

PRE SEK

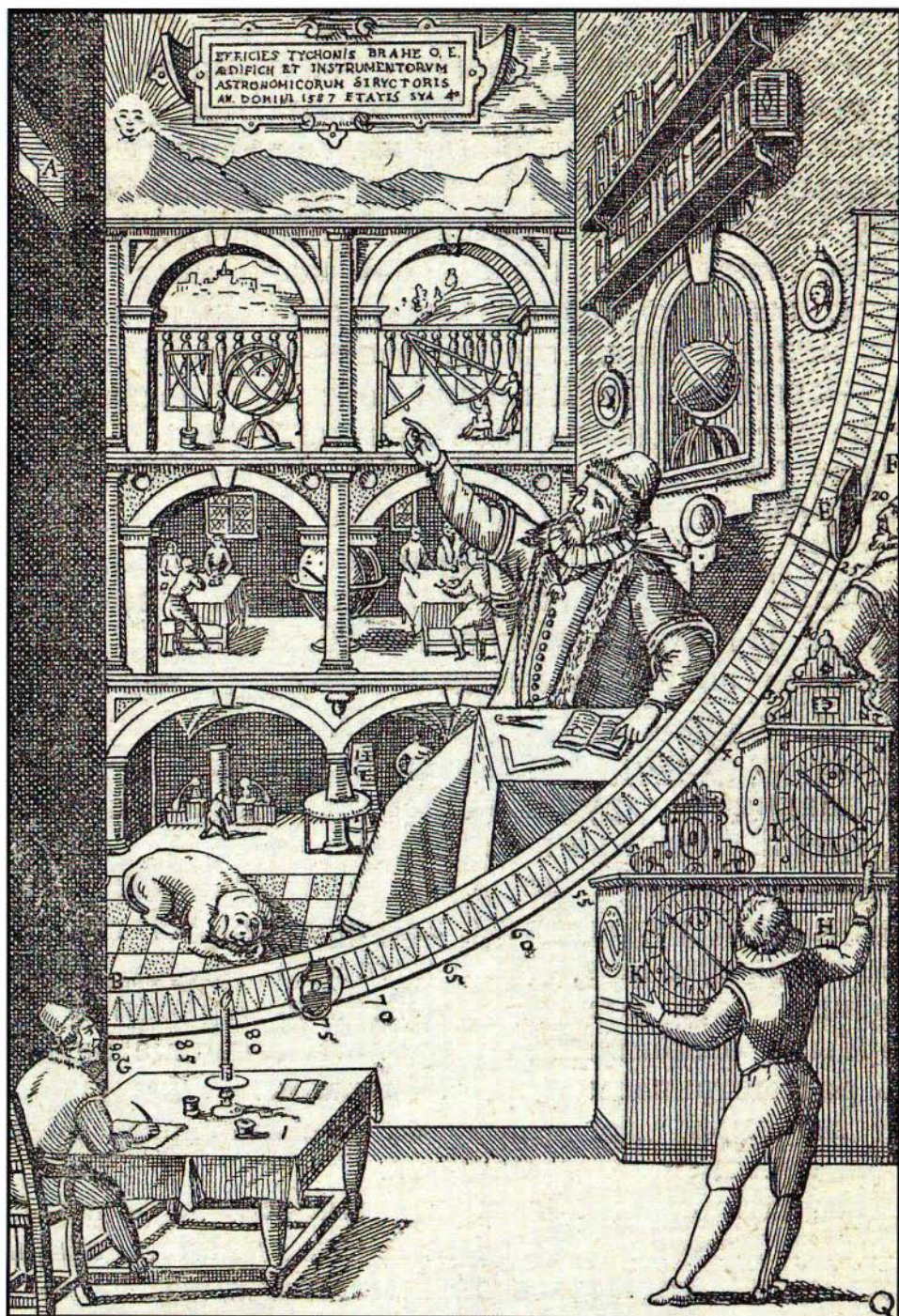
28 (2000-2001)

5



ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
28. letnik, leto 2000/2001, številka 5, strani 257–320

VSEBINA

MATEMATIKA	Möbius-Kantorjeva konfiguracija v politiki (Dragan Marušič in Tomaž Pisanski) 264-268 Delitev prostora z n ravninami in z n oblami – odgovor na vprašanji s str. 194 in 195 (Marija Vencelj) 280-285 Sestavimo 'četverec' iz enakih krogel (Nada Razpet) 290-294 Kako je radio dobil glas (Janez Strnad) 272-279
FIZIKA	Tycho Brahe (1546–1601) – Ob štiristoletnici smrti (Marian Prosen) 260-262
ASTRONOMIJA	2001 z enicami (Martin Juvan) 263 2001 s kovanci – rešitev s str. 211 (Martin Juvan) 269-271 Dirk J. Struik (1894–2000) (Martin Juvan) 286-287 Teta Amalija ljubi praštevila – nagradna naloga (Peter Petek) 258 Labirinti na poliedrih, 2. del (Izidor Hafner) 259 Razmerja dolžin v pravokotnem trikotniku (Dragoljub M. Milošević) 263
RAČUNALNIŠTVO	Četrte potence stranic v pravokotnem trikotniku – s str. 211 (Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj) 287 Zloženka – s str. 194 (Dragoljub M. Milošević) 294 Številka križanka za matematični podmladek – iz P-4, str. III (Marija Vencelj) 295 Križanka "Ob 401. obletnici smrti pogumnega astronoma" – s str. 224 (Marko Bokalič) 295
REŠITVE NALOG	Hitro množenje dvomestnih števil z 11 (Marija Vencelj) 271 Križanka "Tycho Brahe – 400 let od smrti" (Marko Bokalič) 288-289
RAZVEDRILO	36. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – rešitve s str. 235 (Aleksander Potočnik) 296-297 Državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve nalog s str. 236 (Nada Razpet) 297-304 44. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – rešitve nalog s str. 242 (Matjaž Željko) 304-309 Rešitve nalog z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1999/2000 – s str. 246 (Bojan Golli) ... 310-319 Izbirna testa za mednarodno matematično olimpiado (Matjaž Željko) 319-320
TEKMOVANJA	Tycho Brahe (1546 do 1601), danski astronom, neprekosljiv opazo- valec zvezdnega neba 16. stoletja. Dosegel je največjo natančnost, ki jo je pri opazovanju s kotomernimi inštrumenti možno doseči s prostim očesom. I Tycho Brahe pri opazovanju na stenskem kvadrantu v svojem ob- servatoriju. II Sliki k članku Sestavimo 'četverec' iz enakih krogel (str. 290). III Med znamkami, ki prikazujejo dogodke iz astronomije, najdemo tudi dansko znamko, izdano ob štiristoletnici Brahejevega odkritja supernove. IV
NA OVITKU	

NAGRADNA NALOGA

Po daljšem času v Preseku spet objavljamo nagradno nalogo. Potrudili se bomo, da bo to odslej, kolikor mogoče, naša stalna rubrika. V prvi nalogi z veseljem pozdravljamo teto Amalijo, ki se po več kakor desetih letih ponovno oglašja na Presekovih straneh.

