

MATEMATIČNA
TEKMOVANJA 2001

PRE SEK

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV
IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

29 (2001–02)

2

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
29. letnik, leto 2001/02, številka 2, strani 65–128

VSEBINA

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

Priprava Gregor Dolinar in Matjaž Željko	
Naloge za 2. razred osnovne šole	65-66
Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole	67-68
Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole	69-73
Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole ter 1. in 2. letnik srednje šole, kategoriji A in B	73-78
Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategoriji A in B	78-82
Naloge za vse letnike srednje šole, kategorija C	83
Rešitve nalog	83

TEKMOVANJE ZA VEGOVO PRIZNANJE

Pripravil Aleksander Potočnik	
36. področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje – Naloge	84-88
Rešitve nalog s področnega tekmovanja	88-89
36. državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje – Naloge	90-91
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	91-92

TEKMOVANJE DIJAKOV SREDNJIH POKLICNIH ŠOL

Pripravili Anja Jesenek in Dušanka Vrenčur	
Regijsko tekmovanje	93-95
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	95
Državno tekmovanje	96-98
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	98

TEKMOVANJE DIJAKOV SREDNJIH STROKOVNIH IN TEHNIŠKIH ŠOL

Pripravili Andreja Leskovar, Iztok Leskovar, Sonja Perko, Irena Pivko	
Regijsko tekmovanje	99-104
Rešitve nalog z regijskega tekmovanja	104-106
Državno tekmovanje	106-108
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	108-111

MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Pripravil Matjaž Željko	
Izbirno tekmovanje	112-113
Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja	113-117
Državno tekmovanje	117-119
Rešitve nalog z državnega tekmovanja	119-124
Izbirna testa za mednarodno matematično olimpiado	125-126
Rešitve nalog z izbirnih testov za mednarodno matematično olimpiado	126-III

NA OVITKU

Tekmovanje srednješolcev Slovenije 2001 je bilo v Idriji ob 100. letnici tamkajšnje gimnazije (foto Marko Hladnik)	I
Knjige lahko kupite pri DMFA – založništvo	IV

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

Naloge za 2. razred osnovne šole

1. Prodajalka je imela zjutraj 15 ananasov, a je kmalu 5 ananasov prodala. Opoldne so prišli 4 otroci in kupili 3 ananase. Koliko ananasov je ostalo prodajalki?

- (A) 3 (B) 7 (C) 9 (D) 11 (E) 17

2. Štiri slike predstavljajo številke od 1 do 4 z njihovimi zrcalnimi podobami.



Katera spodnja slika bi bila naslednja v zgornjem zaporedju?



3. Jaka je imel 7 palic. Eno je prelomil na pol. Koliko palic ima Jaka?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

4. Katere število prebereš ŠTIRISTO ŠTIRIINŠESTDESET?

- (A) 464 (B) 446 (C) 664 (D) 646 (E) 40064

5. Tine je izbrisal enice v odštevacu v računu

$$43 - 1 \square = 28.$$

Katero števko je izbrisal?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

6. Luka je star 4 leta, Minka pa 2 leti. Čez koliko let bo vsota njunih starosti 12 let?

- (A) 12 (B) 6 (C) 4 (D) 3 (E) 2

7. Na šolskem dvorišču je 7 deklic in 6 dečkov. Vsaj koliko sošolcev se jim mora pridružiti, da bi se lahko razdelili v 3 enako velike skupine?

- (A) 13 (B) 7 (C) 6 (D) 4 (E) 2

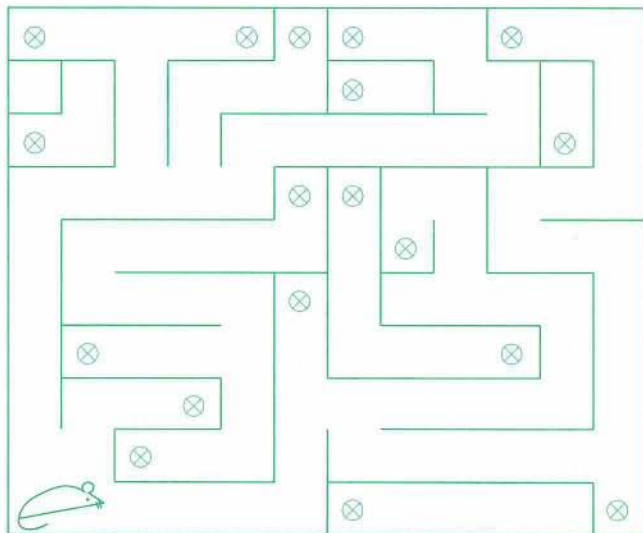
8. Najmanj koliko otrok je v družini, če ima vsak otrok vsaj dva brata in vsaj eno sestro?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

9. Zjutraj je mama dala v košarico nekaj bonbonov. Jure je po kosilu na skrivaj vzel polovico bonbonov. Za njim je mimo košarice prišla Meta in vzela polovico bonbonov, ki so še bili v košarici. Mama je nato presenečena videla, da so v košarici le še trije bonboni. Koliko bonbonov je bilo zjutraj v košarici?

- (A) 16 (B) 12 (C) 9 (D) 6 (E) 5

10. Miška je v spodnjem levem kotu labirinta.

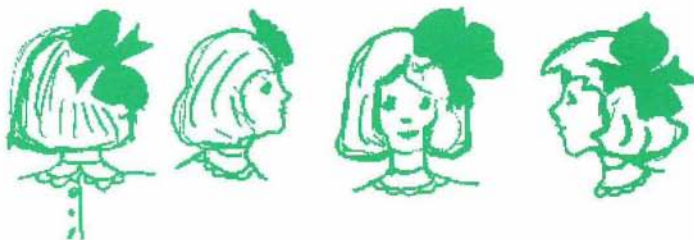


Do koliko kosov sira lahko pride?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Naloge za 3. in 4. razred osnovne šole

1. Tinkara si je pripela pentljo k desnemu ušesu in se sprehajala ob ogledalu.



Koliko od prikazanih slik smo lahko videli v ogledalu?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

2. Samo eden od spodnjih izračunov je pravilen. Kateri?

- (A) $6 + 2 \cdot 3 = 24$ (B) $8 \cdot 2 + 3 = 40$ (C) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 50$
(D) $2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 36$ (E) $18 - 4 \cdot 3 = 6$

3. Na šolskem dvorišču je 19 deklet in 12 dečkov. Vsaj koliko sošolcev se jim mora pridružiti, da bi se lahko razdelili v 6 enako velikih skupin?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

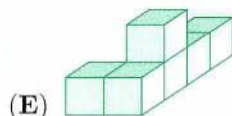
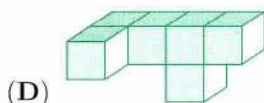
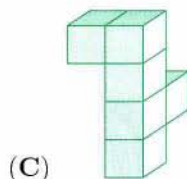
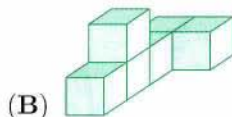
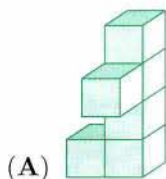
4. 20 bonbonov smo razdelili med kenguruje tako, da je vsak kenguru dobil vsaj en bonbon, vendar pa nobena dva kenguruja nista dobila enakega števila bonbonov. Največ koliko kengurujem smo razdelili bonbone?

- (A) 20 (B) 10 (C) 8 (D) 6 (E) 5

5. Barbara in Alenka potujeta s hitrim vlakom. Barbara je vstopila v 17. vagon po vrsti, šteto od lokomotive, Alenka pa v 34. vagon po vrsti, šteto od zadnjega vagona. Na presenečenje obeh sta ugotovili, da sta vstopili v isti vagon. Koliko vagonov ima hitri vlak?

- (A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51 (E) 52

6. Katera od spodnjih slik prikazuje telo, ki je različno od telesa, prikazanega na ostalih štirih slikah?



7. Domen in Uroš zbirata znamke. V nekem trenutku sta imela enako število znamk. Nato pa je Domen dal Urošu za rojstni dan polovico svoje zbirke. Sedaj ima Uroš več znamk kot Domen. Kolikokrat več?

(A) 2-krat

(B) 3-krat

(C) 4-krat

(D) 5-krat

(E) Odvisno od števila znamk, ki sta jih imela na začetku.

8. Kenguru ima na mizi trikotnike in pravokotnike, ki se ne dotikajo. Vsi liki imajo skupaj 17 oglišč. Koliko trikotnikov je na mizi?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

9. V trgovini s čevlji za živali so imeli ob otvoritvi na vsaki od 10 polic razstavljenih po 12 parov čevljev. Prve obiskovalke so bile stonoge. Tri izmed njih so kupile po 30 parov čevljev, dve stonogi pa sta kupili po 5 parov čevljev. Koliko parov čevljev je ostalo v trgovini po obisku teh petih stonog?

(A) 10

(B) 15

(C) 20

(D) 25

(E) 30

10. Gašper ima enako količino denarja, kot ga imata Matjaž in Igor skupaj. Matjaž ima 10 tolarjev več kot Igor. Skupna vsota denarja, ki jo imajo fantje, znaša 40 tolarjev. Koliko tolarjev ima Igor?

(A) 4 SIT

(B) 5 SIT

(C) 10 SIT

(D) 15 SIT

(E) 20 SIT

Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole

1. Kenguru mora izračunati: $2 \cdot 0 + 0 \cdot 1$. Rezultat je

- (A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) 2001 (E) 3

2. Kateri od petih razgrnjenih listov ustreza prepognjenemu listu?



3. Dedkova stara ura zaostaja po 20 sekund na uro. Koliko minut bo zaostajala po 24 urah?

- (A) 7 minut (B) 8 minut (C) 9 minut (D) 10 minut (E) 11 minut

4. Kolikšen del slike je črn?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{15}$



5. V potniškem letalu je 108 sedežev. Letalo ni polno zasedeno, zato si po dva potnika delita še en dodaten prost sedež. Koliko potnikov je v letalu?

- (A) 36 (B) 42 (C) 56 (D) 64 (E) 72

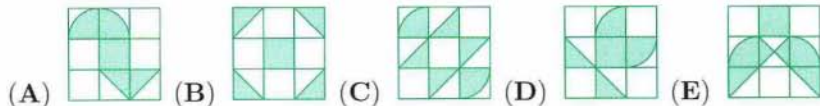
6. Boštjan ima 3 sestre in 5 bratov. Njegova sestra Andreja ima S sester in B bratov. Koliko znaša zmnožek S in B ?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 18

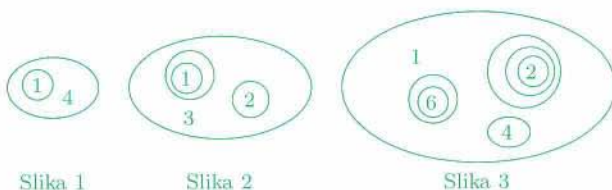
7. Kenguru si je zamislil neko naravno število. To število je podvojil, nato je podvojil dobljeni rezultat, ga podvojil ponovno in nato še enkrat. Katero od naslednjih števil zagotovo ne more biti končni rezultat?

- (A) 80 (B) 1200 (C) 48 (D) 84 (E) 880

8. Katera od osenčenih površin je največja?

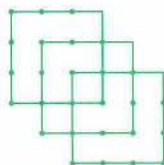


9. V neki deželi takole zapisujejo števila: na sliki 1 je napisano število 14, na sliki 2 pa število 123.



Katero število predstavlja slika 3?

- (A) 1246 (B) 2461 (C) 2641 (D) 1462 (E) drugo
10. Poišči najmanjše število vžigalic, ki jih moraš dodati vzorcu na sliki, da dobiš natanko 11 kvadratov.
- (A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 6



11. Nejc in Anže tečeta po krožni atletski stezi. Nejc za en krog potrebuje 3 minute, Anže pa 4. S tekom sta pričela hkrati. Čez koliko minut bosta prvič spet skupaj pretekla štartno črto?

- (A) 6 minut (B) 8 minut (C) 10 minut
(D) 12 minut (E) odvisno od dolžine atletske steze
12. Erazem ima 201 kovanec. Tretjina od teh je kovancev za 1 tolar, tretjina je kovancev za 5 tolarjev, ostalo pa so kovanci za 10 tolarjev. Koliko tolarjev ima Erazem?

- (A) 1072 SIT (B) 201 SIT (C) 972 SIT (D) 1062 SIT (E) 2001 SIT
13. Na neki atletski prireditvi so dobili priznanje vsi tisti tekači, ki so uspeli preteči razdaljo 10 kilometrov. Jakob je uspel preteči 9641 metrov, 3456 decimetrov in 12340 milimetrov, potem pa se je popolnoma izčrpan zgrudil in ni mogel več nadaljevati s tekom. Za koliko centimetrov je zgrešil ciljno črto?

- (A) 1060 cm (B) 160 cm (C) 106 cm (D) 100 cm (E) 96 cm

14. Katera je številka zadnjega vagona kengurujevega vlaka?



- (A) 52 (B) 64 (C) 66 (D) 72 (E) 88

15. Če bi rdeči zmaj imel 6 glav več kot zeleni zmaj, bi skupaj imela 34 glav. Toda rdeči zmaj ima 6 glav manj od zelenega. Koliko glav ima torej rdeči zmaj?

- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 16

16. Dolžina pravokotne njive je 80 m, njena površina pa 3200 m^2 . Ugotovi dolžino njive, katere površina in širina sta dvakrat manjši kot pri prvi njivi.

- (A) 20 m (B) 40 m (C) 60 m (D) 80 m (E) 100 m

17. Suzana je potrebovala natanko eno uro, da je napravila vso domačo nalogo. Tretjino tega časa se je ukvarjala z matematiko, dve petini preostalega časa pa z zemljepisom. Koliko časa je delala domačo nalogo za vse ostale predmete?

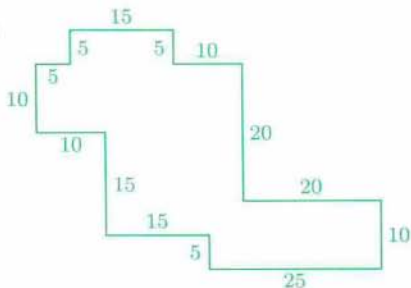
- (A) 12 minut (B) 20 minut (C) 24 minut (D) 36 minut (E) 40 minut

18. Pred tremi leti so bili trojčki Peter, Simon in Bojan ter njihova štiri leta starejša sestra Sonja skupaj stari 24 let. Koliko je Sonja stara danes?

- (A) 5 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 15

19. Vsi koti na Natašinem vrtu so pravi (90°). Površina vrta znaša

- (A) 700 (B) 750 (C) 800
(D) 850 (E) 900



20. Med počitnicami so Andraž, Borut in Tomaž skupaj zaslužili 280 evrov. Andraž je delal dvakrat dlje od Boruta in štirikrat dlje od Tomaža. Odločili so se, da si skupen zaslužek pošteno razdelijo. Koliko evrov bo dobil Tomaž?

- (A) 30 EUR (B) 40 EUR (C) 50 EUR (D) 60 EUR (E) 70 EUR

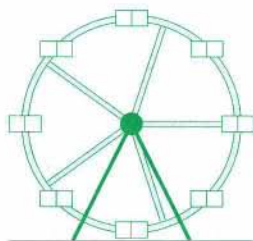
21. Sedem enako dolgih palic smo postavili, kot kaže slika.



Delčki, ki se prekrivajo, so enako dolgi (dva sta označena z vprašajem). Kako dolgi so?

- (A) 1 cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) 5 cm (E) 8 cm

22. Najbolj zanimiva naprava v mestnem zabaviščnem parku je veliko razgledno kolo (na sliki je prikazano podobno, vendar manjše kolo). Kabine so enakomerno oddaljene druga od druge in oštevilčene s števkami 1, 2, 3 ... V trenutku, ko kabina št. 25 doseže svojo najnižjo točko, doseže kabina št. 8 svojo najvišjo točko. Koliko kabin je na razglednem kolesu?



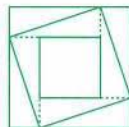
- (A) 33 (B) 34 (C) 35 (D) 36 (E) 37

23. Stoletna bukev v eni uri proizvede 1.7 kg kisika. Koliko takšnih bukev potrebujemo, da lahko 34 učencem priskrbimo dovolj kisika za eno uro, če vsak učenec v tem času porabi 0.7 kg kisika?

- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 21

24. Ploščina največjega kvadrata je 16, ploščina najmanjšega kvadrata pa 4. Določi ploščino srednjega kvadrata.

- (A) 8 (B) $8\frac{1}{2}$ (C) 10 (D) $10\frac{1}{2}$ (E) 12



25. Na običajni igralni kocki je vsota pik na nasprotnih dveh ploskvah vedno enaka sedem. Katarina je šest običajnih igralnih kock zlepila med seboj, tako kot kaže slika. Koliko je največja vsota pik, ki jih lahko Katarina vidi na površini tega telesa?

- (A) 106 (B) 91 (C) 95 (D) 84 (E) 96



2. Rok ima 178 rdečih in 121 modrih plišastih kengurujev. Zložiti jih mora v škatle, pri čemer gre v vsako škatlo največ deset kengurujev. Najmanj koliko škatel potrebuje, če želi v škatle zložiti vse kengurje tako, da v nobeni škatli ne bodo kengurji različnih barv?

- (A) 13 (B) 18 (C) 24 (D) 30 (E) 31

3. Kateri obroček moramo prerezati, da s tem sprostimo vse ostale?

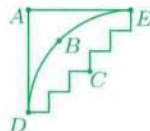
- (A) A (B) B (C) C
(D) D (E) nobenega



4. Jan ima 7 sošolcev več kot sošolk. V njegovem razredu je dvakrat toliko dečkov kot deklic. Koliko sošolk ima Janova sošolka Karmen?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

5. Na sliki je narisanih nekaj ulic v majhnem mestu. Razdalji med A in D ter med A in E merita po 500 m. Pot iz D v E skozi A je za 215 m daljša od poti skozi B . Kako dolga je pot iz D v E skozi C glede na pot skozi B .

