEZE	DRUŽ SLOJ
						OZNAKA NEZNANKE V ENACBI				RC PERL
TRINIDAD, SPRINTER BOLDON					KITAJSKI SADEZ				MORSKI VELIKAN	
									LEDENA OBLOGA NA DREVJU	
KULTURNA RASTLINA ZA OLJE IN PLATNO					REČ ALI OSEBA KI JE NE ŽELIMO IMENOVATI	NASI PLAVIALKI (ALENKA IN NATASA)				
						VARŠCINA				
AKSIOMA- TIK IZ KINDOSA V MALI AZIJI							410 km DOLG PRITOK LOARE PRI NEVERSU			
NAJVEČJI PRITOK FR. REKE RONE										
						VRH IZ KONOPLJE (REDKO)	NAJBOLJŠA KOLESARKA VSEH ČASOV (JEANNIE)	ODPRAV- NISTVO V PODJETJU IVANA KOSILICA		
								I		IME BOSANSKEGA PESNIKA SARAJEVA
			ODKRITELJ AVSTRALIJE (JAMES)					K	POSLANEC LDS (ROMAN)	ŠPANSKI KRALJ CARLOS
			PRITOK DONAVE, KI IZVIRA V SVICI						TLA POD VODO	INDI VOI BIV
			SLOVITI INDIJSKI JOGI, KI JE DELOVAL NA ZAHODU						TONSKI NACIN V GLASBI	
			MATEMATIK IZ PERGE, ZNAN PO SVOJIH KROGIH						ALUMINIJ	
								A	N	
								L	O	

POZABLJENA NALOGA

Večji del januarja in v začetku februarja imamo na univerzi zimske počitnice. To sicer ne pomeni, da počivamo, ni pa predavanj in vaj za študente, še vedno pa moramo poskrbeti za kolokvije in izpite, govorilne ure ipd. No, to zimo sem si vzel nekaj časa in pregledal enega od kupov, kamor odlagam zadeve, ki se mi sicer zdijo zanimive, a ne zahtevajo takojšnje obravnave. Tako sem naletel tudi na kopijo naslednjega e-pisma, ki mi ga je že jeseni leta 1995 iz Amerike poslal kolega Marko Petkovšek. Takole pravi:

Za Presek pa tale naloga: Se spomniš tiste z 8-mestnimi praštevili, kjer odmetavaš cifre in imaš ves čas sama praštevila? No, če ne zahtevaš, da so vse cifre različne, lahko dobiš precej daljše primer(k)e. Vprašanje je, kolikšno je maksimalno število cifer? (Domnevam, da ne moreš imeti poljubno dolgih rešitev, čeprav tega ne znam dokazati.) Z Mma sem ugotovil, da je največja dolžina 8, če odmetavaš cifre le na koncu; 23, če jih odmetavaš le na začetku. Ko sem dovolil odmetavanje na obeh koncih, sem (prek noči) dobil primer dolžine 30. Ko pa sem pognal iskanje v globino na celotnem drevesu in pustil teči prek noči, se je Macintosh sesul. Mma je seveda zelo počasna, po drugi strani pa bi bilo treba v C-ju ali pascalu napisati dolgo aritmetiko in testiranje praštevil. Kaj praviš na to?

Nekaj časa sem potreboval, da sem razvozlal, katera naloga je "tista z 8-mestnimi praštevili". Gre za Uganko gospoda Kukrike v reviji Monitor, in sicer iz oktobrske številke letnika 1994. V pismu je uporabljena tudi kratica Mma, ki označuje programski paket Mathematica. To je zmogljiv program, ki med drugim omogoča udobno računanje z velikimi števili.

V pismu so torej omenjene tri vrste praštevil: taka, pri katerih lahko s konca po vrsti odmetavamo številke, dobljena števila pa so vseskozi praštevila (npr. 7333, saj so števila 7333, 733, 73 in 3 praštevila), taka, pri katerih odmetavamo številke na začetku (npr. 2137, ker so 2137, 137, 37 in 7 praštevila), in taka, pri katerih na posameznem koraku dovolimo odstranitev številke na začetku ali na koncu (npr. 7229, saj so 7229, 229, 29 in 2 praštevila). Seveda nas zanimajo čim daljša praštevila z omenjenimi lastnostmi.

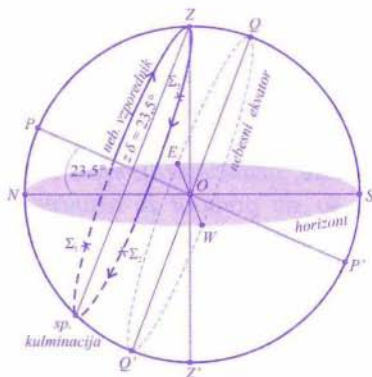
Ne spomnim se, kaj sem odgovoril na pismo, očitno pa sem kasneje na nalogo pozabil. Leta so minila, zamenjalo se je kar nekaj generacij procesorjev, pa nekaj različic Oken in tudi Mathematica je doživela nekaj posodobitev. Računalniki so tako postali precej zmoglivejši in iskanje odgovora na vprašanje iz pisma danes ne bi smelo več biti pretežko.

Z nekaj sreče bom uspel nagovoriti Marka, da za naslednjo številko Preseka napiše odgovor in kratko razlago trditev iz pisma. Vam pa seveda ni treba čakati do naslednje številke. Če ste radovedni in radi premetavate števila, lahko poskusite poiskati odgovore tudi sami.

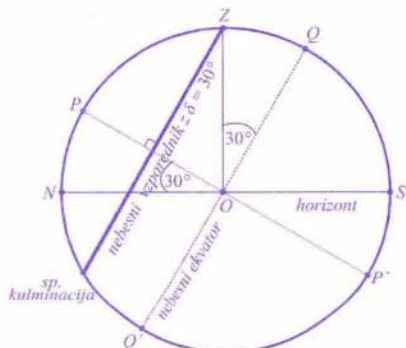
Martin Juvan

ZENITNE ZVEZDE – Rešitve nalog s strani 284

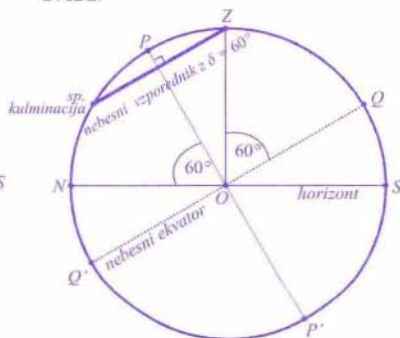
1. V krajih na Zemlji z zemljepisno širino $89,25^\circ$.
- 2.a) Zvezde ležijo na nebesnem vzporedniku (severnem nebesnem povratniku) z deklinacijo $23,5^\circ$. So vzhajalke. Sonce pride v teh krajih v zenit v začetku poletja, t.j. okoli 21. 6., ob kresu (slika 1).
- 2.b) Zvezde ležijo na nebesnem vzporedniku z $\delta = 30^\circ$. So vzhajalke. Sonce ne pride v teh krajih v zenit, saj lahko doseže le deklinacijo $\delta = 23,5^\circ$ (slika 2).



Slika 1. Po skici poskusi čim natančneje opisati dnevno pot teh zenitnih zvezd.



Slika 2.



Slika 3. Po skici poskusi opisati dnevno pot teh zenitnih zvezd.

- 2.c) Zvezde ležijo na nebesnem vzporedniku z $\delta = 60^\circ$. So nadobzornice. Sonce ne pride v teh krajih nikoli v zenit (slika 3).

Marijan Prosen

IME ROŽE, LABIRINT IN PREGLED GRAFA

V znanem detektivsko-zgodovinskem romanu italijanskega pisatelja Umberta Eca *Ime rože* [1] menih Viljem in njegov pisar Adson raziskujeta niz skrivnostnih umorov v samostanu nekje v severni Italiji. Ključ do razrešitve skrivnosti je knjiga v samostanski knjižnici. Knjižnica je zgrajena kot labirint; ima namreč 56 sob, od katerih so nekatere povezane z vrati, druge pa ne. Ko se v noči z drugega na tretji dan Viljem in Adson izgubita v tej knjižnici, pravi Viljem Adsonu:

“Samo en način je, kako najdeš pot iz labirinta. Na vsakem novem križišču, se pravi takem, kjer še nisi bil, je treba mesto, kjer si vstopil, zaznamovati s tremi znaki. Če po znamenjih na svoji poti vidiš, da si že bil tam, označiš kraj, skozi katerega si prišel tja, z enim samim znakom. Če so vsi prehodi že označeni, se moraš vrniti po isti poti nazaj. Če pa je kakšen prehod še brez znakov, izbereš tega in ga označiš z dvema znakoma. Če greš skozi prehod, ki nosi en sam znak, mu dodaš še dva, tako da bo imel tisti prehod potlej tri. Prehodil si vse dele labirinta, če takrat, ko prideš do razpotja, nikdar ne greš skozi prehod s tremi znaki, razen če ni še kakšen prehod neoznačen.”

Recept je podan zelo nejasno in nenatančno. V literaturi in na internetu se pojavljata dva algoritma, ki bi lahko “ustrezala” zgornjemu opisu. Prvega je leta 1882 objavil francoski inženir Tremaux. Njegov opis lahko bralec najde v članku Marije Venclejeve *Hoja po labirintu* [2] ali pa na internetnem naslovu www.astrolog.org/labyrnth/algrithm.htm. Drugi algoritem, ki se zdi nekoliko bližji opisu iz knjige, je leta 1895 predstavil Gaston Tarry¹. Ta algoritem je sicer bolj skopo razlago opisan v knjigi Wilsona in Watkinsa *Uvod v teorijo grafov* [3]. Pri tem naj bo bralec pozoren na drobno napako ob koncu pravila (a). V tem prispevku pa bomo Tarryjev algoritem natančno opisali in podrobno utemeljili, da nas res zmeraj pripelje iz labirinta.

Algoritem sestavljajo tri skupine pravil: po prvi skupini pravil se ravnamo pri odhodu iz križišča, drugo skupino uporabljamo ob prihodu v križišče, zadnje pravilo pa uporabimo le tedaj, ko zaidemo v slepo ulico. Pravila so naslednja:

¹ Gaston Tarry (1843–1913), francoski matematik

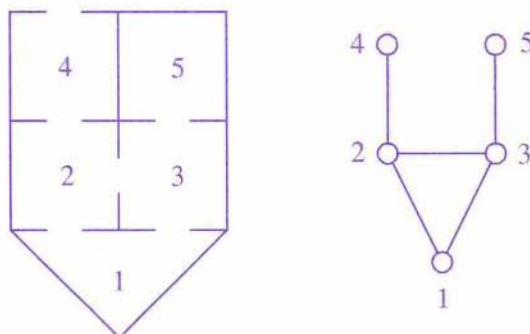
- O1: Če obstaja izhod iz križišča, ki še ni označen, ga izberi in ga označi z dvema znakoma.
- O2: Če neoznačen izhod ne obstaja, izberi izhod z enim znakom ter mu dodaj še en znak.
- O3: Če neoznačenih izhodov in izhodov z enim znakom ni, izberi izhod s tremi znaki ter mu izbriši en znak.
- P1: Če prideš v križišče, kjer še nisi bil, označi vhod, skozi katerega si prišel, s tremi znaki.
- P2: Če prideš v že obiskano križišče po poti, po kateri še nisi šel, označi vhod, skozi katerega si prišel, z enim znakom.
- S: Če prideš v slepo ulico, se obrni in pojdi nazaj po isti poti (kaj pa ti sploh preostane drugega).