Iz uredništva

TETA AMALIJA LJUBI PRAŠTEVILA – Nagradna naloga

Jožica, Tomaž in Polonca so pozvonili pri teti Amaliji 7. maja, na njen rojstni dan. Polonca je držala v rokah lep šopek tulipanov.

“Kar naprej, čaj sem že pristavila,” jih je povabila teta.

“Vse najboljše,” so zapeli v zboru.

“Joj, hvala za rože, tulipane imam najrajši, oranžne pa še posebej.”

“Teta, kateri rojstni dan pa pravzaprav praznuješ?” je bila radovedna Polonca.

“Dam vendar ne sprašujemo po letih,” je Polonco opomnil Tomaž.

“Saj vam tudi povedala ne bom, boste morali sami uganiti. Veste jaz nič ne dam na okrogle obletnice, ljubša so mi praštevila. To bo najbrž zato, ker je tudi moj rojstni datum sestavljen iz dveh praštevil, 7 in 5.”

“Ali imaš letos praštevilsko obletnico?” je vprašal Tomaž.

“Ne, to je bilo lani, letos je moja starost produkt dveh praštevil,” se je zasmejala Amalija.

“Poskusimo, morda imamo dovolj podatkov,” je predlagala Jožica.

“Naj vam pomagam še s podatkom, da je moja starost vsota dveh praštevil.”

Ali je pomagala tudi vam, dragi bralci? Čestitajte teti Amaliji **najkasneje do 7. maja** za (kateri?) rojstni dan na naslov:

Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana.

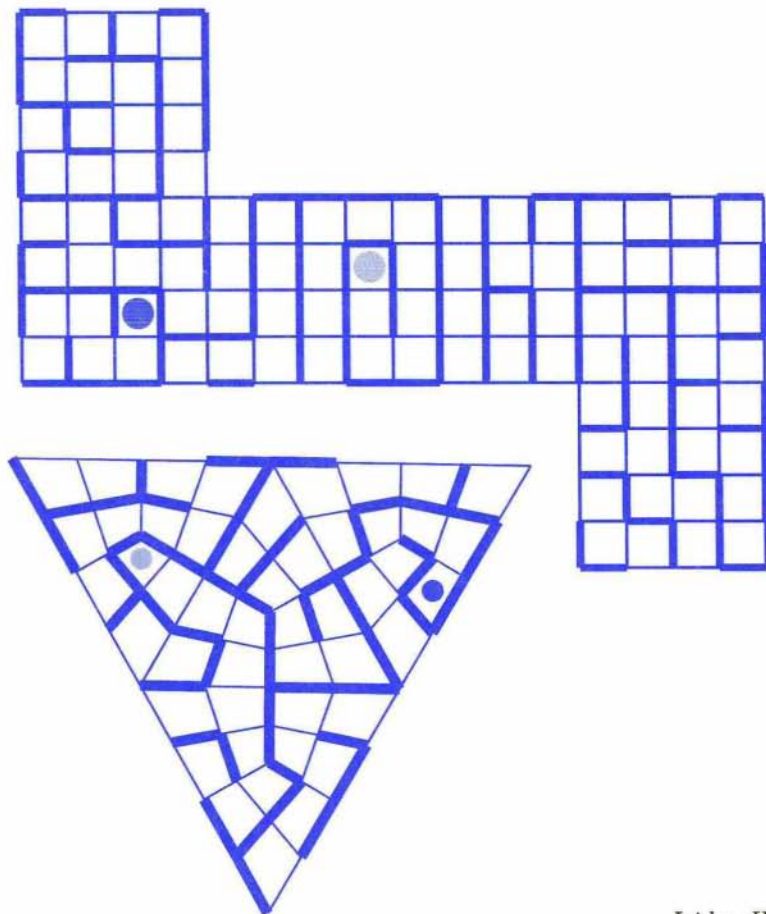
Izmed reševalcev, ki bodo ugotovili prava leta Amalije, bomo dva izžrebali in jima poslali knjižno nagrado.

Peter Petek

LABIRINTI NA POLIEDRIH, 2. del

Nekaj labirintov na poliedrih smo vam ponudili v reševanje že v prvi letošnji številki Preseka. Tokrat objavljamo štiri nove labirinte istega avtorja.

Ponovimo pravila! Povezati moramo črno in sivo točko na površju poliedra, katerega mreža je podana in katerega mejne ploskve so še dodatno razdeljene na manjše dele. Gibamo se lahko le po površju telesa, pri čemer lahko preidemo na sosednji del le, če ni na poti pregrade, ki je na sliki označena z debelo črto (op. uredništva).



Izidor Hafner

TYCHO BRAHE (1546–1601)

Ob štiristoletnici smrti

Tycho Brahe je brez dvoma eden največjih opazovalcev zvezdnega neba vseh časov. Na osnovi njegovih opazovanj je Kepler izpeljal zakone gibanja planetov, s čimer je dal astronomiji nesluten polet.

Tycho Brahe se je rodil 1546 v dvorjanski družini. Posinovil ga je stric, ki je skrbel tudi za njegov študij. S trinajstimi leti je Brahe vstopil na kopenhagensko univerzo in študiral retoriko ter filozofijo. Kmalu je ta študij opustil in se začel zanimati za astronomijo. Leta 1563 je že začel z astronomskimi opazovanji.

Leta 1573 je opazoval novo zvezdo v ozvezdju Kasiopeje in poskusil določiti njeno oddaljenost. To mu seveda ni uspelo, dokopal pa se je do spoznanja, da se zvezda v vsakem primeru nahaja dlje kot Luna. Danes vemo, da je bila ta opazovana zvezda znamenita *Supernova Kasiopeje*, ki je tedaj vzbuhnila v naši Galaksiji.