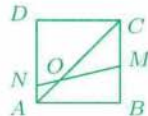


- (A) za 275 m daljša (B) za 215 m daljša
(C) za 430 m daljša (D) za 43 m daljša (E) krajša

6. Izmed števil -9 , -7 , -5 , 2 , 4 in 6 izberemo dve in ju zmnožimo. Najmanjši možni rezultat je

- (A) -63 (B) -54 (C) -18 (D) -10 (E) 8

7. Lik $ABCD$ je kvadrat. Določi velikost kota COM , če je $\angle OND = 60^\circ$.



- (A) 10° (B) 15° (C) 20° (D) 30° (E) 35°

8. Mala koala poje liste z enega evkaliptusovega drevesa v 10 urah. Njena starša jesta dvakrat hitreje. Koliko časa potrebuje vsa tričlanska družina, da poje liste z enega evkaliptusovega drevesa?

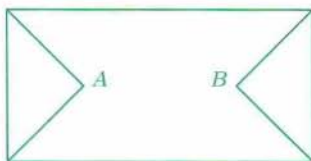
- (A) 2 uri (B) 3 ure (C) 4 ure (D) 5 ur (E) 6 ur

9. Kolikšno je razmerje med ploščino pravilnega šestkotnika s stranico 1 in ploščino enakostraničnega trikotnika s stranico 3?

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 1

10. Na koliko različnih načinov lahko pridemo iz točke A v točko B , če skozi nobeno točko ne smemo iti več kot enkrat?

- (A) 3 (B) 6 (C) 7
(D) 8 (E) vsaj 10



11. V ravnini je kvadrat s stranico 1 cm. Vsako oglišče tega kvadrata je središče krožnice s polmerom 1 cm. Koliko je vseh točk, v katerih se sekata po dve krožnici?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

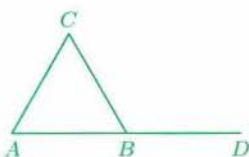
12. Na vsako od dveh miz je mama v vrsto postavila po 2001 lešnik. Luka prične jemati lešnike s prve mize. Najprej vzame vsak tretji lešnik, nato pa izmed preostalih lešnikov vzame še vsakega petega. Manca jemlje lešnike z druge mize. Najprej vzame vsak peti lešnik, nato pa izmed preostalih lešnikov še vsakega tretjega. Katera trditev je pravilna?

- (A) Lukov kup lešnikov znaša $\frac{3}{5}$ Mančinega kupa.
(B) Mančin kup lešnikov znaša $\frac{3}{5}$ Lukovega kupa.
(C) Manca ima 1 lešnik več kot Luka.
(D) Luka ima 1 lešnik več kot Manca.
(E) Luka in Manca imata enako število lešnikov.

13. V izrazu $4 \times KLMNP4 = 4KLMNP$ vsaka od črk K, L, M, N in P predstavlja drugo števko. Namesto katere števke smo zapisali M ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. Naj bo ABC enakostranični trikotnik, točka B pa razpolovišče daljice AD . V isti ravnini narišemo točko E tako, da velja $DE = AB$ in je razdalja med C in E največja možna. Koliko meri kot BED ?



- (A) 45° (B) 30° (C) 20° (D) 15° (E) 10°

15. Štiriindvajseturna digitalna ura kaže ure (2 mesti) in minute (2 mesti). Kolikokrat med eno minuto čez polnoč (00 : 01) in eno minuto pred polnočjo (23 : 59) ura kaže čas, ki se enako prebere tako z leve proti desni kot z desne proti levi (na primer 15 : 51)?

- (A) 10-krat (B) 13-krat (C) 15-krat (D) 18-krat (E) 24-krat

16. Ko je kamela Marta žejna, predstavlja voda 84 % njenega telesa. Ko se napije, je težka 800 kg, voda pa predstavlja 85 % kameline celotne mase. Koliko tehta kamela Marta, kadar je žejna?

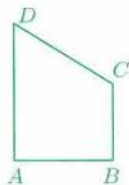
- (A) 672 kg (B) 680 kg (C) 715 kg (D) 720 kg (E) 750 kg

17. Helena in Nuša sta nekega dne v dobrodelne namene ves dan tekli po atletski progi. Vsaka od njiju je tekla s stalno hitrostjo, pri čemer je Helena pretekla 5 krogov v 12 minutah, Nuša pa 3 kroge v 10 minutah. Če sta istočasno začeli s tekom, koliko je znašala vsota krogov, ki sta jih pretekli, ko sta prvič znova skupaj prečkali štartno črto?

- (A) 3 (B) 43 (C) 86 (D) 90 (E) 135

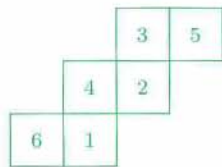
18. Na sliki je $\angle A = \angle B = 90^\circ$. Štirikotnik $ABCD$ ima trikrat tolikšno ploščino kot trikotnik ABC . Kakšno je razmerje med ploščino trikotnika ABD in ploščino trikotnika ABC ?

- (A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\sqrt{2}$



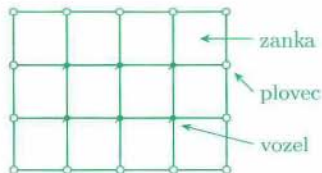
19. Na sliki je plašč kocke. Na mejnih ploskvah so zapisana števila od 1 do 6. Števila na vsakih treh ploskvah, ki se stikajo v oglišču kocke, pomnožimo. Kolikšna je vrednost največjega od teh zmnožkov?

- (A) 40 (B) 60 (C) 72 (D) 90 (E) 120



20. Ribič je sešil pravokotno mrežo. Pri tem je napravil natanko 32 vozlov in všil natanko 28 plovcev na obod mreže. Koliko zank ima ribičeva mreža?

- (A) 40 (B) 45 (C) 54
(D) 60 (E) 64



Ta mreža ima 6 vozlov,
14 plovcev in 12 zank.

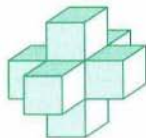
21. Okroglo ploščato torto razrežemo s štirimi ravnimi rezi, ki segajo od enega do drugega konca torte. Kolikšnega števila kosov ne moremo dobiti s takšnim rezanjem?

- (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11 (E) 12

22. Na kengurujskem skakalnem prvenstvu ima vsak od tekmovalcev pet poskusov. Vsak skok je ocenjen s točkami od 1 do 20. Vendar pa se skok z najnižjim številom točk (oziroma eden od skokov z najnižjim številom točk, če je bilo takšnih skokov več) ne upošteva pri končnem seštevku. Preden so sodniki odšteli točke najslabšega skoka, je bilo Lilinih pet skokov skupaj vrednih 72 točk. Katera je najnižja možna vrednost njenega končnega rezultata?

- (A) 52 (B) 54 (C) 57 (D) 58 (E) 72

23. Vsota pik na nasprotnih dveh ploskvah običajne igralne kocke je vedno enaka sedem. Maja si je iz sedmih običajnih igralnih kock napravila novo igračo tako, da je kocke zlepila med seboj. Pri tem je pazila, da sta imeli ploskvi, ki ju je zlepila, enako število pik. Kolikšna je vsota pik na površini Majine nove igrače?

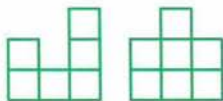


- (A) 95 (B) 102 (C) 105 (D) 112 (E) 126

24. Katera je prva številka najmanjšega naravnega števila, pri katerem je vsota vseh števk enaka 2001?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

25. Slika kaže, kako je videti z leve strani in od spredaj grad, sestavljen iz majhnih kock. Najmanj koliko in največ koliko kock sestavlja narisano zgradbo?



- (A) 7 in 13 (B) 8 in 13 (C) 7 in 15 (D) 7 in 16 (E) 8 in 16

26. V nekaterih od 11 škatel je po 8 manjših škatel, v nekaterih od teh manjših škatel pa je zopet po 8 še manjših škatel. Koliko je vseh škatel, če je število praznih škatel enako 102?

- (A) 102 (B) 64 (C) 118
(D) 115 (E) Ne moremo določiti.

27. Nogometna žoga je sešita iz črnih in belih kosov usnja. Črni kosi so pravilni petkotniki, beli kosi pa so pravilni šestkotniki. Vsak izmed petkotnikov je obkrožen s petimi šestkotniki, vsak šestkotnik pa s tremi petkotniki in tremi šestkotniki. Na žogi je dvanajst črnih petkotnikov. Koliko je belih šestkotnikov?

- (A) 60 (B) 30 (C) 20 (D) 15 (E) 10

28. Zmnožek starosti vseh Marjanovih otrok je 1664. Najmlajši med njimi je star pol toliko kot najstarejši. Koliko otrok ima Marjan?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

29. V razredu je 10 dečkov. Med odmorom gredo lahko iz razreda. Če gre Matjaž iz razreda, gre tudi Žiga. Koliko je različnih možnosti, glede na dečke, ki ostanejo v razredu?

- (A) 512 (B) 640 (C) 724 (D) 768 (E) 1024

30. Miha in Špela igrata naslednjo igro. S kupa kamenja izmenično jemljeta kamne, vendar največ 7 naenkrat. Pri tem ni dovoljeno s kupa vzeti toliko kamnov, kot jih je vzel drugi igralec v svoji zadnji potezi. Izgubi tisti, ki ne more vzeti nobenega kamna. Koliko kamnov mora Miha vzeti s kupa 20 kamnov na začetku, če želi zmagati, pri čemer predpostavljamo, da bo dobro igral tudi v naslednjih potezah?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Naloge za 3. in 4. letnik srednje šole, kategoriji A in B

1. Hkrati vržemo tri običajne igralne kocke in seštejemo pike. Koliko različnih vrednosti lahko zavzame vsota?

- (A) 18 (B) 17 (C) 16 (D) 15 (E) 14

2. Dijaki A , B , C , D , E in F stojijo v vrsti. Vemo, da: 1) D stoji med E in F , 2) C stoji med D in E , 3) B stoji med C in D , 4) A stoji med B in C . Katera od naslednjih izjav je resnična?

- (A) A stoji na enem od koncev vrste.
(B) A je drugi z enega od koncev vrste.
(C) A je tretji z enega od koncev vrste.
(D) Takšna razporeditev dijakov ni možna.

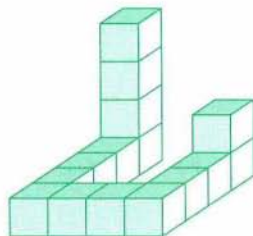
(E) Takšna razporeditev dijakov je možna, vendar ne moremo enolično določiti, kateri po vrsti je dijak A .

3. Ena od diagonal d razdeli večkotnik z obsegom 31 cm na dva večkotnika, z obsegoma 21 cm oziroma 30 cm. Dolžina diagonale d je enaka:

- (A) 5 cm (B) 10 cm (C) 15 cm
(D) 20 cm (E) Ne moremo določiti.

4. Telo na sliki je sestavljeno iz kock. Najmanj koliko majhnih kock moramo dodati, da bo nastala velika kocka? (Pri tem ne smemo premikati že postavljenih majhnih kock.)

- (A) 49 (B) 60 (C) 65 (D) 110 (E) 125



5. Naj bo m tako naravno število, da je največji skupni delitelj $D(m, 35) > 10$. Potem vedno velja

- (A) Število m ima vsaj tri števke.
(B) Število m je večkratnik števila 35.
(C) Število m je deljivo s 15.
(D) Število 35 je večkratnik števila m .
(E) Število m je deljivo ali s 5 ali s 7, toda ne z obema.

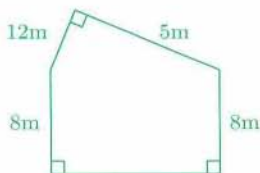
6. Glej naloge za 5. in 6. razred osnovne šole, naloga 10.

7. Koliko praštevil, manjših od 2001, ima vsoto števk enako 2?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) več kot štiri

8. Dolžina ograje okrog zemljišča na sliki meri

- (A) 38 m (B) 41 m (C) 46 m
(D) 50 m (E) 59 m



9. Koliko števk ima najmanjše naravno število, ki ga lahko zapišemo samo z uporabo 0 in 1 in je deljivo z 225?

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

10. Dolžina pravokotne njive je 80 m, njena površina pa 3200 m^2 . Ugotovi dolžino druge njive, katere površina in širina sta dvakrat manjši kot pri prvi njivi.

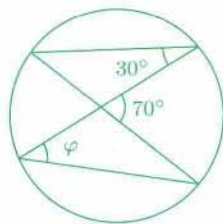
- (A) 20 m (B) 40 m (C) 60 m (D) 80 m (E) 100 m

11. Naj bodo a , b , c in d pozitivna cela števila, za katera velja $a + b = cd$ in $a + b + c = 12$. Koliko različnih vrednosti lahko zavzame število d ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. Koliko meri kot φ na sliki?

- (A) 30° (B) 35° (C) 40° (D) 45° (E) 50°



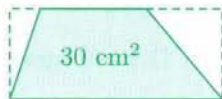
13. Kengurujeva ura vsakih Y ur zaostane za X minut. Koliko ur bo kengurujeva ura zaostala v enem tednu?

- (A) $\frac{2X}{5Y}$ ur (B) $\frac{5Y}{2X}$ ur (C) $\frac{14X}{5Y}$ ur (D) $\frac{5Y}{14X}$ ur (E) $\frac{168X}{Y}$ ur

14. Iztok je imel 400 evrov. S tem denarjem je moral kupiti sto bonbonjer po 4 evre. V trgovini se je izkazalo, da za vsakih šest bonbonjer dobi eno zastonj. Koliko evrov je Iztoku ostalo, če ni kupil ničesar drugega?

- (A) 52 EUR (B) 56 EUR (C) 60 EUR (D) 64 EUR (E) 68 EUR

15. Pravokotniku smo odrezali dva trikotnika. Ploščina nastalega trapeza meri 30 cm^2 , spodnja osnovnica pa je dvakrat daljša od zgornje. Koliko meri ploščina odrezanih trikotnikov?



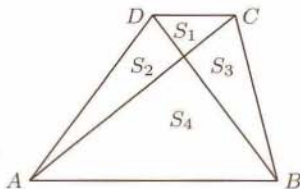
- (A) 10 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 15 cm^2 (D) 18 cm^2 (E) 20 cm^2

16. Glej naloge za 7. in 8. razred osnovne šole ter 1. in 2. letnik srednje šole, kategoriji A in B, naloga 16.

17. Glej naloge za 7. in 8. razred osnovne šole ter 1. in 2. letnik srednje šole, kategoriji A in B, naloga 28.

18. Trapez $ABCD$ je z diagonalama razdeljen na 4 trikotnike s ploščinami S_1 , S_2 , S_3 in S_4 (glej sliko). Če velja $S_2 = 3S_1$, potem je

- (A) $S_4 = 3S_1$ (B) $S_4 = 4S_1$ (C) $S_4 = 6S_1$
 (D) $S_4 = 9S_1$ (E) $S_4 = 12S_1$



19. V izrazu $2 * 4 * 6 * 8 * 10 * 12 * 14$ vsako zvezdico zamenjamo ali z znakom $+$ ali z znakom $-$. Katerega od rezultatov ne moremo dobiti na ta način?

- (A) 0 (B) 4 (C) -4 (D) 48 (E) 30

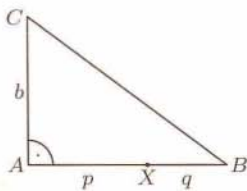
20. Pri deljenju $999 : n$, pri čemer je n dvomestno naravno število, dobimo ostanek 3. Ostanek pri deljenju $2001 : n$ je enak

- (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

21. Mama je spekla 31 čokoladnih ježkov. Prvi dan je Neža pojedla $\frac{3}{4}$ tiste količine ježkov, ki jo je prvi dan pojedel Blaž. Drugi dan je Neža pojedla $\frac{2}{3}$ tiste količine ježkov, ki jo je drugi dan pojedel Blaž. Ob koncu drugega dne je bila posoda s čokoladnimi ježki prazna. Koliko ježkov je pojedla Neža?

- (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 15

22. Trikotnik ABC je pravokoten, pri čemer velja $AC = b$, $AX = p$ in $XB = q$. Jerica in Vesna pričneta iz točke X hkrati hoditi okrog trikotnika. Hodita z enakima hitrostma, vendar v nasprotnih smereh. Srečata se v točki C . Koliko znaša dolžina q , če jo izrazimo s p in b ?



- (A) $\frac{p}{2} + b$ (B) $\frac{pb}{2p+b}$ (C) $\sqrt{p^2 + b^2} + \frac{b}{2}$
 (D) $\frac{p+b}{2}$ (E) $b - p$

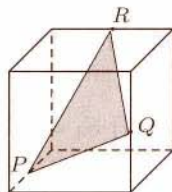
23. Glej naloge za 7. in 8. razred osnovne šole ter 1. in 2. letnik srednje šole, kategoriji A in B, naloga 26.

24. Naj bo število a enako $1997^{1998} + 1998^{1999} + 1999^{2000} + 2000^{2001}$. Zadnja številka števila a je

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

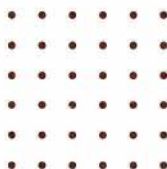
25. Točke P , Q in R so razpolovišča ustreznih robov kocke s robom 2 cm (glej sliko). Koliko meri ploščina trikotnika PQR ?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ (B) $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
 (D) $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ (E) $\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ cm}^2$



26. Navpična in vodoravna razdalja med dvema sosednjima točkama mreže merita 1 cm. Koliko daljic dolžine 5 cm, katerih krajišči sta točki dane mreže, lahko narišemo?