Zgornja pravila naj bi nam omogočila, da obiščemo vsa križišča labirinta, ne da bi šli po katerikoli poti več kot dvakrat. Pa pogledjmo, ali ta trditev drži.

Najprej opišimo matematično formulacijo problema. Labirint predstavimo z grafom; križišča labirinta bodo točke grafa, poti med križišči pa povezave grafa. Pri tem nas ne moti, če ima tako dobljeni graf zanke ali večkratne povezave (če je, recimo, kako križišče s povezavo povezano samo s sabo ali pa če sta dve križišči povezani z več povezavami). Morebitne slepe poti v labirintu v grafu predstavimo s povezavo in točko na koncu (to si lahko predstavljamo tudi tako, da smo na koncu slepih hodnikov naredili sobe; po taki razširitvi labirinta pravila S ne potrebujemo več). V nadaljevanju bomo privzeli, da je tako dobljeni graf povezan, da se torej iz vsake točke grafa da priti po povezavah v vsako drugo točko. Če to ne drži, potem imamo opravka z več povsem ločenimi labirinti.

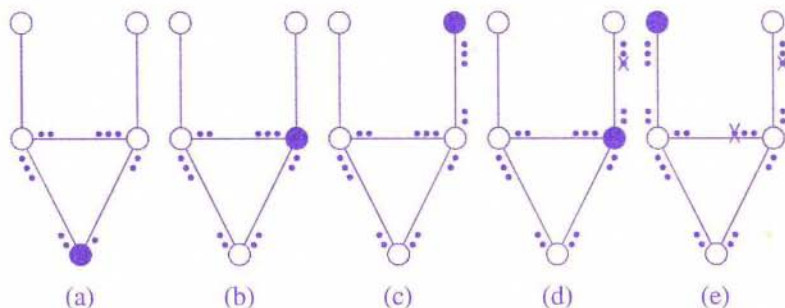
Nahajamo se torej v neki točki grafa, radi pa bi prišli v neko drugo, "odlikovano" točko grafa (to je, recimo, izhod iz labirinta). Če bi po nekem postopku znali obiskati vse točke grafa, potem bi slej ko prej našli tudi odlikovano točko. Pri tem ne smemo pozabiti pomembnega dejstva, da graf vidimo samo lokalno. Namreč, v vsaki točki je edina informacija, ki jo imamo o grafu, število povezav, ki izhajajo iz te točke, in podatek, kolikokrat smo že šli po teh povezavah. To je kar huda omejitev, ki nam močno oteži iskanje izhoda.

Poglejmo si labirint in njemu prirejeni graf s slike 1. Recimo, da se nahajamo v točki 1, radi pa bi prišli v točko 4. Na začetku izberemo po pravilu O1 eno od dveh povezav, ki vodita iz točke 1, recimo, povezavo do točke 2. Ta povezava dobi na svojem koncu pri točki 1 dva znaka,



Slika 1. Labirint in njemu prirejeni graf.

pri točki 2 pa tri znake. Po pravilu O1 imamo sedaj dve možnosti. Izberimo, recimo, povezavo do točke 3. Ta povezava dobi spet dva znaka na koncu pri točki 2 ter tri znake pri točki 3. Od točke 3 spet po O1 izberemo npr. povezavo do točke 1 (povezava dobi dva znaka pri točki 3 ter en znak pri točki 1 – glej sliko 2(a), kjer polni krožec pomeni trenutni položaj). Zaradi pravila O2 se moramo vrniti v točko 3 (povezava ima sedaj pri točki 1 dva znaka – glej sliko 2(b)). Ostane nam še povezava do točke 5, ki dobi dva (oziroma tri) znake – glej sliko 2(c). Od tu se zaradi pravila O3 spet vrnemo v točko 3 ter pri tem izbrišemo en znak pri točki 5 (slika 2(d)). Po pravilu O3 gremo nazaj v točko 2 in tej povezavi izbrišemo en znak pri točki 3. Od tu pa gremo po pravilu O1 končno do točke 4 (slika 2(e)). Seveda je bralec že sam ugotovil, da je število povezav, ki jih prehodimo, preden dosežemo zeleno točko, precej odvisno tudi od sreče, ki jo imamo pri izbiri povezav.



Slika 2. Sprehod po labirintu.

V nadaljevanju bomo naredili natančno analizo obnašanja Tarryjevega algoritma in pri tem opisali nekaj lastnosti, ki veljalo med pregledovanjem grafa. Začnimo z nekaj preprostimi ugotovitvami. Povezave grafa med pregledovanjem na obeh koncih označujemo z izbranimi znaki (npr. pikami ali črticami). Pravila so postavljena tako, da povezava bodisi na nobenem koncu nima nobenega znaka (povezava še ni bila prehojena ne v eni ne v drugi smeri) bodisi je označena na obeh koncih (kar pomeni, da je že bila prehojena vsaj v eni smeri), pri čemer sta na enem koncu dva znaka, na drugem pa en, dva ali trije znaki. Nadalje velja, da se koncu povezave, ki je že označen z dvema znakoma, število znakov ne bo več spremenilo. Ker nobeno pravilo ne dopušča, da bi trenutno točko zapustili po povezavi, ki ima začetek že označen z dvema znakoma, hkrati pa ob odhodu vedno poskrbimo, da začetek izhodne povezave postane označen z dvema znakoma, od tod sledi, da nobene povezave v nobeni smeri ne prehodimo več kot enkrat.

Med sprehajanjem po grafu se premikamo iz točke v točko in pri tem spreminjamo oznake na koncih povezav. Naša analiza temelji na naslednjih ugotovitvah:

- (i) Med sprehajanjem v vsakem trenutku za vsako točko v velja, da smo jo doslej zapustili natanko tolikokrat, kot je koncev povezav, ki so pri v označeni z dvema znakoma.
Utemeljitev. Točko vedno zapustimo po enem od pravil O1–O3. To pa so tudi edina pravila, ki omogočajo (in vedno tudi dosežejo) postavitev dveh znakov.
- (ii) Med sprehajanjem v vsakem trenutku za vsako točko v velja, da smo doslej vanjo prišli natanko tolikokrat, kot je takih povezav s koncem pri v , katerih drugi konec je označen z dvema znakoma. Lastnost utemeljimo na enak način kot točko (i).

Opozorimo, da nam v (i) in v (ii) zanka v točki v , ki ima na obeh koncih dva znaka, pomeni dva prihoda in dva odhoda iz točke v , zanka z dvema znakoma le na enem koncu pa en odhod in prihod.

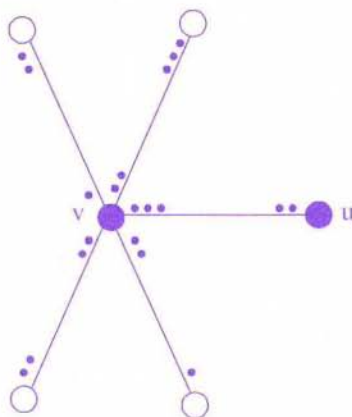
Naj bo z točka, v kateri začnemo pregled grafa. Kdaj pa se Tarryev algoritem konča? Takrat, kadar ne moremo uporabiti nobenega pravila več. Torej tedaj, ko iz trenutne točke sprehoda ne moremo več nadaljevati. To pa pomeni, da imajo vsi izhodi, ki vodijo iz točke, kjer se trenutno nahajamo, dva znaka. Ali se to lahko zgodi v točki, ki je različna od z ? Seveda ne. Če bi se to zgodilo, potem bi morali v končno točko priti enkrat več, kot smo iz nje odšli. To pa po (i) in (ii) ni mogoče, saj v točko ne moremo priti večkrat, kot je koncev povezav pri tej točki, vsi ti pa so označeni z dvema znakoma in po (i) predstavljajo odhode. Pokazali smo torej naslednjo lastnost Tarryjevega algoritma:

Lastnost 1. Tarryjev algoritem se vedno konča v začetni točki z .

Iz lastnosti 1 sledi, da smo ob koncu algoritma iz vsake točke odšli natanko tolikokrat, kot smo v njo prišli. Od tod pa ob upoštevanju (i) in (ii) že sledi naslednja lastnost:

Lastnost 2. Če so ob zaključku Tarryjevega algoritma v neki točki vsi konci povezav označeni z dvema znakoma, potem so z dvema znakoma označeni tudi vsi nasprotni konci teh povezav.

Za konec pokažimo, da s Tarryjevim algoritmom res prehodimo vsako povezavo grafa natanko dvakrat, po enkrat v vsaki smeri. Pa recimo, da temu ni tako.



Slika 3. Prva obiskana, a slabo pregledana točka.

Potem ob koncu algoritma obstaja povezava, ki ni na obeh koncih označena z dvema znakoma. Imenujmo take povezave *nepregledane*, točkam, ki so krajišče nepregledane povezave, pa bomo rekli *slabo pregledane*. Zaradi povezanosti grafa obstaja vsaj ena slabo pregledana točka, ki smo jo med sprehodom po grafu obiskali. (Premislite, da tako točko lahko dobimo npr. tako, da vzamemo prvo obiskano točko na poljubni poti od katerekoli slabo pregledane točke do začetne točke z .) Med vsemi obiskanimi, a slabo pregledanimi točkami, naj bo v tista, ki jo s Tarryjevim

algoritmom obiščemo prvo. Gotovo v ni točka z , sicer se pregled grafa še ne bi končal. Ker točko zapustimo po povezavi, označeni s tremi znaki, šele tedaj, ko ni več nobene druge možnosti, pri v obstaja nepregledana povezava, ki ima tri znake (glej sliko 3). Naj bo točka u drugo krajišče te povezave ($u \neq v$, saj zanka nikoli nima treh znakov). Točka u je prav tako bila obiskana med pregledom grafa, in sicer neposredno pred prihodom v točko v (morda pa tudi že kdaj prej). Ker pa je hkrati u tudi krajišče nepregledane povezave med u in v , je tudi u ena od slabo pregledanih točk. To pa je v protislovju z izbiro točke v , ki naj bi bila med vsemi slabo pregledanimi točkami prva obiskana.

