

PRE SEK

28 (2000-2001)

6



ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



Vsakodnevno pridobivanje toplogrednih plinov na Celovški cesti v Ljubljani.



Svoj delež toplogrednih plinov prispeva v ozračje tudi živinoreja.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
28. letnik, leto 2000/2001, številka 6, strani 321–384

VSEBINA

MATEMATIKA	Preprosta razmišljanja o četrti dimenziji (Marija Vencelj)	326-331
FIZIKA	Učinek tople grede in vroče poletje (Tomaž Vrhovec)	332-340
	Ptice na daljnovodu (Janez Strnad)	360-362
ASTRONOMIJA	Krater Vega (Marijan Prosen)	344-347
	Predlogi za raziskovanje v zvezi s kraterjem Vega (Marijan Prosen)	348
RAČUNALNIŠTVO	2001 ... kot potenca števila 2 – reš. str. 367 (Martin Juvan)	342
	Zmagovalec dobi (skoraj) vse (Tim Vidmar, Andrej Likar)	354-358
	2001 z enicami – rešitev s str. 263 (Martin Juvan)	365-366
NOVICE	Največja znana praštevila – nekoč in danes (Primož Potočnik)	349-351
	Multimedijska razstava o Juriju Vegi (Peter Legiša)	363-364
NOVE KNJIGE	Zgodovina matematike – zgodbe o problemih – 2. del (Petar Pavešić)	343
NALOGE	Dve nagradni nalogi (Peter Petek)	322-324
	Dva skrita računa za mlajše – reš. str. 366 (Dušan Murovec)	324
	Desetiška (Marko Razpet)	324
	Labirinti na poliedrih, 3. del – reš. str. 364 (Izidor Hafner) ...	325
	Lahka aritmetična križanka – reš. str. 366 (Karmen Puconja)	342
REŠITVE NALOG	Labirinti na poliedrih, 2. del – s str. 259 (Izidor Hafner)	351
	Razmerja dolžin v pravokotnem trikotniku – s str. 263 (Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj)	359
	Križanka "Tycho Brahe – 400 let od smrti" – s str. 288 (Marko Bokalič)	362
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Sodobni rastlinjak v Voklem pri Kranju (Marija Vencelj)	341
	Križanka "Za čisto okolje" – reš. str. 368 (Marko Bokalič)	352-353
TEKMOVANJA	Izbirna testa za Mednarodno matematično olimpiado – rešitve nalog s str. 319 (Matjaž Željko)	369-372
	22. mednarodno matematično tekmovanje mest – naloge (Gregor Cigler)	372-374
	22. mednarodno matematično tekmovanje mest – rešitve nalog s str. 372 (Gregor Cigler)	374-379
LETNO KAZALO NA OVITKU		380-384
	Ptice rade posedajo na žicah (fotografija Peter Legiša). Kako je z njihovim posedanjem na daljnovodih, preberite v članku na str. 360	I
	Slike k članku na str. 332 in prispevku na str. 341 (vse fotografije Matjaž Vencelj)	II, III, IV

Progo omejujeta nekoncentrični krožnici s polmeroma tri in sedem enot, start in cilj sta na najožjem delu kolobarja. Poskusite priti s čim manjšim številom potez od starta preko ciljne črte. Startna položaja sta dva, A in B. Poljubno lahko izberete enega. Prerišite sliko s šestilom na karirasti papir in nam pošljite rešitev z vrisano potjo ter zapisanim številom potez.

Objavili bomo rezultate dirke, med zmagovalci bomo izžrebali dva in jima poslali knjižno nagrado.

Rešitve obeh nagradnih nalog pošljite do 20. junija 2001 na naš naslov:

Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana.

Peter Petek

DVA SKRITA RAČUNA ZA MLAJŠE

Odkrijte naslednja skrita računa. V posameznem računu pomenijo enake črke enake številke in različne črke različne številke.

1. račun

$$AAA - BB + C = 984$$

2. račun

$$XXXX - YYY + ZZ - W = 7233$$

Dušan Murovec

DESETIŠKA

Dokaži, da je naravno število

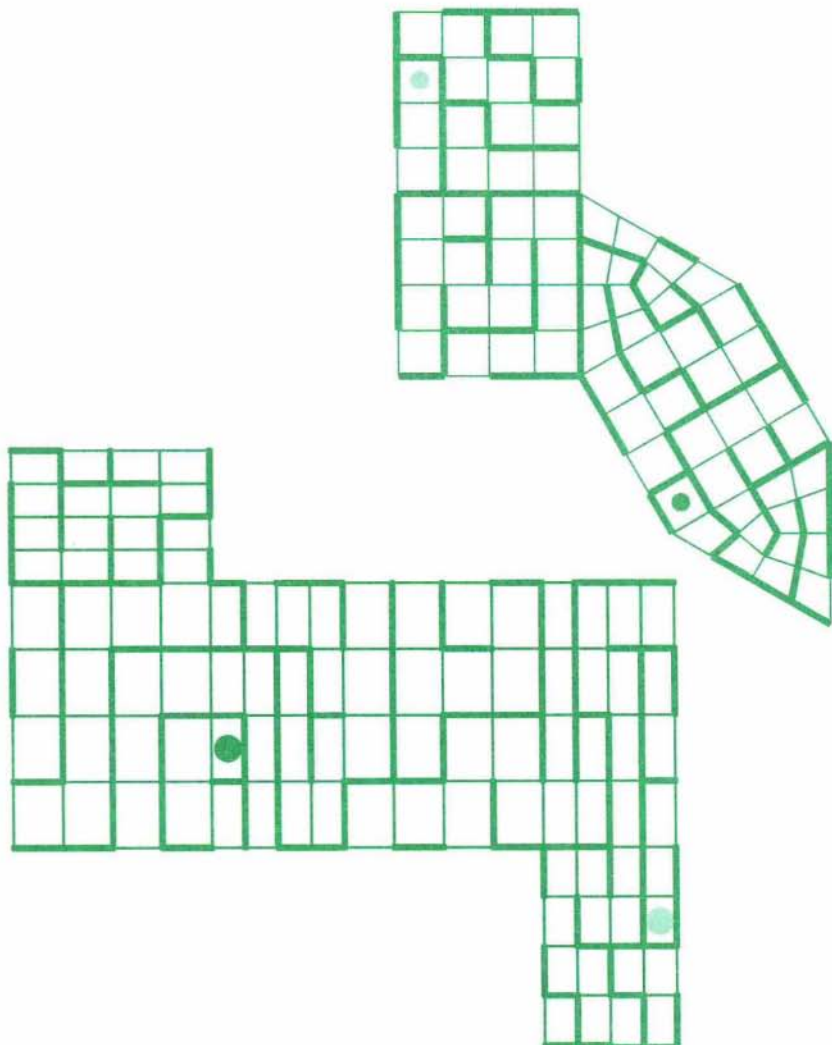
$$x = 3 \underbrace{999 \dots 9}_n 64 \underbrace{000 \dots 0}_n 81,$$

zapisano v desetiškem številskem sestavu, popolni kvadrat in izračunaj $\sqrt{x}$.

Marko Razpet

LABIRINTI NA POLIEDRIH, 3. del

Povežite črno in sivo točko na površju poliedra, katerega mreža je podana in katerega mejne ploskve so še dodatno razdeljene na manjše dele. Gibamo se lahko le po površju telesa, ne da bi prekoračili debelo črto.

*Izidor Hafner*

PREPROSTA RAZMIŠLJANJA O ČETRTE DIMENZIJI

Pred leti smo v članku Tridimenzionalne težave gospoda Ploščaka (Presek, 23. letnik, št. 5, str. 257–263) že premišljali o mentalni sliki štiridimenzionalnega prostora, v katerega je vgrajen naš tridimenzionalni svet. Pomagali smo si s predstavo o naporih, ki bi jih imela dvodimenzionalna bitja, živeča v dvodimenzionalni deželi, katerih gibanje in opazovanje je omejeno samo na ravnino, če bi si hotela predstavljati tridimenzionalne predmete.

Idejo smo povzeli po knjigi Flatland Edwina A. Abbota, ki je izšla v viktorijanski Angliji leta 1884. Seveda so matematiki tedaj že poznali pojem poljubne dimenzije prostora. Toda to je bil pojem abstraktne teorije vektorskih prostorov, ni pa bilo preproste poljudne razlage zanj.

Januarja leta 1909 je neimenovani darovalec položil pri založbi Scientific American 500 dolarjev (kar je bil za tiste čase lep denar), ki jih je namenil kot nagrado najboljšemu esejju, ki bi na poljuden način približal laičnemu bralcu pojem četrte dimenzije. Mišljena je bila seveda četrta dimenzija takega prostora, katerega del je naš tridimenzionalni prostor. Dolžina eseja je bila omejena na 2500 besed.

Na razpis je pod psevdonimi prispelo kar 245 esejev. Poslali so jih iz Združenih držav Amerike, Turčije, Avstrije, Holandije, Indije, Avstralije, Francije in Nemčije. Očitno je šlo za privlačno temo, o kateri so avtorji premišljevali že tudi prej.

Eseje sta ocenila prof. Manning z Brown University in prof. Mitchel s Columbia University. Julija 1909 so v Scientific American objavili zmagoviti esej in tri, ki so prejeli častno nagrado. Med preostalimi jih je Henry P. Manning izbral še nekaj, ki so po njegovem zaslužili, da se ohranijo, in ki problem opisujejo s čimbolj različnih vidikov. Skupaj z nagrajenimi štirimi jih je izdal v knjižici The Fourth Dimension Simply Explained, ki jo je opremil tudi z nekaj deset strani dolгим uvodom.

Nagrado 500 dolarjev je prejel podpolkovnik inženirskih enot ZDA Graham Denby Fitch za esej Evklidizacija četrte dimenzije. Ogledali si bomo in dodatno komentirali nekaj njegovih idej. Lahko si preberete še Manningovo knjižico, katere izvod hrani tudi Matematična knjižnica Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Fitch začenja svojo razpravo z ugotovitvijo, da mentalna slika četrte dimenzije ni možna. Iz nadaljevanja je jasno, da mu matematični pojem dimenzije prostora ni bil tuj. Za osvojitve intuitivne delne predstave o četrte dimenziji namreč predlaga analogijo, s katero na poljuden način

s četrkami realnih števil pravzaprav uvede pojem 4-elementne baze. Štiridimenzionalni prostor tudi opremi z 'evklidsko' geometrijo, v kateri je npr. analogon 5. aksiomu evklidske ravnine naslednje zaporedje lastnosti:

- V ravnini poteka skozi dano točko dane premice ena sama pravokotnica na to premico.
- V 3-dimenzionalnem prostoru poteka skozi dano točko dane premice neskončno mnogo pravokotnic na to premico. Te premice tvorijo ravnino (to je 2-dimenzionalni prostor), ki je pravokotna na dano premico.
- V 4-dimenzionalnem prostoru poteka skozi dano točko dane premice neskončno mnogo ravnin, ki so pravokotne na dano premico. Te ravnine tvorijo 3-dimenzionalni prostor, pravokoten na dano premico.
- 3-dimenzionalni prostor je lahko tudi pravokoten na ravnino ali na drug 3-dimenzionalni prostor.
- Dve ravnini sta lahko medsebojno pravokotni na dva različna načina. Če ležita v istem 3-dimenzionalnem prostoru in sta v njem pravokotni v običajnem smislu, gre za nepopolno pravokotnost. Ravnini pa sta popolnoma pravokotni, če je vsaka premica ene ravnine pravokotna na vsako premico druge ravnine.

Lega posamezne točke je v ravnini določena (površno povedano) z razdaljama od dveh pravokotno se sekajočih premic in v našem tridimenzionalnem prostoru z razdaljami od treh paroma pravokotnih ravnin. Po Fitchu je zato analogno lega točke v 4-dimenzionalnem prostoru določena z njenimi razdaljami od štirih paroma pravokotnih 3-dimenzionalnih prostorov. Te razdalje merimo vzdolž štirih paroma pravokotnih premic, ki, po dve in dve, določajo 6 paroma pravokotnih ravnin, po tri in tri pa 4 paroma pravokotne 3-dimenzionalne prostore.

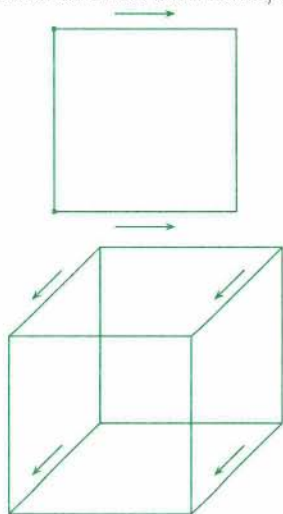
Fitch uvede tudi pojem geometrijskega telesa v 4-dimenzionalnem prostoru. Telesa v našem tridimenzionalnem prostoru so omejena z ravnimi ali krivimi ploskvami, telesa v 4-dimenzionalnem prostoru pa so deli tega prostora, omejeni 3-dimenzionalnimi ravnimi ali ukrivljenimi hiperploskvami. Hiperóbla je množica vseh točk, ki so v 4-dimenzionalnem prostoru enako oddaljene od dane točke, središča hiperóble. Njeni preseki z ravninami so krogi, preseki s 3-dimenzionalnimi prostori pa naše oble. Če bi hipersfera s polmerom r potovala skozi naš prostor, bi jo dojeli kot oblo, katere polmer bi najprej postopoma naraščal od 0 do r in nato postopoma padal od r do 0.

Medtem ko je v našem prostoru vsega 5 pravih poliedrov (tetraeder, kocka, oktaeder, dodekaeder in ikozaeder), lahko po analogiji dobimo v 4-dimenzionalnem prostoru 6 pravih hiperpoliedrov, ki jih omejujejo pravilni poliedri. To so C_5 (omejen s 5 tetraedri), C_8 (omejen z 8 kockami), C_{16} (omejuje ga 16 tetraedrov), C_{24} (omejen s 24 oktaedri), C_{120} (omejuje ga 120 dodekaedrov) in C_{600} (površje sestavlja 600 tetraedrov).

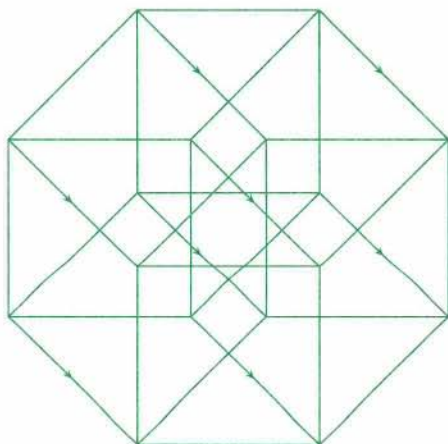
Najpreprostejši med njimi je C_8 , imenovan tudi hiperkocka, čeprav ga omejuje več teles kot C_5 . Ima 16 vogalov, 32 robov, 24 lic (kvadratov, ki so stranske ploskve mejnih kock) in 8 mejnih kock. V vsakem njegovem vogalu se stikajo 4 paroma pravokotni robovi, 6 kvadratov in 4 kocke. Vsak rob je skupen 3 kvadratom in 3 kockam, vsak kvadrat je stranska ploskev dveh kock. Vsaka mejna kocka ima torej po en skupni kvadrat s šestimi kockami od preostalih sedem.

Tudi do generacije hiperkocke lahko pridemo z analogijo. Če daljico premaknemo za eno njeno dolžino (enoto) v smeri, pravokotni na daljico, dobimo kvadrat. Ko tega premaknemo za enoto v smeri, pravokotni na njegovo ravnino, opiše kocko (slika 1). Hiperkocko generiramo tako, da 3-dimenzionalno kocko vodimo za dolžino ene njene stranice v smeri, pravokotni na naš prostor.

Vendar že 3-dimenzionalne kocke na 2-dimenzionalnem listu papirja ne moremo zares predstaviti. Tretjo smer – pravokotnico na prvi dve – nadomesti na sliki smer, ki poteka poševno na prvi dve smeri.



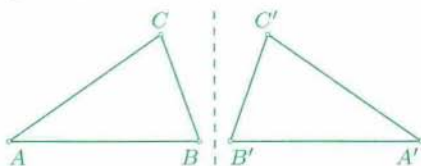
Slika 1.



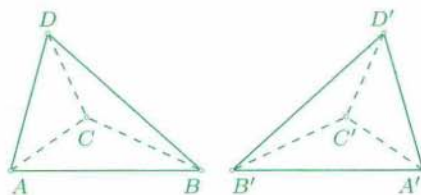
Slika 2.

Pri sliki hiperkocke lahko četrto smer, ki je pravokotna na vsakega od treh medsebojno pravokotnih robov kocke, narišemo pravokotno na našo tretjo, poševno smer. Sliko 2 smo povzeli po arhitektu Claudu Bragdonu, ki jo je leta 1913 objavil v učbeniku *Osnove višjega prostora*.

Fitchev esej govori tudi o tem, da je svoboda gibanja v 4-dimenzionalnem prostoru večja kot v našem prostoru. Problema se spet loti z analogijo. Medtem ko je v ravnini edini tip rotacije zasuk okrog točke, imamo v 3-dimenzionalnem prostoru rotacijo okrog premice in v 4-dimenzionalnem prostoru rotacijo okrog ravnine. Dveh simetričnih ravninskih likov, kakršna sta trikotnika na sliki 3, ne moremo prevesti drugega v drugega z gibanjem zgolj v njuni ravnini. Če pa enega od njiju zavrtimo za 180° skozi 3-dimenzionalni prostor okrog črtkane osi, se pokrijeta. Podobno velja za dve simetrični telesi (slika 4). Z nobenim premikanjem po našem prostoru ne moremo doseči, da bi sovpadli. Z rotacijo enega od njiju za 180° okrog ravnine v 4-dimenzionalnem prostoru pa to lahko dosežemo. Med rotacijo telo izgine iz našega prostora (če se telesi sekata, ostaja v našem prostoru le njuna presečna ploskev).



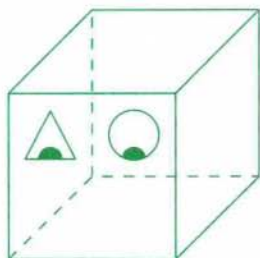
Slika 3.



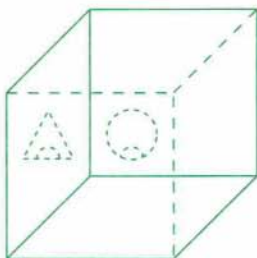
Slika 4.

Dober model, kako naj bi izgledala rotacija 3-dimenzionalnega objekta skozi 4-dimenzionalni prostor, najdemo v knjižici *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension*, avtorja Rudyja Ruckerja (Dover Publications, 1977).

