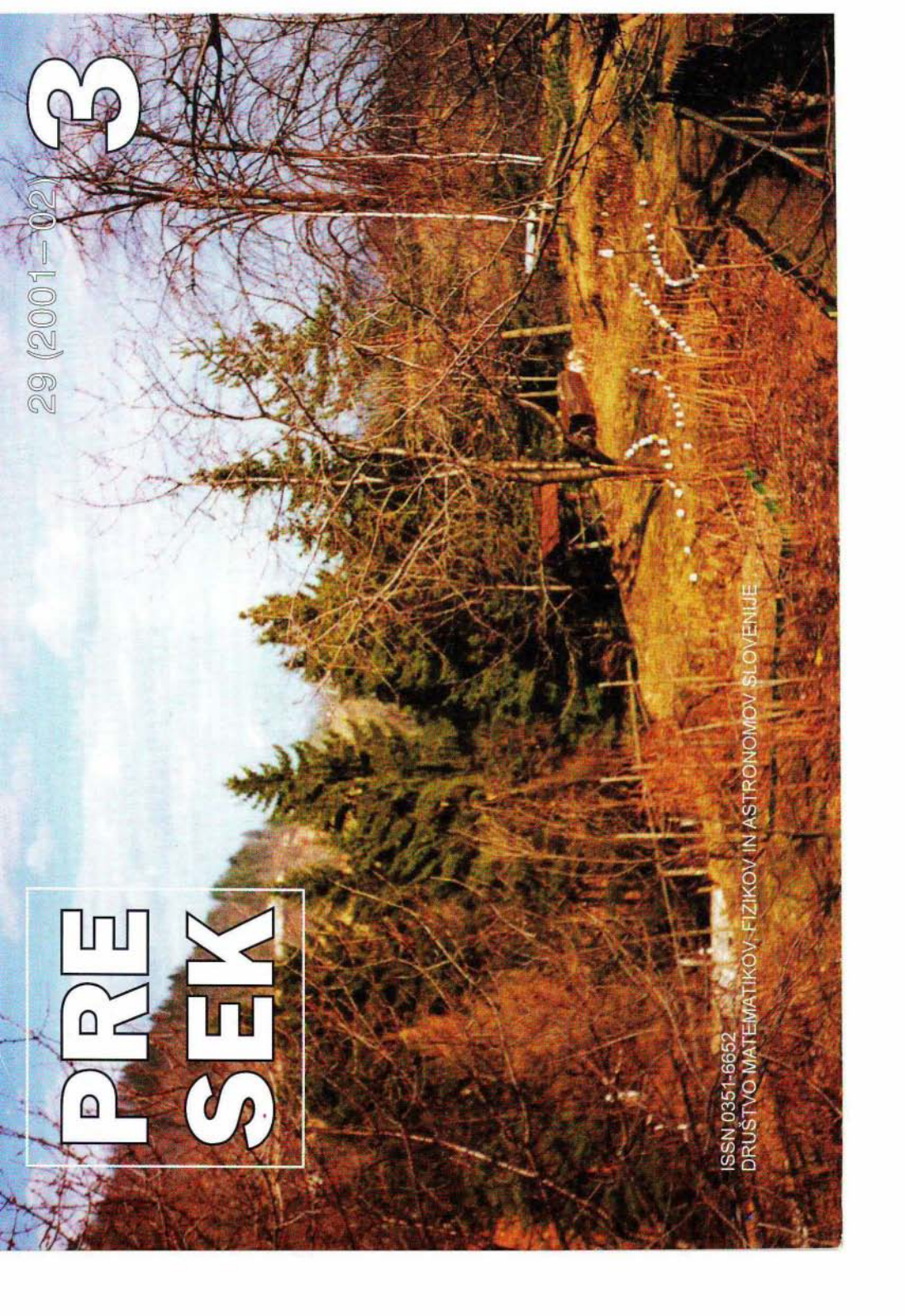


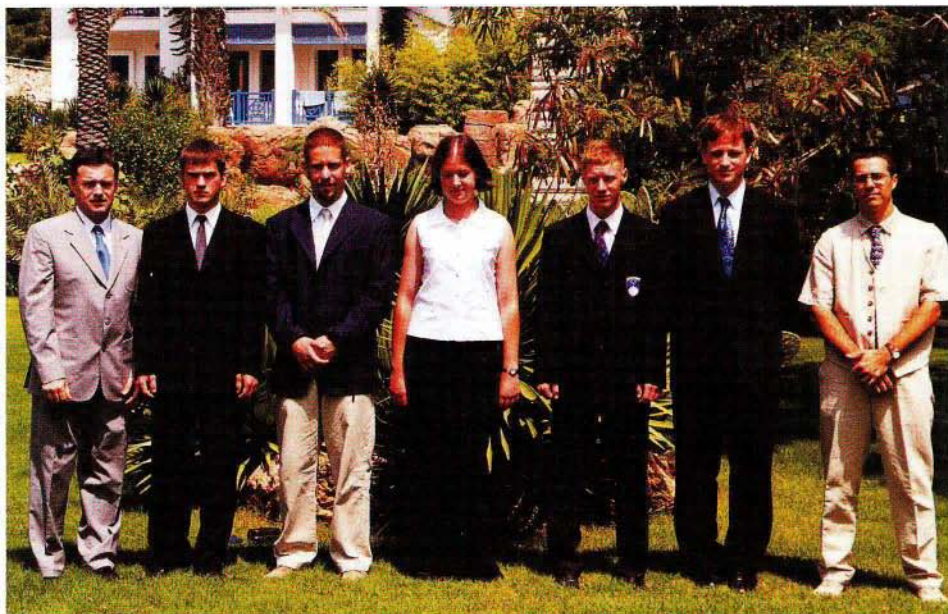
PRE SEK

29 (2001-02)

3

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE





Ekipa Slovenije na 32. mednarodni fizikalni olimpiadi v Antalyi v Turčiji. Z leve proti desni: Ciril Dominko (vodja), Gregor Tavčar (bronasta medalja), Dragan Simeonov (pohvala), Mojca Miklavec (pohvala), Andrej Košmrlj (srebrna medalja), Mate Car, Jure Bajc (vodja).



Ekipa Slovenije na 42. mednarodni matematični olimpiadi v Washingtonu. Od leve proti desni: Matjaž Željko (vodja ekipe), Matija Pretnar, Andrej Košmrlj, Mojca Miklavec, Aleksandra Franc, Sergej Omladič, Klemen Šivic in Darjo Felda (član mednarodne tekmovalne komisije).

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
29. letnik, leto 2001/02, številka 3, strani 129–192

	VSEBINA	
MATEMATIKA	Risanje kock in kvadrov (Peter Legiša).....	134-139
	O približkih za število π (Martin Juvan).....	152-153
	Modularna redukcija in Mersennova števila (Štefko Miklavčič).....	168-170
FIZIKA	Ali steklo teče? (Janez Strnad).....	140-142
	Pobliskujoča morska gladina (Andrej Likar).....	154-157
	Tlak pojema z višino (Janez Strnad).....	162-167
ASTRONOMIJA	Kako do enačbe sence? – Rešitve vaj na str. 173 (Marian Prosen).....	144-148
RAČUNALNIŠTVO	Zlaganje kovancev – Rešitev s str. 23 (Martin Juvan)....	150-151
	Polkraljice (Martin Juvan).....	158-159
	$\sqrt{6 + \sqrt{15}}$ je najboljši približek za π (Žiga Ramšak, Janez Brank).....	171-173
NOVE KNJIGE	Evropski matematični kenguru 1996 – 2001 (Darjo Felda).....	139
NOVICE	32. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko).....	143
	42. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko).....	149
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Povratni rebus – reš. na str. 143 (Marko Bokalič).....	133
	Kvadriranje dvomestnih števil, ki se začenjajo s 5 (Marija Vencelj).....	157
	Križanka "Členi računskih operacij" – reš. na str. 177 (Marko Bokalič).....	160-161
	Zlaganje zemljevida (Marija Vencelj).....	174
	Bine izboljšuje avto (Jože Pahor).....	175-177
NALOGE	Razkrijte vse tajne agente OO7 Njenega Veličanstva – Nagradna naloga (Marija Vencelj).....	130
	Vrtnarjeva naloga – Nagradna naloga (Bojan Mohar)....	131-132
	Skok na Luno (Goran Sabolič).....	133
	Tri škatle (Marija Vencelj).....	151
	Prerazporedi števila – reš. na str. 174 (Marija Vencelj).....	159
	Črke in številke (Boštjan Jaklič).....	170
REŠITVE NALOG	Rešitev nagradne naloge iz 1. številke (Marija Vencelj, odg. ur.).....	130
TEKMOVANJA	Urnik tekmovanj v letu 2002 (Darjo Felda).....	178-180
	21. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač).....	181-184
	Rešitve s področnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte).....	185-188
	Naloga z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2000/01 (Ciril Dominko).....	188-192
NA OVITKU	Slika k članku Kako do enačbe sence? (foto Marian Prosen)....	I
	Slovenski olimpijski ekipi na 32. fizikalni in 42. matematični olimpiadi. Poročili sta na straneh 143 in 149.....	II
	Sliki k članku Pobliskujoča morska gladina (foto Andrej Likar).....	III
	Skok na Luno (foto Goran Sabolič) – glej tudi nalogo na str. 133.....	IV

REŠITEV NAGRADNE NALOGE IZ 1. ŠTEVILKE

V 1. številki tega letnika Preseka smo vam zastavili nalogo, poiskati številu π čimboljši približek, izražen z naravnimi števili, seštevanjem, množenjem in največ dvema kvadratnima korenoma.

V uredništvo je prispelo lepo število odgovorov. Nekaj smo jih morali takoj diskvalificirati, ker približki niso ustrezali pogojem naloge, npr. temu, da odštevanje ni dovoljeno.

Med pravilno zgrajenimi približki je najboljši $\sqrt{6 + \sqrt{15}}$, ki je bil predlagan kar devetkrat. Poslali so nam ga: Aleš Zadavec iz Koga, Heliodor Hrga iz Ljubljane, Dragan Zdovc iz Ljutomera, Marko Kandić iz Brežic, Uroš Stele iz Kamnika, Miha Šušteršič iz Postojne, Blaž Dakskobler iz Podbrda in nepodpisani reševalec. Prvim sedmim smo knjižno nagrado že poslali po pošti. Približek $\sqrt{6 + \sqrt{15}}$ sta nam skupaj poslala še Žiga Ramšak iz Lesc in Janez Brank iz Tacna, hkrati pa tudi dokaz, da je $\sqrt{6 + \sqrt{15}}$ najboljši približek dovoljene oblike številu π nasploh. Reševalca sta se nagradi odpovedala. Za tiste, ki zmorejo, objavljamo na strani 171 njun dokaz, ki smo ga v uredništvu nekoliko priredili.

Bralce naj opozorimo še na zanimivi prispevek Martina Juvana z naslovom *O približkih za število π* , ki ga objavljamo na str. 152.

Marija Vencelj, odg. ur.

NAGRADNI NALOGI

Tokrat objavljamo kar dve nagradni nalogi: lažjo in nekoliko zahtevnejšo.

RAZKRIJTE VSE TAJNE AGENTE OO7 NJENEGA VELIČANSTVA – Nagradna naloga

Poiščite vse rešitve kriptaritma

$$\begin{array}{rcccccc} & J & A & M & E & S \\ - & & B & O & N & D \\ \hline & & & O & O & 7 \end{array}$$

Enake črke pomenijo enake številke, različne črke različne številke. Pazite – na prvih dveh mestih v rezultatu OO7 je črka O in ne števka 0! Kriptaritem ima več rešitev. Med reševalci, ki bodo našli vse, bomo izžrebali nagrajenca, ki bo prejel knjižno nagrado.

Rešitve pošljite najkasneje do 10. februarja na naš naslov:

Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Marija Vencelj

VRTNARJEVA NALOGA – Nagradna naloga

V prvi letošnji številki Preseka je bila v prispevku Predalčno načelo Jožeta Grassellija zastavljena naslednja naloga:

- (A) Na gredo, ki ima obliko kvadrata s stranico 1 m, je vrtnar posejal 301 seme. Dokaži, da obstaja krog s polmerom 8 cm, v katerem so posejana vsaj štiri semena. (Seme vzamemo kot točko.)

Dokaz te trditve je napravljen z uporabo predalčnega načela. Najprej predstavimo metrski kvadrat v ravnini, enota pa naj predstavlja 1 cm. Potem ima naš kvadrat oglišča $(0,0)$, $(0,100)$, $(100,100)$ in $(100,0)$. Zatam ugotovimo, da kvadrat s stranico 100 lahko pokrijemo s stotimi krogi polmera $5\sqrt{2} \approx 7,07$, ki imajo središča v točkah $S_{k,l} = (10k - 5, 10l - 5)$, kjer $k, l \in \{1, \dots, 10\}$. Ker je v 100 krogih skupno 301 seme, morajo po predalčnem načelu v enem od krogov biti več kot tri, torej vsaj štiri semena.

Izurjen matematik takoj vidi, da smo pri tem dokazu napravili dokaj grobo oceno, saj potrebujemo le kroge polmera malenkost več kot sedem centimetrov. Naslednji sklep prinaša precej boljši rezultat, saj z njim pokažemo, da obstaja krog polmera 8, v katerem je vsaj pet semen.

Namesto stotih vzemimo raje $N = (115)^2 = 13225$ krogov polmera 8, ki imajo središča v točkah $P_{p,q} = (p, q)$, kjer p in q pretečeta množico celih števil od -7 do 107 .

Preštejmo sedaj vse tiste pare (K, T) , kjer je K eden izmed naših N krogov, T pa ena od $n = 301$ točk (semen), ki leži v krogu K . Število takih parov označimo s Q . Recimo, da vsak krog vsebuje kvečjemu k danih točk. Potem je

$$Q \leq Nk.$$

Po drugi strani pa poljubna dana točka T leži v vseh tistih krogih, katerih središče je od T oddaljeno za manj kot 8. Krajši račun (napravljen s pomočjo računalnika) me je prepričal, da je vsaka točka T vsebovana v vsaj $t = 193$ izmed obravnavanih krogov (najslabši primer 193 krogov dobimo le v primeru, ko sta koordinati točke T celoštevilski). Torej je

$$Q \geq tn.$$

Iz obeh neenakosti za Q sledi, da je $tn \leq Q \leq Nk$. Od tod dobimo

$$k \geq \frac{tn}{N} = \frac{193 \cdot 301}{13225} = 4,39266 \dots \quad (1)$$

Torej je k celo število, večje od 4,39. Od tod sledi, da je k vsaj 5. Zato mora obstajati krog, v katerem je vsaj 5 izmed danih točk.

Zdi se, da bi bilo mogoče dokazati še več. Zakaj? Če poskušamo najti n točk v kvadratu s stranico a tako, da bo v vsakem krogu polmera r kvečjemu k točk in bo k kar se da majhen, potem morajo biti točke dokaj enakomerno razporejene po notranjosti kvadrata. Karkoli poizkusimo, vidimo, da bo k večji od 5 (in celo večji od 6). Bralcem Preseka zato zastavljamo dve nagradni vprašanji:

- (B) Dokažite, da v vrtnarjevi nalogi (A) vedno obstaja krog polmera 8, ki vsebuje vsaj 6 danih točk (semen). Ali morda enako velja tudi za 7 točk?
- (C) Poiščite 301 takih točk, da bo maksimalno število točk v krogu polmera 8 čim manjše.

Najuspešnejšim reševalcem posameznih nalog obljubljam knjižno nagrado. S posplošitvijo prikazanega dokaza lahko oceno (1) izboljšamo do neenakosti $k \geq 4,497595$. Izboljšave te ocene pa se zdijo bolj zapletene. Zato bomo priznali tudi vse ideje, ki bodo (1) izboljšale na spodnjo mejo, ki bo večja od 4,5. Obe nalogi lahko skušate rešiti tudi splošno, kjer imamo kvadrat s stranico dolžine a , n točk in kroge polmera r .

Nalogo (B) lahko tudi "obrnemo":

- (D) Najmanj koliko točk v kvadratu s stranico a moramo izbrati, da bo zagotovo obstajal krog, v katerem bo vsaj k izmed danih točk?

Vrtnarjev najverjetneje takšne naloge ne zanimajo. Kaj lahko pa si zamislimo resnega znanstvenika, ki bo takšno nalogo uporabil pri svojem delu. Recimo, da fizik s tarčo kvadratne oblike prestreže snop elementarnih delcev. Vemo, da bodo ti delci pustili sled le v primeru, če bo v isto tipalo na tarči (krog danega polmera) priletelo vsaj k delcev. Z rešitvijo naloge (D) lahko torej ugotovimo, koliko najmanj delcev potrebujemo, da jih bomo gotovo lahko zaznali, oz. največ koliko delcev je priletelo v tarčo, če delcev ni bilo zaznati.

Pri nagradah bomo seveda upoštevali tudi rešitve ali delne rešitve naloge (D). Rešitve pošljite najkasneje do 10. februarja na naslov:

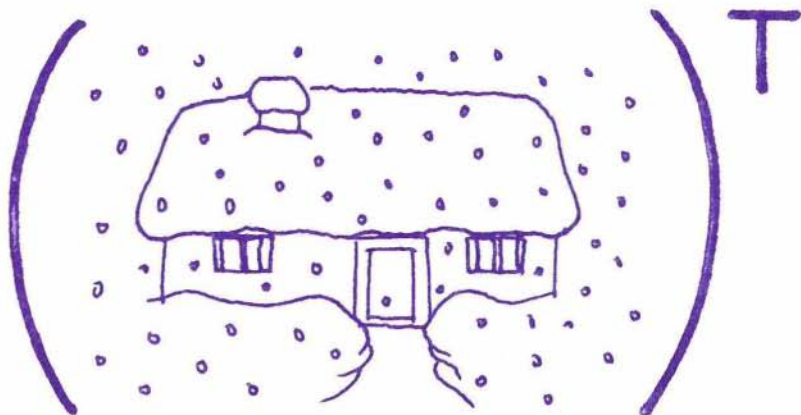
Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Bojan Mohar

POVRATNI REBUS

Ključ: 4 – 2 – 1.

Geslo: 7.



Ključ pove, da dobite rešitev iz treh besed, od katerih ima prva 4 črke, druga 2 in tretja 1 črko. Geslo pove, da je rešitev iz ene besede, ki ima 7 črk. Preberete jo nazaj, ker je rebus povratni.

Marko Bokalič

Rešitev rebusa je na strani 143.

SKOK NA LUNO

Z malo domišljije bi posnetek na zadnji strani ovitka, ki prikazuje prvi krajec Lune in padanje padalca, lahko poimenovali "skok na Luno". Posnetki, ki jih fotografiramo s teleobjektivi, nas optično prevarajo, ker globinska razdalja ni realno prikazana. To pomeni, da so predmeti, ki so sicer drug od drugega precej oddaljeni, na fotografiji videti med seboj bližji. Zato se zdi, da padalec leti proti Luni, toda na njej seveda ne more pristati, saj je v resnici od nje oddaljen približno 370 000 km.

Vprašajmo se, ali bi bilo možno oceniti razdaljo od padalca do kraja, kjer smo stali, ko smo naredili posnetek? (Za oceno rezultata upoštevamo, da je premer Lune 3 500 km, ostale manjkajoče podatke ocenimo s posnetka.)

Goran Sabolič

RISANJE KOCK IN KVADROV

Z vektorskim računom se lahko lotimo naslednje pomembne naloge tehničnega risanja:

Narišimo pravokotno projekcijo kocke tako, da bodo dolžine projekcij robov v razmerju $1 : 1 : \frac{1}{2}$.

Rešitev.

Kocko $ABCD A' B' C' D'$ z robom dolžine 1 bomo projicirali na ravnino xy . Kocko lahko togo premaknemo tako, da bo oglišče A v izhodišču, pravokotni projekciji $A_1 B_1$ ter $A_1 D_1$ robov AB in AD pa bosta ležali simetrično glede na os y (sliki 1 in 2).

Po predpostavki privzamemo $|A_1 B_1| = |A_1 D_1|$. Zato lahko zapišemo

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = (a_1, a_2, 0)$$

$$\overrightarrow{A_1 D_1} = (-a_1, a_2, 0).$$

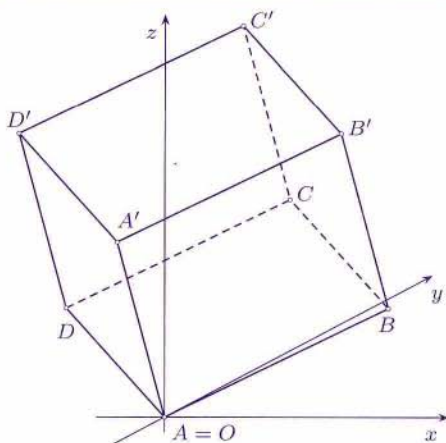
Od tod sledi $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\overrightarrow{AD} = (-a_1, a_2, b_3)$. Ker je $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$, je seveda

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= \\ &= (-a_1)^2 + a_2^2 + b_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

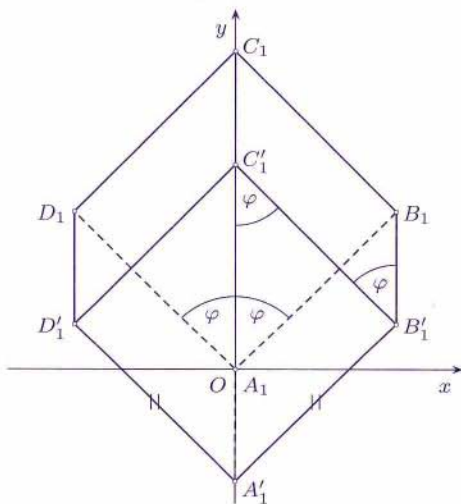
in od tod $a_3 = \pm b_3$. Privzamemo lahko, da je $a_3 = b_3 > 0$ (slika 1). Torej je

$$\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\overrightarrow{AD} = (-a_1, a_2, a_3).$$



Slika 1.