Lastnost 3. S Tarryjevim algoritmom prehodimo vsako povezavo grafa natanko dvakrat.

Tako, analiza algoritma je opravljena in njegova pravilnost dokazana. Seveda pa podani opis algoritma ni edini možni. Če nas npr. moti brisanje znakov, lahko označevanje koncev povezav zasnujemo tako, da imamo ob koncu namesto dveh povsod po tri znake (in znake med sprehajanjem ves čas samo dodajamo). V bistvu je treba le zamenjati vlogo dveh in treh znakov (ter primerno prilagoditi pravila). Poskusite sestaviti tako prilagojena pravila!

Na koncu pa še povabilo: Če knjige *Ime rože* še niste prebrali, si vsekakor vzemite čas zanjo. Lahko pa si ogledate tudi istoimenski film s Seanom Conneryjem v glavni vlogi. Zemljevid samostanske knjižnice, ki je omenjena na začetku tega sestavka, lahko dobite na

www.uni-weimar.de/~kleppe/studium/rose/.

Za vajo lahko poskusite, ali znate pregledati labirint z opisanim algoritmom. Izhod je v sedemkotni sobi desno zgoraj.

Literatura

- [1] U. Eco: *Ime rože*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1985
- [2] M. Vencelj: *Hoja po labirintu*, Presek, letnik 17 (1989/90), št. 3, str. 154–159
- [3] R. J. Wilson in J. J. Watkins: *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma 63, DMFAS, Ljubljana, 1997

Štefko Miklavič, Martin Juvan

TIM, FERMAT IN KOLIČNIKI – Rešitev s str. 203

Pravilo vedno velja. Lahko ga zaokrožimo takole:

Trditve. Kvocient deljenja naravnega števila a s produktom $b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ naravnih števil je zadnji kvocient, ki ga dobimo, če a delimo z b_1 , dobljeni kvocient z b_2 , novi kvocient z b_3 itd.

Res. Kvocient q in ostanek r , ki ju dobimo, če naravno število a delimo z naravnim številom b , sta natanko določeni nenegativni celi števili, ki ustrezata pogoju

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (1)$$

Ker sta r in b celi števili, je $r < b$ isto kot $r \leq b - 1$, zato je (1) enakovredno

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r \leq b - 1. \quad (2)$$

V našem premisleku bomo povsod uporabili obliko (2).

Zaradi preprostosti se bomo omejili na $n = 3$, to je na primer $b = b_1 b_2 b_3$. To bo dovolj za predstavitev ideje, ki jo brez težav razširimo na poljuben n .

Uporabimo (2) in sledimo besedilu trditve. Naj bo:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r \leq b - 1$$

in

$$a = b_1 q_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 \leq b_1 - 1 \quad (3)$$

$$q_1 = b_2 q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 \leq b_2 - 1 \quad (4)$$

$$q_2 = b_3 q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 \leq b_3 - 1 \quad (5)$$

Pokazati moramo, da je $q = q_3$.

Če vstavimo (4) in (5) v (3) in malo poračunamo, dobimo

$$a = (b_1 b_2 b_3) q_3 + (r_1 + b_1 r_2 + b_1 b_2 r_3) = bq_3 + R,$$

kjer je $R = r_1 + b_1 r_2 + b_1 b_2 r_3$. R je očitno nenegativno celo število, ki ga lahko takole ocenimo:

$$\begin{aligned} 0 \leq R &= r_1 + b_1 r_2 + b_1 b_2 r_3 \leq (b_1 - 1) + b_1(b_2 - 1) + b_1 b_2(b_3 - 1) \leq \\ &\leq b_1 b_2 b_3 - 1 = b - 1. \end{aligned}$$

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 2000/2001 – s str. 251

Objavljamo rešitve nalog z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 21. aprila 2001 v Celju. Besedila nalog smo objavili v letošnji četrti številki Preseka.

Skupina I

1. Podatki: $d = 22$ cm, $l = 36$ cm, $s = 30$ cm, $m = 2$ kg, $S = 2,0$ cm², $\rho = 1000$ kg/m³.

Silo curka na desko zapišemo kot $F = \rho S v^2$. Navor sile curka mora biti manjši ali kvečjemu enak navoru teže. Če os postavimo na rob tnal, je ročica sile curka enaka $s - d$, ročica teže deske pa $d - \frac{1}{2}l$. V mejnem primeru sta navora enaka:

$$\rho S v^2 (s - d) = mg (d - \frac{1}{2}l), \quad v = \sqrt{\frac{mg(d - \frac{1}{2}l)}{\rho S(s - d)}} = 7 \text{ m/s}.$$

2. Podatki: $m = 50$ kg, $M = 40$ kg, $m_1 = 1$ kg, $\alpha = 30^\circ$, $l = 5$ m.

a) Čas potovanja žoge med dvema odbojema izračunamo iz enačb za poševni met: $t = 2v_y/g = 2v_0 \sin \alpha/g$; v tem času mora žoga za opazovalca na vagonu prepotovati razdaljo l : $l = v_x t = v_0 \cos \alpha t = v_0^2 \sin 2\alpha/g$. Od tod dobimo začetno hitrost žoge $v_0 = \sqrt{lg/\sin 2\alpha} = 7,52$ m/s. Glede na opazovalca na peronu je vodoravna komponenta te hitrosti zmanjšana za hitrost vagona v_v .

Hitrost vagona dobimo iz ohranitve vodoravne komponente gibalne količine sistema vagona, igralcev in žoge. Ker so na začetku vsi mirovali, je bila skupna gibalna količina enaka 0. Takoj po udarcu se giblje žoga v vodoravni smeri s hitrostjo $v_0 \cos \alpha - v_v$, igralca in vagon pa s hitrostjo v_v v nasprotni smeri gibanja vagona. Velja:

$$0 = m_1 (v_0 \cos \alpha - v_v) - (2m + M) v_v,$$

$$v_v = \frac{m_1 v_0 \cos \alpha}{2m + M + m_1} = 4,6 \text{ cm/s}.$$

Ker ima žoga v najvišji točki gibanja od 0 različno le vodoravno komponento hitrosti, je iskana razlika hitrosti kar enaka hitrosti vagona: $v_0 \cos \alpha - (v_0 \cos \alpha - v_v) = v_v$.

- b) Vagon se po odboju giblje v isti smeri toliko časa, kolikor časa je žoga v zraku, po naslednjem odboju se smer gibanja zamenja. Največji odmik vagona je

$$s = v_0 t = \frac{m_1 v_0^2 \sin 2\alpha}{g(2m + M + m_1)} = \frac{m_1 l}{(2m + M + m_1)} = 3,5 \text{ cm}.$$

3. Podatki: $a = 1,618 \text{ m}$, $l = 89 \text{ m}$, $\varphi = 16^\circ$, $\Delta t = 60 \text{ s}$, $\bar{P}_{\max} = 1,5 \text{ kW}$.

- a) Če želijo sužnji prekucniti blok, morajo zasukati blok okoli zgornjega roba osnovne ploskve vsaj toliko, da je težišče bloka ravno nad tem robom. Na začetku, ko blok še leži na klancu, tvori zveznica med težiščem bloka in zgornjim robom osnovne ploskve kot $\pi/4 - \varphi$ z vodoravnico. V začetni legi je torej težišče na višini $(a/\sqrt{2}) \sin(\pi/4 - \varphi)$ nad robom, v najvišji legi pa $a/\sqrt{2}$ nad robom (polovica diagonale stranice kocke meri $\frac{1}{2}a\sqrt{2} = a/\sqrt{2}$). Težišče bloka se torej dvigne za $\Delta h_1 = a(1 - \sin(\pi/4 - \varphi))/\sqrt{2}$. Delo, ki ga opravijo sužnji, je enako spremembi potencialne energije, saj se zaradi počasnega dviganja kinetična energija praktično ne spreminja. Torej je $A_1 = \Delta W_p = \rho a^3 g \Delta h_1 = 73 \text{ kJ}$.
- b) V času $\Delta t = 60 \text{ s}$ opravijo sužnji delo A_1 , njihova povprečna moč je tako $\bar{P} = A_1/\Delta t = 1,2 \text{ kW}$.
- c) Izračunajmo še delo, ki ga opravijo sužnji pri porivanju, če blok premaknejo za dolžino ene stranice, kar ustreza enemu prekucu. V tem primeru je delo enako spremembi potencialne energije in delu trenja na razdalji a . Dvig težišča je $\Delta h_2 = a \sin \varphi$. Za opravljeno delo dobimo

$$A_2 = mg\Delta h_2 + k_t mg \cos \varphi a = \rho a^4 g (\sin \varphi + k_t \cos \varphi) = 75 \text{ kJ}.$$

Na razdalji do vrha klanca, $l - a$, morajo opraviti v prvem primeru delo $A'_1 = (l - a)A_1/a$ in v drugem primeru $A'_2 = (l - a)A_2/a$. Iz podane maksimalne povprečne moči lahko za oba primera izračunamo najkrajši čas, potreben za premik bloka do vrha klanca. Pri prekucevanju potrebujejo $t_1 = A'_1/\bar{P}_{\max} = 44 \text{ min}$, pri porivanju bloka pa $t_2 = A'_2/\bar{P}_{\max} = 45 \text{ min}$.

4. Podatki: $s_A = 1200 \text{ m}$, $s_B = 900 \text{ m}$, $\Delta s = 10 \text{ m}$, $t_A = 8 \text{ min}$, $t_B = 6 \text{ min}$, $t_s = 4 \text{ min}$, $\Phi_0 = 5/\text{min}$, $t_1 = 80 \text{ min}$, $N_v = 20$, $t_2 = 180 \text{ min}$.

Na vlečnici A je lahko največ $N_A = 2s_A/\Delta s = 240$ smučarjev, zmogljivost je $\Phi_A = N_A/t_A = 30$ smučarjev na minuto; podobno

dobimo za drugo vlečnico $N_B = 180$ in $\Phi_B = 30/\text{min}$. Ob vlečnici A smuča največ $M_A = \Phi_B t_s = 120$ smučarjev, ob vlečnici B pa $M_B = 120$ smučarjev.

- Ko se na vlečnici A nabere $N_v = 20$ smučarjev, je celotno število smučarjev enako $N_A + N_B + N_v = 380$, kar se zgodi čez $t = (N_A + N_B + N_v)/\Phi_0 = 76$ min. V tem trenutku vsi smučarji, tisti, ki prismočajo po progi, in tisti, ki pridejo iz doline, odidejo na vlečnico B, skupaj $\Phi_A + \Phi_0 = 35/\text{min}$, kar je več od zmogljivosti vlečnice B, in na vlečnici se takoj pojavi vrsta. Iskani čas je $t = 76$ min po prihodu prvega smučarja oziroma ob 10 uri in 16 minut.
- Ob tem času vlečnica B obratuje šele 4 minute in noben smučar še ne more smučati ob tej vlečnici. Torej smuča le $M_A = 120$ smučarjev.
- Po treh urah je na smučišču $\Phi_0 t_2 = 900$ smučarjev; v obeh vrstah jih čaka $N'_v = \Phi_0 t_2 - (N_A + N_B + M_A + M_B) = 240$, v vsaki vrsti enako število. Smučar v vrsti B čaka $t = (N'_v/2)\Phi_B = 4$ min.