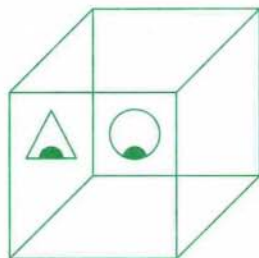
Oglejmo si sliko kocke, ki nas gleda **izza** tega lista papirja (slika 5a). Njeno desno oko je trikotno, levo okroglo.



Slika 5a.

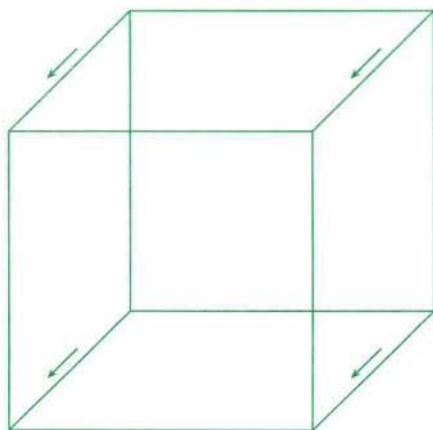


Slika 5b.



Slika 5c.

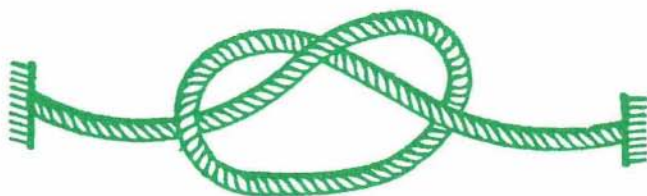
Pa predpostavimo, da bi bil ta list papirja ogledalo. V tem primeru bi bila zrcalna slika kocke na **naši** strani lista, obrnjena z zadnjo stranjo proti nam (slika 5b). Očitno ni mogoče obrniti kocke v 3-dimenzionalnem prostoru tako, da bi prešla v svojo zrcalno sliko. Njeno desno oko bi ostalo trikotno, medtem ko je desno oko zrcalne kocke okroglo. Če pa pogledamo sliko 5c, je videti, kot da prehaja med sliko kocke in njeno zrcalno sliko. To figuro, narisano brez oči (slika 6), poznamo pod imenom Neckerjeva kocka. Če nekaj časa strmo gledate vanjo, spontano preide v svojo zrcalno sliko in nazaj (preverite!). Če poskrbimo, da se slika večkrat zamenja, se nam hipna menjava položajev zazdi kot zvezno gibanje. Toda to je lahko zvezno gibanje le, če gre za rotacijo v 4-dimenzionalnem prostoru. Morda smo s tem v resnici sprožili 4-dimenzionalni pojav v svoji zavesti.



Slika 6.

Fitch v svojem eseju še pove, da ima v 3-dimenzionalnem prostoru gibanje 6 prostostnih stopenj, namreč 3 translacije vzdolž treh premic in 3 rotacije okrog njih, v štiridimenzionalnem pa kar 10, in sicer 4 translacije vzdolž štirih premic in 6 rotacij okrog šestih ravnin.

Na koncu se Fitch dotakne se tudi topoloških problemov. Če bi bila obla upogljiva (gibka), bi lahko v 4-dimenzionalnem prostoru, brez raztezanja ali raztganin, obrnili njeno notranjost navzven, kot npr. obrnemo rokav pri obleki. Dva člena verige bi lahko ločili brez lomljenja. Naši vozli so v 4-dimenzionalnem svetu neuporabni. Tako bi lahko vozle s slike 7 razvozljali, ne da bi premaknili pritrjena konca.



Slika 7.

Mi pa zaključimo razmišljanje o četrti dimenziji še z eno predstavo, ki vodi do hudomušnega zaključka, na katerega sem naletela v knjižici Rudyja Ruckerja.

- Točka deli premico na dva ločena dela.
- Premica deli ravnino na dva ločena dela.
- Ravnina deli 3-dimenzionalni prostor na dva ločena dela.
- 3-dimenzionalni prostor deli 4-dimenzionalni prostor na dva ločena dela.

Torej tudi naš prostor deli 4-dimenzionalni prostor, katerega del je, na dva ločena dela. Da bi prešli iz enega v drugi del, moramo nujno skozi naš tridimenzionalni prostor.

Stare religiozne slike prikazujejo Zemljo kot neskončno ravnino, ki deli 3-dimenzionalno vesolje na dva dela: zgornjo ali nebeško polovico in spodnjo polovico, pekel. Boljša je predstava, da je naš 3-dimenzionalni svet, ki ga zasedamo, prav tisti 3-dimenzionalni prostor, ki ločuje nebesa in pekel, sestavna dela 4-dimenzionalnega hiperprostora. Vsak padli angel, vržen iz nebes, je moral skozi naš svet na svoji poti v pekel.

Marija Vencelj

UČINEK TOPLE GREDE IN VROČE POLETJE

Vroči dnevi poletja 1998¹ so bili pogosto vzrok za razmišljanje o tem, zakaj je bilo tedaj tako vroče. Modno je bilo trditi, da je poletje vroče zaradi t.i. učinka tople grede. Poleti 1998 je bilo v Ljubljani namerjeno rekordno veliko število vročih dni. Kar 33 dni (en dan več kot v, do tedaj, rekordnem letu 1994) se je najvišja dnevna temperatura dvignila nad 30 stopinj Celzija.

Kako pride do učinka tople grede in kakšne so njegove posledice? Rastlinjaki in tople grede so namenjeni gojenju vrtnin in rož, ki so občutljive na mraz. Zakaj je v toplih gredah topleje kot na polju?

Podnevi se zrak pri tleh segreva zaradi sončnega sevanja. Sončni žarki prodrejo skozi atmosfero in segrejejo tla, od tal se segreje tudi zrak pri tleh. Če nad poljem zapiha veter, odnese topli zrak stran od tal in temperatura spet pade. Kako pa je v topli gredi? Sončno sevanje prodre tudi v rastlinjak in v njem segreje tla ter zrak nad njimi. Ker topli zrak ne more iz rastlinjaka, je temperatura zraka v njem višja kot nad odprtim poljem. (Podobno močno se segreje tudi zrak v avtomobilu, ki stoji na soncu.) Tople grede in rastlinjake vrtnarji najpogosteje uporabljajo spomladi in jeseni. Tedaj so noči lahko hladne in na polju bi rastline pozeble. Poleti tople grede zračijo, da se rastline ne pregrejejo in ne ovenejo.

Ponoči se tla ohlajajo zaradi infrardečega sevanja, ob hladnih tleh se ohlaja tudi zrak. V rastlinjaku ponoči seva steklena streha, na njeni spodnji strani se ohlaja tudi v rastlinjaku zaprti zrak (steklena streha se tedaj pogosto orosi). Če je rastlinjak narejen iz stekla, potem pride do izraza tudi zmanjšanje energijskih izgub zaradi sevanja. Steklo namreč slabo prepušča infrardeče sevanje, samo pa seva, vendar pri nižji temperaturi kot tla. Hladni zrak se v rastlinjaku spušča in polagoma se ohladi ves zrak v njem. Temperatura zraka v rastlinjaku pa ponoči ne pade tako nizko kot nad poljem, saj je izhodiščna večerna temperatura v rastlinjaku višja, v njem ne piha veter, pa tudi ohlajanje zaradi sevanja skozi streho je manj učinkovito kot ohlajanje polja v jasni noči. V toplih gredah, ki so pokrite s polietilenskimi folijami, je topleje le zaradi zadrževanja toplega zraka, saj te folije prepuščajo infrardeče sevanje.

Kakšen pa je učinek tople grede v ozračju?

Ker imajo tla, ozračje in oblaki temperaturo blizu ledišča, oddajajo po Planckovem zakonu toploto pretežno kot infrardečo svetlobo. Obenem so površje trdne Zemlje, vodne površine, zasnežene in ledene površine v

¹ Prispevek smo od avtorja prejeli pred dvema letoma.

infrardečem delu spektra skoraj povsem črna telesa (to pomeni, da skoraj vso vpadlo infrardečo svetlobo absorbirajo). Za dele ozračja so lastnosti, ki vplivajo na prenos energije z infrardečim sevanjem, bistveno odvisne od koncentracije vode (H_2O), ozona (O_3) in ogljikovega dioksida (CO_2). Količina triatomnega plina CO_2 je v ozračju precej stalna in ta plin je v zraku dobro pomešan z dvoatomnima kisikom in dušikom, ki prepuščata infrardeče sevanje. Bistveno bolj spremenljiva je količina vodne pare: zelo vlažni deli ozračja, še posebej oblaki, v katerih je vodna para nasičena, so v infrardečem delu spektra skoraj črni, jasno in suho ozračje pa del infrardečega sevanja prepušča. Vodna para je v infrardečem delu spektra najpomembnejši sevalec, saj prispeva kar 70% vsega infrardečega sevanja, ki pride iz ozračja. Poleg vodne pare je pomemben sevalec v infrardečem delu spektra tudi CO_2 .

Poglejmo si vpliv sevanja vodne pare in ogljikovega dioksida najprej v jasni noči s suhim zrakom. Tla tedaj sevajo v infrardečem delu spektra in sevanje potuje skozi atmosfero. Del tega sevanja se absorbira v CO_2 , hkrati pa tudi CO_2 sam infrardeče seva. Polovica tega sevanja gre naprej v vesolje, polovica se ga vrne nazaj proti tlem. Tla infrardeče sevanje CO_2 prestrežejo in se zaradi tega dotoka energije manj ohlajajo, kot bi se v primeru, če v atmosferi ne bi bilo sevajočega CO_2 .

Kako je v oblačnih nočeh? Če je v atmosferi tudi vodna para (in te je v oblakih obilo, oblaki pa so sestavljeni iz drobnih kapljic), potem sevajo v atmosferi ogljikov dioksid, vodna para in oblačne kapljice. Količina sevanja, ki jo izseva atmosfera in katere del prejmejo tla, je zato bistveno večja kot v jasni noči, saj smo povedali, da vodna para prispeva kar dvakrat več infrardečega sevanja kot CO_2 . V oblačni noči se zato zrak pri tleh dosti manj ohladi. Sevanje triatomnih plinov iz atmosfere pa seveda tla prejemajo tudi podnevi, le da je tedaj sončno sevanje daleč najmočnejše.

Podnevi skozi atmosfero prodira tudi sončno sevanje. Triatomni plini ne vplivajo na prehod vidnega dela tega sevanja, pač pa absorbirajo dele infrardečega sončnega sevanja. Ta absorpcija je razlog za direktno segrevanje posameznih plasti ozračja. Poleg ogljikovega dioksida in vode so v ozračju občasno v različnih koncentracijah prisotni tudi drugi tri- in večatomni plini, npr. O_3 , CH_4 , NO_2 , NH_3 , ki večinoma nastajajo zaradi človekove dejavnosti. Tudi ti plini prispevajo k sevalni bilanci.

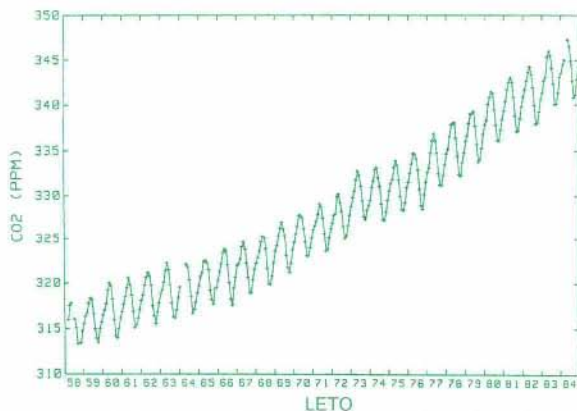
Sevanje oblakov, vodne pare, ogljikovega dioksida in drugih triatomnih plinov v atmosferi zmanjšuje ohlajanje površja tal. Zaradi tega je atmosfera pri tleh toplejša, kot bi bila, če teh plinov ne bi bilo. Vidna svetloba pride do tal in tla podnevi segreva, infrardeče sevanje tal pa se absorbira in emitira v atmosferi. Infrardeče sevanje se vrne iz atmosfere

k tlom in tako je ohlajanje tal nekoliko manj izrazito. Količina ponovno izsevane infrardeče svetlobe je odvisna od koncentracije triatomnih plinov. Večje so koncentracije, manjše je ohlajanje, temperatura tal in atmosfere se zato dvigne. Učinku triatomnih plinov na ravnovesje tokov infrardečega sevanja popularno rečemo "učinek tople grede", plinom, ki povzročajo ta učinek, pa "plini tople grede".

Vidimo, da je razlog za segrevanje zraka v rastlinjaku različen od razloga za zmanjševanje ohlajanja Zemlje zaradi sevanja triatomnih plinov. Izraz "učinek tople grede" pa se je v vsakodnevem pisanju kar dobro prijel in nesmiselno bi ga bilo odpravljati.

Zaradi človeških aktivnosti se koncentracije CO_2 , NH_3 , CH_4 in še nekaterih drugih plinov v Zemljini atmosferi povečujejo. Od predindustrijskega časa do konca 20. stoletja se je povprečna koncentracija CO_2 v vsej Zemljini atmosferi povečala z 280 ppm na 360 ppm (za 28%). (1 ppm je en masni del primesi, npr. CO_2 , na milijon masnih delov zraka.) Večja koncentracija CO_2 vpliva na emisivnost atmosfere in tako na gostoto energijskega toka v atmosferi izsevanega infrardečega sevanja. Ob povečanju koncentracije ogljikovega dioksida prejmejo tla več atmosferskega infrardečega sevanja.

Z modelskimi izračuni so ugotovili, da bi se pri podvojitvi koncentracije CO_2 s 300 ppm na 600 ppm morala povprečna temperatura na Zemlji dvigniti za 2 do 4 K. Ti izračuni so seveda precej nenatančni, saj na energijsko bilanco Zemlje ne vplivajo samo sevalne razmere. Povejmo še, da so se v klimatski zgodovini Zemlje koncentracije plinov tople grede precej spreminjale, spreminjala se je tudi njena povprečna temperatura.



Slika 1. Koncentracije CO_2 v ozračju v zadnjih desetletjih, kot so jih namerili v observatoriju na Mauna loa (Havaji) (Bulletin WMO).

Povprečno temperaturo Zemlje lahko preprosto izračunamo. Energijsko bilanco Zemlje kot planeta najprej zapišemo tako, da vzamemo trdno zemljo, oceane in atmosfero kot eno samo telo. V tem primeru sta pomembna predvsem dva energijska tokova:

- Sončevo obsevanje j_0 (Sonce obseva polovico zemeljske oble, pri čemer je razporeditev absorbirane moči po površini osvetljene polovice odvisna od albeda² a in od kota med normalo na površje in smerjo sončnih žarkov.)
- Sevanje Zemlje, ki izhaja iz vse zemeljske površine. (Zemlja seva skoraj kot črno telo, v infrardečem delu spektra je emisivnost³ $\varepsilon \approx 1$.)

Iz Zemljine notranjosti sicer teče proti površini nekaj toplotnega toka, ker je notranjost Zemlje vroča, vendar je ta toplotni tok mnogo manjši od sevalnih tokov, tako da ga lahko zanemarimo. Tla in morja tudi shranjujejo in oddajajo toploto v dnevnem in letnem ciklu. Če vzamemo dovolj dolg časovni interval, lahko stanje obravnavamo kot stacionarno, da torej za Zemljo kot celoto velja, da se energija sevanja, ki jo prejme Zemlja od Sonca, izenači z energijo, ki jo Zemlja izseva v vesolje:

$$(1 - a)j_0 \cdot \pi R^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2.$$

(R je polmer Zemlje.)

Od tod izračunamo povprečno temperaturo Zemlje

$$T = \left(\frac{(1 - a)j_0}{4\sigma} \right)^{1/4}.$$

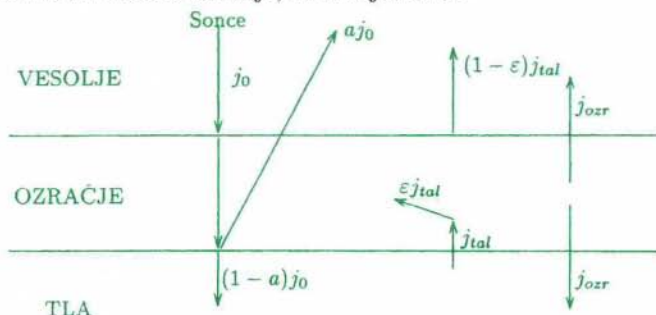
Če vzamemo, da je povprečni albedo Zemlje $a = 0.35$ in $j_0 = 1367 \text{ W/m}^2$, dobimo za povprečno temperaturo Zemlje 250 K (-23°C), kar ustreza temperaturi v zgornji tretjini troposfere. Dejanska temperatura površja Zemlje je višja zaradi učinkov plinov tople grede. Takšno temperaturo, kot smo jo izračunali zgoraj, bi imela Zemlja v primeru, če ne bi imela sevajočega ozračja.

Da bi ilustrirali učinek atmosferske tople grede na temperaturo na Zemlji, naredimo še drugo, manj poenostavljeno oceno. Dobimo jo, če

² Albedo (odbojnost) je lastnost površine telesa, ki nam pove, kolikšen del svetlobnega toka se na površini odbije.

³ Tudi emisivnost je lastnost površine telesa in nam pove, kolikšno je pri posamezni valovni dolžini razmerje med sevanjem sivega in črnega telesa enakih površin. Večina teles je sivih, kar pomeni, da telo del sevanja odbije.

poleg trdne Zemlje in vesolja upoštevamo še ozračje. V približku predpostavimo, da ozračje povsem prepušča sončno sevanje, tako da se sončno sevanje absorbira le na tleh. Atmosfera pa naj delno absorbira in emitira dolgovalovno infrardeče sevanje, ki izhaja iz tal.



Slika 2. Triplastni model: vesolje, ozračje, tla. Prikazani so sevalni tokovi, absorptivnosti in emisivnosti.

Če označimo sevanje atmosfere z j_{ozr} in sevanje tal z j_{tal} , opišemo ravnotežje gostot energijskih tokov na meji med ozračjem in vesoljem (slika 2) z enačbo

$$j_0(1-a) = 4((1-\varepsilon)j_{ozr} + j_{tal}).$$

Faktor 4 na desni strani enačbe dobimo, ker Zemljo obseva Sonce le po eni strani, sama pa seva z vse površine. V vesolje seva ozračje, deloma pa pride v vesolje tudi sevanje s tal.