Brahe je študiral še na različnih nemških univerzah, v Augsburgu se je tako naučil umetnosti gradnje tedaj modernih astronomskih inštrumentov. Posrečilo se mu je pridobiti tudi posebno naklonjenost danskega kralja Friderika II, predvsem pa potrebni denar za astronomske stvaritve. Tako je na otoku Hven v Sundskem prelivu lahko zgradil veličasten observatorij *Uraniborg* (Uranijin dvorec ali Astronomski dvorec; Uranija – boginja astronomije).

Tycho Brahe je oskrbel observatorij z različnimi odličnimi opazovalnimi (kotomernimi) inštrumenti, med njimi so izstopali kvadranti in sekstanti, s katerimi je bilo mogoče zelo natančno meriti kote med nebesnimi telesi. Polmer največjega kvadranta je meril kar dva metra.

Brahe je v astronomsko prakso vpeljal še dodatne naprave (razne vizirje) za povečanje natančnosti usmerjanja inštrumentov na svetila in priprave za odčitke na merilnih krogih. Tako je dosegel natančnost izmerjenih leg zvezd na okoli eno kotno minuto, česar tudi pozneje pri opazovanju s prostim očesom nihče ni izboljšal.



Slika 1. Kotomerni inštrument, imenovan armilarna sfera, na Uraniborgu.

Več kot dvajset let je Tycho Brahe s svojimi sodelavci opazoval zvezde, planete, komete in seveda tudi Luno. Pri Luni je odkril spremembe (nekaž nepravilnosti) v njenem gibanju, za komete pa je dokazal, da se gibljejo dlje kot Luna. Rezultat številnih zvezdnih opazovanj je objavljen *Katalog natančnih leg 788 zvezd*. To je prav tisti katalog, ki je nemškemu astronomu Johannu Bayerju služil kot osnova za izdelavo zvezdnega atlasa *Uranometrija* (1603), v katerem so prvič v zgodovini astronomije ozvezdja sistematično prikazana v slikah z mitološkimi osebami oziroma motivi.



Slika 2. Podoba ozvezdja Andromeda iz Bayerjevega zvezdnega atlasa *Uranometrija* (1601).

Zelo zanimivo je, da Tycho Brahe ni priznaval Kopernikovega heliocentričnega sistema. Menil je, da je Zemlja v središču vesolja, da se Luna in Sonce gibljeta okrog Zemlje, planeti pa okrog Sonca (glej sliko na naslovnici, kjer je pred Brahejem narisana "njegov sistem" zgradbe vesolja).

Po kraljevi smrti (1597) je moral Brahe za vedno zapustiti Dansko. Dve leti se je potikal po Nemčiji, potem pa je skoraj z vsemi svojimi inštrumenti prišel v Prago, kjer so ga vzeli v službo dvornega astronoma. Tu se je srečal z astronomom, fizikom in matematikom Johannom Keplerjem, ki je kmalu postal njegov asistent.

Po Brahejevi smrti je Kepler podedoval ves opazovalni arhiv. Obdelava podatkov, posebno skrbnih opazovanj planeta Mars, je dala Keplerju možnost, da je odkril svoje tri znamenite zakone o gibanju planetov.

Vsa Brahejeva opazovanja so opravljena s prostim očesom. Kmalu po njegovi smrti so se razširile govorice, da so na Holandskem izumili daljnogled. Kaj vse bi dal Tycho, vrli in neumorni opazovalec zvezd, da bi vsaj enkrat pokukal skozi daljnogled in opazoval prelepo zvezdno nebo! Vse to pa je počakalo druge slavne znanstvenike. Prvi med nimi je bil Galileo Galilei. Okoli leta 1610 je namreč sam izdelal daljnogled in ga kot prvi v zgodovini znanosti uporabil pri astronomskih opazovanjih.

Ob koncu še drobna zanimivost. Tycho Brahe kot astronom ni mogel mimo matematike. V trigonometriji je znana naslednja njegova formula:

$$\cot \alpha = \frac{\frac{b}{a} - \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

Velja za poljuben ravninski trikotnik, rešuje pa tole nalogo:

Poznamo stranici a in b in kot γ , ki ga oklepata. Izračunaj kot α , ki leži nasproti stranice a .

To nalogo lahko rešujemo s kosinusnim in nato sinusnim izrekom, vendar je Brahejeva formula preprostejša. Izpeljemo jo tako, da najprej skiciramo poljubni trikotnik in označimo ustrezne stranice, kote in višine na stranice. Iz skice sledi, da je $\cot \alpha = (b - a \cdot \cos \gamma) / v_b = (b - a \cdot \cos \gamma) / a \cdot \sin \gamma$. Števec in imenovalc ulomka delimo z $a \neq 0$ in formula je izpeljana.

2001 Z ENICAMI

Nedavno sem listal po knjigi R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*. Kot pove že naslov knjige, so v njej opisani nekateri nerešeni problemi iz teorije števil. Poudarek je predvsem na problemih, ki jih je moč zastaviti s sredstvi elementarne matematike. Seveda pa to še zdaleč ne pomeni, da gre za preproste probleme.

Mojo pozornost je pritegnil naslednji problem z oznako F26 – *Expressing numbers using just ones*: Označimo z $f(n)$ najmanjše število enic, s katerimi lahko zapišemo število n , pri čemer smemo v zapisu uporabiti le seštevanje in množenje (ter oklepaje). Vrednosti funkcije f za prvih nekaj števil so zbrane v naslednji tabeli:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(n)$	1	2	3	4	5	5	6	6	6	7	8	7	8	8	8

Nekatera števila je moč z minimalnim številom enic zapisati na več različnih načinov, npr.:

$$10 = (1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = (1 + 1 + 1) \cdot (1 + 1 + 1) + 1.$$

Znano je, da velja $f(3^k) = 3k$, ena od (preprostejših) domnev pa pravi, da je $f(2^a 3^b) = 2a + 3b$. Prav tako ni znano, ali za vsako praštevilo p velja

$$f(p) = 1 + f(p - 1) \quad \text{in} \quad f(2p) = \max\{2 + f(p), 1 + f(2p - 1)\}.$$

No, gornjih domnev verjetno res ne bomo uspeli dokazati, vas pa vabim, da poskusite izračunati vrednost $f(2001)$. Delo si seveda lahko olajšate z računalnikom.