Skupina II

- Podatki: $R = 10 \Omega$, $U = 10 \text{ V}$.

Za smer tokov skozi žarnice izberimo smer nasprotno smeri urinega kazalca. (Če bo kateri od izračunanih tokov negativen, bo pomenilo, da teče v smeri urinega kazalca.) Kirchhoffov zakon za napetosti v krogu z žarnicama AB pove: $2U = I_A R + I_B R$, v krogu z BC zapišemo $2U = -I_B R - I_C R$, v krogu s CD zapišemo $2U = -I_C R - I_D R$, v krogu z DA pa $2U = I_D R + I_A R$; za tokove velja $I_A - I_B = I_D - I_C$. Od tod hitro izluščimo:

$$I_A = -I_C = \frac{2U}{R} \quad \text{in} \quad I_B = I_D = 0.$$

Žarnici A in C trošita moč po $P = RI^2 = 4U^2/R = 40 \text{ W}$, B in D pa 0 W.

- Podatki: $h = 5,0 \text{ cm}$, $U_0 = 9,0 \text{ V}$, $v_1 = 5 \text{ mm/s}$, $v_2 = 10 \text{ mm/s}$, $\varepsilon = 81$.

Kapaciteto praznega kondenzatorja, ki ga sestavljata kovinski plošči, označimo s C_0 , razdaljo med ploščama pa s h . Velja $C_0 = \varepsilon_0 S/h$.

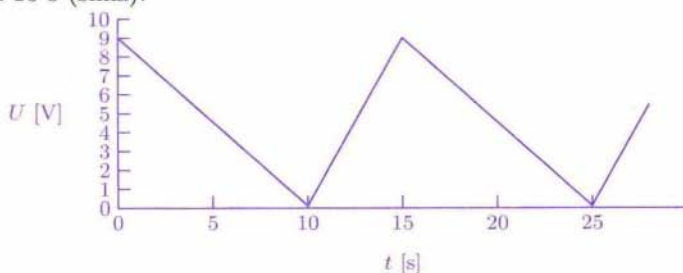
Izračunajmo kapaciteto, ko je gladina vode na višini y nad spodnjo kovinsko ploščo. Kondenzator lahko obravnavamo kot zaporedno vezana kondenzatorja s kapacitetama $C_1 = \varepsilon_0 S / (h - y) = h / (h - y) \cdot C_0$ in $C_2 = \varepsilon \varepsilon_0 S / y = \varepsilon h / y \cdot C_0$. Skupno kapaciteto označimo s C . Velja:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0} \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{y}{h} \right].$$

Ko kondenzator, na katerem na začetku ni bilo naboja, nabijemo na napetost U_0 , se na ploščah nabere naboj $e = C_0 U_0$. Med dotekanjem in odtekanjem vode ostaja naboj konstanten, tako da velja $C_0 U_0 = CU$ oziroma

$$U = U_0 \frac{C_0}{C} = U_0 \left[1 - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{y}{h} \right] = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{U_0}{h} y + U_0.$$

Napetost med kovinskima ploščama je torej kar linearno odvisna od višine gladine vode v posodi. Največja in najmanjša vrednost napetosti sta $U_{\max} = U_0 = 9,0$ V pri $y = 0$ in $U_{\min} = U_0 / \varepsilon = 0,11$ V pri $y = h$, kar bi lahko izračunali že brez te izpeljave. Posoda se z vodo napolni v času $t_1 = h / v_1 = 10$ s, izprazni pa se v času $t_2 = h / v_2 = 5$ s. Napetost med ploščama torej niha žagasto med $U_{\min}$ in $U_{\max}$ s periodo $t_1 + t_2 = 15$ s, kjer naraščanje traja 5 s, padanje pa 10 s (slika).



3. Podatki: $S = 100 \text{ cm}^2$, $m_0 = 1,0 \text{ kg}$, $P = 50 \text{ W}$, $p_0 = 101 \text{ kPa}$, $\kappa = 1,4$.

Plak zraka v posodi je $p = p_0 + m_0 g / S = 102 \text{ kPa}$, kjer je m_0 masa bata, S presek posode in p_0 zunanji zračni tlak. V času Δt se temperatura zraka pod batom poveča za ΔT in prostornina za ΔV . Toplota, ki jo pri tem sprejme zrak, je enaka spremembi notranje

energije zraka in delu, ki ga zrak opravi pri razpenjanju:

$$P\Delta t = c_V m \Delta T - p\Delta V.$$

Pri segrevanju se zrak pod batom razpenja pri konstantnem tlaku p , tako da velja $V_0/T_0 = V/T$. Pri tem smo z V_0 označili začetno prostornino zraka in s T_0 njegovo začetno temperaturo. Spremembo prostornine izrazimo s spremembo temperature:

$$\Delta V = S\Delta h = V - V_0 = \frac{V_0}{T_0}(T - T_0) = \frac{V_0}{T_0}\Delta T.$$

Od tod dobimo zvezo med pomikom bata v času Δt in povečanjem temperature:

$$\Delta T = \frac{T_0}{V_0} S\Delta h = \frac{T_0}{V_0} S v \Delta t.$$

Spremembo notranje energije sedaj lahko zapišemo kot

$$c_V m \Delta T = \frac{R}{(\kappa - 1)M} m \cdot \frac{T_0}{V_0} S\Delta h = \frac{mRT_0}{MV_0} \cdot \frac{S\Delta h}{\kappa - 1} = p \cdot \frac{S\Delta h}{\kappa - 1}.$$

V zadnjem koraku smo upoštevali enačbo stanja za začetno stanje zraka pod batom. Ko slednje vstavimo v energijski zakon, dobimo

$$P\Delta t = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot pS\Delta h, \quad \text{torej} \quad v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{P}{Sp} = 1,4 \text{ cm/s}.$$

Nalogo je mogoče rešiti hitreje, če vemo, da je dovedena toplota pri izobarni spremembi enaka $P\Delta t = c_p m \Delta T$, kjer je $c_p = \kappa/(\kappa - 1) \cdot R/M$. Za ΔT vstavimo na začetku izpeljani izraz, pa smo takoj pri rezultatu.

4. Podatki: $l = 0,1 \text{ m}$, $I = 30 \text{ A}$, $e = +1 \cdot 10^{-4} \text{ As}$, $v = 100 \text{ m/s}$, $M = 0,1 \text{ mg}$.

Da se bo delec gibal enakomerno po premici, mora magnetna sila uravnovesiti njegovo težo: $evB = mg$, če je B velikost rezultante magnetnih polj obeh vodnikov. Vodoravni komponenti magnetnih polj prvega in drugega vodnika se na višini h seštejeta v rezultanto

$$B = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \varphi = 2 \frac{\mu_0 I h}{2\pi(h^2 + (\frac{1}{2}l)^2)},$$

navpični komponenti pa se uničita. Ravnovesje sil lahko sedaj zapišemo:

$$ev \frac{2\mu_0 I h}{2\pi(h^2 + (\frac{1}{2}l)^2)} = mg.$$

Dobimo kvadratno enačbo za h :

$$h^2 - 2bh + (\frac{1}{2}l)^2 = 0, \quad b = \frac{ev\mu_0 I}{2\pi mg} = 6,1 \text{ cm}$$

z rešitvama

$$h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - (\frac{1}{2}l)^2}, \quad h_1 = 9,6 \text{ cm}, \quad h_2 = 2,6 \text{ cm},$$

ki sta obe smiselni. Sila bo odbojna, ko je smer hitrosti *nasprotna* smeri tokov v vodnikih.

Skupina III

1. Podatki: $V_0 = 0,50 \text{ l}$, $p_0 = 100 \text{ kPa}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $M = 44 \text{ kg/kmol}$, $R = 8300 \text{ J/kmolK}$.

Ko se pena neha razpenjati, je tlak ogljikovega dioksida v peni ravno enak zunanjemu tlaku p_0 , prostornina pene pa znaša V_0 . Če uspemo izračunati temperaturo ogljikovega dioksida v peni T_2 na koncu poskusa, lahko iz enačbe stanja $p_0 V_0 = mRT_2/M$ določimo iskano maso ogljikovega dioksida. V vmesnem stanju, ko ravno prenehamo tresti plastenko, naj bo tlak zraka in ogljikovega dioksida v plastenki enak p_1 , njuna temperatura T_1 , prostornina pene V_p , prostornina zraka pa potemtakem $V_0 - V_p$. Začetno in vmesno stanje *zraka* povezujeta enačbi

$$p_0 V_0^\kappa = p_1 (V_0 - V_p)^\kappa \quad \text{in} \quad T_0 V_0^{\kappa-1} = T_1 (V_0 - V_p)^{\kappa-1},$$

končno in vmesno stanje *pene* pa enačbi

$$p_0 V_2^\kappa = p_1 V_p^\kappa \quad \text{in} \quad T_2 V_2^{\kappa-1} = T_1 V_p^{\kappa-1}.$$

Pri deljenju enačb na levi se znebimo p_1 in dobimo $V_p/(V_0 - V_p) = V_2/V_0$, pri deljenju enačb na desni pa se znebimo T_1 in dobimo $V_p/(V_0 - V_p) = V_2/V_0 \cdot (T_2/T_0)^{\frac{1}{\kappa-1}}$. S primerjavo dobljenih enačb pridemo do preprostega rezultata $T_2 = T_0 = 293 \text{ K}$. Tako je iskana masa ogljikovega dioksida enaka $m = p_0 V_0 M / RT_0 = 0,90 \text{ g}$.

2. Podatki: $\lambda_r = 656,3 \text{ nm}$, $n_K^r = 1,5145$, $n_F^r = 1,6444$, $\lambda_m = 486,1 \text{ nm}$, $n_K^m = 1,5230$, $n_F^m = 1,6637$, $f = 50 \text{ cm}$.

Goriščna razdalja lepljenih leč je $1/f = 1/f_K + 1/f_F$. Za posamezno lečo velja $1/f_i = (n_i - 1)(1/r_a + 1/r_b)$. Podatek, da je zlepek akromatski, pove, da gorišči za obe valovni dolžini sovpadata: $1/f = (n_K^r - 1)X + (n_F^r - 1)Y$ in $1/f = (n_K^m - 1)X + (n_F^m - 1)Y$, pri čemer smo z X označili izraz $(1/r_a + 1/r_b)$ za konveksno in z Y ustrezeni izraz za konkavno lečo. Rešitev za geometrijska faktorja X , Y je $X = 8,67 \text{ m}^{-1}$ in $Y = -3,818 \text{ m}^{-1}$. Rešitev za f_K je potem za rdečo $22,4 \text{ cm}$ in za modro $22,05 \text{ cm}$.