Ozračje sprejme del dolgovalovnega sevanja tal in ga v enakih delih izseva navzgor in navzdol:

$$\varepsilon j_{tal} = 2j_{ozr},$$

na meji med ozračjem in tlemi pa velja energijsko ravnotežje

$$(1-a)j_0 + 4j_{ozr} = 4j_{tal}.$$

Tla absorbirajo del sončnega sevanja, prejmejo pol sevanja atmosfere in sama sevajo. Z upoštevanjem Stefanovega zakona za sivo telo (ozračje) dobimo iz prve zveze

$$\varepsilon \sigma T_{tal}^4 = 2\varepsilon \sigma T_{ozr}^4$$

oz.

$$T_{tal} \approx 1.19 T_{ozr}.$$

Iz energijske bilance ozračja dobimo, spet z upoštevanjem Stefanovega zakona, še eno zvezo med T_{tal} in T_{ozr} , od koder lahko določimo obe temperaturi. Pri albedu $a = 0.35$ in emisivnosti $\varepsilon = 0.7$ dobimo za temperaturo ozračja 234 K in za temperaturo tal 279 K, kar veliko bolj ustreza dejanskim razmeram na Zemlji pri tleh kot rezultat prejšnjega izračuna.

Infrardeče sevanje iz atmosfere je torej razlog, da je povprečna temperatura Zemlje nad lediščem in da je zato na Zemlji možno življenje v sedanji obliki. Kljub približnosti je mogoče na osnovi gornjih enačb oceniti, kaj bi se zgodilo s temperaturo tal in atmosfere ob spremembi koncentracije CO_2 . Zaradi te spremembe se spremeni emisivnost ε . Če pri tem ostane albedo nespremenjen, se temperaturi tal in zraka spremenita, kot kaže tabela 1.

emisivnost	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	1.0
T ozračja	230	232	234	236	239	250
T tal	273	276	279	281	284	297

Tabela 1. Spremembe temperature zraka in tal (v K) ob spremembah emisivnosti ozračja pri albedu 0.35.

Zadnji stolpec tabele 1 je namenjen le ilustraciji tega, kaj bi se zgodilo s temperaturo na Zemlji, če bi ozračje absorbiralo vse infrardeče sevanje. V tem primeru bi bila povprečna temperatura tal kar 297 K (24°C) v primerjavi s sedanjimi 279 K (6°C). Takšne sevalne razmere vladajo na Veneri, le da je tam gostota vpadlega energijskega toka dosti večja kot na Zemlji in je temu primerno višja tudi temperatura v "Venerini topli gredi".

Poleg direktnega vpliva povečanega infrardečega sevanja na temperaturo zraka in tal, vplivajo na energijsko bilanco še drugi učinki. Naj navedemo le nekatere:

1. Zaradi povečane temperature se poveča izhlapevanje, zaradi večje količine vlage pride do večje oblačnosti in zato do povečanja albeda Zemlje. Albedo močno vpliva (glej zgornje enačbe) na temperaturo ozračja in Zemlje, saj je od albeda odvisna energija sončnega sevanja, ki sploh pride v ozračje. Zaradi povečanega albeda se temperaturi znižata (tabela 2).

albedo	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.5
T ozračja	243	238	234	230	225	219
T tal	289	283	279	273	267	261

Tabela 2. Spremembe temperature zraka in tal (v K) ob spremembah albeda, pri emisivnosti 0.7. Debelo je zapisano sedanje stanje.

Na albedo Zemlje ne vplivajo le oblaki, pač pa tudi aerosol (droben lebdeč prah), ki v ozračje prihaja iz naravnih virov (vulkani, puščave, morja, vegetacija) in antropogenih virov (industrija, kmetijstvo, promet). Povečanje koncentracije aerosola povečuje albedo Zemlje.

2. Zemlja se na spremembe v energijski bilanci, npr. zaradi povečanja infrardečega sevanja atmosfere, ne odziva takoj, pač pa s precejšnjim časovnim zaostankom, saj je toplotna kapaciteta trdne Zemlje in oceanov velika. Če privzamemo, da je toplotna kapaciteta ozračja 1 enota (vse ozračje nad enim kvadratnim metrom zemeljske površine tehta 10 000 kg, specifična toplotna kapaciteta zraka je okoli $1000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$), je toplotna kapaciteta prvih 10 (globinskih) metrov trdnih tal okoli 2.4 enote (gostota tal je okoli 4000 kg/m^3 , specifična toplotna kapaciteta pa okoli $2000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, trdna tla pokrivajo 30% Zemlje) in toplotna kapacitete prvih 50 (globinskih) metrov oceana približno 15 enot (voda se lahko meša in zato se segrevajo in ohlajajo debele plasti; gostota je 1000 kg/m^3 , specifična toplotna kapaciteta $4200 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, ocean pokriva 70% Zemlje). Za segrevanje tal in oceana je torej potrebno dosti več toplote kot za segrevanje vsega ozračja.

Opomba. Pri izračunu razmerja toplotnih kapacitet za celotno Zemljo

$$\text{ozračje} : \text{trdna tla} : \text{ocean} = 1 : 2.4 : 15$$

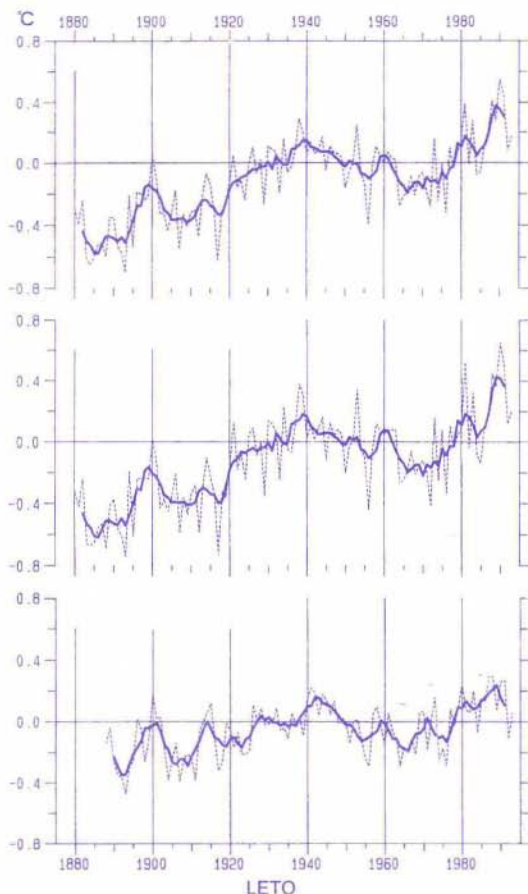
smo upoštevali, da se segreva ali ohlaja le zgornja plast morske vode, v resnici pa se v nekaj stoletnem časovnem intervalu postopoma segreva tudi globoka oceanska voda.

3. Po površju Zemlje je količina vpadlega sončnega sevanja neenakomerno razporejena zaradi razlik v zenitnem kotu Sonca med ekvatorialnimi in polarnimi kraji in zaradi nagnjenosti zemeljske osi (letni časi). Zaradi razlik v segrevanju prihaja do razlik v zračnem pritisku po Zemlji in zaradi tega do vetrov in vremenskih sprememb. Vetrovi prenašajo toploto iz toplejših tropskih krajev proti hladnejšim polarnim. Podobno velja za morske tokove, ki jih delno poganjajo vetrovi, delno pa razlike v temperaturi in slanosti morske vode. Zaradi teh transportov so spremembe temperature ozračja, nastale zaradi učinka tople grede, zabrisane.

Zaradi povišane temperature in povečane vlažnosti prihaja do pogojejšega razvoja konvektivnih oblakov in do nastanka slojastih oblakov ter s tem do mehanskega transporta toplega zraka v višje plasti ozračja, s čimer se poveča tudi infrardeče sevanje v vesolje.

4. Spremembe koncentracije CO_2 in spremembe temperature bistveno vplivajo na rastline na kopnem in v morju. Rastline večinoma pri fotosintezi porabljajo CO_2 za izdelavo sladkorjev; pri tem se sprošča kisik. Povečana temperatura praviloma ugodno vpliva na učinkovitost fotosinteze rastlin, s tem se poveča absorpcija CO_2 iz ozračja. S krivulje na sliki 1, ki kaže spremembe CO_2 na Zemlji, lahko razločno razberemo letni hod koncentracij CO_2 . Minimum koncentracije ustreza pomladi na severni polobli, saj tedaj tam rastline najbolj bohotno rastejo in se zato koncentracija CO_2 zmanjša. Po drugi strani pa rastline pri višjih temperaturah tudi močneje dihaajo in zato oddajajo več CO_2 .
5. Daleč najpomembnejši sevalec v infrardečem delu spektra in zato najpomembnejši plin tople grede je vodna para; k infrardečemu sevanju prispeva tudi sevanje oblakov v ozračju. Skupaj prispeva voda kar 70% vsega učinka tople grede. Zaradi povečane količine vlage v zraku, ki je posledica povečanega izhlapevanja zaradi višje temperature, bi se moralo povečati tudi sevanje vodne pare. Vendar je količina vlage v zraku zelo spremenljiva (včasih je jasno, drugič pa oblačno, pri vodi ves čas prihaja tudi do vtekočinjanja in izhlapevanja, do sublimacije in depozicije), tako da je, globalno gledano, vpliv vodne pare na učinek tople grede ves čas približno enak.

Pri dosedanjem razmišljanju smo se omejili na vodno paro in na ogljikov dioksid v ozračju. Količina CO_2 , ki v naravnem ravnotežju kroži med ozračjem, tlemi, oceani in rastlinstvom, je zelo velika, človeška aktivnost (predvsem sežiganje premoga, nafte in plina) pa k temu prispeva le majhen, a pomemben neuravnoteženi del. Podobno kot CO_2 vplivajo na spremembe infrardečega sevanja tudi metan (sprošča se iz močvirij, riževih polj in iz gnoja), amonijak (iz umetnih in naravnih gnojil) in ozon (nastaja kot posledica onesnaževanja z dušikovimi oksidi iz izpušnih plinov). Kot smo že omenili, se je koncentracija ogljikovega dioksida, pa tudi drugih plinov tople grede v zadnjih desetletjih dvigala. Iz primerjave med sliko 3 in sliko 1 pa lahko vidimo, da se je povprečna temperatura ozračja dvigala in padala kljub stalnem naraščanju koncentracije toplogrednih plinov. S slike 3 tudi lahko razberemo, da se je povprečna temperatura na Zemlji v zadnjih 100 letih dvignila za okoli 0.8 K. Spremenljivost in kaotičnost dogajanja v ozračju je namreč tako velika, da je odraz povečane koncentracije toplogrednih plinov zaenkrat še slabo določljiv.



Slika 3. Potek temperature zraka na Zemlji v nekaj zadnjih desetletjih. Črtkana črta predstavlja odstopanje letne povprečne temperature na Zemlji od povprečja za obdobje 1961–1990, debela črta pa drseče petletno povprečje (povzeto po Bulletin WMO).

Odgovor na uvodno vprašanje, ali je bilo poletje 1998 v Sloveniji vroče zaradi učinka tople grede, je torej takle:

DA, VENDAR NE ZARADI POVEČEVANJA KONCENTRACIJE PLINOV TOPLE GREDE. Od leta 1997 do leta 1998 se je koncentracija CO_2 povečala le malenkostno, povprečna temperatura ozračja pa kar precej. Nihanja v povprečni letni temperaturi ozračja na Zemlji so, kot vidimo s slike 3, kar pogosta.

Tomaž Vrhovec

SODOBNI RASTLINJAK V VOKLEM PRI KRANJU

Pri iskanju zunanje opreme za to številko Preseka smo obiskali tudi družinsko vrtnarstvo Kozjek v Voklem pri Kranju, ki se ukvarja z gojenjem okrasnih rastlin. Karavanke in Kamniške Alpe v neposredni bližini je tedaj še pokrivala nekajmetrska snežna odeja, v njihovem rastlinjaku pa smo naleteli na eno samo cvetočo pokrajino z lastno pozno pomladansko klimo v malem (sliki na strani III in spodnja slika na strani IV).

Ljubeznivi lastniki so nam dovolili fotografranje in tudi razložili delovanje naprav v rastlinjaku. Stene in streha rastlinjaka so iz dvojnega stekla, dele strehe je moč odpirati in zapirati podobno kot pri običajnih toplih gredah.

Ima pa rastlinjak tudi lastno malo vremensko postajo, katere del vidimo nad dostavnim avtom na sliki na strani III. Postaja je povezana z računalnikom, ki, glede na potrebe vzgajane kulture, poskrbi za rastlinam najugodnejšo klimo v rastlinjaku. Glede na trenutne in predvidene potrebe krmili računalnik ogrevanje rastlinjaka (peči so v kletnih prostorih rastlinjaka, dimnika pa sta vidna tudi na sliki), zračenje (avtomatsko odpiranje strehe in delovanje ventilatorjev) in še kaj.

Najzanimivejše se nam je zdelo, kako je poskrbljeno za ravno pravo osvetljenost gojenih rastlin. Na spodnji sliki na strani III vidimo v vsej širini rastlinjaka nad rastlinami vodoravne zavese iz nekakšne polprosojne, delno aluminijaste tkanine. Zapiranje in odpiranje zaves ureja računalnik, v katerega so vnešeni podatki o potrebni osvetljenosti gojenih rastlin in ki dobiva podatke o trenutni osvetljenosti iz merilnih naprav. V času našega obiska je bilo vreme zelo spremenljivo in doživeli smo, da so se v nekaj minutah zavese kar dvakrat zaprle in odprle. Poskrbljeno je tudi za dodatno osvetljevanje, kadar je potrebno. V zimskih mesecih npr. dodatno osvetljujejo sadike pelargonij, ki v času rasti potrebujejo več svetlobe, kot je pri nas tedaj daje narava.

Seveda imajo sodobnemu rastlinjaku primerno urejeno tudi vlaženje zraka in zalivanje rastlin. Na sliki notranjosti rastlinjaka vidimo ob desni strani prehoda črne šobe zalivalne linije, pritrjene na premičnih kovinskih gredah z rožami.

Da je v rastlinjaku za rastline primerno poskrbljeno, kaže njihova kakovost. Lep je pogled na nepregledno množico cvetočih zdravih in čvrstih rastlin. Prijazni vtis dopolnjuje še izjemna urejenost znotraj in zunaj rastlinjaka.

Marija Vencelj

ZGODOVINA MATEMATIKE – ZGODBE O PROBLEMIH – 2. del

Pred natanko enim letom smo v Preseku predstavili prevod prvega dela knjige *Zgodovina matematike – zgodbe o problemih*. Tokrat bomo govorili o prevodu drugega dela, ki je pred kratkim izšel v knjižnici *Sigma*. Tudi to knjigo sestavlja vrsta daljših člankov, katerih avtorji so raziskovalci v francoskih inštitutih za raziskave v matematičnem izobraževanju (IREM).

Drugi del ima devet poglavij. Vsako je posvečeno enemu matematičnemu problemu, katerega reševanje je sprožilo nastanek in razvoj kakega pomembnega dela sodobne matematike. Prvo poglavje se začne pri štetju, vendar nas že po nekaj straneh popelje na pot do teorije množic. Drugo poglavje zastavlja subtilno vprašanje, zakaj za računanje ne zadoščajo ulomki. V tretjem poglavju spoznamo presenetljivo dejstvo, da (za razliko od ploščin likov) prostornine danega telesa ne moremo vedno določiti tako, da bi ga razdelili na manjša pravilna telesa. Za rešitev iz zadrege smo prisiljeni poseči celo po integralnem računu. V četrtem poglavju se poskušamo vživeti v način razmišljanja starogrških matematikov in dojeti, zakaj so menili, da le uporaba ravnila in šestila zagotavlja čistost geometrijskih konstrukcij. V petem poglavju najdemo nadvse zabavno poročilo o dveh rahlo okajenih prijateljih, ki se opotekata po cesti in se izmenično obtožujeta, da drugi ne hodi naravnost. Naslednji dan začneta razpravo, kaj je ravno in kaj ukrivljeno ter kako pojma ločimo. Čeprav dandanes geometrijo pogosto obravnavamo zelo statično, kot sklop osnovnih pojmov in trditev, v šestem poglavju spoznamo, da je geometrija tesno povezana z gibanjem in da nam kinematični pogled omogoča njeno boljše razumevanje. Ljubitelji odvetniških nadaljevanj bodo prišli na svoje v sedmem poglavju, ki se ukvarja z matematično-pravnim zapletom, ali je dopustno pripisati nekaterim dolžinam negativni predznak. Tožilec in obramba se izmenjujeta v razpravi, tudi priči ne manjka. Razsodbo in obrazložitev najdete na koncu poglavja. Osmo poglavje je posvečeno enemu najznamenitejših matematičnih problemov vseh časov: utemeljevanju navidez očitnega dejstva, da skozi vsako točko poteka natanko ena vzporednica k dani premici. Zadnje poglavje bo spreobrnilo tiste, ki so jim kompleksna števila skrivnostni neobdigratrega. Govori namreč o imaginarnih številih in njihovi 'resničnosti'.

Povejmo še, da je knjiga, čeprav obravnava pomembna in globoka vprašanja, zanimivo in ne prehudo zahtevno branje. Zato jo toplo priporočam vsem, ki radi pokukajo v zgodovino in v ozadje matematičnih problemov ter metod, ki jih srečajo v šoli.

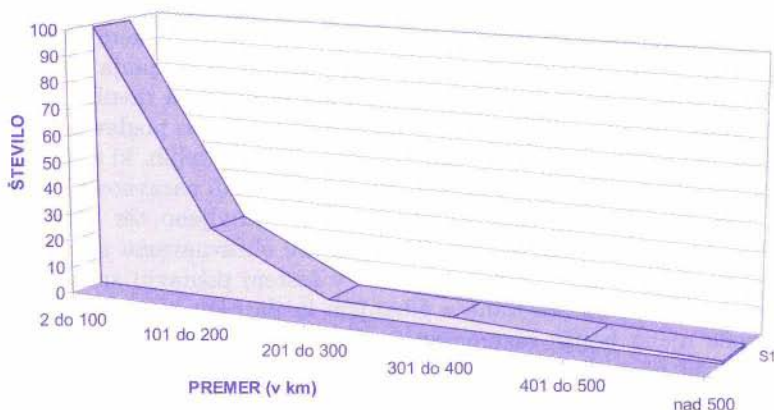
Petar Pavešić

KRATER VEGA

Že s prostim očesom razločimo na Luni svetle predele – “celine”, ki zavzemajo večji del Luninega diska (okoli 60%), in temna področja – “morja” (ki zavzemajo okoli 40% Luninega diska). Najznačilnejši za Lunino površje pa so kraterji, bolj ali manj okrogle, vulkanskim žrelom podobne tvorbe (čase), ki so jih odkrili tudi na planetih in drugih lunah našega osončja. Kraterje na Luni lahko opazujemo že z daljnogledom 3 do 5-kratne povečave in lovski daljnogled je za to prav primeren.