Slika 2.

Vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ sta pravokotna, zato je

$$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0. \quad (2)$$

Iz (1) in (2) sledi

$$2a_1^2 = 1,$$

in po sliki 2 je $a_1 > 0$, zato

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{2}.$$

Vektor $\overrightarrow{AA'} = (c_1, c_2, c_3)$ je pravokoten na $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$. Torej velja

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$

in

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{\sqrt{2}}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0.$$

Odštejmo obe enačbi, pa dobimo $c_1 = 0$ in

$$a_2c_2 + a_3c_3 = 0,$$

torej

$$c_3 = -\frac{a_2c_2}{a_3}. \quad (4)$$

Od tod sledi

$$\overrightarrow{AA'} = (0, c_2, c_3).$$

Ker je $|\overrightarrow{AA'}| = 1$, je

$$c_2^2 + c_3^2 = 1. \quad (5)$$

Projekcija vektorja $\overrightarrow{AA'}$ na ravnino xy je

$$\overrightarrow{AA'} = (0, c_2, 0).$$

Po (3), (4) in (5) je

$$1 = c_2^2 + c_3^2 = c_2^2 + \frac{a_2^2 c_2^2}{a_3^2} = \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_3^2} c_2^2 = \frac{1}{2a_3^2} c_2^2.$$

Tako je $c_2^2 = 2a_3^2$. Po sliki 1 je $c_2 < 0$ in $a_3 > 0$, zato

$$c_2 = -\sqrt{2}a_3. \quad (6)$$

Začetna predpostavka o razmerjih dolžin projekcij pravi, da je

$$|A_1 A'_1| = \frac{1}{2} |A_1 B_1|$$

ali

$$|c_2| = \frac{1}{2} |(a_1, a_2, 0)|,$$

torej po (1)

$$4c_2^2 = a_1^2 + a_2^2 = 1 - a_3^2.$$

Toda po (6) je $4c_2^2 = 8a_3^2$ in od tod

$$8a_3^2 = 1 - a_3^2.$$

Vidimo, da je $a_3 = \frac{1}{3}$, saj je $a_3 > 0$. Iz (3) dobimo

$$a_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}.$$

Ker je $a_2 > 0$, je

$$a_2 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

in

$$c_2 = -\sqrt{2}a_3 = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Od tod sledi

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{2}}, 0 \right)$$

in

$$\overrightarrow{A'_1 A_1} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}, 0 \right).$$

Izračunamo

$$g = |A_1 B_1| = 2|A'_1 A_1| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \doteq 0,943.$$

Točki B_1 in D_1 ležita simetrično glede na os y (slika 2), zato je

$$|B_1 D_1| = 2a_1 = \sqrt{2}.$$

Od tod sledi

$$|B_1 D_1| = \frac{3}{2}g$$

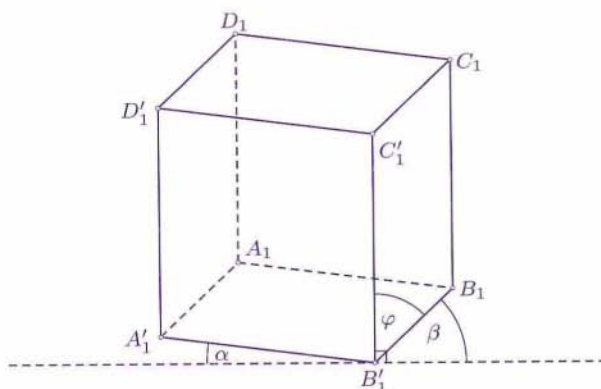
in

$$\sin \varphi = \frac{a_1}{|A_1 B_1|} = \frac{3}{4}$$

ter

$$\varphi \doteq 48,59^\circ.$$

Izračunamo kot $\sphericalangle A'_1 B'_1 C'_1 = 180^\circ - 2\varphi \doteq 82,82^\circ = 90^\circ - 7^\circ 18'$. Obrnimo zdaj sliko tako, da bo daljica $A'_1 D'_1$ navpična. Dobimo sliko 3, na kateri je črtkana črta vodoravna.

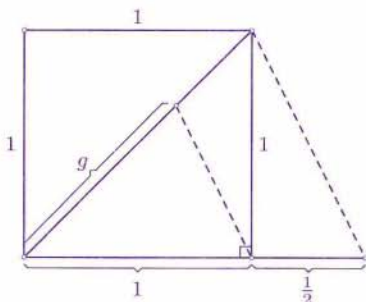


Slika 3.

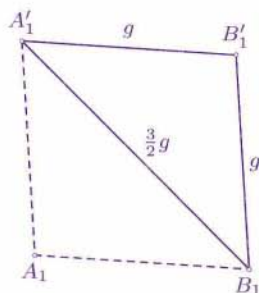
Tu kot α znaša približno $7,18^\circ$, kot β pa je $90^\circ - \varphi \doteq 41,41^\circ$. Na ta način projiciramo tudi kvadre. Razložili smo enega standardnih načinov upodabljanja tih teles.

Kot sem prebral v nemškem priročniku elementarne matematike [1], so si tehnični risarji včasih (po dogovoru) privoščili malce ohlapnosti. Vzeli so $|A_1B_1| = |AB|$ in $|A_1A'_1| = \frac{1}{2}|AA'|$. To je pomenilo kakih 6% napake v merilu. Za kot α so vzeli 7° , za β pa 42° . (Mimogrede, v tem priročniku piše, da je $\alpha = 7^\circ 10'$, čeprav je prava vrednost bližje $7^\circ 11'$.) Danes, v dobi računalniške grafike, take poenostavitve niso več potrebne.

Te ohlapnosti so tudi sicer odveč – vsaj za matematike. Oglišča kocke bomo označili standardno. Narišemo kvadrat s stranico 1 in vzamemo $\frac{2}{3}$ njegove diagonale (slika 4). To razdaljo g narišemo navpično kot projekcijo stranice BB' .

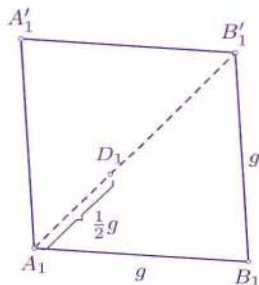


Slika 4.

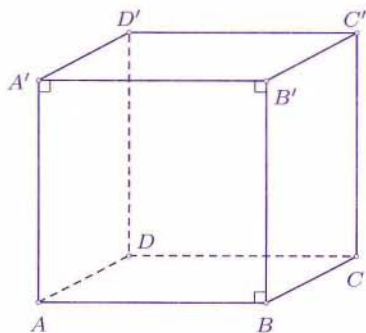


Slika 5.

Nato narišemo romb $A_1B_1B'_1A'_1$ s stranico g in z diagonalo $\frac{3}{2}g = \sqrt{2}$ (slika 5). Zvežemo A_1 in B'_1 ter od A_1 odmerimo $\frac{1}{2}g$ (slika 6), da dobimo D_1 . Preostanek konstrukcije je jasen.



Slika 6.



Slika 7.

Bolj enostavno kocko upodabljam z vzporedno projekcijo. Projiciramo na ravnino Σ kvadrata $DCC'D'$ (slika 7), in sicer vzdolž premice, ki ni niti vzporedna niti pravokotna na Σ . Pri tem se tudi kvadrat $ABB'A'$ upodobi kot skladen kvadrat, preostale stranske ploskve pa kot paralelogrami. Tako projekcijo bi v vsakdanjem življenju lahko videli kot senco. To se zgodi bolj redko. Zato je pravokotna projekcija bolj naravna – zahteva pa več dela.

Literatura

1. H. Krenl, K. Kulke, H. Pester, R. Schroedter: *Lehrgang der Elementarmathematik*, 20. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig 1988.

Peter Legiša

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU 1996 – 2001

Člani Komisije za tekmovanje *Evropski matematični kenguru* smo pripravili zbirko nalog s tega tekmovanja, v kateri so zajete tekmovalne naloge od leta 1996 do leta 2001. V tekmovanje se lahko vključujejo učenci od drugega razreda osnovne šole dalje in dijaki vseh srednjih šol. V zbirki je velika večina nalog tudi rešenih in ne le opremljenih s pravilnim odgovorom, kar je dobrodošlo zlasti za samostojno pripravo na tekmovanje oziroma lažjo pripravo na dodatni pouk ali matematični krožek. V dodatku so objavljene naloge izbirnega tipa, ki so jih reševali dijaki na treh predhodnih šolskih tekmovanjih in so prav tako opremljene z rešitvami. Knjiga formata B5 je s preko 250 stranmi primerno gradivo za tiste, ki se uvajajo v matematična tekmovanja, in za tiste, ki želijo ohranjati svojo tekmovalno "formo". Zbirko lahko kupite oziroma naročite pri DMFA – založništvo, Jadranska cesta 19, Ljubljana, tel. (01) 4232-460.



Darjo Felda

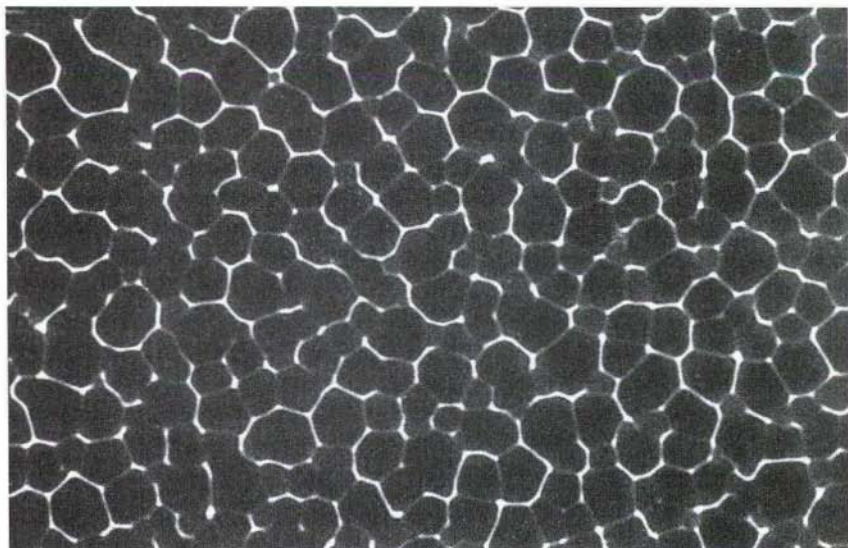
ALI STEKLO TEČE?

Od časa do časa v tej ali oni fizikalni reviji oživi razprava o tem, ali steklo zaradi teže teče, podobno kot med, samo veliko počasneje. Nekateri zatrjujejo, da steklo teče zato, ker ni prava trdnina, ampak podhlajena kapljevina. O tem naj bi pričale šipe srednjeveških katedral, ki da so na spodnjem delu debelejšje kot na zgornjem. Na mnenje, da steklo teče pri sobni temperaturi, naletimo v Evropi ter Južni in Severni Ameriki, tako da utegne biti res dokaj razširjeno po svetu. Trditve te vrste najdemo celo v nekaterih učbenikih in strokovnih knjigah, npr. v izdaji *Britanske enciklopedije* iz leta 1966.

Steklo je izjemna snov, ki je imela že v preteklosti velik pomen in ga ima tudi dandanes, posebej če upoštevamo, da svetlobni vodniki prenesejo čedalje več sporočil. Navadno silikatno steklo sestavljajo oksidi silicija SiO_2 (73,2 %), natrija Na_2O (13,4 %), kalcija CaO (10,6 %), aluminija Al_2O_3 (1,3 %), kalija K_2O (0,8 %), magnezija MgO (0,7 %) in primesi. Navedeni masni deleži so tipični za navadno današnje steklo, pogosto pa naletimo tudi na nekoliko drugačno sestavo. Nekdanja stekla so, npr., vsebovala več kalijevega oksida kot natrijevega.

Zgradba stekla je posebnost in je ni lahko opisati. Pri sobni temperaturi steklo ni v toplotnem ravnovesju. Dostikrat primerjajo steklo z raztopino ali zlitino. Sestavljajo ga gručice atomov, velike po okoli 100 nanometrov s po sto milijoni atomov. V gručah sicer nihajo atomi okoli svojih ravnovesnih leg, kot je značilno za kristal, vendar gruč ne moremo obravnavati ne kot drobne kristale ne kot ogromne molekule. Ne samo, da so različno velike, ampak delujejo nanje zelo različne mehanične napetosti. Zato v steklu na večjih razdaljah ne opazimo urejenosti. Na krajših razdaljah pa opazimo urejenost, značilno za nekristalne trdnine (slika 1).

Pri temperaturi pod 400°C se steklo kaže kot trdno telo, ki se mu pod vplivom zunanje sile sicer spremeni oblika, a se vrne v prvotno obliko, ko sila preneha. To je značilno za *prožno deformacijo*. Steklo se zlomi ali počí, če sila preseže določeno mejo, steče pa ne. Teža je v tej zvezi razmeroma šibka sila. Zaradi nje bi morda zasledili trajno, *neprožno* deformacijo stekla v času, ki bi presegel starost vesolja. Večkrat so v laboratoriju poskušali izmeriti, kako steklo teče, a pri tem niso uspeli. Stekleni predmeti, stari več kot 3 000 let, so obdržali svojo obliko. Misel, da steklo pri navadni temperaturi pod vplivom teže nekako spreminja obliko, je "mit, ki nasprotuje izkušnjam arheologije in sodobnim raziskovanjem narave materialov".



Slika 1. Vtis o zgradbi stekla da slika z elektronskim presevnim mikroskopom 60 nm debele plasti polprevodniškega stekla As_2Se_3 . Povprečni premer gruč meri 100 nm, presledki med njimi so v povprečju po 3 nm široki in segajo v povprečju 57 nm globoko, ponekod tudi skozi vso plast. (1 nm, nanometer, je milijardina metra ali milijonina milimetra.) Slika je iz članka J. C. Phillipsa *The physics of glass*, *Physics Today*, februar 1982, str. 27.

Šipe v barvastih oknih srednjeveških katedral pa so kljub temu lahko na spodnjem delu debelejše. Pred letom 1890 so šipe izdelovali tako, da so s pihanjem naredili votel valj iz raztaljenega stekla, ki so ga prerezali po strani in sploščili, ali tako, da so kos takega stekla hitro vrteli na plošči. V obeh primerih so nazadnje pogosto narezali prizme s klinasto osnovno ploskvijo. Take šipe so vgradili v sestavljena okna tako, da so bile enako usmerjene, npr., da so bile spodaj debelejše. Le tako so dosegli, da je bilo videti ravne črte v okolici, ki so jih opazovali skozi sestavljeno okno, približno ravne. Ravne črte pa bi videli kot skokovito prekinjene, če bi kose šip vgradili neurejene.

Tudi pisec teh vrstic ima zaradi stekla nekoliko slabo vest. V drugem delu *Fizike* preberemo: "Velika zrcala je nekoliko lažje izdelati in namestiti v daljnogled kot enako velike leče. Steklo je namreč podhlajena kapljevina in obstaja nevarnost, da se zaradi lastne teže po dolgem času spremeni ukrivljenost ploskev leče." Omemba podhlajene kapljevine v tej zvezi zavede, še posebej, ker zadnji del trditve namiguje na neprožno deformacijo. Prvi del trditve pa velja. Zares je veliko zrcalo lažje vpeti in premikati kot

veliko lečo, ki jo je vrhu tega treba zbrusiti vsaj na dveh ploskvah. Od leta 1897 ima Yerkesov observatorij univerze v Chicagu daljnogled, katerega objektiv sestavljata dve leči s premerom 1 meter. Do leta 1908 je bil to največji daljnogled na svetu, do danes pa je ostal največji daljnogled z lečo.

Vendar moramo biti pri steklu pripravljeni na presenečenja. Valjasto palico, vpeto na eni osnovni ploskvi, ob drugi za kratek čas obremenimo na zasuk, kot pravimo, na torzijo. Druga osnovna ploskev se zasučje glede na prvo in se vrne v začetno lego, ko obremenitev preneha. Pri dolgotrajni obremenitvi se ploskvi nekoliko bolj zasučeta druga glede na drugo in druga ploskev ostane malo zasukana, ko obremenitev preneha. Toda to ni neprožna deformacija, ker se čez dalj časa neobremenjena palica le vrne v začetno lego. Pojav pojasnijo z gibanjem natrijevih in kalijevih ionov: najprej razmeroma počasi odtavajo v lege, ki bolj ustrezajo obremenitvi, po prenehanju obremenitve pa odtavajo nazaj v začetne lege.

Družba Corning Glass, ena od večjih v ZDA, priporoča, da pri prevozu škatlo s steklenimi cevkami položijo na vodoravno podlago. To pa ni povezano z morebitno neprožno deformacijo cevk zaradi teže, ampak s tem, da bi se lahko cevke na krajiščih poškodovale, če bi škatlo postavili navpično. Pogosto so te cevke rahlo ukrivljene, največ za nekaj milimetrov na dolžini enega metra. Vendar tega ni kriva neprožna deformacija, ampak način izdelave.

Za konec še zanimivost. Pri kitajskih porcelanastih vazah poznajo pojav, da glazura teče in da je to mogoče opaziti v času z velikostno stopnjo 500 let. Pri tem nastane neprožna deformacija zaradi površinske napetosti, ki pride močnejše do izraza kot teža. Pojav celo uporabljajo, da določajo starost in pristnost vaz.

James Phillips je menil, da naj bi fiziki o lezenju stekla, ki ga ni, razmišljali kot o nečem, kar naj bi bilo. To bi jih spodbudilo, da bi skrbno razločevali med kristalnimi in nekristalnimi trdninami in se ne bi omejili samo na trditev, da kažejo prve periodično zgradbo, to je urejenost dolgega dosega, druge pa ne. Ali se nismo ravnali po tem namigu?

Zakaj je mogoče kovinsko pločevino ukriviti, to je neprožno deformirati, ploščice kremenca ali ledu pa ne? Pri roki je preprosta razlaga: vezi med atomi v izolatorju so usmerjene, vezi med ioni v kovini pa ne.

32. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Olimpiada je potekala med 28. junijem in 6. julijem 2001 v turškem turističnem mestu Belek, 30 km oddaljenem od Antalye. Sodelovalo je 306 tekmovalcev iz 65 držav. V slovenski ekipi so bili Andrej Košmrlj, Gregor Tavčar, Dragan Simeonov in Mate Car, vsi z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, ter Mojca Miklavc s Škofijske klasične gimnazije Ljubljana. Spremljevalca slovenske ekipe in člana mednarodne komisije sta bila Jure Bajc, Uprava RS za geofiziko, in Ciril Dominko, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Udeležbo na olimpiadi je finančno omogočilo ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

Kot je že nekaj let ustaljeno, tekmovalci na fizikalni olimpiadi rešujejo tri teoretične naloge in eno ali dve (odvisno od organizatorja) eksperimentalni nalogi. Za vsak del tekmovanja imajo na razpolago pet ur časa. V teoretičnem delu tekmovanja je možno doseči največ 30 točk, v eksperimentalnem pa 20 točk. Letos so tekmovalci najprej reševali eksperimentalno nalogo, po prostem dnevu pa še teoretične naloge.

Andrej Košmrlj je s skupno doseženimi 37,30 točkami prejel srebrno medaljo, Gregor Tavčar s 30,50 točkami bronasto medaljo, Mojca Miklavc in Dragan Simeonov pa z 29,50 oz. 28,15 točkami pohvali. Od 50 možnih točk je bilo potrebno letos doseči za zlato medaljo najmanj 42 točk, za srebrno 36, za bronasto 30 in za pohvalo 23 točk.

Tekmovalci nastopajo na olimpiadi kot posamezniki in ne kot državne ekipe. Uradne razvrstitve držav torej ni. Približno uspešnost ekipe dobimo, če neuradno ovrednotimo medalje in pohvale, ki so jih prejeli tekmovalci posameznih držav. Letošnji osvojeni medalji in pohvali nas na taki lestvici uvrščajo relativno visoko, saj si skupaj s štirimi državami delimo 22. – 25. mesto. Tekmovalci 19 držav niso prejeli nobene medalje ali pohvale.

Naslednja, 33. mednarodna fizikalna olimpiada, bo od 14. do 23. julija 2002 v Bandungu v Indoneziji.

Ciril Dominko

POVRATNI REBUS – Rešitev s str. 133

Sneg na T – TANGENS.

Marko Bokalič

KAKO DO ENAČBE SENCE?

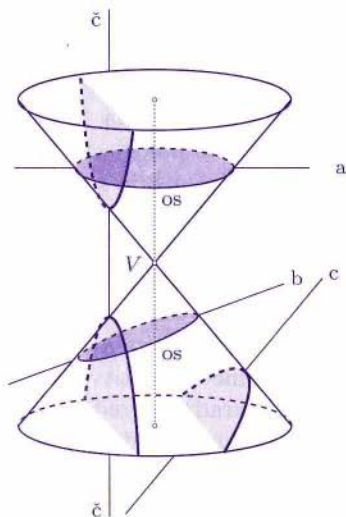
Zadajmo si nalogo, da želimo ugotoviti, po kakšni krivulji se premika konec sence, ki jo vrh navpične in od Sonca osvetljene palice med dnevom meče na vodoravno ravnino. To je precej zahtevna naloga. Da bi jo rešili, je treba nekaj vedeti o vektorjih in o sekanju ravnine in pokončnega dvojnega krožnega stožca.