3. Podatki: $m = 70 \text{ kg}$, $R = 6400 \text{ km}$, $\vartheta = 46^\circ$.

a) Najprej pokažimo, da je gravitacijska sila v notranjosti Zemlje premo sorazmerna z razdaljo od središča Zemlje. Na razdalji r od središča Zemlje prispeva h gravitacijski sili le del mase Zemlje ($M(r)$) znotraj radija r :

$$F_g = m \frac{GM(r)}{r^2} = m \frac{GM_Z r^3}{R^3 r^2} = m \frac{GM_Z}{R^2} \frac{r}{R} = mg \frac{r}{R},$$

pri čemer smo z M_Z označili maso Zemlje in z g težni pospešek na površju Zemlje.

Zapišimo komponenti gravitacijske sile na vlak v tunelu, ko je vlak na razdalji x od središča tunela in r od središča Zemlje. V smeri gibanja je komponenta sile $F = F_g \sin \varphi = mg(r/R) \sin \varphi$, pri čemer je φ kot, ki ga tvorijo središče tunela, središče Zemlje in vlak. Velja $\sin \varphi = x/r$ in komponento sile lahko zapišemo kot $F = (mg/R)x$. Komponenta gravitacijske sile, pravokotna na smer gibanja, pa je enaka $F = F_g \cos \varphi$.

- b) Sila v smeri gibanja vlaka ima enako odvisnost od odmika kot prožnostna sila pri vijačni vzmeti, $F = kx$, $k = mg/R$. Hitrost na sredini tunela v_0 dobimo kar iz izreka o ohranitvi kinetične in prožnostne energije, $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$, če je x_0 razdalja od površja Zemlje do sredine tunela. Dobimo $v_0 = \sqrt{g/R}x_0$. Razdaljo x_0 lahko izrazimo z zemljepisno širino Ljubljane ϑ : $x_0 = R \sin \varphi_{\max}$, $2\varphi_{\max} = 90^\circ - \vartheta$. Dobimo $v_0 = \sqrt{gR} \sin(\frac{1}{2}(90^\circ - \vartheta)) = 3,0 \text{ km/s}$. Enak rezultat dobimo, če silo nadomestimo s povprečno silo $\bar{F} = \frac{1}{2}mgx_0/R$ in gibanje obravnavamo kot enakomerno pospešeno gibanje (do polovice, od tam naprej pa kot enakomerno pojemajoče gibanje). Velja $v_0 = \sqrt{2ax_0}$ in za $a = \bar{F}/m$ dobimo enak rezultat kot zgoraj.

- c) Ker se sila spreminja kot pri nihalu na vijačno vzmet, vlak "zaniha" skozi predor z nihajnim časom $T = 2\pi\sqrt{R/g}$. Čas potovanja je ravno polovica nihajnega časa, torej $T = \pi\sqrt{R/g} = 42$ minut.
Če delamo s povprečno silo, ne dobimo pravilnega rezultata. V tem primeru je čas potovanja dvakratni čas pospeševanja: $t = 2\sqrt{2x_0/a} = 2v_0/a = 4\sqrt{R/g} = 54$ min.
- d) Ker gravitacijska sila v smeri gibanja pospešuje potnika hkrati s sedežem, sedež v tej smeri ne deluje na potnika. Preostane le komponenta teže, pravokotna na smer gibanja, $F_{\perp} = mg(r/R)\cos\varphi = mg(r_0/R)$, pri čemer je r_0 najmanjša oddaljenost vlaka od središča Zemlje, $r_0/R = \cos(\frac{1}{2}(90^\circ - \vartheta)) = 0,927$. Sila je torej enaka 636 N.
4. Podatki: $I = 0,1$ A, $R = 100\ \Omega$, $C = 100$ nF.
Če na kondenzatorjih ni prišlo do preboja, v stacionarnem stanju skozi njih ne teče tok. Tok I tedaj teče le skozi upornika AE in ED; padca napetosti na teh upornikih sta $RI = 10$ V. Torej je napetost med A in E 10 V, prav toliko med E in D. Ker je točka D na 0 V, je v točki A napetost 20 V, v točki E 10 V in prav toliko v točkah B in C, saj skozi upornika BE in EC tok ne teče.
Vse izračunane napetosti so manjše od maksimalne napetosti izvira, prav tako od prebojne napetosti kondenzatorjev, zato smo lahko upravičeno predpostavili, da ne pride do preboja.

Bojan Golli

22. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Naloge pomladanskega kroga

Prva skupina (prvi del)

- Če naravno število n zapišemo kot $n = a + b$, kjer sta a in b naravni števili, lahko n zamenjamo s produktom $a \cdot b$. Ali lahko s takimi menjavami iz števila 22 dobimo število 2001? (3 točke)
- V trikotniku obstaja srednjica (daljica, ki povezuje razpolovišči dveh stranic), ki je daljša od ene izmed težiščnic. Dokaži, da ima tak trikotnik vsaj en topi kot. (4 točke)

3. V prodajalni je na voljo 20 kg sira. V vrsti čakajo kupci sira. Po vsakem izmed prvih deset kupcev prodajalka izračuna maso sira m , ki so jo v povprečju kupili prejšnji kupci. Nato izračuna, za koliko kupcev zadošča preostanek sira ob predpostavki, da bodo naslednji kupci kupovali kose sira z maso natanko m . Pri tem vsakič opazi, da preostanek sira zadošča za natanko deset kupcev. Ali je to mogoče? Koliko sira tedaj ostane po prvih desetih kupcih? (4 točke)
4. (a) Na mizi leži pet skladnih papirnatih trikotnikov. Trikotnike smemo po mizi premikati tako, da so stranice po premiku vzporedne svojemu položaju pred premikom. Ali je res, da lahko na ta način vsakega izmed trikotnikov prekrijemo z ostalimi štirimi? (2 točki)
(b) Naj bodo trikotniki iz točke (a) enakostranični. Dokaži, da je s pomočjo premikov, opisanih v točki (a), vsakega izmed njih možno prekriti s preostalimi štirimi. (3 točke)
5. Na šahovnici velikosti 15×15 stoji 15 trdnjav, ki ne napadajo druga druge. Z vsako trdnjavo naredimo potezo, ki je sicer dovoljena za skakača. Dokaži, da tedaj obstaja par trdnjav, ki se napadata. (5 točk)

Druga skupina (prvi del)

1. Avtobus, ki vozi na liniji, dolgi 100 km, je opremljen z računalnikom, ki predvidi čas, potreben do konca poti avtobusa. Ta čas računalnik izračuna ob predpostavki, da bo hitrost avtobusa na preostanku poti enaka povprečni hitrosti na že prevoženi poti. Štirideset minut po odhodu računalnik oceni čas za preostalo pot na eno uro. Ta predvideni čas se ne spremeni nadaljnjih pet ur. Ali je to mogoče? Koliko kilometrov je tedaj avtobus prevozil po teh petih urah? (3 točke)
2. Naravno število a ima v desetiškem zapisu n števk, število a^3 pa m števk. Ali je lahko vsota $n + m$ enaka 2001? (4 točke)
3. V trikotniku ABC izberemo točko X na stranici AB in točko Y na stranici BC . Daljici AY in CX se sekata v točki Z in velja, da je $|AY| = |YC|$ ter $|AB| = |ZC|$. Dokaži, da je $BXZY$ tetivni štirikotnik. (4 točke)
4. Dve osebi igrata igro na šahovnici velikosti 3×100 (tri vrstice in sto stolpcev). Izmenoma polagata domine velikosti 1×2 na igralno ploščo. Prvi položi domino tako, da prekrije dve polji v isti vrstici, drugi pa polji v istem stolpcu. Igro izgubi tisti, ki ne more več narediti predpisane poteze. Kateri izmed igralcev lahko vedno zmaga in kako mora igrati, da mu to uspe? (5 točk)

5. Na površju pravilnega tetraedra, z robom dolžine 1 cm, leži devet točk. Dokaži, da obstajata med temi točkami vsaj dve, katerih medsebojna razdalja ni večja od 0.5 cm. (5 točk)

Prva skupina (drugi del)

1. V državi dobi 10% delavcev 90% vsote vseh dohodkov, izplačanih v tej državi. Denimo, da je država razdeljena na regije. Ali je možno, da v vsaki regiji skupna plača poljubno izbranih 10% delavcev te regije ne presega 11% skupne plače vseh delavcev iz te regije? (3 točke)
2. V treh kupih kamenja je zapored 51, 49 in 5 kamnov. Lahko združimo dva kupa ali pa razdelimo kup s sodo mnogo kamni na dva kupa z enakim številom kamnov. Ali lahko na ta način dobimo 105 kupov s po enim kamnom? (5 točk)
3. Točka A leži v notranjosti kota z vrhom v točki M . Žarek, izsevan iz točke A , se odbije od prvega kraka kota v točki B , nato od drugega kraka v točki C in se vrne v točko A (pri obeh odbojih velja običajni odbojni zakon). Dokaži, da leži središče trikotniku BCM očrtane krožnice na premici AM . (5 točk)
4. Nekaj diagonal, ki se paroma ne sekajo (razen morda v krajišču), deli konveksni večkotnik na trikotnike. Poleg vsakega oglišča večkotnika zapišemo število trikotnikov ob tem oglišču. Nato izbrisemo diagonale. Ali lahko samo iz teh števil določimo izbrisane diagonale? (5 točk)
5. (a) Na šahovnico postavimo belo in črno figuro. Figuri lahko izmenično premikamo vodoravno ali navpično na sosednje prazno polje. Ali obstaja tako zaporedje potez, da dobimo vsak možen položaj teh dveh figur natanko enkrat? (3 točke)
(b) Ali obstaja tako zaporedje potez, da dobimo vsak možen položaj teh dveh figur natanko enkrat, če figur ni treba premikati izmenično? (4 točke)
6. Daljice AD , BE in CF so višine trikotnika ABC . Dokaži, da je trikotnik, katerega oglišča so presečišča višin trikotnikov AEF , BDF in CDE , skladen s trikotnikom DEF . (7 točk)
7. Aleš si izbere dvomestno naravno število. Gregor poskuša ugotoviti to število tako, da zapored pove njegovi številki. Če pravilno ugame eno števko tega števila, druga pa se od prave vrednosti razlikuje kvečjemu za 1, Aleš reče 'vroče', sicer 'hladno' (če je izbrano število npr. 65 so 'vroča' števila torej 65, 64, 66, 55 in 75).