Martin Juvan

RAZMERJA DOLŽIN V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU

Dokaži, da v pravokotnem trikotniku s katetama a in b , hipotenuzo c ter višino v na hipotenuzo velja neenakost

$$\frac{c + v}{a + b} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Dragoljub M. Milošević

MÖBIUS-KANTORJEVA KONFIGURACIJA V POLITIKI

Znano je, da morajo v predvolilni tekmi v politiki veljati stroga pravila, sicer lahko pride do zlorab političnih nasprotnikov, ki poskušajo na vse načine izboljšati položaj svojega kandidata na račun tekmecev. Zato si tudi mediji prizadevajo enako pozornost namenjati vsem kandidatom. Tako včasih do sekunde natančno omejujejo čas, ki ga ima na razpolago posamezni kandidat.

Včasih pa brez znanja matematike ne gre. Oglejmo si konkretni primer, ki se je zgodil v Sloveniji pred leti, natančneje jeseni leta 1997 pred volitvami predsednika Republike Slovenije. TV se je odločila, da bo v osmih oddajah predstavila 8 kandidatov tako, da so v vsaki oddaji nastopali po trije kandidati in je vsak kandidat prišel trikrat na vrsto. Oddaje so se vrstile v dveh tednih, od ponedeljka do četrтка. S stališča gledalca in potencialnega volilca bi bilo zanimivo čimbolj pestro soočanje, tako da bi se vsak kandidat pojavil vsakič z drugimi tekmeči. V idealnih razmerah se lahko en kandidat sreča z največ šestimi tekmeči (na vsaki od treh oddaj s po dvema). Če se dva kandidata srečata dvakrat, se tako nujno zmanjša pestrost srečanj, saj se potemtakem vsak od njiju sreča največ s petimi kandidati.

Leta 1997 so bili kandidati za predsednika republike naslednji: Marjan Poljšak, Janez Podobnik, Bogomir Kovač, Milan Kučan, Tone Peršak, Franc Miklavčič, Marjan Cerar in Jože Bernik. V konkretnem primeru se voditeljem TV žal ni posrečilo najti prave rešitve, čeprav obstaja. Tako sta se npr. Janez Podobnik in Milan Kučan soočila dvakrat. Poglejmo, kaj bi morali narediti televizijci, če bi znali dovolj matematike.

Recimo, da imamo 8 kandidatov, začasno jih označimo kar takole:

$$A, B, C, D, E, F, G, H.$$

Oglejmo si vse tri pojavitve kandidata A : $AX_1X_2, AX_3X_4, AX_5X_6$. Če se noben par kandidatov ne sooči dvakrat, so kandidati $A, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ vsi različni. Manjka natančno eden, s katerim se kandidat A ne sooči. Označimo ga z A' . Seznam kandidatov lahko zdaj brez škode za splošnost preimenujemo takole: $A, B, C, D, A', B', C', D'$.

Dokažimo naslednjo trditev:

Če se soočijo kandidati XYZ , se soočijo tudi kandidati $X'Y'Z'$.

Pri tem razumemo, da je za vsakega kandidata $X'' = X$. To pomeni, da npr. trdimo, da ob soočanju ABD' pride tudi do soočanja $A'B'D$.

Takole razmišljamo za poljubno soočanje XYZ in poljubnega kandidata X te pojavitve: Iz XYZ izhaja $XY'W$ in $XZ'W'$. Če ta razmislek ponovimo za soočanje $XY'W$ in kandidata Y' , dobimo ali $(Y'X'Z$ in $Y'W'Z')$ ali $(Y'X'Z'$ in $Y'W'Z)$. Prva možnost odpade, saj bi se kandidata Z' in W' srečala dvakrat.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da se soočijo kandidati ABC . Od tod sklepamo na $AC'D$ in $AB'D'$. Pri tem bi lahko še zamenjali D in D' , vendar bi to pomenilo le drugačno poimenovanje kandidatov, na rešitev pa ne bi vplivalo. Od tod dobimo ob zgornji trditvi šest pojavitev:

$$ABC, A'B'C', AC'D, A'CD', AB'D', A'BD.$$

Manjkata le še dve soočnji, ki sta enolično določeni, in sicer $BC'D'$ in $B'CD$.

Soočenja lahko zapišemo v preglednico. Vsak stolpec ustreza soočanju. V okrajšani obliki dobimo tole razporeditev:

$$\begin{bmatrix} A & B & C' & D & A' & B' & C & D' \\ B & C' & D & A' & B' & C & D' & A \\ C & D' & A & B & C' & D & A' & B' \end{bmatrix}$$

Kot vidimo, se vsak kandidat pojavi trikrat, vsakič v eni od treh vrstic. To pomeni, da ga vsakič lahko posedejo na drug stol in da odgovarja enkrat prvi, drugič drugi in tretjič tretji. Tako so možnosti kandidatov resnično izenačene.

odgovarja	po I	to I	sr I	če I	po II	to II	sr II	če II
1.	A	B	C'	D	A'	B'	C	D'
2.	B	C'	D	A'	B'	C	D'	A
3.	C	D'	A	B	C'	D	A'	B'

Tabela 1. Pravilni razpored TV soočanj osmih predsedniških kandidatov

Geometri 19. stoletja so se veliko ukvarjali s ti. v_3 konfiguracijami. To so matematične strukture v točk in v premic, tako da potekajo skozi vsako točko tri premice in ležijo na vsaki premici po tri točke konfiguracije. Seveda se lahko dve premici konfiguracije sekata največ v eni skupni točki. Izkáže se, da je najmanjši v , pri katerem obstaja takšna konfiguracija, $v = 7$. Obstaja ena sama 7_3 konfiguracija, imenuje se Fanova konfiguracija. Če jo želimo prikazati v običajni ravnini, moramo eno od premic modelirati s krožnico. V tem prispevku smo pokazali, da obstaja tudi ena sama 8_3 konfiguracija. Imenuje se Möbius-Kantorjeva konfiguracija. Tudi tu

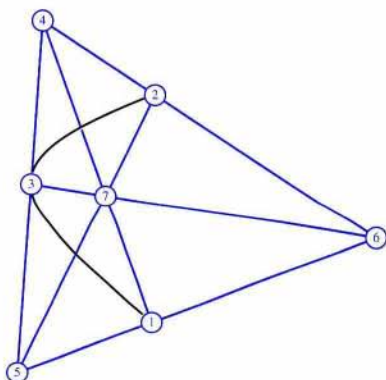
moramo eno od premic modelirati s krožnico. Z naraščajočim v pa se število konfiguracij hitro večja. Pred kratkim so z računalnikom izračunali število v_3 konfiguracij za $7 \leq v \leq 18$.