S sekanjem ravnine in plašča pokončnega dvojnega krožnega stožca namreč dobimo kot presek krivulje drugega reda, imenovane stožnice (krožnica, elipsa, parabola, hiperbola), to pa so prav tiste krivulje, ki jih ob sončnem vremenu opisujejo konci senc navpično postavljenih predmetov v različnih krajih na Zemlji (slika 1).

Slika 1. Sekanje ravnine in plašča pokončnega dvojnega krožnega stožca. Za presek dobimo:

- a – krožnico (ravnina seka dvojni stožec pravokotno na os),
- b – elipso (ravnina seka dvojni stožec poševno na os),
- c – parabolo (ravnina seka dvojni stožec vzporedno s stranico),
- č – hiperbolo (ravnina seka dvojni stožec vzporedno z osjo).

Opomba. Če ravnina seka dvojni stožec skozi vrh V , dobimo za presek sekajoči se premici.



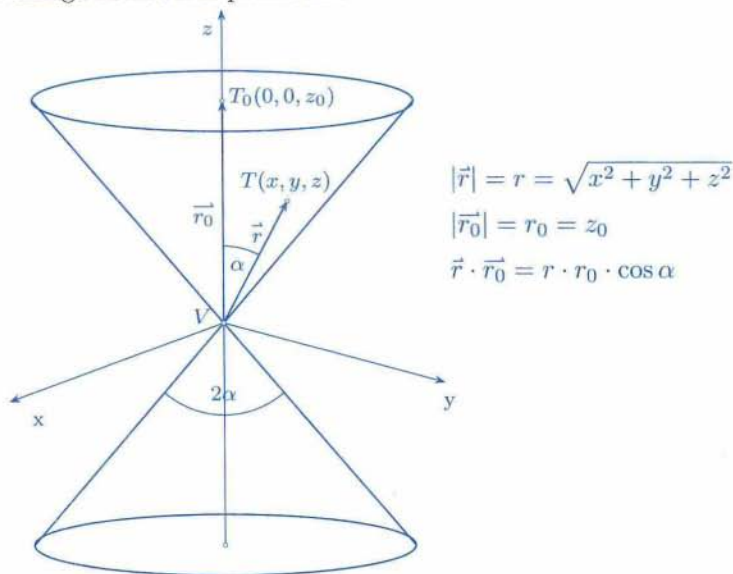
Vpeljimo prostorski pravokotni koordinatni sistem z izhodiščem v vrhu V dvojnega pokončnega krožnega stožca z odprtino 2α , kar je kot ob vrhu osnega preseka stožca (slika 2).

Najprej nas zanima enačba plašča pokončnega dvojnega stožca. Izpeljemo jo takole: Naj v poljubno točko $T(x, y, z)$ plašča stožca kaže krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, krajevni vektor $\mathbf{r}_0 = (0, 0, z_0)$ pa naj leži v osi stožca in naj kaže v pozitivno smer osi z (navpično navzgor). Ko zavzamejo komponente x, y, z vektorja $\mathbf{r}$ vse vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$, konica vektorja $\mathbf{r}$ opiše ves plašč pokončnega dvojnega stožca. Njegovo enačbo dobimo s skalarnim produktom vektorjev $\mathbf{r}$ in $\mathbf{r}_0$, torej $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = (x, y, z) \cdot (0, 0, z_0) = r \cdot r_0 \cos \alpha$. Velja $zz_0 = rr_0 \cos \alpha$. Ker je $r_0 = z_0$,

sledi $z = r \cos \alpha$ oz. $z^2 = r^2 \cos^2 \alpha$ ali $z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \alpha$. To enačbo preoblikujemo najprej v $z^2(1 - \cos^2 \alpha) = (x^2 + y^2) \cos^2 \alpha$ in končno v

$$z^2 = \frac{1}{\tan^2 \alpha} (x^2 + y^2).$$

Tako smo zapisali enačbo ploskve, to je enačbo plašča pokončnega dvojnega krožnega stožca z odprtino 2α .



Slika 2. K izpeljavi enačbe plašča dvojnega pokončnega krožnega stožca.

Naj ima ravnina, ki je vzporedna z ravnino xy , enačbo $z = v$ (v naj pomeni višino, ki je konstantna). Presek te ravnine in plašča dvojnega stožca dobimo z rešitvijo sistema enačb $z^2 = \frac{1}{\tan^2 \alpha} (x^2 + y^2)$ in $z = v$. V enačbo ploskve preprosto vstavimo v namesto z in dobimo $v^2 \tan^2 \alpha = x^2 + y^2$ ali $x^2 + y^2 = \rho^2$, če je $\rho = v \tan \alpha$. Presek je krožnica s polmerom ρ . Podobno bi lahko dokazali, da so preseki dvojnega stožca z drugače potekajočimi ravninami druge stožnice (elipsa, parabola in hiperbola), kar pa ni naš namen.

V naših krajih vzide vsak dan Sonce zjutraj na vzhodnem delu obzorja, je najvišje opoldne na jugu in zaide zvečer za zahodni del obzorja. Navidezno dnevno gibanje Sonca poteka (okrog nebesne osi) po nebesnem vzporedniku z deklinacijo δ , kakor imenujemo kotni odmik nebesne točke od nebesne ekvatorja. Deklinacija Sonca se med letom spreminja. Ko je

njegova deklinacija $\delta = 0$ (enakonočje), leži Sonce na nebesnem ekvatorju, za $\delta > 0$ je Sonce nad nebesnim ekvatorjem na severni nebesni poluti (od spomladanskega do jesenskega enakonočja), za $\delta < 0$ pa pod ekvatorjem na južni nebesni polkrogli (od jesenskega do spomladanskega enakonočja). Sonce se torej vsak dan navidezno giblje po plašču dvojnega krožnega stožca, katerega os je usmerjena v severni nebesni pol P (tik ob njem leži zvezda Severnica), odprtina stožca 2α pa je $2(90^\circ - \delta)$, kar nazorno kaže slika 3.

V vrh navpične palice (stožca) z višino v postavimo izhodišče prostorskega koordinatnega sistema. Os x usmerimo proti severu N , os y proti zahodu W , os z pa navpično navzgor proti zenitu Z . Severni nebesni pol P leži v ravnini NSZ , višinski kot severnega nebesnega pola, to je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti severnemu nebesnemu polu, pa je po definiciji enak zemljepisni širini φ opazovališča na severni zemeljski poluti, torej $\angle NOP = \varphi$.

Naj določenega dne krajevni vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ kaže v Sonce, ki je v določeni točki R na plašču dvojnega stožca, vektor $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0, z_0)$ pa tako in tako kaže v pol P . Skalarni produkt teh dveh vektorjev je $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = r \cdot r_0 \cos(90^\circ - \delta)$. Sledi $(x, y, z) \cdot (x_0, 0, z_0) = r \cdot r_0 \sin \delta$ oz. $xx_0 + zz_0 = rr_0 \sin \delta$. Nadalje je $x \frac{x_0}{r_0} + z \frac{z_0}{r_0} = r \sin \delta$ ali $x \cos \varphi + z \sin \varphi = r \sin \delta$. Zadnjo enačbo kvadriramo, upoštevamo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ in dobimo

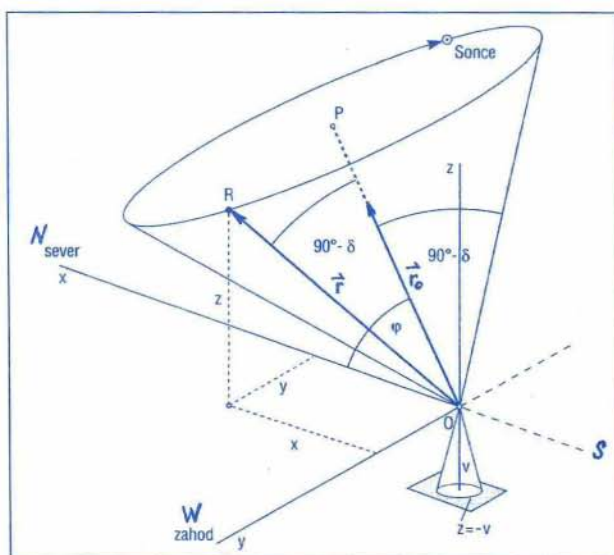
$$(x \cos \varphi + z \sin \varphi)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta. \quad (1)$$

Pravkar smo zapisali enačbo plašča dvojnega stožca, po katerem se Sonce navidezno giblje med letom. Na splošno za vse kraje na Zemlji velja $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$, za vse datume med letom pa $-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$ (glej prispevek *Deklinacija Sonca*, Presek **27** (1999/2000), 22).

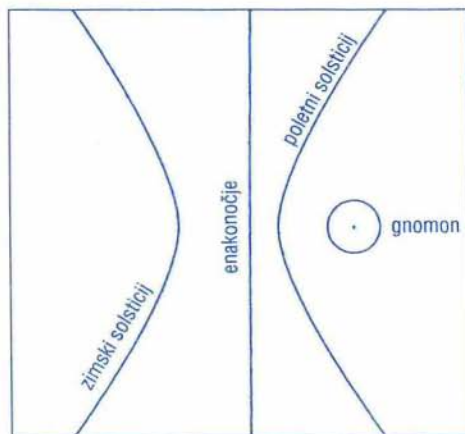
Vodoravna ravnina, na kateri opazujemo senco, ima enačbo $z = -v$. Presek te ravnine in plašča dvojnega stožca z enačbo (1) je stožnica, ki prikazuje, kako se konec sence od Sonca osvetljene navpične palice (pokončnega stožca) določenega dne premika po vodoravni ravnini. Da dobimo enačbo stožnice, v enačbo (1) vstavimo $z = -v$. Dobimo

$$(x \cos \varphi - v \sin \varphi)^2 = (x^2 + y^2 + v^2) \sin^2 \delta.$$

To pa je splošna oblika enačbe iskane stožnice, ki jo v določenem času ($\delta = \delta(t)$) in kraju φ zemljepisno širino φ na vodoravni ravnini popiše konec sence. Za vsak par vrednosti φ in δ (glej omejitve spredaj) dobimo drugačno stožnico.



Slika 3. K izpeljavi enačbe plašča dvojnega krožnega stožca, katerega os je usmerjena proti severnemu nebesnemu polu. Presek tega plašča in vodoravne ravnine, ki gre skozi nožišče navpične palice (osnovno ploskev stožca), je v splošnem stožnica.



Slika 4. Senca navpične palice (gnomona) ob treh značilnih datumih za naše kraje – teorija.

Praksa: Naslovnica prikazuje moja opazovanja sence, ki sem jih opravil na ravninici pred domačo češnjo na Gorenjskem in so trajala več kot poldrugo leto. Prikazano je premikanje konca sence navpične palice (z leve) ob božiču, sredi oktobra, ob enakonočju, ob kresu.

Na prvi pogled se zdi enačba sence precej zapletena, v resnici pa ni, posebno če imamo računalnik in primerno programsko orodje, npr. Derive ali Origin. Enačbo sence (eksplicitno obliko funkcije) vnesemo v računalnik, odtipkamo določeno vrednost za φ (zemljepisna širina kraja)

in določeno vrednost za δ (deklinacija Sonca za določen dan v letu) ter senco lahko opazujemo na zaslonu računalnika.

Za kraje v Sloveniji lahko za zemljepisno širino vnesemo kar 45° ali 46° , za druge kraje pa podatek za zemljepisno širino poiščemo na zemljevidu. Podatek za deklinacijo Sonca dobimo v vsakoletnih astronomskih efemeridah (koledarjih), pri nas v publikaciji *Naše nebo* (DMFA Slovenije).

Za zaključek si oglejmo (brez računalnika) tri tipične primere premikanja sence.

- i) Senca na severnem zemeljskem polu

Tu velja $\varphi = 90^\circ$ ($\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1$). Enačba sence dobi obliko $v^2 = (x^2 + y^2 + v^2) \sin^2 \delta$ ali $x^2 + y^2 = \rho^2$, kjer je $\rho = v \cot \delta$ polmer krožnice. Ob kresu ($\delta = 23,5^\circ$) se na severnem zemeljskem polu konec sence premika po krožnici s polmerom $\rho = v \cot 23,5^\circ$. Ob enakonočju ($\delta = 0$) pa sence ni (zakaj že?).

- ii) Senca na ekvatorju

Tu je $\varphi = 0$ ($\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$). Enačbo preoblikujemo v $\frac{x^2}{v^2 \tan^2 \delta} - \frac{y^2}{v^2} = 1$, kar je enačba hiperbole. Konec sence se premika po hiperboli vse dni v letu, razen ob enakonočju, ko je $x = 0$, torej os y oz. premica, ki gre skozi podnožišče palice v smeri od zahoda proti vzhodu.

- iii) Senca pri nas

Je v splošnem hiperbola (izpelji enačbo), razen ob enakonočju, ko je premica z enačbo $x = v \tan \varphi$ (slika 4 in fotografija na naslovnici).

Vaje

Po kakšni krivulji se premika konec sence, ki jo od Sonca obsijana navpična palica z višino v meče na vodoravna tla v krajih na:

1. severnem zemeljskem polarniku ($\varphi = 66,5^\circ$)
 - ob kresu
 - ob enakonočju
2. severnem zemeljskem povratniku ($\varphi = 23,5^\circ$)
 - ob kresu
 - ob enakonočju
3. geografskem vzporedniku s $\varphi = 80^\circ$
 - ob kresu
 - ob božiču

Poskušaj senco vsakič računalniško natisniti.

Marijan Prosen

Rešitve vaj so na str. 173.

42. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

V Washingtonu v Združenih državah Amerike je bila v sredini julija 42. matematična olimpiada, na kateri je sodelovalo 461 tekmovalcev iz 82 držav. V slovenski ekipi so bili tekmovalci Aleksandra Franc s I. gimnazije v Celju, Mojca Miklavc s Škofijske klasične gimnazije Ljubljana, Andrej Košmrlj, Sergej Omladič, Matija Pretnar in Klemen Šivic – vsi z Gimnazije Bežigrad, član mednarodne tekmovalne komisije Darjo Felda s Fakultete za elektrotehniko ter vodja ekipe Matjaž Željko s Fakultete za matematiko in fiziko.

Ekipa je prispela v Washington nekaj dni pred tekmovanjem. Dneve smo preživel v prijetnem okolju Univerze George Mason, kjer je bilo kasneje tudi tekmovanje. Kot običajno so se tekmovalci v dveh zaporednih tekmovalnih dneh spoprijeli s po tremi nalogami dnevno, za kar so imeli vsak dan na voljo po štiri ure in pol.

Po napornih tekmovalnih dnevih so si tekmovalci ogledali še nekaj lokalnih znamenitosti in se z avtobusi podali na celodnevni izlet v Baltimore.

Med tekmovalnimi nalogami sta bili tudi naslednji dve:

1. Naj bo O središče očrtane krožnice ostrokotnega trikotnika ABC in P nožišče višine iz A na BC . Predpostavimo, da velja $\sphericalangle BCA \geq \sphericalangle ABC + 30^\circ$.
Dokaži, da velja $\sphericalangle CAB + \sphericalangle COP < 90^\circ$.
2. Naj bo n liho celo število, večje od 1, in naj bodo $k_1, k_2, \dots, k_n$ dana cela števila. Za vsako izmed $n!$ permutacij $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ števil $1, 2, \dots, n$ naj bo

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

Dokaži, da obstajata taki permutaciji b in c , $b \neq c$, da je $n!$ delitelj razlike $S(b) - S(c)$.

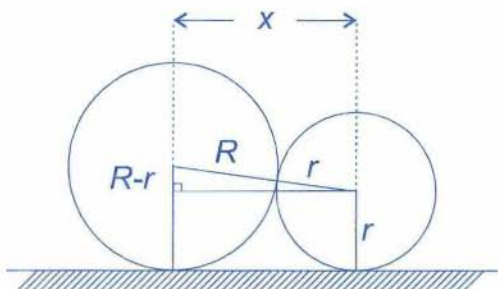
Ekipa Slovenije se je na letošnji olimpiadi srčno borila, vendar en teden predavanj v januarju in nekajdnevne priprave na samem prizorišču olimpiade niso mogli nadomestiti odsotnosti celoletnih priprav. Privikrat doslej smo se domov vrnili povsem praznih rok.

Nastop na olimpiadi so v veliki meri omogočili Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport in sponzorja Hermes Softlab iz Ljubljane ter Mura iz Murske Sobote.

Matjaž Željko

ZLAGANJE KOVANECV – Rešitev s str. 23

Izračunajmo najprej vodoravno razdaljo med središčema dveh zaporednih kovancev. Polmer prvega kovanca označimo z R , polmer drugega pa z r .



Po Pitagorovem izreku (glej sliko) velja

$$(R + r)^2 = x^2 + (R - r)^2.$$

Od tod sledi

$$x = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Kovanci v nalogi imajo po vrsti premere 22, 26, 24, 22, 20, 18 in 16 milimetrov. Če za zaporedne pare kovancev uporabimo zgornjo formulo in prištejemo še polmer prvega in zadnjega kovanca, dobimo, da je širina razvrstitve kovancev iz besedila naloge enaka

$$\begin{aligned} 11 &+ 2\sqrt{11 \cdot 13} + 2\sqrt{13 \cdot 12} + 2\sqrt{12 \cdot 11} + \\ &+ 2\sqrt{11 \cdot 10} + 2\sqrt{10 \cdot 9} + 2\sqrt{9 \cdot 8} + 8 \doteq 147.795 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Naj opozorim, da zgornje sklepanje ni pravilno, če se polmeri kovancev močno razlikujejo. Tedaj je namreč moč manjše kovance postaviti med večje kovance tako, da ne vplivajo na širino razporeditve. V prostor med dva enako velika kovanca je npr. moč vstaviti kovanec, katerega polmer je enak četrtini polmera obeh večjih kovancev; med kovanca, katerih polmera sta v razmerju 1 proti 4, pa je moč vstaviti kovanec, katerega polmer je enak $\frac{4}{9}$ polmera manjšega od obeh kovancev.

Drugega dela naloge sem se lotil z računalnikom. Vseh razvrstitev kovancev je $7! = 5040$, torej ne zelo veliko. Napisal sem program, ki je generiral vse razvrstitve in za vsako na zgoraj opisani način izračunal, kakšno širino ima. Generiranje razvrstitev ni prav zapletena naloga. V

resnici je to enak problem kot generiranje permutacij. Kodo podprograma v programskem jeziku C, ki s pomočjo rekurzije zgradi vse permutacije, lahko najdete npr. v knjigi *C naj bo*, naloga 6.11.

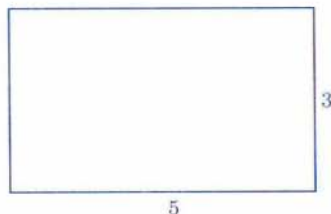


S programom sem ugotovil, da obstajajo štiri razvrstitve z najmanjšo širino. Njihova širina je približno 146.410 milimetra, slab milimeter in pol manj kot pri razvrstitvi z začetka naloge. Ena od teh razvrstitvev je prikazana na zgornji sliki. Preostale tri dobimo z medsebojno zamenjavo kovancev za 1 in 10 tolarjev (ta dva kovanca imata enak premer) ter z zrcaljenjem prek navpične simetrale razvrstitve. Vse druge razvrstitve so vsaj za dve stotini milimetra širše (to me je prepričalo, da sem kljub morebitnim zaokrožitvenim napakam med računanjem res našel prave rešitve).

Martin Juvan

TRI ŠKATLE

Pravokotnik s stranicama v razmerju 5 : 3 razreži na tri (pa samo na tri) kose tako, da bo vsak od njih mreža odprte kockaste škatle, t.j. površja kocke brez ene stranske ploskve.



Marija Vencelj

Rešitev je na str. 157.

O PRIBLIŽKIH ZA ŠTEVILO π

V prvi številki tekočega letnika Preseka je Peter Petek zastavil zanimivo nagradno nalogo o iskanju najboljšega približka za število π ob omejitvi, da je približek izražen le z naravnimi števili, seštevanjem, množenjem in največ dvema kvadratnima korenoma. Priznati moram, da sprva nisem opazil, kako premišljeno so izbrane omejitve. Naj vam pojasnim, zakaj trdim, da so omejitve izbrane premišljeno.

Od štirih osnovnih računskih operacij sta dovoljeni le dve. Deljenja in odštevanja ne smemo uporabiti. Zakaj ne smemo uporabiti deljenja, ni težko ugotoviti. Če bi dovolili deljenje, bi lahko naredili vsa pozitivna racionalna števila (ulomke), z njimi pa se lahko poljubno približamo številu π . Najbolj znana tovrstna približka za π sta ulomka $\frac{22}{7}$ in $\frac{355}{113}$. Prvi je od π večji za dobro tisočino in četrto, drugi pa za nekaj manj kot $3 \cdot 10^{-7}$. Dobre približke za π z (relativno) majhnimi imenovalci dobimo s pomočjo *verižnih ulomkov*. Poleg že omenjenih dveh sta taka še npr. $\frac{104348}{33215}$ in $\frac{312689}{99532}$. Drugi je od π večji za manj kot $3 \cdot 10^{-11}$. Več o verižnih ulomkih in sorodnih temah iz teorije števil lahko preberete v knjigi *J. Grasselli, Diofantski približki*, ki je pred leti izšla v zbirki Knjižnica Sigma.

