

4

29 (2001–02)

PRE SEK



21:11:26

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV
IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

TRI ENICE IN ENAJST FIŽOLČKOV – Nagradna naloga

Razvozljajte račun množenja, ki je pred vami. Tri enice so vidne, ostale številke pokrivajo fižolčki.



Med reševalci s pravilno rešitvijo bomo izžrebali nagrajenca, ki bo prejel knjižno nagrado.

Rešitve pošljite najkasneje do 10. aprila 2002 na naš naslov:

Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Peter Petek

(foto Matjaž Vencelj)

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
29. letnik, leto 2001/02, številka 4, strani 193–256

VSEBINA

MATEMATIKA	Število 1 kot vsota in produkt ulomkov (Jože Grasselli) .. 198-201 Rezanje in sestavljanje pravilnega četverca (Nada Razpet)..... 233-237
FIZIKA	Brownovo gibanje (Janez Strnad)..... 204-209 Merjenje temperature z roko (Andrej Likar)..... 220-222 Monokristali (B. Čabrić, A. Janičijević, prev. M. Vencelj) 226-230
ASTRONOMIJA	Bližnji (NEO) asteroid 2001 YB ₅ je v začetku januarja letel mimo Zemlje (Herman Mikuž)..... 202 Vsi rekordi Alvana Clarka (Marijan Prosen) 214-218
RAČUNALNIŠTVO	Računanje z velikimi števili – Ubasic (Martin Juvan).... 210-213 Polkraljice – Rešitev naloge s str. 158 (Martin Juvan).... 231-232
ZANIMIVOSTI,	Križanka "Prestizna nagrada" – reš. na str. 237 (Marko Bokalič)..... 224
RAZVEDRILO	Rebus – reš. na str. 230 (Marko Bokalič) III
NALOGE	Tri enice in enajst fizolčkov – Nagradna naloga (Peter Petek) .. II Nekaj (ne)resnih o letu 2002 – reš. na str. 218 (Martin Juvan) 196-197 Naloga za maturante – reš. na str. 222 (Dušan Murovec).... 197 Ni deljivo – reš. na str. 232 (Dragoljub M. Milošević) 197 Poveži točke – reš. na str. 230 (Marija Vencelj)..... 197 Tim, Fermat in količniki (Marija Vencelj) 203
REŠITVE NALOG	Razkrijte vse tajne agente Njenega Veličanstva – Rešitev nagradne naloge s str. 130 (Marija Vencelj)..... 194-195 Tri škatle – Rešitev s str. 151 (Marija Vencelj) 202 Črke in števila – Rešitev s str. 170 (Boštjan Jaklič) 209 Kvadriranje dvomestnih števil, ki se začenjajo s 5 – Rešitev s str. 157 (Marija Vencelj) 219 Skok na Luno – Rešitev s str. 133 (Goran Sabolič) 223
TEKMOVANJA	21. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)..... 238-242 Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce – s str. 238 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) 243-246 Rešitve nalog s predtekmovanja iz srednješolske fizike v šolskem letu 2000/2001 – s str. 188 (Bojan Golli).... 247-251 Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2000/2001 (Ciril Dominko)... 251-256
NA OVITKU	Posnetki asteroida 2001 YB ₅ , ki se je letos januarja zelo približal Zemlji (razgrnite platnice!). Glejte tudi prispevek na str. 202 I, IV Fotografija (zgoraj) k članku na str. 214 III

NAGRADNA NALOGA

Tokratno nagradno nalogo Tri enice in enajst fizičkov Petra Petka objavljamo na II. strani ovitka.

REŠITVE NAGRADNIH NALOG IZ 3. ŠTEVILKE – Podaljšujemo rok za težjo od obeh nalog.

V prejšnji številki Preseka smo objavili kar dve nagradni nalogi. Na težjo, Vrtnarjevo nalogo, ki jo je zastavil Bojan Mohar, nismo prejeli nobenega odgovora. Morda smo vam za premišljevanje odmerili premalo časa.

Zato podaljšujemo čas za njeno reševanje do 10. aprila 2002.

RAZKRIJTE VSE TAJNE AGENTE OO7 NJENEGA VELIČANSTVA – Rešitev nagradne naloge iz 3. številke Preseka, str. 130

Pri lažji od obeh nalog je bilo treba poiskati vse rešitve skritega računa

$$\text{JAMES} - \text{BOND} = \text{OO7}.$$

Morda se je nekaterim reševalcem naloga zdela prelahka, pa nam zato svojih rešitev niso poslali. Res pa je tudi, da med prejetimi odgovori ni bilo niti enega, ki bi vseboval vse rešitve. Še najbolj se je odrezal reševalec, ki je našel tri. Premalo! Pod imenom James Bond se je namreč skrivalo kar sedem tajnih agentov.

Pohvalili pa bi dve mladi reševalki. Maja Ivanuša iz 7.c razreda OŠ Gustava Šiliha iz Velenja nam je poslala eno pravilno rešitev, Tajda Špital iz 6.c razreda iste šole pa račun $09312 - 8645 = 667$. To sicer ni rešitev našega skritega računa, saj njen zmanjševanec ni petmestno, ampak le štirimestno število. Za kriptaritme namreč velja, da je število napisanih črk tudi dejansko število mest skritega števila. Tega pa Tajda najbrž ni vedela.

Rešitev kriptaritma. Razlika petmestnega in štirimestnega števila je trimestno število le v primeru, če sta prvi dve številki petmestnega števila 1 in 0, prva številka štirimestnega števila 9 in na mestu stotic desetiški prenos. Torej je $J = 1$, $A = 0$ in $B = 9$. Za šest črk M, E, S, O, N, D imamo na razpolago sedem števil 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. To pomeni 5040 možnosti (variacije reda 6 brez ponavljanja med 7 elementi), med katerimi bi rešitve lahko poiskali s preprostim računalniškim programom. Vendar prinaša logični premislek večje zadovoljstvo.

Ker med števili od 2 do 8 ni para z razliko 7, mora biti v računu tudi na mestu enic desetiški prenos, torej $D + 7 = S + 10$.

Nadaljujmo. Na mestu desetic lahko desetiški prenos je, ali pa ga ni. Če prenos je, velja $O + N + 1 = E + 10$ in $2O + 1 = M + 10$. Če pa prenosa ni, je $O + N + 1 = E$ in $2O = M + 1$. Od tod dobimo dva sistema enačb:

$$D - S = 3, \quad E - O - N = 1, \quad 2O - M = 10, \quad (1)$$

$$D - S = 3, \quad O + N - E = 9, \quad 2O - M = 9. \quad (2)$$

Komponente rešitev posameznega sistema so paroma različna naravna števila od 2 do 8.

Ker je $E \leq 8$ in $N \geq 2$, sledi iz srednje enačbe sistema (1), da je $O \leq 5$. Za take O pa noben M , $2 \leq M \leq 8$, ne ustreza zadnji enačbi sistema (1). Sistem (1) zato nima rešitve.

Če torej rešitev obstaja, ustreza sistemu (2). Zadnja enačba tega sistema pove, da je M liho število, torej 3, 5 ali 7. Tem vrednostim zapored ustrezajo za O vrednosti 6, 7 in 8. Za vsak par $(M, O) \in \{(3, 6), (5, 7), (7, 8)\}$ zlahka iz prvih dveh enačb sistema (2) določimo preostale vrednosti, upoštevaje, da morajo biti vse vrednosti paroma različne. Dobimo sedem rešitev, ki jih prikazuje naslednja tabela.

J	A	M	E	S	B	O	N	D
1	0	3	2	4	9	6	5	7
1	0	3	4	2	9	6	7	5
1	0	3	4	5	9	6	7	8
1	0	3	5	4	9	6	8	7
1	0	5	2	3	9	7	4	6
1	0	7	4	3	9	8	5	6
1	0	7	3	2	9	8	4	5

Dodatno vprašanje.

Zadnja številka števila OO7 na desni strani kriptaritma je 7; toliko je tudi rešitev kriptaritma. Ali še za kakšno naravno število X , $1 \leq X \leq 9$, $X \neq 7$, velja, da ima skriti račun $JAMES - BOND = OOX$ natanko X rešitev? Tu bo pa pomoč računalnika že dobrodošla.

Marija Vencelj

NEKAJ (NE)RESNIH O LETU 2002

Na leto 2002 smo se že dodobra privadili, tako da je že čas, da si pogledamo še nekaj njegovih numerično-numeroloških lastnosti.

Letošnje leto je *palindromsko*, saj ima zapis 2002 prebran naprej enako vrednost kot prebran nazaj.

1. Hitro ugotovi, katero je bilo zadnje in katero bo prvo naslednje palindromsko leto.

Če ste odgovorili na prvo vprašanje, potem veste, da bo treba na naslednje palindromsko leto kar dolgo čakati. V malo bolj oddaljeni preteklosti pa palindromska leta niso bila tako zelo redka.

2. Preštej, katero palindromsko leto po vrsti je leto 2002.

Letošnje leto je tudi lepo *okroglo*, saj število $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ni deljivo s kvadratom nobenega naravnega števila, večjega od 1. Pravzaprav doslej ni bilo še nobenega bolj okroglega leta. (Izmed dveh okroglih let je bolj okroglo tisto, ki je produkt več praštevil.)

3. Ugotovi, katero bo prvo leto, ki bo produkt petih različnih praštevil.

Bila pa so že leta, enako okrogla kot letošnje.

4. Katero je bilo zadnje okroglo leto, ki je bilo produkt štirih različnih praštevil?

Letošnje leto je sicer lepo okroglo, je pa tudi precej *krhko*. Mera za krhkost leta je število deliteljev, število 2002 pa ima kar 16 deliteljev. Seveda pa so bila v preteklosti že tudi precej bolj krhka leta.

5. Ugotovi, katero leto je bilo doslej najbolj krhko. Katero pa je bilo najbolj krhko leto v 20. stoletju?

Ni pa letošnje leto niti malo *praštevilsko*. Če vzamemo poljubno osnovo $b \geq 3$, potem je vrednost, ki jo predstavlja zapis $2002_{(b)}$, enaka $2b^3 + 2$, to število pa ni nikoli praštevilo. Je pa bilo vsaj malo praštevilsko lansko leto, podobno pa bo tudi naslednje.

6. Poišči najmanjšo osnovo b , pri kateri zapis $2001_{(b)}$ določa praštevilo. Enako naredi še za zapis 2003.

Obstajajo pa tudi take osnove b , da sta obe vrednosti $2001_{(b)}$ in $2003_{(b)}$ hkrati praštevili. Takrat dobimo par praštevilskih dvojčkov.

7. Poišči osnovo b , pri kateri zapisa $2001_{(b)}$ in $2003_{(b)}$ določata par praštevilskih dvojčkov.

Peto in šesto, še posebej pa zadnje vprašanje zahtevajo malce zapletenejše računanje (predvsem razstavljanje na prafaktorje in ugotavljanje praštevilskosti). Pri tem vam bo gotovo prišla prav pomoč zmogljivega kalkulatorja oziroma računalnika.

Martin Juvan

Odgovori so na str. 218.

NALOGA ZA MATURANTE

Dokažite, da je za poljubno praštevilo $p > 5$ številska vrednost polinoma $p^4 - 50p^2 + 49$ deljiva z 2880. (Naloga s sprejemnega izpita na Moskovsko državno univerzo leta 1998.)

Dušan Murovec

Rešitev je na str. 222.

NI DELJIVO

Dokažite, da izraz $n^2 + 5n + 16$ ni deljiv s 169 za nobeno naravno število n .

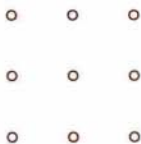
Dragoljub M. Milošević

Rešitev je na str. 232.

POVEŽI TOČKE

Narišite (povezano) poligonsko črto iz štirih daljic, ki bo vsebovala vseh devet točk s slike.

Povedano preprosteje: Narišite štiri daljice, na da bi dvignili pisalo od papirja, tako da bo vseh devet točk s slike ležalo na narisani črti.



Marija Vencelj

Rešitev je na str. 230.

ŠTEVILO 1 KOT VSOTA IN PRODUKT ULOMKOV

Število $\frac{a}{b}$, kjer sta a, b celi števili in $b \neq 0$, imenujemo racionalno, tudi ulomek. Ker je b lahko 1 in je $\frac{a}{1} = a$, so med racionalnimi števili vsebovana vsa cela števila. Izberemo dve, tri ali več racionalnih števil. Ali jih lahko izberemo tako, da bosta njihova vsota in produkt enaka 1?

1. Začnimo z dvema številoma, zaznamujmo ju x, y . Ker naj bosta njuna vsota in produkt 1, mora biti

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\ x \cdot y &= 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Če bi sistem (1) rešili, bi iz najdenih x, y videli, da le-ta nista racionalna.

Ravnali bomo drugače. Iz druge enačbe v (1) vidimo, da sta x, y oba različna od 0 (saj je njun produkt 1). Če torej obstaja racionalna rešitev, je $x = \frac{a}{b}$, kjer sta a, b od nič različni celi števili; iz druge enačbe (1) sledi potem $y = \frac{b}{a}$. Ko oboje vstavimo v prvo enačbo iz (1), dobimo

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$$

in po odpravi ulomkov

$$a^2 - ab + b^2 = 0.$$

Iz te enačbe po množenju s 4 dobimo

$$(2a - b)^2 + 3b^2 = 0.$$

Kvadrat celega števila je nič ali pozitiven; vsota na levi je tako nič le, če sta oba seštevanka nič, torej le za $b = a = 0$. To ne gre, saj mora biti po privzetku $b \neq 0$. Sistem (1) v racionalnih številih ni rešljiv. Drugače povedano:

Ni dveh ulomkov, pri katerih bi vsota in produkt imela vrednost 1.

2. Ali obstajajo tri racionalna števila z vsoto in produktom 1? Da dobimo odgovor, je treba ugotoviti, ali premore sistem

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ x \cdot y \cdot z &= 1\end{aligned}\tag{2}$$

racionalne rešitve.

Hitro vidimo, da ni celoštevilnih rešitev. Drugo enačbo v (2) je mogoče v celih številih izpolniti le tako, da so x, y, z vsi 1 ali pa sta od števil x, y, z dve enaki -1 , eno 1. Prvič je vsota števil 3, drugič -1 in prva enačba iz (2) ni izpolnjena. Celih števil x, y, z , ki bi ustrezala sistemu (2), ni.

Ali morda za sistem (2) obstajajo racionalne rešitve, ki niso cela števila? Dognali so, da ne (dokaz ni preprost). Povzemimo:

Če tri ulomke seštejemo in zmnožimo, je od dobljenih vrednosti kvečjemu ena enaka 1.

3. Pojdimo sedaj k sistemu

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= 1.\end{aligned}\tag{3}$$

Drugo enačbo lahko v celih številih izpolnimo le, če so števila x_1, x_2, x_3, x_4 vsa ali 1 ali -1 ali pa dve 1 in dve -1 ; njihova vsota je potem 4, -4 , 0 in prva enačba (3) ne drži. Sistem (3) torej celoštevilnih rešitev nima. Našli pa so racionalne rešitve, ki niso cela števila. Če je n od 0, 1, -1 različno racionalno število, so

$$x_1 = \frac{n^2}{n^2 - 1}, \quad x_2 = \frac{1}{1 - n^2}, \quad x_3 = \frac{n^2 - 1}{n}, \quad x_4 = \frac{1 - n^2}{n}, \quad n \neq 0, 1, -1\tag{4}$$

racionalna števila; da izponjujejo obe enačbi (3), se prepričamo z vstavitvijo. Racionalnih števil je neskončno; zato je tudi neskončno četveric oblike (4). Povzemimo:

Obstaja neskončno četveric ulomkov, katerih vsota in produkt sta 1.

Ali so v obrazcih (4) zajete že vse racionalne rešitve sistema (3)? Na to vprašanje pisec teh vrstic ne ve odgovora.

4. Zadnjo ugotovitev lahko razširimo na pet in več racionalnih števil. Poglejmo sistem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \cdots + x_k &= 1 \\x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k &= 1.\end{aligned}\tag{5}$$

kjer je $k \geq 4$. Pri $k = 4$ dajejo obrazci (4) neskončno racionalnih rešitev sistema (5).

Za $k = 5$ so našli rešitve

$$x_1 = n, x_2 = \frac{1}{n}, x_3 = -n, x_4 = -\frac{1}{n}, x_5 = 1, \quad n \neq 0, \quad (6)$$

za $k = 6$ rešitve

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{n^2(n+1)}, x_2 = \frac{-1}{n^2(n+1)}, x_3 = (n+1)^2, \\ x_4 &= -n^2, x_5 = -n, x_6 = -n, \quad n \neq 0, -1 \end{aligned} \quad (7)$$

in za $k = 7$ rešitve

$$\begin{aligned} x_1 &= (n-1)^2, x_2 = n - \frac{1}{2}, x_3 = n - \frac{1}{2}, x_4 = 1, x_5 = -n^2, \\ x_6 &= \frac{1}{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}, x_7 = \frac{-1}{n(n-1)(n-\frac{1}{2})}, \quad n \neq 0, 1, \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Da gre za rešitve sistema (5), lahko neposredno preverimo. Števila (6), (7), (8) so pri racionalnem n , ki pride v poštev, racionalna; ker je vsakič za n neskončno možnosti, ima sistem (5) tudi pri $k = 5, 6, 7$ neskončno racionalnih rešitev. (Ne vemo pa, ali smo s tem dobili že vse racionalne rešitve.)

Kako pa je pri $k > 7$? Števila 4, 5, 6, 7 puščajo pri delitvi s 4 po vrsti ostanke 0, 1, 2, 3. Zato je mogoče naravno število k , ki je večje od 7, z naravnim številom t zapisati v obliki

$$\begin{aligned} k &= 4 + 4t, & \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 0,} \\ k &= 5 + 4t, & \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 1,} \\ k &= 6 + 4t, & \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 2,} \\ k &= 7 + 4t, & \text{če pušča } k \text{ pri delitvi s 4 ostanek 3.} \end{aligned}$$

Obrazci (4), (6), (7), (8) povedo, kako se dobi 1 kot vsota in produkt štirih, petih, šestih in sedmih racionalnih števil; tem številom dodamo $2t$ -krat število 1 in $2t$ -krat število -1 in že je tu k racionalnih števil, ki seštetu in zmnožena dajejo 1. Zato velja:

Če je $k \geq 4$, lahko na neskončno načinov izberemo k ulomkov, katerih vsota in produkt sta enaka 1.

Zgled.

Ker je $17 = 5 + 3 \cdot 4$, dajejo po (6) pri racionalnem $n \neq 0$

$$x_1 = n, \quad x_2 = -\frac{1}{n}, \quad x_3 = -n, \quad x_4 = \frac{1}{n}, \quad x_5 = 1, \\ x_6 = \dots = x_{11} = 1, \quad x_{12} = \dots = x_{17} = -1$$

neskončno racionalnih rešitev sistema (5) za $k = 17$.

Naloge.

1. Pri naravnem številu a je sistem

$$x + y = a$$

$$x \cdot y = a$$

v naravnih številih x, y rešljiv le, ko je $a = 4$. Dokaži.

2. Naj bo racionalno število c različno od 1 in -1 . Sistem

$$x + y + z = \frac{16}{(1 - c^2)(3 + c^2)} \\ x \cdot y \cdot z = \frac{16}{(1 - c^2)(3 + c^2)}$$

ima racionalno rešitev

$$x = \frac{2}{1 - c}, \quad y = \frac{2}{1 + c}, \quad z = \frac{4}{3 + c^2}.$$

Preveri.

3. Za racionalno število c , različno od 0 in 1, ima sistem

$$x + y + z = \frac{1}{c(1 - c)(1 - c + c^2)} \\ x \cdot y \cdot z = \frac{1}{c(1 - c)(1 - c + c^2)}$$

racionalno rešitev. Poišči jo.