v	štev. v_3 konfiguracij
7	1
8	1
9	3
10	10
11	31
12	229
13	2,036
14	21,399
15	245,342
16	3,004,881
17	38,904,499
18	530,452,205

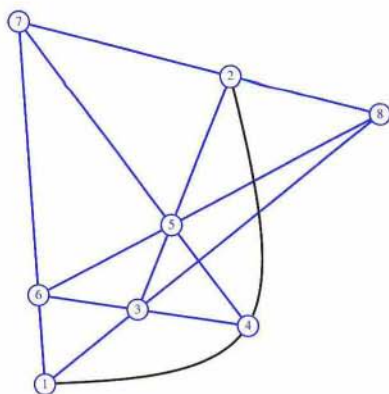
Tabela 2. Število v_3 konfiguracij

To pomeni, da bi lahko pri večjem številu kandidatov problem rešili na več različnih načinov. Oglejmo si preprost recept, ki nam za vsak $v \geq 7$ daje rešitev. Zapišimo najprej podatek za Fanovo konfiguracijo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

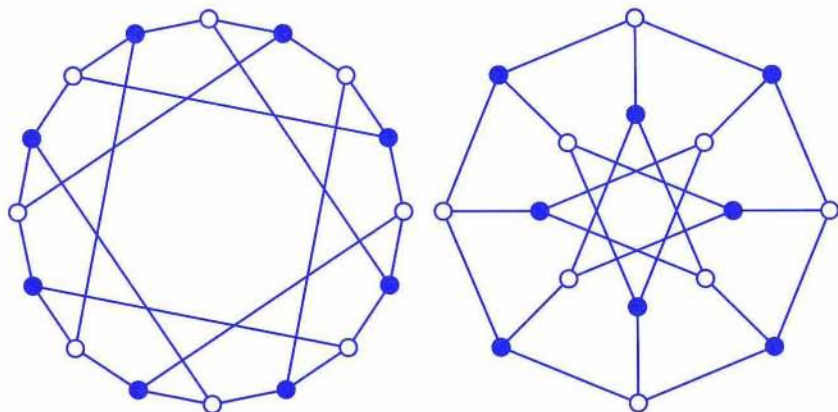


Slika 1. Fanova konfiguracija je edina 7_3 konfiguracija



Slika 2. Möbius-Kantorjeva konfiguracija, ki je rešitev naše naloge, je edina 8_3 konfiguracija

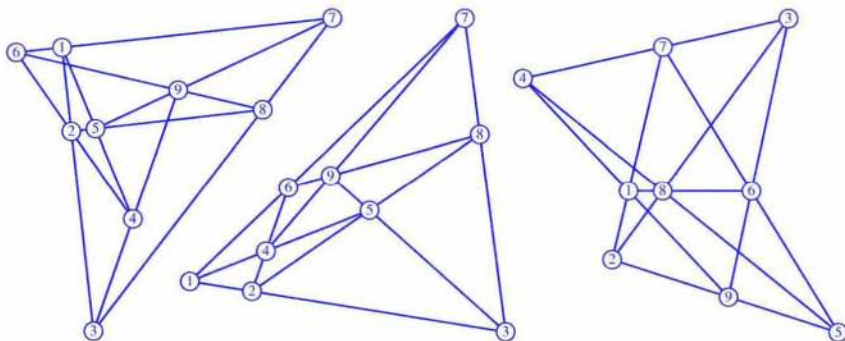
Če preoznačimo kandidate Möbius-Kantorjeve konfiguracije, dobimo naslednjo preglednico. Od zgornje se loči le po tem, da jo podaljšamo za eno mesto.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$


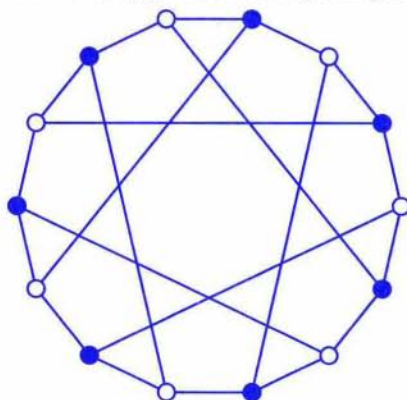
Slika 3. Möbius-Kantorjev graf ima 8 črnih in 8 belih vozlišč. Črna vozlišča ustrezajo točkam – kandidatom, bela pa premicam – soočanjem. Prikazan je na dva načina.

Za devet kandidatov, bi dobili takole reštev:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



Slika 4. Obstajajo tri različne 9_3 konfiguracije



Slika 5. Vsaki konfiguraciji lahko priredimo dvodelen graf, ti. Levijev graf konfiguracije. Črna vozlišča pripadajo točkam, bela pa premicam konfiguracije. Vozlišči sta sosednji, če in samo če leži točka na premici. Na sliki vidimo Levijev graf Fanove konfiguracije.

Bralcu pa prepuščamo razmislek za splošno vrednost v . Študij konfiguracij sodi dandanes v kombinatoriko. Matematika pa ni uporabna le v politiki. Večkrat jo skrito srečamo v športu, ko moramo znati razporejati najrazličnejše turnirje, od nogometnih, teniških, šahovskih, do speedwaya. A to je že druga zgodba, ki bi zahtevala poseben prispevek.

Dragan Marušič in Tomaž Pisanski

2001 S KOVANCİ – Rešitev s str. 211

(a) Vzemimo neko, po moči najmanjšo, skupino kovancev, s katero lahko izplačamo vsak tolarški znesek od 1 do 2001 tolarja. Naj bo k_t , $t \in \{1, 2, 5, 10\}$, število kovancev za t tolarjev, ki sestavljajo skupino.