- (A) 10 (B) 12 (C) 24 (D) 34 (E) 36

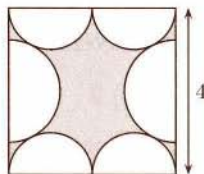


27. Če izbrišemo zadnjo številko nekega naravnega števila, se to število 14-krat zmanjša. Koliko naravnih števil s to lastnostjo obstaja?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

28. Z A označimo ploščino kvadrata, z B pa skupno ploščino vseh šestih polkrogov. Razlika $A - B$ je

- (A) 8 (B) $16 - 3\pi$
 (C) $16 - 4\pi$ (D) $16 - 8\pi + 2\sqrt{5}\pi$
 (E) $16 - 4\pi + \sqrt{5}\pi$



29. Na koliko različnih načinov lahko z enakimi dominami velikosti 1×2 popolnoma prekrijemo pravokotnik velikosti 2×8 , ne da bi se domine pri tem prekrivale?

- (A) 16 (B) 21 (C) 30 (D) 32 (E) 34

30. Na koliko različnih načinov lahko število 30 zapišemo kot vsoto treh naravnih števil? Pri tem zgolj zamenjava vrstnega reda seštevancev ne predstavlja drugačnega načina.

- (A) 105 (B) 75 (C) 81 (D) 362 (E) 101

Naloge za vse letnike srednje šole, kategorija C

Naloge v tej kategoriji so nekatere od nalog iz prejšnjih dveh skupin, in sicer:

Naloge za 5. in 6. razred osnovne šole

1., 2., 3., 4., 6., 7., 9., 11., 13., 14., 17. in 19. naloga

Naloge za 7. in 8. razred osnovne šole ter 1. in 2. letnik srednje šole, kategorija A in B

1., 3. in 6. naloga

Rešitve nalog

2. razred OŠ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	D	A	B	D	E	D	B	A

3. in 4. razred OŠ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	E	E	E	C	E	B	C	C	B

5. in 6. razred OŠ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	C	B	D	E	C	D	E	C	A	D	A	C	C	B	D	C	D	E	B	C	B	C	C	E	D	A	C	A	D

7. in 8. razred OŠ ter 1. in 2. letnik SŠ, kategoriji A in B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	E	C	B	B	B	B	A	A	D	D	E	C	D	C	E	B	A	D	B	E	D	C	C	E	D	C	B	D	C

3. in 4. letnik SŠ, kategoriji A in B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	C	B	D	B	A	C	C	B	D	D	C	C	B	A	E	B	D	E	E	D	B	D	B	C	E	C	D	E	B

Vsi letniki SŠ, kategorija C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	C	B	D	C	D	C	B	C	B	D	C	C	C	E

TEKMOVANJE ZA VEGOVO PRIZNANJE

36. področno tekmovanje za srebrno

Vegovo priznanje – Naloge

6. razred

A1 Sedaj je polnoč in dežuje. Čez 72 ur v tem kraju zagotovo ne bo

- (A) megleno (B) jasno (C) oblačno (D) sončno (E) deževno

A2 Vsota treh zaporednih lihih števil je 27. Največje od teh števil je

- (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 (E) 15

A3 Vrednost izraza $10^3 + \frac{1}{10^3}$ je

- (A) 1000,001 (B) 1000,0001 (C) 100,0001
(D) 100,001 (E) nobena od ponujenih vrednosti

A4 Na papir sem napisal štirimestno število, ki je deljivo s tri, štiri in pet. Na zadnji dve števki je kapnilo črnilo in nista vidni. Vidi se 86 . Zadnji dve števki sta

- (A) 60 (B) 40 (C) 30 (D) 20 (E) 15

A5 Mateja ima šahovski krožek vsak šesti dan pouka. Pouk se prične na ponedeljek in Mateja ima šahovski krožek že prvi šolski dan. Kolikokrat bo v tem šolskem letu Mateja imela šahovski krožek na ponedeljek? (Upoštevaj, da pouk poteka od ponedeljka do petka, 36 tednov zaporedoma.)

- (A) 4-krat (B) 5-krat (C) 6-krat (D) 47-krat (E) 8-krat

A6 Smrklja, Kenguru in Krokodil so dobili vsak svojo čokolado.

Smrklja pravi: "Ko sem pojedla četrtno čokolade in nato še tretjino ostanka, mi je ostalo pol čokolade."

Kenguru: "Ko sem pojedel četrtno čokolade in nato še polovico ostanka, mi je ostala četrtna čokolade."

Krokodil: "Ko sem pojedel četrtno čokolade in nato še polovico ostanka, mi je ostalo tri osmine čokolade."

Kdo ima prav?

- (A) nihče (B) samo Smrklja (C) samo Kenguru
(D) samo Krokodil (E) Smrklja in Krokodil

A7 Če bi v štirikotniku $ABCD$ kot α meril $65^\circ 15'$, kot β bil dvakrat tolikšen kot kot α in kot γ za $37^\circ 25'$ večji od kota β , potem bi kot δ meril

- (A) $3^\circ 40'$ (B) $103^\circ 35'$ (C) $61^\circ 35'$
(D) $72^\circ 15'$ (E) Tak štirikotnik ni mogoč.

A8 Pri nas zapišemo datum v zaporedju dan, mesec, leto. Ponekod po svetu pa datum zapišejo v zaporedju mesec, dan, leto. Število dni v letu, ko je s številkami zapisani datum smiselni v enem in drugem zaporedju, a ima v drugem zaporedju drugačen pomen, je

- (A) 120 (B) 132 (C) 144 (D) 221 (E) 233

B1 Kolikokrat je vrednost izraza $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{7} \cdot 3$ večja od vrednosti izraza $(1 + \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{3}) + (1 + \frac{1}{4}) + ((1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{4}))$?

B2 Kvadrat s ploščino 1 m^2 razrežemo na kvadrate z obsegom 1 dm . Kolikšna je vsota (v metrih) vseh obsegov manjših kvadratov?

B3 Trapez ima kraka dolga 4 cm in 5 cm . Diagonala, ki je pravokotna na daljši krak, meri 6 cm . Nariši trapez.

7. razred

A1 V ribniku je 200 rib. 99 % rib je postrvi, ostalo so belice. Koliko postrvi je treba odvzeti, da bo njihov delež le 98 %?

- (A) 2 (B) 8 (C) 16 (D) 50 (E) 100

A2 Dva moža in dva otroka morajo prečkati reko. S čolnom se lahko naenkrat peljeta dva otroka ali pa en mož. Najmanj kolikokrat mora čoln prečkati reko, da bodo vsi štirje na drugem bregu?

- (A) 3-krat (B) 5-krat (C) 9-krat (D) 11-krat (E) 13-krat

A3 Vsota števk (cif) štirimestnega števila je 3. Koliko takih števil obstaja?

- (A) 5 (B) 6 (C) 10 (D) 12 (E) 15

A4 Ena od zapisanih enakosti ne velja. Katera?

- (A) $(-7)^3 = -7^3$ (B) $(7^3)^2 = (7^2)^3$ (C) $(0,7^2)^2 = (-0,7)^4$
 (D) $7 \cdot 7^3 = (7^2)^2$ (E) $-7^2 = (-7)^2$

A5 Vrednost izraza $\frac{999999}{999} - 1$ je

- (A) 10^4 (B) 10^3 (C) 9^4 (D) $9^3 - 1$ (E) 9^3

A6 Lik, v katerem dva sosednja notranja kota merita po 100° , je lahko

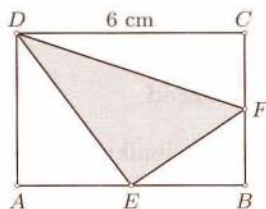
- (A) trikotnik (B) romb (C) paralelogram
 (D) enakokraki trapez (E) pravilni 100-kotnik

A7 V živalskem vrtu so imeli tri leve. Kupili so hrano, ki bi zanje zadostovala za štiri dni. Levi te hrane niso hoteli jesti, zato so z njo hranili dve hijeni. En lev poje toliko kot tri hijene. Koliko dni sta to hrano jedli hijeni?

- (A) 4 dni (B) 12 dni (C) 18 dni (D) 24 dni (E) 36 dni

A8 Obseg pravokotnika $ABCD$ je 20 cm. Točki E in F sta središči (razpolovišči) stranic AB in BC . Kolikšna je ploščina trikotnika $\triangle DEF$?

- (A) 9 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 18 cm^2
 (D) 12 cm^2 (E) ni mogoče izračunati



B1 Izračunaj vrednost izraza

$$\left(2^4 + 4^2 + 3^2 + 2^3 + \frac{33 \cdot 10^7}{10^6} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{144^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot 2\frac{26}{77}$$

B2 Poišči in zapiši vse pare naravnih števil, za katere velja, da je vsota števil v paru 168, njun največji skupni delitelj pa 24.

B3 V enakokrakem trapezu s ploščino 81 cm^2 je osnovnica AB dvakrat tolikšna kot osnovnica CD . Višina je enaka srednjici trapeza. Izračunaj ploščino pravokotnega trapeza $AECD$ z osnovnicama AE in CD .

8. razred

A1 Deset limon stane toliko kot 8 pomaranč, 16 pomaranč toliko kot 12 grenivk, 4 grenivke toliko kot ena melona, 6 melon pa toliko kot 48 banan. Koliko banan dobiš za ceno 5 limon?

- (A) 6 (B) 7
(C) 8 (D) 9

(E) Nobena od ponujenih vrednosti ni pravilna.

A2 Kateri od spodnjih izrazov se ne da zapisati kot produkt s faktorjem $x + y$?

- (A) $x^2 + xy$ (B) $x^2 - y^2$ (C) $y^2 + xy$ (D) $x^2 + y^2$ (E) $2x + 2y$

A3 Vsota naravnih števil a, b, c , za katere velja, da je produkt $a \cdot b \cdot c = 1920$ in $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, je

- (A) 60 (B) 55 (C) 50 (D) 45 (E) 40

A4 Polmer okrogle mizne ploskve je 0,4 m. Pogrnemo jo z okroglim prtičkom premera 40 cm. Koliko odstotkov mizne ploskve ni pogrnjene?

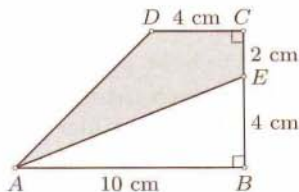
- (A) 0 % (B) 10 % (C) 25 % (D) 50 % (E) 75 %

A5 Za katero realno število velja enakost $\frac{4x - |x|}{3} = x$?

- (A) samo za nič (B) samo za vsako naravno število
(C) za vsako nenegativno realno število (D) za vsako realno število
(E) za nobeno realno število

A6 Ploščina osenčenega štirikotnika $AECD$ je

- (A) 42 cm^2 (B) 22 cm^2 (C) 20 cm^2
(D) 15 cm^2 (E) 12 cm^2



A7 Hipotenuza pravokotnega trikotnika je dolga 0,9 mm. Ena kateta meri a mm, druga pa b mm. Katero od spodnjih števil je najmanjše?

- (A) $a^2 + b^2$ (B) $(a + b)^2$ (C) 0,9 (D) $a + b$ (E) $a \cdot b$

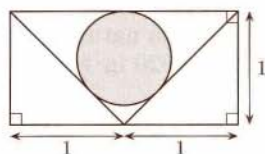
A8 Enakostranični trikotnik in pravilni šestkotnik imata enaka obsega. Razmerje njunih plosčin je

- (A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 1 : 3 (D) 1 : 4 (E) 3 : 4

B1 Povprečna starost 11 igralcev nogometnega moštva je 22 let. Med igro en igralec zaradi poškodbe začasno zapusti igrišče. Povprečna starost preostalih igralcev na igrišču je sedaj 21 let. Koliko je star poškodovani igralec?

B2 Premica p je dana z enačbo $y = -\frac{4}{3}x + 4$. Izračunaj razdaljo premice p od koordinatnega izhodišča.

B3 Izračunaj ploščino osenčenega kroga na sliki.



Rešitve nalog s področnega tekmovanja

6. razred

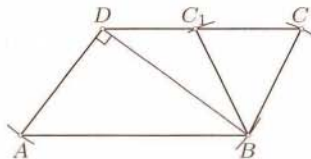
Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	D	C	A	B	C	E	E	B

B1 Vrednost prvega izraza je dvakratnik drugega izraza.

B2 Stranica manjšega kvadrata je dolga 25 mm, njegova ploščina meri 625 mm^2 . Tako je manjših kvadratov 1600, vsota njihovih obsegov pa je 160 m.

B3 Narišemo pravokotni trikotnik $\triangle ABD$. Nato skozi točko D narišemo vzporednico osnovnici AB . Z lokom iz B določimo oglišči C in C_1 . Dobimo dve rešitvi: $ABCD$ in ABC_1D .



7. razred

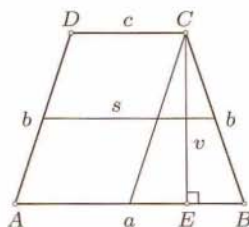
Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	E	C	C	E	B	D	C	A

B1 Vrednost izraza je 2001.

B2 Iz $D(a, b) = 24$ sledi $a = m \cdot 24$ in $b = n \cdot 24$. Zato je $24m + 24n = 168$ in $m + n = 7$. Od tod dobimo pare števil $(24, 144)$, $(48, 120)$ in $(72, 96)$.

B3 Iz $p = 81 \text{ cm}^2$ in $s = v$ dobimo $p = v^2$ in $v = \sqrt{p}$, zato je $v = 9 \text{ cm}$ in $s = 9 \text{ cm}$. Iz $2s = a + c$ in $a = 2c$ dobimo $c = 6 \text{ cm}$, takoj nato pa $p = \frac{(9+6) \cdot 9}{2} = 67,5 \text{ cm}^2$.



8. razred

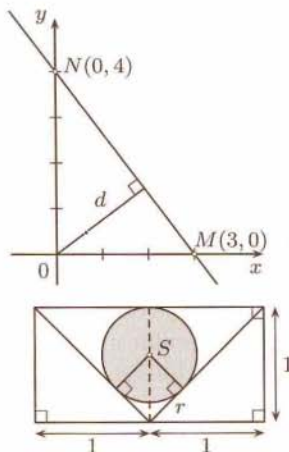
Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	A	D	E	E	C	B	E	B

B1 Vsi igralci skupaj so stari $11 \cdot 22$ let, to je 242 let. Če označimo z x starost poškodovanega igralca, dobimo enačbo $242 - x = 10 \cdot 21$, ki ima rešitev $x = 32$. Poškodovani igralec je star 32 let.

B2 $\overline{OM} = 3$, $\overline{ON} = 4$, zato je $\overline{MN} = 5$. Iz $p_{OMN} = 6$ dobimo $\frac{5d}{2} = 6$, zato je $d = 2,4$.

B3 S slike preberemo $r\sqrt{2} + r = 1$, zato je $r = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ in $p = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 = \pi \left(\frac{1}{3+2\sqrt{2}} \right) \doteq 0,539$



38. državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje – Naloge

7. razred

1. Reši enačbo $\sqrt{2,5 : \frac{-0,5}{-5} - 0,09 : \frac{-0,03}{-3}} \cdot x = 0,4^2 : \frac{0,2^2}{4}$.
2. Slovenija meri 20256 km² (približno 20000 km²) in ima 1978000 prebivalcev (približno 2000000 prebivalcev).
 - a) Koliko kvadratnih metrov ozemlja povprečno pripada enemu prebivalcu Slovenije?
 - b) Pri nas je 17,5 % (približno 18 %) prebivalcev, ki so mlajši od 15 let. Zamislimo si, da bi iz ozemlja, ki pripada tem otrokom, naredili "deželo otrok" v obliki kvadrata. Koliko bi merila stranica kvadrata?
 - c) Ali bi bil obroč okoli "dežele otrok" sklenjen, če bi se v razmiku enega metra vsi starejši od 15 let prijeli za roke?

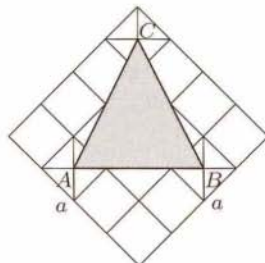
Opomba. Za računanje uporabi približne vrednosti v oklepajih.

3. V pravokotnem trikotniku $\triangle ABC$ meri kot med simetralo pravega kota in višino na hipotenuzo 14°. Izračunaj velikosti ostrih kotov tega trikotnika.
4. Vsota štirih naravnih števil je 1000. Če prvemu številu prištejemo 4, od drugega odštejemo 4, tretje število pomnožimo s 4 in četrto število delimo s 4, dobimo enake rezultate. Katera števila so to?
5. Pravokotni trikotnik $\triangle ABC$ ima ploščino 1 m². Če vsako oglišče prezrcalimo čez nosilko nasprotne stranice, dobimo trikotnik $\triangle A'B'C'$. Izračunaj ploščino trikotnika $\triangle A'B'C'$. Nariši sliko.

8. razred

1. Določi števila x , y in z , za katera velja $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1999$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2000$ in $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2001$.
2. Andrej, Bine in Cene preživljajo praznike pri babici. Da bi jih razveselila, jim babica prinese škatlo bonbonov. Najprej vzame Andrej iz škatle enega več kot polovico vseh bonbonov, potem Bine polovico preostalih in še enega, Cene polovico preostalih in še tri. Tako so si razdelili vse bonbone. Izračunaj, koliko bonbonov je bilo v škatli.
3. Določi ulomek, ki je enak ulomku $\frac{73}{95}$, vsota njegovega števca in imenovalca pa je najmanjši možni kvadrat nekega števila.

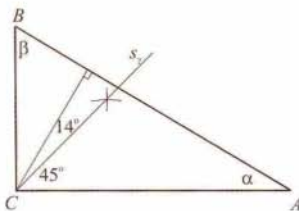
4. Pravokotni trikotnik $\triangle ABC$ ima kateti, dolgi 4 cm in 3 cm. Nosilka daljše katete je tangenta kroga, ki ima središče na hipotenuzi tega trikotnika in gre skozi krajišče krajše katete. Izračunaj ploščino kroga.
5. Iz lesene kocke z robom a izrežemo tristrano prizmo, kot kaže slika tloris.
 - Koliko odstotkov je odpadkov?
 - Kolikokrat je površina kocke večja od ploščine osnovne ploskve tristrane prizme?
 Potrebne podatke poišči na sliki.