- (a) Dokaži, da ne obstaja strategija, s katero bi Gregor v največ 18 poskusih ugotovil pravo število, ne glede na izbrano število. (2 točki)
 (b) Poišči strategijo, s katero lahko Gregor vedno ugotovi izbrano število v največ 24 poskusih. (3 točke)
 (c) Ali obstaja zmagovalna strategija z največ 22 ugibanji? (3 točke)

Druga skupina (drugi del)

1. Poišči vsaj en polinom p stopnje 2001, za katerega velja

$$p(x) + p(1-x) = 1$$

pri vsakem realnem številu x . (3 točke)

2. Na koncu šolskega leta ugotovimo, da za poljubno izbrano skupino vsaj petih dijakov velja naslednje: Obstaja del skupine, ne večji od 20% te skupine, katerega dijaki so dobili 80% vseh negativnih ocen v tej skupini. Dokaži, da je tedaj vsaj tri četrtine vseh negativnih ocen dobil en sam dijak. (5 točk)
3. Daljice AH_A , BH_B in CH_C so višine v trikotniku ABC . Dokaži, da je trikotnik, katerega oglišča so presečišča višin trikotnikov AH_BH_C , BH_AH_C in CH_AH_B , skladen s trikotnikom $H_AH_BH_C$. (5 točk)
4. V tabelah A in B z m vrsticami in n stolpci sta števili 0 in 1. Označimo z a_{ij} število v i -ti vrstici in j -tem stolpcu tabele A in z b_{ij} število v i -ti vrstici in j -tem stolpcu tabele B . Za vsaka $i < m$ in $j \leq n$ velja $a_{ij} \leq a_{i+1,j}$ ter $b_{ij} \leq b_{i+1,j}$. Za vsaka $j < n$ in $i \leq m$ velja $a_{ij} \leq a_{i,j+1}$ ter $b_{ij} \leq b_{i,j+1}$. Za vsak k , $1 \leq k \leq m$, vsota števil v gornjih k vrsticah tabele A ni manjša od vsote števil v gornjih k vrsticah tabele B . Število enic v obeh tabelah je enako. Dokaži, da za vsak j , $1 \leq j \leq n$, velja, da vsota števil v prvih j stolpcih tabele B ni manjša od vsote števil v prvih j stolpcih tabele A . (5 točk)
5. Na šahovskem turnirju je vsak udeleženec igral z vsakim drugim natanko enkrat in dobil 1 točko za zmago, $1/2$ točke za remi in 0 točk za poraz.
- (a) Ali je mogoče, da je za vsakega igralca P vsota točk igralcev, ki jih je igralec P premagal, večja od vsote točk igralcev, proti katerim je igralec P izgubil? (4 točke)
 (b) Ali je mogoče, da je za vsakega igralca P vsota točk igralcev, ki jih je igralec P premagal, manjša od vsote točk igralcev, proti katerim je igralec P izgubil? (4 točke)

6. Dokaži, da obstaja 2001 konveksen polieder, med katerimi imajo poljubni trije prazen presek, poljubna dva pa se dotikata (sekata se le na robu). (8 točk)
7. V sobi so krožno razporejene škatle s kroglicami. Vsaka izmed njih je lahko prazna ali pa vsebuje eno ali več kroglic. V eni potezi izpraznimo eno izmed škatel in kroglice tako razporedimo v škatle, ki izpraznjeni škatli sledijo v smeri urinega kazalca, da v vsako škatlo zapored spustimo po eno kroglico.
- (a) Denimo, da moramo v vsaki potezi (razen v prvi) vzeti kroglice iz škatle, v katero smo v prejšnji potezi položili zadnjo kroglico. Dokaži, da se po določenem številu potez znova pojavi začetna razporeditev kroglic. (4 točke)
- (b) Denimo, da lahko v vsaki potezi izpraznimo poljubno škatlo. Ali je s primernimi potezami možno za vsako začetno razporeditev priti do poljubne druge razporeditve? (4 točke)

Gregor Cigler

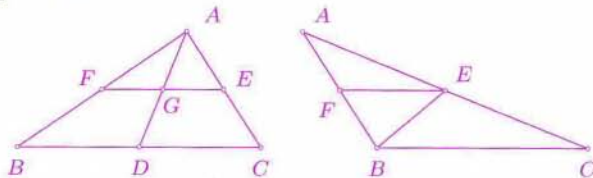
22. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST –

Rešitve nalog pomladanskega kroga s str. 307

Prva skupina (prvi del)

1. Obrnimo postopek! Vidimo, da je $2001 = 3 \cdot 667$, zato lahko število 2001 dobimo iz števila $3 + 667 = 670$. Ker je $670 = 10 \cdot 67$, lahko 670 dobimo iz števila $77 = 7 \cdot 11$, ki ga lahko dobimo iz števila $7 + 11 = 18$. Za vsako naravno število $n > 1$ velja $n = (n - 1) + n$, zato iz n po opisanem postopku lahko dobimo $n - 1 = 1 \cdot (n - 1)$. Od tod sledi rešitev naloge. Število 2001 lahko dobimo po opisanem postopku. Rešitev prikazuje zaporedje števil 21, 20, 19, 18, 77, 670, 2001.
2. Denimo, da je srednjica EF daljša od težiščnice AD (glej sliko na levi). Označimo z G presečišče daljic AD in EF . Tedaj je $AG < EG = FG$, zato je $\sphericalangle GAE > \sphericalangle GEA$ in $\sphericalangle GAF > \sphericalangle GFA$. Ker je vsota štirih kotov iz zadnjih dveh neenačb enaka 180° , velja $\sphericalangle CAB = \sphericalangle GAE + \sphericalangle GAF > 90^\circ$.
- Drugi primer prikazuje desni del slike. Denimo, da je srednjica EF daljša od težiščnice BE . Potem je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle EBF > \sphericalangle EFB = \sphericalangle FAE + \sphericalangle FEA = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA$. Od tod zopet sledi, da

je $\sphericalangle ABC$ topi kot. Vsi ostali možni primeri so ekvivalentni enemu izmed gornjih dveh.



3. Denimo, da je k kupcev kupilo sir. Če je vsak v povprečju kupil kos sira mase m , so skupaj kupili $k \cdot m$ sira. Ker preostanek sira zadošča za natanko 10 kupcev, dobimo enačbo

$$20 - km = 10m,$$

od koder sledi

$$m = \frac{20}{10 + k}.$$

Masa ostanka sira je enaka

$$10m = \frac{200}{10 + k}. \quad (1)$$

Ker se z naraščajočim k masa preostalega sira manjša, vsak kupec kupi pozitivno količino sira, zato je opisana situacija možna. Iz enačbe (1) sledi, da po desetih kupcih ostane natanko 10 kilogramov sira.

4. (a) Naj bo ABC trikotnik, v katerem je višina na stranico AB krajša od četrte te stranice. Če v ravnino položimo trikotnik ABC in še štiri njemu skladne trikotnike, ki so glede na trikotnik ABC zasukani za 90° , je očitno, da trikotnika ABC ne moremo prekriti z vzporedno premaknjenimi preostalimi štirimi trikotniki.
- (b) Če enakostranični trikotnik T razdelimo na štiri manjše skladne enakostranične trikotnike, očrtana krožnica trikotnika, katerega oglišča so razpolovišča stranic trikotnika T , sovpada z včrtano krožnico trikotnika T . Z včrtano krožnico trikotnika, skladnega trikotniku T , lahko torej 'zajamemo' enega od štirih manjših trikotnikov, zato s štirimi trikotniki lahko res prekrijemo trikotnik T .
5. Naj bo T_1 tabela, kjer so zbrana števila, ki označujejo stolpce, v katerih stojijo trdnjave, in T_2 tabela, kjer zberemo števila, ki označujejo vrstice, v katerih stojijo trdnjave. Tedaj ne v tabeli T_1 ne v tabeli

T_2 ni dveh enakih števil. Skupno je torej v tabelah T_1 in T_2 16 lihih in 14 sodih števil. Po premiku trdnjave se spremeni bodisi parnost stolpca bodisi parnost vrstice. Med vsemi 30 števili iz tabel se torej 15 številom spremeni parnost, 15 številom pa ne. Denimo, da je m števil iz prvotnih 16 lihih postalo parnih. Tedaj je v novih dveh tabelah (po premiku) skupno število lihih števil enako $16 - m + 15 - m = 31 - 2m \neq 16$. Od tod sledi, da se vsaj dve trdnjavi napadata.

Druga skupina (prvi del)

1. Merimo čas v urah. Oglejmo si situacijo po času $t \geq \frac{2}{3}$. Če je v tem času avtobus prevozil razdaljo s , po predpostavki velja

$$100 - s = \frac{s}{t} \cdot 1,$$

od koder dobimo

$$s = 100 - \frac{100}{1+t}.$$

Če se čas večja, se večja tudi prevožena pot s , zato je opisana situacija mogoča. Po petih urah in štiridesetih minutah ($t = \frac{17}{3}$) dobimo $s = 85$, torej je prevožena pot enaka 85 km.

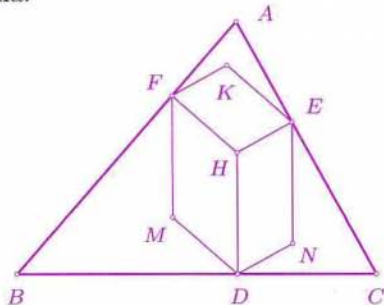
2. Opazimo, da je število $a_0 = 10^{500}$ 501-mestno in število a_0^3 1501-mestno, torej je v tem primeru $m + n = 2002$. Če je $a > a_0$, je vsota $m + n$ vsaj 2002, za število $a \leq a_0$ pa je vsota $m + n$ kvečjemu $500 + 1500 = 2000$. Odgovor na zastavljeno vprašanje je zato nikalen.
3. Izberimo na daljici CY točko T z lastnostjo $|TC| = |AZ|$. Ker je $|AY| = |CY|$, iz simetrije sledi, da je $|AT| = |CZ|$ in $\sphericalangle YZC = \sphericalangle YTA$. Z upoštevanjem $|CZ| = |AB|$ dobimo $|AT| = |AB|$, zato je $\sphericalangle ABT = \sphericalangle ATB$. Od tod sledi $\sphericalangle YZC = \sphericalangle ABC$, zato je $XBYZ$ res tetivni štirikotnik.
4. Oglejmo si najprej potek igre na manjši tabli velikosti 3×4 . Prvi igralec lahko drugega premaga, če prvo domino položi kamorkoli v srednjo vrsto. Drugi igralec ima tedaj le še dve možni potezi (ob prvi položeni domini), medtem ko ima prvi igralec prav tako dve možni potezi, t.j. pod in nad svojo prvo domino. Razdelimo sedaj tablo velikosti 3×100 na 25 kosov velikosti 3×4 . Prvi igralec položi prvo domino nekam v srednjo vrsto. Ker lahko drugi igralec vsakič položi domino le v eno od manjših tabel, ga prvi premaga, če mu vsakič

‘odgovori’ z domino v srednji vrsti tabele, v katero je drugi nazadnje položil svojo domino.