Na z Zemlje vidni strani (polovici) Lune bi lahko našteali okoli 300 000 kraterjev s premerom od enega do sto kilometrov, le dvanajst kraterjev pa ima premer večji od 200 km (upoštevana je tudi nam nevidna Lunina stran, kjer so pri obkroženju Lune kraterje fotografirale sonde).

KRATERJI PO PREMERU

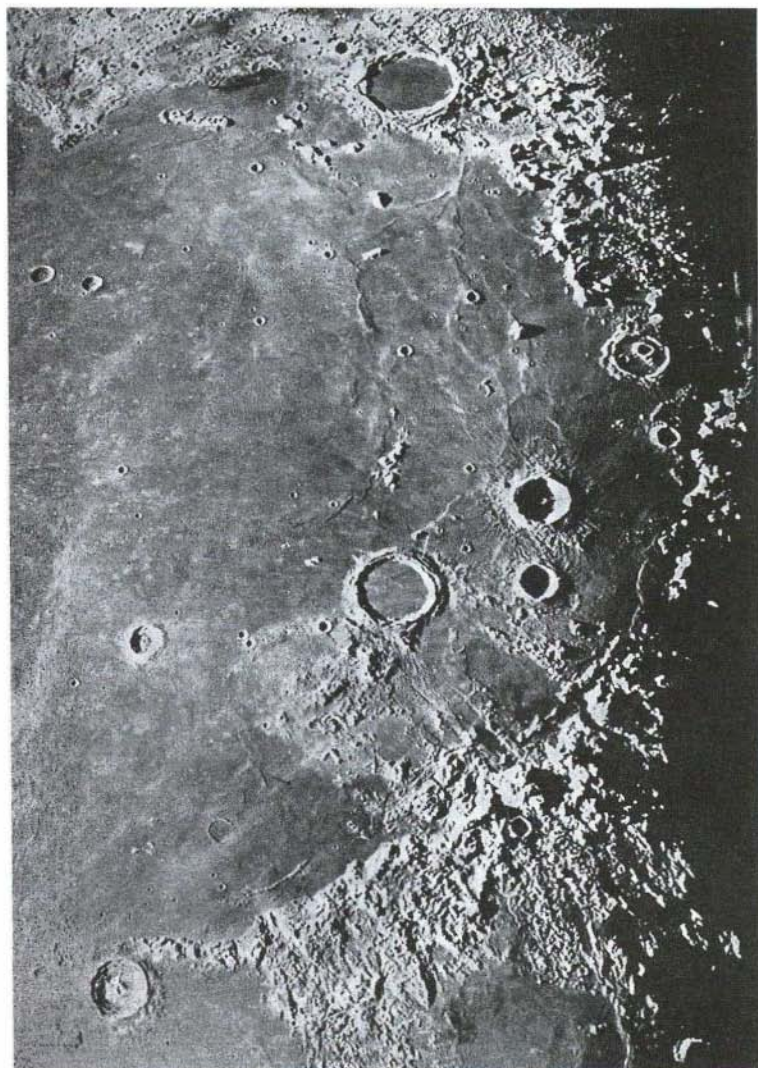


Slika 1. Odvisnost števila Luninih kraterjev od njihovega premera. Graf je narejen na podlagi podatkov za 137 kraterjev iz Nautical Almanac 2001.

V obrisih svetlih in temnih predelov na Luninem disku (polna luna), vidnih s prostim očesom, so ljudje že zdavnaj videli različne stvari (žensko, junaka, konjenika, živali – npr. zmaja, zajca, celo človeški obraz). Resnično sliko Luninega površja pa je človek spoznal šele po odkritju daljnogleda v začetku 17. stoletja.

Prvi je z daljnogledom pogledal Luno veliki italijanski fizik in astronom **Galileo Galilei** (1564 do 1642). Na Luni je videl gore in doline. Tako je prvi ugotovil (1610), da so v vesolju Zemlji po reliefu podobna telesa. Pisal je: “Kot se površje naše zemeljske krogle v glavnem deli na

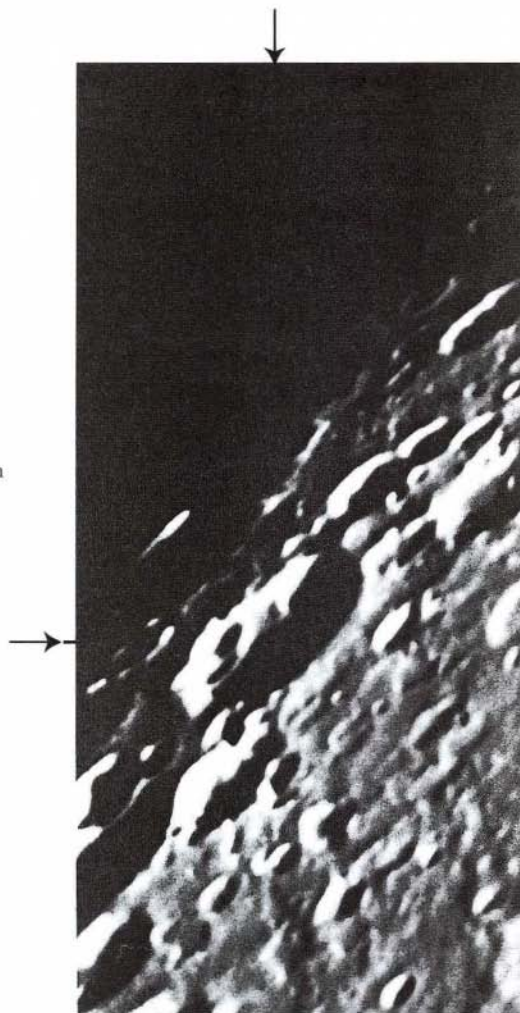
dva dela – celinsko in vodno – tako tudi na Luninem disku vidimo veliko razliko: eni deli so bolj sveteči, drugi manj.” S tem je že izrekel domnevo, da so lahko kakor na Zemlji tudi na Luni morja in oceani.



Slika 2. S kraterji in gorami posejan del Luninega površja – zahodna stran Morja deževij (Mare Imbrium). Sever je zgoraj, vzhod levo. Z Lunine karte sami ugotovite imena večjih kraterjev.

Ime kraterja	Premer
Apollo	500 km
Korolev	450 km
Grimaldi	410 km
Planck	340 km
Mendeleev	330 km
Poincare	320 km
Bailly	300 km
Van de Graaff	235 km
Schickard	225 km
Clavius	225 km
D'Alembert	225 km
Humboldt	205 km

Razsežnosti dvanajstih največjih
Luninih kraterjev.



Slika 3. Predel Luninega površja, kjer leži krater Vega.

Prva poimenovanja podrobnosti na Luni so bila dana v prvi polovici 17. stoletja, ko so s teleskopi začeli živahno proučevati površje našega satelita. Belgijec **M. F. van Langren** je na svoji *Karti Lune* (1628) označil okoli 270 podrobnosti in mnoge od njih imenoval z imeni biblijskih oseb, svetnikov in znanih ljudi svojega časa. Teh imen danes ne uporabljamo.

Današnje imenovanje tvorb na Luni ima pravzaprav začetek v delih Poljaka **J. Hevelija** (*Selenografija*, 1647) ter Italijanov **G. B. Ricciolija** in **F. M. Grimaldija** (*Novi Almagest*, 1651). Hevelij je uvedel v selenografijo (lunepis) izraze morje (mare), jezero (lacus), močvirje (palus), zaliv (sinus) za označevanje temnih lis različnih odtenkov in velikosti. Nekaterim gorskim predelom na Luni je dal imena zemeljskih gorskih sistemov (npr. Alpe, Apenini).

Riccioli in Grimaldi sta tudi poimenovala številne Lunine tvorbe. Za imena kraterjev sta uporabila imena mitoloških oseb (Atlas, Herkul, Merkur, Kefej, Endimion), svetnikov (Dionizij, Katarina), teologov (Ciril, Clavij, Teofil), pesnikov in učenjakov stare Grčije in Rima (Arat, Arhimed, Herodot, Plinij, Tacid), učenjakov srednjega veka (Abenetra, Abul'feda) in svojih sodobnikov (Cavalierri, Kircher, Landsberg, Longomontan, Stevin, Schickard).

Z vse bolj zmogljivimi teleskopi so opazovalci odkrivali na Luninem površju vedno več novih kraterjev in jim dajali imena. Posebno veliko imen se je pojavilo na kartah Lune, ki so jih priskrbeli **J. Schroeter** (1791), **J. Maedler** in **W. Beer** (1837), **J. Schmidt** (1878) in **J. N. Krieger** (1898).

Leta 1935 so po priporočilu Mednarodne astronomske zveze (IAU) sestavili katalog koordinat nekaj tisoč Luninih kraterjev in drugih podrobnosti Luninega reliefa.

Leta 1959 je sovjetska avtomatična postaja **Luna-3** prvič fotografirala z Zemlje nevidno stran Lune in sovjetski znanstveniki so dali imena prvim tvorbam, ki so bile vidne na posnetkih. Leta 1965 je sovjetska postaja **Zond-3** fotografirala še večje število tvorb na nevidni stani Lune, nakar so vse površje Lune natančno raziskali ameriški in sovjetski umetni Lunini sateliti. Leta 1970 je IAU za imena kraterjev privzela številna imena astronomov, astronautov (raketna tehnika), fizikov, optikov, geofizikov, kemikov, biologov, celo še živih ljudi, npr. ameriških in sovjetskih astronautov (Anders, Bormann, Lovell, Armstrong, Collins, Aldrin, Leonov, Tereškova).

Med vsemi pa je *krater Vega* edini, ki je posvečen kakemu Slovincu. To je veliko priznanje našemu matematiku Juriju Vegi (1754 do 1802), ki se je ukvarjal tudi z astronomijo in fiziko. V 18. stoletju je veljal za enega najbolj priznanih znanstvenikov tedanje Avstrije.

Krater Vega sta prvič vrisala v svojo Lunino karto Maedler in Beer leta 1837. Leži na z Zemlje vidni strani precej daleč na južni strani Luninega diska ob Južnem morju (Mare Australe). Vzemite v roke kakšno dobro Lunino karto in ga poskusite sami najti.

Marijan Prosen

PREDLOGI ZA RAZISKOVANJE V ZVEZI S KRATERJEM VEGA

Velike počitnice so pred vrati. Šolskih skrbi bo kmalu konec. Predlagam, da v poletnih mesecih nekaj časa (dni) namenite astronomiji. Prijavite se na astronomski tabor in poskušajte tam poleg ostalih aktivnosti raziskovati tudi krater Vega. Danes imajo astronomska društva po Sloveniji že zelo zmogljive teleskope, tako da to ne bo preveč težko. Vendar pa opozarjam, da s teleskopom opazovati in povrh še fotografirati krater Vega ni mačji kašelj. Na to se morate zelo dobro pripraviti (v kakšni meni je tedaj Luna, kdaj, s čim in kako opazovati, da bo potekalo vse v redu in prav).

Sicer pa mislim, da bi krater Vega lahko raziskovali na različne načine: literarno (pišemo domišljjski spis, esej, zgodbo), zgodovinsko (iščemo zanimivosti iz časa Vegovega življenja, s pomočjo enciklopedij spoznavamo ljudi, ki imajo na Luni svoje kraterje), naravoslovno (opazujemo z daljnogledom – ugotavljamo razne fizikalne količine, merimo kot, v katerem je krater viden, računamo njegov premer, sence na Luni).

Ker je Presek revija, ki spodbuja astronomske dejavnosti, sam pa sem tudi iz te stroke, vam predlagam, da poskušate ugotoviti podatke o kraterju Vega, predlagane v naslednji tabeli:

Poskusimo poiskati naslednje podatke o kraterju Vega

selenografska dolžina:		
selenografska širina:		
opazovanje: dne	 čas	
teleskop: vrsta	 ločljivost	 povečava
opis opazovanja:		
fotografiranje: teleskop	 povečava	 čas osvetlitve
opis opazovalnih razmer:		
izmerjeni zorni kot:	 kotnih minut	
izračunani premer:	 km	
višina obrobne hribovja:		
druge značilnosti v okolici kraterja:		
brskajte po knjigah in si še sami si kaj izmislite:		
		

NAJVEČJA ZNANA PRAŠTEVILA – NEKOČ IN DANES

Čeprav je definicija praštevila enostavna in vsakomur razumljiva, je presenetljivo veliko vprašanj v zvezi z njimi še vedno odprtih. Celo tako preprosta naloga, kot je ugotoviti, ali je dano naravno število praštevil, je lahko zelo trd oreh. Preprost in dobro znan postopek, Eratostenovo rešeto¹, postane pri ugotavljanju praštevilskosti velikih števil (z denimo nekaj tisoč števki) zelo zamuden in praktično neuporaben. Prav na dejstvu, da je za velika števila težko preveriti, ali so praštevila ali ne, sloni ena najrazširjenějšíh metod šifriranja sporočil (glej članek: M. Vencelj, Šifriranje z javnim ključem, Presek, letnik 22, št. 6 (1994-1995), stran 354-357).

Že antični Grki so vedeli, da je praštevil neskončno mnogo. Kljub temu pa prav velikih praštevil niso poznali. Prvo praštevilu omembe vredne velikosti lahko zasledimo pri italijanskem matematiku Pietru Cataldiju², ki je leta 1588 pravilno preveril, da sta števili $2^{17} - 1 = 131071$ in $2^{19} - 1 = 524287$ praštevila. Ti dve števili sta zaradi svoje majhnosti ravno še primerni za uporabo Eratostenovega rešeta. Če želimo namreč preveriti, da je dano število n praštevil, je dovolj preveriti, da n ni deljivo z nobenim praštevilom, ki je manjše ali enako kvadratnemu korenu iz števila n . Cataldiju pa so bila vsa praštevila med 2 in korenom zgornjih dveh števil že znana. Opogumljen s svojim rezultatom je Cataldi domneval, da so tudi števila $2^n - 1$ za $n = 23, 29, 31$ in 37 praštevila. Da je bila njegova domneva napačna pri $n = 23$ in $n = 37$, je dobrih 50 let kasneje dokazal znameniti matematik Fermat. Podobno se je godilo Cataldijevi domnevi pri $n = 29$. Pač pa je imel več sreče pri številu $2^{31} - 1 = 2147483647$. Leta 1772 (torej še dobrih sto let za Fermatom) je Euler namreč s precej spretnosti dokazal, da je to število res praštevilu.

Prvo veliko praštevilu, ki ni oblike $2^n - 1$ (praštevilom oblike $2^n - 1$ pravimo danes Mersennova praštevila – o njih bo govora v eni naslednjih številok Preseka), je leta 1867 našel Landry. Njegovo praštevilu je v resnici praštevilski delitelj števila $2^{59} - 1$ in znaša $(2^{59} - 1)/179951 = 3203431780337$. Do prave revolucije pri iskanju velikih praštevil je prišlo

¹ Eratosten (276–194 pr. n. št.). Rojen je bil v današnji Libiji, nekaj časa je deloval v Atenah, kasneje pa se je preselil v Aleksandrijo v Egiptu, kjer je bil med drugim imenovan za vodjo znamenite aleksandrijske knjižnice. Tam je tudi umrl.

² Pietro Cataldi (1548–1626). Rojen je bil v Bologni. Od 17. leta dalje je poučeval matematiko v različnih krajih Italije, med drugim tudi na univerzi v Perugi. Leta 1584 se je vrnil v Bologno, kjer je poučeval matematiko in astronomijo vse do svoje smrti.

leta 1876, ko je francoski matematik Eduard Lucas³ odkril domisel in preprost kriterij, ki preverjanje, katero število oblike $2^n - 1$ je praštevilo, močno olajša. S svojo metodo je dokazal, da je 39-mestno število $2^{127} - 1$ praštevilo. Lucasov rezultat že predstavlja uvod v računalniško dobo iskanja velikih praštevil.

Danes si iskanja velikih praštevil brez pomoči računalnika ne moremo zamisliti. Po zaslugi Lucasovega testa so računalniki posebej uspešni pri iskanju velikih Mersennovih praštevil. Tako je med desetimi največjimi, do sedaj znanimi praštevili, kar sedem Mersennovih. Največja štiri so bila odkrita s pomočjo velikega internetskega iskanja Mersennovih praštevil (GIMPS – Great Internet Mersenne Prime Search), v katerega se lahko vključi vsakdo, ki ima dostop do interneta. O projektu GIMPS lahko bralci Preseka več izvejo na internetskem naslovu www.mersenne.org, kaj več o njem pa bomo napisali tudi v Preseku, brž ko bomo v uredništvu zbrali nekaj vtisov sodelujočih.

Poleg iskanja velikih praštevil je zelo zanimivo in težko iskanje t.i. praštevilskih dvojčkov. Pravimo, da praštevili p in q tvorita praštevilski dvojček, če se po absolutni vrednosti razlikujeta za natanko 2. Tako so praštevilski dvojčki: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), itd. Tako kot za Mersennova praštevila tudi za praštevilске dvojčke še vedno ni znano, ali jih je neskončno mnogo ali ne. To vprašanje sodi med najznamenitejše in najstarejše odprte probleme s področja teorije števil.