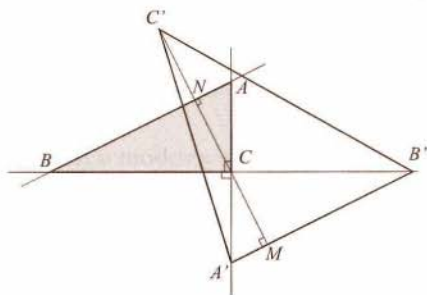
Rešitve nalog z državnega tekmovanja

7. razred

1. Najprej dobimo $\sqrt{25 - 9} \cdot x = 16$ in od tod $x = 4$.
2. a) Ker je $\frac{20000}{2000000} \text{ km}^2 = \frac{1}{100} \text{ km}^2 = 10000 \text{ m}^2$, pripada enemu prebivalcu Slovenije povprečno 10000 m^2 ozemlja.
- b) Iz 18% od $20000 \text{ km}^2 = 3600 \text{ km}^2$ sledi, da 3600 km^2 ozemlja pripada prebivalcem, mlajšim od 15 let. Stranica kvadrata torej meri 60 km.
- c) Prebivalcev, mlajših od 15 let, je 360000. Obroč starejših od 15 let bi bil dolg $1640000 \text{ m} = 1640 \text{ km}$, obseg kvadrata pa je le 240 km. Obroč bi bil sklenjen.
3. Ostra kota merita 31° in 59° .
4. Označimo iskana števila z a , b , c , in d , enak rezultat pa s t . Tedaj je $a = t - 4$, $b = t + 4$, $c = \frac{t}{4}$ in $d = 4t$, zato velja enačba $t - 4 + t + 4 + \frac{t}{4} + 4t = 1000$, ki ima rešitev $t = 160$. Od tod pa dobimo $a = 156$, $b = 164$, $c = 40$, $d = 640$.

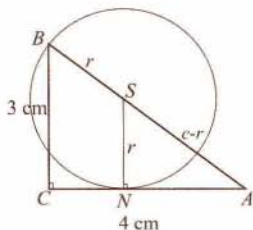


5. Zaradi lastnosti zrcaljenja velja $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ in $\overline{MC'} = 3 \cdot \overline{CN}$. Ker je ploščina trikotnika $\triangle A'B'C'$ enaka $p = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{MC'}}{2}$, je ploščina trikotnika $\triangle A'B'C'$ trikrat tolikšna kot ploščina trikotnika $\triangle ABC$, torej meri $3m^2$.



8. razred

- Če seštejemo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1999$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2000$ in $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2001$, dobimo $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 6000$ in $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3000$. Vstavimo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1999$ in dobimo $\frac{1}{z} = 3000 - 1999 = 1001$, nato pa $z = \frac{1}{1001}$. Podobno dobimo $y = \frac{1}{999}$ in $x = \frac{1}{1000}$.
- Označimo število bonbonov v škatli z x . Andrej jih je vzel $\frac{x}{2} + 1$, Bine $\frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ in Cene $\frac{x}{8} + \frac{9}{4}$. Dobimo enačbo $\left(\frac{x}{2} + 1\right) + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x}{8} + \frac{9}{4}\right) = x$, ki ima rešitev $x = 30$. V škatli je bilo 30 bonbonov.
- Označimo z n število, s katerim moramo pomnožiti števec in imenovalc ulomka $\frac{73}{95}$. Tedaj je $73 \cdot n + 95 \cdot n = 168n$ in zaradi $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ izberemo $n = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Od tod dobimo $\frac{73}{95} = \frac{73 \cdot 42}{95 \cdot 42} = \frac{3066}{3990}$. Iskani ulomek je $\frac{3066}{3990}$.
- Iz podobnih trikotnikov $\triangle ABC \sim \triangle ASN$ sledi $c : a = (c - r) : r$ in $5 : 3 = (5 - r) : r$. Zato je $r = \frac{15}{8}$ cm ($= 1,875$ cm) in ploščina kroga $p = \frac{225\pi}{64}$ cm² ($\doteq 11,04$ cm²).



- $O_{\text{Prizme}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$, zato je $V_{\text{Prizme}} = \frac{a^3}{4}$. Odpadkov je $V_{\text{Kocke}} - V_{\text{Prizme}} = \frac{3}{4}a^3 = 75\% a^3$.
 - Ker je površina kocke $6a^2$, ploščina osnovne ploskve prizme pa $\frac{a^2}{4}$, je površina kocke 24-krat tolikšna kot osnovna ploskev tristrane prizme.

**TEKMOVANJE DIJAKOV SREDNJIH
POKLICNIH ŠOL¹****Regijsko tekmovanje****I. del**

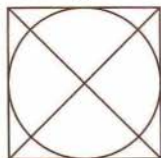
1. Rododendrom preživi pozimi le, če temperatura ne pade pod -28°C , in poleti le, če temperatura ne preseže 24°C . Kolikšno temperaturno razliko še preživi rododendrom?

(A) 4°C (B) 45°C (C) 54°C (D) -4°C (E) 52°C

2. Vsota $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$ je enaka

(A) $\frac{3}{1110}$ (B) $\frac{3}{1000}$ (C) $\frac{111}{1000}$ (D) $\frac{111}{1110}$ (E) $\frac{3}{111}$

3. Katerega lika ni na sliki?



(A) kroga
(B) kvadrata
(C) pravokotnega trikotnika
(D) enakokrakega trikotnika
(E) enakostraničnega trikotnika

4. Rok ima 500 tolarjev, Janez ima 1200 tolarjev, Eva 700 tolarjev. Kolikšna je lahko najvišja cena vstopnice, da si vsi skupaj še lahko privoščijo ogled kino predstave?

(A) 750 SIT (B) 700 SIT (C) 800 SIT
(D) 500 SIT (E) 1200 SIT

5. Koliko robnikov dolžine 60 cm potrebujemo za ureditev 1,5 km dolge ulice na obeh straneh?

(A) 25 (B) 90 (C) 5000 (D) 250 (E) 2,5

6. Razmerje med fanti in dekleti v razredu z 32 učenci je 1 : 3. Koliko več je deklet?

(A) 24 (B) 8 (C) 16 (D) 20 (E) 14

¹ Recenzirano v uredništvu Preseka.

7. Po 20% pocenitvi so smučarska očala stala 3000 tolarjev. Koliko so stala pred pocenitvijo v redni prodaji?
- (A) 2400 SIT (B) 3200 SIT (C) 3600 SIT
(D) 3750 SIT (E) 4250 SIT
8. Če greš v šolo peš, domov pa se pripelješ z avtom, potrebuješ za pot od doma do šole in nazaj 3,5 ure. Če se v obe strani pelješ z avtom, potrebuješ 1 uro. Koliko časa potrebuješ, če greš peš v šolo in nazaj?
- (A) 4,5 ure (B) 1 uro (C) 6 ur (D) 7 ur (E) 8 ur
9. Na nekem jezeru gojijo takšne lokvanje, da jih je vsak dan dvakrat več. V sredo je bila pokrita četrtnina jezera. Kdaj bo pokrito vse jezero?
- (A) v četrtek (B) v petek (C) v soboto
(D) v nedeljo (E) v ponedeljek
10. Kako visok je steber, če je tretjina stebra v tleh, polovica v vodi, nad vodo pa štrli 1,5 metra?
- (A) 9,5 m (B) 10 m (C) 7,5 m (D) 9 m (E) 8 m

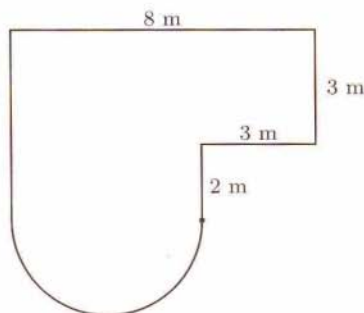
II. del

1. Iz danega cenika določi:

- (A) Koliko stane 1 kg rženega kruha?
(B) Koliko stane $\frac{1}{4}$ kg črnega kruha?
(C) Koliko kmečkega sira dobiš za 200 SIT?
(D) Koliko plačaš za $\frac{1}{4}$ kg rženega kruha, 10 dag edamca in $\frac{1}{2}$ kg graham kruha?

izdelek	količina	cena
KRUH	kg	SIT
beli	1	95
črni	1	90
rženi	$\frac{1}{2}$	48
graham	$\frac{1}{4}$	20
SIRI		
kmečki	1	800
trapist	$\frac{1}{2}$	370
edamec	$\frac{1}{4}$	175

2. Izletnik se z nadmorske višine 548 metrov dvigne z gondolo do višine 1407 metrov, nato s sedežnico na višino 1666 metrov. Dalje se odpravi peš. Spusti se za 310 metrov in doseže prvi vrh, ko se vzpne še za 402 metra. Preden pride do koč, se mora spustiti za 145 metrov, ponovno splezati navzgor za 297 metrov in se še enkrat spustiti za 102 metra.
- (A) Na kateri nadmorski višini je koč?
- (B) Za koliko metrov se bo moral povzpeti naslednji dan, da bo osvojil 2350 metrov visok vrh?
- (C) Za koliko metrov se bo moral potem spustiti, da bo prišel v izhodiščni kraj v dolini?
3. Maja je oblikovala cvetlične aranžmaje. Če bi dala v vsako vazo 7 cvetov, bi ji štirje cveti ostali, če bi dala v vsako vazo 8 cvetov, bi ji dva cveta zmanjkala. Koliko vaz in koliko cvetov ima Maja?
4. Koliko talne obloge (v m^2) potrebujemo za sobo z naslednjimi merami?



Rešitve nalog

I. del

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	E	C	C	C	D	C	B	D

II. del

- Pravilni odgovori so: (A) 96 SIT, (B) 22,5 SIT, (C) $\frac{1}{4}$ kg, (D) 134 SIT.
- Koč je na nadmorski višini 1808 metrov. Naslednji dan se bo moral povzpeti za 542 metrov. Da bo izletnik prišel v izhodiščni kraj, se bo moral spustiti za 1802 metra.
- Iz $7 \cdot x + 4 = 8 \cdot x - 2$ sledi $x = 6$, od tod pa sklepamo, da je Maja imela 6 vaz in 46 cvetov.
- $43,8 \text{ m}^2$

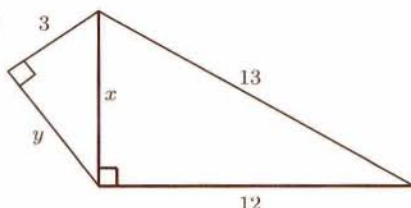
Državno tekmovanje

I. del

1. Obseg narisane štirikotnika je:

(A) 25 (B) 32 (C) 37

(D) 33 (E) 28



2. V pomnilnik mobilnega telefona lahko shranimo štiri telefonske številke na mesta od 1 do 4. Na koliko načinov lahko razporedimo te telefonske številke?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 4 (E) 32

3. Dijaki 1.a oddelka so se dogovorili, da bo v počitnicah vsak pisal po eno razglednico vsakemu od sošolcev. Koliko dijakov je v razredu, če je bilo napisanih 306 razglednic?

(A) 18 (B) 17 (C) 27

(D) 34 (E) ni rešitve

4. Koliko sirupa potrebujemo, da naredimo 4,5 litrov soka, če redčimo sirup z vodo v razmerju 1 : 9?

(A) 4 dl (B) 4,5 dl (C) 3 dl (D) 4,05 dl (E) 5 dl

5. V Sandrinem naravnem vrtu so rasli zvončki. Ker jih ni nihče oviral, so se razraščali in vsako naslednje leto jih je bilo trikrat toliko kot prejšnje. Koliko zvončkov je raslo v vrtu petnajsto leto, če jih je bilo prvo leto 12?

(A) manj kot 100 tisoč (B) med 100 tisoč in milijonom

(C) med milijon in 10 milijoni (D) med 10 milijoni in 100 milijoni

(E) več kot 100 milijonov

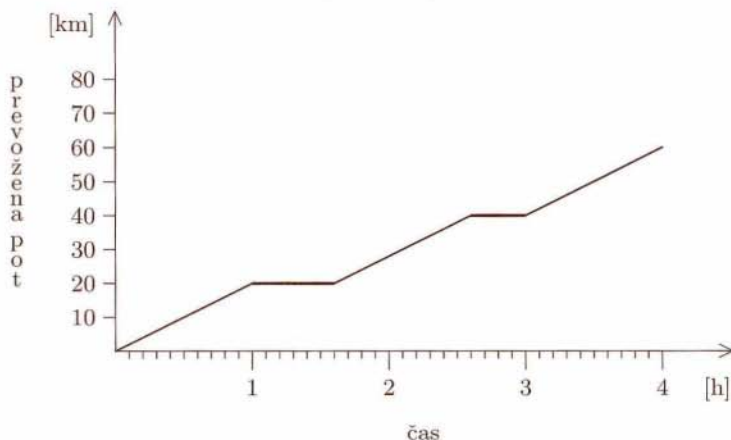
6. Če v magičnem kvadratu seštejemo števila v poljubni vrstici, poljubnem stolpcu ali poljubni diagonali, dobimo enak rezultat. Kolikšno naj bo število N , da bo kvadrat na sliki magičen?

16	N	
11		15
12		

(A) 13 (B) 39 (C) 17 (D) 9 (E) ni rešitve

II. del

1. Kolesar Srečko je vozil iz domačega kraja v Maribor z enakomerno hitrostjo 20 km/h. Na poti je dvakrat počival. S pomočjo grafa ugotovi:
- (A) Koliko časa je potreboval za celotno pot?
- (B) Koliko kilometrov je bil Srečko oddaljen od Maribora ob drugem počitku?
- (C) Koliko časa bi potreboval za pot, če ne bi nič počival?
- (D) Po kolikšnem času je bil na polovici poti?



2. Osem enakih kock zložimo skupaj tako, da sestavljajo večjo kocko. Prostornina večje sestavljene kocke je 512 cm^3 .
- (A) Izračunaj prostornino manjše kocke.
- (B) Izračunaj osnovni rob manjše kocke.
- (C) Kolikšen je rob večje sestavljene kocke?
- (D) Kolikšna je površina sestavljene kocke?

3. Na kmetiji imajo štirikrat toliko piščancev kot krav in osem bikov manj kot krav, vse živali skupaj pa imajo 288 nog. Koliko je bikov, krav in piščancev?
4. Ne da bi zamenjal vrstni red števk, postavi mednje znake za računske operacije tako, da dobiš vsakokrat rezultat 1. Pri zapisovanju in računanju lahko uporabljaš oklepaje. Če je potrebno, lahko vzameš dve zaporedni številki kot dvomestno število.

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 = 1 \qquad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 1 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 = 1 \qquad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 = 1 \end{array}$$

Rešitve nalog

I. del

1	2	3	4	5	6
B	C	A	B	D	D

II. del

1. Za celotno pot je potreboval 4 ure. Ob drugem počitku je bil Srečko od Maribora oddaljen 20 km. Če ne bi nič počival, bi za pot potreboval 3 ure. Na polovici poti je bil po 2,1 urah.
2. Prostornina manjše kocke je $512 \text{ cm}^3 : 8 = 64 \text{ cm}^3$, njen osnovni rob je zato 4 cm, rob večje kocke pa 8 cm. Površina sestavljene kocke je $P = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$.
3. Pišimo $p = 4k$, $b = k - 8$, $2p + 4b + 4k = 288$, od koder izračunamo $k = 20$. Na kmetiji je 12 bikov, 20 krav in 80 piščancev.
4. Nalogo je mogoče rešiti na več načinov, npr.: $(1 + 2) : 3 = 1$, $1 \cdot 2 + 3 - 4 = 1$, $((1 + 2) \cdot 3 - 4) : 5 = 1$, $(12 : 3 : 4 + 5) : 6 = 1$.

TEKMOVANJE DIJAKOV SREDNJIH
STROKOVNIH IN TEHNIŠKIH ŠOL¹

Regijsko tekmovanje

1. letnik – I. del

1. Riba ima 9 cm dolgo glavo. Njen rep je dolg toliko kot glava in pol telesa skupaj. Telo je tako dolgo kot glava in rep skupaj. Kako dolga je riba?
- (A) 27 cm (B) 54 cm (C) 63 cm (D) 72 cm (E) 81 cm
2. Če izraz $bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b)$ zapišemo kot produkt, dobimo
- (A) $(a+1)(b+c)(c-a)$ (B) $(b+c)(c-a)(a-b)$
(C) $(c-a)(b+c)(a-b)$ (D) $(a+b)(b+c)(c-a)$
(E) nič od navedenega
3. Za katero vrednost parametra m bosta premici z enačbama $y = (m+5)x + m - 1$ in $y = (m-1)^2x - 3m$ vzporedni?
- (A) $m_1 = 1, m_2 = -5$ (B) $m_1 = -4, m_2 = 1$ (C) $m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{3}$
(D) $m = -\frac{1}{4}$ (E) nič od navedenega
4. Trговец je kupil 300 l vina. Od tega je 100 l vina prodal z dobičkom 15% in 150 l z dobičkom 8%, ostanek pa z izgubo 12%. Kolikšen je bil njegov dobiček v %?
- (A) 3 % (B) 5,1 % (C) 7,2 %
(D) 9,1 % (E) nič od navedenega
5. Izberi a tako, da bo vrednost izraza $\left(1 - (1 - a^{-1})^{-1}\right)^{-1}$ enaka 3.
- (A) $a = -2$ (B) $a = 2$ (C) $a = \frac{1}{2}$ (D) $a = 30$ (E) $a = 0$
6. Naj bo $x < -2$. Okrajšaj ulomek $\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{x^2 - 2x}$. Rezultat je
- (A) $-\frac{x+1}{x-2}$ (B) $\frac{x+1}{x}$ (C) $-\frac{x+1}{x}$ (D) 1 (E) -1

¹ Naloge in rešitve te skupine so bile temeljito recenzirane v uredništvu Preseka.