- (1) Pokažimo najprej, da je $k_1 \leq 2$ in $k_5 \leq 2$. Recimo, da imamo v skupini več kot dva kovanca za 1 tolar. Potem dva kovanca za 1 tolar zamenjamo z enim kovancem za 2 tolarja. Dobimo manjšo skupino kovancev, s katero pa lahko še vedno izplačamo vse zneske od 1 do 2001 tolarja. Res, če smo pri izplačilu z začetno skupino kovancev uporabili k_1 ali $k_1 - 1$ kovancev za 1 tolar, potem z novo skupino znesek izplačamo tako, da uporabimo $k_1 - 2$ oziroma $k_1 - 3$ kovanca za 1 tolar in še novi kovanec za 2 tolarja. (Tako izplačilo je seveda možno, saj imamo v novi skupini $k_1 - 2$ kovancev za 1 tolar, pa tudi $k_1 - 3 \geq 0$, saj smo imeli v začetni skupini vsaj tri kovanca za 1 tolar.) Na enak način pokažemo, da lahko v skupini, v kateri so vsaj trije kovanci za 5 tolarjev, dva od njih zamenjamo s kovancem za 10 tolarjev.
- (2) Gotovo je $k_1 \geq 1$, saj sicer ne moremo izplačati 1 tolarja. Ker pa sta po (1) v vsaki najmanjši skupini kvečjemu dva kovanca za 1 tolar, za izplačilo 3 (ali pa 4) tolarjev potrebujemo tudi kovanec za 2 tolarja. Torej $k_2 \geq 1$.
- (3) V najmanjši skupini ni veliko kovancev za 2 tolarja. Recimo, da so v skupini več kot trije kovanci za 2 tolarja. Potem tri od njih nadomestimo z enim kovancem za 5 in enim kovancem za 1 tolar. Razmislek, da lahko z novo, manjšo skupino izplačamo enake zneske kot z začetno, gre takole. V novi skupini imamo $k_2 - 3$ kovanca za 2 tolarja. Če smo pri izplačilu z začetno skupino uporabili k_2 ali $k_2 - 1$ kovancev za 2 tolarja, potem v novi skupini uporabimo $k_2 - 3$ oziroma $k_2 - 4$ kovanca za 2 tolarja in še oba nova kovanca. Če pa smo pri izplačilu uporabili $k_2 - 2$ kovanca za 2 tolarja, ločimo dve možnosti. Če pri izplačilu ni uporabljen kovanec za 1 tolar, potem z novo skupino znesek izplačamo tako, da uporabimo $k_2 - 3$ kovanca za 2 tolarja, en kovanec za 1 tolar iz začetne skupine in še novi kovanec za 1 tolar. Kadar pa je pri izplačilu uporabljen kovanec za 1 tolar, znesek izplačamo tako, da uporabimo $k_2 - 4$ kovanca za 2 tolarja, preostala kovanca za 2 tolarja in kovanec za 1 tolar pa nadomestimo z novim kovancem za 5 tolarjev.
- (4) Nazadnje opazimo, da zaradi $k_1 \leq 2$ in $k_2 \leq 3$ za izplačilo 9 tolarjev potrebujemo kovanec za 5 tolarjev ($2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 < 9$). Torej $k_5 \geq 1$.

Ko upoštevamo omejitve, ki sledijo iz zgornjih ugotovitev, nam preostane 12 možnosti. Naštete so v spodnji tabeli. Pri tem je število kovancev za 10 tolarjev določeno tako, da vrednost celotne skupine doseže (večkrat tudi preseže) 2001 tolar.

skupina	k_1	k_2	k_5	k_{10}	število kovancev	rešitev
1	1	1	1	200	203	NE
2	1	1	2	199	203	NE
3	1	2	1	200	204	DA
4	1	2	2	199	204	DA
5	1	3	1	199	204	DA
6	1	3	2	199	205	NE
7	2	1	1	200	204	DA
8	2	1	2	199	204	DA
9	2	2	1	199	204	DA
10	2	2	2	199	205	NE
11	2	3	1	199	205	NE
12	2	3	2	199	206	NE

Rešitev zastavljene naloge so skupine 3, 4, 5, 7, 8 in 9. Hitro se lahko prepričamo, da je z njimi moč izplačati vsak znesek od 1 do 2001 tolarja (za skupine s $k_{10} = 199$ je treba preveriti, da lahko z manjšimi kovanci izplačamo vse zneske do vključno 11 tolarjev, pri tistih s $k_{10} = 200$ pa zadošča, da preverimo izplačljivost zneskov do vključno 9 tolarjev). Skupini 1 in 2 ne izpolnjujeta opisanega pogoja, saj z njima ni moč izplačati npr. 4 tolarjev. Skupine 6, 10, 11 in 12 imajo preveč kovancev, tako da niso rešitve zastavljene naloge.

(b) Različna izplačila preštejemo tako, da se najprej odločimo, koliko kovancev za 10 tolarjev bomo uporabili, pri izbranem številu kovancev za 10 tolarjev se odločimo, koliko kovancev za 5 tolarjev bomo uporabili za izplačilo preostalega zneska, itd.

Za izplačilo 2001 tolarja lahko uporabimo od 0 do 200 kovancev za 10 tolarjev. Število izplačil, pri katerih uporabimo t_{10} kovancev za 10 tolarjev, je enako številu različnih izplačil zneska $2001 - 10 \cdot t_{10}$ tolarjev s kovanci za 5, 2 in 1 tolar. Za izplačilo tega zneska lahko uporabimo od 0 do $\lfloor \frac{2001 - 10t_{10}}{5} \rfloor$ kovancev za 5 tolarjev (tu $\lfloor x \rfloor$ označuje celi del izraza x). Če uporabimo t_5 kovancev za 5 tolarjev, nam za izplačilo

ostane $2001 - 10 \cdot t_{10} - 5 \cdot t_5$ tolarjev. Ta znesek izplačamo s t_2 kovanci za 2 tolarja, možne vrednosti za t_2 so od 0 do $\lfloor \frac{2001 - 10t_{10} - 5t_5}{2} \rfloor$, ostanek pa s kovanci za 1 tolar. Število različnih izplačil je tako enako vsoti

$$\sum_{t_{10}=0}^{\lfloor 2001/10 \rfloor} \sum_{t_5=0}^{\lfloor (2001-10t_{10})/5 \rfloor} \sum_{t_2=0}^{\lfloor (2001-10t_{10}-5t_5)/2 \rfloor} 1.$$

Čeprav je gornja vsota videti zelo zapletena, pa jo je z nekaj vztrajnosti moč izračunati s svinčnikom in papirjem. Še lažje pa gre z računalnikom. Sam sem napisal kratek program v pascalu. Njegovo jedro so naslednje vrstice:

```
znesek := 2001;
stevec := 0;
for t10 := 0 to znesek div 10 do
  for t5 := 0 to (znesek - 10 * t10) div 5 do
    for t2 := 0 to (znesek - 10 * t10 - 5 * t5) div 2 do
      stevec := stevec + 1;
```

Po izteku zank ima spremenljivka **stevec** vrednost 13 534 201. To število je tudi odgovor na zastavljeno vprašanje.