Nekoliko težje se je prepričati, da nam tudi odštevanje (skupaj z enim kvadratnim korenem) omogoča dobiti poljubno dobre približke za π . Velja namreč naslednja trditve, ki jo navajam brez dokaza.

Za vsako iracionalno število a je množica števil $\{na - [na] \mid n \in \mathbb{N}\}$ "gosta" v intervalu $[0, 1]$. Pri tem $[na]$ označuje celi del izraza na .

Trditve torej pravi, da lahko za vsako število $x \in [0, 1]$ in vsako še tako majhno število $\varepsilon > 0$ najdemo tako naravno število n , da se število $na - [na]$ po absolutni vrednosti razlikuje od x za manj kot ε . Ker je $\sqrt{2}$ iracionalno število, iz trditve sledi, da že množica števil $\{m\sqrt{2} - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ vsebuje poljubno dobre približke za π . Če m in n izbiramo med števili do 1000, sta najboljša $10\sqrt{2} - 11$, ki je od π večji za približno $5.4 \cdot 10^{-4}$, in $418\sqrt{2} - 588$, ki je od π manjši za okoli $3.2 \cdot 10^{-4}$. Seveda lahko namesto $\sqrt{2}$ vzamemo kvadratni koren kateregakoli drugega naravnega števila, ki ni popolni kvadrat.

Ostane še omejitev o uporabi največ dveh kvadratnih korenov. Če bi smeli uporabiti neomejeno mnogo kvadratnih korenov, bi zopet lahko dobili poljubno natančen približek za π . To vidimo na primer takole:

Začnemo z intervalom od števila $a \geq 1$ do malo večjega števila $a + \varepsilon$. Če vsa števila z intervala kvadriramo, dobimo interval od a^2 do $(a + \varepsilon)^2$. Novi interval je vsaj še enkrat daljši od začetnega, saj je $(a + \varepsilon)^2 - a^2 = 2a\varepsilon + \varepsilon^2 > 2\varepsilon$. Če kvadriranje ponavljamo, po nekaj korakih dobimo interval z dolžino vsaj 1. Tak interval pa vsebuje neko naravno število. Če to število sedaj korenimo tolikokrat, kolikorkrat smo kvadrirali začetni interval, dobimo število, ki je od a večje kvečjemu za ε . Preprost približek opisane oblike, ki ga dobimo z zaporedno uporabo treh kvadratnih korenov, je osmi koren iz 9489. Od π je večji za manj kot $2 \cdot 10^{-5}$ in je tako kar precej natančnejši od najboljšega približka, ki ga lahko dobimo z uporabo le dveh kvadratnih korenov. Zanimivo je tudi, kako lahko le z nekaj kvadratnimi koreni dobimo zelo natančne približke za π . Tako se 1024. koren (tega dobimo z 10 zaporednimi kvadratnimi koreni) iz celega dela števila π^{1024} od π razlikuje za manj kot 10^{-512} , kar je res zelo zelo malo. Naj še omenim, da je število, ki nastopa pod koreni, π^{1024} , ogromno, saj ima kar 510 desetiških števk.

In zakaj sta bila v nalogi dovoljena ravno dva kvadratna korena? Če dovolimo le enega, je naloga prelahka in zato ne preveč zanimiva. Če pa dopustimo tri korene (ali morda celo kakšnega več), pa je različnih oblik izrazov, ki jih lahko sestavimo iz njih, že kar preveč za "udobno" reševanje. Omejitev na dva korena je torej ravno pravišnja, da je naloga zanimiva, a ne pretežka.

Ena od možnosti, ki bi jo morda tudi lahko dopustili v nalogi, bi bila uporaba višjih korenov, na primer kubičnih, četrth itd. Naj samo omenim, da je najboljši približek za π , ki ga lahko dobimo z uporabo enega kubičnega korena, kar tretji koren iz 31 (ta je od π manjši za dobri dve desetisočini). Seveda pa bi bilo to še vedno samo iskanje približka, saj števila π ni moč izraziti s končnim številom osnovnih računskih operacij in korenov nad naravnimi števili. Celo več, število π je *transcendentno*, kar pomeni, da ni ničla nobenega polinoma, katerega koeficienti so cela (ali pa racionalna) števila. Dokaz tega dejstva je leta 1882 našel nemški matematik Lindemann (in dokaz ni prav preprost).

Gotovo ste med branjem ugotovili, da številskih primerov, ki sem jih navedel, nisem izračunal s svinčnikom in papirjem, pa tudi ne z navadnim računalom. Uporabil sem osebni računalnik, pri računanju pa sem si pomagal s programskim paketom *Mathematica*, ki je med matematiki kar priljubljen, poleg numeričnega računanja pa zmore še marsikaj drugega.

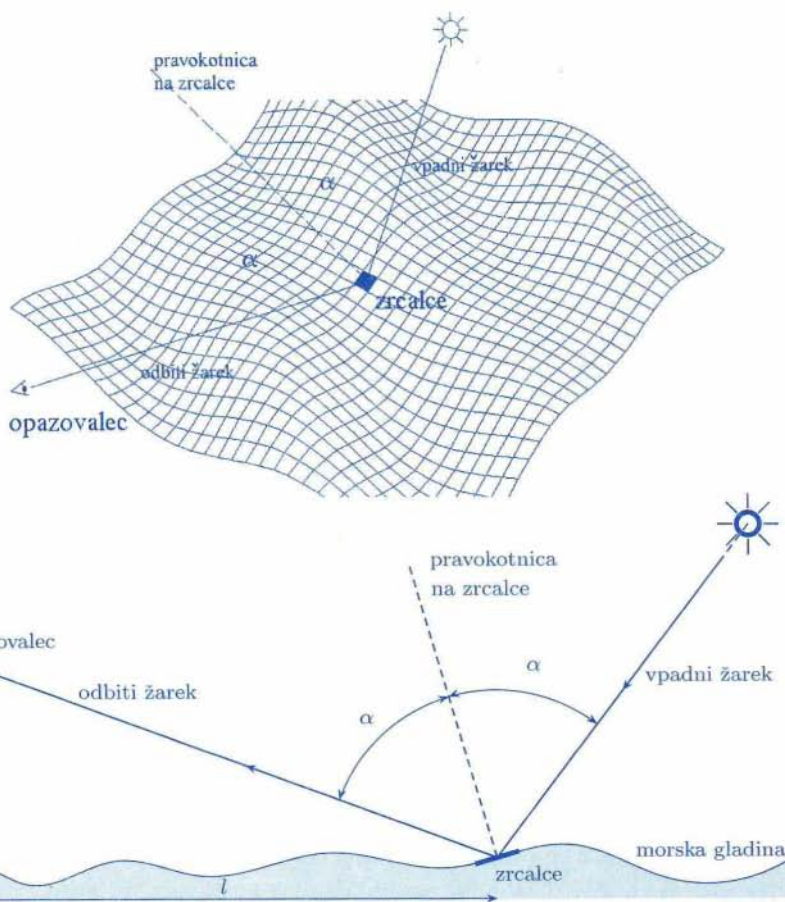
Martin Juvan

POBLISKUJOČA MORSKA GLADINA

Na rahlo vzvalovanem morju zaman iščemo sliko sonca, kot jo včasih opazimo s čolna na jezerski gladini. Opazimo le pobliskujočo vodno gladino. Morje ne odbija sončnih žarkov tako kot ravno zrcalo. Tudi ko je skoraj povsem mirno, vidimo namesto ostre slike sonca le bolj ali manj široko, svetlo, pobliskujočo progo. Ta je še posebno značilna, ko sonce zahaja, saj se razteza od obale do obzorja (glej članek P. Gosarja: *Odboj svetlobe na vodni gladini*, Presek 9 (1982/82) 34).

Pojava ni težko razumeti, če si predstavljamo valovito morsko gladino kot množico majhnih ravnih zrcalc, ki ne ležijo v isti ravnini. V nekem trenutku so nekatera nekoliko nagnjena, da se pravokotnica nanje nakloni proti opazovalcu nad gladino, pri drugih od njega, spet pri tretjih na levo ali desno. Poblisk vidimo le tedaj, ko nam izbrano zrcalce za hip usmeri sončne žarke naravnost v oko. Tedaj je za kratek čas izpolnjen pogoj, ki sledi iz odbojnega zakona: vpadni kot, ki ga tvori žarek od sonca s pravokotnico na zrcalce, je enak kotu, ki ga tvorita ta pravokotnica in premica skozi oko in zrcalce. Za pobliske, ki ležijo v navpični ravnini sonca in opazovalca, lahko izračunamo kot med vpadnim in odbitim žarkom. Potrebno je le poznati kot med navpičnico in smerjo sonca na nebu ter kot med navpičnico in smerjo, kjer opazimo poblisk. Slednjega brez težav izračunamo, če poznamo višino opazovalca h , merjeno od gladine, ter razdaljo l od točke na morju, natančno pod opazovalcem, do točke pobliska (glej sliko 1). Kljub povsem nepredvidljivemu valovanju morske gladine mesto pobliska razkrije nagnjenost zrcalca ter kot med vpadnim in odbitim žarkom. Ta kot je pomemben, če opazujemo gladino skozi polarizacijska očala.

Odbito valovanje je namreč polarizirano, če tvorita odbiti in lomljeni žarek, ki nadaljuje pot v vodi, pravi kot. Vpadni kot α_B , pri katerem se to zgodi, je *Brewstrov kot* (glej sliko 2). Odbito valovanje je polarizirano vodoravno, torej tako, da niha električna poljska jakost v vodoravni ravnini. Če opazujemo morsko gladino skozi polarizacijska očala, ki te svetlobe ne prepuščajo, na določeni razdalji ne bomo videli pobliskov, temveč le svetlobo, ki prihaja z dna. Na sliki na III. strani ovitka to lepo vidimo. Leva fotografija je posneta s polarizacijskim filtrom, ki prepušča polarizirano svetlobo z električno poljsko jakostjo v vodoravni ravnini. Na desni fotografiji pa smo filter zasukali za 90° . Povsem jasno vidimo, da na določeni razdalji od obale pobliskov ni, na krajši in večji razdalji pa se njihova svetlost povečuje. Slika se posreči le, če fotografiramo z mesta, ki je dovolj visoko nad gladino. Najbolje bi se posrečila taka fotografija iz letala. Naša je bila posneta z okna hotela na robu visoke pečine na slovenski obali.



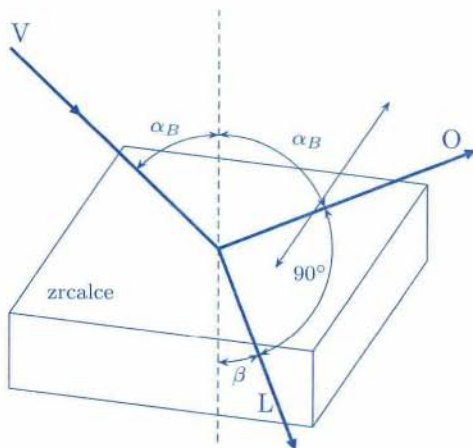
Slika 1. Opazovalec nad morjem zazna poblisk, ko je zrcalce ravno prav orientirano. Sončni žarki tvorijo z navpičnico kot 45° .

V grobem preverimo sliko še računsko. Iz lomnega zakona hitro določimo Brewstrov kot. Z oznakami kotov na sliki 2 velja

$$\frac{\sin(\alpha_B)}{\sin(\beta)} = n.$$

Tu je n lomni količnik vode, za zrak pa smo privzeli, da ima lomni količnik enak 1. Ker tvorita odbiti in lomni žarek pravi kot, velja še

$$\alpha_B + 90^\circ + \beta = 180^\circ.$$



Slika 2. Ko vpada nepolarizirana svetloba na zrcalce pod Brewstrovim kotom, tvorita lomljeni žarek L in odbiti žarek O pravi kot. V odbiti svetlobi niha električna poljska jakost le v vodoravni smeri.

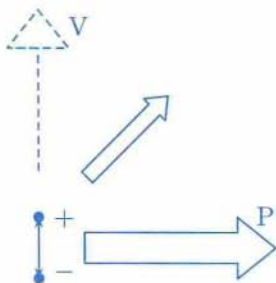
Od tod z izločitvijo kota β dobimo zvezo

$$\tan(\alpha_B) = n.$$

Lomni količnik vode je $n = 1,33$, zato je Brewstrov kot α_B enak 53° . Fotografirali smo v času, ko je bil kot med sončnimi žarki in navpičnico 45° . Interval vpadnih kotov sončnih žarkov na zrcalca, ki pobliskujejo, je med $45/2^\circ$ (zrcalce pod opazovalcem) in $(45 + 45/2)^\circ = 67,5^\circ$ (za zrcalce na obzorju). Res, interval vsebuje tudi Brewstrov kot.

Ali razumemo Brewstrov zakon? Zakaj je odbito valovanje povsem polarizirano, ko tvorita odbiti in lomljeni žarek pravi kot? Poskušajmo nekoliko poenostavljeno odgovoriti na to vprašanje. Odbito in lomljeno valovanje nastaneta zaradi sipanja vpadnega valovanja na molekulah. Predstavljajmo si vpadno nepolarizirano valovanje, sestavljeno iz dveh komponent, ene polarizirane v vodoravni, druge pa v navpični ravnini. Električno polje *polarizira* molekule. V zunanjem električnem polju težišči pozitivnega in negativnega naboja pri molekulah ne sovpadata. Ker električna poljska jakost niha, prav tako nihata težišči in zato molekula *dipolno* seva. Značilno za dipolno sevanje je, da v smeri nihanja sevanja ni, največ pa ga je v pravokotni smeri (glej sliko 3). Pri vpadu navpično polarizirane komponente pod Brewstrovim kotom nihajo težišča v smeri gledalca, zato le-ta sipanega valovanja ne vidi. Vidi pa sipano valovanje vodoravno polarizirane komponente, kjer težišči nihata pravokotno na njegovo smer.

Slika 3. Dipolno sevanje je najmočnejše, ko težišči pozitivnega in negativnega naboja nihata prečno na smer opazovanja (P). Ko opazujemo molekulo v smeri nihanja (V), valovanja ne zaznamo.



Tovrstno razmišljanje pomaga, da si za dlje časa zapomnimo razmere pri odboju svetlobe na meji med dvema dielektrikoma.

Andrej Likar

KVADRIRANJE DVOMESTNIH ŠTEVIL, KI SE ZAČENJAJO S 5

Sosedov Tim zelo rad računa na pamet. Ko sem mu pred kratkim zaupala skrivnost hitrega kvadriranja števil, ki se končujejo s števk 5 (saj veste – kar stoji pred 5, pomnožimo z za ena večjim številom in produktu pripišemo 25), se je odzval z občudujočim: “Uaaau.”

Čez dva dni mi je ob srečanju ‘mimogrede’ namignil, da je iznašel pravilo za kvadriranje dvomestnih števil, ki se **začenjajo** s 5. Seveda sem pokazala dolžno zanimanje, zato mi je pravilo zaupal. Takole gre:

Kvadrat dvomestnega števila, ki se začenja s 5, dobimo tako, da številu 25 prištejemo vrednost enic danega števila in tako dobljeni vsoti pripišemo kvadrat enic kot dvomestno število. (Če je kvadrat enic enomestno število, npr. 1, 4 ali 9, moramo torej pripisati 01, 04 oziroma 09.)

Izračunajmo npr. 57^2 .

1. korak: Zapišemo $32_$, ker je $25 + 7 = 32$.

2. korak: Ker je $7^2 = 49$, pripišemo 49 in dobimo 3249 . Torej je $57^2 = 3249$.

Tim je iz žepa potegnil še dokaz, da je njegov postopek pravilen. Na listku je imel zapisane kvadrate vseh dvomestnih števil, ki se začenjajo s 5, izračunane dvakrat. Enkrat z žepnim računalom, drugič po njegovem pravilu. Obakrat je dobil enake rezultate.

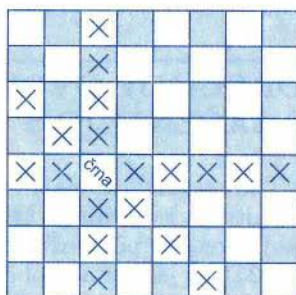
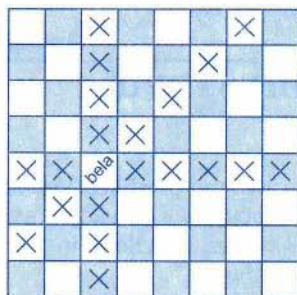
Nalogi za vas:

1. V splošnem premislite, zakaj Timovo pravilo deluje.
2. Ali tudi pri kakšni drugi številski osnovi velja podobno pravilo? Kdaj in kakšno?

Marija Vencelj

POLKRALJICE

Polkraljica je (izmišljena) šahovska figura, ki je po moči med trdnjavo in pravo kraljico. Pravzaprav poznamo dve vrsti polkraljic, bele in črne. Bela polkraljica napada vsa polja v svoji vrstici, vsa polja v svojem stolpcu in vsa polja na naraščajoči diagonal, na kateri stoji. Podobno črna polkraljica napada vsa polja v svoji vrstici in v svojem stolpcu ter še vsa polja na padajoči diagonal, na kateri stoji. Napadena polja za obe vrsti polkraljic so prikazana tudi na spodnji sliki.



Na šahovnico velikosti $n \times n$ je vedno moč postaviti n trdnjav tako, da nobena ne napada nobene druge (in sicer na $n!$ različnih načinov). Če je $n \neq 2, 3$, potem obstaja tudi taka postavitvev n kraljic. Vsaka postavitvev n kraljic pa določa 2^n različnih postavitvev n polkraljic (vsako kraljico lahko spremenimo v belo ali v črno polkraljico). Poleg tega pa obstaja tudi mnogo postavitvev polkraljic, ki jih ne dobimo tako, da kraljice spremenimo v polkraljice (taka je npr. postavitvev črnih polkraljic po glavni naraščajoči diagonal šahovnice).

■ V nalogi nas bodo zanimale postavitve polkraljic, pri katerih nobena polkraljica ne napada nobene druge. Natančneje, zanimalo nas bo, na koliko različnih načinov lahko na šahovnico velikosti $n \times n$ postavimo k belih in $n - k$ črnih polkraljic tako, da nobena ne napada nobene druge. S poskušanjem hitro najdemo naslednje vrednosti:

velikost šahovnice	1×1	2×2	3×3
število belih polkraljic	0 1	0 1 2	0 1 2 3
število postavitvev	$\underbrace{1 \quad 1}_2$	$\underbrace{1 \quad 0 \quad 1}_2$	$\underbrace{3 \quad 2 \quad 2 \quad 3}_{10}$

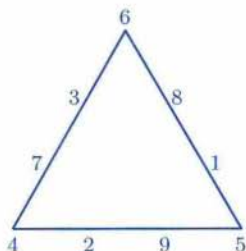
Iz tabele razberemo, da ne obstaja “miroljubna” postavitve ene bele in ene črne polkraljice na šahovnico velikosti 2×2 . Morda ste v gornji tabeli opazili tudi nekaj simetrije. Za izbrani n je namreč vrednost pri k enaka tisti pri $n - k$. To ni slučaj, saj nam zrcaljenje prek vodoravne (ali pa prek navpične) simetrale šahovnice prevede “miroljubno” postavitve k belih in $n - k$ črnih polkraljic v “miroljubno” postavitve $n - k$ belih in k črnih polkraljic.

Sedaj pa k vprašanju. Sprašujem vas, na koliko različnih načinov je moč na običajno šahovnico velikosti 8×8 postaviti 8 polkraljic tako, da nobena od njih ne napada nobene druge. Naj vas opozorim, da je iskanih postavitve veliko, saj lahko že kraljice postavimo na 92 različnih načinov, vsaka postavitve kraljic pa določa kar 256 različnih postavitve polkraljic. Zato vam predlagam, da se naloge lotite z računalnikom. Za izhodišče lahko vzamete računalniški program, ki poišče vse postavitve kraljic na šahovnico, in ga ustrezno prilagodite. Tak program, napisan v programskem jeziku C, je npr. rešitev naloge 5.16 v knjigi *C naj bo*.

Martin Juvan

PRERAZPOREDI ŠTEVILA

Naravna števila od 1 do 9 so razporejena po robu trikotnika na sliki tako, da je vsota števil na posamezni trikotnikovi stranici enaka 20. Ali lahko prerazporedimo števila tako, da bo vsota števil na vsaki stranici enaka 17?



Marija Vencelj

Rešitev je na str. 174.