1. letnik – II. del

- Pred petimi leti je bilo razmerje števila let Klare, Jerce in Tine $9 : 10 : 13$. Čez 10 let bo razmerje njihovih let $14 : 15 : 18$. Koliko let imajo danes Klara, Jerca in Tina?
- Razstavi izraz $4^{2x+1} + 4^{x+2} - 84$.
- Ploščina trikotnika, ki ga oklepa premica s pozitivnima poltrakoma koordinatnih osi, je enaka 1. Premica poteka skozi točko $A(1, \frac{1}{2})$. Zapiši njeno enačbo.
- Kocka velikosti $9 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$ je sestavljena iz manjših kock velikosti $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Ploskve kocke pobarvamo z rdečo barvo.
(A) Koliko manjših kock ostane nepobarvanih?
(B) Koliko manjših kock ima pobarvano le eno ploskev?

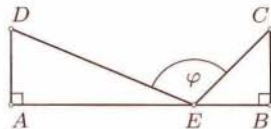
2. letnik – I. del

- Imamo dva podobna pravokotna trikotnika. Prvi ima kateti dolgi 3 cm in 4 cm, v drugem meri hipotenuza 10 cm. Obseg drugega trikotnika je
(A) 6 cm (B) 24 cm (C) 25 cm
(D) 17 cm (E) nič od navedenega
- Vrednost izraza $\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ je
(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) 3,46 (D) 2 (E) $\sqrt{6}$
- V pravokotniku meri ena stranica 24 cm, druga pa je za 8 cm krajša od diagonale. Izračunaj kot med diagonalo in dano stranico na minuto natančno.
(A) $70^\circ 31'$ (B) $36^\circ 52'$ (C) $53^\circ 13'$
(D) $53^\circ 08'$ (E) nič od navedenga
- Zapiši izraz $\frac{0,4^{-2} \cdot (2\frac{1}{4})^{-1}}{(-\frac{1}{3})^3 \cdot 0,1^{-2}}$ v obliki okrajšanega ulomka.
(A) 1 (B) $\frac{27}{8}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{27}{8}$ (E) -48

5. Okrajšaj ulomek $\frac{4x^2 - 4x - 3}{6x^2 - x - 2}$.
- (A) $\frac{2x-3}{3x-2}$ (B) $\frac{2x+3}{3x+2}$ (C) $\frac{x-4}{x-2}$ (D) $\frac{x+4}{x+2}$ (E) 1
6. Določi pogoj za c tako, da bo teme kvadratne parabole $f(x) = 2x^2 + 3x + c$ ležalo v III. kvadrantu.
- (A) $c = 0$ (B) $c > -1$ (C) $c > 1\frac{1}{8}$ (D) $c = 1$ (E) $c < \frac{9}{8}$

2. letnik – II. del

1. V pravokotniku ABCD meri osnovnica 20 cm. Vsako oglišče je 12 cm oddaljeno od diagonale, na kateri ne leži. Izračunaj ploščino pravokotnika ABCD.
2. Poenostavi izraz $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^3\sqrt[3]{b}}{a^2-b^2}} : \sqrt[6]{\frac{a^8b}{a+b}}$.
3. Poišči vse realne rešitve enačbe $(x^2 + x + 3)^2 + 3(x^2 + x - 1) = 28$.
4. $|AE| > |EB|$, $|EB| = |BC| = |AD|$, $|AB| = 17$ cm, $|ED| = 13$ cm. Izračunaj kot φ na minuto natančno. (Točke A, E in B so kolinearne).



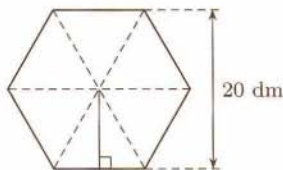
3. letnik – I. del

1. Katera od izjav je pravilna?
- (A) Središče trikotniku očrtane krožnice leži vedno znotraj trikotnika.
- (B) V vsakem rombu diagonali razpolavljata kote romba.
- (C) Težišče in višinska točka v pravokotnem trikotniku sovpadata.
- (D) Ploščina trikotnika s stranicami a, b in c je dana s Heronovo formulo $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kjer je s obseg trikotnika.
- (E) V vsakem paralelogramu diagonali razpolavljata kote paralelograma.

2. Katera od izjav je pravilna? Funkcija $f(x) = 2 + \sin 2x$
- (A) nikoli ne zavzame vrednosti 2.
 (B) je periodična z najmanjšo periodo 2π .
 (C) doseže največjo vrednost 4.
 (D) je definirana le za $x < \frac{\pi}{4}$.
 (E) nima ničel.
3. Ploščina trapeza s stranicami $a = 17$, $b = 15$, $c = 3$ in $d = 13$
- (A) ni določena, ker ni znana njegova višina
 (B) je 120 (C) je 132 (D) je 156 (E) je 192
4. Edina rešitev enačbe $2 \cdot 3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1} = 14 \cdot 3^5$ je
- (A) $x = 2$ (B) $x = 8$ (C) $x = -8$ (D) $x = -2$ (E) $x = 0$
5. Razmerje telesne in ploskovne diagonale v kocki je
- (A) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ (B) $2 : 3$ (C) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ (D) $3 : 2$ (E) $\sqrt{2} : 1$
6. Dana je družina funkcij $y = \log_a(3x^2 - 2x)$. Za kateri a zavzame pripadajoča funkcija pri $x = 2$ vrednost 6?
- (A) $a = 2$ (B) $a = \sqrt{2}$ (C) $a = 10$
 (D) $a = \frac{1}{2}$ (E) nič od navedenega

3. letnik – II. del

1. Izračunaj ploščino osenčenega lika na sliki.
2. Reši enačbo $\log_2(2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1) = -1$.
3. Naj bo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a+2b}{a\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{b+2a}{b\sqrt{3}}$, $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Določi $\alpha + \beta$.
4. Kozarec ima obliko pokončnega stožca. Ploščina osnega preseka pokončnega stožca meri 48 dm^2 , dolžina roba pa je $\frac{5}{3}$ polmera. Steklenica ima obliko enakorobe šeststrane prizme. (Potrebne podatke izračunaj s pomočjo skice osnovne ploskve). Koliko kozarcev napolniš iz polne steklenice?



4. letnik – I. del

1. Odvod funkcije $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$ je enak

(A) $2e^{-\frac{1}{2}x}$ (B) $-2e^{-\frac{1}{2}x}$ (C) $-e^{-\frac{1}{2}x}$
(D) $e^{-\frac{1}{2}x}$ (E) $2\ln(-\frac{1}{2}x)$

2. Naklonski kot premice $x + y - 3 = 0$ je

(A) 45° (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) 135° (D) -60° (E) drugo

3. Dana je neskončna gometrijska vrsta $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{2x}} + \frac{1}{2^{3x}} + \dots$. Za katero realno število x je vsota vrste enaka $\frac{1}{7}$?

(A) $x = 1$ (B) $x = 2$ (C) $x = \frac{3}{2}$ (D) $x = 3$ (E) $x = 0$

4. Rešitev enačbe $2^{x+1} = x^2 + 1$ leži na intervalu

(A) $[0, 1)$ (B) $(-3, -1)$ (C) $[-1, 0]$
(D) $(0, 2)$ (E) $(-4, -3)$

5. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2-9}{x-1}$ ima

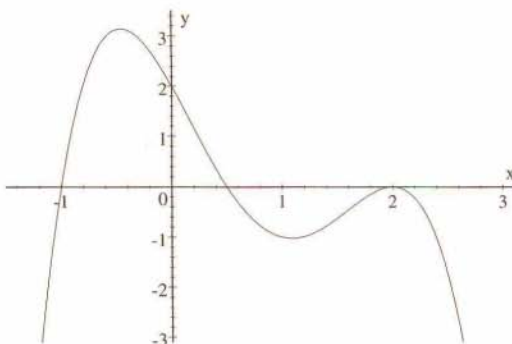
(A) dva pola in eno ničlo.
(B) poševno asimptoto $y = x + 1$ in pol v točki $x = 1$.
(C) dvojno ničlo $x_{1,2} = 3$.
(D) graf, ki ne seka ordinatne osi.
(E) nima realnih ničel in ima pol v točki $x = 1$.

6. Za kateri x je zaporedje $\sqrt{x}$, $\sqrt{5x-4}$, $3\sqrt{x}$ aritmetično?

(A) $x = 1$ (B) $x = 2$ (C) $x = 4$ (D) $x = 6$ (E) $x = \frac{1}{4}$

4. letnik – II. del

1. Narisan je graf polinoma četrte stopnje. Zapiši njegovo enačbo.



2. Katera dva zaporedna člena geometrijskega zaporedja s količnikom 3 moramo zmnožiti, da dobimo 243-kratnik kvadrata prvega člena tega zaporedja?
3. Določi definicijsko območje funkcije $f(x) = \ln \frac{1}{\cos x}$ ter zapiši, v katerih točkah ima funkcija $f(x)$ tangente vzporedne simetrali sodih kvadrantov.
4. Krožnica s polmerom $r = 4$ ima središče v enem od temen elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ in poteka skozi obe gorišči in skozi drugo teme. Zapiši enačbo elipse ($a > b$)!

Rešitve nalog z regijskega tekmovanja

1. letnik – I. del

1	2	3	4	5	6
D	D	E	E	A	B

1. letnik – II. del

1. Iz $x - 5 = 9t$, $y - 5 = 10t$,
 $z - 5 = 13t$ in $x + 10 = 14k$,
 $y + 10 = 15k$, $z + 10 = 18k$,
sledi najprej $t = k = 3$ in
od tod $x = 32$, $y = 35$,
 $z = 44$.

	danes	pred 5 leti	čez deset let
Klara	x	$x - 5$	$x + 10$
Jerca	y	$y - 5$	$y + 10$
Tina	z	$z - 5$	$z + 10$

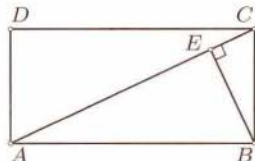
2. $4(4^x + 7)(4^x - 3)$
3. $x + 2y = 2$
4. (A) 343, (B) 294.

2. letnik – I. del

1	2	3	4	5	6
B	B	D	C	A	E

2. letnik – II. del

1. Ker je $\triangle ABE$ pravokoten, je $|AE| = \sqrt{|AB|^2 - |BE|^2} = 16$ cm. Nadalje je $|AE| : |AB| = |BE| : |BC|$, od koder sledi $|BC| = 15$ cm in $S = ab = |AB| \cdot |BC| = 300$ cm².



2. $\sqrt[3]{\frac{a+b}{(a-b)^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^3 \cdot \sqrt[3]{b}}{a^2-b^2}} : \sqrt[6]{\frac{a^8 b}{a+b}} = \sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^4} \cdot \frac{a^9 b}{(a-b)^3 (a+b)^3} \cdot \frac{a+b}{a^8 b}} = \sqrt[6]{\frac{a}{(a-b)^7}}$
3. Enačbo zapišemo v obliki $(x^2 + x + 3)^2 + 3(x^2 + x + 3) - 40 = 0$ in za izraz v oklepaju uvedemo novo neznanko u . Enačba $u^2 + 3u - 40 = 0$ ima dve rešitvi $u_1 = -8$ in $u_2 = 5$. Od tod dobimo dve enačbi za x : $x^2 + x + 3 = -8$, ki nima realne rešitve, in $x^2 + x + 3 = 5$, ki ima dve realni rešitvi $x_1 = -2$ in $x_2 = 1$.
4. Označimo $|EB| = |BC| = |AD| = x$ in uporabimo Pitagorov izrek za $\triangle AED$: $13^2 = x^2 + (17-x)^2$. Enačba ima dve rešitvi: $x_1 = 12$, ki ne ustreza prvemu pogoju naloge, in $x_2 = 5$. Sledi $\sin \alpha = \sin \angle AED = \frac{5}{13}$ in $\alpha = 22^\circ 38'$ ter $\varphi = 180^\circ - \alpha - 45^\circ = 112^\circ 22'$.

3. letnik – I. del

1	2	3	4	5	6
B	E	B	B	C	B

3. letnik – II. del

1. $S = a^2 \left(\frac{24+\pi}{64} \right)$
2. $\cos x = t$, $4t^2 - 4t + 1 = 0$, $t = \frac{1}{2}$,
 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{a+2b}{a\sqrt{3}} + \frac{b+2a}{b\sqrt{3}}}{1 - \frac{a+2b}{a\sqrt{3}} \cdot \frac{b+2a}{b\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$, $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$.
4. $r_s = 6$ dm, $v_s = 8$ dm, $V_s = 301,44$ dm³;
 $a_p = v_p = \frac{20}{\sqrt{3}}$ dm, $V_p = 4000$ dm³ in $\frac{V_p}{V_s} = \frac{4000}{301,44} = 13,27$.
 Odgovor: Število kozarcev je 13.

4. letnik – I. del

1	2	3	4	5	6
C	C	D	C	B	C

4. letnik – II. del

- $p(x) = -(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-2)^2$
- $a_n \cdot a_{n+1} = 243a_1^2$, $a_{n+1} = 3a_n$ in $a_n = a_1 q^{n-1}$, od koder sledi $3^{2n-2} = 3^4$ in $n = 3$.
Zmnožiti moramo tretji in četrti člen.
- $D_f = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$ in $T(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{1}{2} \ln 2)$; $k \in \mathbb{Z}$
- $r = 2b$, $2r = 2a$; $a = 4$, $b = 2$;
 $x^2 + 4y^2 = 16$

Državno tekmovanje

1. letnik

- Podjetnik A ima na računu 8,6 milijona tolarjev, ko se odloči, da ne bo več delal. Vsak mesec za porabi življenje 120 000 tolarjev. Podjetnik B pa ima na računu 1,2 milijona tolarjev in še vedno ustvarja. Vsak mesec ima 250 000 dobička. Čez koliko časa bosta imela podjetnika enako denarja?
Čez koliko časa bo podjetnik A ostal brez denarja?
- Miha je zapisal ulomek $\frac{37}{13}$, Jaka pa ulomek $2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}}$ in ukazal Mihi naj poišče naravna števila x , y ter z , da bosta ulomka enaka. Katera naravna števila so to?
- Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo premice $x + 6y + 9 = 0$, $4x - y - 14 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$ in $2x - y + 5 = 0$.
- V šestmestnem številu z desetiškim zapisom $523abc$ določi neznane številke a , b , c tako, da bo število hkrati deljivo s 7, 8 in 9.
- Dokaži, da za poljubna realna števila x , y , z velja $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

2. letnik

1. Z uporabo Pitagorovega izreka dokaži, da v poljubnem ostrokotnem trikotniku velja $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.
2. Tetiva AB krožnice meri $10\sqrt{5}$ cm. Skozi njeno razpolovišče P poteka tetiva CD , ki jo točka P deli v razmerju 1 : 5. Izračunaj dolžino tetive CD .
3. Dokaži enakost
$$\frac{(a+1)^2 - (a^2 - 1) + 2\sqrt{a^2 - 1}}{a^2 - 1 - (a-1)^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}.$$
4. Vsota števk dvomestnega števila je enaka 9, vsota kvadratov teh števk pa je za 1 manjša od dvakratnika števila. Katero število je to?
5. Določi naravno število m , da bo teme parabole $y = -x^2 + mx - 13$ ležalo na premici $y = x - 1$. Izračunaj razdaljo temena od koordinatnega izhodišča!

3. letnik

1. Reši enačbo $\log_2(2 \log_9(1 + \log_{0,5}(-\frac{3}{4} + \log_2 x))) = 0$.
2. Pravilna štiristrana piramida z osnovnim robom a ima višino $\frac{a}{2}$. Natančno izračunaj kot φ med sosednjima stranskima ploskvama.
3. Izračunaj število stranic pravilnega večkotnika, če je število njegovih diagonal enako rešitvi enačbe $9^x + (2 - 3^{90})3^x - 2 \cdot 3^{90} = 0$.
4. Dana je funkcija $f(x) = -\frac{1}{2} \sin x$.
 - (A) Zapiši funkcijo $g(x) = 2 \cdot f(-2x) + 1$.
 - (B) Izračunaj ničle in točke, v katerih doseže funkcija $g(x)$ največjo oz. najmanjšo vrednost.
 - (C) Nariši graf funkcije $g(x)$.
5. V trikotniku $\triangle ABC$ izberemo poljubno notranjo točko D . Naj bodo T_1 , T_2 in T_3 težišča trikotnikov $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ in $\triangle CAD$. Pokaži, da predstavlja ploščina trikotnika $T_1T_2T_3$ eno devetino ploščine $\triangle ABC$.

4. letnik

1. Izračunaj vsoto vseh naravnih števil, ki so zapisana z največ dvema števkom ter dajo pri deljenju s 5 ostanek 1.
2. Škatlo lahko pošljemo kot paket le, če vsota dolžine, širine in višine ni večja kot 14 dm. Naj bo širina škatle enaka višini. Ugotovi največjo možno prostornino škatle, ki jo bo sprejela pošta.
3. Napiši enačbo krožnice, ki leži simetrično krožnici $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ glede na premico $y = x - 3$.
4. Dana funkcija, ki je kvocient dveh polinomov druge stopnje, ima ničli v točkah -1 in 2 . Njeno definicijsko območje je $\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$, graf pa seka ordinatno os v točki -2 . Zapiši enačbo te funkcije.
5. Dano je aritmetično zaporedje. Razmerje vsot prvih m in prvih n členov za poljubni naravni števili m in n je $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m(m+1)}{n(n+1)}$. Zapiši nekaj prvih členov zaporedja.

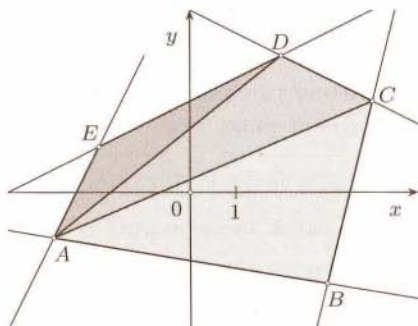
Rešitve nalog z državnega tekmovanja

1. letnik

1. Podjetnika bosta imela enako denarja čez 20 mesecev. A bo bankrotiral čez 71,7 mesecev, kar je približno 6 let.

2. $x = 1, y = 5, z = 2$

3. Določimo oglišča $A(-3, -1)$, $B(3, -2)$, $C(4, 2)$, $D(2, 3)$, $E(-2, 1)$ in izračunamo ploščino $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ADE} = 12,5 + 6,5 + 3 = 22$.