Jože Grasselli

BLIŽNJI (NEO) ASTEROID 2001 YB₅ JE V ZAČETKU JANUARJA LETEL MIMO ZEMLJE

Iz podatkovnega skladišča PIKA (Projekt iskanja asteroidov in kometov) smo poiskali slike, ki prikazujejo prelet asteroida 2001 YB₅ v ozvezdju Raka dne 4. 1. 2002 zvečer, ko je bil od Zemlje oddaljen 5,9 milijona km. Objekt so 27. decembra 2001 odkrili z 1,2-metrskim teleskopom observatorija Mt Palomar v Kaliforniji. Klasificiran je bil kot NEO (Near Earth Object). Za te objekte je značilno, da se na poti okoli Sonca zelo približajo Zemlji in se zato navidezno zelo hitro gibljejo po nebu.

Asteroid 2001 YB₅ se je najbolj približal Zemlji 7. januarja 2002 v zgodnjih jutranjih urah, ko je letel mimo našega planeta na razdalji 825.000 km, kar je približno dvakratna razdalja med Zemljo in Luno. Giblje se po zelo sploščeni elipsi z obhodno dobo 3,7 leta.

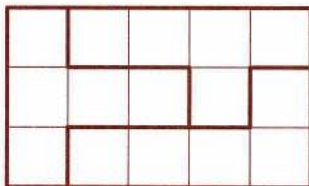
Avtomatski teleskop observatorija na Črnem vrhu je asteroidu sledil in posnel tri zaporedne slike, na katerih je identificiral hitro gibajoči se objekt, izmeril njegove pozicije in jih poslal v center za male planete (MPC). Iz meritev pozicij v daljšem časovnem obdobju v MPC izračunajo natančno orbito objekta in napovedano morebitno nevarno približevanje Zemlji.

Asteroid ima na posnetkih na ovitku sij 14 magnitude in je označen s puščico. Na vsaki sliki je v UT zapisan čas, ko je teleskop posnel prikazano področje. Čas osvetlitve je bil 2 minuti.

Herman Mikuž

TRI ŠKATLE – Rešitev s str. 151

Rob posamezne škatle mora biti enak petini daljše oz. tretjini krajše stranice pravokotnika.



Marija Vencelj

TIM, FERMAT IN KOLIČNIKI

Sosedov Tim je še osnovnošolec, zato ima najraje aritmetične probleme in matematične zgodbe.

Nedavno sem mu pripovedovala, kako je največji matematik 17. stoletja, Francoz Pierre Fermat, ugotovil, da so števila

$$2^1 + 1 = 5, \quad 2^2 + 1 = 17, \quad 2^3 + 1 = 257, \quad 2^4 + 1 = 65537$$

vs a po vrsti praštevila, in od tod napak sklepal, da je število oblike $2^n + 1$, kjer je n naravno število, vedno praštevilo. Že prvo naslednje število te oblike namreč ni praštevilo, saj je $2^5 + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$. Tudi $2^6 + 1$ ni praštevilo.

S Timom sva računski del opisane zgodbe preverila tudi računalniško s programom Derive, ki je z razcepom zadnjih dveh števil v hipu opravil. Da otrok računalniške dobe ne bi izgubil spoštovanja do matematikov preteklosti, sem predlagala, da pogledava še, kako je pri $n = 7$. Po polurnem mletju se je Timu moj dokaj dober računalnik tako zasmilil, da sva ga razrešila naročene naloge.

Je pa zgodba v fantovem razmišljanju pustila globoko sled. Izumil je nov stavek: "Pa je to zmeraj res?"

Tako je bilo tudi, ko sva se pogovarjala o deljenju števil. Tima so bolj zanimali količniki kot ostanki, zato sva sklenila na te kar pozabiti.

Predlagala sem mu takole iskanje količnika pri deljenju $27914 : 315$. Delitelj 315 razcepimo (ne nujno na prafaktorje), npr. $315 = 5 \cdot 7 \cdot 9$. Nato delimo dano število 27914 s prvim faktorjem 5, dobimo količnik 5582, na ostanek pa pozabimo. Dobljeni količnik delimo z drugim faktorjem 7, dobimo novi količnik 797 in spet pozabimo na ostanek. Novi količnik delimo z zadnjim faktorjem v razcepu delitelja, to je z 9. Dobimo 88, kar proglasimo za iskani rezultat (za ostanek smo se pa že navadili, da nanj pozabimo). Seveda sva napravila preskus z direktnim deljenjem števila 27914 s številom 315 in tudi dobila količnik 88.

Poskusila sva še z deljenjem $123 : 32$, pri čemer sva delitelj 32 razcepila na produkt petih dvojk. Zapored sva dobila količnike 61, 30, 15, 7 in, kot zadnjega, pravilni rezultat 3.

Tim je samo vzdihnil: "Pa je to zmeraj res?"

To pa je že naloga za vas!

1. Če se vam zdi, da pravilo v splošnem ne velja, poiščite protiprimer!
2. Če mislite, da pravilo velja, dokažite njegovo pravilnost!

Marija Vencelj

BROWNOVO GIBANJE

Zapis o Perrinovih poskusih s sedimentacijskim ravnovesjem v prejšnji številki Preseka je utegnil zbuditi vtis, da delci, ki jih opazujemo z mikroskopom, v kapljevini mirujejo. Navidezno mirovanje je s Perrinovimi besedami "zgolj utvara, ki izhaja iz nepopolnosti čutil; v resnici mu ustreza nenehno močno, neurejeno gibanje". Posvetimo nekaj pozornosti gibanju delcev, za katere smo zadnjič rekli, da lebdi v kapljevini.

Lastnosti snovi so z atomsko zgradbo najprej pojasnili v *kinetični teoriji plinov*. V njej so plin opisali kot množico enakih molekul, ki se neurejeno gibljejo in trkajo s steno posode ter med seboj. Molekule so tako majhne, da tega gibanja ni mogoče neposredno opazovati. Ali ga je mogoče opazovati posredno? Tudi valov na morju v veliki oddaljenosti ne moremo neposredno opazovati. Lahko pa jih opazujemo posredno, če zasledujemo, kako valovi zibljejo ladjo. Čim manjša je ladja, tem bolj jo zibljejo. Vlogo ladje imajo v kapljevini delci, ki jih je mogoče opazovati z mikroskopom. Molekule trkajo vanje z vseh strani. Trki so naključni: zdaj trči več molekul z leve in delec odskoči na desno, zdaj jih trči več z desne in delec odskoči na levo. Premislek velja za katero koli smer. Iz njega izhaja, da se delec v prostoru giblje neurejeno. To je *Brownovo gibanje*.

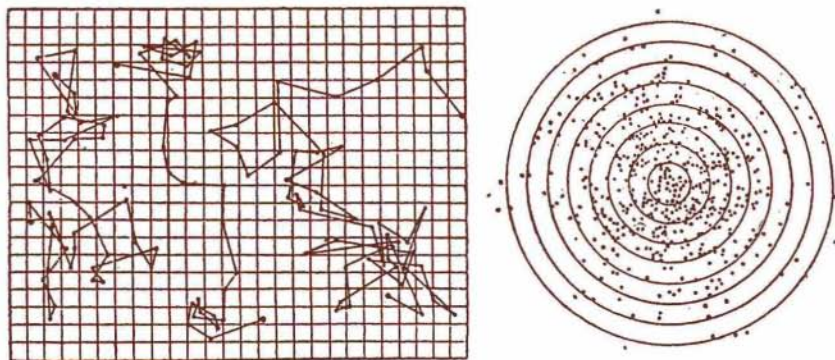
Botanik Robert Brown je leta 1827 opazil neurejeno gibanje cvetnega prahu v vodi. Najprej je mislil, da se delci gibljejo, ker so živi. Pozneje pa je ugotovil, da se gibljejo tudi delci barvila. Že leta 1877 so domnevali, da je to gibanje posledica termičnega gibanja molekul v kapljevini. Leta 1889 so uvideli, da se delci tem živahneje gibljejo, čim manjši so. Ali bi pri opazovanju Brownovega gibanja z mikroskopom lahko kaj izmerili, da bi atomsko zgradbo podprli s številskimi podatki? Poskušali so izmeriti povprečno hitrost delca, a ugotovili, da je izid močno odvisen od razdalje med točkama, v katerih so opazili delec in med katerima so izračunali povprečno hitrost. Opazovanja so od vsega začetka motili tokovi v kapljevini, ki jo je segrevala za osvetlitev potrebna svetloba.

Pot naprej sta s teorijo Brownovega gibanja, neodvisno drug od drugega, nakazala Albert Einstein leta 1905 in Marian Smoluchowski leto zatem. Pozornost sta preusmerila na premik določenega delca v določenem času Δt iz točke, v kateri so ga opazili na začetku, do točke, v kateri so ga opazili pozneje. Einstein sploh ni bil prepričan, da bo mogoče novo teorijo uporabiti za Brownovo gibanje: "Članek bo pokazal, da se, po molekulsko-kinetični teoriji toplote, delci, ki jih vidimo z mikroskopom in ki lebdi v kapljevini, zaradi termičnega gibanja molekul gibljejo tako, da

to gibanje zlahka zaznamo z mikroskopom. Mogoče se to ujema s t.i. 'Brownovim molekulskim gibanjem', toda razpoložljivi podatki o slednjem so tako nenatančni, da si o zadevi ne morem ustvariti dokončnega mnenja." Končal pa je z upanjem, "da bo kakemu raziskovalcu kmalu uspelo rešiti postavljeni problem, ki je tako pomemben v teoriji toplote". Vse kaže, da je bil to izziv za Jean-Baptista Perrina in njegove sodelavce, da so se lotili merjenj s sedimentacijskim ravnovesjem in Brownovim gibanjem.

Na kratko opišimo merjenja. Z mikroskopom z navpično osjo so na vodoravnem zaslonu naredili sliko, na kateri so zaznamovali lego delca na začetku in v enakomernih časovnih razmikih po Δt . Tako so dobili množico točk, katerih zveznice so projicirali na os x (slika 1). V vodoravni ravnini so vse smeri enakopravne in lahko os x poljubno izberemo. Če se je delec znatno premaknil navzgor ali navzdol, je ušel iz vidnega polja. Gibanje v navpični smeri ni bilo enakovredno gibanju v vodoravni smeri, če se je gostota snovi, iz katere so bili delci, razlikovala od gostote kapljevine.

Zaznamujmo lego delca v času 0, v času Δt , v času $2\Delta t$ itn. Projekcija prvega premika na os x meri x_1 , projekcija drugega x_2 itn. Premiki na eno stran so enako verjetni kot premiki na drugo, tako da je povprečni premik,



Slika 1. Perrin je v enakih časovnih razmikih določil lego delca in zaporedne lege povezal z daljicami. Stranici kvadratkov na risbi ustreza v kapljevine 3,1 tisočine milimetra. Ob tem je zapisal, da zlomljena črta "da samo blede sliko čudovite zapletenosti pravega tira" (levo). Pri nekem drugem poskusu je Perrin premike delcev vzporedno premaknil tako, da so vse začetne lege delcev prišle v izhodišče. Lego delcev je določal na vsake pol minute in v celoti opazoval 500 premikov delcev s polmerom po 0,37 tisočine milimetra. Koren iz povprečnega kvadratnega premika je meril 7,8 tisočine milimetra, krogi pa imajo polmere $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ te vrednosti. Število delcev v vse večjih kolobarjih je 34, 78, 106, 103, 75, 49, 30, 17, 9, medtem ko napove račun 32, 83, 107, 105, 75, 50, 50, 27, 14, 7. Povprečni kvadratni premik v ravnini je $\overline{x^2 + y^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} = 2\overline{x^2}$ (desno).

ki ga dobimo, ko seštejemo premike v času Δt za veliko število delcev in delimo s številom delcev, enak 0. Kvadrirajmo premik in izračunajmo povprečje $\overline{x_1^2}$, $\overline{x_2^2}$, ... Povprečna kvadratna premika sta enaka: $\overline{x_1^2} = \overline{x_2^2} = \overline{x^2}$. Na gibanje v določenem časovnem razmiku prejšnje gibanje tega delca ne vpliva. Delec "pozabi", kaj se je z njim dogajalo prej. Seštejmo premika v zaporednih časovnih razmikih. Za skupni povprečni kvadratni premik dobimo $(x_1 + x_2)^2 = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} = 2\overline{x^2}$. V povprečju namreč mešani člen $2\overline{x_1 \cdot x_2}$ nič ne prispeva, ker naletimo na pozitivni produkt enako pogosto kot na negativnega. Za povprečni kvadratni premik po $\mathcal{N}$ korakih, t.j. po času $t = \mathcal{N}\Delta t$, dobimo po tej poti $\mathcal{N}\overline{x^2}$. Po tem sklepamo, da je povprečni kvadratni premik sorazmeren s časom in je količnik $\overline{x^2}/t$ za delec z danim polmerom in dano gostoto v določeni kapljevini konstanten.

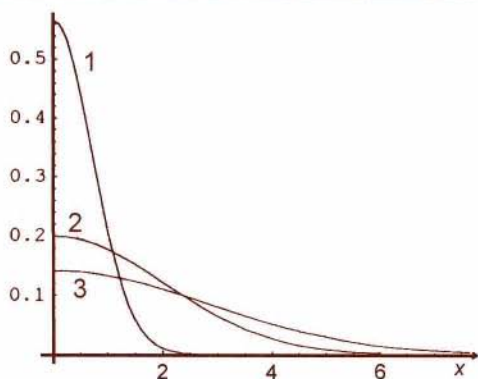
Perrin in sodelavci so izmerili količnik $\overline{x^2}/t$ za nekaj skupin delcev iz smol gumi-gut in mastiks. Delci ene skupine so imeli enak polmer. Opazovali so skupine delcev z različnimi polmeri v vodi in v vodni raztopini soli ter glicerina. Tako so v dokaj širokem obsegu spreminjali polmer kroglic, gostoto kapljevine in njeno viskoznost. Iz dobljenih podatkov so izračunali Avogadrovo število. Rezultati so se zadovoljivo ujemali z rezultati, ki jih je dalo merjenje s sedimentacijskim ravnovesjem. Čeprav so dobili nekoliko preveliko Avogadrovo število, je bilo to ob svojem času zelo pomembno. Prepričalo je dvomljivce, da so sprejeli zamisel o atomski zgradbi snovi.

V nadaljevanju nakažimo Einsteinovo računsko pot, ki je vodila Perrina. Začnimo s predelano plinsko enačbo $p = nkT$, v kateri je p tlak plina in $n = N/V$ gostota molekul plina. Enačba velja za osmozni tlak, če vstavimo za n gostoto molekul raztopljene snovi, t.j. število molekul N raztopljene snovi v prostornini kapljevine V . V tej obliki velja enačba tudi za mikroskopske delce v kapljevini, ko je n gostota števila delcev ali kratko gostota delcev.

Vzemimo, da se gostota delcev spreminja s krajem. Zaradi lažjega razmišljanja naj enakomerno narašča v smeri osi x . Brownovo gibanje nosi delce v smeri osi x in v nasprotni smeri. Delci, ki se gibljejo v nasprotni smeri osi x , prihajajo z območja z večjo gostoto $n + \Delta n$, delci, ki se gibljejo v smeri osi x , pa z območja z manjšo gostoto n . Zato je prvih delcev več kot drugih in se v nasprotni smeri osi x pojavi tok delcev (slika 2). Gostota tega toka j , t.j. število presežnih delcev,

Izpeljava ni neoporečna. Einstein jo je podprl s tem, da je povprečni kvadrat premika izračunal naravnost s porazdelitvijo delcev po kapljčevini (slika 3).

Izravnavanju gostote delcev po raztopini nasprotuje upor kapljčevine. Za silo kapljčevine na delec uporabimo Stokesov linearni zakon upora za kroglico $F_1 = 6\pi r_1 \eta v$. Pri tem je r_1 polmer delca, η viskoznost kapljčevine in v hitrost delca glede na kapljčevino. Na levi osnovni ploskvi prizme ustreza delcem tlak p , na desni v oddaljenosti Δx pa je tlak $p + \Delta p$. Razliko sil $S(p + \Delta p) - Sp = S\Delta p$ uravnoteži skupni upor kapljčevine za delce v prizmi $n(S\Delta x)F_1$. Tako dobimo $nF_1 = \Delta p/\Delta x$,



Slika 3. Porazdelitev delcev v kapljčevini, če so na začetku pri $t = 0$ vsi v izhodišču. Einstein je za porazdelitev navedel funkcijo $e^{-x^2/4Dt}/\sqrt{4\pi Dt}$ in z njo izračunal $\overline{x^2} = 2Dt$. Za delce s polmerom $0,5 \mu\text{m}$ v vodi s temperaturo 17°C in z viskoznostjo $1,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$ je napovedal $\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{t} \cdot 0,8 \mu\text{m}$, torej v eni minuti $\sqrt{\overline{x^2}}$ okoli $6 \mu\text{m}$. Pripomnil je, da je "porazdelitev enaka kot za naključne napake". Za porazdelitve 1, 2 in 3 so povprečni kvadratni premiki $\overline{x^2}$ v razmerju 1:8:16 in v enakem razmerju so ustrezni časi t , saj je količnik $\overline{x^2}/t$ za vse tri enak. Primerjaj s sliko 1.

r_1	m	η	premiki	N_A
$0,21 \mu\text{m}$	$48 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$	$0,001 \text{ kg/ms}$	900	$6,95 \cdot 10^{26}$
0,38	290	0,125	100	6,4
0,37	246	0,001	1500	6,9

Nekaj podatkov o Perrinovih merjenjih s kroglicami smole gumi-gut. V stolpcih si sledijo podatki o polmeru kroglic, njihovi efektivni masi, viskoznosti, številu prešteti premikov in izračunanem Avogadrovem številu. Današnja vrednost, s katero je računal že Einstein v svojem članku, je $6,0 \cdot 10^{26}$. Zakaj so bila Perrinova merjenja odločilna, čeprav so že prej poznali Avogadrovo število, bo poskušal pojasniti prispevek v eni od prihodnjih števil.

ko oba izraza izenačimo. Z izrazoma za D in F_1 ter "plinsko" enačbo sledi za gostoto toka delcev

$$j = nv = \frac{nF_1}{6\pi r_1 \eta} = \frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot \frac{1}{6\pi r_1 \eta} = \frac{kT}{6\pi \eta r_1} \frac{\Delta n}{\Delta x}.$$

Z difuzijskim zakonom nazadnje izračunamo Avogadrovo število z enačbo, ki jo je uporabil Perrin:

$$N_A = \frac{R}{k} = \frac{RT}{3\pi \eta r_1 (\overline{x^2}/t)}.$$

Korak od ene enačbe do druge ni posebno težaven. Vendar je takih, med seboj povezanih korakov toliko, da je težko obdržati v mislih rdečo nit od izidov merjenja do končnega rezultata. To je eden od razlogov, da se zdi fizika težavna.

Janez Strnad

ČRKE IN ŠTEVILA – Rešitev s str. 170

Rešitev:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
5	7	2	9	1	4	6	3	8

V zvezi z nalogo se nam je oglasil bralec Robert Meolic iz Maribora, ki je zastavljeno nalogo pravilno rešil. Hkrati se je vprašal, ali je naloga tudi enolično rešljiva, če vrednosti za A in F nista vnaprej določeni, in sam ugotovil, da sta podatka $A = 5$ in $F = 4$ nepotrebna.

Res je! Naloga ima eno samo rešitev (seveda zgornjo), četudi ne predpišemo za nobeno črko vrednosti vnaprej. Dve sta bili vnaprej navedeni zato, da smo manj izkušenim bralcem olajšali reševanje.