Martin Juvan

HITRO MNOŽENJE DVOMESTNIH ŠTEVIL Z 11

Števki števila, ki bi ga radi pomnožili z 11, razmaknemo za eno mesto, nato števki seštejemo in dobljeno vsoto napišemo na vmesno prazno mesto.

Produkt 63×11 dobimo npr. tako, da razmaknemo 6 in 3 (6_3), seštejemo števki ($6 + 3 = 9$) in rezultat vpišemo na prazno mesto (693).

Seveda moramo v primeru, če je vsota števk večja od 9, poskrbeti za desetiški prenos. Tedaj vpišemo v vmesni prostor drugo števko vsote, prvo (ki je vedno 1) pa prištejemo levi od obeh razmaknjenih števk.

Za produkt 76×11 seštejemo $7 + 6 = 13$, vrinemo 3 med 7 in 6 (736) in števki 7 na levi prištejemo 1. Rezultat je 836.

Za trening hitro izračunajte nekaj produktov: 25×11 , 72×11 , 34×11 , 57×11 in 49×11 . Kaj pa 99×11 ?

Marija Vencelj

KAKO JE RADIO DOBIL GLAS

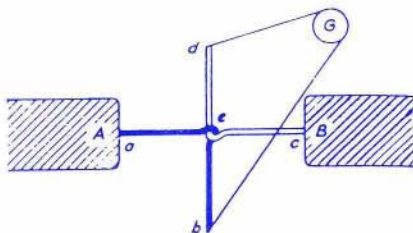
Prispevek o radiu, objavljen v prejšnji številki Preseka, je opisal, kako so pred sto leti radijske valove začeli uporabljati za prenašanje sporočil z Morsovimi znaki. Za kaj drugega je bilo električno nihanje, ki so ga zmogli tedanji nihajni krogi, namreč preveč dušeno. Poskusi, da bi dobili izmenični tok z dovolj visoko frekvenco z dinamostroji, so se izjalovili, čeprav je Nikola Tesla dosegel dvajset tisoč nihajev na sekundo.

Od prvih poskusov Heinricha Hertza so znanstveniki izboljševali zaznavanje radijskih valov. Hertz jih je zaznaval še tako, da je opazoval iskre v sprejemnem krogu z iskriščem. Oliver Lodge je razvil koherer in Gulielmo Marconi ga je izpopolnil. Pri tem so izkoristili pojav, da se je kovinskim opilkom v stekleni cevi pod vplivom radijskih valov zmanjšal električni upor. Radijske valove so zaznavali tudi po delovanju na magnet; Marconi je izkoristil pojav, da so radijski valovi zmanjšali magnetno histerezo železa. Zaradi tega so vse manj uporabljali koherer.

Nekdanji Boltzmannov asistent Ignac Klemenčič, ki je delal v Gradcu in Innsbrucku, je že leta 1893 zaznaval radijske valove s *Klemenčičevim križem*. Pri tem je izkoristil pojav, da valovi segrejejo kovino, ko se v njej absorbirajo, in izmeril nastalo temperaturno razliko s termoelementom (slika 1). Za uspehe pri raziskovanju radijskih valov, predvsem njihovega odboja na kovinskih in žveplovih ploščah, je Klemenčič dobil visoko priznanje.

Pozneje so si pomagali s kristalom, ki se ga je dotikala kovinska konica. Taka naprava je usmerila visokofrekvenčno nihanje v sprejemnem krogu, usmerjeni tok pa so speljali skozi slušalke.

Že leta 1874 je Ferdinand Braun, ki je iznašel katodno cev, ugotovil, da je kristal cinkove svetlice ZnS s točkastim kovinskim priključkom v eni smeri bolj prevajal kot v drugi. Pozneje so ugotovili, da ima to lastnost tudi dibakrov oksid Cu_2O , in leta 1906 priznali še patenta za usmerjanje s karborundom SiC in silicijem. Leta 1901, torej pred sto leti, je Braun s



Slika 1. Ignac Klemenčič je vodnika iz železa (ab) in bakra (cd) sestavil v križ in eno prečko uporabil kot sprejemno anteno med kovinskima ploščama (A in B). Izmenični tok po tej prečki je segrel spojno mesto med železom in bakrom (e). Zaradi temperaturne razlike med tem spojnim mestom in spojnim mestom med bakrom in železom (b) je nastala termoelektrična napetost, ki je pognala tok po občutljivem galvanometru (G).

kristalom cinkove svetlice s točkastim kovinskim priključkom prvič usmeril visokofrekvenčni tok v nihajnem krogu sprejemne antene. Okoli leta 1915 so predvsem v manj zahtevnih amaterskih radijskih sprejemnikih uporabljali tak kristalni usmernik ali *detektor*. Razvoj je vodil do polprevodniških elementov, predvsem do tranzistorja, ki smo jih v Preseku opisali v vrsti prispevkov. Toda polprevodniški elementi so zagospodarili nad radiom šele po letu 1960. Dotlej so radio obvladovala *elektronke*.

Leta 1879 je Thomas Alva Edison izdelal prvo vakuumsko žarnico z žarilno nitko. Štiri leta pozneje je pri enem od poskusov v stekleno bučko žarnice vtalil elektrodo in ugotovil, da je naprava prevajala tok, če je to elektrodo povezal s pozitivnim priključkom baterije in nitko z negativnim priključkom. Pojav so opazili tudi drugi, podrobneje pa ga je raziskal v Cambridgeu John Joseph Thomson; skupaj s sodelavci je leta 1897 spoznal, da katodne žarke sestavljajo elektroni. Thomsonov učenec Owen Williams Richardson je leta 1908 ugotovil, kako je gostota toka pri *termični emisiji* iz kovine odvisna od temperature. Leta 1928 je za svoje delo dobil Nobelovo nagrado iz fizike.