4. $523abc = 523\,000 + x$, kjer je $0 \leq x < 1000$; Ker je število deljivo hkrati s 7, 8 in 9 (tuja števila), je deljivo tudi s številom $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, torej je $523\,000 + x = 504k$ ($k \in \mathbb{Z}$) oziroma $k = 1037 + \frac{x+352}{504}$. Ker je $k \in \mathbb{Z}$, mora število 504 deliti izraz $(x+352)$. Sledi $x = 152$ ali $x = 656$. Iskani števili sta 523 152 in 523 656.

5. $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy,$
 $(x-z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + z^2 \geq 2xz,$
 $(y-z)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + z^2 \geq 2yz.$

Neenakosti seštejemo in delimo z 2: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$

2. letnik

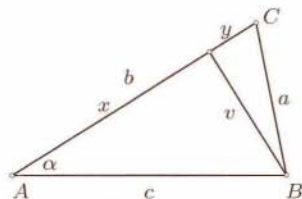
1. $a^2 = v^2 + y^2$

$$x = c \cos \alpha$$

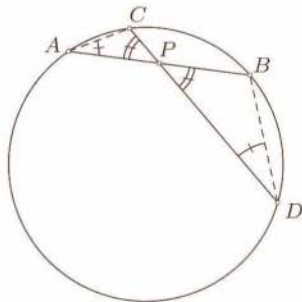
$$y = b - x = b - c \cos \alpha$$

$$v^2 = c^2 - x^2 = c^2 - c^2 \cos^2 \alpha$$

$$a^2 = c^2 - c^2 \cos^2 \alpha + (b - c \cos \alpha)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



2. Iz skice razberemo, da sta $\triangle APC$ in $\triangle BPD$ podobna: $|AP| : |PC| = |DP| : |PB|$. Če zapišemo $|CP| = x$, $|PD| = 5x$, dobimo (ker je $|AP| = |PB|$) $x = 5$ in $|CD| = |CP| + |PD| = 30$ cm.



3.
$$\frac{(a+1)^2 - (a-1)(a+1) + 2\sqrt{(a-1)(a+1)}}{(a-1)(a+1) - (a-1)^2 + 2\sqrt{(a-1)(a+1)}} =$$

$$= \frac{(a+1)(a+1-a+1) + 2\sqrt{(a-1)(a+1)}}{(a-1)(a+1-a+1) + 2\sqrt{(a-1)(a+1)}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{(a+1)^2} + 2\sqrt{(a-1)(a+1)}}{2\sqrt{(a-1)^2} + 2\sqrt{(a-1)(a+1)}} = \frac{\sqrt{a+1}(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})}{\sqrt{a-1}(\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1})} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$
4. Iz $x+y=9$ in $x^2+y^2=2(10x+y)-1$ sledi $x^2+(9-x)^2=2(10x+9-x)-1$, t.j. $x^2-18x+32=0$. Od rešitev $x_1=2$, $x_2=16$ je lahko števka le x_1 , zato je iskano število 27.
5. Če koordinati temena $p = \frac{m}{2}$, $q = \frac{m^2-52}{4}$ vstavimo v enačbo premice, dobimo enačbo $m^2 - 2m - 48 = 0$, ki ima rešitvi $m_1=8$, $m_2=-6$. Prva parabola ima teme v točki $T_1(4,3)$, druga v $T_2(-3,-4)$. Vsako od temen je za 5 enot oddaljeno od izhodišča.

3. letnik

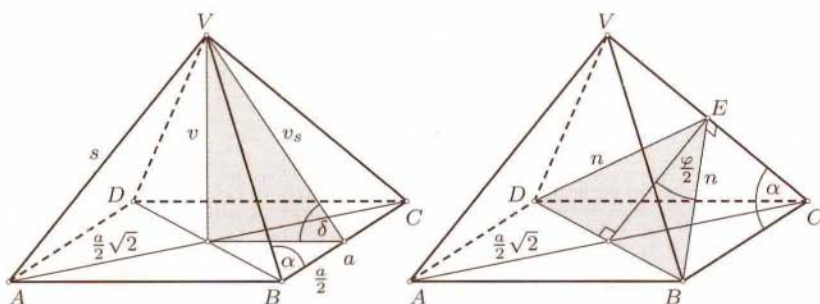
1. $2 \log_9(1 + \log_{0,5}(-\frac{3}{4} + \log_2 x)) = 1$
 $\log_9(1 + \log_{0,5}(-\frac{3}{4} + \log_2 x)) = \frac{1}{2}$
 $1 + \log_{0,5}(-\frac{3}{4} + \log_2 x) = 3$
 $-\frac{3}{4} + \log_2 x = (\frac{1}{2})^2$
 $\log_2 x = 1$
 $x = 2$

2. $\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \delta = 1 \Rightarrow \delta = 45^\circ$.

Od tod dobimo $v_s = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ in $s^2 = (\frac{a}{2})^2 + v_s^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow s = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

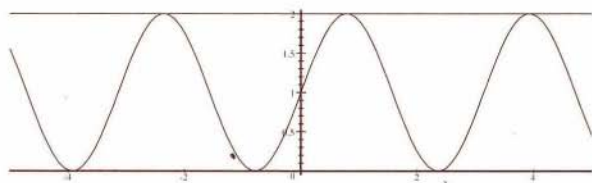
Nadalje je $n = a \sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ in zato $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sledi

$\frac{\varphi}{2} = 60^\circ$ in $\varphi = 120^\circ$. Možnost $\frac{\varphi}{2} = 120^\circ$ oz. $\varphi = 240^\circ$ odpade, ker je očitno $\varphi < 180^\circ$.

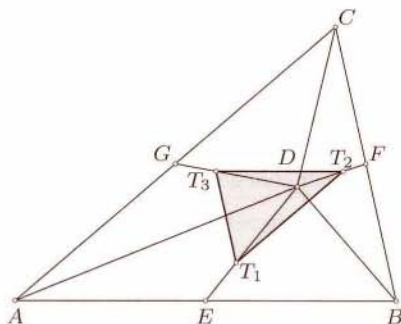


3. $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3^{90} \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{90} = 0$
 $(3^x + 2)(3^x - 3^{90}) = 0$
 $3^x = -2 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}, 3^x = 3^{90} \Rightarrow x = 90$. Rezultat vstavimo v formulo za število diagonal n -kotnika $\frac{n(n-3)}{2} = 90$, od koder sledi $n = 15$.
4. (A) $g(x) = 2(-\frac{1}{2} \sin 2x) + 1 = \sin 2x + 1$
 (B) Iz $\sin 2x + 1 = 0$ oz. $\sin 2x = -1$ sledi, da ima $g(x)$ ničle v točkah $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, največje vrednosti v $T(\frac{\pi}{4} + k\pi, 2)$; $k \in \mathbb{Z}$ in najmanjše vrednosti v $T(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0)$; $k \in \mathbb{Z}$.

(C)



5. Očitno so E , F , G razpolovišča stranic $\triangle ABC$ in je zato $\triangle AEG$ podoben $\triangle ABC$. Nadalje je $ET_1 = \frac{1}{3}ED$, $GT_3 = \frac{1}{3}GD$, torej sta $\triangle T_1DT_3$ in $\triangle EDG$ podobna. Zato je $T_1T_3 = \frac{2}{3}EG = \frac{1}{3}BC$. Analogno je $T_1T_2 = \frac{1}{3}AC$ in $T_2T_3 = \frac{1}{3}AB$. Sledi, da je ploščina $\triangle T_1T_2T_3$ devetina ploščine $\triangle ABC$.



4. letnik

1. Iz $a_1 = 6$, $a_n = 96$ in $d = 5$ sledi $n = 19$ ter $s_n = 969$.
2. Iz $a + b + c = 14$ in $b = c$ sledi $a = 14 - 2b$. Torej je $V = (14 - 2b)b^2$. Odvod $V' = -6b^2 + 28b$ izenačimo z nič in dobimo rešitvi $b_1 = 0$ (ki ni smiselna) in $b_2 = \frac{14}{3}$. Sledi $a = b = c = \frac{14}{3}$ in $V = \left(\frac{14}{3}\right)^3$.
3. Dana krožnica ima središče v $S_1(1, 2)$ in polmer $r = 1$. Tudi polmer iskane krožnice je 1. Središče iskane krožnice S_2 leži na premici $y = -x + 3$. Upoštevamo še, da sta S_1 in S_2 enako oddaljena od premice $y = x - 3$, in dobimo $S_2(5, -2)$. Iskana krožnica ima enačbo $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$.
4. $y = \frac{a(x+1)(x-2)}{b(x-1)(x+2)}$; $-2 = \frac{-2a}{-2b}$, torej je $a = -2b$. Sledi $y = -\frac{2(x^2 - x - 2)}{x^2 + x - 2}$.
- 5.

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{\frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d)}{\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)} = \frac{m(m+1)}{n(n+1)},$$

od koder sledi $2a_1(n-m) = 2d(n-m)$. Torej je $a_1 = d$ in $a_n = nd$. Zaporedje je $d, 2d, 3d, \dots$

MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Izbirno tekmovanje

Prvi letnik

- Označimo z d največji skupni delitelj in z v najmanjši skupni večkratnik naravnih števil m in n . Dokaži: če velja $3m + n = 3v + d$, je število m deljivo z n .
- Poišči vsa cela števila x in y , ki zadoščajo enačbi $x^2 + xy + y^2 = 1$.
- Dana je krožnica s polmerom $\sqrt{2}$. Krožnica s polmerom 2 ima središče na tej krožnici. Kolikšna je ploščina osenčenega lika? 
- Jure je želel pripraviti darila za devet prijateljev. Vsakemu prijatelju bi rad dal po dve čokoladi. V trgovini je videl, da lešnikova čokolada stane 6 tolarjev več kot mlečna čokolada in da vsaka stane celo število tolarjev. Sklenil je, da bo porabil 822 tolarjev tako, da bo čim več prijateljem dal po dve različni čokoladi. Kolikšna je bila cena mlečne čokolade?

Drugi letnik

- Poišči vsa cela števila x in y , ki zadoščajo enačbi $|x^2 + 2xy - 3y^2| = 1$.
- Naj bodo a, b, c in d poljubna realna števila. Ali so lahko vsi produkti $4a(1-b)$, $4b(1-c)$, $4c(1-d)$ in $4d(1-a)$ večji od 1?
- Dan je konveksni štirikotnik, katerega diagonali se sekata pravokotno. Dokaži, da tvorijo pravokotne projekcije presečišča diagonal na stranice danega štirikotnika tetivni štirikotnik.
- V računu seštevanja različne črke predstavljajo različne številke. V vsoti (ki je zapisana z besedo *NINA*) so vse številke

R	E	P	O
$+$	R	I	B
	N	I	N
		A	A

 lihe. Kolikšna je najmanjša možna vrednost vsote?

Tretji letnik

- Reši enačbo $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$.
- Poišči tako najmanjše naravno število m , da je $28m + 13 = pd$ in $m - 71 = qd$, kjer so p, q in d naravna števila, $q \neq 1$ in $d > 3$.
- V trikotniku s koti α, β in γ sta α in β ostrata kotata ter velja $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin \gamma$. Dokaži, da je γ pravi kot.

4. Miha se je preizkušal v zapisovanju raznih števil le s pomočjo števk 1 in znaka za seštevanje. Tako je npr. ugotovil, da obstajata le dve naravni števili n (13 in 4), za kateri velja, da lahko število 13 zapišemo z uporabo n enic in znaka za seštevanje, saj lahko število 13 zapišemo kot vsoto trinajstih enic ali pa $11 + 1 + 1$, ko uporabimo štiri enice. Koliko je različnih naravnih števil n , za katere velja, da z uporabo n enic in znaka za seštevanje zapišemo število 125?

Četrty letnik

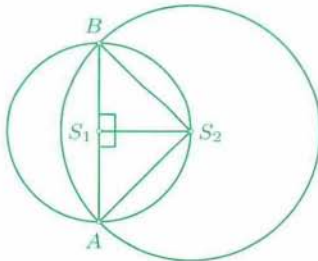
- Poišči vsa praštevila oblike $101010 \dots 101$.
- Naj bodo a_1, a_2, a_3, a_4 in a_5 različna realna števila. Označimo z m število različnih števil oblike $a_i + a_j$, kjer je $1 \leq i < j \leq 5$. Kolikšna je najmanjša možna vrednost števila m ?
- Naj bo ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom pri B . Na stranici BC ležita taki točki D in E , da je $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$ in $|EC| = 2|BD|$. Določi kote trikotnika ABC .
- Kolikšno je največje možno število presečišč tetiv, določenih z osmimi točkami na krožnici, če presečišč na krožnici ne štejemo?

Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

I/1. Ker je $d \geq 1$ največji skupni delitelj števil m in n , lahko zapišemo $m = m'd$ in $n = n'd$. Ko to vstavimo v enačbo, dobimo $3m'd + n'd = 3m'n'd + d$ oz. $(3m' - 1)(n' - 1) = 0$. Ker sta števili m' in n' celi, je edina rešitev $n' = 1$, torej $n = d$ in n res deli m .

I/2. Enačbo pomnožimo z 2 in preoblikujemo v $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2$. Ker sta števili x in y celi, sta dva člena enaka 1, eden pa mora biti 0, kar nam da vse rešitve $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0), (1, -1), (0, 1), (0, -1), (-1, 1)\}$.

I/3. Če sta S_1 in S_2 središči krožnic, njuni presečišči pa A in B , je $|S_1S_2| = |S_1A| = |S_1B| = \sqrt{2}$ in $|S_2A| = |S_2B| = 2$. Trikotnika AS_2S_1 in S_2BS_1 sta enakokraka in pravokotna s pravima kotoma pri točki S_1 , ki leži na daljici AB . Trikotnik AS_2B je pravokoten s pravim kotom pri S_2 . Iskana ploščina lika je torej enaka razliki med polovico ploščine kroga s polmerom $\sqrt{2}$ in



ploščino odseka, ki ga od kroga s polmerom 2 odreže tetiva AB . Ploščina tega odseka pa je enaka razliki med četrtino ploščine kroga s polmerom 2 in ploščino pravokotnega trikotnika AS_2B . Torej velja $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2}{2}) = 2$.

I/4. Recimo, da je Jure kupil k mlečnih čokolad in da je bila cena mlečne čokolade c tolarjev. Tedaj je $kc + (18 - k)(c + 6) = 822$, od koder dobimo $3c = 119 + k$. Ker bi Jure rad dal čim več prijateljem po dve različni čokoladi, moramo poiskati tako rešitev, da bo k čim bližje številu 9, hkrati pa mora biti $119 + k$ deljivo s 3. Tako pridemo do $k = 10$ in $c = 43$. Mlečna čokolada je stala 43 tolarjev.

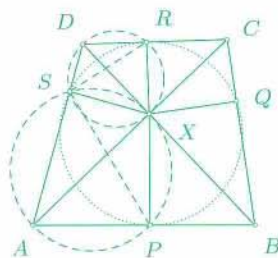
II/1. Ker je $x^2 + 2xy - 3y^2 = (x + y)^2 - 4y^2 = (x - y)(x + 3y)$, moramo obravnavati štiri možnosti. Pri $x - y = 1$ in $x + 3y = 1$ dobimo rešitev $x = 1, y = 0$. Pri $x - y = -1$ in $x + 3y = -1$ dobimo rešitev $x = -1, y = 0$. Pri $x - y = 1$ in $x + 3y = -1$ dobimo rešitev $x = 1/2, y = -1/2$, a števili nista celi. Pri $x - y = -1$ in $x + 3y = 1$ dobimo rešitev $x = -1/2, y = 1/2$, a števili prav tako nista celi. Enačba ima torej rešitvi $x = 1$ in $y = 0$ ter $x = -1$ in $y = 0$.

II/2. Odgovor na vprašanje je pozitiven. Izberimo npr. $a = 2, b = -2, c = 2$ in $d = -2$, pa imamo $4a(1 - b) = 24, 4b(1 - c) = 8, 4c(1 - d) = 24$ in $4d(1 - a) = 8$, res so vsi produkti večji od 1 (seveda je ustreznih izbir za števila a, b, c in d neskončno mnogo).

II/3. Privzemimo oznake s slike. Ker je $XP \perp AP$ in $XS \perp AS$, je štirikotnik $APXS$ tetiven. Podobno je tudi štirikotnik $SXRD$ tetiven. Zato je

$$\sphericalangle SPA + \sphericalangle DRS = \sphericalangle SXA + \sphericalangle DXS = \frac{\pi}{2}.$$

Enako ugotovimo, da je $\sphericalangle QPB + \sphericalangle QRC = \frac{\pi}{2}$. Sledi $\sphericalangle SPQ + \sphericalangle SRQ = 2\pi - (\sphericalangle SPA + \sphericalangle DRS) + (\sphericalangle QPB + \sphericalangle QRC) = \pi$.



II/4. Ker je $O + A = A$, je $O = 0$. Zato mora biti $E = 9$ in $P + B > 10$ ($P + B \neq 10$, ker $N \neq 0$). Tedaj je $N = 2R + 1$. N je lahko najmanj 3. V tem primeru je $R = 1$ in $P + B = 13$, kar pomeni, da sta P oziroma B bodisi 7 oziroma 6 bodisi 8 oziroma 5 (v poljubnem vrstnem redu). Toda I in A bi morali biti med seboj različni lihi števki, ki jih

pa nimamo več dovolj na voljo. Izberimo zato $N = 5$. Tedaj je $R = 2$ in $P + B = 15$, kar pomeni, da sta števki P in B enaki 7 oziroma 8 (v poljubnem vrstnem redu). Ker iščemo najmanjšo možno vsoto, izberemo $I = 1$ in $A = 3$, pa imamo rešitev 5153.