Za ostale je pa tale zapis lahko novi izziv!

Boštjan Jaklič

RAČUNANJE Z VELIKIMI ŠTEVILI – UBASIC

V Preseku sem ter tja pišemo o nalogah, ki zahtevajo računanje z velikimi števili (z velikimi števili mislim na cela števila, ki imajo precej več kot deset števk). Večkrat nam reševanje močno olajša uporaba računalnika, opremljenega s primerno programsko opremo.

Ena od možnosti je, da uporabimo katerega od paketov za simbolično računanje. Sam tovrstne probleme običajno rešujem s pomočjo programa *Mathematica*. A to je ena od ugodnosti akademskega okolja, saj ta program za običajnega uporabnika ni prav poceni in je tako precej težko dostopen. Računanja se lahko lotimo tudi s programom *Derive*. Ta je sicer manj zmogljiv, a zato prijaznejši za uporabo. Za občasnega reševalca Presekovih nalog pa je njegova glavna prednost pred *Mathematico* ta, da je moč na naslovu www.derive.com dobiti v 30-dnevni preizkus neokrnjeno različico programa. In 30 dni bi moralo zadoščati za rešitev naloge iz Preseka.

Če se vam reševanje s programi za simbolično računanje ne zdi prav nič zabavno, programiranje pa vam ni tuje, lahko seveda sami sprogramirate vse potrebne funkcije. No, to je sicer lahko zanimiva in poučna pot, a morda le nekoliko predolgotrajna in prezapletena. Če torej še nimate svoje lastne knjižnice funkcij za delo z velikimi števili (pa tudi če jo imate, a vas skrbi hitrost in zanesljivost delovanja), lahko pobrsunate po spletu in uporabite katero od tam ponujenih knjižnic. Primerna naslova za začetek iskanja sta

directory.google.com/Top/Science/Math/Number_Theory/Software
in

primes.utm.edu/links/programs/large_arithmetic

Ponujene knjižnice so večinoma pripravljene za uporabo iz jezikov C ali C++ (tudi napisane so v teh jezikih, običajno pa je del kode napisan tudi v zbirniku). Če vas ni strah objektov in jezika C++, lahko poskusite s knjižnico NTL (shoup.net/ntl). Ljubitelji Linuxa in orodij GNU pa gotovo uporabljate knjižnico GMP (swox.com/gmp).

Uspešna uporaba omenjenih knjižnic zahteva solidno znanje jezikov C oz. C++, pa tudi nekaj študija priložene dokumentacije in primerov. Za hitro sprotno preverjanje računov so zato za občasnega uporabnika kar nekoliko nerodne in okorne. Sem pa že pred časom naletel na program UBASIC, ki ga je pred leti napisal matematik prof. Yûji Kida z univerze Rikkyo v Tokiu. Gre za tolmač za programski jezik basic, napisan še za operacijski sistem DOS (kar mu pri srečanju z novjšimi različicami Oken povzroča nekaj težav). Čeprav je že v letih, ima nekaj res lepih lastnosti.

Ena od njih je gotovo ta, da je zastoj. Zadnjo različico, ta ima oznako 8.8f, dobite na naslovu

`ftp://rkmath.rikkyo.ac.jp/pub/ubibm`

(če je gornji naslov nedosegljiv, lahko nekoliko starejšo različico dobite tudi na naslovu

`archives.math.utk.edu/software/msdos/number.theory/ubasic).`

Področje na strežniku vsebuje več datotek. Za nas so še posebej zanimive naslednje: `ub32i88f.zip` vsebuje tolmač `ubibm32.exe` in pomožno datoteko `ubconst7.dat`, dokumentacija programa je v arhivu `ubhelp.zip` (datoteka `ubhelp.xxx`), arhiv `ubiapl96.zip` vsebuje kopico koristnih programov, napisanih v UBASIC-u, `haber.zip` pa je kratek priročnik z osnovnimi navodili za delo z UBASIC-om (tega je pred resnim delom priporočljivo vsaj preleteti). UBASIC pozna tudi grafiko. Nekaj programov, ki uporabljajo grafiko, je zbranih v arhivu `ubgraph.zip`.

Namestitev programa je preprosta. Arhiv `ub32i88f.zip` le razpihnemo v izbrano mapo ter ime mape dodamo v pot. Tolmač zaženemo s klicem `ubibm32` iz ukazne vrstice. Delo z njim končamo z ukazom `system`.

Druga privlačna lastnost UBASIC-a, zaradi katere ga tudi omenjam v tem prispevku, pa je že vgrajeno računanje z velikimi števili. Program sicer pozna več vrst podatkov: poleg treh vrst celih števil še racionalna, realna in kompleksna števila, pa nize, polinome in še kaj.

V nadaljevanju bomo spoznali osnove dela s celimi števili. UBASIC zna računati s števili, ki imajo do 2600 desetiških števk. Osnovni aritmetični operatorji so + (seštevanje), - (odštevanje), * (množenje), ^ (potenciranje), / (deljenje, ki da realen rezultat), \ (celoštevilsko deljenje) in @ (ostanek pri celoštevilskem deljenju).

Tolmač lahko uporabljamo v sprotnem načinu. Vtipkamo ukaz, pritisnemo Enter in tolmač ga izvede. Npr. `print 2^1000` izpiše nekaj vrstic dolgo veliko celo število. Sprotni način je primeren za hitre, a ne preveč zahtevne izračune ter za spoznavanje delovanja posameznih ukazov.

Pravo programiranje pa običajno poteka tako, da najprej s tekstovnim urejevalnikom (sam uporabljam *TextPad*, v sili pa lahko uporabite tudi *Notepad*) na datoteki s končnico `.ub` pripravimo program v UBASIC-u. Tega nato z ukazom `load "ime_datoteke"` naložimo v tolmač (uporabimo lahko tudi samo `load` ali pa tipko F1). Če se želimo prepričati, da je pravilno naložen, ga lahko z ukazom `list` (tudi tipka F4) izpišemo na zaslon. Pri tem se oblika programa lahko razlikuje od tiste, v kateri smo ga vtipkali. Program poženemo z ukazom `run` (tipka F5). V primeru težav lahko izvajanje prekinemo s Ctrl+C ali s Ctrl+Break.

Kot zgled si oglejmo program, ki prebere naravno število n , manjše od 10000, ter izračuna in izpiše število deliteljev števila n ter število tistih števil od 1 do n , ki so tuja z n .

```

100 rem Število deliteljev in število tujih števil
110 input "Vpiši število do 10000"; n
120 if or{n < 1, n > 10000} then goto 110
130 delitelji = 0: tuji = 0
140 for i = 1 to n
150   if n @ i = 0 then delitelji += 1
160   if gcd(i, n) = 1 then tuji += 1
170 next i
180 print "Število deliteljev:"; delitelji
190 print "Število tujih števil:"; tuji
200 end

```

Vrstica 100, ki se začne z `rem`, je komentar (komentar lahko začnemo tudi z znakom `'`). Vrstica 120 je primer odločitve s sestavljenim pogojem. Vrstice 140–170 tvorijo zanko `for` s števcem `i`. Funkcija `gcd` (greatest common divisor) iz vrstice 160 vrne največji skupni delitelj dveh števil. UBASIC pozna tudi funkcijo `lcm` (least common multiple), ki vrne najmanjši skupni večkratnik para števil. Tisti, ki veste nekoliko več o teoriji števil, ste gotovo opazili, da je število z n tujih števil od 1 do n , ki jih prešteje gornji program, ravno vrednost Eulerjeve funkcije φ pri argumentu n . To funkcijo pozna tudi UBASIC, in sicer pod imenom `eul` (njen argument mora biti manjši od 2^{32}).

V zadnji številki lanskega letnika Preseka smo iskali najmanjšo potenco števila 2, katere desetiški zapis se začne s številom 2001. Poskusimo z zaporednim preizkušanjem potenc števila 2 rešiti enako nalogo še za število 2002.

```

100 'Najmanjši tak k, da je 2^k = 2002...
110 eksponent = 0: potenca = 1
120 while val(left(str(potenca), 5)) <> 2002
130   eksponent += 1
140   potenca *= 2
150 wend
160 print "2 ^"; eksponent; "="; potenca
170 end

```

Načeloma se lahko zgodi, da je iskani eksponent tako velik, da ima pripadajoča potenca več kot 2600 mest. V takem primeru bi med izvajanjem prišlo do prekoračitve obsega (angl. *overflow*). No, brez skrbi, program po nekaj sekundah računanja najde zapis

$$2^{1652} = 2002\,40922278232540849726515714730105038764536 \dots$$

V programu smo uporabili zanko `while`. Ta se konča pri ukazu `wend`. Funkcija `str` pretvori število v niz, funkcija `left` vrne prvih nekaj znakov niza (v gornjem programu 5, eno mesto porabi predznak), funkcija `val` pa izračuna vrednost, ki jo predstavlja niz.

UBASIC pozna tudi nekaj vgrajenih ukazov za delo s praštevili. Tako klic `prm(n)` vrne n -to praštevilo (pri čemer mora biti $n \leq 12251$). Klic `nextprm(n)` vrne prvo praštevilo, ki je večje od n (ukaz zna poiskati le praštevila do 2^{32}). Ukaz `prmdiv(n)` pa vrne najmanjši prafaktor števila n (pri čemer ne uspe, če je $n > 2^{34}$ in nima prafaktorja, manjšega od 2^{17}). Prafaktorje manjšega števila izpišemo npr. takole:

```
100 'Razcep na prafaktorje (osnovna varianta)
110 input "Vpisi naravno število"; n
120 while n > 1
130   d = prmdiv(n)
140   print d
150   n = n \ d
160 wend
170 end
```

Za resno preverjanje praštevilstosti pa je treba uporabiti programe iz arhiva `ubiapl96.zip`. Program `prtest1.ub` vsebuje varianto praštevilskega testa Adlemana, Pomerancea in Rumelyja. Datoteka vsebuje kratek glavni program in (nekoliko daljšo) funkcijo `fnADLEMAN(n)`, s katero preverjamo praštevilstost. Funkcija je primerna za testiranje števil, ki imajo nekaj deset mest. Izboljšana varianta tega testa je sprogramirana v datoteki `aprt-cle.ub`. Z njo lahko preverjamo tudi števila, ki imajo več kot 300 mest. Mimogrede, po angleško praštevilo pravimo *prime* oz. *prime number*, preverjanju praštevilstosti pa *primality testing*.

Razstavljanje števil na prafaktorje je precej težja naloga kot samo preverjanje praštevilstosti. Razstavljanju sta namenjena programa `ecm.ub` in `mpqsx3.ub` (drugi potrebuje še knjižnico `mpqs#31.ubb`, ki jo samodejno naloži med izvajanjem). S prvim lahko razstavljamo števila, ki imajo več kot 100 mest, a morajo imeti zmerno velike (tja do 20 mest) prafaktorje. V splošnem je čas, ki ga bo porabil postopek, težko vnaprej napovedati. Drugi program je bolj "predvidljiv", a bo zanesljivo zmogel le števila z okoli 50 mesti. Za vajo lahko z enim (ali pa kar z obema) o gornjih programov poiščete razcep števila

1234567890987654321234567890987654321.

Število ima štiri prafaktorje, dva majhna in dva večja.

Martin Juvan

VSI REKORDI ALVANA CLARKA

Za vrhunsko izdelan refraktor, to je daljnogled, ki ima lečo za objektiv in lečo za okular, sta za uspeh v glavnem pomembni dve stvari: odlična kakovost optičnega stekla in natančnost, pravzaprav že umetnost njegovega brušenja.

Po Galilejevem zgledu (okoli 1610 je izbrusil leče za svoj prvi refraktor in z njim prvi pogledal v zvezdno nebo) so številni astronomi 17. stoletja sami brusili, izdelovali leče in seveda tudi daljnogleda. V eni osebi so se tako morali združiti nadarjenost optika, natančnost mehanika in opazovalna veščina astronoma. Takih ljudi je silno malo. Zato so že v naslednjem stoletju opravila razdelili. Z izdelovanjem leč so se izključno ukvarjali optiki, z mehanskim delom (justiranjem in postavitvijo teleskopa) mehaniki, z opazovanjem pa tisti, ki najbolj poznajo vesolje, astronomi.

Od optikov 18. stoletja naj omenimo predvsem Švicarja Pierra Guinanda, ki je začel svojo kariero optika z izdelovanjem očal in preprostih refraktorjev s kartonastimi cevmi. Šele po sedmih letih poskušanja mu je uspelo vlti optično steklo. Prav neuspehi so ga spodbujali k novim poskusom. Bil pa je zelo vztrajen. Zgradil je veliko talilno peč, v kateri je bilo možno taliti do 80 kg stekla. Za to je porabil skoraj vsa svoja sredstva, tako da je njegova družina več let stradala.

Velika vztrajnost pa je bila na koncu poplačana. Okoli leta 1800 mu je uspelo vlti nekaj odličnih steklenih diskov s premerom 10 do 15 cm, kar je bil tedaj izreden optični uspeh. Pozneje je izumil še način, kako se odpravijo razne tokovne strukture in druge nepravilnosti v steklenih odlitkih. S tem je odprl pot do izdelave velikih lečnih objektivov.

Končno je vltil odličen disk s premerom 45 cm, ki so ga (1823) zbrusili za glavni daljnogled dublinskega observatorija. To je bil zadnji uspeh Pierra Guinanda. Po njegovi smrti (1824) so skrivnosti izdelovanja steklenih izdelkov prešle na njegovega sina; ta pa jih je prodal francoski firmi, ki se je zlila z angleško firmo steklenih izdelkov. Prav od teh francoskih in angleških podjetij, ki so izkoriščale Guinandove izume in izkušnje, je sprva dobival steklene diske za izdelavo leč največjim refraktorjem na svetu slavni ameriški optik Alvan Clark.

Clark je bil po poklicu slikar – portretist. V mladosti je bil dninar, vendar pa se je ukvarjal še z različnimi drugimi mehanskimi opravili, med njimi je zelo rad brusil stare leče. Že precej v letih se je odločil, da bo izdeloval teleskope. Tako je osnoval eno največjih optičnih podjetij na Zahodu, z imenom Alvan Clark in sinovi. Lečne objektivne so izdelovali v

ameriškem Cambridgu. Preskuse njihovih optičnih lastnosti so opravljali z umetno zvezdo v 70 metrskem predoru.

Že leta 1853 je Alvan Clark dosegel pomembne uspehe. Z refraktorjem, ki ga je izdelal, je bilo mogoče opazovati vrsto neznanih oz. še od prej neraziskanih dvojnih zvezd. Leta 1862 so v državi Mississippi postavili 46 centimetrski Clarkov refraktor. Že prvo noč so se v polni meri pokazale njegove odlične optične sposobnosti. Clarkov sin George je namreč ob Siriju odkril drobno zvezdico – šibko spremljevalko, za katero se je pozneje izkazalo, da je bila to prva odkrita bela pritlikavka. Obstoj te spremljevalke je iz nepravilnosti v gibanju zvezde Sirij napovedal (1844) že Bessel, toda znameniti nemški astronom ni mogel predvideti, da se bo z odkritjem Sirijske spremljevalke odprlo novo, tako zelo široko področje v astrofiziki.

Po enajstih letih je v Washingtonu na Morskem observatoriju začel delovati še večji inštrument – 66 centimetrski refraktor firme Alvan Clark in sinovi. S tem refraktorjem so leta 1877 odkrili oba Marsova satelita,



Slika 1. Alvan Clark (1804 do 1887), znameniti ameriški optik – brusilec leč. Skupaj s svojima sinovoma je osnoval podjetje, ki se je specializiralo za izdelovanje objektivov velikih refraktorjev.



Slika 2. Alvan Clark (v sredini) v svoji delavnici – ob že izbrušeni oziroma izgotovljeni leči za objektiv velikega pulkovskega refraktorja.

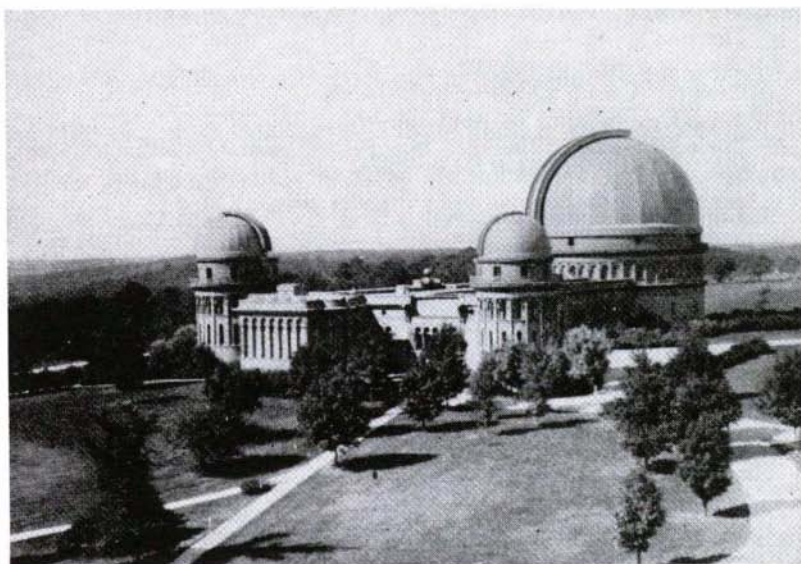
Fobos in Deimos. Istega leta je svet obletela vest astronoma Schiaparellija o zagonetnem odkritju kanalov na Marsovem površju. Mnoge so pritegnile tudi razprave o marsovski civilizaciji in leta 1894 je Percival Lowell, bivši diplomat, v Arizoni (ZDA) z lastnimi sredstvi zgradil velik observatorij. Njegova glavna naloga je bila reševanje različnih problemov v zvezi z Marsom. Leta 1896 je na tem mestu že stal ponovno odličen Clarkov refraktor s premerom objektiv 60 cm.



Slika 3. Clarky so izdelovali objektivne za največje refraktorje, ki so jih tudi montirali. Največji med njimi so na observatorijih: Lowell (premer objektiv 60 cm), Washington (66 cm), Pulkovo (76 cm), Lick (91 cm) in Yerkes (102 cm; na sliki). Yerksov objektiv je do danes ostal največji na svetu.

Clark je nizal rekord za rekordom. Že prej, leta 1878, se je Pulkovski observatorij obrnil na firmo Clark in sinovi z naročilom za izdelavo 76 centimetrskega, tedaj največjega refraktorja na svetu. Naročilo je bilo izpolnjeno, pri čemer je objektiv izdelal sam Alvan iz stekla neke pariške firme, mehanski del teleskopa pa je izdelala nemška firma Repsold. Novi pulkovski refraktor, ki je začel delovati 1885, je bil odličen inštrument, eden najboljših na svetu. Toda že leta 1888 je na gori Hamilton v Kaliforniji začel svoje delo Observatorij Lick, oskrbljen z 90 centimetrskim Clarkovim refraktorjem.

Ob koncu 19. stoletja so se v tekmovanje orjaških teleskopov vključili ameriški milijonarji. Začetnik te dobrodelnosti je bil James Lick, ki je daroval tri četrte milijona za izgradnjo novega observatorija pri pogoju, da bo nosil njegovo ime in da bo glavni teleskop observatorija največji na svetu. Primer Licka je našel posnemovalce. Čikaški mogotec Charles Yerkes je podaril čikaški univerzi več kot milijon dolarjev, da zgradijo teleskop, ki bo po velikosti in optičnih lastnostih še večji in še boljši od refraktorja na observatoriju Lick. To izredno zahtevno nalogo je izpolnilo isto podjetje – Alvan Clark in sinovi, toda že brez sodelovanja svojega ustanovitelja, saj je znameniti optik umrl 1887.