5. Z daljicami povežimo tiste pare razpolovišč robov tetraedra T , ki ne ležijo na mimobežnih robovih. Tako od tetraedra ‘odrežemo’ štiri vogalne pravilne tetraedre z robom dolžine 0.5 cm. Če dve točki ležita na površju posameznega od vogalnih tetraedrov, je njuna razdalja kvečjemu 0.5 cm. Privzemimo zato, da na vsakem vogalnem tetraedru leži kvečjemu ena točka. Tedaj jih leži vsaj pet na preostanku površju tetraedra T , ki ga sestavljajo štirje enakostranični trikotniki s stranico 0.5 cm. Vsaj dve od teh petih točk ležita v istem trikotniku, zato je njuna razdalja kvečjemu 0.5 cm. S tem je trditev dokazana.

Prva skupina (drugi del)

5. To ni možno ne v primeru (a) ne v primeru (b). Seveda je dovolj dokazati točko (b). Položaj figur na šahovnici naj bo *sod*, če figuri stojita na poljih iste barve, sicer ga imenujmo *lih*. Ob vsaki potezi se parnost položaja spremeni. Število sodih položajev je $2^{\binom{32}{2}} = 992$, število lihih pa $32^2 = 1024$. Če naj bosta figuri v vseh možnih položajih, se mora nekaj sodih položajev ponoviti.
6. Naj bo H višinska točka trikotnika ABC in K, M ter N zapored višinske točke trikotnikov AEF, BFD in CDE . Opazimo, da sta daljici FM in HD pravokotni na BC in zato vzporedni. Na enak način ugotovimo, da sta vzporedni daljici FH in MD , torej je $DHFM$ paralelogram. Enako dokažemo, da je tudi $DHEN$ paralelogram. Od tod sledi, da sta FM in EN enako dolgi vzporedni daljici, zato je $EFMN$ paralelogram, od koder sledi $|EF| = |MN|$. Enako ugotovimo še $|FD| = |KN|$ in $|DE| = |MK|$, zato sta trikotnika DEF in KMN res skladna.



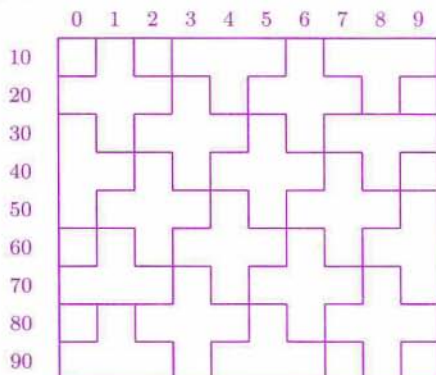
7. (a) V najboljšem primeru (t.j. pri odgovoru 'hladno') izločimo 5 števil. Za pregled vseh 90 števil potrebujemo torej najmanj 18 ugibanj. Če so vsi odgovori razen zadnjega 'hladno', nam zmanjka ugibanj, da bi ugotovili število.

(b) Predstavimo števila s tabelo, ki jo kaže slika. Vroča števila se v tabeli nahajajo levo, desno, nad in pod izbranim številom, zato 'vroča' števila vedno tvorijo križ, ki je morda nepopoln (če je izbrano število na robu tabele). Tabela na sliki je pokrita z 18 takimi križi in z osmimi samostojnimi kvadrati. V teh kvadratih so števila 10, 12, 17, 49, 60, 92, 97 in 99. Središča 18 križev naj predstavljajo prvih 18 ugibanj. Denimo, da je v enem od središč teh križev 'vroče' število m . Tedaj preverimo tri krake tega križa (če ima križ le dva kraka, seveda preverimo le ta dva kraka). Če sta vsaj dva kraka 'vroča', je izbrano število enako m . Če sta dva kraka 'hladna' in en 'vroč', je izbrano število v 'vročem' kraku, če pa so vsi trije kraki 'hladni', je izbrano število v preostalem kraku. Ugotovili smo: Ko enkrat najdemo 'vroče' število, potrebujemo največ tri poteze, da uganemo izbrano število. V gornjem primeru smo tako število uganili v največ 21 potezah.

Če je vseh 18 središč izbranih križev 'hladnih', je izbrano število v enem izmed osmih posamičnih kvadratkov tabele. Tedaj poskusimo s številoma 11 in 98, ki ležita med parom kvadratkov. Če je kateri od odgovorov 'vroče', lahko z največ tremi ugibanji ugotovimo izbrano število. V nasprotnem primeru izbrano število ni sosednje z nobenim od števil 11 in 98, zato poskusimo s števeli 18, 39 in 70. Če je kakšno od teh števil 'vroče', se izbrano število nahaja v kvadratu poleg tega števila, v nasprotnem primeru pa je izbrano število v preostalem, osmem kvadratu. S tako strategijo bomo uganili izbrano število z največ 23 ugibanji.

The grid shows a repeating pattern of purple lines. The lines form a grid of squares. In some squares, there is a cross-like shape formed by additional purple lines. The pattern repeats every 5 units in both the horizontal and vertical directions.

(c) Z manjšimi spremembami na zgornjem desnem in spodnjem levem delu tabele (glej sliko) lahko prihranimo še eno ugibanje. Zopet najprej preverimo središča izbranih 18 križev. Če je kakšen od odgovorov 'vroče', lahko kot v točki (b) končamo po 21 ugibanjih. Denimo, da so vsi odgovori 'hladno'. Tedaj poskusimo s števili 11, 39 in 70. Če je kakšno od teh števil 'vroče', z enim ugibanjem določimo izbrano število. Če je npr. 70 'vroče' število, pogledamo število 90. Če je to vroče, je izbrano število 80, sicer pa 60. V primeru, da so vsa števila 11, 39 in 70 'hladna', s preizkusom števila 96 ugotovimo, kateri izmed števil 97 ali 99 si je izbral Aleš.



Druška skupina (drugi del)

5. Naj bo n število udeležencev turnirja. Označimo z s_k vsoto točk k -tega igralca po končanem turnirju, z z_k vsoto točk igralcev, ki jih je k -ti igralec premagal, s p_k pa vsoto točk igralcev, s katerimi je k -ti igralec izgubil. Definirajmo

$$T = \sum_{k=1}^n s_k(z_k - p_k).$$

Trdimo, da je $T = 0$. Jasno je, da so števila z_k in p_k vsote ustreznih števil s_i (seštejemo pač vsote točk tistih igralcev, ki jih je k -ti igralec premagal, oziroma tistih, s katerimi je izgubil). Očitno je tudi, da vsoti z_k in p_k ne vsebujeta člena s_k . Opazujmo dvoboj i -tega in j -tega igralca. Če remizirata, v vsotah z_i in p_i ni člena s_j . Enako ugotovimo, da v vsotah z_j in p_j ni člena s_i . Recimo, da i -ti igralec zmaga. Tedaj je v vsoti z_i člen s_j , v vsoti p_j pa člen s_i . Zapišimo

$z_i = z'_i + s_j$ in $p_j = p'_j + s_i$. Potem je

$$s_i(z_i - p_i) + s_j(z_j - p_j) = s_i(z'_i - p_i) + s_j(z_j - p'_j).$$

Če torej v vsotah z_i , p_i , z_j in p_j izpustimo (če tam nastopata) člena s_i ter s_j , se vsota T ne spremeni. Enako sklepamo v primeru, ko i -ti igralec izgubi. Ker lahko na ta način brez škode za vrednost T zberišemo vse člene v vsotah z_k in p_k , je res $T = 0$.

(a) Za vse k velja $s_k \geq 0$, vsaj ena od teh vsot pa je pozitivna. Če bi za vsak k veljalo $z_k - p_k > 0$, bi dobili $T > 0$. Protislovje!

(b) Analogno kot pri (a), bi dobili $T < 0$, zato tudi to ni mogoče.

6. Konstruirajmo tako množico poliedrov. Najprej postavimo v koordinatni sistem z izhodiščem O 'navzgor' obrnjen stožec z osjo z in nato izberimo 2001 tvorilk plašča, ki so enakomerno razporejene po plašču in jih označimo z $l_1, l_2, \dots, l_{2001}$. Za vsako realno število $t > 0$ ravnina z enačbo $z = t$ seka te premice v točkah $A_1^t, A_2^t, \dots, A_{2001}^t$. Izberimo $t > 0$ in z D_1 označimo krog, ki ga stožec odreže od ravnine $z = t_1$. Naj bo B_1 razpolovišče loka na robu D_1 med $A_1^{t_1}$ in $A_2^{t_1}$. Označimo z M_1 pravilni večkotnik $A_1^{t_1} A_2^{t_1} \dots A_{2001}^{t_1}$. Opazujemo neskončno prizmo P_1 z bazo M_1 in s stranskimi robovi, vzporednimi daljici OB_1 . Zgornjo osnovno ploskev, vzporedno M_1 , lahko določimo nekje nad ravnino $z = t_{2001}$ (glej konstrukcijo v nadaljevanju). Za dovolj velik t bo razdalja med razpoloviščem loka $A_1^t A_2^t$ in daljico $A_1^t A_2^t$ večja od premera kroga D_1 , kar pomeni, da P_1 ne seka večkotnika $A_1^t A_2^t \dots A_{2001}^t$. Izberimo tako vrednost t_2 in z D_2 označimo krog, ki ga stožec izreže iz ravnine z enačbo $z = t_2$. Naj bo B_2 razpolovišče loka $A_2^{t_2} A_3^{t_2}$. Naj bo M_2 večkotnik $A_1^{t_2} A_2^{t_2} \dots A_{2001}^{t_2}$, če se ta že dotika P_1 , sicer pa med oglišči $A_1^{t_2}$ in $A_2^{t_2}$ vrinimo dodatno oglišče, ki leži na robu P_1 in znotraj D_2 . Zopet tvorimo prizmo z osnovno ploskvijo M_2 in robovi, vzporednimi daljici OB_2 , in jo na koncu odrežemo nad ravnino $z = t_{2001}$. Znova izberemo tako velik t_3 , da P_2 ne seka večkotnika $A_1^{t_3} A_2^{t_3} \dots A_{2001}^{t_3}$. Znova definiramo večkotnik M_3 z oglišči $A_1^{t_3}, A_2^{t_3}, \dots, A_{2001}^{t_3}$, ki mu po potrebi dodamo oglišči na robu, tako da se dotika P_1 in P_2 . Za $1 \leq i < j < k \leq 2001$ pri taki konstrukciji velja, da imata poliedra P_i in P_j edine skupne točke na ravnini $z = t_i$, torej na robu. Ker polieder P_k ne seka te ravnine, je presek poliedrov P_i, P_j in P_k prazen.