III/1. Pišimo $a = 2^x$ in preoblikujmo dano enačbo. Uporabimo formulo za razcep kubov, pa imamo $(a - 4)^3 + (a^2 - 2)^3 = (a^2 + a - 6)(a^4 - a^3 + a^2 - 6a + 12)$. Nato je $0 = (a - 4)^3 + (a^2 - 2)^3 - (a^2 + a - 6)^3 = (a^2 + a - 6)(-3a^3 + 12a^2 + 6a - 24) = -3(a + 3)(a - 2)(a - 4)(a^2 - 2) = -3(a + 3)(a - 2)(a - 4)(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})$. Edine pozitivne rešitve so $a = 2$, $a = 4$ in $a = \sqrt{2}$, ki nam po vrsti dajo $x = 1$, $x = 2$ in $x = \frac{1}{2}$.

III/2. Iz enačbe $m - 71 = qd$ izrazimo m in ga vstavimo v enačbo $28m + 13 = pd$. Dobimo $28qd + 2001 = pd$, zato $d \mid 2001$. Ker je $2001 = 1 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$ in je $d > 3$, je $d = 23$. Za q moramo vzeti 2, da dobimo najmanjši m . Tako pridemo do $qd = 2 \cdot 23 = m - 71$ in je $m = 117$.

III/3. Ker je $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, lahko enakost v nalogi preoblikujemo v $\sin \alpha(\sin \alpha - \cos \beta) = \sin \beta(\cos \alpha - \sin \beta)$. Ker pa za vsak φ velja $\cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$, lahko gornjo enakost preoblikujemo v

$$2 \sin \alpha \sin \frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4} \cos \frac{2\alpha - 2\beta + \pi}{4} = -2 \sin \beta \sin \frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4} \cos \frac{2\beta - 2\alpha + \pi}{4}. \quad (1)$$

Ker je $0 < 2\alpha - 2\beta + \pi < 2\pi$ in $0 < 2\beta - 2\alpha + \pi < 2\pi$, sta v gornji enačbi oba faktorja s kosinusom pozitivna. Ker je $\sin \alpha > 0$ in $\sin \beta > 0$, mora biti $\sin \frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4} = 0$, saj bi sicer v gornji enačbi imeli na eni strani pozitivno vrednost, na drugi pa negativno. Iz $2\alpha + 2\beta - \pi = \pi - 2\gamma = 0$ tako sledi $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

III/4. Najprej imamo vsoto 125 enic, nato enajst enic iz vsote nadomestimo s številom 11 in tako zmanjšamo število enic za devet; imamo 116 enic, od tega dve "vezani" (v številu 11). V naslednjem koraku spet enajst enic iz vsote nadomestimo z 11 in pridemo do 107 enic, od tega so štiri "vezane". Postopek lahko nadaljujemo, dokler imamo dovolj "nevezanih" enic. Na vsakem koraku imamo $125 - 9k$ enic (od tega $2k$ "vezanih"), kjer je $k = 0, 1, \dots, 11$. Pri $k = 11$ imamo 26 enic (od tega 22 "vezanih"), zato postopka ne moremo nadaljevati.

Število 125 pa lahko zapišemo še s pomočjo števila 111. Možnosti sta dve: $111 + 1 + 1 + \dots + 1$ s 17 enicami in $111 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1$ z 8 enicami.

IV/4. Da dobimo maksimalno število presečišč, moramo točke na krožnici izbrati tako, da se v vsakem presečišču sekata natanko dve tetivi. Izberimo eno od teh osmih točk. Če to točko povežemo z eno od ostalih sedmih, je na eni strani tetive m točk, na drugi strani pa $6 - m$ točk. Sledi, da je vseh presečišč s tetivami, ki se začnejo v izbrani točki, $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 35$. Vseh točk je 8, ker pa je vsako presečišče določeno s štirimi točkami, je maksimalno število presečišč enako $\frac{8 \cdot 35}{4} = 70$. Slika na desni kaže, da lahko to število tudi zares dosežemo.



Državno tekmovanje

Prvi letnik

1. Naj bodo k , m in n poljubna naravna števila, ki niso deljiva s 5. Dokaži, da je vsaj eno izmed števil $k^2 - m^2$, $m^2 - n^2$ in $n^2 - k^2$ deljivo s 5.
2. Tina je na pet listkov zapisala po eno naravno število, a ni hotela izdati, katera števila je zapisala. Prebrisani Žan jo je prepričal, da mu je povedala vse vsote po dveh številih. Zvedel je, da so bile vsote 17, 20, 28, 14, 42, 36, 28, 39, 25 in 31. Katera števila je zapisala Tina?
3. Dana je daljica AB . Na tej daljici izberimo poljubno točko P , različno od A in B , ter konstruirajmo enakokraka pravokotna trikotnika APQ in PBR , katerih vrhova Q in R ležita na istem bregu premice skozi A in B . Naj bo točka M razpolovišče daljice QR . Dokaži, da oddaljenost točke M od premice skozi A in B ni odvisna od izbire točke P .
4. Andraž in Breda sta iz časopisa odrezala dva trakova, dolžin a in b , da bi se z njima igrala. Pri tej igri odreže igralec, ki je na vrsti, od poljubnega traku kos dolžine d . Igro izgubi igralec, ki prvi ne more odrezati kosa dolžine d . Andraž kot kavalir prepusti Bredi, da začne igro. Ugotovi, kako dolžini trakov vplivata na to, kdo bo zmagal.

Drugi letnik

1. Poišči vsa naravna števila a , b in c , ki zadoščajo enačbi

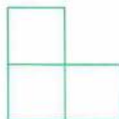
$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}$$

in za katere velja, da je $ab + ac + bc$ praštevilo.

2. Za poljubno naravno število n označimo s $p(n)$ produkt števk tega naravnega števila, zapisanega desetiško. Izračunaj vsoto

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(2001).$$

3. Naj bosta E in F taki notranji točki na stranici AB pravokotnika $ABCD$, da je $|AE| = |EF|$. Pravokotnica na AB skozi točko E seka diagonalo AC v točki G , daljici FD in BG pa se sekata v točki H . Dokaži, da imata trikotnika FBH in GHD enaki ploščini.
4. Določi najmanjše število polj na tabli razsežnosti 8×8 , ki jih moramo pobarvati, da bo na vsakem kosu tabele v obliki črke L (glej sliko) vsaj eno polje pobarvano.



Tretji letnik

1. (a) Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

- (b) Dokaži, da je celi del izraza

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{m^2}},$$

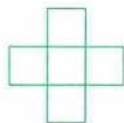
kjer je m naravno število, enak $2m - 2$ ali $2m - 1$.

2. Poišči vsa racionalna števila r , za katera so vse rešitve enačbe

$$rx^2 + (r+1)x + r = 1$$

cela števila.

3. Na stranici BC ostrokotnega trikotnika ABC leži taka točka D , da je $|AB| = |AD|$. Naj bo E taka točka na višini iz C trikotnika ABC , da se krožnica $\mathcal{K}_1$ s središčem v E dotika premice AD v točki D . Označimo s $\mathcal{K}_2$ krožnico skozi C , ki se dotika premice AB v točki B . Dokaži, da leži točka A na premici, ki poteka skozi presečišči krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$.
4. Tabla razsežnosti 8×8 je razdeljena na 64 enotskih kvadratkov. Domine v obliki znaka $+$ (glej sliko) polagamo na tablo tako, da se njihove notranjosti ne sekajo, robovi domin se prekrivajo z robovi ustreznih enotskih kvadratkov, domine same pa v celoti ležijo na tabli. Največ koliko domin lahko položimo na tablo na tak način?



Četrty letnik

1. Naj bodo a, b, c, d, e in f taka pozitivna realna števila, da je zaporedje a, b, c, d aritmetično, zaporedje a, e, f, d pa geometrično. Dokaži, da velja

$$bc \geq ef.$$

2. Poišči vsa praštevila p , za katera je število $3^p - (p + 2)^2$ praštevilo.
3. Naj bo D nožišče višine na stranico BC trikotnika ABC . Simetrala notranjega kota pri C seka nasprotno stranico v točki E . Koliko meri kot $\sphericalangle EDB$, če je $\sphericalangle CEA = \frac{\pi}{4}$?
4. Naj bo $n \geq 4$. Oštevilčimo n točk na krožnici s številkami od 1 do n . Rečemo, da sta nesosednji točki, oštevilčeni z a in b , *pravilni par*, če so vsaj na enem izmed lokov, ki ju določata a in b , vse točke oštevilčene s števili, manjšimi od a in b . Dokaži, da je število pravih parov enako $n - 3$.

Rešitve nalog z državnega tekmovanja

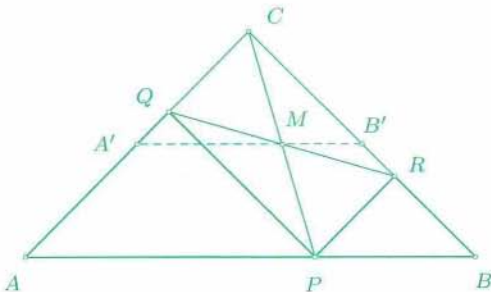
I/1. Ker števila k, m in n niso deljiva s 5, so oblike $5t \pm 1$ ali $5t \pm 2$. Iz $(5t \pm 1)^2 = 5t' + 1$ in $(5t \pm 2)^2 = 5t' + 4$ pa vidimo, da imajo števila k^2, m^2 in n^2 le dva možna ostanka pri deljenju s 5. Torej je vsaj ena izmed razlik $k^2 - m^2, m^2 - n^2$ in $n^2 - k^2$ deljiva s 5.

I/2. Označimo števila a, b, c, d in e . Predpostavimo lahko, da velja $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Uredimo vsote po velikosti: 14, 17, 20, 25, 28, 28, 31, 36, 39, 42. Nedvomno velja $a + b = 14, a + c = 17, d + e = 42$ in

$c + e = 39$. Če seštejemo vse vsote, se vsako od števil pojavi v tej vsoti natanko štirikrat, zato je $4(a + b + c + d + e) = 280$ ali $a + b + c + d + e = 70$. Ker je $a + b = 14$ in $d + e = 42$, je $c = 14$. Sedaj ni težko poiskati še drugih štirih števil, tako da je rešitev: 3, 11, 14, 17, 25.

I/3. Nalogo bomo rešili nekoliko splošneje. Privzeli bomo, da sta APQ in PBR podobna enakokraka trikotnika (z vrhoma Q oz. R).

S C označimo presečišče premic AQ in BR . Potem je $QPRC$ paralelogram in M razpolovišče njegovih diagonal. Če sedaj označimo z A' in B' razpolovišči daljic AC



in BC , leži točka M na daljici $A'B'$. Trditev je tako dokazana, saj je $A'B' \parallel AB$, točke A' , B' in C pa so neodvisne od izbire točke P .

I/4. Iz traku dolžine a lahko zaporedoma odrežemo $\left[\frac{a}{d}\right]$ kosov dolžine d , iz traku dolžine b pa $\left[\frac{b}{d}\right]$ kosov dolžine d . Igre bo torej konec po $n = \left[\frac{a}{d}\right] + \left[\frac{b}{d}\right]$ potezah. Ker začne igrati Breda, dela lihe reze, Andraž pa sode. Če je število n liho, bo torej zmagala Breda, ki bo naredila zadnji rez, če pa je število rezov sodo, bo zmagal Andraž.

Opomba. Z $[x]$ označimo največje celo število, ki ne presega realnega števila x ; npr. $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$.

II/1. Označimo praštevilo $ab + bc + ca$ s p . Iz zveze dobimo, da je $(a + b)^2 = c^2 + p$ oziroma $p = (a + b - c)(a + b + c)$. Ker je p praštevilo in je $0 < a + b - c < a + b + c$, mora biti $a + b - c = 1$ in $a + b + c = p$ oziroma $c = \frac{p-1}{2}$ in $a + b = \frac{p+1}{2}$. Hkrati pa mora biti $ab = p - bc - ca = p - c(a + b) = p - \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} = -\frac{p^2 - 4p - 1}{4}$ pozitivno število. Ničli kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 4x - 1$, ki ima pozitiven vodilni koeficient, sta $2 - \sqrt{5}$ in $2 + \sqrt{5} < 5$, torej je p lahko le 2 ali 3. Ker 2 ne more biti, saj $c = \frac{p-1}{2}$ ne bi bilo celo število, je $p = 3$. Tako je $c = 1$, $a + b = 2$, in ker sta a in b naravni števili, je edina rešitev $a = b = c = 1$. Trojica $(1, 1, 1)$ seveda ustreza vsem pogojem naloge.

II/2. Izračunamo $p(1) + p(2) + \dots + p(9) = 45$. Če označimo s k stotice in z j desetice, potem je

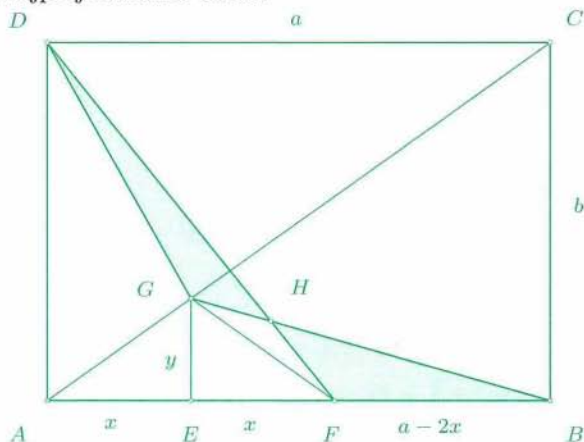
$$p(j0) + p(j1) + \dots + p(j9) = j \cdot 45,$$

$$p(kj0) + p(kj1) + \dots + p(kj9) = k \cdot j \cdot 45 \text{ in}$$

$$p(1kj0) + p(1kj1) + \dots + p(1kj9) = k \cdot j \cdot 45.$$

Sledi $p(1) + \dots + p(99) + p(100) + \dots + p(999) + p(1000) + \dots + p(1999) + p(2000) + p(2001) = 45(1 + 1 + 2 + \dots + 9) + 45(1 + 2 + \dots + 9)(1 + 2 + \dots + 9) + 45(1 + 2 + \dots + 9)(1 + 2 + \dots + 9) + 0 + 0 = 184320$.

II/3. Najprej narišimo skico.



Naj p_{XYZ} označuje ploščino trikotnika XYZ . Računajmo

$$\begin{aligned} p_{DGH} - p_{HFB} &= (p_{DAF} - p_{DAG} - p_{AEG} - p_{EFG} - p_{GFH}) \\ &\quad - (p_{EBG} - p_{EFG} - p_{GFH}) = \\ &= p_{DAF} - p_{DAG} - p_{AEG} - p_{EBG}. \end{aligned}$$

Označimo z $a = |AB|$, $b = |BC|$, $x = |AE| = |EF|$ in $y = |EG|$. Sledi

$$\begin{aligned} p_{DAF} - p_{DAG} - p_{AEG} - p_{EBG} &= bx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(a-x)y = \\ &= \frac{1}{2}(bx - ay) = 0, \end{aligned}$$

saj zaradi podobnosti trikotnikov AEG in ABC velja $x : y = a : b$.

II/4. Najmanjše število polj, ki jih moramo pobarvati, je 32. Tablo najprej razdelimo na 16 kvadratov s po 4 polji. Če bi pobarvali samo 31 polj table, potem je vsaj v enem od teh kvadratov pobarvano največ eno polje. V tem kvadratu je potem lik oblike črke L brez pobarvanih polj. Če pobarvamo tablo kot šahovnico, pa vidimo, da 32 pobarvanih polj zadošča.

III/1. (a) Ko neenakost $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pomnožimo s $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, dobimo $1 < \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$, kar očitno velja. Ko pa neenakost $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ pomnožimo s $\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, dobimo $\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} < 1$, kar spet očitno velja.

(b) Označimo $S = \sum_{n=1}^{m^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ko seštejemo vse neenakosti

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

od $n = 1$ do $n = m^2$, dobimo

$$\sqrt{m^2+1} - \sqrt{1} < \frac{1}{2}S < \sqrt{m^2} - \sqrt{1-1}$$

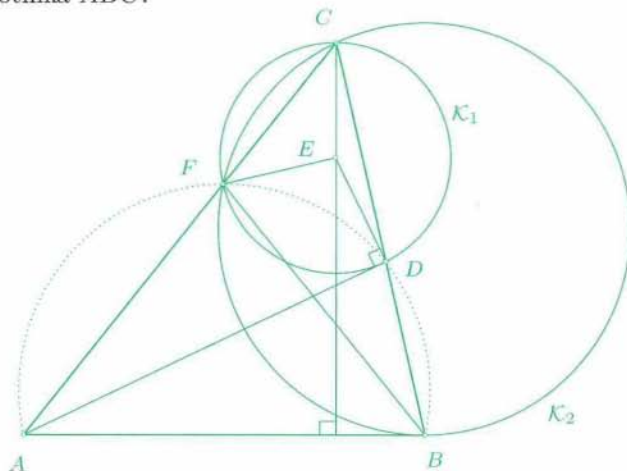
in od tod

$$2(\sqrt{m^2+1} - 1) < S < 2m.$$

Ker je $2m - 2(\sqrt{m^2+1} - 1) = 2(m - \sqrt{m^2+1} + 1) < 2$, velja ocena $2m - 2 < S < 2m$. Torej za celo število S velja $2m - 2 \leq [S] < 2m$ oz. $[S] \in \{2m - 2, 2m - 1\}$.

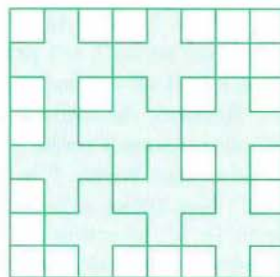
III/2. Zapišimo $r = \frac{a}{b}$, kjer sta a in b tuji števili, $a > 0$, in predpostavimo, da ima enačba celoštevilске rešitve. Dobimo $ax^2 + (a+b)x + (a-b) = 0$, od koder sledi $a \mid (a-b)$, zato je $a = 1$. Da bi imela kvadratna enačba $x^2 + (1+b)x + (1-b) = 0$ kakšno celoštevilsko rešitev, mora biti njena diskriminanta popolni kvadrat. Torej $(b+3)^2 - 12 = c^2$, kar lahko preoblikujemo v $(b+3-c)(b+3+c) = 12$. Ker sta števili $b+3-c$ in $b+3+c$ iste parnosti, sta $2 \cdot 6 = 12 = (-2) \cdot (-6)$ edina možna razcepa. Sledi $b = -3 \pm 4 \in \{1, -7\}$. Za $b = 1$ imamo enačbo $x^2 + 2x = 0$, ki ima celoštevilski rešitvi $x = 0$ in $x = -2$, za $b = -7$ pa dobimo enačbo $x^2 - 6x + 8$, ki ima celoštevilski rešitvi $x = 4$ in $x = 2$. Torej sta $r = 1$ in $r = -\frac{1}{7}$ edini rešitvi.