KRIŽANKA “ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ”

KONJENIK DOMAČIN V SLUŽBI FRANCOŠKE KOLONIALNE VOJSKE V AFRIKI	RAZPORED UČNIH PREDMETOV V DNEVU, TEDNU	NEKDANJI TUNJSKI VLADARSKI NASLOV	KOLIČNIK SILE IN PLOSKEVE V FIZIKI	AVTOMOB. OZNAKA REKE	RIMSKA BOGINJA JUTRANJE ZARJE	NIZOZ. MESTO S SODIŠČEM ZA VOJNE ZLOČINE	ANG. IZRAZ ZA KONEC	OBDELAN KOS POLJA	PRED- STOJNIK FAKULTETE	AVT. MAF. BOG
ODŠTE- VANEČ										MNOŽ
PRETA- KANJE										RINJE KOI STR VNE MAND
PEVKA RUPEL				KORENSKA OSNOVA						
MEDMET ZA PRI- GANJANJE KONJA		GEOMETR. LIK BREZ OGLIŠČ					MELANEZ. OTOSKA DRŽAVA			
		DEL PESNITVE					KULTURNA RASTLINA			
NEZNANKA V ENACBI			POVRŠINSKA MERA			AM. FILM. IGRALKA (JESSICA)				
			UPAD ČLANSTVA			GALOP				
	ISKRE NOST	MAŽILO, MAŽA						TRENJE	IVJE	
		RAZLIKA							STOPNJA POTENCE	
UKRAJIN- SKO PRI- STANIŠČE					OFICIR, KI VODI OŠKRBO ENOT					
					ČIKI					
DELITELJ							PRITOK VOLGE			
							KRAJ JUŽNO OD MARIBORA			
KONSTAN- TIN FEDIN		OTOK POD VELEBITOM				NAŠ IGRALEC (ŽELJKO)				PEC LJU
		ZIDARSKI POMOČNIK				NEUMNOST				AGI ODRSK
ROMULOV BRAT DVOUČEK			DEDEK V PRIMOR. OKOLJU					BARVNA SLIKARSKA TEHNIKA		
			MEDVEDEK VREČAR							
DRŽAVA OB EVFRATU IN TIGRISU				DRŽAJ				ŠVIC. POLI- TIK (ADOLF)		
								VRTILNA KOLIČNA DELCEV		
PROSTOR- SKA GEOM. TVORBA				POLETNA ŽUŽELKA, KI SVETI						
				ETIOPSKI KNEZ						
NAJVZHOD- NEJŠE OD AMER. VELIKIH JEZER							NEKO. FR. DRŽAVNIK (HENRI PHILIPPE)			
							KATERI			
MILANSKA OPERNA HISA					TROPSKI KUŠČAR, KI RUJE PO PESKU					
GOGOLJEV JUNAK BULJBA					ČRNILO					

OR KO LIC	ZMANJ- SEVANEČ	DEL KONJSKE OPREME, POVODEC	LIDUJA PREDOVIČ	MISIČNA NAPETOST	SREDINA RIMSKEGA MESECA	KAMENJE NA VODNEM OBREŽJU	LITERARNI ZGODO- VINAR LEGISA	IVAN VIDAV	VIŠJI DEL KRMNE S PROSTORI ZA OFICIRJE	PRIPADNIK IZGINULE VEJE SLOVANOV	ARKTIČNI PINGVIN, ALK	ZNAK ZA DELJENJE BESED, VEZAJ
ENEC												
ŠNE JA AN												
TJE LJEV												
			ŽLAHTNI PLIN					KOS POHIŠTVA				
			NAJSTNIK (ORIG.)					ŠTEVILNA PEVSKA SKUPINA				
					PREDPISAN ODMEREK ZDRAVILA					RIHARD JAKOPIČ		
					KADAR					GLAZURA, POSTEKLINA		
		ŠKOTSKA REKA				GOZDNO DREVO Z BELIMI CVETOV						
		NAJMLAJŠI NOETOV SIN				KOLIČNIK	PROJEKCIJA OD SPREDAJ					
				ODPRITINA V ZIDU						VELIKI TRAVEN		
				NAŠ TENISAČ (MARKO)						RJAV PRAH ZA ČOKOLADO		
					RAZVALINE SUMER, MESTA URIUK						DELJENEC	ORJAŠKA JUŽNO- AMERIŠKA KACA
					TELEVIZIJA							
	ČLEN PRI MNOŽENJU											
	SAMICA DOMAČE ŽIVALI							VRSTA ŽITA				
JAVI DJE								ZAGOZDA				
PAC. A IGRA								ZBOR VSEH ČLANOV ORGANI- ZACIJE				
					PODSTREŠ- JE (NAREČ.)					VOLT AMPER		
					PLOŠČICA NA TELE- SU RIB					TENISAČ IVANIŠEVIČ		
		STIKALNA NAPRAVA					KDOR DOBRO RAZMIŠLJA					
		VERDUEVA OPERA					ČISTINA V GOZDU					
			KRPE							REDKA OBLIKA IMEN OTON IN OTOKAR		
			NAJDALJŠA REKA NA SVETU							NEJVEČJA REKA ZAH. EVROPE		
				DRUŽBENI SLOJ						OZNAKA MAROKA		
				OZNAKA FINSKE								
	MAGNETNI POMNILNIK V RAČU- NALNIKU					SEŠTE- VANEČ						
	PRVA GRŠKA CRKA					PEVKA LEAR						

TLAK POJEMA Z VIŠINO

Vprašanje, kako v kapljevini in v plinu tlak pojema z višino, pripelje do zanimivih sklepov, če smo pripravljeni malo računati. Pri tem si pomagamo z žepnim računalom. Rezultati, dobljeni za molekule v plinu, veljajo tudi za velike delce, ki lebdi v kapljevini in ki jih je mogoče videti z mikroskopom. Ti rezultati so imeli pomembno vlogo v razpravi o obstoju atomov in molekul pred devetdesetimi leti.

V mirujoči tekočini tlak pojema z naraščajočo višino ali narašča z naraščajočo globino. Tega se dobro zavedajo tudi potapljači. Tlak naraste za 1 bar, ko se potopijo za 10 m (1 bar = 10^5 N/m² je približno enak zračnemu tlaku na morsko gladino; enota za tlak v mednarodnem sistemu je N/m² ali pascal). Da pojasnimo to, si v vodi predstavljamo navpično prizmo s spodnjo osnovno ploskvijo S v višini z_0 in zgornjo v višini z . Na spodnjo osnovno ploskev deluje sila vode $Sp(z_0)$ navpično navzgor in na zgornjo sila vode $Sp(z)$ navpično navzdol. Prizma miruje, zato je vsota teh dveh sil in teže prizme $mg = \rho Szg$, ki deluje navpično navzdol, enaka nič. $g = 10$ m/s² je težni pospešek in $\rho = 10^3$ kg/m³ gostota vode. Iz tega izhaja razlika tlakov

$$p(z) - p(z_0) = -\rho g(z - z_0), \quad (1)$$

če višino z štejemo pozitivno navpično navzgor. V globini $z_0 = -10$ m je tlak za 10^3 kg m⁻³ · 10 m s⁻² · 10 m = 10^5 N/m² = 1 bar večji kot na gladini pri $z = 0$. Vselej, ko se spustimo za 10 m, se tlak poveča za 1 bar. Voda se namreč zaradi povišanega tlaka le neznatno zgosti. Privzeti smemo, da se gostota z globino ne spreminja.

V zraku lahko računamo tako le pri majhni višinski razliki. Pri navadnem zračnem tlaku $p_0 = 1$ bar meri gostota zraka $\rho_0 = 1,2$ kg/m³. Zračni tlak se zmanjša za $1,2$ kg m⁻³ · 10 m s⁻² · 10 m = 120 N/m² od 1 bara na 0,9988 bara, ko se od višine 0 dvignemo za 10 m.

Kako visoko (z_r) bi bilo ozračje, če bi po vsej višini imelo gostoto, ki jo ima pri tleh? Iz enačbe (1) sledi $z_r = p_0/\rho_0 g = 10^5$ N m⁻²/1,2 kg m⁻³ · 10 m s⁻² = 8330 m.

Gostota plina se zmanjša, ko se zniža tlak, in je pri konstantni temperaturi sorazmerna s tlakom. Pri tlaku 0,9988 bara v višini 10 m meri gostota zraka $1,2 \cdot 0,9988$ kg/m³ = 1,1986 kg/m³. Sprememba gostote je majhna, a jo moramo upoštevati, če sprememba višine ni majhna v primeri z z_r . Gostota je odvisna od tlaka in tlak od gostote. Pomagamo si tudi

z omenjenim spoznanjem o gostoti plina pri konstantni temperaturi. Iz $\rho/\rho_0 = p/p_0$ izhaja

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{p_0} p(z).$$

Zvezo vstavimo v enačbo (1) in upoštevamo, da se sme višina samo malo spremeniti. Za z vstavimo $z + \Delta z$, za z_0 pa z :

$$\frac{p(z + \Delta z) - p(z)}{p(z)} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \Delta z = -\frac{\Delta z}{z_r}. \quad (2)$$

Višino večajmo v enakih korakih po $\Delta z = 10$ m: v prvem od 0 na Δz , v drugem od Δz na $2\Delta z$, v tretjem od $2\Delta z$ na $3\Delta z$, ... v koraku $\mathcal{N}$ od $(\mathcal{N} - 1)\Delta z$ na $\mathcal{N}\Delta z$. Lahko si mislimo, da se dvigamo po stopnišču z visokimi stopnicami. Desna stran enačbe (2) ostane nespremenjena, na levi strani pa dobimo po vrsti $p(\Delta z) - p_0$, $p(2\Delta z) - p(\Delta z)$, $p(3\Delta z) - p(2\Delta z)$, ... $p(\mathcal{N}\Delta z) - p((\mathcal{N} - 1)\Delta z)$. Nato zidamo:

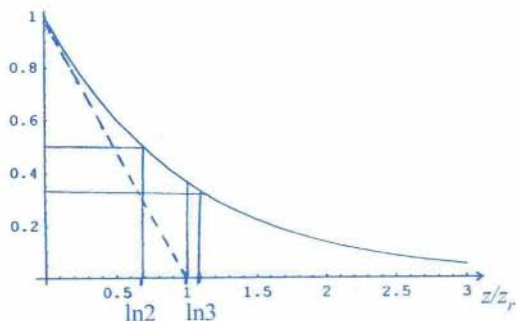
$$\begin{aligned} p(\Delta z) &= p_0(1 - \Delta z/z_r), \\ p(2\Delta z) &= p(\Delta z)(1 - \Delta z/z_r) = p_0(1 - \Delta z/z_r)^2, \\ p(3\Delta z) &= p(2\Delta z)(1 - \Delta z/z_r) = p_0(1 - \Delta z/z_r)^3, \\ &\vdots \\ p(\mathcal{N}\Delta z) &= p((\mathcal{N} - 1)\Delta z)(1 - \Delta z/z_r) = p_0(1 - \Delta z/z_r)^{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Z zadnjo enačbo lahko izračunamo tlak po poljubnem koraku $\mathcal{N}$ v višini $z = \mathcal{N}\Delta z$ (slika 1). Naraščanju tlaka ustreza geometrijsko zaporedje, če naraščanju višine ustreza aritmetično. Lahko bi vzeli manjši korak kot $\Delta z = 10$ m. Precej večji korak pa ne bi dal uporabnega izida. Približek je tem boljši, čim manjši je korak. Tako smo tlak izračunali po korakih.

Kako se spreminja tlak, ko se dvigamo po gladkem klancu brez stopnic, ugotovimo, ko si predstavljamo, da postajajo stopnice vse nižje. Iz matematike si sposodimo enačbo $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 1/x)^x = 1/e = e^{-1}$. Indeks $x \rightarrow \infty$ pomeni, da x naraste čez vsako mejo. Z e smo zaznamovali *osnovo naravnih logaritmov* $e = 2,71828 \dots$. Zares z računalom za $(1 - 1/x)^x$ z $x = 10$, 10^4 in 10^7 po vrsti dobimo $1/2,86797$, $1/2,71842$ in $1/2,71828$. Vstavimo $\mathcal{N}\Delta z = z$ in $\mathcal{N}z_r/z = x$, pa imamo

$$p(z) = p_0 \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \right]^{z/z_r} = p_0 e^{-z/z_r}. \quad (3)$$

N	z	p
0	0	1,0000 bar
200	2 km	0,7869
400	4	0,6185
577	5,77	0,5002
600	6	0,4864
800	8	0,3825
833	8,33	0,3678
915	9,15	0,3333
1000	10	0,3008
1200	12	0,2366
1400	14	0,1862
1600	16	0,1464
1800	18	0,1152
2000	20	0,0906
2200	22	0,0712



Slika 1. Odvisnost razmerja p/p_0 , ρ/ρ_0 ali n/n_0 od razmerja z/z_r v ozračju pri temperaturi okoli 20°C za korak $\Delta z = 10\text{ m}$.

Enakovreden je zapis $p(z) = p_0 \cdot 2^{-z/z_2}$, na katerega naletimo včasih. Lahko bi zapisali tudi $p(z) = p_0 \cdot 3^{-z/z_3}$ in tako dalje s poljubno osnovo. Na *relaksacijski višini* $z_r = 8330\text{ m}$ se zmanjša tlak na $1/e = 0,3679$ vrednosti, ki jo ima pri tleh. To je tudi povprečna višina ozračja. Na *razpolovni višini* $z_2 = 5770\text{ m}$ se zmanjša tlak na polovico in na višini $z_3 = 9150\text{ m}$ na tretjino vrednosti pri tleh.

Eksponentna funkcija (3), do katere smo se nekoliko okorno dokopali, je ena od najpomembnejših *elementarnih funkcij* v fiziki. Nanjo naletimo med drugim še pri radioaktivnem razpadanju, absorpciji svetlobe, prehodnih pojavih v električnih vezjih. Njena inverzna funkcija je *naravni logaritem*. (Mimogrede: velja $e^{-x} = 2^{-x/\ln 2}$ in $z_2 = z_r \ln 2$ ter $e^{-x} = 3^{-x/\ln 3}$ in $z_3 = z_r \ln 3$.)

Pri dani temperaturi sta tlak in gostota ρ sorazmerna in gostota ρ je sorazmerna z gostoto molekul $n = \rho/m_1$, če je m_1 masa ene molekule. Zato tudi gostota in gostota molekul n višino eksponentno pojemata: $\rho = \rho_0 e^{-z/z_r}$ in $n = n_0 e^{-z/z_r}$. Pri tem sta ρ_0 in n_0 gostota in gostota molekul v višini $z = 0$.

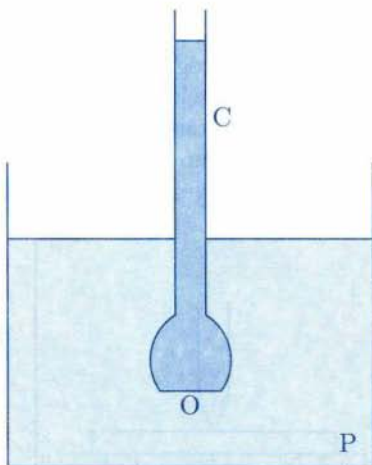
Izraz za relaksacijsko višino lahko nekoliko preuredimo, če s plinsko enačbo nekoliko bolj splošno zapišemo zvezo med tlakom in gostoto: $p = \rho RT/M$. Pri tem je $R = 8313\text{ J/K}$ splošna plinska konstanta in

$M = m_1 N_A$ masa kilomola. Avogadrovo število N_A pove število molekul v kilomolu. Z vsem tem dobimo

$$z_r = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{kT}{m_1 g} \quad \text{in} \quad \frac{z}{z_r} = \frac{m_1 g z}{kT}. \quad (4)$$

Pri tem smo vpeljali Boltzmannovo konstanto $k = R/N_A$. V zadnjem razmerju je $m_1 g z$ potencialna energija molekule, kT za termično gibanje pri temperaturi T tipična energija. Relaksacijska višina doseže 124 km za vodik, 8,91 km za dušik in 7,79 km za kisik. V ravnovesju bi se ti plini po višini v ozračju porazdelili skladno s temi podatki, če bi bila temperatura konstantna. Temperatura v ozračju pojema z naraščajočo višino, zato račun odpove. Vseeno pa pojasni, da je Zemlja izgubila vodik zaradi razmeroma šibke gravitacije.

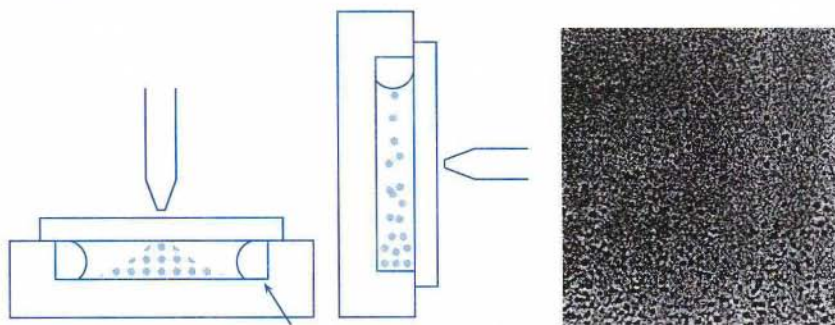
Slika 2. Veljavnost enačbe $p = \rho RT/M$ v raztopini je mogoče neposredno preskusiti. Spodnje krajišče odebeljene cevi C je zaprto s polprepustno opno O. V cevi je v prostornini vode V raztopljena snov z maso m – pri tem velja $\rho = m/V$ – in maso kilomola M . Cev je potopljena v posodo s čisto vodo P. Voda skozi opno prehaja v cev, raztopljena snov pa ne more uhajati iz cevi. V ravnovesju je gladina raztopine v cevi višja kot gladina vode v posodi. Višinski razliki ustreza osmozni tlak, ki lahko doseže znatne vrednosti. V raztopini sladkorja, ki vsebuje na primer 0,3 mola v litru vode, doseže 7 barov. Pojav je zelo pomemben v biologiji, saj npr. poganja vodo po rastlinah navzgor. Odkrili so ga sredi 18. stoletja in ga kmalu podrobneje raziskali. Leta 1886 je Jacobus van't Hoff ugotovil, da za raztopljeno snov v kapljevini velja enaka enačba kot za plin. To je mogoče na hitro utemeljiti, češ da je raztopljena snov v ravnovesju s svojo paro, za katero velja plinska enačba. Učeno rečemo, da se ujemata njuna kemijska potenciala. Izvor tlaka v kapljevini pa je drugačen kot v plinu, o čemer priča to, da velja enačba v kapljevini le pri majhni koncentraciji raztopljene snovi.



Pomembno je, da enačbi (3) in (4) ne veljata samo za plin in za molekule v njem, ampak tudi za snov, ki je raztopljena v kapljevini, in njene molekule, dokler je raztopina razredčena. Molekule lahko vsebujejo malo ali veliko atomov in imajo majhno ali veliko maso. Ne samo to, enačbi veljata tudi za večje, z mikroskopom vidne delce, ki lebdiijo v kapljevini. Za molekule z relativno molekulsko maso 250 meri relaksacijska višina v raztopini 1 km, za delce, ki jih vidimo pod mikroskopom in ki

imajo milijardokrat večjo maso, pa meri samo mikrometer, μm , milijonino metra ali tisočino milimetra.

Sedimentacijsko ravnovesje, to je ravnovesje vidnih delcev, ki lebdijo v kapljevini, je temeljito raziskal francoski fizik Jean-Baptiste Perrin s svojo skupino. Podrobno je izmeril, kako se z višino spreminja gostota kroglastih delcev, ki lebdijo v kapljevini, in določil Avogadrovo število. Čeprav so ga že prej določili nekateri drugi, je bil to okoli leta 1911 pomemben uspeh. Najprej je dolgo časa iskal snov, ki bi jo bilo mogoče oblikovati v zelo majhne kroglice. Koloidne raztopine se niso obnesle, ker so bili delci premajhni in preveč neenakomerni. Nazadnje sta se najbolje izkazali rastlinski smoli gumi-gut, ki jo pridobivajo v Kambodži in na Sri Lanki, in mastiks z nekaterih grških otokov. Perrin je smolo najprej raztopil v alkoholu in nato dobljeno rumeno raztopino močno razredčil z vodo. S centrifugiranjem je ločil delce od kapljevine. To je večkrat ponovil, dokler voda v okolici delcev ni bila popolnoma bistra. Delci so bili sicer kroglasti, a niso imeli enakega polmera. Zato je kapljevino večkrat za kratek čas centrifugiral in odbral delce, ki so se nakopičili daleč od osi in med katerimi so prevladovali delci z večjo maso. Z odbiranjem je po večmesečnem delu iz kilograma gumi-guta dobil nekaj desetina grama kroglic zelene velikosti.



Slika 3. Lega mikroskopa in stolpca kapljevine pri opazovanju z navpično (a) in vodoravno osjo mikroskopa (b) ter delci smole v kapljevini v sedimentacijskem ravnovesju (c). Fotografijo je Perrin dobil z mikroskopom z vodoravno osjo (b).

Skrbno je premeril gostoto smole ρ in dobil, npr. $1,194 \text{ g/cm}^3$. Na več načinov je izmeril polmer kroglic r in zanj, npr. dobil $0,367 \mu\text{m}$. Neposredno merjenje zaradi uklona ni bilo natančno. Natančneje je bilo mogoče izmeriti dolžino niza dotikajočih se kroglic in izračunati polmer. Z izmerjenim polmerom in gostoto je izračunal efektivno težo kroglice $\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho')g$, to je težo, zmanjšano za vzgon v kapljevini z gostoto ρ' .

Opazoval je z mikroskopom z navpično ali z vodoravno osjo. V prvem primeru je desetino milimetra globoko vdolbino v mikroskopskem stekelcu napolnil s kapljevino, v kateri so lebdeli kroglasti delci. S tem, da je mikroskop naravnal na določeno globino, je lahko opazoval delce v tej globini. Gostoto delcev je določil tako, da je delce v vidnem polju v določeni globini fotografiral in jih na fotografiji preštel. To je bilo mogoče le, če so bili delci dovolj veliki. Pri drugem načinu pa je z dodatno zaslonko močno zožil vidno polje, da je maloštevilne delce lahko zajel in preštel z enim pogledom.