Slika 4. Observatorij Yerkes – sami lahko ugotovite, pod katero kupolo počiva največji refraktor na svetu.

Orjaški objektiv s premerom 102 cm (navadno rečemo kar enega metra) je bil izgotovljen že 1893. Zvezdarna Yerkes blizu Chicaga pa je začela delovati leta 1897 in je torej imela največji refraktor na svetu. Opravljeno je bilo ogromno delo (pet let brušenja). To je rekord, ki ga do danes še ni nihče presegel. Refraktorji so s tem dosegli svoj višek. Boljših in večjih ni bilo več.

(*Drobna pripomba.* Lečni objektiv s premerom več kot 100 cm morajo biti tudi razmeroma debeli. Zato absorbirajo veliko svetlobe. Poleg tega se zaradi teže upogibajo, zvijajo in zato popačijo slike vesoljskih teles, pri fotografiji pa nastanejo razmazane slike.)

V zgodovini astronomije so refraktorji Alvana Clarka in njegovih sinov med vsemi astronomskimi inštrumenti odigrali izredno pomembno vlogo. Z njimi so obogatili planetno in zvezdno astronomijo s prvorazrednimi odkritji. Uspešno delo na teh refraktorjih se nadaljuje še danes.

Marijan Prosen

NEKAJ (NE)RESNIH O LETU 2002 – Rešitev s str. 196

1. Zadnje palindromsko leto je bilo 1991, prvo naslednje pa bo 2112.
2. Leto 2002 je 119. palindromsko leto (kar 108 jih je bilo pred letom 1000 in le 10 med leti 1000 in 2000).
3. Produkt prvih petih praštevil je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$.
4. To je bilo leto $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ (lihi kandidati morajo biti deljivi s 3 in s 5, sicer je produkt prevelik; sodi ne smejo biti deljivi s 4).
5. Doslej najbolj krhko leto je bilo $1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ (s 40 delitelji). V 20. stoletju je bilo najbolj krhko leto $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ (s 36 delitelji).
6. Iskani osnovi sta $b = 5$, $2001_{(5)} = 251$, in $b = 4$, $2003_{(4)} = 131$.
7. Prve tri take osnove so $b = 29$ (praštevili 48779 in 48781), $b = 32$ (praštevili 65537 in 65539) in $b = 44$ (praštevili 170369 in 170371).

Martin Juvan

KVADRIRANJE DVOMESTNIH ŠTEVIL, KI SE ZAČENJAJO S 5 – Rešitev s str. 157

1. Dvomestno število $\overline{5a}$, zapisano v desetiškem sestavu, ima vrednost $5 \cdot 10 + a$, kjer je a število od 0 do 9. Njegov kvadrat je

$$(5 \cdot 10 + a)^2 = 25 \cdot 10^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot a + a^2 = (25 + a) \cdot 10^2 + a^2. \quad (1)$$

Prvi sumand v vsoti na skrajni desni je štirimestno število, katerega prvi dve števki daje vsota $25 + a$ (to je vsota števila 25 in vrednosti enic danega števila, kot je predlagal Tim), zadnji dve števki sta enaki 0. Temu štirimestnemu številu moramo še prišteti a^2 . Ker je to kvadrat enomestnega števila, je kvečjemu dvomestno število, torej se 'prišteje' le k zadnjima ničloma štirimestnega števila. Postopek lahko skrajšamo tako, da teh ničel v štirimestnem številu sploh ne zapišemo, ampak namesto njiju k prvima števkom pripišemo število a^2 , zapisano v desetiškem sestavu; v vsakem primeru seveda kot dvomestno število.

2. Pogled na srednjo in zadnjo vsoto v (1) pokaže, da pravilo deluje, ker je srednji člen v srednji vsoti $2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot a = 100a$ deljiv z 10^2 . To je posledica dejstva, da je prva števka 5 enaka polovici osnove 10.

Pa je posplošitev pred nami.

Pravilo lahko razširimo na dvomestna števila, zapisana v poljubni **sodi** osnovi, s prvo števkjo enako **polovici** osnove:

Kvadrat dvomestnega števila, zapisanega s številsko osnovo $2b$, ki se začneja s števkjo b , dobimo tako, da številu b^2 prištejemo vrednost enic danega števila in k tako dobljeni vsoti pripišemo kvadrat enic kot dvomestno število. (Dobljeni kvadrat je zapisan v osnovi $2b$.)

Podobno kot v (1) razberemo dokaz te trditve iz naslednje zveze:

$$\overline{ba}_{(2b)} = (b \cdot 2b + a)^2 = b^2 \cdot (2b)^2 + a \cdot (2b)^2 + a^2 = (b^2 + a) \cdot (2b)^2 + a^2.$$

Izračunajmo npr. $45_{(8)}^2$.

(a) Zapišemo $25__{(8)}$, ker je $4_{(8)}^2 + 5_{(8)} = 20_{(8)} + 5_{(8)} = 25_{(8)}$.

(b) Ker je $5_{(8)}^2 = 31_{(8)}$, pripišemo 31 in dobimo $45_{(8)}^2 = 2531_{(8)}$.

Za nejeverneže opravimo še (nepotrebni) preskus računa v desetiškem sestavu:

$$\begin{aligned} 45_{(8)}^2 &= 37_{(10)}^2 = 1369_{(10)}, \\ 2531_{(8)} &= 1369_{(10)}. \end{aligned}$$

Bo kar prav!

Marija Vencelj

MERJENJE TEMPERATURE Z ROKO

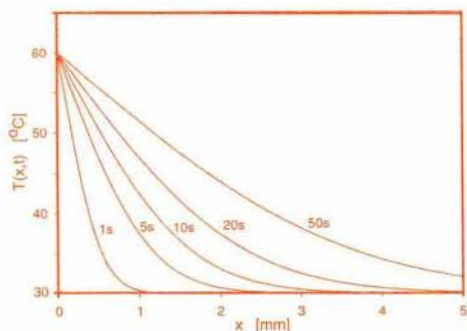
S preprostim poskusom se prepričamo, da je merjenje temperature s tipanjem kaj nezanesljivo. V tri posode nalijemo vodo: v prvo posodo zelo toplo, v drugo mlačno, v tretjo pa hladno. Eno roko potopimo v toplo, drugo pa v hladno vodo in čez nekaj časa obe roki potopimo v mlačno vodo. Za roko, ki smo jo prej potopili v toplo vodo, se zdi mlačna voda hladna, za drugo pa prav topla. Podobne občutke imamo, ko se gremo kopat v bazen. Voda v njem se zdi zelo hladna, če pridemo iz vročega brbotalnika, in prav topla, če smo se prej oprhali s hladno vodo.

Pa vendar tudi s tipanjem v posebnih okoliščinah kar zanesljivo ocenimo temperaturo. Ko potipamo vroče čelo bolnika, lahko na stopinjo natančno povemo njegovo temperaturo. Oceniti je moč tudi primerno temperaturo olja v ponvi za cvrtje hrane: zadošča, da se z dlanjo na kak centimeter približamo površini. Enologi so na temperaturo vina kar se da občutljivi in se zmrdujejo že, če ta ni na del stopinje prava.

V območju med 45°C in 70°C temperaturo dobro ocenijo mojstri za centralno kurjavo s tipanjem jeklene cevi, po kateri se pretaka vroča voda za ogrevanje. Njihova metoda je precej preprosta. Zgrabijo cev in hkrati začno šteti sekunde do trenutka, ko cevi ne morejo več držati. Pri tem je izmerjeni čas zelo dobro merilo za temperaturo cevi. Ker utegne ta metoda kdaj koristiti, si jo oglejmo nekoliko podrobneje. S preprostim modelom bomo povezali čas in temperaturo cevi.

Na sliki 1 je prikazan potek temperature v roki za izbrane čase od trenutka, ko smo se tesno dotaknili vroče kovinske plošče s temperaturo 60°C . S slike razberemo, da se po eni sekundi tkivo na globini 1 mm še ne segreje, na globini 0,3 mm pa že doseže temperaturo preko 40°C . Z naraščajočim časom se segrevajo vse globlji deli tkiva. Po 50 sekundah bi se vsa koža, ki je približno milimeter debela, segrela na temperaturo preko 50°C . Seveda se to ne zgodi, saj že po eni sekundi ne zdržimo prijema in roko odmaknemo od vroče plošče. Do krivulj na sliki 1 smo prišli z računom, ki pa ga tu ne bomo podrobneje razčlenjevali. Privzeli smo, da je temperatura plošče vseskozi enaka, in za kožo privzeli podatke o toplotni prevodnosti, specifični toploti in gostoti, ki veljajo za vodo.

Da povežemo čas dotika in temperaturo plošče, privzamemo, da moramo odtegniti roko, ko koža na določeni globini preseže dano temperaturo, recimo ji temperatura praga. Globina je povezana z oddaljenostjo čutnic za temperaturo, ki je višja od telesne. Zanimivo je, da so v koži poleg teh še čutnice za temperaturo, ki so nižje od telesne. Ker podatki o oddaljenosti čutnic od površine kože niso zanesljivi, poleg tega pa je za občutek vročine pomembna tudi hitrost, s katero se temperatura na

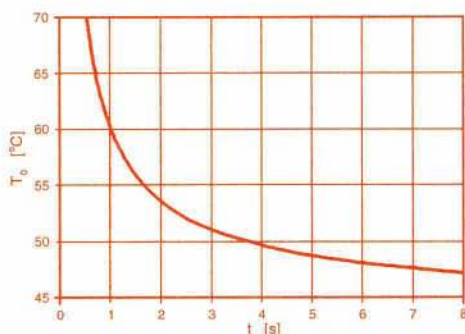


Slika 1. Potek temperature v koži po preteku navedenega časa. Temperatura plošče je vseskozi enaka 60°C . (Bralcem, ki se spoznajo na računanje prevajanja toplote, naj povemo, da smo za toplotno difuzijsko konstanto D privzeli vrednost $D = 0,15 \text{ mm}^2/\text{s}$.)

mestu čutnic spreminja, bomo v našem primeru privzeli globino $0,3 \text{ mm}$, ki daje dobro ujemanje z meritvami. Pri višji temperaturi plošče se plast kože na globini $0,3 \text{ mm}$ hitreje ogreje do temperature praga kot pri nižji. Razumljivo je, da termometer ne bo več uporaben, ko bo temperatura plošče nižja od temperature praga. Z nekaj preprostimi poskusi smo ocenili, da je temperatura praga le 42°C . Če bi ploščo ogrevali zelo počasi, bi zdržali tudi kako stopinjo več.

Na podlagi računa, ki je pripeljal tudi do krivulj na sliki 1, smo poiskali čase t , pri katerih temperatura plasti v globini $0,3 \text{ mm}$ ravno preseže temperaturo praga. Pri tem smo pri vsaki temperaturi plošče T_0 v območju med 45°C in 70°C poiskali čas t . Rezultati so prikazani na sliki 2. Krivuljo na njej bi lahko imenovali umeritvena krivulja, če bi šlo za preciznejši termometer. Velja si zapomniti le nekaj značilnih točk. Tako moramo pri temperaturi plošče 70°C odtegniti roko že po pol sekunde, pri temperaturi 65°C po $3/4$ sekunde, pri 60°C po sekundi, pri 55°C po dveh, pri 50°C po štirih in pri 45°C po kakih osmih sekundah.

Zanimivo bi bilo izvedeti, do kolikšne mere so podane vrednosti splošne. Pričakujemo, da so ljudje s tanjšo kožo občutljivejši in so za njih navedeni časi predolgi. Opozoriti velja, da moramo delati poskuse, kar se da previdno, da si ne opečemo rok. Najlažje se umerimo na debelejši cevi za centralno kurjavo z vgrajenim termometrom. V hišah z lastno kotlarno takih cevi ni težko najti.



Slika 2. Umeritvena krivulja termometra na dotik. Pri računanju smo privzeli, da so čutnice za vročino 0,3 mm globoko v koži in da je temperatura praga 42°C.

Sicer poskusov v tej smeri ni prav lahko narediti. Poskusimo lahko s ploščo električnega likalnika, ki jo s tokom le nekaj sekund ogrevamo, potem pa pri izključenem likalniku počasi ohlajamo. Da se ne opečemo, moramo zanesljivo vedeti, kolikšna je temperatura plošče v trenutku, ko se je dotaknemo z dlanjo. Nikoli naj ne preseže 60°C. Z zanesljivim termometrom moramo torej skrbno meriti temperaturo plošče. Zato delajmo poskuse le v šolskem laboratoriju ob prisotnosti učitelja fizike.

Andrej Likar

NALOGA ZA MATURANTE – Rešitev s str. 197

Polinom in dani delitelj razstavimo:

$$p^4 - 50p^2 + 49 = (p^2 - 1)(p^2 - 49) = (p - 1)(p + 1)(p - 7)(p + 7) \quad (1)$$

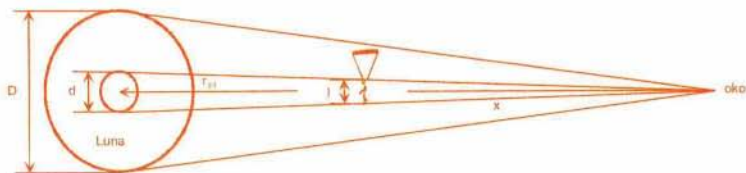
$$2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Če je p praštevilo, $p \neq 2, 3, 5$, so na desni v (1) vsa števila soda, dve od njih deljivi s 4 (dva para sosednjih sodih števil). Od treh zaporednih števil $p - 1, p, p + 1$ je eno deljivo s 3. Ker to ni p , je produkt $(p - 1)(p + 1)$ deljiv s 3. Števili $p - 7$ in $p + 7$ imata pri deljenju s 5 enaka ostanka kot $p - 2$ in $p + 2$. Zato je število $(p - 1)(p + 1)(p - 7)(p + 7)$ deljivo s 5, če je s 5 deljivo število $(p - 1)(p + 1)(p - 2)(p + 2)$. To pa je res, saj je eno od petih zaporednih števil $p - 2, p - 1, p, p + 1, p + 2$ deljivo s 5. Ker je $p > 5$, to ni p .

Dušan Murovec, prir. v ured.

SKOK NA LUNO – Rešitev s str. 133

Izberimo oznake kot na slikah 1 in 2.



Slika 1. Razdalja od mesta posnetka do padalca je x , od Zemlje do Lune r_{z-l} , velikost padalca l in premer Lune D .

Lune s premerom D in padalca z višino l ne vidimo pod enakim kotom. Tako bi ju videli v primeru, če bi bila Luna nekoliko manjša, in sicer s premerom

$$d = D \cdot \frac{l_p}{D_p},$$

kjer je $\frac{l_p}{D_p}$ razmerje velikosti padalca in Lune, izmerjenih s posnetka.

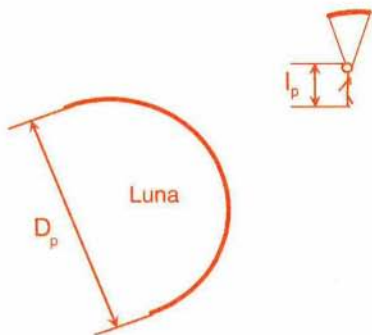
Iz podobnih trikotnikov (slika 1) sledi, da je $d : r_{z-l} = l : x$, od koder sledi

$$x = r_{z-l} \cdot \frac{l}{d}.$$

Iz obeh zvez dobimo končni izraz za razdaljo

$$x = \frac{r_{z-l} \cdot l \cdot D_p}{D \cdot l_p}.$$

Premer Lune je $D = 3500$ km, razdalja od Zemlje do Lune $r_{z-l} = 370\,000$ km, dejansko višino padalca ocenimo na 1,8 m, razmerje velikosti padalca in Lune, izmerjeno s posnetka, pa je približno 1 : 4. Vstavimo vrednosti v formulo za x in dobimo, da je razdalja od mesta posnetka do padalca približno 800 m.



Slika 2. Luna in padalec (glej tudi posnetek v prejšnji številki Preseka). D_p je s posnetka izmerjena velikost Lune in l_p s posnetka izmerjena velikost padalca.

KRŽANKA "PRESTIŽNA NAGRADA"

	AVTOR MARKO BOKALIČ		NAJVEČJA CELINA	ČLANICA VERSKEGA REDA	IME AM. PEVKE LEAR	IME AM. IGRALKE BASINGER	ZAZNAVA PREDMETA S PRSTI	NERESNIČNA NAVEDBA	NITAST IZRASTE NA KOŽ
	ORJASKA JUŽNOAM. KACA								
	PODZAVEST PRI FREUDU								
	TOLSTOJEVA JUNAKINJA KARENINA				A/TOMOB. OZNAKA DELNIC		MLADA SL. PLAVALKA (ANJA)		
	?				NERED		ANDREJ PEČENKO		
AV/STRAL. MANEKENKA MAC-PHERSON				OBRSKI VLADAR. NAZIV					OTOČEK PRESPAN JEZERU IGRA DVO. (ANG.)
				ZORAN LUBEJ					
POVEČANA UKRIVLJENOST HRBTENICE NAZAJ						SPODNJE HLACE			
						ZELO STRUPEN ALKALOID			
ODREVENOST							DO, RE, MI, FA, 7, LA		
							DRVARSKI DROG		
HOLANDSKI SLIKAR (AERT VAN DER)				NIZEK SLOJAST OBLAK					
				NIKITA HRUSČOV					
VISOKO ODLIKOVANJE					LJUDSKA MODROST, PREGOVOR			UMIKANJE IZ STRAHU	
					EPOHA			BASKOV. PROVINCA V ŠPANJI	
NEVŠKO MESTO OB IZLIVU NECKARJA V REN							IT. POLITIK MORO		
							SEVERNI SOSED ANGLEŽEV		
JAPONSKI DRŽAVNIK PRED 100 LETI (HIROBUMI)				KRVNI FAKTOR			KOVINSKA ČELADA		
				HRVAŠKA NAFTNA DRUŽBA	UREDNIK ŠPORTA NA TVS (MARJAN)		POVRŠINA POD NAMI		
ŽENSKA, KI PRAŽNJE VAŽNEJŠO OBLETNICO									FRANC. SKLADAT (JACQUES IVRINA KOBILICA
PRIZORIŠČE NASTOPA ŽIVALI V CIRKUSU					ZBITA NEPREPUSTNA ZEMLJA				
	MUSLI-MANSKI BOG				GOSTINSKI POKLIC				

VZKLIK	NA OSENEČNIH POLJIH DOBITE PODROČJA, ZA KATERE SE PODELJUJE NAGRADA	POKOJNI SL. GLED. IGRALEC IN REŽISER (JOŽE)	JAP. FILM. REŽISER (JASUDŽIRO)	IME IGRALKE ŽUPAN- ČICEVE	PROSTOR ZA SUHO KRMO, SENIK	BELKASTA PLESEN NA VINU	
	POLMILIJNSKO MESTO OB REKI TOM V SIBIRIJU						
	KANALIZACIJSKI ODPADKI						
	?						
	?						
MONGOL - ITALJSKA REKA							
KROKAR							
				IGRALEC HARRIS		ZVEZNA DRŽAVA V ZAH. DELU ZDA	
			BOSANSKO MORSKO LETOVIŠČE				
			ČRNO- GLEDKA				
		IT. KOLESAR (MARCO)				GOZDNATO HRIBOVJE V JUŽNI INDIJI	VELIKA AZIJSKA OTOSKA DRŽAVA
		STAROROM. VLADAR					NA SLIKI JE DOBITNICA NAGRADE ZA DVE PODRUČJI
				SPOMILADI POSEJANA PŠENICA			ZAČETNICI AVTORJA RELATIV- NOSTNE TEORIJE
GRŠKI JUNAK							
NAJVEČJI ZADETEK NA LOTU				HRAST S HRAPAVO DREVESNO SKORJO	IME NEM. SMUČARKE GERG HEIKE DRECHSLER		
	VZHODNO- NEMŠKI DIKTATOR HONECKER					LASTNOST ROVČAR- SKEGA NAREČJA	
	JAP. ŠAH						ZNAK ZA ASTAT
	EGIPČAN, BOG ZEMLJE	?					
		KORAČ- NICA					
	?				SLOV. ETNOLOG (NIKO)		
	PODREDNI VEZNIK				BARJA KOŽE		
	KOLIČNIK POTI IN HITROSTI			FRANC. PRESTOL- NICA			DEL OBLAČILA ZA SPRAV- LJANJE DROBNARJI
	ENOTA ZA ZRAČ. TLAK						
				3. OSEBA MNOŽINE		JADRANSKI OTOK	
				GLAVNI VEZNIK		NOGOMET. KLUB	
		GLEDAJNE NAVSKRIZ					
			IME ZAD- NJEGA JUGO- PREMIERA MARKOVIČA			UDAR ZARADI ZAMAŠITVE ARTERIJE	

MONOKRISTALI

Izmed treh agregatnih stanj, v katerih se lahko nahaja snov, je kristalno stanje najstabilnejše in najbolj urejeno. Kristal¹ je skupina atomov, katerih položaj v kristalni mreži² je položaj z najnižjim energetskega potencialom, t.j. prosta energija sistema atomov oz. molekul je minimalna. Kristali imajo ostro določeno tališče za razliko od amorfnih snovi, ki so pravzaprav podhlajene kapljevine³.