III/3. Narišimo dovolj veliko skico in privzemimo običajne oznake kotov trikotnika ABC .



Označimo presečišče krožnice K_2 z daljico AC z F . Kot med tetivo FB in tangento AB je enak obodnemu kotu nad to tetivo. Sledi $\sphericalangle FBA = \gamma$, kar nam da $\sphericalangle AFB = \beta$. Torej je $ABDF$ tetivni štirikotnik in $\sphericalangle DFC = \beta$. Po definiciji krožnice K_1 je $ED \perp AD$, zato $\sphericalangle EDC = \pi/2 - \beta = \sphericalangle ECD$. Krožnica K_1 torej poteka skozi točko C in $\sphericalangle DEC = 2\beta$. Zaradi $\sphericalangle DFC = \beta$ je $F \in K_1$. Krožnici K_1 in K_2 se tako sekata v točkah F in C , točka F pa po konstrukciji leži na AC .

III/4. Očitno sta ob vsakem robu table kvečjemu dva enotska kvadrata prekrita. Torej je lahko v celoti prekritih največ $4 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 44$ enotskih kvadratkov. Ker vsaka domina prekrije 5 enotskih kvadratkov, lahko na tablo postavimo največ $\frac{44}{5} < 9$ domin. Slika na desni pa kaže, da 8 domin res lahko postavimo.



IV/1. Ker je a, b, c, d aritmetično zaporedje, velja $b = a + \frac{1}{3}(d - a)$ in $c = a + \frac{2}{3}(d - a)$. Podobno je $e = a(\frac{d}{a})^{1/3}$ in $f = a(\frac{d}{a})^{2/3}$. Sledi

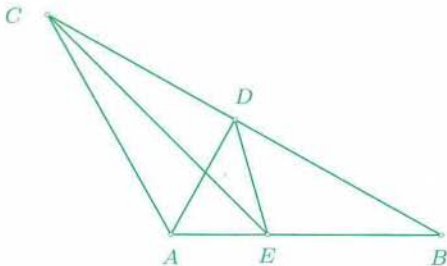
$$bc - ef = (\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}d)(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d) - a^2 \frac{d}{a} = \frac{2}{9}(a - d)^2 \geq 0.$$

IV/2. Za $p = 2$ je število $3^2 - 4^2$ negativno. Če je p liho število, je $3^p - (p+2)^2$ sodo; torej enako 2. Enačba $3^p - (p+2)^2 = 2$ ima očitno rešitev $p = 3$. Da ni drugih, dokažemo z indukcijo.

Natančneje: Z indukcijo dokažemo, da za $n > 3$ velja $3^n - (n+2)^2 > 2$ oziroma $3^n > n^2 + 4n + 6$. Pri $n = 4$ ocena velja, v dokazu induktivnega koraka pa induktivni hipotezi $3^n > n^2 + 4n + 6$ prištejemo neenakost $2 \cdot 3^n > 2n + 5$ (velja za $n \geq 2$) in dobimo $3^{n+1} > (n+1)^2 + 4(n+1) + 6$. (Dokaz neenakosti $2 \cdot 3^n > 2n + 5$ za $n \geq 2$ s pomočjo indukcije prepustimo bralcu.)

IV/3. Označimo kote trikotnika z α , β in γ na običajen način. V trikotniku AEC velja $\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} = \pi$, od koder z upoštevanjem $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ izpeljemo $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$.

Ker je $AD \perp DB$, je $\frac{|AD|}{|DB|} = \operatorname{tg} \beta$. Ker je CE simetrala kota, je $|AE| : |EB| = |AC| : |BC|$. Po sinusnem izreku je $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta$. Torej je $|AE| : |EB| = |AD| : |DB|$ in je ED simetrala pravega kota $\sphericalangle ADB$, zato je $\sphericalangle EDB = \frac{\pi}{4}$.



IV/4. Trditev bomo dokazali z indukcijo. Dokaz začnemo pri $n = 4$. Sosedu od točke 1 sta pravilni par. Edini drug kandidat vsebuje točko 1, ki pa nikoli ni v pravilnem paru. Torej imamo le en pravilni par.

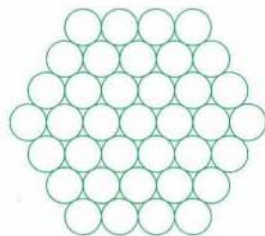
Recimo, da formula velja za n . Oglejmo si $n + 1$ točk na krožnici. Označimo sosedu točko 1 z a in b . Par (a, b) je očitno pravilni par. Sedaj pa izbrisimo točko 1 in vsem ostalim številom odštejmo 1. Dobimo n točk. Ker točka 1 ni bila v nobenem pravilnem paru, vsi pravilni pari razen (a, b) , ki sta sedaj sosedu, ostanejo. Torej imamo pri $n + 1$ točkah natanko en pravilni par več kot pri n točkah.

Izbirna testa za mednarodno matematično olimpiado**Prvi izbirni test**

1. Notranje simetrale kotov pri A , B in C trikotnika ABC sekajo njegovo očrtano krožnico še v točkah K , L in M . Naj bo R poljubna notranja točka daljice AB ter P in Q taki točki, da velja $RP \parallel AK$, $BP \perp BL$, $RQ \parallel BL$ in $AQ \perp AK$.

Dokaži, da se premice KP , LQ in MR sekajo v eni točki.

2. Na ravnino lahko položimo 1, 7, 19, 37 (na sliki), 61, ... dotikajočih se enakih krožnic, ki oblikujejo šestkotnik.



- (a) Eksplicitno zapiši splošni člen a_n tega zaporedja. (Prvi člen zaporedja naj ima indeks 1.)

- (b) Nekateri členi gornjega zaporedja se v desetiškem zapisu končajo na 69. Določi n , da bo a_n 69-ti člen s to lastnostjo.

3. Poišči vse polinome p z realnimi koeficienti, za katere velja

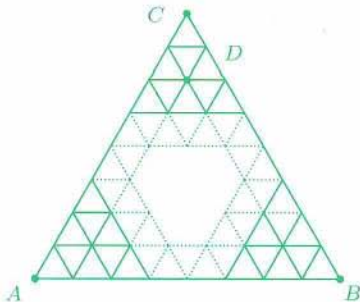
$$p(x)p(x+1) = p(x^2)$$

za vsak realen x .

Drugi izbirni test

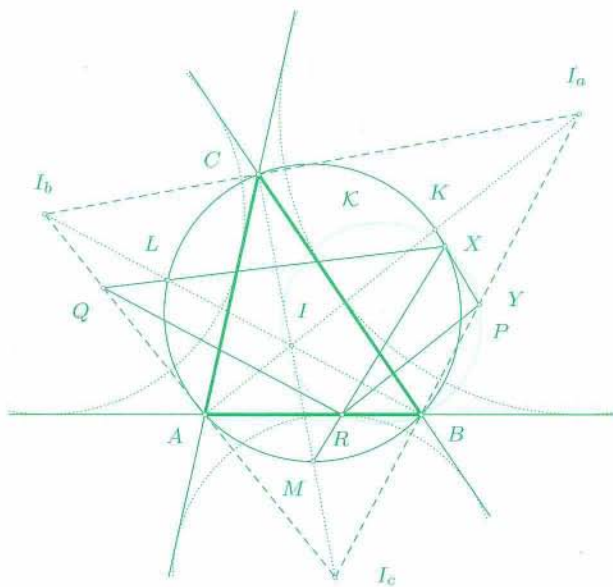
1. Za naravni števili x in y velja $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Dokaži, da je število $x - y$ popolni kvadrat.
2. V ravnini ležita sekajoči se krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Eno izmed presečišč teh dveh krožnic označimo z A . Naj bo $ABCD$ tak pravokotnik, da velja $B \in \mathcal{K}_1$ in $D \in \mathcal{K}_2$. Določi geometrijsko mesto točke C , ko točki B in D pretečeta krožnici $\mathcal{K}_1$ oz. $\mathcal{K}_2$.

3. Enakostranični trikotnik, z dolžino stranice n , je s premicami, vzporednimi stranicam trikotnika, razdeljen na n^2 malih enakostraničnih trikotnikov. Točkam, označenim s $\bullet$, priredimo število 1, ostalim ogliščem malih trikotnikov priredimo število 0. V eni potezi lahko vsem štirim številom, ki ležijo na ogliščih poljubnega romba, sestavljenega iz dveh malih trikotnikov, prištejemo ali odštejemo 1. Za katere $n > 2$ lahko po končno mnogo potezih dosežemo, da bodo vsa oglišča označena z 0?



Rešitve nalog z izbirnih testov za mednarodno matematično olimpiado

I/1. Označimo s $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtano krožnico in z X točko, kjer premica MR drugič seka krožnico $\mathcal{K}$.



Označimo z I_a , I_b in I_c središča pričrtanih krožnic trikotnika ABC na običajen način. Ker je $I_a I_c \perp BI_b$, leži točka P na premici $I_a I_c$.

Označimo sedaj z Y točko, kjer premica KX (oziroma tangenta na $\mathcal{K}$ v točki K , če je $K = X$) seka premico $I_a I_c$. (Presečišče res obstaja. Ker je $|IK| = |KB|$ in $|IM| = |MB|$, je $MBKI$ deltoid in $IB \perp MK$. Zaradi $I_a I_c \perp BI_b$ je tako $MK \parallel I_a I_c$. Ker je $X \neq M$, premici MX in $I_a I_c$ nista vzporedni.) Opazimo še, da točka Y leži na istem bregu premice AB kot točka K .

Dokazati je potrebno, da je $Y = P$, za kar je po definiciji točke P treba dokazati $RY \parallel AK$. Z usmerjenimi koti izračunamo $\sphericalangle RXY = \sphericalangle MXK = \sphericalangle MBK = \sphericalangle MBR + \sphericalangle RBY + \sphericalangle YBK$. Ker pa je $\sphericalangle MBR = \sphericalangle MBA = \sphericalangle MCA = \sphericalangle BCM = \sphericalangle BKM$ in $BY \parallel MK$, je $\sphericalangle BKM + \sphericalangle YBK = 0$. Sledi $\sphericalangle RXY = \sphericalangle RBY$ in zato je štirikotnik $RBXY$ tetiven. Torej je $\sphericalangle RYB = \sphericalangle RXB = \sphericalangle MXB = \sphericalangle MKB = \sphericalangle AKM$. Ker sta vektorja $\overrightarrow{MK}$ in $\overrightarrow{BY}$ vzporedna in enako usmerjena, je zato $RY \parallel AK$.

Zaradi simetrije tudi premica XL poteka skozi Q .

I/2. (a) Očitno je $a_{n+1} = a_n + 6n$, saj je stranica dodanega šestkotnika daljša le za en krog. Sledi

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 6 \cdot 1 \\ a_3 &= a_2 + 6 \cdot 2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 6 \cdot (n-1) \end{aligned}$$

Ko seštejemo leve in desne strani gornjih enakosti, dobimo $a_n = a_1 + 6(1 + 2 + \dots + (n-1))$. Sledi $a_n = 1 + 3n(n-1) = 3n^2 - 3n + 1$.

(b) Oglejmo si najprej, za katere n je $3n^2 - 3n + 1 \equiv 69 \pmod{100}$. Ker je $69 \equiv 169 \pmod{100}$, dobimo enačbo $3(n^2 - n - 56) \equiv 0 \pmod{100}$. Torej je $n^2 - n - 56 = 100t$ za neki $t \in \mathbb{Z}$. Sledi $n = \frac{1}{2}(1 \pm 5\sqrt{9 + 16t})$. Da bi bil n celo število, mora biti $9 + 16t$ kvadrat lihega števila; torej $9 + 16t = (2m+1)^2$. Sledi $2(2t+1) = m(m+1)$. Število $2(2t+1)$ na levi strani je sodo, vendar ni deljivo s 4. Torej je lahko le $m \equiv 1 \pmod{4}$ ali $m \equiv 2 \pmod{4}$. Sledi $m = 4k+1$ ali $m = 4k+2$ za $k \in \mathbb{N}_0$, kar nam da

$$n = 5m + 3 = \begin{cases} 20k + 8 & \text{ali} \\ 20k + 13. \end{cases}$$

Torej ima člen, ki se 69-ti konča na 69, indeks $n = 20 \cdot 34 + 8 = 688$, saj štejemo od $k = 0$ dalje.

I/3. Ničelni polinom očitno ustreza pogoju naloge. Recimo, da je $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_n \neq 0$, polinom stopnje n , za katerega velja

$$p(x)p(x+1) = p(x^2) \quad (2)$$

za vsak realen x . S primerjavo koeficientov pri x^k na levi oziroma desni strani enačbe (2) dobimo $a_n = 1$, $a_{n-1} = -n$, ... (Skratka, če je sistem rešljiv, je rešljiv enolično.)

V naslednjem koraku pokažemo, da noben polinom lihe stopnje ne ustreza funkcijski enačbi (2). Pišimo $p(x) = x^m(x-1)^n q(x)$, kjer je $m, n \in \mathbb{N}_0$, $q(0) \neq 0$, $q(1) \neq 0$ in p polinom **lihe** stopnje. Ko slednje vstavimo v (2), dobimo

$$(x+1)^m x^n q(x) q(x+1) = x^m (x+1)^n q(x^2).$$

Če $m \neq n$, dobimo pri $x = 0$ protislovno enakost. Torej je $m = n$ in velja

$$q(x)q(x+1) = q(x^2),$$

kjer je polinom q lihe stopnje. Torej ima realno ničlo $x_0 \notin \{0, 1\}$. Iz $q(x_0)q(x_0+1) = q(x_0^2)$ sledi, da je tudi x_0^2 ničla, zato $x_0 \neq -1$. Sedaj pa s ponavljanjem postopka sledi, da so vsa števila $x_0, x_0^2, x_0^4, \dots, x_0^{2^k}, \dots$ ničle polinoma q . Slednje pa za neničelni polinom q ni možno.

Torej mora biti iskani polinom p sode stopnje. Očitno je $p(x) = x^k(x-1)^k$ polinom stopnje $n = 2k$, ki ustreza enačbi (2). Ker pa smo pokazali, da imamo pri vsaki stopnji n kvečjemu en polinom p , ki ustreza funkcijski enačbi, je ta polinom p edini polinom stopnje n , ki reši enačbo (2).

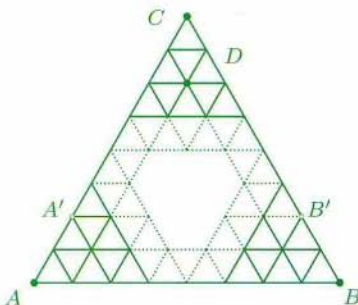
Poleg ničelnega polinoma so iskani polinomi še $p(x) = x^k(x-1)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

II/1. Dana enačba je ekvivalentna enačbi $(x-y)(3x+3y+1) = y^2$. Označimo z d največji skupni delitelj števil $x-y$ in $3x+3y+1$. Trdimo, da je $d = 1$. Predpostavimo nasprotno in naj recimo $p \mid d$, kjer je p praštevilo. Ker $p \mid x-y$, od tod sledi $p \mid y^2$ in zato $p \mid y$. Sklepamo, da $p \mid 3(x-y) + 6y$. Zaradi $3x+3y+1 = 3(x-y) + 6y + 1$ pa $p \mid 1$ in pridemo do protislovja. Od tod sledi, da je $d = 1$ in ker je produkt tujih si števil $x-y$ in $3x+3y+1$ popolni kvadrat, sta tudi ti dve števili popolna kvadrata.

II/2. Označimo središči krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ z O_1 in O_2 . Izberimo še taki točki $P_1 \in \mathcal{K}_1$ in $P_2 \in \mathcal{K}_2$, da sta AP_1 in AP_2 njuna premera. Naj bo $ABCD$ poljuben pravokotnik, ki ustreza pogojem naloge. Ker sta kota $\sphericalangle ABC$ in $\sphericalangle ADC$ prava, so točke P_1, B, C ter P_2, D, C kolinearne. Torej je $\sphericalangle P_1CP_2$ pravi in leži točka C na krožnici $\mathcal{K}$ s premerom P_1P_2 .

Očitno pa za vsako točko C krožnice $\mathcal{K}$ obstaja pravokotnik $ABCD$, ki ustreza pogojem naloge.

II/3. V dveh potezih lahko premaknemo število 1 z A na A' . Podobno lahko v dveh potezih premaknemo tudi število 1 z B na B' . Če je n liho število, dobimo na koncu štiri enke v gornjem rombu. Torej je naloga za lihe n rešljiva. Naj bo n sodo število. Pobarvajmo mrežo s štirimi barvami. Vsak romb ima oglišča različnih barv, na začetku pa so tri oglišča trikotnika enaka, eno pa je drugače obarvano. Naloga za sode n torej ni rešljiva.



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
29. letnik, šolsko leto 2001/02, številka 2, strani 65–128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domažnjak, Darjo Felda (tekmovalna), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosen (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2001/02 je za posamezne naročnike **3.000 SIT** (posamezno naročilo velja do preklica), za skupinska naročila šol **2.500 SIT**, posamezna številka **750 SIT**, tematska številka **1.500 SIT**, stara številka **650 SIT**, letna naročnina za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASIXX, številka računa 042961.

List sofinancira MŠZŠ
 Založilo DMFA – založništvo
 Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1475

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