Pri merjenju s kroglicami iz gumi-guta s polmerom $0,212\ \mu\text{m}$ je v višini $5\ \mu\text{m}$, $35\ \mu\text{m}$, $65\ \mu\text{m}$ in $95\ \mu\text{m}$ v povprečju naštel po vrsti 100, 47, 22,6 in 12 delcev. Niz števil se približno ujema z geometrijskim zaporedjem: 100, 48, 23, 11,1. Iz teh podatkov je izračunal relaksacijsko višino $42,4\ \mu\text{m}$. Z znano efektivno težo je iz prve enačbe (4) izračunal Boltzmannovo konstanto k in nazadnje iz nje s plinsko konstanto še Avogadrovo število $N_A = R/k$. Pri nizu zelo skrbnih merenj, v katerem je v celoti opazoval 17 tisoč delcev s polmerom $0,367\ \mu\text{m}$, je dobil za Avogadrovo število $6,8 \cdot 10^{26}$. Merili so z različno velikimi kroglicami, pri različnih temperaturah in z različnimi kapljevinskimi, vodo in bolj ali manj razredčenim glicerinom. Pri vseh merjenjih so dobili malo večji ali malo manjši rezultat. Danes Avogadrovo število $6,02 \cdot 10^{26}$ poznamo precej natančneje, tako da se utegne Perrinov rezultat zdeti dokaj nenatančen. Ob svojem času pa je bil zelo dragocen. Jean Perrin je leta 1926 za merjenja, ki jih je izvedel med letoma 1908 in 1911, dobil Nobelovo nagrado. V nadaljevanju bomo opisali še drugi del njegovih raziskovanj in pojasnili, zakaj so bila ta raziskovanja tako pomembna.

Ne čisto resno. Poučevalska fizikalna revija je objavila zgodbo o komisijskem izpitu iz fizike, na katerem je študent dobil vprašanje, kako bi določil višino stavbe, če ima občutljiv merilnik tlaka. Študent je navedel nekaj zanimivih predlogov. Merilnik bi obesil na vrvico, ga počasi spustil do tal in izmeril dolžino vrvice. Merilnik bi spustil, s stoparico izmeril čas, ko bi udaril po tleh, in iz časa izračunal višino padanja. Navsezadnje bi merilnik, ki najbrž ni poceni, dal hišniku v zameno za podatek o višini stavbe. Izpit je izdelal, češ da se bo v življenju dobro znašel. Pač ni bil študent fizike, ker se zadnja dva predloga ne skladata z zahtevo, da je treba po vaji vse naprave vrniti na staro mesto. Bralci pa bodo na vprašanje odgovorili tako, kot je spraševalec pričakoval. Na višino stavbe sklepamo po zmanjšanju zračnega tlaka, ko prenesemo merilnik od tal do vrha. Blizu nadmorske višine 0 se na 10 metrov višinske razlike tlak zmanjša za $120\ \text{N/m}^2$.

MODULARNA REDUKCIJA IN MERSENNOVA ŠTEVILA

Pri računanju z velikimi števili večkrat naletimo na naslednji problem:

Dani sta naravni števili a in m . Poišči ostanek pri deljenju števila a s številom m .

Drugače problem zastavimo lahko tudi takole:

Poišči tako celo število b med 0 in $m - 1$, ki je kongruentno številu a po modulu m : $a \equiv b \pmod{m}$.

Ali še drugače:

Iščemo tako celo število b med 0 in $m - 1$, da bo razlika $a - b$ deljiva z m .

Pravimo, da želimo število a *reducirati po modulu m* , sam postopek pa imenujemo *modularna redukcija*. Problem modularne redukcije nastopi npr. v eni izmed najbolj znanih metod za šifriranje z javnimi ključi – metodi RSA. Ker je potrebno pri uporabi metode modularno redukcijo izvršiti velikokrat, je hitrost njene izvedbe eden izmed dejavnikov, ki pomembno vplivajo na hitrost celotne metode in s tem tudi na njeno uporabnost. Več o šifriranju z javnimi ključi in metodi RSA si bralec lahko prebere v članku M. Vencelj, *Šifriranje z javnim ključem, Presek 22, št. 6 (1994-1995), str. 354-357*.

Modularno redukcijo običajno opravimo s celoštevilskim deljenjem: število a delimo s številom m in poiščemo ostanek. Toda to je v splošnem kar zamudna naloga, še posebej, če sta števili a in m veliki. Seveda si zastavimo vprašanje, ali znamo modularno redukcijo izvesti še na kakšen drugačen, hitrejši način. Če je modul m primerno izbran, je odgovor na to vprašanje pritrdilen. Pa si pogledjmo, kako to storimo.

Za modul m vzemimo Mersennovo število, to je število oblike $m = 2^k - 1$, kjer je k poljubno naravno število. Zapis števila m v dvojiškem sistemu je zelo preprost – sestavljen je namreč kar iz zaporedja k enic:

$$m = \underbrace{11 \cdots 11}_{k} (2).$$

Zapišimo v dvojiškem sistemu tudi število a . Po potrebi bomo dvojiškemu zapisu števila a na začetku dodali nekaj ničel, tako da bo njegova dolžina $n \cdot k$ znakov (bitov) za neko naravno število n . Naj bo število A_{n-1} enako številu, ki ga v dvojiškem zapisu predstavlja prvih k bitov števila a (gledano od leve proti desni), število A_{n-2} število, ki ga predstavlja drugih k bitov števila a , in tako naprej do števila A_0 , ki ga predstavlja zadnjih k bitov števila a . Število a lahko sedaj izrazimo na naslednji način:

$$a = 2^{(n-1)k} A_{n-1} + 2^{(n-2)k} A_{n-2} + \dots + 2^{2k} A_2 + 2^k A_1 + A_0,$$

kjer so $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_1, A_0$ k -bitna števila.

Trdimo, da je število $b = A_{n-1} + A_{n-2} + \dots + A_1 + A_0$ kongruentno številu a po modulu m . Preveriti moramo torej, da je razlika $a - b$ deljiva z m :

$$\begin{aligned} a - b &= 2^{(n-1)k} A_{n-1} + 2^{(n-2)k} A_{n-2} + \dots + 2^k A_1 + A_0 - \\ &\quad - A_{n-1} - A_{n-2} - \dots - A_1 - A_0 = \\ &= A_{n-1}(2^{(n-1)k} - 1) + A_{n-2}(2^{(n-2)k} - 1) + \dots + A_1(2^k - 1). \quad (1) \end{aligned}$$

Poljuben sumand vsote (1) je oblike $A_t(2^{tk} - 1)$ za neko naravno število t , $1 \leq t \leq n-1$ in ga zato lahko zapišemo takole:

$$\begin{aligned} A_t(2^{tk} - 1) &= A_t \cdot (2^k - 1) \cdot (2^{(t-1)k} + 2^{(t-2)k} + \dots + 1) = \\ &= A_t \cdot m \cdot (2^{(t-1)k} + 2^{(t-2)k} + \dots + 1). \end{aligned}$$

Torej je vsak sumand vsote (1) deljiv z m in zato tudi število $a - b$. S tem je trditev dokazana.

Seveda se lahko zgodi, da je število b večje od $m - 1$. V tem primeru enak postopek ponovimo še enkrat, tokrat s številom b na mestu števila a . S ponavljanjem postopka prej ali slej pridemo do števila, ki je manjše ali enako $m - 1$ in ki pri deljenju z m da enak ostanek kot a . Modularno redukcijo smo tako izvedli s seštevanjem, ki ga lahko opravimo bistveno hitreje kot celoštevilsko deljenje.

Največkrat – npr. pri metodi RSA – naletimo na naslednjo inačico modularne redukcije: Imamo naravni števili x in y , ki sta manjši ali enaki $m - 1$. Ti dve števili zmnožimo, produkt $a = xy$ pa moramo reducirati po modulu m . V tem primeru je opisana metoda še posebej enostavna, saj je zapis števila a v dvojiškem sistemu dolg kvečjemu $2k$ bitov. Število b je zato enako vsoti dveh k -bitnih števil A_1 in A_0 . Po največ dveh ponovitvah zgornjega postopka bomo dobili ustrezno število b , ki bo manjše od m .

Zaradi različnih omejitev se izkaže, da Mersennova števila za metodo RSA niso primerna. Rešitev se ponuja v tako imenovanih *posplošenih Mersennovih številih*. To so števila, ki so "podobna" Mersennovim številom, kot npr. števila oblike

- $2^n - c$, za poljubno naravno število n in fiksno naravno število c ,
- $2^n - 2^m - 1$, za poljubni naravni števili $n > m$,
- $2^{4n} - 2^{3n} + 2^{2n} + 1$, za poljubno naravno število n , itd.

Pri teh številih je seveda modularna redukcija nekoliko bolj zapletena kot pri pravih Mersennovih številih, je pa zato izbira teh števil dosti večja in pestrejša.

Štefko Miklavič

ČRKE IN ŠTEVILA

Vsaka črka v tabeli predstavlja število med 1 in 9. Različne črke pomenijo različna števila. V tabeli so podane še vsote vrstic in stolpcev.

H	G	D	F	22
E	C	I	D	20
B	H	A	C	17
I	B	G	E	22
19	18	28	16	

A	B	C	D	E	F	G	H	I
5					4			

Poiščite vse vrednosti posameznih črk in jih vpišite v desno tabelo. V pomoč sta vrednosti za dve črki že vpisani v rešitev.

Boštjan Jaklič

$\sqrt{6 + \sqrt{15}}$ JE NAJBOLJŠI PRIBLIŽEK ZA π

Če je približek π -ja lahko izražen le z naravnimi števili, največ dvema kvadratnima korenoma, seštevanjem in množenjem, je vseh možnih kandidatov (izrazov) za najboljši približek končno mnogo, pravzaprav celo zelo malo. Prvopodpisani sem domneval, da so možne samo naslednje štiri oblike izrazov z naštetimi omejitvami:

$$a + \sqrt{b}, \quad 0 \leq a \leq 4, \quad 0 \leq b \leq 10 \quad (1)$$

$$a + \sqrt{b + \sqrt{c}}, \quad 0 \leq a \leq 4, \quad 0 \leq b \leq 10, \quad 0 \leq c \leq 100 \quad (2)$$

$$a + \sqrt{b} + \sqrt{c}, \quad 0 \leq a \leq 4, \quad 0 \leq b, c \leq 10 \quad (3)$$

$$a + (b + \sqrt{c})(d + \sqrt{e}), \quad 0 \leq a, b, d \leq 4, \quad 0 \leq c, e \leq 10 \quad (4)$$

Možnost (1) je sicer že zajeta v (2), v (3) in v (4), če so nekateri koeficienti enaki 0, vendar jo vseeno obravnavamo posebej. Množenje dveh korenov bi dalo spet en sam koren: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{c}$, $c = ab$ (neko drugo naravno število). Podobno pa velja tudi za množenje naravnega števila in korena iz naravnega števila (kvadrat števila damo pod koren in dobimo izraz z enako vrednostjo).

Moj bivši sošolec in kolega na Fakulteti za računalništvo in informatiko Janez Brank je mojo domnevo potrdil z dokazom, ki ga prilagam na koncu.

Vseh naštetih možnosti je, kljub temu, da se jih večina od π razlikuje za več kot 1, še vedno tako malo, da sem jih nekaj preveril kar s kalkulatorjem, ostale pa s programom v C-ju na osebem računalniku.

Najboljši približek oblike (1) je $\sqrt{10}$, ki je od π (po absolutni vrednosti) oddaljen za manj kot 0.21.

Za obliko (4) so najboljši približki prav tako le $\sqrt{10}$ in njegove izpeljanke, npr. $\sqrt{2}\sqrt{5}$.

Oblika (2) da najboljši približek sploh in sicer $\sqrt{6 + \sqrt{15}}$, ki je od π oddaljen za manj kot 0.00054.

Oblika (3) prispeva najzanimivejši približek, ki sploh ni slab: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ je od π oddaljen za manj kot 0.005.

Glede na to, da sva, eden absolvent računalništva, drugi pa od nedavnega podiplomski študent, in da sva preverila kar vse možnosti, kar najbrž ni bil smisel naloge, meniva, da najina rešitev ne more biti nagrajena, četudi sva našla najboljši približek. Naloga se nama je zdela zanimiva, zato sva se tudi lotila reševanja.

Dokaz, da so oblike izrazov (1), (2), (3) in (4) res edine, ki ustrezajo zahtevam naloge:

Mislimo si sintaksna drevesa, v katerih se lahko pojavljajo operatorji $+$, $\cdot$ (oba binarna) in $\sqrt{}$ (unarni), v listih drevesa pa naravna števila.

1. Najprej opazimo, da lahko poljubno drevo, v katerem se pojavljata od operatorjev $+$ in $\cdot$, poenostavimo kar v navadno naravno število.

2. Recimo zdaj, da se omejimo na drevesa z enim samim $\sqrt{}$ -vozliščem. Ker je $\sqrt{}$ unarni operator, ima to vozlišče eno samo poddrevo. V njem lahko od operatorjev nastopata $+$ in $\cdot$, tako da lahko (v skladu s točko 1) brez izgube za splošnost vzamemo, da je to poddrevo kar en sam list, v katerem je neko naravno število. Mislimo si zdaj pot od vrha drevesa do tistega edinega $\sqrt{}$ -vozlišča. Poddrevesa, ki izhajajo iz te poti na levi in na desni, so ravno tako brez operatorjev $\sqrt{}$ in jih lahko poenostavimo v naravna števila. Če upoštevamo še komutativnost $+$ in $\cdot$, lahko drevo preoblikujemo tako, da gre tista veja do $\sqrt{}$ -vozlišča ves čas na desno. Tako dobimo izraz $a_1 \circ (a_2 \circ (a_3 \circ \dots \circ (a_n \circ \sqrt{b}) \dots))$. Vsak $\circ$ predstavlja ali $+$ ali $\cdot$. Zdaj pa upoštevajmo, da lahko izrazu oblike $a + \sqrt{b}$ nekaj prištejemo ali pa ga z nečim (pozitivnim) pomnožimo, pa bo ostal enake oblike. Izraz $\sqrt{b}$ je take oblike (za a vzamemo število 0), ko pa mu zunanji operatorji še kaj prištejejo ali ga s čim pomnožijo, ostane enake oblike. Torej: drevo z enim samim $\sqrt{}$ -vozliščem nujno predstavlja izraz oblike $a + \sqrt{b}$.

3. Zdaj pa si oglejmo drevesa z dvema $\sqrt{}$ -vozliščema. Tu ločimo dve možnosti: ali je eno od $\sqrt{}$ -vozlišč potomec drugega ali pa ne.

3.1. Recimo, da je eno od $\sqrt{}$ -vozlišč (recimo mu B) potomec drugega (recimo mu A). Poddrevo pod A-jem v skladu s točko 2 predstavlja neki izraz oblike $b + \sqrt{c}$. Skupaj z A-jem imamo torej izraz $\sqrt{b + \sqrt{c}}$. Na veji, ki pelje od korena do A-ja, spet poenostavimo vsa stranska poddrevesa v naravna števila in dobljeno izrojeno drevo preuredimo tako, da se veja do A-ja ves čas premika na desno. Razmislek, kot pri točki 2, nam zdaj pove, da lahko izrazu oblike $a + \sqrt{d}$, za $d = \sqrt{b + \sqrt{c}}$, kaj prištejemo ali pa ga s čim pomnožimo, pa ostane enake oblike. Torej drevo, v katerem imamo dva gnezdena kvadratna korena, gotovo predstavlja izraz oblike $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$.

3.2. Recimo, da nobeno od $\sqrt{}$ -vozlišč ni potomec drugega. Naj bosta A in B naši $\sqrt{}$ -vozlišči, C pa njun najnižji skupni prednik. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da je A v levem poddrevesu C-ja, B pa v desnem (v C-ju seveda mora biti binarni operator, saj smo oba korena že porabili, A in B pa tudi ne moreta biti v istem C-jevem poddrevesu, saj

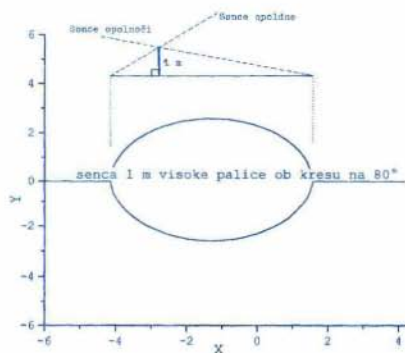
smo rekli, naj bo C njun najnižji skupni prednik). Levo C-jevo poddrevo je torej drevo z enim samim $\sqrt{}$ -vozliščem in zato po točki 2 predstavlja izraz oblike $a + \sqrt{b}$. Ravno tako pa desno C-jevo poddrevo predstavlja nekaj, oblike $c + \sqrt{d}$. Če je operator v C-ju $+$, predstavlja poddrevo s korenem C izraz oblike $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ za neke nove konstante a , b in c . Če pa je v C-ju operator $\cdot$, predstavlja poddrevo s korenem C izraz oblike $(a + \sqrt{b})(c + \sqrt{d})$. Preprost induktivni razmislek pokaže, da se s prištevanji in množenji, ki se dogajajo na poti od korena do C, v prvem primeru ohranja oblika $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, v drugem primeru pa oblika $a + (b + \sqrt{c})(d + \sqrt{e})$.

Skratka, dobili smo ravno oblike izrazov z začetka razmišljanja.

Žiga Ramšak, Janez Brank

KAKO DO ENAČBE SENCE – Rešitve vaj s str. 148

1. Upoštevaš $\varphi = (90^\circ - \delta)$, ker je $\delta = 23,5^\circ$. Ob kresu se konec sence premika po paraboli z enačbo $y^2 = v^2(\cot^2 \delta - 1) - 2v \cot \delta \cdot x$, ob enakonočju pa po premici $x = v \tan \varphi$.
2. Ob kresu po hiperboli, ob enakonočju po premici.
3. Ob kresu po elipsi (skica), ob božiču sence ni, saj je tam tema (polarna noč).



Natisnjeno s programskim orodjem Origin. Če npr. želimo ugotoviti, kje znotraj elipse leži navpična palica, moramo upoštevati, da je Sonce ves čas (dan) nad obzorjem in da je opoldne najvišje na jugu, opolnoči pa najnižje na severu.

Marijan Prosen

ZLAGANJE ZEMLJEVIDA

Se še nikoli niste namučili z zlaganjem avtomobilske karte? Potem poskusite s tole nalogo:

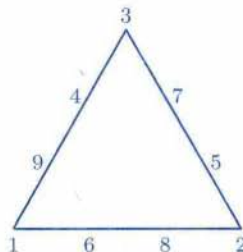
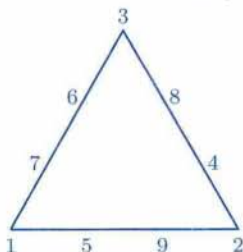
Zemljevid na sliki (sami si napravite povečano kopijo iz lista papirja) zložite tako, da si bodo oštevilčeni deli sledili v vrstnem redu od 1 do 8. Zemljevida ne smete trgati ali rezati, dovoljeni so le prepogibi po narisanih mejah med stranmi. Ne obupajte prehitro! Gre! Preverjeno.

1	8	7	4
2	3	6	5

Marija Vencelj

PRERAZPOREDI ŠTEVILA – Rešitev s str. 159

Vsota naravnih števil od 1 do 9 je 45, vsota vsot števil na trikotnikovitih stranicah v iskani razporeditvi pa $3 \cdot 17 = 51$. V drugi vsoti nastopajo števila v notranjosti stranic po enkrat, števila v ogliščih pa po dvakrat. Zato moramo postaviti v trikotnikova oglišča tri taka števila, da bo njihova vsota enaka $51 - 45 = 6$. Temu pogoju ustreza le trojica števil 1, 2, 3. V nadaljevanju ugotovimo, da je število 4 premajhno, da bi ga umestili na stranico z ogliščema 1 in 2, zato lahko tja postavimo le par 5, 9 ali par 6, 8. Nadaljevanje je v vsakem od teh dveh primerov enolično, tako da imamo le dve bistveno različni razporeditvi, ki ustrezata pogojem naloge:



Marija Vencelj

BINE IZBOLJŠUJE AVTO

“Spet rdeča,” se je jezil Bine, ko je zaustavil avto pred semaforjem. “Prehitro voziš,” mu je očitala Urša. “Pri 50 km/h bi lovil zeleni val, ti pa divjaš kot zmešan.”

Bine je bil trmast in je še naprej pritiskal na plin ter ustavljal pred vsakim semaforjem. Jezilo pa ga je, da je ob vsakokratnem zaviranju zavrgel nekaj energije, ki segreva zavore. Zvečer mu izumiteljska žilica ni dala miru. Bi lahko zavrl in hkrati shranil energijo, namesto da jo je zavrgel?

Pri krogli, ki pada na tla, se spreminja potencialna energija v kinetično. Pri krogli, ki se dviga, je prav obratno; hitrost se ji zmanjšuje z višino. Kinetična energija se spreminja v potencialno. Da, tole bi lahko bila rešitev! Nad avtom postavimo npr. ogrodje s škripcem. Na vrvi visi breme. Ko vključimo zavoro, se vrv navija okoli pogonske osi in dviga breme. Avto se ustavlja in slednjič ustavi. Zatakne zavoro, da breme ne bi sililo navzdol in premikalo avta. Posveti zelena luč. Sprostimo zavoro, breme se spušča in – šmentana reč – avto pelje nazaj. No, če so izumili menjalnik, bo kaj podobnega mogoče napraviti tudi za njegovo zavoro. Potem bi peljal avto naprej in energijo bi dobili povrnjeno. Bine je porisal nekaj papirjev in zadovoljen odšel spat.