Da bi razložili proces vzgoje in rasti kristalov, moramo odgovoriti na tri vprašanja:

1. Kako nastane kristalna kal⁴ znotraj homogenega stanja?
2. Kako poteka rast kristalov (kinetika kristalizacije)?
3. Kako poteka proces razpadanja kristalov?

Vemo, da v nekaterih snoveh kristalne kali zlahka nastajajo in da je taline takih snovi praktično nemogoče podhladiti oz. prenasiti njihove raztopine. Po drugi strani pa je oblikovanje kristalnih kali pri nekaterih snoveh povezano s precejšnjimi težavami. Lahko rečemo, da je bil v teoriji nastajanja kristalnih kali dosežen določen napredek, vendarle popolnega odgovora še ni. Vedeti moramo, da igra prisotnost netopnih primesi veliko vlogo pri oblikovanju kali iz talin in iz raztopin. Primesi različno vplivajo na nastajanje kali; največji učinek imajo izomorfne⁵ primesi.

Pri študiju kinetike kristalizacije moramo ločiti med dvema pomembnima pojmom: hitrostjo nastajanja kristalnih kali in hitrostjo rasti kristalov. Hitrost nastajanja kali je število nastalih kali v prostorski enoti na časovno enoto. Hitrost rasti kristala je sprememba velikosti kristala v časovni enoti.

Monokristal je kristal, ki se razvije iz ene same kali.

¹ Kristal je trdno telo iz čiste snovi z ravnimi mejnimi ploskvami, ki se sekajo pod stalnimi, natanko določenimi koti. Zunanja oblika kristala odraža periodično urejeno notranjo zgradbo, ki jo podaja kristalna mreža, sestavljena iz enakih gradbenih enot, atomov, ionov ali molekul. Nastajajo in rastejo iz prenasitih raztopin, podhlajenih talin in pri zgoščevanju hlapov (op. prev.).

² Kristalna mreža je prostorska mreža točk, razporejenih na ustrezajočih si krajih v kristalu (op. prev.).

³ Te se ob višanju temperature postopno *mehčajo* (op. prev.).

⁴ Kristalna kal ali kristalna klica je drobec kristala koloidne velikosti (med 1 nm in 100 nm), na katerem se nadaljuje rast kristala (op. prev.).

⁵ Izomorfija je lastnost kemično različnih spojin, da kristalizirajo v enaki kristalni obliki (op. prev.).

Dandanes postajajo monokristali čedalje pomembnejši, tako v osnovnih raziskavah kot za tehnično rabo. Prav raziskovanje monokristalov je povzročilo ogromen napredek v fiziki in kemiji trdne snovi. Prav tako pa številni industrijsko tehnični izdelki temelje na uporabi monokristalov.

Omenimo le nekaj najpomembnejših primerov uporabe pri raziskavah snovi:

- Snovne konstante⁶ kristalov lahko natančno določimo le na monokristalih. To še posebej velja za anizotropne⁷ lastnosti kristalov.
- Trdoto trdnine lahko določamo izključno na monokristalih.
- Obnašanje polprevodnikov so lahko razložili šele potem, ko jim je uspelo dobiti monokristale zelo čistega germanija⁸.
- Proučevanje t.i. *barvnih centrov*, ki so v tesni zvezi s pojavi v polprevodnikih, poteka samo na monokristalih.
- Monokristali so nujno potrebni pri raziskavah prevodnosti in superprevodnosti kovin.
- Včasih so potrebni pri študiju kemijskih procesov in kemijske kinetike⁹ v trdni snovi.

Nič manjše vloge nimajo monokristali v tehniki:

- Iz njih izdeljujejo razne optične elemente: prizme (NaCl, KBr), okenca (KBr, CsBr), leče, filtre, polarizatorje (kvarc) itd.
- Uporabljajo jih kot monokromatorje¹⁰ za rentgensko svetlobo.
- Velik pomen imajo v jedrski fiziki, kjer jih uporabljajo za detekcijo in spektrometrijo ionizirajočega sevanja.

⁶ Snovne konstante so npr. gostota, prožnostni modul, lomni količnik, toplotna prevodnost (op. prev.).

⁷ Anizotropnost je pojav, da je kaka količina odvisna od smeri (lomni količnik, toplotna prevodnost, itd.) (op. prev.).

⁸ Glej prispevek J. Strnada Elektroni in vrzeli v polprevodniku s primesjo v 5. številki 27. letnika Preseka (op. prev.).

⁹ Kemijska kinetika je področje fizikalne kemije, ki se ukvarja s proučevanjem kemijskih reakcij v odvisnosti od reakcijskih pogojev, npr. od tlaka, temperature, koncentracije, katalizatorjev ipd. (op. prev.).

¹⁰ Monokromator je optična naprava, s katero dobimo iz mešane svetlobe enobarvno svetlobo (op. prev.).

okolje rasti	območje uporabe (temperatura in pritisk)	naprava	kontrola razvoja
povečanje kristalov v trdnem stanju	zelo omejeno (do tališča)	enostavna	slaba
raztopine (voda, organske raztopine)	omejeno (do vrelišča)	enostavna do srednje zapletena	zelo dobra
raztopine v talini (mineralizatorji)	delno omejeno (do 1800°C)	enostavna	slaba
hidrotermalna sinteza	delno omejeno (do 5000 at)	zapletena	zelo težka
sinteza pri srednjem pritisku	omejeno (do 250 at)	zapletena	težka
sinteza pri visokem pritisku	delno omejeno (do 100 000 at)	zapletena in zelo zapletena	ni mogoča
talina (stacionarna)	delno omejeno (do 1600°C)	enostavna	zado- voljiva
talina (nestacionarna)	delno omejeno (do 1300°C)	enostavna do srednje zapletena	dobra
talina (metoda brez talilnika)	omejeno (do 2500°C)	srednje zapletena	težka
consko taljenje	omejeno (do 1300°C)	srednje zapletena	dobra
plinsko stanje	omejena (do 1800°C)	enostavna	slaba

Tabela 1. Primerjava metod za vzgojo kristalov.

- Posebej velika je uporaba monokristalov v elektrotehniki. Piezoelektrične¹¹ kristale uporabljajo kot oddajnike in detektorje električnih signalov, nadalje kot frekvenčne stabilizatorje, električne filtre¹² itd.

¹¹ Piezoelektričnost je lastnost nekaterih kristalov, da nastane ob natezanju ali stiskanju med izbranimi mejnima ploskvama električna napetost (op. prev.).

¹² Električni filter je naprava, ki prepušča izmenični tok s frekvenco na izbranem območju in ne prepušča toka zunaj tega območja (op. prev.).

hitrost rasti	velikost kristalov	kvaliteta kristalov	snovi, ki lahko kristalizirajo
majhna	zelo majhni	nizka	kovine
zelo majhna	zelo veliki	visoka	fosfati, sulfati glikonati, tartrati
srednja do velika	majhni	nizka	kovine, oksidi, feriti silikati, titanati
zelo majhna	večji	visoka	oksidi, silikati sulfidi
srednja	srednji do veliki	zadovoljiva	sulfidi
zelo velika	zelo majhni	nizka	diamant, oksidi
srednja do velika	srednji	visoka	kovine, oksidi, silikati, halogenidi, organske spojine
srednja do velika	večji	visoka do zelo visoka	kovine, III/IV-spojine, oksidi, silikati, halogenidi, organske spojine
velika	večji	zadovoljiva do visoka	oksidi, feriti titanati, volframati
velika	srednji do veliki	visoka do zelo visoka	kovine, III/V-spojine, organske spojine
velika	majhni do srednji	zadovoljiva do nizka	kovine, oksidi halogenidi

(nadaljevanje tabele s str. 228)

Uporaba polprevodnih monokristalov stalno narašča: za izdelavo tranzistorjev, usmernikov, termistorjev in detektorjev infrardečega sevanja. V zadnjem času je odkritje pojava spodbujenega elektromagnetnega sevanja še razširilo področje uporabe monokristalov in odločilno vplivalo na razvoj novih in izpopolnjevanje starih metod za pridobivanje monokristalov.

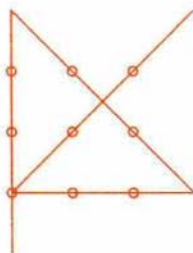
- Velik potrošnik sintetičnih monokristalov je tudi draguljarstvo.

Težko je reči, kdo in kdaj je prvi začel pridobivati monokristale v laboratoriju. Že *Aristotel* omenja pridobivanje kristalov kuhinjske soli in *Belinius* pridobivanje kristalov bakrovega sulfata z izparevanjem vodnih raztopin teh soli. Študij zunanjih geometrijskih oblik kristalov sega v sredino 17. stoletja. V tem času začenja tudi posnemanje naravnih pogojev za vzgojo in rast kristalov v laboratoriju. Tako je *Robert Boyle* odkril, da dodatek primesi spremeni videz kristala. V 19. stoletju so se v Franciji veliko ukvarjali s pridobivanjem kristalov dragih kamnov iz različnih mineralizatorjev. Kot naravno nadaljevanje teh raziskav je *Verneuil* izdelal fuzijsko metodo (s plamenom) za pridobivanje korundovih kristalov. Verneuilova metoda pomeni začetek sodobnega pridobivanja optičnih, elektroakustičnih, polprevodniških, laserskih in drugih kristalov z določenimi fizikalnimi in kemičnimi lastnostmi.

Monokristale lahko pridobivamo na tri bistveno različne načine: s kristalizacijo iz trdnega, kapljevinskega ali plinskega stanja. V okviru teh treh možnosti so izdelali vrsto metod, ki jih prikazuje tabela 1. Navadno lahko posamezno snov kristaliziramo na več načinov. Izbira najugodnejše metode je odvisna od več parametrov. Najpomembnejša je narava snovi, ki jo želimo kristalizirati, nato njene fizikalno-kemične lastnosti, pa namen, za katerega bomo kristal uporabili, t.j. zaželena kvaliteta, in nazadnje sredstva, ki so nam na voljo.

Branislav Čabrić in Aco Janićijević, prev. Marija Vencelj

POVEŽI TOČKE – Rešitev s str. 197



Marija Vencelj

REBUS – Rešitev s III. str. ovitka

Meh Anika – MEHANIKA.

Marko Bokalič

POLKRALJICE – Rešitev s str. 158

Iskanja postavitev polkraljic sem se lotil z računalnikom. Začel sem s programom za iskanje postavitev paroma nenapadajočih se običajnih kraljic (rešitev naloge 5.16 iz zbirke *C naj bo*) in ga postopoma dopolnil.

Postavitve kraljic. Pri vsaki rešitvi je v vsaki vrstici šahovnice natanko ena kraljica. Iskanje postavitev poteka tako, da v zanki (načeloma bi to lahko počeli tudi z rekurzijo) poskušamo postaviti kraljico v tekočo vrstico, pri čemer pazimo, da nova kraljica ne napada nobene od že postavljenih kraljic v prejšnjih vrsticah. Če nam uspe, poskušanje nadaljujemo v naslednji vrstici. Če pa nam kraljice v tekočo vrstico ne uspe postaviti, se vrnemo v prejšnjo vrstico in tam poskusimo prestaviti kraljico v enega od naslednjih stolpcev. Vse skupaj ponavljamo, dokler ne preizkusimo vseh možnosti.

Opravo, ki se med postopkom zelo pogosto ponovi, je preverjanje, ali nova kraljica napada katero od že postavljenih. Da preverjanje poteka hitreje, si pomagamo s tremi pomožnimi tabelami. Kraljici se namreč lahko napadeta na tri načine: lahko sta postavljeni v isti stolpec ali pa se nahajata v isti naraščajoči oz. padajoči diagonali (zaradi zasnove rešitve se ne more zgoditi, da bi se več kraljic znašlo v isti vrstici). V pomožni tabeli za stolpce vsakemu stolpcu pripada element z vrednostjo 0 ali 1. Vrednost 1 pove, da je v tem stolpcu že postavljena kraljica, vrednost 0 pa, da stolpec še ni zaseden. Na enak način s pomožnina tabelama poskrbimo še za naraščajoče oz. padajoče diagonale. Novo kraljico smemo postaviti le na polje, ki ne leži ne na zasedenem stolpcu in ne na zasedeni (naraščajoči ali padajoči) diagonali. Za šahovnico velikosti 8×8 tako najdemo 92 različnih postavitev.

Postavitve polkraljic. Pri iskanju postavitev polkraljic se pojavi nekaj novih težav. Še vedno velja, da je pri vsaki rešitvi v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko ena polkraljica. Pri diagonalah pa je treba biti pazljivejši. Medtem ko pri kraljicah velja, da če prva napada drugo, potem tudi druga napada prvo, to pri polkraljicah ne drži več. Imamo namreč dve vrsti polkraljic in lahko se zgodi, da prva polkraljica (npr. bela po naraščajoči diagonali) napada drugo, druga pa prve ne napada (ker je črna in napada polja na padajoči diagonali). Zato potrebujemo natančnejše podatke o posamezni diagonali. Odločil sem se za dve vrednosti: ali je diagonala napadena (možni vrednosti 0 in 1; ta pove, ali na diagonali stoji polkraljica take barve, da napada celotno diagonalo) in števec zasedenosti diagonale (ta pove, koliko polkraljic je postavljenih na diagonalo). Seveda je treba pri postavitvi nove polkraljice in pri odstranitvi že postavljene

vse te vrednosti ustrezno popraviti. Dodatno je treba še poskrbeti, da na posamezno polje šahovnice poskusimo postaviti tako belo kot črno polkraljico.

Rezultati. Ko sem v program dodal vse zgoraj navedene dopolnitve in odpravil napake, sem za šahovnico velikosti 8×8 dobil naslednje vrednosti:

število belih polkraljic	0	1	2	3	4	5	6	7	8
število postavitev	2113	8224	18484	29048	34262	29048	18484	8224	2113

Vseh različnih postavitev je torej

$$2113 + 8224 + 18484 + 29048 + 34262 + 29048 + 18484 + 8224 + 2113 = 150000.$$

Presenetljivo okroglo število, mar ne? Naj omenim, da je med temi postavitvami $2^8 \cdot 92 = 23552$ takih, ki jih dobimo iz postavitev kraljic (kjer lahko vsako kraljico spremenimo v belo ali v črno polkraljico).

Končajmo z idejo za nadaljnje delo. Zanimivo bi bilo še prešteti, koliko je *bistveno različnih* postavitev, pri čemer postavitvi štejemo za bistveno različni, če je množica polj šahovnice, ki jih zasedajo polkraljice pri prvi postavitvi, različna od množice zasedenih polj pri drugi postavitvi. Zdi se, da bi moralo biti takih postavitev bistveno manj (gotovo jih ni več kot $8! = 40320$).

Martin Juvan

NI DELJIVO – Rešitev s str. 197

Pokazati moramo, da enakost $n^2 + 5n + 16 = k \cdot 169$, $k \in \mathbb{N}$, ni možna.

Če enakost pomnožimo s 4, dobimo

$$(2n + 5)^2 + 3 \cdot 13 = 4k \cdot 13^2. \quad (1)$$

Vidimo, da mora biti člen $(2n + 5)^2$ deljiv s 13 in zato tudi že $2n + 5$ deljivo s 13, torej $2n + 5 = 13 \cdot m$, $m \in \mathbb{N}$. Če to vstavimo v (1), dobimo

$$m^2 \cdot 13^2 + 3 \cdot 13 = 4k \cdot 13^2,$$

od koder sledi $3 = 13(4k - m^2)$. To pa ni mogoče, ker 3 ni večkratnik števila 13.

Enakost (1) torej ni možna, ni takega naravnega števila n , pri katerem bi bil izraz $n^2 + 5n + 16$ deljiv s 169.

Dragoljub M. Milošević

REZANJE IN SESTAVLJANJE PRAVILNEGA ČETVERCA

Štiri skladna telesa, iz katerih lahko sestavimo pravilni četverec, smo spoznali že v 5. številki lanskega letnika Preseka, str. 290. Tokrat pogledjmo, kaj nastane, če enemu izmed teh teles dodajamo druga telesa.

Telesa, iz katerih sestavljamo pravilni četverec, bomo označili s T4. Najdaljši rob telesa T4 naj bo $3x$. V omenjenem članku smo videli, da lahko iz štirih skladnih teles T4 sestavimo pravilni četverec z osnovnim robom $4x$. Od tod lahko hitro izračunamo prostornino V_t telesa T4:

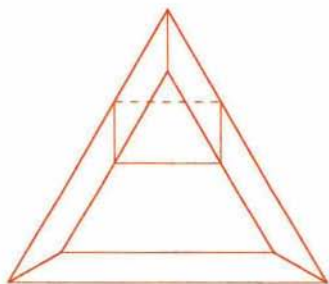
$$V_t = \frac{4x^3\sqrt{2}}{3}.$$

Telo T4 dopolnimo do prisekane piramide

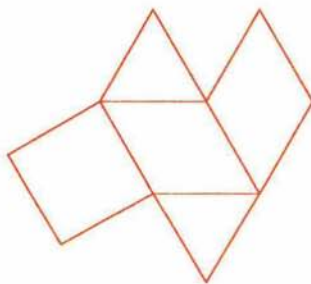
Poglejmo na telo T4 še drugače. Iz sestavljenega pravilnega četverca z robom $4x$ vidimo, da so stranski robovi telesa T4 vzporedni z robovi pravilnega četverca, torej lahko vzamemo, da je na vogalu telesa T4 pravilni četverec z robom x . Višina v_1 telesa T4 je enaka višini pravilnega četverca z robom x :

$$v_1 = \frac{x\sqrt{6}}{3}.$$

Če dodamo telesu T4 poševno prizmo, ki ima za osnovno ploskev enakostranični trikotnik, dobimo prisekano piramido, ki ima za osnovni ploskvi enakostranična trikotnika s stranicama $3x$ in $2x$ ter višino v_1 (slika 1).



Slika 1a. Telesu T4 dodamo prizmo in dobimo prisekano pravilno tristrano piramido.



Slika 1b. Mreža dodane poševne prizme. Sestavljajo jo: dva romba, kvadrat in dva enakostranična trikotnika. Vsi liki imajo vse robove enake x . Višina prizme je v_1 .