Za konec si oglejmo še tabeli šestih največjih, do sedaj znanih, praštevil in praštevilskih dvojčkov.

praštevilo	št. mest	odkritelji	letnica odkritja
$2^{6972593} - 1$	2098960	GIMPS	1999
$2^{3021377} - 1$	909526	GIMPS	1998
$2^{2976221} - 1$	895932	GIMPS	1997
$2^{1398269} - 1$	420921	GIMPS	1996
$2^{1257787} - 1$	378632	Slowinski, Gage	1996
$48594^{65536} + 1$	307140	Scott, Gallot	2000

Tabela šestih največjih praštevil

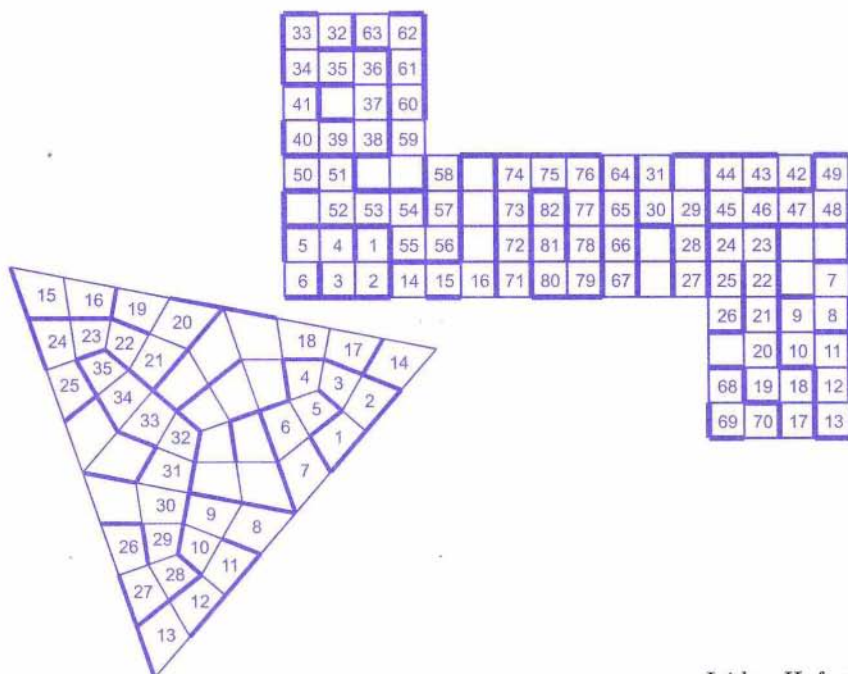
³ Eduard Lucas (1842–1891). Rojen je bil v Amiensu v Franciji. Med francosko-prusko vojno (1870–1871) je služil v francoski vojski kot topniški častnik. Po francoskem porazu se je zaposlil kot profesor matematike na enem od pariških licejev. Raziskovalno je deloval predvsem na področju teorije števil. Njemu pripisujemo odkritje formule $\sqrt{5}F_n = ((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n$ za n -ti člen Fibonaccijevega zaporedja F_n .

praštevili	št. mest	odkritelji	letnica odkritja
$1807318575 \cdot 2^{98305} \pm 1$	29603	Underbakke, Carmody, Gallot	2001
$665551035 \cdot 2^{80025} \pm 1$	24099	Underbakke, Carmody, Gallot	2000
$1693965 \cdot 2^{66443} \pm 1$	20008	La Barbera, Jobling, Gallot	2000
$83475759 \cdot 2^{64955} \pm 1$	19562	Underbakke, Jobling, Gallot	2000
$4648619711505 \cdot 2^{60000} \pm 1$	18075	Indlekofer, Jarai, Wassing	2000
$2409110779845 \cdot 2^{60000} \pm 1$	18075	Indlekofer, Jarai, Wassing	2000
$2230907354445 \cdot 2^{48000} \pm 1$	14462	Indlekofer, Jarai, Wassing	1999

Tabela šestih največjih praštevilskih dvojčkov

Primož Potočnik

LABIRINTI NA POLIEDRIH, 2. del – Rešitev s str. 259



Izidor Hafner

KRIŽANKA “ZA ČISTO OKOLJE”

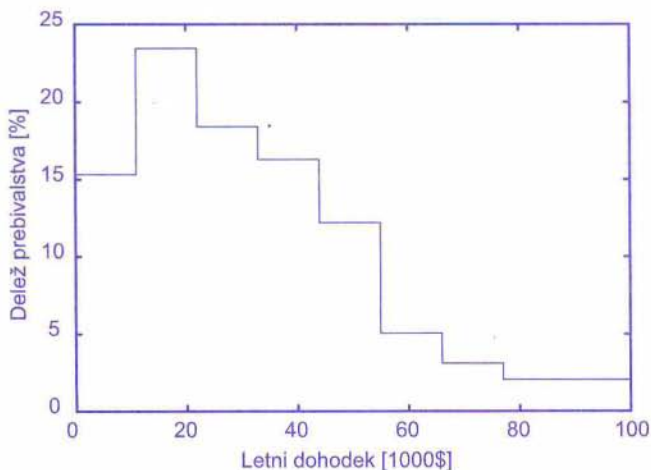
VZHODNI DEL HABSBURŠKE MONARHIJE	STRUPENO SREDSTVO PROTI ZMRZOVANJU	POKOJNI AMER. REŽISER (JOSHUA)	JANEZ BROJAN	AVSTRAL. PLAJALEC THORPE	EGIPT. KRALJICA CEZARJEVA LJUBICA	ONOSTRAN- STVO	NARAVNA TEKOČINA, KI JE VSE BOLJ ONE- SNAŽENA	IME NEKDANJE ROMUNSKÉ TEKACICE MELINTE	VISOKA PLANOTA IZ OD SARAJEVA	OL RE
PLIN, KI POVZROČA UČINEK TOPLE GREDE										
ZVIŠEVANJE TEMPE- RATURE OZRAČJA										
OSLOV/ GLAS			REDKA TEŽKA KOVINA (Nd)							VOZ LET
NEKDANJI GLASBENI SLOG, IZVIRAJOČ IZ JAMAIKE			NEKDANJI ANGLEŠKI TEKAC (SEBASTIAN)	SL. RADIO- TEHNIK (MARJ)						ME V OF TOW GOOD
OSNOVNI NACRT, ZASNOVA				VULKAN NA SICILIJ			IZOBČENJE IZ CERKVE SL. PSIHO- LOGINJA (MIRJANA)			
ALUMINIJ			LUKA NA HOKAIDU					NEKDANJI OBRAMBNI MINISTER (JELKO)		
			KEMIČNO PRALNO SREDSTVO					LANI UMRLI SLOVENSKI TV NOVINAR (MILE)		
NAPRAVA ZA PROJICIRANJE NEPROZORNIH SLIK		ZOBNI GLAS						VEČJA ČASA ZA TOČENO PIVO		
		KEMIČNI KMETIJSKI STRUP								
NIZOZ. MESTO S TOVARNO TOMOS			BIOLOG IN POTAPLJAJČ HODALČ					ŽENA ALEK- SANDRA VELIKEGA SLIKAR KLEMENČIČ		
			PRITOK LENE							
ZADNJI DEL STOPIALA ALI ČEVLAJA				ALP. NISTIČNI ODESEK			PLAČILNO SREDSTVO AM. (GRALEC (LEE))			
PRITOK DRAVE PRI LJENJU V AVSTRIJ				UMAZAN ZRAK NAD INDUSTRIJSKIMI MESTI						PLI HLAD NAPR IN PR
				LUKNIČASTA KOST NAD NOSOM						
STAR IZRAZ ZA MED				FILMSKA ZVEZDA RASTLINSKI DIHALNI ORGAN					MEHKA TKANINA ZA RUJHE BROM	
GLAVNO MESTO RUANDE						KOSTI, KI OKLEPAJO PRISNI KOS				
						IGRALEC WALLACH				
DOLGOČTEV VREDNOSTI								KRAJ OB VIRAVI NA GORIŠKEM CELJE		
NOŽICA PRI CIPU			POZIV ČLANOM, DA SE SESTANEJO						PLIN, KI VPLIVA UV SEVANJE IN GA JE VSE MANJ	
SEŠTAVIL MARKO BOKALIČ	DRAGO TRŠAR		FRANCOSKI FILOZOF (HIPPOLYTE)						KUHINJSKA NAPRAVA ZA ODVOJ SOPARE	

GA MS	KRATKO ZENSKO OGRIJALO	TEŽKA KOVINA V IZPUŠNIH PLINIH	400 km DOLG PRITOK DONAVE V ROMUNIJI	TLA V MORJU			ŠTEFKA KUČAN	OSREDNJA LJUBLJAN- SKA V ZALOGU, KI NE DELUJE	ANGLEŠKI (GRALEC IN PISATELJ (PETER)	SLOV. SOCIOLOG (ANDREJ)	MOZOLJ
					JOŽE TOPORIŠIČ	NARAVOPR- STVENIK					
							PLIN, KI OMOGOČA ŽVLJENJE				
							EVIN MOŽ				
NICA ALA								NIJVA PO ŽETVI			
								KOPNO, KI ŠTRI V MORJE			
STO- HU S VRNO YEAR	NOBELJ			GENERALNI SEKRETAR ZN (KOFI)	MOČNEJŠA ODROGNA						
	ŽIVALSKA NOŽICA										
					GLAVNI IGRALEC V "PORNO FILMU" (MATJAŽ)					VSAKRŠNO KEMICNO SREDSTVO	SKLA- DATELJ HAČA- TURJAN
					OLIVER MLAKAR			NAJVEČJA JE SKOFJA			
					NATRIJ			TUR. MESTO OB IZLIVU MARICE			
	KITAJSKA DINASTIJA						ALBAN. DIK- TATOR HOXHA				
	GOZDNA ŽIVAL						IT. PISAT. (UMBERTO)				
						NITI PRA- STVILO NITI SES- TAVLJENO STVILO			MAROKO		
									TANKA MREŽASTA TKANINA		
			TV NAPRAVA NA STREHI	AFRIŠKA ZVER Z GRIVO	STOTINA FRANKA						
					IME NAJBOLJŠE SLOV. KEGLJAVKE KARDINAR						
4 V ILNIH AJAH SILIH	OSEBA IZ MAHAB- HARATE IT. TENOR (MARIO)				OKRAŠ IZ KAMENKOV						MINISTER ZA OKOLJE IN PROSTOR (JANEZ)
					DREVO Z LISTI ZA ZACIMBO						
							REDEK IZRAZ ZA JOK				
							RUDAR V ZASAVSKEM OKOLJU				
	TUR										
	PREŠERNOV PRIJATELJ (MATIJA)						KRANJ		LIDIJA OSTERIC		
									ŽIVILSKI IZDELEK IZ MLEKA		
				2. OSEBA MNOŽINE			UTRJEN PAS ZEMLJIŠČA				
							TUZLA				
				USMRČENA ŽENA RIMSKEGA CESARJA NERONA							
				NEVAREN SERIJSKI MORILEC (JACK)							

ZMAGOVALEC DOBI (SKORAJ) VSE

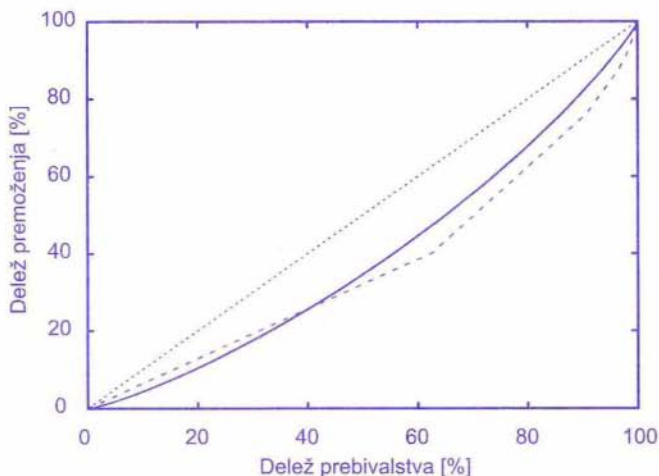
Pred kratkim mi je znanec, ki študira na ugledni univerzi onstran velike luže, dejal, da je sicer res, da v mogočni državi, kjer se univerza nahaja, lahko vsakdo postane milijonar, da pa moraš vsak dolar, za katerega si premožnejši, tako rekoč ukrasti nekomu drugemu. To me je spomnilo na staro ekonomsko resnico, katere oče je Michel de Montaigne in ki jo J. K. Galbraith, znani harvardski profesor in popularizator ekonomske znanosti, v svoji knjigi "Almost Everyone's Economics" podaja kot "Every gain (profit) is someone else's loss". Če pozabimo na naraščanje skupnega bogastva nekega naroda, je vse ostalo, kar v ekonomiji poteka, pravzaprav le prerazporejanje. Predpostavka, da je ekonomija igra z ničelno vsoto, je seveda močno pomanjkljiva, kot bomo videli, pa lahko s takim modelom kljub vsemu poustvarimo razmere v porazdelitvi premoženja in dohodka, kakršne nam dajo ekonometrične meritve.

Posledica prerazporejanja v ekonomiji so namreč neenakosti med člani družbe. Ekonomisti prikažejo porazdelitev premoženja ali dohodkov tako, da zberejo prebivalce v nekaj razredov in narišejo histogram, kakršnega vidimo na sliki 1. Ta prikazuje podatke o letnem dohodku na prebivalca za prebivalstvo ZDA za leto 1985. Povzeli smo jih po znanem učbeniku ekonomije profesorja Samuelsona z univerze MIT, Nobelovega nagrajenca za ekonomijo.



Slika 1. Histogram s podatki o letnem dohodku na prebivalca za prebivalstvo ZDA (v tisočih dolarjev). Povzeto po učbeniku ekonomije Samuelsona in Nordhausa.

Tak histogram lahko pretvorimo tudi v krivuljo, ki jo ekonomisti imenujejo Lorenzova in pri kateri nanašamo na absciso kumulativni delež prebivalstva, na ordinato pa ustrezni kumulativni delež premoženja ali dohodka (oboje v odstotkih). Primer takih krivulj vidimo na sliki 2. Na abscisni osi Lorenzove krivulje je prebivalstvo razporejeno, od tistih z najnižjimi proti tistim z višjimi dohodki. Če v družbi vlada popolna enakost, je Lorenzova krivulja premica (pikčasta krivulja na sliki 2), sicer pa se usloči navzdol, saj ima majhen del prebivalstva v lasti velik del bogastva. Bolj ko je krivulja usločena, bolj razslojena je družba. Tako nekoliko zlomljena črtkana krivulja na sliki 2 ustreza podatkom o davčnih zavezancih za Slovenijo za leto 1999, kot nam jih je posredovala Davčna uprava Republike Slovenije. Podatki so nekoliko skopi (le šest davčnih razredov) in verjetno ne ustrezajo povsem dejanskim premoženjskim razmeram v družbi, saj je daleč največ zavezancev pristalo v najnižjem davčnem razredu.



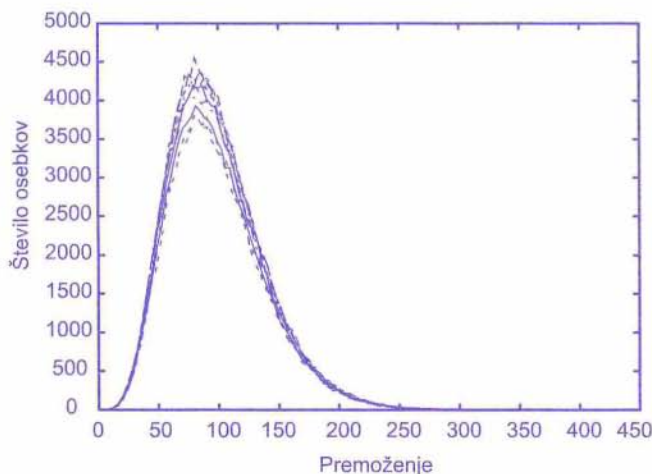
Slika 2. Lorenzova krivulja dobljena s simulacijo. Na absciso je nanešen kumulativni delež prebivalstva, na ordinato pa ustrezni kumulativni delež premoženja (oboje v odstotkih). S pikčasto črto je prikazana Lorenzova krivulja za povsem enakomerno porazdelitev premoženja v družbi, s črtkano pa krivulja ki ustreza podatkom Davčne uprave Republike Slovenije za dohodninske zavezance za leto 1999.

Zanimalo nas je, ali morda lahko najdemo preprost mehanizem, ki bi tako porazdelitev pojasnil in ki bi temeljil na prerazporejanju premoženja v družbi. Tako smo predpostavili, da vsi osebki v populaciji prično z enakim premoženjem in ga nato skušajo odvzeti ostalim. Poskus prilagajanja premoženja vedno poteka med dvema naključno izbranimi osebkoma, pri

čemer osebkoma izberemo neodvisno in ima vsak osebek enako verjetnost biti izbran. Prvi osebek odvzame drugemu del njegovega premoženja, ki se slučajno spreminja med nič in npr. dvajset odstotki trenutnega premoženja izgubarja. V teh mejah izberemo vsak odstotek odvzetega premoženja z enako verjetnostjo in neodvisno od izbire obeh osebkov. O tem, kateri osebek je 'prvi', kateri 'drugi' in koliko premoženja bo prvi odvzel drugemu, torej odloča slučaj.

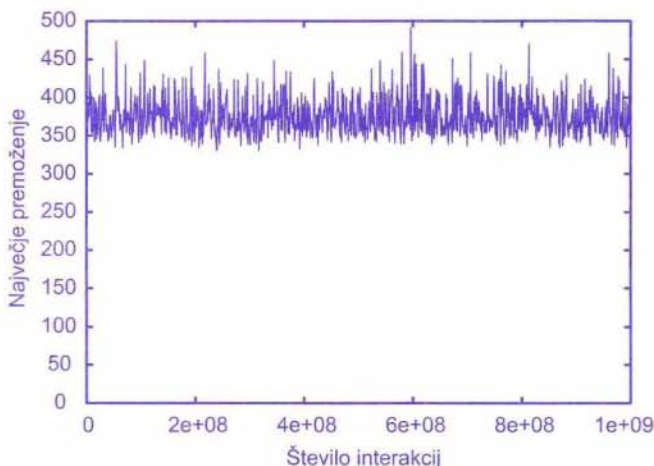
Za tak ekonomski model lahko zapišemo enačbe, ki povedo, kako se porazdelitev premoženja med osebki spreminja z naraščajočim številom interakcij. Pri posebno lepih robnih in začetnih pogojih najdemo tudi analitične rešitve prirejenih enačb. Za splošnejšo obravnavo pa se raje zatečemo k računalniški simulaciji, ki jo brez težav prelijemo v program.

Tako simulacijo smo pognali s sto tisoč osebki, od katerih je vsak na začetku razpolagal s 100 enotami premoženja. Na sliki 3 vidimo porazdelitev premoženja po sto milijonih, dvesto milijonih, tristo milijonih itd. poskusov prilaščanja med osebki. Hitro se vzpostavi stacionarna porazdelitev, ki nekoliko opleta okrog svoje srednje vrednosti. Kvalitativno se dobro ujema s histogramom na sliki 1 in je močno nesimetrična ter ima rep, ki se vleče proti visokim dohodkom. Lorenzova krivulja (slika 2), ki ustreza tej porazdelitvi, kaže usločenost, značilno za nekatere razvite družbe, kot so ZDA.



Slika 3. Porazdelitev po premoženju med osebki, ki nastopajo v simulaciji, po sto milijonih, dvesto milijonih, tristo milijonih itd. poskusov prilaščanja premoženja med osebki. Vsak osebek je v začetku razpolagal s 100 enotami premoženja.

Da je porazdelitev v povprečju res stacionarna, vidimo, če si ogledamo odvisnost največjega premoženja v populaciji od naraščajočega števila interakcij med osebkami (slika 4). Ta se sprva hitro povzpne na vrednost približno 370-tih enot in nato opleta okoli te srednje vrednosti. Še en "dokaz" stabilnosti sistema in postopka dobimo, če v začetku postavimo premoženja vseh osebkov razen enega na nič, izbrani srečnej pa poseduje milijon enot. Dobljene porazdelitve premoženja, Lorenzove krivulje in povprečni potek največje vrednosti premoženja se ne razlikujejo od tistih, ki jih da enakomerna začetna porazdelitev bogastva.



Slika 4. Odvisnost največjega premoženja v populaciji od naraščajočega števila interakcij med osebkami. Vsak osebek je v začetku razpolagal s 100 enotami premoženja.