“Naprej,” se je na trkanje odzval dr. Nula na patentnem uradu in med vrati uzrl starega znanca Bineta. Binetov obraz je sijal, ko je polagal porisane papirje na doktorjevo mizo. Dr. Nula je pogledal Bineta in zmajal z glavo: “Brez računov ne verjamem, da bo tole delovalo. Kje so?” Tako se je obisk zaključil.

Bine računom ne bi bil kos, če ga ne bi popoldne obiskal nečak Matjaž, ki študira fiziko. Skupaj sta se lotila dela. “Avto z maso 1000 kg vozi s hitrostjo 50 km/h, kar je okoli 14 m/s. Masa bremena na škripcu naj bo 100 kg. Z energijo, ki jo ima avto pri tej hitrosti, lahko dvigneš stokilogramsko breme skoraj 100 metrov visoko.” Bine se je zamislil. 100 metrov visok stolp bi težko postavil nad avto. Lahko bi ga sicer znižal na 10 metrov in obesil 1 tono težko utež. Tono, ki bi mu bingljala nad glavo? Ne, to ne bo šlo.

“Morda bi pomagala električna?” je tipal razočarani Bine. “Najin avto poganja električni generator. Kaj če bi elektriko, ki jo daje, nekam shranila in jo potem spet uporabila?”

“Elektriko lahko spraviva za kratek čas v kondenzator, za dlje časa pa v akumulator. Najbrž bi potrebovala kar velik kondenzator. Kapaciteta največjih je nekaj 1000 μF . Energija, ki jo želiva shraniti, je okoli 10^5 J. Energija kondenzatorja je $\frac{CU^2}{2}$, kjer je C kapaciteta v faradih,

U pa napetost v voltih. Če nabijemo kondenzator s kapaciteto $10^4 \mu\text{F}$ na napetost 100 V, spravimo vanj le 50 J. To pa je desetstisočkrat premalo. Od tolikšne energije bi 60 vatna žarnica svetila le sekundo. Preostane nama akumulator. 12 voltni akumulatorji, ki jih najdemo v avtomobilih, zmorejo – zaokroženo – do 50 amperskih ur. Tak akumulator načelno zagotavlja tok 50 amperov 1 uro ali tok 10 amperov 5 ur ali tok 1 ampera 50 ur.”

“Koliko pa potrebujeva midva, da poženeva avto do 50 km/h?”

“Vsega skupaj 10^5 J, oz. 10^5 VAs. Pri napetosti 12 V in toku 10 A bi toliko dela dobila iz akumulatorja v malo manj kot četrt ure. Dosti večjega toka pa akumulator ne bi zmogel. Zaloga energije je torej več kot zadostna, le prepočasi nama doteka iz akumulatorja. S takšnim pogonom bi avto brezupno počasi pospeševal.”

“Saj bi lahko vzporedno zvezala več akumulatorjev,” je skušal pomagati Bine. “Vsak bi prispeval 10 ali 15 amperov. Lahko bi akumulatorje vezala zaporedno in dobila več napetosti. V slogi je moč!”

“Potem bi v avtu zmanjkalo prostora za teto,” se je smejal Matjaž. “Tvoja akumulatorska zavora bi bila večja od motorja. Če pa že naložiš dovolj akumulatorjev, lahko na bencinski motor kar pozabiš. Izdaten niz akumulatorjev zmore poganjati primerno močan elektromotor. Take avtomobile pa tako ali tako poskušajo napraviti.”

“Sama elektrika je torej odpovedala. Morda bo pomagalo nekoliko kemije? Električni tok, ki teče skozi nakisano vodo, le-to razdvaja na kisik in vodik. Dobljena plina bi lahko uporabili kot gorivo za motor.”

“Množina sproščenega vodika in kisika je sorazmerna zmnožku toka in časa. Da do elektrolize pride, mora biti med elektrodama primerna napetost, to je volt ali dva. Vse, kar bi bilo več, bi vodo le segrevalo. Pa vzemiva, da zavirava 5 sekund. Mimogrede, tako bi ustavila po približno 35 metrih. V petih sekundah morava torej pospraviti 10^5 J oz. vatnih sekund. Pri napetosti 2 V pomeni to tok 10 000 A.”

“To pa je precejšen tok,” je rekel Bine, ki je pred tednom prežgal 35 ampersko varovalko v zaplombiranem hišnem priključku in je moral poklicati na pomoč servisno službo.

“Drži. Bakrena žica zdrži do 4 A na vsak kvadratni milimeter preseka, ne da bi se pri tem preveč segrevala in tako po nepotrebnem gohtala energijo.” Matjaž je spet pritiskal na gumbe kalkulatorja. “Primerna žica za tok 10 000 A bi morala imeti premer okoli 56 mm. To pa je debela palica in ne več žica. Težave bi bile tudi pri celici za elektrolizo. Tam bi najbrž spravili po 1 A na vsak kvadratni decimeter elektrode. Celotna površina elektrod bi morala biti okoli 100 m^2 . Kar pozabiva na tak pogon!”

“Kaj, če bi ...” je rekel Bine, čeprav mu ni prišlo na misel nič več uporabnega. Zato je nadaljeval raziskavo kar Matjaž.

“Nekje sem bral, da so skušali kinetično energijo spremeniti v rotacijsko energijo. Recimo, da je v avtu težko kolo, vztrajnik. Tega poženemo, ko se avto ustavlja. Vzemiva, da je vztrajnik železen valj s premerom 1 m in višino 10 cm. Tak valj bi tehtal dobrih 600 kg. To pa je preveč za najin avto. Stanjšala ga bova na četrtno, torej na 2,5 cm, da bo tehtal 150 kg. Ko ga poženemo na 1200 obratov v minuti, oz. 20 obratov v sekundi, kar zmorejo danes celo bobni s perilom v pralnih strojih, bo njegova energija 150 000 J. Zdaj lahko zmanjšava maso na 100 kg in še vedno skladišči 100 000 J. Imava pa še veliko rezerve. Rotacijsko energijo lahko podvojiva, če preneseva maso iz sredine na obod kolesa. Tam se giblje hitreje in več prispeva k celotni kinetični energiji. Vzemiva namesto valja obroč. Ta vskladiši pri omenjenem številu vrtljajev 200 000 J. Nadaljevanje v tej smeri bi mogoče pripeljalo do sprejemljivih rezultatov.”

Bine je Matjažu zavidal. Kako mu gredo računi od rok! Kaj, če bi raje hodil z njim na predavanja iz fizike, namesto da hodi na patentni urad?

Jože Pahor

KRIŽANKA “ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ” – Rešitev s str. 160

ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV	ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV	ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV	ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV	ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV	ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV	ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV	ČLENI RAČUNSKIH OPERACIJ	PROSTOR ZA REŠITEV	REŠITEV
SUB	TR	AH	END	MULT	PLIK	AND																	
PRE	LIV	AN	JE	IZ	PO	DR	IV	AN	JE														
AN	J	A	R	AD	IK	AND	NE	ON	ST	OL													
HI	K	RO	G	V	AN	U	A	T	U	DO	ZA	R	J										
IK	S	AR	L	AN	GE	ES	K	B	RE	K	A												
POM	AD	A																					
ODE	S	A	I	N	T	E	N	D	A	N	T	V	A	R	K	A							
DIV	I	Z	O	R	O	K	A	F	A	K	T	O	R	A	J	D	A						
KF	P	A	G	H	R	S	P	E	G	A	V	C	I	K	L	I	N						
REM	N	O	N	O	P	A	S	T	E	L	I	S	P	A	V	A							
IR	A	K	R	O	Č	O	G	I	R	E	L	E	L	O	G	I	K						
TEL	O	K	R	E	S	N	I	C	A	C	U	N	J	E	O	D	O						
ONT	A	R	I	O	P	E	T	A	I	N	S	T	A	N	R	E	N						
SC	A	L	A	S	K	I	N	K	D	I	S	K	S	U	M	A	N	D					
TAR	A	S	T	I	N	T	A	A	L	F	A	A	M	A	N	D	A						

URNIK TEKMOVANJ V LETU 2002

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko področno državno	21. marec 6. april 20. maj
	srednja	šolsko izbirno sredozemsko državno olimpiada	21. marec 6. april april 20. in 21. april 19. do 31. julij
	za dijake srednjih poklicnih šol	šolsko področno državno	21. marec 6. april 20. april
	za dijake sred- njih tehniških in strokovnih šol	šolsko področno državno	21. marec 6. april 20. april
fizika	osnovna	šolsko področno državno	1. marec 23. marec 13. april
	srednja	področno državno izbirno olimpiada	23. marec 13. april maj 14. do 23. julij
logika	osnovna	šolsko izbirno državno	september oktober november
	srednja	izbirno državno	oktober november
	študentje	državno	november
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	28. september
računalništvo	osnovna	šolsko področno državno	29. januar 14. februar 6. april
	srednja	področno državno	14. februar 6. april

Datumi tekmovanj so se precej spremenili glede na prejšnje šolsko leto, saj so na Ministrstvu za šolstvo, znanost in šport zahtevali, da se vsa tekmovanja v znanju do državne ravni zaključijo do konca meseca aprila.

Upamo, da ne bo zapletov zaradi prekrivanja matematičnih oziroma fizikalnih tekmovanj z drugimi tekmovanji. Mentorje prosimo, da sledijo novicam, ki jih objavljamo na informacijskem strežniku.

Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Podatke najdete na spletni strani *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>). Pojasnila dobite pri gospodu Aleksandru Potočniku na OŠ Božidarja Jakca, Nussdorferjeva 10, Ljubljana, telefon 041-420-618, oziroma na elektronskem naslovu "aleksander.potocnik@guest.arnes.si".

Matematika – srednja šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Prvi izbirni test bo 25. januarja, drugi pa v februarju 2002. Podrobnejše informacije dajeta gospod Darjo Felda, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (01)-47-68-233 ali (01)-47-68-234, in gospod Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (01)-47-66-500, dobite pa jih tudi po elektronski pošti na naslovu "math.comp@fmf.uni-lj.si". Koledar aktivnosti najdete na spletni strani *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>).

Dijaki srednjih poklicnih šol se lahko udeležijo matematičnega tekmovanja v posebni kategoriji. To tekmovanje ureja *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike*. Več informacij o tem tekmovanju lahko dobite pri gospe Dušanki Vrenčur, Srednja živilska šola, Vodovodna 28, Maribor, tel. (02)-32-08-600, vprašanja lahko pošiljate tudi po elektronski pošti na naslov "dusanka.vrencur@guest.arnes.si".

Tudi dijaki srednjih tehniških in strokovnih šol, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa, se lahko udeležijo tekmovanja v posebni kategoriji. Tekmovanja v tej kategoriji ureja *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike*. Informacije dobite pri gospe Sonji Perko, Srednja ekonomska šola, Trg B. Kidriča 3, Maribor, tel. (02)-25-13-461, elektronski naslov "sonja.perko@guest.arnes.si".

Naj poudarimo, da se matematičnih tekmovanj srednješolcev, ki jih podrobno ureja *Pravilnik o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*, lahko udeležujejo vsi srednješolci ne glede na vrsto šole, ki jo obiskujejo. Seveda pa je tekmovanje v tej kategoriji podvrženo mednarodni primerljivosti zaradi končnega izbora ekip, ki sodelujejo na mednarodnih tekmovanjih.

Fizika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Dodatne informacije dobite na spletni strani *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>) in pri gospe Jelislavi Sakelšek, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (01)-52-44-401.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja v znanju fizike je objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>). Informacije dobite pri gospodu Cirilu Dominku na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (01)-3000-400.

Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrilna matematika*.

Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki so v času tekmovanja na predmetni stopnji osnovne šole, dijaki srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, Ljubljana. Druge informacije daje gospa Mija Kordež na ZOTKS, tel. (01)-25-13-727, faks (01)-25-22-487, elektronska pošta "mija.kordez@guest.arnes.si".

Računalništvo – osnovna in srednja šola

Informacije najdete na Internetu (<http://www.zveza-zotks.si>) ali na naslovu ZOTKS, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (01)-25-13-727 ali (01)-25-13-743, faks (01)-25-22-487.

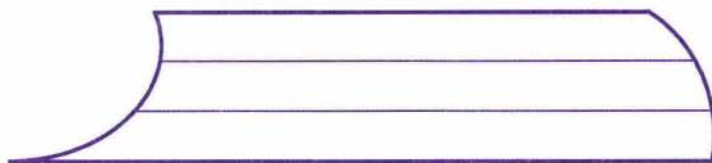
Darjo Felda

21. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

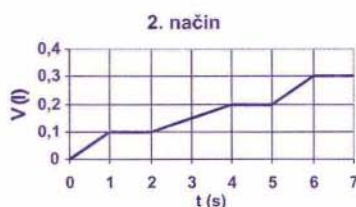
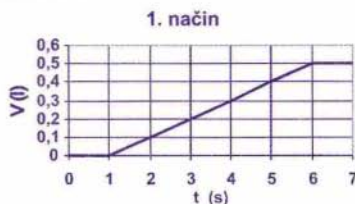
Naloge za 7. razred

1. V načrtu mesta je bila parcela nenavadne oblike. Parcela je na sliki narisana v pomanjšanem merilu 1 : 100. Izračunaj, koliko m^2 meri ploščina parcele.

Namig: Eden izmed možnih načinov je, da parcelo razdeliš v tri pasove, kot kaže slika. [Opomba: Ker ima Presek manjši format, pri tej velikosti slike upoštevajte merilo 1:150.]

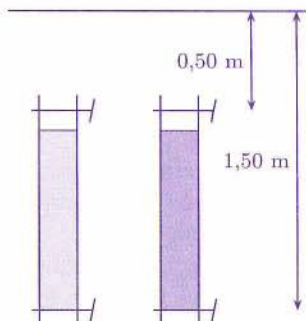


2. Alenka je merila prostornino vode, ki je pritekla iz pipe v 7 sekundah. Pipo je odpirala in zapirala na dva načina. Diagrama kažeta rezultata poskusov.



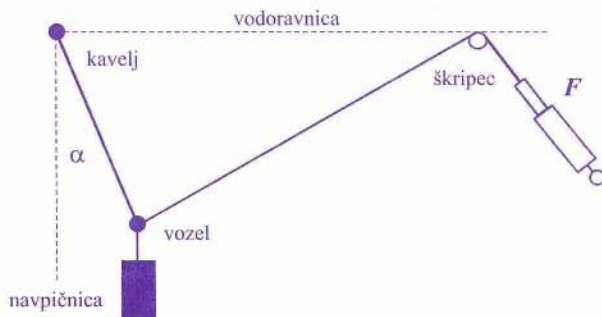
- Kolikšna je bila prostornina vode, ki je pritekla iz pipe pri prvem poskusu in kolikšna pri drugem poskusu?
 - Koliko časa je bila pipa zaprta med prvim in koliko časa med drugim poskusom? Čas poskusa je od 0 do 7 s.
 - V kolikšnem času je Alenka natočila 1,15 l vode, če je odpirala in zapirala pipo na **drugi način** in celoten postopek odpiranja in zapiranja pipe ponavljala?
3. Imamo dve enaki cevi z ventiloma na spodnjem in zgornjem koncu. Razdalja med ventiloma je 1,0 m. Spodnja ventila zapremo in v prvo cev nalijemo do višine 0,90 m olje, v drugo do enake višine živo srebro, tako da je na vrhu še nekaj zraka. Zgornja ventila zapremo in cevi potopimo v vodo, kot kaže slika.

- a) Kolikšna sta tlaka v olju oziroma živem srebru pri spodnjem ventilu in kolikšen je tlak pri spodnjem ventilu zunanji cevi v vodi?
- b) Nato vse ventile hkrati odpremo. V katero smer stečeta olje oziroma živo srebro? Opiši in utemelji!



Tekočine se ne mešajo. Zračni tlak je 1,0 bara, $\sigma_{\text{olja}} = 8,0 \text{ N/dm}^3$, $\sigma_{\text{Hg}} = 136 \text{ N/dm}^3$, $\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 10,0 \text{ N/dm}^3$, cevi se pri potapljanju nič ne deformirata.

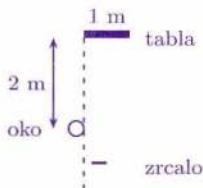
4. Plastična kroglica s prostornino $1,00 \text{ cm}^3$ in gostoto $1,5 \text{ g/cm}^3$ enakomerno pada s stalno hitrostjo $0,45 \text{ m/s}$ v mirujoči vodi.
- a) Nariši sile, ki delujejo na kroglico, ko se giblje navzdol. Pri vsaki sili napiši oznako za silo in z besedo še ime sile. Približno poskusi na risbi zadeti tudi razmerja med velikostmi sil.
- b) Vse sile tudi izračunaj!
5. En konec vrvice pritrdimo na kavelj, drugega pa speljemo preko škripcu in vlečemo s silomerom, kot kaže slika. Na vrv je privezana utež z maso 2000 g . Razdalja med kavljem in vozlom je 5 m , med kavljem in škripcem pa 10 m .



- a) Približno nariši diagram, ki prikazuje, kako se sila F spreminja v odvisnosti od kota α . V diagram vnesi sile pri kotih 0° , 45° in 80° . Pomagaj si z načrtovanjem.
- b) Kolikšna pa bi bila sila F , če bi se kot približeval vrednosti $\alpha = 90^\circ$?

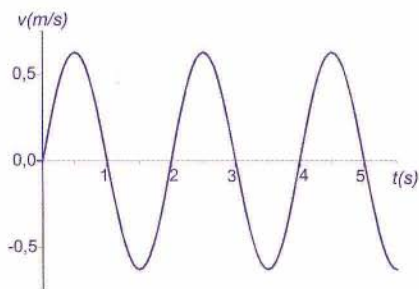
Naloge za 8. razred

1. V učilnici se postavimo s hrbtom proti 2,0 m oddaljeni steni, na kateri visi tabla z velikostjo 1,0 m $\times$ 0,50 m. V roki imamo ravno zrcalo z velikostjo 20 cm $\times$ 10 cm. Zrcalo naj bo postavljeno vzporedno s tablo, naša lega pa je tik ob pravokotnici na rob table, kot kaže slika (tloris). Zrcalo držimo tako daleč, da v zrcalu vidimo ravno celo sliko table in nič drugega.



- Nariši skico preslikave! Na skico nariši žarka od levega in desnega roba table, ki po odboju na zrcalu padeta v oko. Žarki naj bodo narisani s polno črto in opremljeni s puščicami, podaljški žarkov pa naj bodo narisani s črtkano črto.
 - Izračunaj, kako daleč od očesa moramo stegniti roko z zrcalom!
2. Jože, Nejc in Miha tekmujejo v teku, pri čemer si vsak izbere svojo taktiko: Jože teče ves čas enakomerno s hitrostjo 3,0 m/s. Nejc najprej enakomerno pospešuje in po dveh minutah doseže hitrost 6,0 m/s, nato v naslednjih dveh minutah enakomerno zmanjšuje hitrost do 0, nato spet pospešuje in nato spet zavira in takšno gibanje ponavlja do cilja. Miha najprej eno minuto počiva, nato dve minuti teče na vso moč s stalno hitrostjo 6,0 m/s, nato dve minuti počiva, nato spet dve minuti teče na vso moč in spet počiva in tako naprej do cilja. Čase Mihovega pospeševanja in zaviranja smemo zanemariti. Proga je dolga 1440 m.
- Nariši skupen diagram $v = v(t)$ za vse tri tekmovalce.
 - Kakšen je vrstni red na cilju?
 - Koliko časa je med tekmo prvi Jože?
 - Koliko časa vodi tekmo Nejc?
3. Kamen z maso 100 g vržemo z 10 m visokega stolpa v vodoravni smeri s hitrostjo 10 m/s in počakamo, da pade na tla. Stolp stoji na velikem vodoravnem travniku. Silo upora zraka zanemarimo.
- Za koliko se je kamnu med gibanjem spremenila potencialna energija?
 - Za koliko se je kamnu med gibanjem spremenila kinetična energija?
 - S kolikšno hitrostjo je kamen padel na tla?

4. Solarni sistem naredimo iz $2,0 \text{ m}^2$ sončnih celic, ki pretvarjajo energijo svetlobe v električno delo z 10% izkoristkom. Računaj, da je moč svetlobe, ki pade na 1 m^2 , enaka 1000 W in da so celice osvetljene 6 ur na dan. Akumulator polnimo z električnim delom, ki ga dobimo iz sončnih celic, praznimo pa z naslednjimi porabniki: hladilnik z močjo 100 W , ki se vsako uro (podnevi in ponoči) vklopi za 15 min, 2 žarnici po 60 W , ki svetita vsako noč po 4 ure in TV sprejemnik z močjo 120 W .
- Koliko električnega dela oddajo sončne celice ob sončnem dnevu na dan?
 - Koliko časa lahko zvečer gledamo televizijo, če je bilo čez dan sončno? Ob začetku dneva je bil akumulator prazen. Predpostaviš lahko, da je izkoristek akumulatorja 100%.
5. Na sliki je narisano nitno nihalo, ki je narejeno iz majhne kroglice in nitke z dolžino 100 cm . Kroglico odmaknemo za 20 cm iz srednje lege v levo in spustimo, da začne nihati desno – levo – desno... Diagram prikazuje, kako se spreminja **hitrost** kroglice v odvisnosti od časa. Negativne hitrosti na diagramu pomenijo, da se kroglica giblje v levo smer na sliki.