Prostornina priskekane piramide je

$$V = \frac{19x^3\sqrt{2}}{12},$$

prostornina dodane prizme $V_d = \frac{x^3\sqrt{2}}{4}$, njuna razlika je enaka prostornini telesa T4: $V_t = V - V_d = \frac{4x^3\sqrt{2}}{3}$.

Telo T4 dopolnimo do pravičnega četrverca

Dopolnimo telo T4 do pravičnega četrverca z robom $3x$. Najprej dodajmo telo T21 (slika 2) s prostornino V_{21} na manjšo osnovno ploskev, nato pa še ob strani telo T22 (slika 3) s prostornino V_{22} .

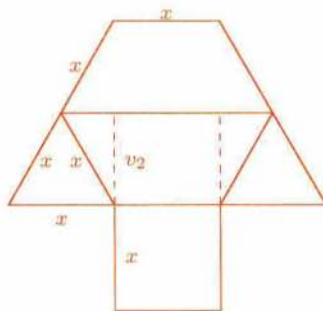
Telo T21 je sestavljeno iz treh delov: pokončne tristrane prizme in dveh polovic pravičnega četrverca z robom x . Osnovna ploskev prizme je enakokraki trikotnik z osnovnico x in krakoma, ki sta višini (v_2) enakostraničnega trikotnika z osnovnico x . Višina prizme je x . Višina v_3 osnovne ploskve prizme je $v_3 = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ in od tod $V_{21} = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$.

Telo T22 pa dobimo, če prizmi iz telesa T21 podaljšamo višino na $2x$. Torej je $V_{22} = \frac{7x^3\sqrt{2}}{12}$.

Vsota prostornin

$$\begin{aligned} V_t + V_{21} + V_{22} &= \\ &= \frac{4x^3\sqrt{2}}{3} + \frac{x^3\sqrt{2}}{3} + \frac{x^3\sqrt{2}}{3} = \frac{9x^3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

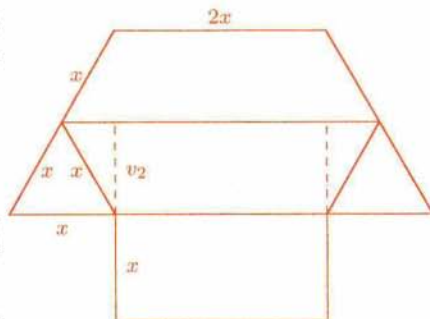
je seveda prostornina pravičnega četrverca z robom $3x$.



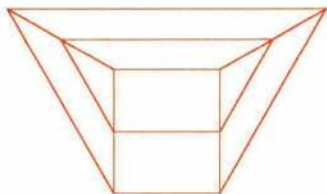
Slika 2a. Mreža telesa T21.



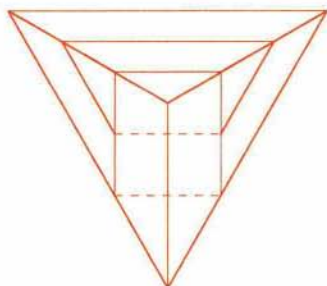
Slika 2b. Tloris telesa T21.



Slika 3. Mreža telesa T22.



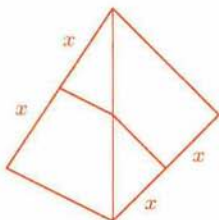
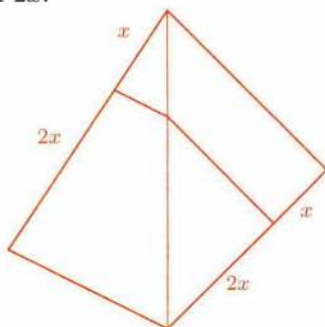
Slika 4a. Telesu T4 dodamo telo T21.



Slika 4b. Dodamo še telo T22.

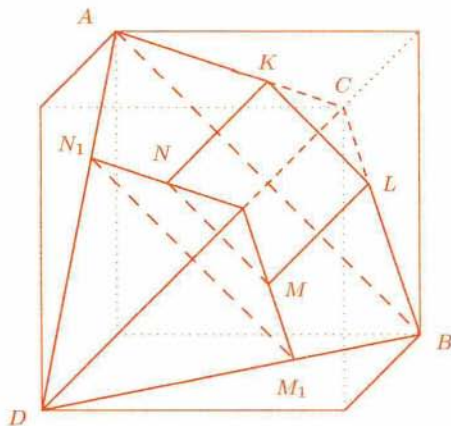
Rezanje pravilnega četrverca

Do teles T21 in T22 pridemo z rezanjem pravilnega četrverca z robom $2x$ oz. $3x$ (slika 5). Dva robova pravilnega četrverca, ki sta mimobežna in drug na drugega pravokotna, sta vzporedna s presečno ravnino. Presek ravnine in pravilnega četrverca je v prvem primeru kvadrat s stranico x , v drugem pa pravokotnik s stranicama x in $2x$.

Slika 5a. Telo T21 je polovica pravilnega četrverca z robom $2x$. Pravilni četrvec razpade na dve skladni telesi.Slika 5b. Telo T22 dobimo z rezanjem pravilnega četrverca z robom $3x$.

Še nekaj lastnosti telesa T4

Izračunajmo še kote med ploskvami telesa T4. Najprej se dogovorimo za oznake. Osnovni ploskvi naj bosta enakokraka trapeza $ABLK$ in N_1M_1MN , stranske ploskve pa kvadrat $KLMN$ in trapezi $AKNN_1$, LBM_1M in ABM_1N_1 (slika 6). Dopolnimo telo T4 še s četrcem z robom $2x$. Dobimo četrvec z robom $3x$, ki mu manjka poševna tristrana enakoroba prizma z robom $3x$. Četrvec vložimo v kocko tako, kot kaže slika, in postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče kocke, ozi pa vzporedno z robovi kocke.



Slika 6.

Zdaj lahko hitro izračunamo kote med ploskvami. Ploskev $AKNN_1$ leži na ploskvi ACD z normalo $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$, ploskev ABM_1N_1 pa na ploskvi ABD z normalo $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$. Torej je

$$\cos \delta_1 = \frac{1 - 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad \delta_1 = 70,52^\circ$$

kot med sosednjima ploskvama pravilnega četrca.

Ploskev $AKLB$ leži na ploskvi ABC z normalo $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Ploskev $KLMN$ je ena od stranskih ploskev poševne prizme, zato je rob KN vzporeden z robom CD . Ploskev $KLMN$ ima normalni vektor $\vec{n}_3 = (1, 0, 0)$. Izračunajmo naklonski kot te ploskve proti osnovni ploskvi $AKLB$:

$$\cos \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \delta_2 = 54,74^\circ.$$

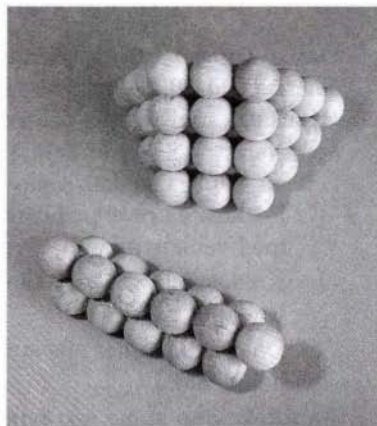
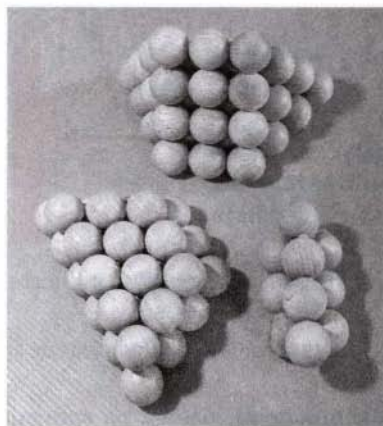
Kot med ravninama $AKNN_1$ in $KLMN$ je top, zato je

$$\cos \delta_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \delta_3 = 125,26^\circ.$$

Iz slike in računa lahko razberemo, da je v našem primeru kvadrat $KLMN$ vzporeden s tisto ploskvijo kocke, na kateri leži rob AB .

Pravilni "čtetverec" sestavljen iz krogel

Tudi "četverce" iz krogel lahko sestavljamo tako, kot smo dopolnjevali telesa $T4$ (fotografije).



Nada Razpet

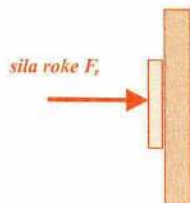
KRIŽANKA "PRESTIŽNA NAGRADA" –
Rešitev s str. 224

[illegible]

21. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Naloge za 7. razred

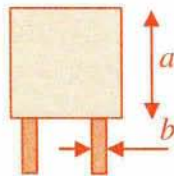
1. Desko z maso 1,0 kg tiščimo z roko v vodoravni smeri s silo 20 N, kot kaže slika, ki je narisana v stranskem risu. Deska miruje.



- Nariši vse sile, ki delujejo na desko. Pri vsaki sili napiši oznako za silo in z besedo še ime sile. Poskusi na risbi približno zadeti tudi razmerja med velikostmi sil.
- Kolikšna je velikost sile stene na desko? Pomagaj si z načrtovanjem.
- Določi tudi smer sile stene tako, da zapišeš kot med silo stene in navpičnico.

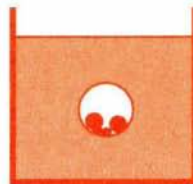
Napotek: Silo stene sestavljata dve komponenti, naloga pa sprašuje po velikosti in smeri celotne sile stene.

2. Pri študiju tlaka, ki ga prenašajo noge zaradi teže telesa, si pomagamo z modelom, kot kaže slika. Vsa masa telesa je zbrana v kocki z robom a , spodnji del nog pa predstavljata dva lahka kvadra, vodoravni presek posameznega kvadra (noge) naj bo kvadrat s stranico b . Pri vseh primerih upoštevaj, da je gostota žive snovi približno 1 kg/dm^3 . Pri izbranem človeku z maso 64 kg bi bili stranici $a = 40 \text{ cm}$ in $b = 10 \text{ cm}$.



- Kolikšen tlak prenašajo noge pri izbranem človeku?
- Izbranega človeka dvakrat povečajmo – vse stranice so sedaj dvakrat večje. Kolikšen tlak pa prenašajo noge v tem primeru?
- Ker kosti in vezi v nogah pri živih bitjih prenašajo približno enak tlak, imajo večja bitja nesorazmerno z velikostjo, bolj debele noge in manjša, nesorazmerno z velikostjo, tanjše noge. Ko računamo potrebno debelino noge pri velikih in malih živih bitjih, je stranica a določena z velikostjo, b pa izračunamo tako, da je tlak v nogah enak tlaku pri izbranem človeku (rezultat pri a). Izračunaj debelino noge (stranico b) pri, glede na izbranega človeka, 1000-krat lažji (10-krat manjši) živalici, recimo, ptičku.

3. V votlo stekleno kroglico smo dali ravno toliko uteži, da lebdi v alkoholu, kot kaže slika. Kroglica je zataljena, da alkohol ne more vanjo, temperatura alkohola pa je 20°C . V tabelah preberemo podatek, da se alkoholu prostornina poveča, če ga segrejemo.



- Kako se spremeni gostota alkohola, če ga segrejemo?
- Kako se spremenita teža kroglice in sila vzgona na kroglico, če alkohol segrejemo? Raztezanje stekla je zanemarljivo majhno.
- Kaj se dogaja s kroglico, če alkohol segrevamo? Razloži, zakaj.
- Kaj pa se zgodi s kroglico, če alkohol ohladimo? Razloži.

Eksperimentalni nalogi

4. Izmerite, kako se spreminja hitrost iztekanja vode v iz cevke plastenke v odvisnosti od višine vode h nad cevko. Pri merjenju hitrosti si pomagamo z dometom curka D . Večja, ko je hitrost, večji je domet curka D , zvezo med dometom in hitrostjo pa razberemo iz diagrama $v = v(D)$. Izmeri tudi, kako se hitrost iztekanja spreminja v odvisnosti od časa.

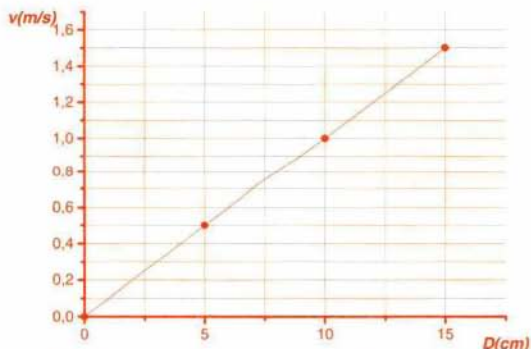
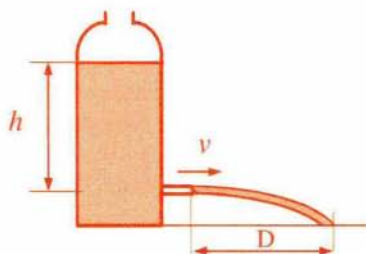


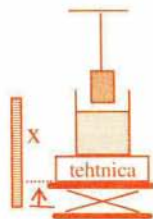
Diagram hitrosti v v odvisnosti od dometa curka D .

- a) Pri petih različnih višinah h izmerite domet curka D .
- b) Sestavite tabelo, ki kaže odvisnost hitrosti iztekanja vode v v odvisnosti od višine h , in na milimetrski papir narišite diagram $v = v(h)$, ki prikazuje, kako se hitrost iztekanja vode v spreminja v odvisnosti od višine h . Točke povežite s krivo črto (krivuljo). Nato izlijte vodo iz pladnja v barvni pladenj, ponovno natočite vodo v plastenko in pričnite meriti, kako se hitrost curka v spreminja v odvisnosti od časa t .
- c) Na milimetrski papir narišite še diagram $v = v(t)$, ki prikazuje, kako se hitrost iztekanja vode v spreminja v odvisnosti od časa t . Hitrost izmerite vsaj pri petih različnih časih. Točke povežite s krivo črto (krivuljo). Merite od trenutka, ko je višina $h = 20$ cm, pa do takrat, ko voda preneha iztekati.

Če vama kaka meritev ne uspe, pokličita demonstratorja, da prinese drugo plastenko vode.

Pribor: pladenj, plastenka s cevko, plastenka z vodo, ravnilo, stoparica, milimetrski papir.

5. Na dvizni mizici je tehtnica, na njej pa posoda z vodo. Nad posodo visi klada, kot kaže slika. Mizico dvigujemo v korakih po 1 cm od 0 cm do višine 17 cm na merilu, hkrati pa zapisujemo maso m , ki jo kaže tehtnica. Nato klado zamenjamo z drugo klado in poskus ponovimo.

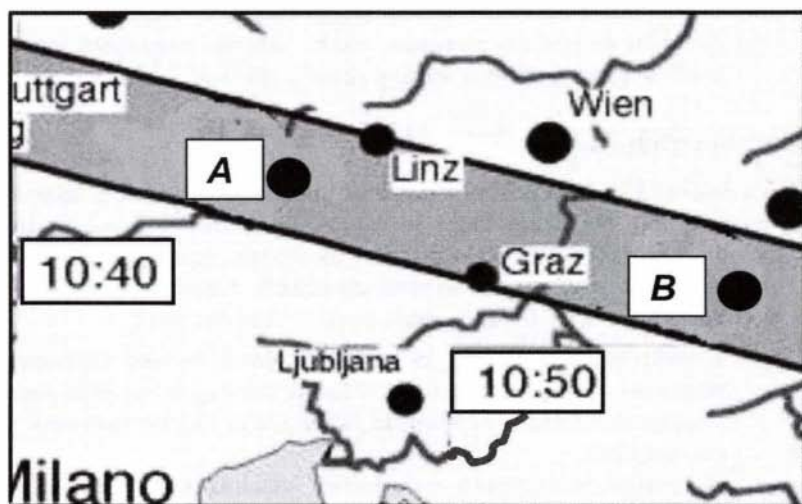


- a) Na skupen diagram nariši, kako se spreminja izmerjena masa v odvisnosti od višine $m = m(x)$ za obe kladi, pri čemer je x višina mizice. Na diagramu naj ima koordinatna os za maso izhodišče pri $m = 700$ g.
- b) Z diagrama odčitaj masi klad A in B. Na diagramu označi oba odčitka, da bo vidno, kako si prišel do rezultata.
- c) Kolikšna je sila vzgona za klado B pri $x = 17$ cm? Opiši, kako si prišel do rezultata.

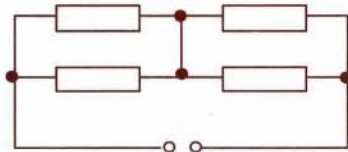
Če se tehtnica samodejno izklopi, dvigni posodo z vodo, tehtnico vklopi in počakaj, da pokaže 0, nato postavi posodo z vodo nazaj in nadaljuj z meritvijo.

Naloge za 8. razred

1. Dne 11. 8. 1999 je bil tudi v majhnem delu Slovenije viden popolni sončni mrk. Na zemljevidu je narisana pas, v katerem je bil viden popolni mrk tudi v sosednjih državah. Napisana sta tudi časa začetka popolnega sončnega mrka v krajih A in B.



- Na priloženo sliko približno nariši obliko popolne sence, ki je padala na Zemljo v trenutku, ko se je začel popolni mrk v Sloveniji.
 - Približno ob katerem času se je začel popolni mrk v najsevernejšem delu Slovenije?
 - Približno koliko časa je trajal popolni mrk v kraju A, ki je na sredini pasu?
 - Zelo grobo oceni, koliko časa je trajal popolni mrk v Sloveniji.
 - Približno s kolikšno hitrostjo je potovala po Zemlji Lunina senca? Zemljevid je narisana v merilu 1 : 7 000 000.
2. Žogico smo spustili, nakar se je večkrat odbila od tal. Merili smo čase od takrat, ko smo jo spustili, do posameznega odboja od tal in dobili: 1,00 s, 2,60 s, 3,88 s, ... Zračni upor in čas posameznega odboja smemo zanemariti, težni pospešek lahko zaokrožiš na 10 m/s^2 .
- S kolikšne višine smo spustili žogico?
 - Nariši diagram $v = v(t)$ do časa 2,6 s.
 - Kolikšno je razmerje kinetičnih energij tik pred odbojem in takoj po njem za prvi in za drugi odboj?
3. S štirimi uporniki ($R_1 = 4,0\Omega$, $R_2 = 6,0\Omega$, $R_3 = 12\Omega$, $R_4 = 12\Omega$) in baterijo z napetostjo 9,0 V sestavimo vezje, kot kaže slika. Upornike razporejamo na označena mesta na različne načine.



- a) Koliko različnih tokov lahko poganja baterija? Odgovor utemelji.
- b) Kako bi razporedil upornike, da bi baterija poganjala največji tok? Vezje preriši in upornike označi, tok tudi izračunaj.

Eksperimentalni nalogi

4. Na delovni klopi sta postavljena prosojni zaslon in stojalo z laserskim kazalnikom. Na drugi klopi je vzporedno z zaslonom postavljeno zrcalo. Laserski kazalnik je pritrjen na stojalu in zaradi varnostnih razlogov zaslona in stojala ne smeš premikati. Kazalnik lahko le vrtiš v vodoravni ravnini tako, da sveti proti zrcalu oz. steni.
 - a) Z metrom in laserskim kazalnikom izmeri dolžino (vodoravno stranico) oddaljenega zrcala. Poskus skiciraj in na sliki označi izmerjene količine. Iz skice in komentarja naj bo razvidna pot do rezultata.
 - b) Z metrom, kotomerom in laserskim kazalnikom izmeri pravokotno razdaljo od zrcala do zaslona. Pomagaj si z načrtovanjem.