Lorenzove krivulje so manj usločene za družbe z uveljavljenimi korekcijskimi socialnimi mehanizmi, kot so na primer skandinavske države. Zanimivo je, da s spreminjanjem največjega deleža premoženja, ki ga lahko sposobnejši odvzame šibkejšemu pri posamezni interakciji, zares dobimo različno nesimetrične porazdelitve bogastva in ustrezno različno usločene Lorenzove krivulje ter seveda različne povprečne in največje vrednosti premoženja.

Če sedaj odpravimo omejitev, da je vsota premoženja v ekonomiji konstantna, se sicer spremenijo največje, najmanjše in povprečne vrednosti premoženja, toda stopnja neenakosti v družbi ostane enaka. Tako lahko

ob vsakem poskusu odvzema premoženja med dvema osebkoma enega od njiju ali pa nekoga tretjega nagradimo s povečanjem premoženja za določen odstotek. Ekonomija kot celota raste, toda razmerja med osebkoma se ne porušijo in Lorenzove krivulje ohranijo obliko.

Simulacija, ki smo jo predstavili, je preprost primer pristopa k reševanju problemov iz realnega sveta, ki mu pravimo matematično modeliranje. V fiziki je še posebej priljubljena njegova podzvrst, pri kateri zgradimo model iz "prvih principov" – osnovnih zakonitosti, ki veljajo za sestavne dele strukture, ki jo opazujemo, in ne za strukturo kot celoto. Zakonitosti slednje nato dobimo kot rezultat interakcij med njenimi sestavnimi deli. Te zakonitosti so lahko močno drugačne, ali celo v nasprotju s pravili, ki veljajo za gradnike. Klasičen primer takega pristopa v fiziki je kinetična teorija plinov, pri kateri med drugim izpeljemo enačbo idealnega plina iz Newtonovih zakonov gibanja.

V resnici porazdelitev osebkov po prihodku na sliki 3 spominja na Maxwelllovo porazdelitev molekul plina po hitrosti. Lahko si predstavljamo, da trku dveh molekul in prerazporeditvi njunih gibalnih količin ustreza slučajni mehanizem prilaščanja premoženja med dvema osebkoma. Tako potrebujemo za osnovni model neenakosti premoženja v družbi le sodelovanje med osebkoma in naključnost izidov njihovih srečanj. Tako kot ena izmed molekul plina nujno pristane v repu Maxwelllove porazdelitve, eden izmed osebkov našega modela pač obogati. Ali kot je dejal junak dela "Good as Gold", znanega pisatelja Josepha Hellerja, avtorja uspešnice "Kavelj 22", ko je razmišljal o tem, kdo v deželi pogumnih, ki je dom mogočnih, uspe: "All it takes is dumb luck."¹

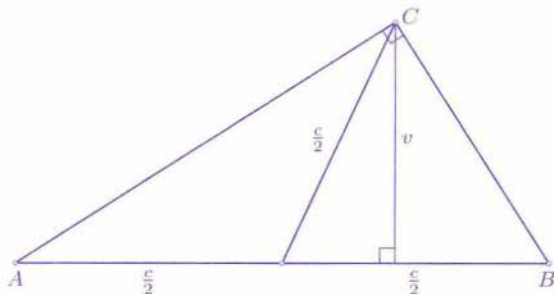
V zadnjem času je način razvoja modelov, kakršnega smo opisali, vse bolj priljubljen tudi pri raziskovanju kompleksnih sistemov v družboslovnih znanostih, kjer ga imajo nekateri sploh za edino pravo pot. Zgradili so že zahtevne simulacijske sisteme, s katerimi proučujejo različne vidike socialnega in ekonomskega vedenja, pa tudi bioloških združb, npr. mravelj. Več o tem lahko bralec najde v zanimivih poljudnih delih "Turtles, termites, and traffic jams: explorations in massively parallel microwords" avtorja Mitchela Resnicka ter "Growing artificial societies: social science from the bottom up" avtorjev Joshue Epsteina in Roberta Axtella.

Tim Vidmar, Andrej Likar

¹ Šteje samo gola sreča.

RAZMERJA DOLŽIN V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU – Rešitev s str. 263

V pravokotnem trikotniku ABC velja ocena $c \geq 2v$, pri čemer velja enačaja le v primeru, če je trikotnik tudi enakokrak (slika).



Če na obeh straneh stranskih te ocene prištejemo v , dobimo $c + v \geq 3v$ in od tod po kvadriranju (ker je $c + v > 0$ in $v > 0$)

$$c^2 + 2cv \geq 8v^2.$$

Ker je $c^2 = a^2 + b^2$ in $2p = cv = ab$, sledi $c^2 + 2cv = (a + b)^2$.

Zato je $(a + b)^2 \geq 8v^2$ oz.

$$\frac{1}{8}(a + b)^2 \geq v^2.$$

Obema stranema te neenačbe prištejemo $(a + b)^2$, upoštevamo, da je $(a + b)^2 = c^2 + 2cv$, in dobimo

$$\frac{9}{8}(a + b)^2 \geq (c + v)^2.$$

Ker je $a + b > 0$ in $c + v > 0$, sledi po korenjenju $\frac{3}{2\sqrt{2}}(a + b) \geq c + v$ oz. iskana ocena

$$\frac{c + v}{a + b} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Enačaja velja le za enakokrake trikotnike.

Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj

PTICE NA DALJNOVODU

Na eni od spletnih strani s pogostimi vprašanji iz fizike naletimo tudi na vprašanje: "Kako lahko sedijo ptice na daljnovodu, ne da bi jih elektrika poškodovala?" Odgovor se konča takole: "Če se ptica usede na daljnovod, četudi na vodnik pod napetostjo, se tok ne more skleniti [do drugega vodnika]. Zato ptice visoka napetost ne moti." Podobno zagotavljajo nekateri učbeniki fizike v poglavju o električnem toku, da bi se učenci zavedali, kako je za tok potreben sklenjen električni krog, ne samo gonilna napetost. Za ptico daljnovod ne pomeni resnične nevarnosti, če se ne zaleti vanj ali če ni tako velika, da bi se hkrati dotaknila dveh vodnikov. Vprašanje pa je, ali ptice rade sedajo na žice daljnovodov.

Opazovanja tistih, ki raziskujejo navade ptic, so kljub razširjenemu drugačnemu mnenju pokazala, da ptice ne sedajo na fazne vodnike daljnovoda. Usteti se utegnejo le na ničelni vodnik. Do pojava pride zaradi tega, ker je na daljnovod priključena izmenična napetost s frekvenco 50 s^{-1} (v Severni Ameriki je frekvenca 60 s^{-1}). Pri enosmerni napetosti prejšnji trditvi ne bi bilo kaj dodati.

Spomnimo se poskusov, pri katerih človeka izolirajo in ga povežejo z enim od obeh priključkov visokonapetostnega generatorja. Lasje se postavijo pokoncu, ko začne delovati generator. Lasje se namreč usmerijo po električnih silnicah, ki približno radialno izhajajo iz glave ali se radialno vanjo stekajo. Pri daljnovodu napetost vodnika proti drugim vodnikom ali zelo oddaljenim telesom stokrat na sekundo postane enaka nič in spremeni znak. Lasje se stokrat v sekundi poskusijo postaviti pokoncu in vrniti v začetno lego. Vendar tako hitremu nihanju ne morejo slediti, ampak se samo neznatno tresejo, zaradi česar nastane neprijeten občutek ščemenja v koreninah las ali kocin. S ptičjim peresom so nekdaj, ko še ni bilo elektroskopov in merilnikov napetosti, ugotavljali napetost in naboj. Peresa na pticah se poskušajo odzvati na spremembe električne napetosti podobno kot lasje, tako da imajo tudi ptice na faznem vodniku daljnovoda verjetno podobno neprijeten občutek.

Zaradi toka po vodniku daljnovoda nastane v njegovi okolici magnetno polje. Krožne magnetne silnice nenehno spreminjajo svojo smer in zato se inducira električna napetost. Ustrezne električne silnice so sklejene v ravninah, ki vsebujejo os vodnika. Toda v magnetnem polju, ki doseže na površju vodnika največjo efektivno vrednost nekaj tisočin tesla, je inducirana električna napetost premajhna, da bi delovala na živali.

Radialno električno polje zaradi visoke napetosti na vodniku pa doseže na površju vodnika jakost okoli deset kilovoltov na centimeter. To je dokaj veliko, saj pri 30 kV/cm nastane v zraku preboj v obliki iskre.

Električna napetost med glavo in nogami ptice požene tok, ki je odvisen od velikosti ptice in doseže efektivno vrednost nekaj desettisočin ampera. Ta tok je v glavnem posledica tega, da si lahko mislimo ptico kot kondenzator z majhno kapaciteto. V ptičjih nožicah doseže gostota toka več desettisočin ampera na kvadratni centimeter. Znano je, da tok z gostoto desettisočine ampera na kvadratni centimeter izzove draženje čutnic v koži.

Tako obstajata vsaj dva razloga, da se ptice na faznih vodnikih daljnovoda ne počutijo dobro, če je napetost dovolj visoka. Opazovanja na daljovodih so pokazala, da ptice ne sedajo na fazne vodnike, če efektivna napetost preseže 60 kV. Poskusi z ujetimi pticami v laboratoriju so dali nekoliko višje mejne napetosti, in sicer 60 kV za vrane, 75 kV za škorce in 190 kV za golobe pismonoše. To ne velja za ničelni vodnik, ki ga spoznamo po manjšem premeru in po tem, da je speljan po vrhovih daljnovodnih stebrov. To ne pomeni, da okoli ničelnega vodnika ni električnega polja. Zaradi tega, ker je ničelni vodnik ozemljen in nameščen na vrhu, pa je to polje, posebno v smeri navzgor, precej šibkejše kot okoli faznih vodnikov.

V zadnjem času veliko razpravljajo o morebitnih škodljivih učinkih električnega in magnetnega polja z zelo nizko frekvenco na živa bitja. Tukaj smo naleteli na primer, v katerem polje – v neposredni bližini vodnikov daljnovoda razmeroma nežno – vpliva na ptice. V večji razdalji od vodnikov ali pri nižji napetosti za zdaj takega učinka ni bilo mogoče nedvoumno ugotoviti.

Ob koncu naredimo še nekaj računov in ocen. Pri daljnovodih navedemo efektivno napetost, ki je kot kvadratni koren iz povprečnega kvadrata napetosti enaka s korenem iz 2 deljeni amplitudi (največji napetosti). Tako je na primer med faznim vodnikom in ničelnim vodnikom ali zemljo pogosto izmenična napetost z efektivno vrednostjo 220 kilovoltov in amplitudo $\sqrt{2} \cdot 220 \text{ kV} = 310 \text{ kV}$. Med dvema od treh faznih vodnikov pa je izmenična napetost z efektivno vrednostjo $\sqrt{3} \cdot 220 \text{ kV} = 380 \text{ kV}$ in amplitudo $\sqrt{6} \cdot 220 \text{ kV} = 540 \text{ kV}$. Daljnovod Šoštanj-Podlog pri napetosti 220 kV prenaša povprečno električno moč nekaj manj kot 1000 MW, kolikor zmore. (Nekateri drugi naši daljnovodi so narejeni za napetost 400 kV.) Na fazni vodnik odpade tretjina tega, to je od 100 do 200 MW, odvisno od obremenitve. Upoštevajmo manjši podatek. Efektivni tok dobimo, ko povprečno moč delimo z efektivno napetostjo: $100 \text{ MW} / 220 \text{ kV} = 455 \text{ A}$.

Fazni vodnik omenjenega daljnovoda ima jekleno žilo s presekom 60 mm^2 in aluminijast plašč s presekom 360 mm^2 . Jeklo nosi vodnik, aluminij z manjšim specifičnim uporom pa poskrbi za majhen upor. Zunanji premer vodnika meri $2,66 \text{ cm}$, tako da lahko računamo z radijem $r = 1,3 \text{ cm}$. Na površju vodnika je efektivna gostota magnetnega polja

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 0,015 \text{ T}.$$

Efektivno jakost električnega polja na površju vodnika ocenimo z

$$E = \frac{U}{r \ln(R/r)} = 2500 \text{ kV/m} = 25 \text{ kV/cm}.$$

Pri tem smo vzeli za razdaljo do zemlje, proti kateri merimo napetost, $R = 10 \text{ m}$. Oba podatka sta blizu ocen $0,008 \text{ T}$ in 15 kV/cm , ki ju najdemo v biološki literaturi.

Janez Strnad

KRIŽANKA "TYCHO BRAHE – 400 LET OD SMRTI" – Rešitev s str. 288

	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SK	LE	PN	IK	DA	NS	KA		
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	TO	UL	OU	SE	OS	TE	OM		
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	OR	IK	SO	BA	LE	GN			
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	OP	AZ	OV	AL	EC	PR	AGA		
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	NE	BA	EL	LA	EP	SI	LO		
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	S	O	D						
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	P	Č	I	N	J	A	I	T	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	T	R	E	N	T	A	R	L	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	R	O	S	A	N	I	C	O	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	I	S	O	S	A	J	E	I	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	O	T	M	A	R	A	L	B	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	L	I	R	Č	N	O	E	S	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	A	M	E	L	I	E	F	R	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	S	E	K	S	T	A	N	T	
SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	SEČ IN TEŽE TOLUJENJE	S	E	K	A	N	T	A		

MULTIMEDIJSKA RAZSTAVA O JURIJU VEGI

Dvaindvajsetega avgusta leta 1800 je Jurij Vega dobil dedni baronski naslov. V spomin na ta dogodek je bila lansko poletje – natanko dvesto let po podelitvi naslova – na Vegovi domačiji v Zagorici odprta stalna multimedijška razstava, ki govori predvsem o življenju in delu Jurija Vege. Postavitve razstave je omogočilo Ministrstvo za obrambo Republike Slovenije.

Razstavo so odprli: mag. Jože Jurša z ministrstva za obrambo, ki je govoril o pomenu Jurija Vege za slovensko vojsko; prof. dr. Tomaž Pisanski s prispevkom Baron Jurij Vega, slovenski matematik, in Damjan Popovič, akademski slikar ki nas je kot oblikovalec razstave popeljal po njej.



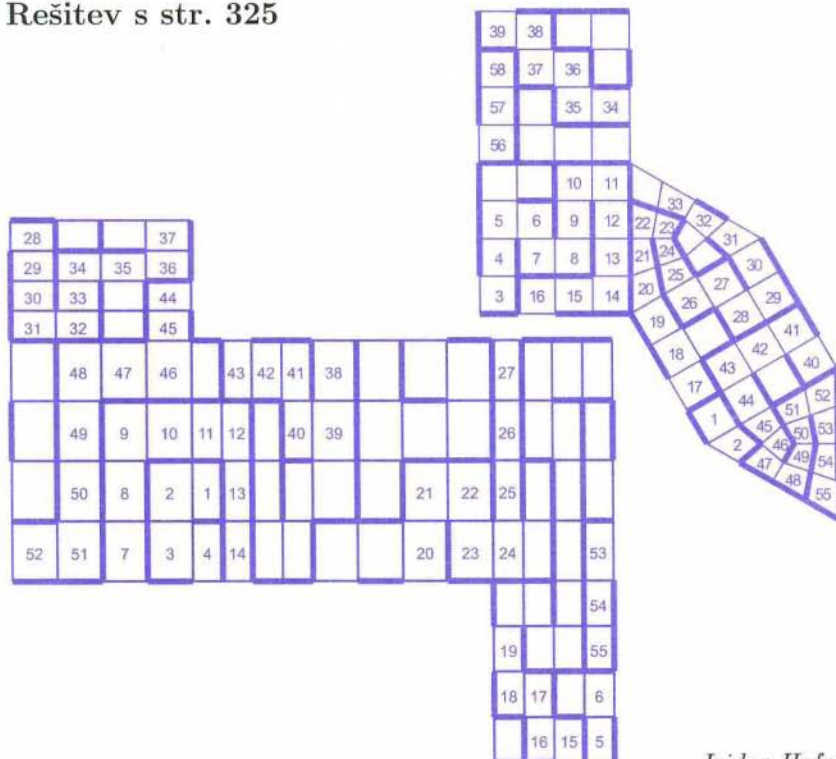
Razstava je narejena na infomatu podjetja Logina in ima nekaj posrečenih likovnih rešitev, saj so simboli za “naprej” in “nazaj” vzeti s področja, na katerem je deloval Jurij Vega. Tudi vsebina je primerno obsežna in zanimiva.

Razstavo smo si lahko ogledali v začetku februarja tudi v okviru turističnega sejma v Ljubljani.

Razstava je le eden od razlogov, zakaj vas vabim na obisk Zagorice. V zadnjem času so okolico Vegove domačije zelo olepšali; pred njo je nastal pravi majhen park. Pobočja okrog Zagorice so posebno spomladi prava paša za oči. Tudi v poletni vročini je – kot smo se prepričali na otvoritvi – tu bistveno prijetneje kot v kotlini pod njo. Zagorica je izhodišče za lepe izlete na bližnje vrhove ali sprehode po malo prometnih poteh.

Peter Legiša

LABIRINTI NA POLIEDRIH, 3. del – Rešitev s str. 325



Izidor Hafner

2001 Z ENICAMI – Rešitev s str. 263

Naloga sprašuje po najmanjšem številu enic, s katerimi lahko ob pomoči seštevanja in množenja zapišemo število 2001. Premislimo, kako poteka sestavljanje števil iz enic.

Recimo, da želimo zapisati število $n > 1$. Zapisi so dveh vrst. Število n je lahko vsota dveh manjših števil, npr. $n = i + (n - i)$. Seveda oba sumanda zapišemo z najmanjšim možnim številom enic. Število uporabljenih enic je pri takem zapisu tako enako $f(i) + f(n - i)$, smiselne izbire za i pa so od 1 do $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Druga možnost je, da število n zapišemo kot produkt dveh manjših števil, npr. $n = i \cdot \frac{n}{i}$. Pri tem uporabimo $f(i) + f(\frac{n}{i})$ enic, v poštev pa pridejo tisti i -ji, ki delijo n in niso večji od $\sqrt{n}$.