Sila upora zraka in sila trenja sta tako majhni, da kroglica ne izgublja skoraj nič energije.

- Približno kolikšna je hitrost kroglice po času $0,7$ sekunde? Predstavljaš si, kako kroglica niha in odgovori še na naslednji vprašanje (pri vsakem vprašanju na kratko utemelji odgovor):
- Kolikšna je razdalja kroglice od srednje lege po času $1,0$ sekunde?
- Čez koliko časa se kroglica vrne v lego, iz katere smo jo spustili?

Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

REŠITVE S PODROČNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

7. razred

1. Ena izmed možnih rešitev je: Parcelo razdelimo na tri pasove in vsakega nadomestimo s pravokotnikom tako, da bo ploščina izbranega pasu približno enaka ploščini pravokotnika. Nato izmerimo dolžine in višine nadomestnih pravokotnikov, jih pomnožimo s 150, da dobimo dolžine v naravni velikosti: dolžine so približno 10,2 m, 11 m in 12,2 m, širina vsakega pasu pa je približno 1 m. Ploščine posameznih pasov so $10,2 \text{ m}^2$, 11 m^2 in $12,2 \text{ m}^2$, skupna ploščina parcele pa je $33,4 \text{ m}^2$ ali približno 33 m^2 . [Opomba: Na tekmovanju je bila naloga precej lažja, saj je bilo merilo 1 : 100. Vse dolžine, ki smo jih izmerili v centimetrih, so bile v naravni velikosti kar dolžine v metrih].

- 2.a) Iz diagrama razberemo: $V_1 = 0,5 \text{ l}$, $V_2 = 0,3 \text{ l}$.

b) Prostornina se ne spreminja, ko je pipa zaprta. $t_1 = 2 \text{ s}$, $t_2 = 3 \text{ s}$.

c) V prvih sedmih sekundah je prostornina 0,3 l, potrebujemo torej še dva intervala, da bo prostornina 0,9 l in še 0,25 l oziroma 5,5 s od četrtega intervala. $t = 26,5 \text{ s}$.

- 3.a) Tlake izračunamo z enačbo $p = \sigma \cdot h + p_0$. Za olje dobimo: $p_{\text{olja}} = 8,0 \text{ N/dm}^3 \cdot 9 \text{ dm} + 1,0 \text{ bar} = 72 \text{ N/dm}^2 + 1,0 \text{ bar} = 1,07 \text{ bar}$, za živo srebro: $p_{\text{Hg}} = 136 \text{ N/dm}^3 \cdot 9 \text{ dm} + 1,0 \text{ bar} = 1200 \text{ N/dm}^2 + 1,0 \text{ bar} = 2,2 \text{ bar}$, za vodo: $p_{\text{H}_2\text{O}} = 10 \text{ N/dm}^3 \cdot 15 \text{ dm} + 1,0 \text{ bar} = 150 \text{ N/dm}^2 + 1,0 \text{ bar} = 1,15 \text{ bar}$.

b) Ko ventile odpremo, se izračunana tlaka v olju in živem srebru povečata za 0,06 bara. Ker je tlak ob spodnjem ventilu v živem srebru večji od tlaka v vodi, steče živo srebro navzdol in ker je tlak v olju manjši od tlaka okolišnje vode, steče olje navzgor. Rezultat lahko utemeljimo tudi s primerjavo specifičnih tež tekočin.

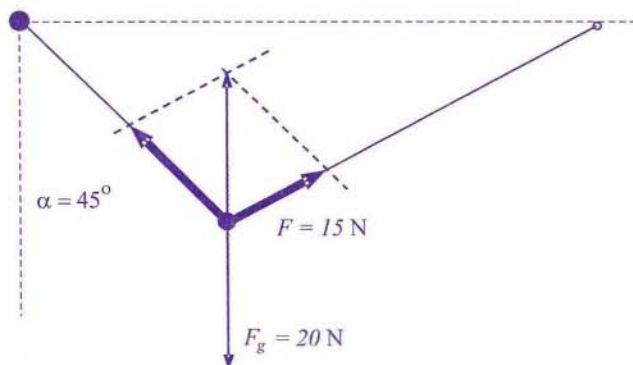
- 4.a)
-
- The diagram shows a sphere with three force vectors acting on it. A vertical arrow pointing upwards is labeled F_{vzgon} and 'vzgon'. Another vertical arrow pointing upwards, slightly to the right of the first, is labeled F_u and 'sila upora'. A vertical arrow pointing downwards is labeled F_g and 'teža'.

- b) Teža kroglice je $F_g = \sigma_p \cdot V = 0,015 \text{ N}$. Vzgon je $F_{\text{vzg}} = \sigma_v \cdot V = 0,010 \text{ N}$.

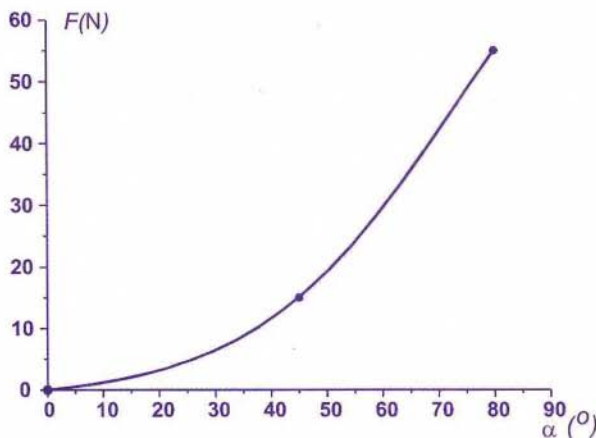
Ker se kroglica giblje premo enakomerno, je vsota vseh sil nanjo enaka nič, torej je $F_g = F_{\text{vzg}} + F_u$ in je sila upora $F_u = F_g - F_{\text{vzg}} = 0,005 \text{ N}$.

- 5.a) Pri kotu 0° je sila enaka $F = 0$. Pri kotih 45° in 80° si pomagamo z načrtovanjem. Najprej narišemo vodoravnico z dolžino npr. 10 cm, nato narišemo kot 45° ter 5 cm dolgo stranico kavelj-vozel. Nato narišemo za težo puščico 20 mm (20 N). Po grafičnem razstavljanju dobimo za silo F puščico z dolžino približno 15 mm, torej je sila približno 15 N. Podobno napravimo še pri kotu 80° in dobimo tabelo, iz katere narišemo diagram.

kot ($^\circ$)	0	45	80
sila (N)	0	15	55

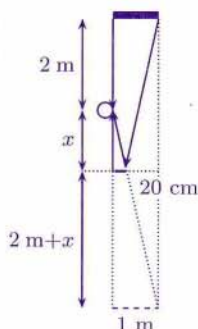


- b) Ko bi se kot približeval 90° , bi sila narasla preko vseh vrednosti, proti neskončno.

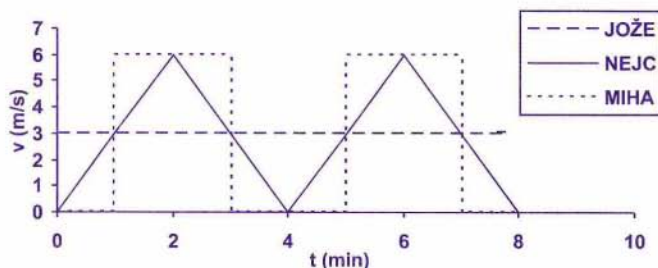


8. razred

1. Iz podobnih trikotnikov dobimo naslednjo zvezo:
 $(2\text{ m} + 2x)/1\text{ m} = x/0,20\text{ m}$. Sledi: $2\text{ m} + 2x = 5x$, oziroma $3x = 2\text{ m}$ in $x = 2/3\text{ m} = 67\text{ cm}$.



- 2.a) Diagram kaže sliko.



- b) Iz diagrama razberemo, da je osnovni časovni interval 4 min. V tem času opravi Jože pot $s_J = 3\text{ m/s} \cdot 4\text{ min} = 720\text{ m}$, Nejc (računamo ploščino trikotnika) $s_N = 6\text{ m/s} \cdot 4\text{ min}/2 = 720\text{ m}$ in Miha $s_M = 6\text{ m/s} \cdot 2\text{ min} = 720\text{ m}$. Vsi trije opravijo enako pot. Ker je proga dolga 1440 m, jo pretečejo v dveh intervalih: $1440\text{ m}/720\text{ m} = 2$, kar pomeni 8 min. Prvi je na cilju Miha, ker je progo pretekel v 7 min. Jože in Nejc si delita drugo mesto.
- c) Jože ima na začetku največjo hitrost in vodi vse do časa $t = 2\text{ min}$, ko so vsi trije tekmovalci skupaj (enaka opravljena pot). Nato za 2 min vodi Miha, nato spet Jože itd. Jože je prvi 4 minute.
- d) Nejc ni nikoli sam prvi, $t = 0$.
- 3.a) Kamnu se je potencialna energija zmanjšala: $\Delta W_p = mgh = -10\text{ J}$.
- b) Ker je delo zunanjih sil nič, je vsota kinetične in potencialne energije na začetku enaka vsoti kinetične in potencialne energije na koncu: $W_{p1} + W_{k1} = W_{p2} + W_{k2}$, od koder sledi $W_{k2} - W_{k1} = W_{p1} - W_{p2} = 10\text{ J}$, do česar lahko pridemo kar s sklepanjem, saj se pri zmanjšanju potencialne energije za 10 J kinetična energija poveča za 10 J.

- c) Začetna kinetična energija kamna je bila $mv_1^2/2 = 5 \text{ J}$. Ker se je med gibanjem potencialna energija zmanjšala za 10 J , se je kinetična ravno za toliko povečala, torej je bila ob koncu 15 J . Iz enačbe $mv_2^2/2 = 15 \text{ J}$ sledi $v_2 = \sqrt{300} \text{ m/s} \approx 17 \text{ m/s}$.
- 4.a) Sončne celice oddajo čez dan $2000 \text{ W} \cdot 6 \text{ h} = 1200 \text{ Wh}$ električnega dela.
- b) Od tega porabi hladilnik $100 \text{ W} \cdot 1/4 \text{ h} \cdot 24 = 600 \text{ Wh}$, žarnici pa $2 \cdot 60 \text{ W} \cdot 4 \text{ h} = 480 \text{ Wh}$. Za televizijo torej ostane $1200 \text{ Wh} - 600 \text{ Wh} - 480 \text{ Wh} = 120 \text{ Wh}$. Čas gledanja izračunamo iz moči in dela: $t = A/P = 120 \text{ Wh}/120 \text{ W} = 1,0 \text{ h}$.
- 5.a) $v \approx 0,5 \text{ m/s}$
- b) Po $0,5 \text{ s}$ je hitrost največja, torej je kroglica v srednji legi. Po $1,0 \text{ s}$ je hitrost kroglice nič, torej je prišla v skrajno desno lego in je od srednje lege oddaljena 20 cm .
- c) Po $1,0 \text{ s}$ se kroglica ustavi v skrajni desni legi ($v = 0$), nato se giblje v levo smer (negativna hitrost), dokler se ne ustavi v skrajni levi legi ($v = 0$), to pa je ob času $2,0 \text{ s}$. Torej se kroglica vrne v začetno lego po časih 2 s , 4 s , 6 s , ... Za pravilen odgovor zadostuje že samo prva rešitev $t = 2 \text{ s}$.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

NALOGE Z REGIJSKEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 2000/01

Naloge je 24. marca 2001 reševalo okrog 650 dijakov iz 55 srednjih šol. Najuspešnejši iz posameznih skupin so se uvrstili na državno tekmovanje.

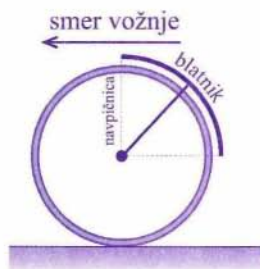
Skupina I

Za težni pospešek na površini Zemlje vzemi pri nalogah $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Na kolesarski dirki pelje kolesar po mokri cesti s stalno hitrostjo 25 km/h . S sprednjega kolesa (glej sliko) s polmerom 30 cm škropijo kapljice.

- a) Koliko najdlje pred kolesarjevim prednjim kolesom (merjeno od osi kolesa) padajo kapljice?
- b) Padanje kapljic opazuje tudi gledalec ob cesti. Kolikšno vodoravno razdaljo preletijo te kapljice zanj?

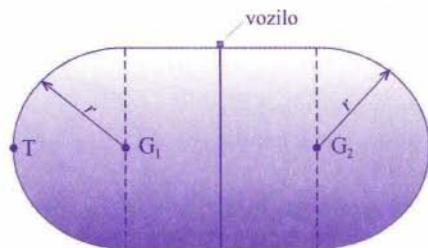
Oddaljenost blatnika od kolesa je zanemarljivo majhna.



2. Lesen pomol je sestavljen iz enakih homogenih plošč, ki so v ogliščih podprte z lesenimi stebri. Dolžina dela stebra nad gladino vode znaša polovico dolžine plošče. Lesena stebra na koncu pomola, ki podpirata skrajni rob zadnje plošče, sta se zaradi strohnjenosti zlomila. Kolikšen del zadnje plošče je potopljen v vodo, če je prosto vrtljiva okoli premice, ki gre skozi stičišči plošče s preostalima stebroma, ki jo še podpirata? Kolikšen pa je ustrezeni del, če je dolžina stebra, ki gleda iz vode, enaka 0,6 dolžine plošče?
Gostota lesa je 700 kg/m^3 , gostota vode pa 1000 kg/m^3 .



3. Majhno motorno letalo z maso 600 kg potrebuje moč 60 kW za vodoravni let pri hitrosti 175 km/h . Največja moč, ki jo lahko razvije motor letala, je 100 kW . Kolikšen je pri hitrosti 175 km/h največji kot vzpenjanja?
4. Asteroid Eros je kamnita tvorba podolgovate oblike. Vzdolžni presek asteroida skozi njegovo simetrijsko os ima obliko lika, sestavljenega iz dveh polkrogov, s polmerom 2 km , in kvadrata, kakor je prikazano na sliki a. Prečni presek je krog (slika b). Pri obravnavanju gravitacijske sile asteroida si lahko mislimo, da je po pol njegove mase zbrane v točkah G_1 in G_2 , ki sta prikazani na sliki. V točki T na temenu asteroida znaša težni pospešek tisočino Zemljinega.
Po površju asteroida se enakomerno giblje avtomatsko vozilo, in sicer po poti (krožnici), ki leži v simetrijski ravnini asteroida, ki je pravokotna na premico skozi točki G_1 in G_2 . S kolikšno največjo hitrostjo se lahko giblje vozilo, da ga še ne odnese v orbito?



Slika a.

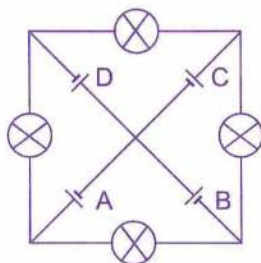


Slika b.

Skupina II

- Štiri enake žarnice z delovnim uporom po $10\ \Omega$ priključimo na štiri enake akumulatore z napetostjo 10 V , kot je prikazano na sliki.

- Kolikšno skupno moč trošijo žarnice?
- Polariteto (priključka + in -) akumulatorjev B in C obrnemo. Kolikšna je v tem primeru skupna moč žarnic?



Zanemari notranji upor akumulatorjev in spremembe upora žarnic.

- Pri Hamburgu bodo zgradili 30 km dolg linearni trkalnik za elektrone in pozitrone, imenovan TESLA. Elektronski curek bo pospeševala učinkovita napetost 1 GV , v sekundi pa bo presek pospeševalne cevi preletelo v povprečju $6 \cdot 10^{16}$ elektronov.

Pri pospeševalniku bo pomembno, da curek elektronov po koncu eksperimenta na varen način odda energijo. Recimo, da jih vpeljejo v cev, napolnjeno z vodo, kjer se vsi elektroni absorbirajo. Najmanj kolikšen mora biti prostorninski tok vode v cevi, da se ta ne bo segrela za več kot 2°C ?

Naboj elektrona je $-1,6 \cdot 10^{-19}\text{ As}$, specifična toplota vode 4200 J/kgK , gostota vode pa 1000 kg/m^3 .

- V plastenko s prostornino $1,5\text{ l}$, v kateri je na začetku zrak, nalijemo nekaj tekočega dušika tako, da ravno prekrije dno. Ko se temperatura zraka v plastenki izenači s temperaturo vrelišča dušika 77 K , plastenko hitro zapremo z zamaškom. Takoj po tem je tlak v plastenki še vedno enak zunanjemu zračnemu tlaku $1,0\text{ bar}$. Koliko časa po tem, ko smo jo zaprli, plastenko raznese, če prenese tlačno razliko $2,0\text{ bara}$? V plastenki je dovolj dušika, da do tega trenutka še ne izpari vsa količina.

Zunanja temperatura je 20°C . Površina plastenke, skozi katero dušik prejema toploto, je 100 cm^2 , debelina plastike je $1,0\text{ mm}$. Toplotna prevodnost plastike je $0,010\text{ W/mK}$, specifična izparilna toplota dušika je $0,20\text{ MJ/kg}$, kilomolska masa dušika pa 28 kg .

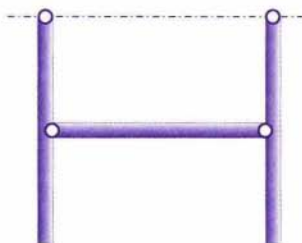
Z ventilacijo poskrbimo, da je temperatura zunanjega plašča plastenke ves čas enaka zunanji temperaturi.

4. Na zelo dolgi ravni žici je enakomerno razmazan električni naboj tako, da pride na vsak meter $+1 \cdot 10^{-6}\text{ As}$ naboja. Na razdalji $0,5\text{ m}$ od žice se vzporedno z žico giblje sonda s hitrostjo $1 \cdot 10^7\text{ m/s}$.
 - a) Kolikšno gostoto magnetnega polja izmeri sonda?
 - b) V isti smeri kot sonda se giblje opazovalec s polovično hitrostjo sonde. S kolikšno magnetno silo in v kateri smeri deluje za tega opazovalca žica na sondo, če je naboj sonde $+1 \cdot 10^{-6}\text{ As}$ ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ Vs/Am}$)?

Skupina III

1. Iz treh enakih palic, od katerih ima vsaka dolžino l , sestavimo nihalo v obliki črke H, kakor je prikazano na sliki. Krajišči navpičnih palic sta vrtljivo vpeti in se nahajata na enaki višini v medsebojni oddaljenosti l . Tretja palica je vodoravna in vrtljivo vpeta v težiščih prvih dveh. Trenje v spojih zanemarimo.

S splošnimi podatki izrazi nihajni čas opisanega nihala za majhna nihanja, in sicer za dva možna načina; pri prvem načinu niha nihalo tako, da je prečna palica ves čas pravokotna na ostali dve, pri drugem pa niha tako, da se vse tri palice ves čas gibljejo v navpični ravnini.



2. Zaradi povečanja temperature Zemlje za 1 K sklenejo Zemljo premakniti v nekoliko bolj oddaljeno orbito. Za koliko kilometrov morajo povečati polmer (praktično krožne) orbite, da se Zemlja ohladi na prvotno temperaturo? Razdalja med Zemljo in Soncem je $1,5 \cdot 10^8\text{ km}$, na Zemlji je gostota energijskega toka s Sonca $1,3\text{ kW/m}^2$ ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\text{ W/m}^2\text{K}^4$).
3. Enaka naloga kot 3. naloga v II. skupini.
4. Lomni kvocient neke snovi je v prvem približku konstanten. Pri bolj natančni obravnavi pa se izkaže, da je odvisen od gostote svetlobnega toka j vpadne svetlobe: $n(j) = n_0 + \gamma j$, kjer je n_0 običajni lomni

kvocient (neosvetljene) snovi, γ pa je konstanta in za steklo znaša $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$.

Z vzporednim curkom svetlobe, katerega prečni presek je krog, posvetimo pravokotno na površino 2 cm debele steklene plošče. Gostota svetlobnega toka v curku se zmanjšuje z oddaljenostjo od središča curka, in sicer od največje vrednosti j_0 v središču do vrednosti 0 na robu. Zmanjševanje opišemo kot

$$j = j_0 \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2} \right),$$

kjer je $r = 1 \text{ mm}$ polmer curka, y razdalja od središča curka in $j_0 = 10^{14} \text{ W/m}^2$. Določi razdaljo, na kateri se curek zbere v točko. (Ta točka ima enak pomen kot gorišče pri leči.)

Namig: Žarka, ki se srečata v "gorišču", za pot porabita enak čas (opravita enako optično pot).

Ciril Dominko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
29. letnik, šolsko leto 2001/02, številka 3, strani 129–192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mirko Dobovišek (glavni urednik), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2001/02 je za posamezne naročnike **3.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.500 SIT**, posamezna številka **750 SIT**, tematska številka **1.500 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961.

List sofinancira MŠZŠ
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1478

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Fotografiji morske gladine, posneti skozi polarizacijski filter. Na levi fotografiji je filter prepuščal vodoravno polarizirano valovanje, na desni pa navpično polarizirano.