7. (a) Konstruirajmo usmerjeni graf. Vozlišča naj bodo pari, ki imajo na prvem mestu razporeditev kroglic po škatlah in na drugem mestu oznako škatle, iz katere moramo v naslednji potezi pobrati kroglice.

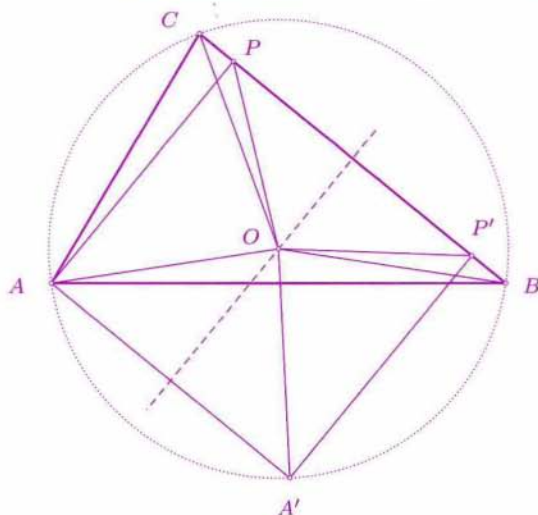
Vozlišči A in B povežemo s povezavo od A do B , če iz stanja, ki ga predstavlja vozlišče A , lahko v eni potezi pridemo do stanja, predstavljenega z vozliščem B . Jasno je, da je izhodna stopnja (t.j. število povezav, ki izhajajo iz vozlišča) vsakega vozlišča enaka 1. Prepričajmo se, da je tudi vhodna stopnja vsakega oglišča enaka 1. Ker vemo, katera škatla je na vrsti v naslednji potezi, smo zadnjo kroglico položili v škatlo pred njo. Če začnemo pobirati po eno kroglico iz škatel, ki si sledijo zapored v nasprotni smeri urinega kazalca, in se ustavimo, ko naletimo na prazno škatlo, je ta prazna škatla tista, iz katere smo v prejšnji potezi pobrali kroglice. Zbrane kroglice položimo v to prazno škatlo in pred nami je predhodna razporeditev kroglic. To škatlo še označimo kot tisto, v kateri moramo v naslednji potezi pobrati kroglice, in dobimo predhodno vozlišče. Ker je število vozlišč končno, je graf disjunktna unija ciklov. Če torej začnemo pri nekem stanju, se vzdolž cikla, ki to stanje vsebuje, po končno korakih znova vrnemo v to stanje.

(b) Znova definirajmo usmerjeni graf. Vozlišča naj sedaj predstavljajo razporeditev kroglic po škatlah, vozlišče A pa povežemo z vozliščem B , če je možno iz stanja A v eni potezi priti do stanja B . Tako vhodna kot izhodna stopnja poljubnega vozlišča je enaka številu nepraznih škatel stanja, ki ga predstavlja to vozlišče. Graf je tedaj sestavljen iz krepko povezanih komponent (t.j. za vsako pot med vozliščema A in B obstaja tudi pot med B in A). Ker lahko iz vsakega stanja pridemo do stanja, v katerem so vse kroglice v eni škatli (to dosežemo tako, da kroglic iz te škatle ne jemljemo), ima graf le eno komponento in sta vsaki dve stanji s potjo povezani.

Gregor Cigler

42. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA – Rešitvi izbranih nalog s str. 149

1. naloga Naj bo $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ in $\delta = \sphericalangle COP$. Označimo z A' in P' zrcalni sliki točk A in P pri zrcaljenju čez simetralo daljice BC . Označimo z R polmer trikotniku ABC očrtane krožnice. Potem je $|OA| = |OB| = |OC| = |OA'| = R$. Ker je $AA'P'P$ pravokotnik, velja $|PP'| = |AA'|$. Sledi $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle AOB - \sphericalangle A'OB = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOC = 2\gamma - 2\beta \geq 60^\circ$.



Skupaj z $|OA| = |OA'| = R$ to pomeni, da je $|AA'| = |PP'| \geq R$. Po trikotniški neenakosti tako velja $|OP| + R = |OP'| + |OC| > |P'C| = |P'P| + |PC| \geq R + |PC|$. Torej je $|OP| > |PC|$ in zato v trikotniku COP velja $\sphericalangle PCO > \delta$. Nazadnje iz $\alpha = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle PCO) = 90^\circ - \sphericalangle PCO < 90^\circ - \delta$ sklepamo, da je $\alpha + \delta < 90^\circ$.

2. naloga Označimo z $\sum S(a)$ vsoto vseh števil $S(a)$ po vseh $n!$ permutacijah $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Število $\sum S(a) \pmod{n!}$ bomo izračunali na dva načina.

Prvi način. V vsoti $\sum S(a)$ je število k_1 pomnoženo z vsakim številom $k \in \{1, \dots, n\}$ natančno $((n-1)!)$ -krat; po enkrat za vsako permutacijo $\{1, \dots, n\}$, pri kateri je $a_1 = k$. Torej je koeficient pri k_1 v vsoti $\sum S(a)$ enak

$$(n-1)!(1+2+\dots+n) = (n+1)!/2.$$

Slednje velja za vsak k_i , zato je

$$\sum S(a) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^n k_i. \quad (1)$$

Drugi način. Če $n!$ ne deli $S(a) - S(b)$ za nobeni permutaciji $a \neq b$, mora vsako število $S(a)$ imeti drugačen ostanek pri deljenju z $n!$. Torej so ti ostanki natančno števila $0, 1, 2, \dots, n! - 1$. Sledi

$$\sum S(a) \equiv \frac{(n! - 1)n!}{2} \pmod{n!}. \quad (2)$$

Ko združimo (1) in (2), dobimo

$$\frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^n k_i \equiv \frac{(n! - 1)n!}{2} \pmod{n!}. \quad (3)$$

Ker pa je število n liho, je leva stran v (3) deljiva z $n!$, po drugi strani pa desna stran v (3) za lihe $n > 1$ očitno ni deljiva z $n!$. Prišli smo do protislovja, torej pri izračunu vsote $\sum S(a)$ v drugem načinu ne bi smeli privzeti, da $n!$ ne deli $S(a) - S(b)$ za nobeni permutaciji $a \neq b$.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
29. letnik, šolsko leto 2001/02, številka 5, strani 257–320

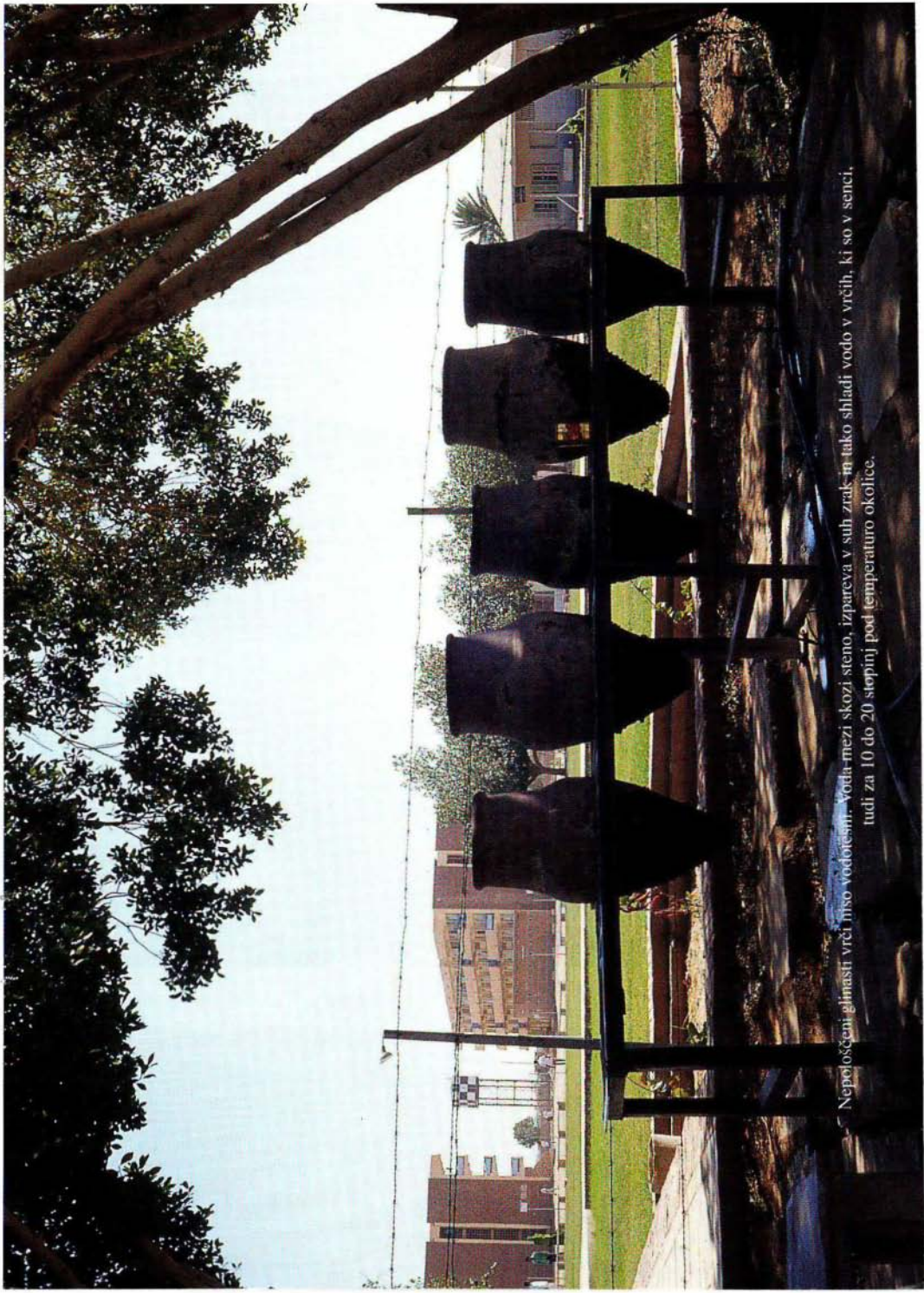
UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2001/02 je za posamezne naročnike **3.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.500 SIT**, posamezna številka **750 SIT**, tematska številka **1.500 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBAS12X, številka računa 042961.

List sofinancira MŠZŠ
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1483

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Nepolosedeni glinasti vrči niso vodotesni. Voda meži skozi steno, izpareva v suh zrak in tako shladi vodo v vrčih, ki so v senci, tudi za 10 do 20 stopinj pod temperaturo okolice.