Tako smo prišli do naslednje formule, ki nam pove, kako ob znanih vrednostih $f(1), f(2), \dots, f(n - 1)$ najdemo naslednjo vrednost $f(n)$: vzeti moramo manjšo med vrednostma

$$\min \{f(i) + f(n - i) \mid 1 \leq i \leq n/2\}$$

in

$$\min \{f(i) + f(n/i) \mid i \text{ deli } n \text{ in } 1 < i \leq \sqrt{n}\}.$$

Naloga sprašuje po vrednosti $f(2001)$. Njen izračun po zgornji formuli zapišimo kot program v jeziku pascal:

```
program Zapis_z_enicami;
const
  meja = 2001;
var
  f: array [1..meja] of integer;
  n, i: integer;
begin
  f[1] := 1;
  for n := 2 to meja do begin
    f[n] := n; { n enic je zgornja meja za f(n) }
    for i := 1 to n div 2 do
      if f[i] + f[n - i] < f[n] then f[n] := f[i] + f[n - i];
    for i := 2 to trunc(sqrt(n)) do
      if (n mod i = 0) and (f[i] + f[n div i] < f[n]) then
        f[n] := f[i] + f[n div i];
    end;
    writeln('f[', meja, '] = ', f[meja]);
  end.
```

Program izpiše vrednost $f(2001) = 23$. Natančnejši pregled izračunanih vrednosti funkcije f tudi pove, da je najkrajši zapis števila 2001 v bistvu en sam, in sicer

$$2001 = 3 \cdot \overbrace{\left(1 + \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 3}_{18} \cdot \underbrace{(1 + 4 \cdot 3 \cdot 3)}_{37}\right)}^{667}.$$

Zapise z enicami dobimo tako, da v gornji enakosti štirico zapišemo kot vsoto ali kot produkt dveh dvojk, dvojke in trojke pa zamenjamo z vsoto dveh oz. treh enic. Seveda lahko zaradi komutativnosti seštevanja in množenja spreminjamo tudi vrstni red sumandov oz. faktorjev.

Martin Juvan

LAHKA ARITMETIČNA KRIŽANKA – Rešitev s str. 342

$$\begin{array}{rccccccc} & & 1 & & 1 & & 0 \\ & & & & & & \\ 5 & \times & 5 & \times & 5 & = & 125 \\ 0 & + & 25 & \times & 4 & = & 100 = 100 \\ 2 & \times & 5 & = & 10 & - & 0 \\ 50 & \times & 2 & = & 0 & + & 80 + 20 \\ 5 & = & 5 & + & 5 & - & 5 \\ 42 & = & 50 & + & 12 & - & 20 \times 1 \\ 15 & + & 20 & - & 10 & = & 25 \\ 0 & & 8 & & 0 & & \end{array}$$

Karmen Puconja

DVA SKRITA RAČUNA ZA MLAJŠE – Rešitev s str. 324

1. račun

$$999 - 22 + 7 = 984$$

2. račun

$$7777 - 555 + 11 - 0 = 7233$$

Dušan Murovec

2001... KOT POTENCA ŠTEVILA 2 – Rešitev s str. 342

Naj bo desetiški zapis števila 2^n oblike 2001... Če se v pikah skriva $k \geq 0$ števk, potem velja

$$2001 \cdot 10^k \leq 2^n < 2002 \cdot 10^k.$$

Pri gornji neenakosti lahko uporabimo dvojiški logaritem in dobimo enakovredno neenakost

$$k \cdot \log_2 10 + \log_2 2001 \leq n < k \cdot \log_2 10 + \log_2 2002.$$

Iščemo najmanjše število k , za katero bo interval, ki ga določata prvi in zadnji izraz v gornji neenakosti, vseboval naravno število (to število bo iskani n). Za boljši občutek povejmo, da je $\log_2 10 \doteq 3.32193$, $\log_2 2001 \doteq 10.96651$ in $\log_2 2002 \doteq 10.96723$. Širina intervala je torej dobrih 7 desetisočin.

Iskanja se lotimo z grobo silo. Začnemo pri $k = 0$ in k povečujemo toliko časa, dokler pripadajoči interval ne vsebuje naravnega števila (načeloma se seveda lahko zgodi, da program računa in računa, rešitve pa ne najde, saj je iskani k lahko zelo velik). Tule je program v jeziku C, ki izvede opisano iskanje:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void)
{
    const double lg10 = 1.0 / log10(2);
    const double lg2001 = log10(2001) / log10(2);
    const double lg2002 = log10(2002) / log10(2);
    int k = 0;
    double K;

    do {
        K = k * lg10;
        if (floor(K + lg2001) != floor(K + lg2002)) break;
        k++;
    } while (1);

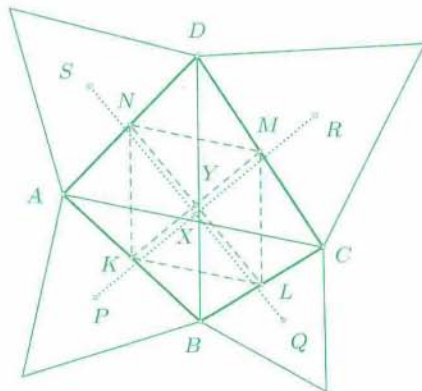
    printf("2^%g = 2001...\n", floor(K + lg2002));