Opozorili: Nerazpršena laserska svetloba lahko poškoduje oko, zato je prepovedano gibanje v prostoru med zrcalom in zaslonom. Prepovedano je tudi svetiti na zrcalo sosednje ekipe. Skozi zaslon prepuščena svetloba ni nevarna.

Pribor: oddaljeno zrcalo, laserski kazalnik pritrjen na stojalu, zaslon, meter, kotomer.

5. Pred sabo imate model električne peči s tremi enakimi grelniki. Model peči boste vsakokrat priključili na napetost 6 V. Grelnike povežite na različne načine, da boste dobili čimveč različnih skupnih moči električne peči, in vsakokrat vezje priključite na napetost 6,0 V. Pri vsakem načinu morajo greti vsi trije grelniki.
 - a) Na priloženi list narišite vse možne vezave, pri katerih dobite različne skupne moči peči. V vsako vezje vrišite tudi ampermeter, s katerim boste merili celotni tok skozi peč.
 - b) Pod vsako vezavo napišite izmerjeno moč.
 - c) Izmerite upor posameznega grelnika in za primer, ko sta dva grelnika vezana vzporedno, tretji pa k njima zaporedno, tudi teoretično izračunajte moč peči.

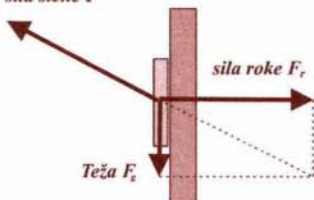
Pribor: napetostni izvir z vgrajenim voltmetrom, ampermeter, model peči s tremi uporniki, vezne žice.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – s str. 238

7. razred

1. a) *sila stene F*



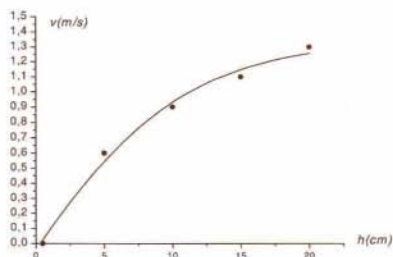
b) in c) Če smo sile risali v merilu 1 cm : 10 N, izmerimo dolžino sile stene, ki je 2,2 cm, torej je sila stene 22 N.

Smer sile stene je pod kotom $\approx 65^\circ$ glede na navpičnico.

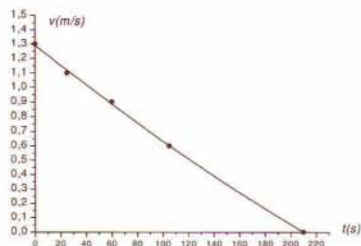
2. a) $p_1 = F_{g1} / (2 \cdot S_1) = 640 \text{ N} / (2 \cdot 1 \text{ dm}^2) = 320 \text{ N/dm}^2$.
- b) Prostornina se poveča 2^3 -krat, t.j. 8-krat, tudi masa in s tem teža se tolikokrat povečata. Presek nog se je povečal 2^2 -krat, t.j. 4-krat, kar pomeni, da je tlak $p_2 = 8 \cdot F_{g1} / (4 \cdot 2 \cdot S_1) = 2p_1 = 640 \text{ N/dm}^2$.
- c) Teža je v tem primeru 1000-krat manjša, $F_{g4} = 0,64 \text{ N}$. Ker prenašajo noge tlak 320 N/dm^2 , je presek ene noge $S = F_{g4} / 2p_1 = 0,64 \text{ N} / (2 \cdot 320 \text{ N/dm}^2) = 0,0010 \text{ dm}^2$. Sledi debelina noge $b = 0,032 \text{ dm}$.
3. a) Če alkohol segrejemo, se mu prostornina poveča, masa se ne spremeni, tako da se gostota alkohola zmanjša.
- b) Če alkohol segrejemo, se gostota zmanjša, zato se zmanjšata tudi specifična teža in sila vzgona. Teža se ne spremeni, zato se začne kroglica gibati navzdol.
- c) Pred segrevanjem sta bili teža in sila vzgona uravnovešeni. Ko alkohol segrejemo, se sila vzgona zmanjša, rezultanta kaže navzdol in kroglica se začne gibati navzdol.
- d) Če alkohol ohladimo, se specifična teža in zato tudi sila vzgona povečata; kroglica se začne gibati navzgor.
4. a)

višina h [cm]	20	15	10	5	0,5
domet D [cm]	13	11	9	6	0

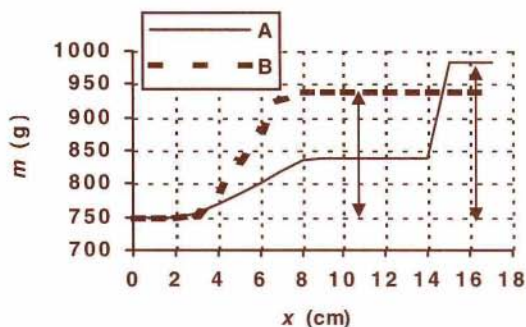
b)



c)



5. a) Diagram za obe kladi kaže slika.



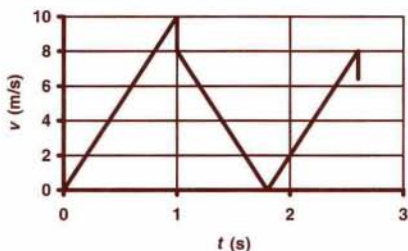
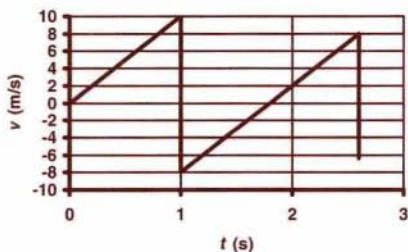
- b) Na diagramu sta označena odčitka: $m_A = 230$ g in $m_B = 190$ g.
 c) Ker klada B plava, je sila vzgona po velikosti enaka teži klade, to je 1,9 N.

8. razred

1. a) Popolna senca je približno krog z enakim premerom, kot je širina pasu. Krog se spodaj desno dotika najsevernejše točke Slovenije.
- b) $\Delta t = 10 \text{ min} \cdot (4 \text{ cm}/6,3 \text{ cm}) \approx 6 \text{ min}$, $t \approx 10:46$
- c) Pas na sliki je širok 1,6 cm, kar pomeni, da je bil premer kroga s popolnim sončnim mrkom 110 km. Od kraja A do kraja B je 6,3 cm, kar je v resnici 440 km. To razdaljo je senca prepotovala v 10 minutah, 110 km pa v času $t = 10 \text{ min} \cdot (110 \text{ km}/440 \text{ km}) \approx 2,5 \text{ min}$.
- d) V najsevernejšem delu Slovenije je popolni mrk trajal nekaj deset sekund.
- e) $v = 440 \text{ km}/10 \text{ min} \approx 2600 \text{ km/h}$.

2. a) Žogica pada 1,0 s, začetna višina $h = gt^2/2 = 5,0$ m.

- b) Hitrost pred prvim odbojem $v_1 = gt = 10$ m/s. Čas med prvim in drugim odbojem je 2,60 s – 1,00 s = 1,60 s. Ta čas porabi žogica za dviganje in padanje, za samo padanje torej 0,8 s. Velikost hitrosti po prvem odboju in tik pred drugim odbojem je $v_2 = gt_2 = 8,0$ m/s. Po enakem sklepanju izračunamo še velikost začetne oz. končne hitrosti za tretji interval, $v_3 = gt_3 = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,64 \text{ s} = 6,4$ m/s. Hitrosti se seveda po predznaku razlikujeta. Pravilen rezultat je lahko tudi drugi diagram, kjer je prikazana velikost hitrosti.

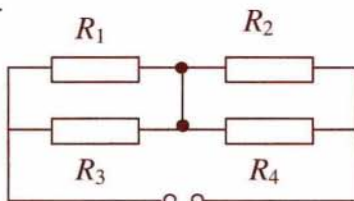


- c) $W_{k1}/W_{k2} = mv_1^2/mv_2^2 = 10^2/8,0^2 = 1,56$, $W_{k2}/W_{k3} = mv_2^2/mv_3^2 = 8,0^2/6,4^2 = 1,56$; razmerji sta enaki.

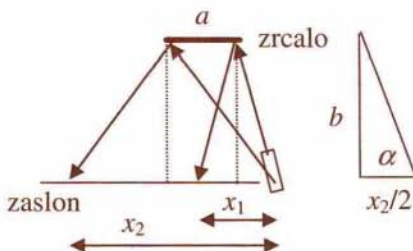
3. a) Tok, ki ga poganja baterija, izračunamo z enačbo $I = U/(R_a R_b/(R_a + R_b) + R_c R_d/(R_c + R_d))$, pri čemer sta R_a in R_b leva upornika, R_c in R_d pa desna. Na mesta $\{a, b\} + \{c, d\}$ postavljamo vrednosti upornikov $\{4\Omega, 6\Omega, 12\Omega, 12\Omega\}$. Zaradi komutativnosti ni pomemben ne vrstni red upornikov znotraj dvojic in tudi ne vrstni red dvojic. Dobimo samo dva različna tokova pri, recimo, naslednjih dveh razporeditvah: $\{4\Omega, 6\Omega\} + \{12\Omega, 12\Omega\}$ in $\{4\Omega, 12\Omega\} + \{6\Omega, 12\Omega\}$.

- b) Za prvo razporeditev je tok $I_1 = 9,0 \text{ V}/(4,0\Omega \cdot 6,0\Omega/(4,0\Omega + 6,0\Omega) + 12\Omega \cdot 12\Omega/(12\Omega + 12\Omega)) = 9,0 \text{ V}/8,4\Omega = 1,07 \text{ A}$, za drugo pa $I_2 = 9,0 \text{ V}/(4,0\Omega \cdot 12\Omega/(4,0\Omega + 12\Omega) + 6,0\Omega \cdot 12\Omega/(6,0\Omega + 12\Omega)) = 9,0 \text{ V}/7,0\Omega = 1,29 \text{ A}$.

Baterija poganja največji tok $I = 1,29 \text{ A}$. Pravilne oznake upornikov so vse tiste, pri katerih R_3 in R_4 nista povezana vzporedno. Slika kaže eno od možnih razporeditev.

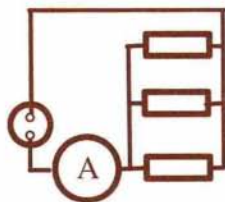


4. a) Izmeriti je potrebno razdalji od laserskega kazalnika do svetle pike po odboju na desnem robu zrcala ($x_1 = 39$ cm) in po odboju na levem robu zrcala ($x_2 = 69$ cm). Ker sta trikotnika enakokraka, je dolžina zrcala $a = x_2/2 - x_1/2 = 15$ cm.

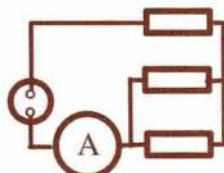


Možna je tudi skica z navidezno sliko laserskega kazalnika.

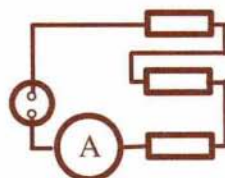
- b) S kotomerom izmerimo kot med kazalnikom in zaslonom, $\alpha = 78^\circ$, za odboj od levega roba zrcala. Pri odboju od desnega roba je napaka pri merjenju kota in s tem razdalje b večja. Trikotnik narišemo v merilu in izmerimo stranico $b = 1,6$ m. Zaradi nenatančnosti pri merjenju kota so možna odstopanja do $\pm 0,2$ m.
5. a) in b)



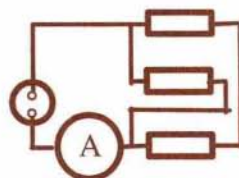
$$P = 0,24 \text{ W}$$



$$P = 0,051 \text{ W}$$



$$P = 0,026 \text{ W}$$



$$P = 0,115 \text{ W}$$

- c) Upor posameznega grelnika je $R = U/I = 6 \text{ V}/13 \text{ mA} = 460\Omega$. Upor vezja, ko sta dva upornika vezana vzporedno, tretji pa k njima zaporedno, je $R = 230\Omega + 460\Omega = 690\Omega$. Moč v tem primeru je $P = UI = U^2/R = 0,052 \text{ W}$, kar se približno ujema z izmerjeno vrednostjo v drugem primeru.

Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 2000/2001 – s str. 188

Objavljamo rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 24. marca 2001. Besedila nalog smo objavili v letošnji tretji številki Preseka.

Skupina I

1. Podatki: $v_0 = 25 \text{ km/h}$, $r = 30 \text{ cm}$.
 - a) Kotna hitrost prvega kolesa je $\omega = v_0/r$. Najdlje letijo kapljice, ki zapuščajo kolo v vodoravni smeri. Glede na kolesarja je njihova hitrost enaka obodni hitrosti kolesa, torej $v = \omega r = v_0$. Da padejo na tla, potrebujejo kapljice čas $t = \sqrt{4r/g}$ in v tem času napravijo pot $s = v_0 t = v_0 \sqrt{4r/g} = 2,4 \text{ m}$ glede na kolesarja.
 - b) V tem primeru je hitrost kapljic večja za hitrost kolesa, $v = 2v_0$, in kapljice naredijo dvakrat daljšo pot, torej $4,9 \text{ m}$.
2. Podatki: $\rho_l = 700 \text{ kg/m}^3$, $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$.
Z l označimo dolžino plošče, S naj bo površina prečnega preseka. V ravnovesju je navor teže plošče uravnotežen z navorom vzgona. Dolžino potopljenega dela plošče označimo z x , kot, ki ga tvori plošča z navpičnico, pa s φ . Če postavimo os skozi stičišči, velja

$$\frac{1}{2} l \rho_l S l \sin \varphi = (l - \frac{1}{2} x) \rho_v S x \sin \varphi.$$

Dobimo kvadratno enačbo $x^2 - 2lx + \eta l^2 = 0$ s smiselno rešitvijo

$$x = l(1 - \sqrt{1 - \eta}) = 0,45 l,$$

kjer je $\eta = \rho_l/\rho_v$. V prvem primeru je dolžina dela plošče, ki gleda iz vode, $s = l - x = 0,55l$, večja od višine dela stebra, ki gleda iz vode. Rešitev je smiselna. V drugem primeru pogoj ni izpolnjen, kar pomeni, da je plošča postavljena navpično.

3. Podatki: $P_0 = 60 \text{ kW}$, $P = 100 \text{ kW}$, $m = 600 \text{ kg}$, $v = 175 \text{ km/h}$.
Pri vodoravnem letu letalo premaguje le upor in velja $P_0 = F_u v$. Pri poševnem letu mora premagovati še dinamično komponento teže letala $P = (F_u + mg \sin \varphi) v = P_0 + mg \sin \varphi v$, od koder dobimo za največji kot vzpenjanja $\sin \varphi = (P - P_0)/mgv$, $\varphi = 8,0^\circ$.

4. Podatki: $r = 2 \text{ km}$, $g_T = g_Z/1000$.

Teža v točki T je enaka

$$mg_T = \frac{\kappa m M}{2r^2} + \frac{\kappa m M}{2(3r)^2} = \frac{5\kappa m M}{9r^2}, \quad \kappa M = \frac{9g_T r^2}{5},$$

če smo z m označili maso vozila, z M pa maso asteroida. K sili na sondo prispevata komponenti privlačnih sil iz središč G_1 in G_2 v simetrijski ravnini asteroida:

$$F = 2 \frac{F_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \frac{\kappa m M}{2(\sqrt{2}r)^2} = \frac{9mg_T}{10\sqrt{2}}.$$

Iz Newtonovega zakona za kroženje $mv^2/r = F$ dobimo za mejno hitrost

$$v \leq \sqrt{\frac{9g_T r}{10\sqrt{2}}} = 3,5 \text{ m/s}.$$

Skupina II

1. Podatki: $R = 10 \Omega$, $U = 10 \text{ V}$.

a) Skozi žarnice tečejo enaki tokovi, ki jih poganjajo po dva zaporedno vezani akumulatorji. Tok je enak $I = 2U/R$ in skupna moč $P = 4I^2 R = 16U^2/R = 160 \text{ W}$.

b) Skozi žarnico med A in B ter žarnico med B in C ne teče tok, drugi dve žarnici pa sta na enakih napetostih kot v primeru a). Skupna moč je polovica tiste pri a), torej $P = 8U^2/R = 80 \text{ W}$.

2. Podatki: $U = 1 \text{ GV}$, $N/t = 6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$, $\Delta T = 2^\circ\text{C}$.

Tok elektronov predstavlja električni tok $I = (N/t)e_0 = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ A}$; energijski tok (moč), ki ga je potrebno absorbirati v vodi, je $P = UI = 9,6 \cdot 10^6 \text{ W}$. Velja

$$P = \frac{\Delta mc_p \Delta T}{\Delta t} = \Phi_V \rho c_p \Delta T,$$

$$\Phi_V = \frac{P}{\rho c_p \Delta T} = \frac{N}{t} \cdot \frac{e_0 U}{\rho c_p \Delta T} = 1,1 \text{ m}^3/\text{s},$$

pri čemer smo z ρ označili gostoto vode in s c_p specifično toploto vode.

3. Podatki: $V_0 = 1,5 \text{ l}$, $T_0 = 77 \text{ K}$, $p_0 = 1 \text{ bar}$, $\Delta p = 2 \text{ bar}$, $T_z = 293 \text{ K}$, $S = 100 \text{ cm}^2$, $d = 1,0 \text{ mm}$, $\lambda = 0,010 \text{ W/mK}$, $q_i = 0,20 \text{ MJ/kg}$, $M = 28 \text{ kg}$.

Delni tlak zraka v posodi je ves čas enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0 , saj se temperatura in volumen ne spreminjata. Tik preden raznese plastenko, je vsota delnih tlakov dušika in zraka enaka celotnemu tlaku $p_0 + \Delta p$, torej je tlak dušika enak Δp . Iz splošne plinske enačbe za dušik dobimo maso izparelega dušika

$$\frac{m}{M} RT_0 = \Delta p V_0, \quad m = \frac{\Delta p V_0 M}{RT_0} = 13 \text{ g}.$$

Toploto mq_i , potrebno za izparevanje, prinese toplotni tok skozi steno posode:

$$mq_i = \lambda S \frac{T_1 - T_0}{d} t, \\ t = \frac{mq_i d}{\lambda S (T_1 - T_0)} = \frac{q_i \Delta p V_0 M d}{\lambda S (T_1 - T_0) RT_0} = 120 \text{ s} = 2 \text{ min}.$$

4. Podatki: $e/l = +1 \cdot 10^{-6} \text{ As/m}$, $r = 0,5 \text{ m}$, $v = 1 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, $e' = +1 \cdot 10^{-6} \text{ As}$.

- a) Glede na sondo se naboji gibljejo s hitrostjo $-v$ (v nasprotni smeri). V času Δt gre mimo sonde del naboja $\Delta e = (e/l)v\Delta t$, kar ustreza toku $I = \Delta e/\Delta t = ev/l$. Magnetno polje v oddaljenosti r od žice dobimo iz izraza za polje ravnega vodnika

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 ev}{2\pi r l} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

- b) Ker se opazovalec giblje s polovično hitrostjo, je zanj tok v žici dvakrat manjši, zato je gostota magnetnega polja na mestu sonde $B' = 2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$. Sila je odbojna, ker sonda in nabita žica predstavljata vzporedni žici, po katerih tečeta tokova v nasprotni smeri. Velikost sile je $F = e' \frac{1}{2} v B' = 1 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.

Skupina III

1. Nihajni čas je enak za oba načina nihanja. Vztrajnostni moment vodoravne palice je enak kar vztrajnostnemu momentu točkastega telesa, saj imajo vse točke na palici enako ročico.