    return 0;
}
```


I/3. Rešimo nalogo nekoliko splošneje. Naj za dve različni celi števili a in b velja $f(a+x) = f(a-x)$ in $f(b+x) = f(b-x)$ za vsak $x \in \mathbb{Z}$. Potem je $f(a-(b+x)) = f(a+b+x) = f(b-(a+x))$, od koder sledi $f(a-b-x) = f(b-a-x)$. Če sedaj postavimo $t = a-b-x$, izpeljemo $f(t) = f(t+2(b-a))$. Torej je funkcija f periodična s periodo $2(b-a)$. Nadalje: Naj bo funkcija f periodična s periodama p in q ; tj. $f(x+p) = f(x)$ in $f(x+q) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{Z}$. Če z $d = d(p, q)$ označimo največji skupni delitelj števil p in q , velja $d = \alpha p + \beta q$ za neki števili $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Torej je $f(x+d) = f(x+\alpha p + \beta q) = f(x+\alpha p) = f(x)$, kar pomeni, da je f periodična s periodo d .

Glede na podatke naloge za $a = 19$ in $b = 99$ sklepamo, da je f periodična s periodo $2 \cdot 80 = 2^5 \cdot 5$, za $a = 19 \cdot 99$ in $b = 99$ pa sklepamo, da je f periodična s periodo $2 \cdot 18 \cdot 99 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11$. Torej je f periodična tudi s periodo $d(2^5 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^4) = 4$, kot je bilo potrebno dokazati.

II/1. Označimo razpolovišča stranic AB , BC , CD in DE po vrsti s K , L , M in N . Potem je $KLMN$ paralelogram, in ker je $|AC| = |BD|$, je ta paralelogram celo romb. Torej je $KM \perp LN$. Označimo nadalje središča pričrtanih enakostraničnih trikotnikov s P , Q , R in S , kot kaže skica. Če dokažemo, da je $KM \parallel PR$, bo zaradi simetrije veljalo $QS \parallel LN$ in bo naloga rešena.



Računajmo

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MR} = \\
 &= \overrightarrow{KM} + \frac{1}{\sqrt{3}} e_{-\pi/2}(\overrightarrow{BK}) + \frac{1}{\sqrt{3}} e_{-\pi/2}(\overrightarrow{CM}) = \\
 &= \overrightarrow{KM} + \frac{1}{\sqrt{3}} e_{-\pi/2}(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CM}) = \\
 &= \overrightarrow{KM} + \frac{1}{\sqrt{3}} e_{-\pi/2}(\overrightarrow{LN}) = \overrightarrow{KM} + \frac{1}{\sqrt{3}} \overrightarrow{KM} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right) \overrightarrow{KM},
 \end{aligned}$$

kjer smo z $\varrho_{-\pi/2}$ označili vrtež za kot $-\pi/2$. Središče vrteža v tem primeru ni pomembno, ker smo zavrteli vektor. V računu smo upoštevali, da je $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{LN}$, kar prepuščamo bralcu v razmislek.

II/2. Označimo $a_i = \frac{1}{1+x_i}$. Potem je $x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$ in $a_1 + \dots + a_n = 1$. Za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ velja $1 - a_i = a_1 + \dots + \widehat{a_i} + \dots + a_n$, kjer $\widehat{a_i}$ označuje, da smo člen (oz. kasneje faktor) a_i izpustili. Po neenakosti med aritmetično in geometrično sredino je

$$\frac{1 - a_i}{n - 1} = \frac{a_1 + \dots + \widehat{a_i} + \dots + a_n}{n - 1} \geq \sqrt[n-1]{[n-1]a_1 a_2 \dots \widehat{a_i} \dots a_n}.$$

Ko gornje neenakosti za $i = 1, 2, \dots, n$ zmnožimo, dobimo

$$\frac{\prod_i (1 - a_i)}{(n - 1)^n} \geq \prod_i \sqrt[n-1]{[n-1]a_1 \dots \widehat{a_i} \dots a_n} = \prod_i a_i.$$

Sledi

$$x_1 \dots x_n = \prod_i \frac{1 - a_i}{a_i} \geq (n - 1)^n,$$

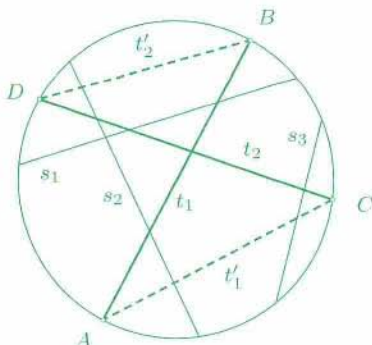
kot je bilo potrebno dokazati.

II/3. Izberimo poljubno modro tetivo t in označimo njeni krajišči z A in B . Ker je $4n$ točk izmenoma pobarvano z modro ali rdečo barvo, je na loku $\widehat{AB}$ vsaj ena rdeča točka, število modrih točk na tem loku pa je za 1 manjše od števila rdečih točk. Podobno je tudi na loku $\widehat{BA}$ vsaj ena točka rdeča, število modrih točk pa je za 1 manjše od števila rdečih točk. Tetiva t razdeli krog na dva dela in po gornjem razmisleku sta števili modrih in rdečih točk na vsakem delu različnih parnosti. Torej obstaja vsaj ena tetiva, ki seka tetivo t .

Če se nobeni dve modri tetivi ne sekata, bo po gornjem razmisleku vsako izmed n modrih tetiv sekala vsaj ena rdeča tetiva. Te tetive so različne, ker se nobene tri ne sekajo v eni točki. Naloga je v tem primeru rešena.

Vzemimo sedaj poljubni dve sekajoči se modri tetivi: $t_1 = AB$ in $t_2 = CD$. Če ti dve tetivi nadomestimo s tetivama $t'_1 = AC$ in $t'_2 = BD$, odpade eno presečišče dveh modrih tetiv. Oglejmo si, kaj se zgodi z ostalimi presečišči. Zaradi simetrije zadošča analizirati le tetive s_1 , s_2 in s_3 . Število presečišč s tetivama s_2 in s_3 se ohranja, število presečišč s

tetivo s_1 pa se zmanjša za 2. Operacija "prevezovanja" modrih tetiv nam torej **zmanjša** število presečišč po dveh modrih tetiv za vsaj eno, število presečišč po ene modre in ene rdeče tetive pa se **ne poveča**. Po končno mnogo korakov tako pridemo do položaja, ko se nobeni dve modri tetivi ne sekata. Ker je tedaj število presečišč po ene modre in ene rdeče tetive vsaj n , je bilo to število tako tudi na začetku.



Matjaž Željko

22. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST

V jesenskem krogu letošnjega 22. matematičnega tekmovanja mest so tekmovalci reševali naloge v dveh delih, lažje naloge v prvem delu in težje naloge v drugem delu.

Prva skupina (prvi del)

1. V polja 4×4 tabele je vpisano 16 števil, tako da je za vsako polje vsota števil v vseh sosednjih poljih enaka 1. (Polji sta sosednji, če imata skupno stranico.) Določi vsoto vseh števil v tabeli. (3 točke)
2. Dan je paralelogram $ABCD$. Naj bo M razpolovišče stranice CD in H pravokotna projekcija oglišča B na premico AM . Dokaži, da je trikotnik BCH enakokrak. (3 točke)
3. (a) Na tabli je napisanih sto različnih realnih števil. Dokaži, da lahko med njimi izbereš takih osem števil, da njihova aritmetična sredina ni enaka aritmetični sredini nobenih 9 števil na tabli. (2 točki)
(b) Na tabli je napisanih sto celih števil, tako da je aritmetična sredina poljubnih osem števil s table enaka aritmetični sredini devetih števil s table. Dokaži, da so vsa števila na tabli enaka. (2 točki)
4. Med 32 navidezno enakimi kovanci sta dva ponarejena kovanca, ki se od pravih kovancev razlikujeta po teži. Vsi pravi kovanci imajo enako težo. Tudi teži ponarejenih kovancev sta medsebojno enaki. Kako lahko z največ štirimi tehtanji na primerjalni tehtnici, ki pokaže le, katera izmed tež v posodicah je večja, kovance razdelimo na dva enako težka kupa? (5 točk)

Druga skupina (prvi del)

1. Trikotniku ABC je očrtana krožnica. Iz oglišča A potegnemo dva poltraka, ki sekata stranico BC v točkah K in L ter krožni lok med točkama B in C v točkah M ter N . Dokaži: Če je $KLMN$ tetivni štirikotnik, je trikotnik ABC enakokrak. (3 točke)
2. Naravna števila a, b, c, d zadoščajo neenačbi $ad - bc > 1$. Dokaži, da vsaj eno izmed števil a, b, c, d ni deljivo s številom $ad - bc$. (3 točke)
3. Dana sta petstrana (lahko poševna) prizma in kot α . V vsaki stranski ploskvi je vsaj eden izmed štirih kotov enak α . Določi vse možne vrednosti kota α . (4 točke)
4. Med n navidezno enakimi kovanci sta dva ponarejena kovanca, ki se od pravih kovancev razlikujeta po teži. Vsi pravi kovanci imajo enako težo. Tudi teži ponarejenih kovancev sta medsebojno enaki. Kako lahko z največ štirimi tehtanji na primerjalni tehtnici, ki pokaže le, katera izmed tež v posodicah je večja, kovance razdelimo na dva enako težka kupa? Nalogo reši za
 - (a) $n = 32$ in (3 točke)
 - (b) $n = 22$. (2 točki)

Oglejmo si še nekaj zanimivejših nalog iz drugega dela.

Prva skupina

1. V desni posodi primerjalne tehtnice je utež s težo 11111 g. V posodi tehtnice začnemo zapored polagati uteži. Prva utež ima težo 1 g, vsaka naslednja pa dvakrat tolikšno težo kot prejšnja. Po nekaj ponovitvah se pojavi ravnovesje. Na kateri strani tehtnice je tedaj 16 g utež? (6 točk)
2. V spomladanskem krogu so udeleženci tekmovanja mest neke države reševali šest nalog. Vsako izmed nalog je rešilo natanko 1000 tekmovalcev, vendar nobena dva tekmovalca (vzeta skupaj) nista rešila vseh šestih nalog. Kolikšno je najmanjše možno število udeležencev tekmovanja v tej državi? Določi to število in dokaži, da je res najmanjše. (7 točk)
3. Tomaž ima na razpolago 100 kart, na katerih so zapisana naravna števila od 1 do 100, karte označene s '+' in karte označene z '='. Največ koliko veljavnih enakosti lahko sestavi z danimi kartami, če lahko vsako karto z zapisanim številom uporabi le enkrat in ima dovolj kart z oznakama '+' oziroma '='? (8 točk)

Druga skupina

1. Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_n$ neničelna cela števila, ki ustrezajo enačbi

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\vdots a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}} = x,$$

za vse realne vrednosti x , pri katerih je leva stran enačbe definirana.

- (a) Dokaži, da je n sodo število. (3 točke)
 (b) Določi najmanjše tako število n , za katerega obstajajo števila $a_1, a_2, \dots, a_n$ z opisano lastnostjo. (4 točke)
2. Polja $m \times n$ tabele so pobarvana z dvema barvama. Če postavimo trdnjavo na katerokoli polje, ugotovimo, da napada manj polj, ki so pobarvana enako kot polje, na katerem trdnjava stoji, kot polj druge barve. Dokaži, da je v vsaki vrstici (oz. stolpcu) število polj ene barve enako številu polj druge barve.
- Opomba: Trdnjava napada vsa polja vrstice (oz. stolpca), v kateri (katerem) se nahaja, vključno s poljem, na katerem stoji. (6 točk)

Gregor Cigler

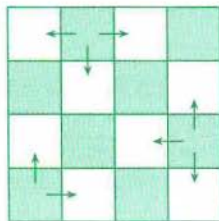
22. MEDNARODNO MATEMATIČNO

TEKMOVANJE MEST – Rešitve nalog s str. 372

Rešitve nalog prvega dela

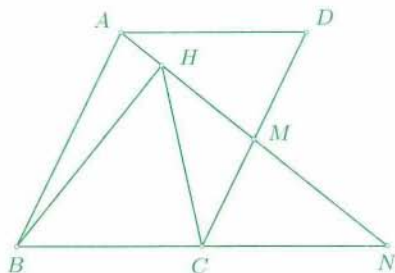
Prva skupina

1. V levem diagramu s slike vsako belo polje meji na natanko eno izmed treh črnih polj, iz katerih kažejo puščice. Od tod sledi, da je vsota števil v belih kvadratih enaka 3. Iz simetrije sledi, da je tudi vsota števil v črnih kvadratih enaka 3, kar pomeni, da je vsota vseh števil v tabeli enaka 6. Desna tabela s slike kaže, kako lahko tako razporeditev števil res dosežemo, če za števila w, y, x in z velja $w + y = x + z = 1$.



w	z	y	x
x	0	0	w
y	0	0	z
z	w	x	y

2. Označimo presečišče nosilk daljic AM in BC z N . Ker sta daljici AD in CN vzporedni, je $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MNC$. Ker je $\sphericalangle AMD = \sphericalangle NMC$ in $|MD| = |MC|$, sta trikotnika MAD in MNC skladna. Od tod dobimo $|CN| = |DA| = |CB|$. Kot $\sphericalangle BHN$ je pravi, zato točka H leži na krožnici s premerom $|BN|$ in središčem v C . Sledi $|CH| = |CB|$.



3. (a) Povprečje osmih največjih števil gotovo presega povprečje poljubno izbranih devetih števil.
 (b) Če vsa števila v tabeli povečamo ali zmanjšamo za isto vrednost, se opisana lastnost povprečnih vrednosti ne spremeni, zato lahko privzamemo, da je najmanjše izmed števil enako 0. Povprečje osmih najmanjših števil je nujno enako povprečju najmanjših devetih števil iz tabele. Od tod sledi, da je najmanjših devet števil enakih 0. Naj bo x eno izmed stotih števil iz tabele. Povprečje sedmih ničel in števila x je enako povprečju devetih števil, katerih vsoto označimo z y . Tedaj velja

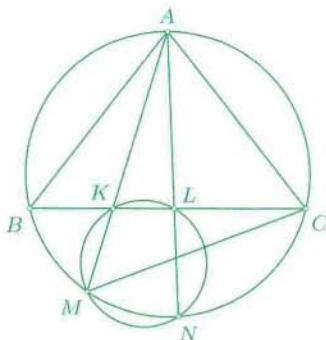
$$9x = 8y, \quad (1)$$

kar pomeni, da je število x deljivo z 8. Ker je bilo število x poljubno, so vsa števila v tabeli deljiva z 8, kar pomeni, da je tudi y deljivo z 8. Od tod iz enačbe (1) sledi, da je x deljiv z 8^2 . S ponavljanjem opisanega sklepanja pridemo do zaključka, da je poljubno število iz tabele deljivo z vsemi potencami števila 8, kar je mogoče le, če so vsa števila enaka 0.

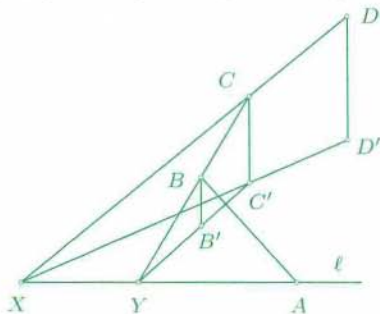
4. Dokažimo, da lahko z n tehtanji razdelimo 2^{n+1} kovancev. Označimo kovanec z binarno zapisanimi številom od 0 do $2^{n+1} - 1$, pri čemer na začetek oznake po potrebi dodajmo toliko ničel, da bo vsak kovanec označen z $n + 1$ binarnimi števki. V i -tem tehtanju na levo stran tehtnice položimo kovanec, katerih i -ta številka z leve je enaka 0, in na desno stran kovanec, katerih i -ta številka z leve je enaka 1. Če v enem izmed teh n tehtanj dosežemo ravnotežje, je naloga opravljena, sicer pa sta bila ponarejka pri vsakem izmed tehtanj na isti strani (levi ali desni) tehtnice, kar pomeni, da se ujemata na prvih n mestih binarnih oznak. Tedaj razdelimo kovanec na tiste, z zadnjo številko enako 0, in preostale. Ponarejena kovanca se gotovo razlikujeta v zadnji številki, zato sta tako dobljena kupi res enako težka.

Druga skupina

1. Ker je petkotnik $ABMNC$ koncikličen, velja $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BCM$ in $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ACM$. Če uporabimo izrek o zunanjem kotu trikotnika za trikotnik BAK , dobimo $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAM = \sphericalangle AKC$. Ker je $MKLN$ tetivni štirikotnik, velja $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ANM = \sphericalangle ACM$. Sledi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AKC - \sphericalangle BAM = \sphericalangle ACM - \sphericalangle BCM = \sphericalangle ACB$ in zato $|AB| = |AC|$.



2. Denimo, da obstajajo naravna števila w, x, y ter z , za katera je $a = w(ad - bc)$, $b = x(ad - bc)$, $c = y(ad - bc)$ in $d = z(ad - bc)$. Tedaj je $ad - bc = (wz - xy)(ad - bc)^2$. Od tod sledi, da je $(wz - xy)(ad - bc) = 1$, kar pomeni, da je $ad - bc = \pm 1$. Protislovje!
3. Postavimo prizmo tako, da so njeni stranski robovi navpični in naj bo $ABCDE$ njena gornja osnovna ploskev. Če je kaka stranica petkotnika $ABCDE$ vodoravna, je stranska ploskev, ki vsebuje to stranico, pravokotnik in je tedaj iskani kot enak 90° , vse stranske ploskve pa so pravokotniki. Predpostavimo, da nobena stranska ploskev ni pravokotnik, kar pomeni, da nobena stranica petkotnika $ABCDE$ ni vodoravna. Naj bo Π vodoravna ravnina, ki vsebuje najnižje izmed oglišč petkotnika $ABCDE$. Lahko privzamemo, da je to oglišče A . Iz oglišča A lahko vzdolž obsega petkotnika $ABCDE$ pridemo do najvišjega oglišča po dveh dvigajočih se poteh. Vsaj ena izmed poti vsebuje vsaj dve izmed preostalih treh oglišč (poleg A in najvišjega). Predpostavimo lahko, da je D višje od C , in to višje od B . Projekcije točk B, C in D na ravnino Π označimo zapored z B', C' in D' . Naj bo l premica, vzdolž katere se sekata ravnina Π in ravnina petkotnika $ABCDE$. Premica l vsebuje A . Ker sta daljci CC' in DD' vzporedni, ležita nosilki daljic CD in $C'D'$ v isti ravnini in se sekata v neki točki X na premici l .



Podobno ugotovimo, da imata tudi nosilki daljic CB in $C'B'$ skupno točko $Y \in l$. Ker imajo vse stranske ploskve enak ostri kot, velja $\alpha = \sphericalangle ABB' = \sphericalangle BCC' = \sphericalangle CDD'$. Velja še $\alpha = \sphericalangle YBB' = \sphericalangle XCC'$. Od tod sledi, da sta trikotnika ABB' in YBB' skladna. Prav tako ugotovimo, da sta skladna trikotnika YCC' in XCC' , zato je $BA = BY$ in $CX = CY$. Od tod sledi, da je $\sphericalangle BAY = \sphericalangle BYA$ in $\sphericalangle CYX = \sphericalangle CXY$. Kota $\sphericalangle BYA$ in $\sphericalangle CYX$ sta tedaj ostra, zato njuna vsota ni iztegnjeni kot. Protislovje! Dokazali smo, da je edina možna vrednost $\alpha = 90^\circ$.

4. (a) Glej rešitev 4. naloge za prvo skupino.
- (b) Dokažimo, da lahko za vsako število N , $2^{n-1} < N < 2^n$, nalogo za $2N$ kovancev rešimo z n tehtanji. Kovance razdelimo na dve skupini po $N - 2^{n-1}$ kovancev in dve skupini po 2^{n-1} kovancev. Primerjamo teži manjših skupin in zatem še teži večjih skupin. Če se v obeh primerih pojavi ravnovesje, je naloga rešena. Če dobimo v obeh primerih neravnovesje, združimo lažjo skupino z manj kovanci s težjo skupino z več kovanci ter preostanek kovancev in dobimo enako težka kupa. Denimo, da se je ravnovesje pojavilo le ob tehtanju manjših skupin. Tedaj sta oba ponaredka v večjih skupinah, torej v množici z 2^n kovanci. Po točki (a) potrebujemo za ustrezno razdelitev kovancev kvečjemu še $n - 2$ tehtanj. Skupno torej največ n tehtanj. Če se je ravnovesje pojavilo le ob tehtanju večjih skupin, so vsi kovanci iz večjih skupin pravi. Tedaj k manjšima skupinama dodamo toliko pravih kovancev, da dobimo dve skupini po 2^{n-1} kovancev, in kot prej potrebujemo kvečjemu še $n - 2$ tehtanj, da kovance razdelimo.

Rešitve nalog drugega dela

Prva skupina

1. Ker je $1 + 2 + \dots + 2^{12} = 2^{13} - 1 = 8191 < 11111$, ravnovesje ne more nastopiti, preden na tehtnico ne položimo uteži z maso 8192 g. Ko to storimo, je skupna masa vseh uteži na tehtnici enaka $8191 \text{ g} + 8192 \text{ g} + 11111 \text{ g} = 27494 \text{ g}$. Če je tedaj doseženo ravnovesje, vsaka posodica tehtnice vsebuje uteži s skupno maso 13737 g. To pomeni, da je poleg 11111 gramske uteži v levi posodici še $13737 - 11111 = 2636$ gramov uteži. Iz dvojiškega zapisa dobimo, da je $2636 = 2^{11} + 2^9 + 2^5 + 2^3 + 2^2$, kar predstavlja tudi edini način, kako iz predpisanih uteži sestaviti to maso. Od tod sledi, da je 16 gramska utež na desni strani. Če ravnovesje ni bilo doseženo, ko smo na tehtnico položili utež z maso 8192 g, v naslednjem koraku na tehtnico položimo utež z maso 16384 g. Denimo, da smo dosegli ravnovesje. Če utež z maso

16384 g vzamemo s tehtnice in utež z maso 8192 g prenesemo na drugo stran tehtnice, dobimo enak primer kot prej, zato je 16 gramška utež spet na desni strani. Ne glede na to, koliko uteži smo položili na tehtnico, preden smo dosegli ravnovesje, lahko to število zmanjšamo za eno, če najtežjo utež (predpostavimo seveda, da je težja od 8192 g) odstranimo in prestavimo iz ene v drugo posodico tehtnice utež, ki ima drugo največjo maso. S tem lahko razporeditev privedemo na začetni primer, kar pomeni, da je 16 gramška utež vedno na desni strani.

2. Ker nobena dva tekmovalca skupaj nista rešila vseh šestih nalog, je vsak tekmovalec rešil kvečjemu štiri naloge. Denimo, da je neki tekmovalec rešil štiri naloge. Potem noben drug tekmovalec ni rešil preostalih dveh nalog. Vsako izmed teh nalog je rešilo 1000 tekmovalcev, kar pomeni, da je nastopil vsaj 2001 tekmovalec. Recimo, da ni nihče rešil več kot treh nalog. Komisija je prejela natanko $6 \cdot 1000 = 6000$ pravičnih rešitev, zato je najmanjše možno število tekmovalcev enako $6000/3 = 2000$. Pokažimo, da je to res mogoče. Razdelimo 2000 tekmovalcev v deset skupin po 200 tekmovalcev. Vsi tekmovalci iz ene skupine so rešili iste tri naloge, katerih razporeditev po skupinah podaja naslednjih deset trojic: (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 1), (5, 1, 2), (1, 3, 6), (3, 5, 6), (5, 2, 6), (2, 4, 6) in (4, 1, 6). Lahko se je prepričati, da ta struktura ustreza danim zahtevam, zato je najmanjše možno število tekmovalcev enako 2000.
3. Vsaka enačba vsebuje vsaj tri števila, zato je največje možno število enačb kvečjemu 33. Naslednji nabor enačb nam pokaže, da to mejo lahko dosežemo. Števila 24 pri tem ne uporabimo.

$$1 + 97 = 98 \quad 3 + 96 = 99 \quad 2 + 43 = 45 \quad 4 + 46 = 50$$

$$5 + 89 = 94 \quad 7 + 88 = 95 \quad 6 + 47 = 53 \quad 12 + 42 = 54$$

$$9 + 81 = 90 \quad 11 + 80 = 91 \quad 10 + 51 = 61 \quad 20 + 38 = 58$$

$$13 + 73 = 86 \quad 15 + 72 = 87 \quad 14 + 55 = 69 \quad 28 + 34 = 62$$

$$17 + 65 = 82 \quad 19 + 64 = 83 \quad 18 + 59 = 77 \quad 36 + 30 = 66$$

$$21 + 57 = 78 \quad 23 + 56 = 79 \quad 22 + 63 = 85 \quad 8 + 44 = 52$$

$$25 + 49 = 74 \quad 27 + 48 = 75 \quad 26 + 67 = 93 \quad 16 + 84 = 100$$

$$29 + 41 = 70 \quad 31 + 40 = 71 \quad 33 + 35 = 68 \quad 32 + 60 = 92$$

$$37 + 39 = 76$$

Druga skupina

1. (a) Ulomku $\frac{px+q}{sx+t}$ priredimo izraz $pt - qs$, ki ga imenujemo determinanta. Iz računa

$$a + \left(\frac{px+q}{sx+t} \right)^{-1} = a + \frac{sx+t}{px+q} = \frac{(ap+s)x + (aq+t)}{sx+t}$$

ugotovimo, da je determinata izraza $a + \left(\frac{px+q}{sx+t} \right)^{-1}$ enaka $qs - pt$. Ker je determinata izraza x enaka 1, je determinanta verižnega ulomka

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\vdots a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}$$

enaka $(-1)^n$, od koder sledi, da mora biti število n res sodo.

(b) Hitro se prepričamo, da za $n = 2$ pogoju ne moremo ustreči. Naslednji primer pokaže, da tak zapis obstaja za $n = 4$:

$$2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-1 + \frac{1}{x}}}} = x.$$

2. Vrstico imenujmo črna (oz. bela), če vsebuje več črnih (oz. belih) polj. Analogno opisujemo stolpce. Denimo, da v dani tabeli obstaja črna vrstica. Tedaj je vsak stolpec, ki vsebuje kako črno polje te vrstice, bel, kar pomeni, da je v tabeli več belih stolpcev. Sledi, da v tabeli ni belih vrstic (sicer bi kot prej sklepali, da je v tabeli več črnih stolpcev). V tabeli torej obstaja bel stolpec, od koder kot prej (v sklepanju pač zamenjamo vrstice in stolpce) ugotovimo, da ni črnih stolpcev. Če bela polja preštejemo 'po stolpcih' ugotovimo, da jih je v tabeli več kot črnih. Po drugi strani pa iz štetja črnih polj 'po vrsticah' ugotovimo, da je več črnih polj. Protislovje!

Gregor Cigler

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje — 28. letnik, leto 2000/2001, številke 1–6, strani 1–384

MATEMATIKA

Geometrijski razrezi (Marija Vencelj)	6-9
O najmanjšem številu s predpisanim številom deliteljev (Jože Grasselli)	34-41
Zvezdni poliedri (Vilko Domajnko)	68-73
Male skrivnosti enakostraničnega trikotnika (Marija Vencelj)	82-85
Hipokratove lune (Milan Hladnik)	98-104
O perfektnih (popolnih) kvadrh (Ivan Vidav)	140-147
Površine in prostornine pravih poliedrov (Marko Razpet)	212-220
Möbius-Kantorjeva konfiguracija v politiki (Dragan Marušič in Tomaž Pisanski)	264-268
Delitev prostora z n ravninami in z n oblami – odgovor na vprašanje s str. 194 in 195 (Marija Vencelj)	280-285
Sestavimo 'četverec' iz enakih krogel (Nada Razpet)	290-294
Preprosta razmišljanja o četrti dimenziji (Marija Vencelj)	326-331

FIZIKA

Polprevodniška slikovna naprava (Janez Strnad)	10-17
Luminescenca (Zoran Arsov)	74-80
Plavanje z valovi (Andrej Likar)	92-95
Proti toku (Janez Strnad)	136-139
Toplotni izmenjevalci (Andrej Likar)	156-159
Zgodba iz Gane (Jože Pahor)	196-199
Sto let radia (Janez Strnad)	226-233
Kako je radio dobil glas (Janez Strnad)	272-279
Učinek tople grede in vroče poletje (Tomaž Vrhovec)	332-340
Ptice na daljnovodu (Janez Strnad)	360-362

RAČUNALNIŠTVO

Stavek se predstavi (Tim Vidmar, Andrej Likar)	29-31
Spremenljivo število parametrov (Martin Juvan)	42-47
Trdnjave na šahovnici – reš. str. 148 (Martin Juvan)	81
Grafična podpora – reš. str. 150 (Martin Juvan)	91
2001 s kovanci – reš. str. 269 (Martin Juvan)	211
2001 z enicami – reš. str. 365 (Martin Juvan)	263
2001 ... kot potenca števila 2 – reš. str. 367 (Martin Juvan)	342
Zmagovalec dobi (skoraj) vse (Tim Vidmar, Andrej Likar)	354-358

ASTRONOMIJA

Kje vidimo več, na Zemlji ali na Luni? – reš. str. 105 (Marijan Prosen)	26-28
Mena (Marijan Prosen)	86-90
Zanimiva naloga o Jupitru in Saturnu (Marijan Prosen)	131-133
Motnje v gibanju Lune (Marijan Prosen)	206-210
Tycho Brahe (1546–1601) – Ob štiristoletnici smrti (Marijan Prosen) .	260-262
Krater Vega (Marijan Prosen)	344-347
Predlogi za raziskovanje v zvezi s kraterjem Vega (Marijan Prosen)	348

NOVICE

Bravo, slovenske mlade matematičarke in matematiki! (Iz uredništva)	25
Matematični plakat (Peter Legiša)	28
Milijon dolarjev za dokaz Goldbachove domneve (Primož Potočnik)	106-107, VI
Matematični plakat – rezultati tekmovanja (Peter Legiša)	134-135
Droben spomin na Giordana Bruna (Marijan Prosen)	152-153
41. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko)	154-155
31. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	155
31. fizikalna olimpiada: Izgubljeni v Leicestru (Andrej Košmrlj)	162-163
Najpomembnejši matematiki (Martin Juvan, Primož Potočnik)	200-205
Dirk J. Struik (1894–2000) (Martin Juvan)	286-287
Največja znana praštevila – nekoč in danes (Primož Potočnik)	349-351
Multimedijska razstava o Juriju Vegi (Peter Legiša)	363-364

REŠITVE NALOG

Številska izpolnjevanja s simetrijo – Rešitev iz XXVII, P–6, str. 322 (Marija Vencelj)	31
Elipsa, parabola in pravokotni tangenti – Rešitev iz XXVII, P–6, str. 322 (Marko Razpet)	52-54
Trinajst deliteljev – Rešitev iz XXVII, P–6, str. 322 (Marija Vencelj)	54
Rešitve nalog iz članka Hipokratove lune s str. 98 (Milan Hladnik) ...	166-169

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

Rimske številke (Mojca in Matija Lokar)	18-25
Križanka "Vrste ugank" – reš. str. 109 (Marko Bokalič)	32-33
Računanje in nogomet (Janez Strnad)	48-51
Relativnost (Andrej Likar)	67
Križanka "Estetsko delilno razmerje" – reš. str. 159 (Marko Bokalič) ...	96-97
Križanka "Pravilni poliedri" – reš. str. 234 (Marko Bokalič)	160-161
Števniki (Silva Kmetič)	194
Križanka "Ob 401. obletnici smrti pogumnega astronoma" – reš. str. 295 (Marko Bokalič)	224-225
Hitro množenje dvomestnih števil z 11 (Marija Vencelj)	271
Križanka "Tycho Brahe – 400 let od smrti" – reš. str. 362 (Marko Bokalič)	288-289
Sodobni rastlinjak v Voklem pri Kranju (Marija Vencelj)	341
Križanka "Za čisto okolje" – reš. str. 368 (Marko Bokalič)	352-353

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
28. letnik, šolsko leto 2000/2001, številka 6, strani 321–384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosen (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2000/2001 je za posamezne naročnike **2.400 SIT**, za skupinska naročila šol **2.000 SIT**, posamezna številka **480 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Založilo DMFA – založništvo
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1458

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Zunanost in notranjost sodobnega rastlinjaka vrtnarije Kozjek v Voklem pri Kranju.





Š polietilensko folijo prekrit rastlinjak na Dobenu nad Trzinom.



Cvetoč vrt v steklenem rastlinjaku v Voklem pod zasneženimi Kamniškimi Alpami.