Vztrajnostni moment nihala je zato vsota vztrajnostnih momentov dveh palic za os skozi krajišče in vztrajnostnega momenta točkastega telesa na oddaljenosti $\frac{1}{2}l$ od osi:

$$J = 2 \frac{ml^2}{3} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{11}{12} ml^2.$$

Teža vseh treh palic prijemlje na razdalji $\frac{1}{2}l$ od osi. Če sistem odmaknemo za majhen kot φ iz ravnovesne lege, lahko zapišemo navor kot

$$M = 3mg \frac{1}{2}l \sin \varphi \approx \frac{3}{2} mgl\varphi \equiv D\varphi.$$

Od tod sledi za nihajni čas nihala

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{11l}{18g}}.$$

Nalogo je možno rešiti tudi z ohranitvijo mehanske energije.

2. Podatki: $R = 1,5 \cdot 10^8$ km, $j_0 = 1,3$ kW/m², $\Delta T = 1$ K.

Iz ravnovesja vpadlega in izsevanega toka, $\pi r^2 j_0 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4$, dobimo povprečno temperaturo površja Zemlje $T_0 = (j_0/4\sigma)^{1/4} = 275$ K. Povečanje temperature ozračja kompenziramo z nižjo ravnovesno temperaturo, $T_0 - \Delta T$. Gostota toka pojema s kvadratom razdalje: $j(R + \Delta R) = j_0 R^2 / (R + \Delta R)^2$. Ravnovesno temperaturo pri $R + \Delta R$ dobimo kot zgoraj: $(T_0 - \Delta T)^4 = j(R + \Delta R)/4\sigma$ oz. $(T_0 - \Delta T)^4 = T_0^4 R^2 / (R + \Delta R)^2$. Sledi

$$(R + \Delta R) = R \frac{T_0^2}{(T_0 - \Delta T)^2} = R \frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2} \approx R \left(1 + \frac{2\Delta T}{T_0}\right)$$

in

$$\Delta R = 2R \frac{\Delta T}{T_0} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

3. Glej rešitev naloge II/3.

4. Podatki: $d = 2 \text{ cm}$, $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$, $r = 1 \text{ mm}$, $j_0 = 1 \cdot 10^{14} \text{ W/m}^2$.

V curku izberimo dva žarka, ki se srečata v gorišču, na razdalji f od steklene plošče; prvega na sredi curka ($y = 0$), ki naj potuje po premici (optični osi), in drugega, ki je pred vstopom v ploščo oddaljen za poljuben y , $0 < y < r$, od sredine curka. Drugi potuje skozi steklo (praktično) vzporedno s prvim, po izstopu pa se lomi k optični osi tako, da seka prvi žarek ravno v gorišču. Merjeno od trenutka, ko žarka vstopita v steklo, porabi prvi žarek čas $t_1 = d/c(0) + f/c_0$, da doseže gorišče, drugi pa $t_2 = d/c(y) + \sqrt{f^2 + y^2}/c_0$. S $c(y)$ smo označili hitrost svetlobe v snovi na razdalji y od središča curka, $c(y) = c_0/n(y)$. Časa izenačimo in dobimo

$$d(n(0) - n(y)) = \sqrt{f^2 + y^2} - f, \quad \text{ali} \quad d\gamma j_0 \frac{y^2}{r^2} = \sqrt{f^2 + y^2} - f.$$

Preuredimo in kvadriramo

$$f^2 + 2fd\gamma j_0 \frac{y^2}{r^2} + \left[d\gamma j_0 \frac{y^2}{r^2} \right]^2 = f^2 + y^2.$$

Izraz v oglatem oklepaju je zelo majhen in ga lahko zanemarimo. Iz zgornje zveze izluščimo f :

$$f = \frac{r^2}{2d\gamma j_0} = 7,8 \text{ m}.$$

Vidimo tudi, da je izraz neodvisen od razdalje y , kar pomeni, da se poljubno izbrani žarki v curku zbereje v isti točki – gorišču.

Bojan Golli

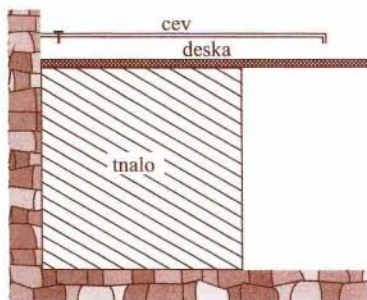
NALOGE Z DRŽAVNEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 2000/2001

Naloge je 21. aprila 2001 v Šolskem centru Celje reševalo 130 tekmovalcev, ki so se na tekmovanje uvrstili z regijskih tekmovanj.

Skupina I

1. Na tnalno kockaste oblike z robom 22 cm, ki je prislonjeno ob navpični zid, vodoravno položimo desko z dolžino 36 cm in maso 2 kg. Deska se z enim krajiščem skoraj dotika zidu.

Iz zidu izhaja vodovodna cev (glej sliko). Središče končnega dela cevi s presekom $2,0 \text{ cm}^2$, iz katerega priteka ob odprti pipi navpično navzdol curek vode, je od zidu oddaljeno 30 cm. Ko curek vode zadeva desko, odteka voda v vodoravni smeri z deske. Kolikšna je lahko največ hitrost vode, ki zadeva desko, da ostane le-ta v vodoravnem položaju?

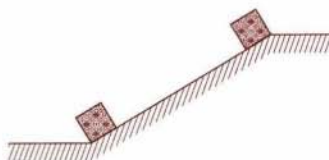


Gostota vode je 1000 kg/m^3 , za težni pospešek vzemi $9,8 \text{ m/s}^2$.

2. Dva enako visoka igralca odbojke z masama po 50 kg stojita na vagonu z maso 40 kg v medsebojni razdalji 5 m. Levi igralec prvi s prsti udari žogo z maso 1 kg. Žoga poleti pod kotom 30° glede na vodoravnico, merjeno za opazovalca, ki miruje glede na vagon. Ko prileti žoga do drugega igralca, jo ta s prsti odbije nazaj. Žogo si na tak način podajata v nedogled. Igralca sta tako dobra, da opazovalec na peronu vidi gibanje žoge po stalni trajektoriji. (Za težni pospešek vzemi $9,8 \text{ m/s}^2$.)
 - a) Za koliko se za opazovalca na peronu hitrost žoge v najvišji točki gibanja razlikuje od hitrosti v primeru, če bi igralca stala na mirujoči podlagi in odbijala žogo na enak način, kot je opisano zgoraj?
 - b) Kolikšen je največji odmik vagona od začetne lege? Zanemari trenje med vagonom in tiri ter čas udarca žoge s prsti.
3. Skupina egipčanskih sužnjev mora pri gradnji piramide spraviti kockast kamnit blok s stranico 1,618 m na vrh 89 m dolgega klanca z naklonom 16° . To lahko stori na dva načina, in sicer lahko blok poriva po klancu navzgor, lahko pa ga zaporedoma prekučuje okoli najvišje ležečega roba tiste ploskve bloka, ki se stika s klancem. V drugem primeru blok pred vsakim prekučkom dviguje zelo počasi. (Za težni pospešek vzemi $9,8 \text{ m/s}^2$.)
 - a) Kolikšno delo opravi skupina sužnjev, ko enkrat prekuče blok na opisani način?
 - b) S kolikšno povprečno močjo dela skupina, če pri spravljanju bloka na vrh klanca blok prekuče vsakih 60 s?

- c) Maksimalna povprečna moč, s katero lahko dela skupina sužnje, znaša 1,5 kW. V kolikšnem najkrajšem času lahko spravi blok na vrh klanca pri vsakem izmed obeh načinov?

Gostota kamna, iz katerega so bloki, je $3,0 \text{ t/m}^3$. Pri porivanju kamna sužnji poskrbijo, da je površje klanca dovolj gladko, tako da je koeficient trenja med blokom in površjem klanca enak 0,10. Pri prekucevanju pa poskrbijo, da je koeficient lepenja med blokom in površjem klanca dovolj velik, tako da blok med prekucevanjem ne zdrsa. Začetni in končni položaj bloka sta podana na sliki.

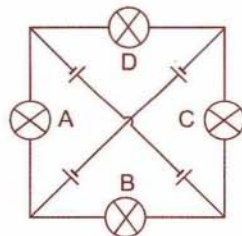


4. Na smučišču sta dve vlečnici: vlečnica A z dolžino 1200 m, na kateri traja vožnja 8 minut, in vlečnica B z dolžino 900 m, na kateri traja vožnja 6 minut. Sidra za dve osebi so med seboj razmaknjena po 10 m. Prvi smučar pride ob 9.00, ko poženejo vlečnico A, za njim prihajajo smučarji iz doline v enakomernih časovnih razmikih, eden po eden, vsako uro 300 novih smučarjev. Za smučanje na obeh progah potrebujejo smučarji 4 minute. Vlečnico B poženejo, ko je v vrsti na vlečnici A 20 smučarjev. Možne aktivnosti smučarjev so: vožnja z vlečnico, stanje v vrsti, smučanje. Ko obratujeta obe vlečnici, smučar izbere tisto, pri kateri čaka manj smučarjev; ko že stoji v vrsti, vlečnice ne more več zamenjati.
- Kdaj se prvič pojavi vrsta na vlečnici B?
 - Koliko smučarjev smuča ob 10. uri in 20 minut?
 - Koliko časa čaka smučar v vrsti na vlečnici B, če se postavi v vrsto ob 12.00?

Zahtevana natančnost rezultatov je ± 1 minuta, oz. ± 2 smučarja.

Skupina II

1. Štiri enake žarnice z delovnim uporom po 10Ω priključimo na štiri enake akumulatorje z napetostjo 10 V, kot je prikazano na sliki. Kolikšno moč troši posamezna žarnica? Zanemari notranji upor akumulatorjev in spremembe upora žarnic.



2. Iz dveh velikih kvadratnih kovinskih plošč in štirih podolgovatih plastičnih plošč sestavimo plitvo zaprto posodo v obliki kvadra tako, da

kovinski plošči ležita vodoravno, natanko ena nad drugo. Razdalja med kovinskima ploščama znaša 5,0 cm in je tako majhna glede na linearne razsežnosti kovinskih plošč, da smemo kovinski plošči obravnavati kot ploščati kondenzator. Na vrhu in na dnu posode sta dve majhni luknji, ki ju lahko zapiramo in odpiramo.

Med plošči priključimo baterijo z napetostjo 9,0 V tako, da se plošči nabijeta, nato pa baterijo odklopimo. Sprva je spodnja luknja zaprta, skozi zgornjo pa doteka voda tako, da se gladina vode v posodi dviga enakomerno s hitrostjo 5 mm/s. Ko gladina doseže vrh posode, voda skozi zgornjo luknjo v trenutku preneha dotekati in se odpre spodnja luknja. Gladina vode v posodi se po tem spušča enakomerno s hitrostjo 10 mm/s. Ko iz posode odteče vsa voda, se spodnja luknja spet zapre. Opisano dogajanje se nato periodično ponavlja.

- a) Kolikšna sta najmanjša in največja vrednost napetosti med kovinskima ploščama?
- b) Izračunaj časovni potek napetosti med kovinskima ploščama. Rezultat prikaži na grafu, na katerem nedvoumno označi ključne vrednosti na obeh oseh.

Dielektričnost vode je 81. Plastične plošče, iz katerih so navpične stene posode, so zelo tanke in ne prevajajo električnega toka.

3. V visoki, pokončno stoječi, valjasti posodi z notranjim presekom osnovne ploskve 100 cm^2 se nahaja bat z maso 1,0 kg, ki je brez trenja gibljiv vzdolž osi posode. Na začetku bat miruje, pod njim pa je v posodi zaprtega nekaj zraka. Stik med batom in notranjo steno posode dobro tesni, tako da zrak izpod bata ne uhaja. Posodo postavimo na grelno ploščo tako, da začne skozi dno posode v njeno notranjost uhajati stalen toplotni tok 50 W. S kolikšno hitrostjo se tedaj dviguje bat?

Navpična stena posode in bat sta iz snovi z majhno toplotno prevodnostjo. Razdalja med zgornjim delom bata in vrhnjim robom posode je dovolj velika, da bat med poskusom ne doseže vrha posode.

Zunanji zračni tlak je 101 kPa, razmerje specifičnih toplot za zrak pa znaša 1,4.

4. V vodoravni ravnini ležita vzporedno na razdalji 0,1 m dva dolga vodnika, po katerih teče v isto smer tok 30 A. Nad simetralo vodnikov prileti vzporedno z vodnikoma nabit delec z nabojem $+1 \cdot 10^{-4} \text{ As}$, hitrostjo 100 m/s in maso 0,1 mg. V kateri smeri, glede na smer toka vodnikov, in v kateri višini nad ravnino vodnikov mora prileteti delec, da nadaljuje let s konstantno hitrostjo po premici, vzporedni z vodnikoma ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$)?

Skupina III

1. Iz velike plastenke, napolnjene s kokakolo, odpijemo 0,50 l kokakole in plastenko neprodušno zapremo z zamaškom. V izpraznjenem delu plastenke se tedaj nahaja le zrak, katerega temperatura je enaka zunanji temperaturi 20°C , tlak pa zunanjemu tlaku 1,0 bar. Plastenko na hitro močno pretresemo, tako da se iz kokakole sprostijo ogljikov dioksid v obliki pene. Takoj zatem plastenko postavimo na mizo tako, da je zamašek na vrhu, in na hitro odvijemo zamašek. Pri tem se pena dvigne ravno do vrha plastenke. Kolikšna je masa ogljikovega dioksida, ki se je pri tresenju plastenke sprostil iz kokakole?

Stiskanje zraka, ko pri tresenju plastenke nastaja ogljikov dioksid, in razpenjanje pene, ko zamašek odpremo, se dogajata hitro in ju obravnavaj kot adiabatna procesa. Med razpenjanjem se pena ne razkraja, poleg tega pa se tedaj iz kokakole ne sprošča več ogljikov dioksid; predpostavi, da sta tedaj temperaturi zraka in ogljikovega dioksida enaki. Povečanje tlaka ogljikovega dioksida v peni zaradi površinske napetosti pene je zanemarljivo.

Kilomolska masa ogljikovega dioksida je 44 kg, splošna plinska konstanta pa 8300 J/kmolK . Razmerji specifičnih toplot za zrak in za ogljikov dioksid sta v okviru natančnosti enaki.

2. Zbiralna leča iz kronskega stekla in razpršilna leča iz flintovega stekla sta zlepljeni v zbiralno akromatsko lečje, kar pomeni, da je goriščna razdalja neodvisna od valovne dolžine vpadne svetlobe. Goriščna razdalja lečja je 50 cm. Določi goriščno razdaljo zbiralne leče za rdečo in modro svetlobo za podatke v spodnji tabeli. (Goriščna razdalja leče (f) se izraža z lomnim količnikom (n) in krivinskima radijema r_1 in r_2 kot $1/f = (n - 1)(1/r_1 + 1/r_2)$; pri tem je krivinski radij konveksne ploskve pozitiven, konkavne pa negativen. Pri sestavljanju leč se seštevajo recipročne goriščne razdalje.)

barva	λ [nm]	$n_{\text{kronsko steklo}}$	$n_{\text{flintovo steklo}}$
rdeča	656,3	1,5145	1,6444
modra	486,1	1,5230	1,6637

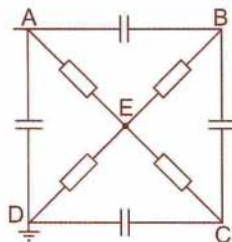
3. Zaradi ogleda severnih območij našega planeta izvrtajo skozi Zemljo raven predor, ki vodi iz Slovenije do severnega pola. Skozi ta predor se giblje vlak brez trenja in brez lastnega pogona.

a) Pokaži, da se komponenta sile v smeri gibanja spreminja premo sorazmerno z oddaljenostjo od točke, ki ustreza središču poti.

- b) Kolikšno največjo hitrost doseže vlak na poti?
 c) Vlak odpotuje iz Slovenije. Koliko časa traja vožnja do severnega pola?
 d) Tak način potovanja je "udoben", saj deluje na potnika ves čas enaka sila sedeža. Utemelji to trditev in silo tudi izračunaj, če je masa potnika 70 kg.

Zemljepisna širina Slovenije je 46° . Za radij Zemlje vzemi 6400 km, za težni pospešek pa $9,8 \text{ m/s}^2$.

4. Vezje na sliki priključimo med točkama A in D na tokovni izvir, ki daje konstanten (enosmerni) tok $0,1 \text{ A}$, razen če gonilna napetost ne preseže maksimalne vrednosti 50 V . (To pomeni, da se gonilna napetost prilagaja porabniku; če je upor porabnika prevelik, ostane gonilna napetost na maksimalni vrednosti, tok skozi porabnik pa se ustrezno zmanjša.) Vrednosti uporov so po $R = 100 \Omega$, kapacitete kondenzatorjev pa po $C = 100 \text{ nF}$. Na kondenzatorju pride do preboja, če napetost na njem preseže 25 V . Po preboju je upor kondenzatorja enak 0. Kolikšne so napetosti v točkah A, B, C in E po dovolj dolgem času? (Točka D je na napetosti 0.)



Ciril Dominko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
 29. letnik, šolsko leto 2001/02, številka 4, strani 193–256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2001/02 je za posamezne naročnike **3.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.500 SIT**, posamezna številka **750 SIT**, tematska številka **1.500 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBAS12X, številka računa 042961.

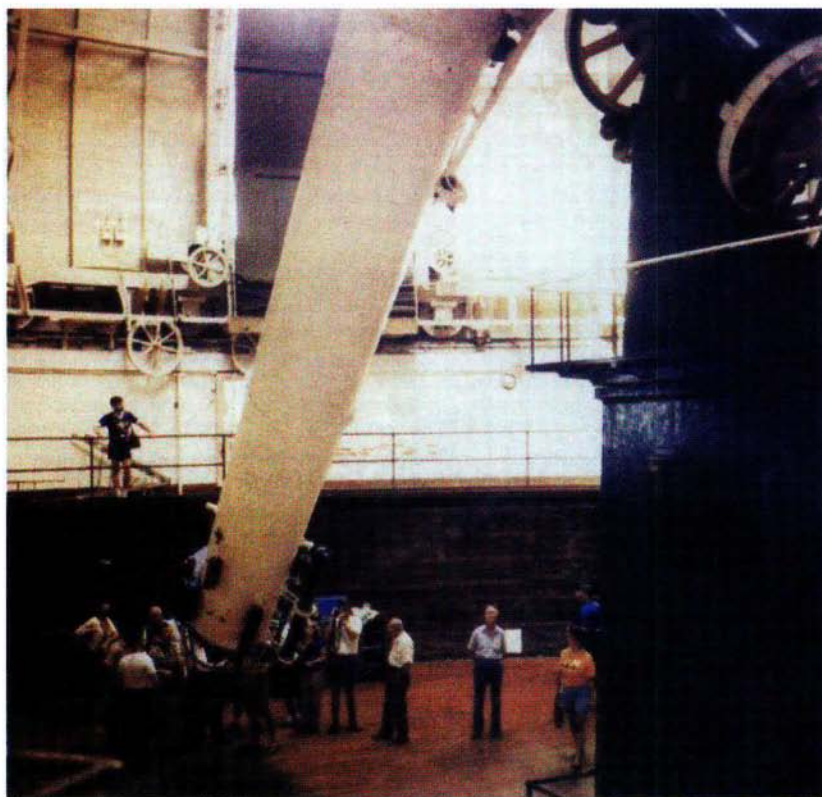
List sofinancira MŠZŠ

Založilo DMFA – založništvo

Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2002 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1482

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Slika 5. Največji refraktor (z goriščno razdaljo skoraj 20 m) "od blizu".

REBUS



Rešitev rebusa je na strani 230.

Marko Bokalič