Richardsonova enačba $j = AT^2 e^{-W_i/kT}$ povezuje gostoto električnega toka j pri termični emisiji z absolutno temperaturo T kovine. Pri tem je W_i energija, s katero je elektron vezan na kovino, A Richardsonova konstanta z velikostno stopnjo $10^6 \text{ A/m}^2\text{K}^2$, e osnova naravnih logaritmov in $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ Boltzmannova konstanta. Enačba je po obliki podobna enačbi za izparilni tlak kapljevine, zato termična emisija elektronov s površja kovine spominja na izhlapevanje molekul z gladine kapljevine.

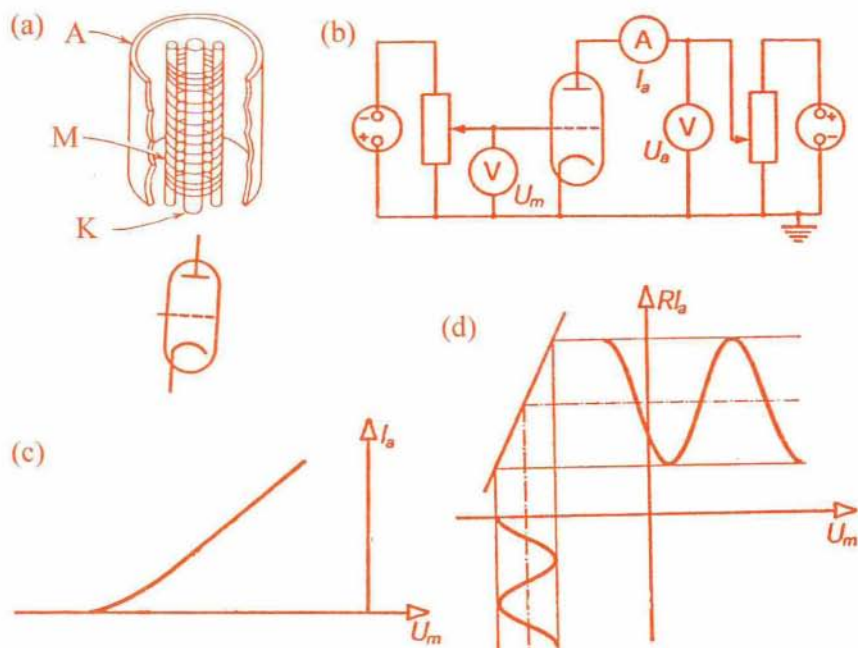
John Ambrose Fleming je leta 1904 v Londonu prvi uporabil elektronko z dvema elektrodama – *diodo*. Kot prva elektroda je služila kovinska nitka, ki jo je razžaril električni tok, kot druga pa hladna kovinska ploščica. Dioda je delovala kot *usmerjevalka*. Če je bila segreta elektroda zvezana z negativnim priključkom tako, da je imela vlogo *katode*, ter hladna elektroda s pozitivnim priključkom tako, da je imela vlogo *anode*, je dioda prepuščala tok; če je bila napetost obrnjena nasprotno, pa ne. Seveda: elektroni, ki izstopijo iz segrete elektrode, lahko odtečejo na hladno elektrodo, ob hladni elektrodi pa ni elektronov, ki bi potovali proti segreti elektrodi. S tako diodo je Fleming usmeril visokofrekvenčni tok. V Združenih državah je leta 1904 začel delati poskuse Lee de Forest in je pozneje tudi sam razvil diodo, neodvisno od Fleminga. Leta 1906 pa je patentiral napravo za ojačevanje šibkih visokofrekvenčnih tokov, v kateri je uporabil elektronko s tremi elektrodami – *triodo*. Med katodo in anodo

je vključil tretjo elektrodo, *mrežico*, ki je kot tanka žička v obliki vijačnice ovijala segreto valjasto katodo (slika 2a).

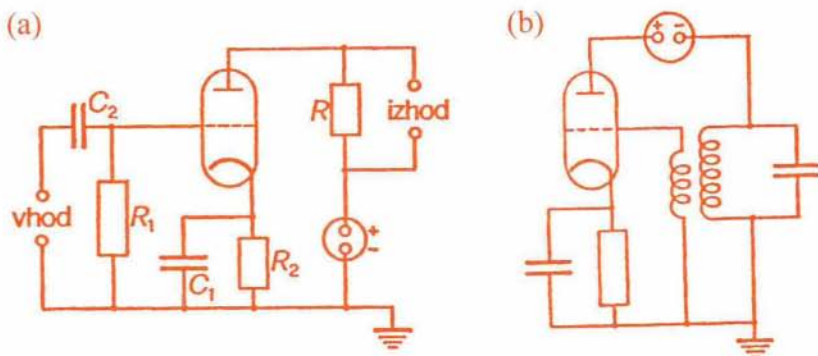
Mrežica je na negativni napetosti proti katodi. Čim večja je ta napetost, tem več elektronov mrežica zavrne proti katodi in tem manjši je tok elektronov od katode na anodo (slika 2b). Napetost med mrežico in anodo vpliva v *anodnem krogu* na tok elektronov, ki ga od katode do anode in skozi delovni upornik poganja baterija. Med katodo in mrežico – rečemo lahko tudi *na vhod* – priključimo kot *signal* izmenično napetost, tako da napetost mrežice proti katodi niha, a je ves čas negativna. Napetost na delovnem uporniku v anodnem krogu – *na izhodu* – niha z enako frekvenco (slika 2d). Razmere izberemo tako, da je povprečna moč na izhodu velikokrat večja kot povprečna moč na vhodu (slika 3a), in imamo *ojačevalnik*. V njem moč na izhodu izvira iz baterije v anodnem krogu, napetost mrežice proti katodi pa določi, kdaj baterija požene tok. V triodi lahko vidimo tudi nekakšno stikalo; če je negativna napetost mrežice proti katodi dovolj velika, tok v anodnem krogu preneha.

Leta 1912 so De Foresta obtožili, da zavaja javnost. Pred sodiščem je tedaj nekdo pod prisego izjavil: "De Forest je rekel in podpisal v številnih časopisih, da bo mogoče prenašati človeški glas čez Atlantik, preden bo minilo nekaj let. Te absurde in zavašajoče izjave so zapeljale ljudi, da so kupovali delnice njegove družbe." Leta 1914 so poslali čez Atlantik prvo brezžično telefonsko sporočilo z uporabo De Forestove elektronke.

V anodni krog zvežimo nihajni krog iz kondenzatorja ter tuljavice in del napetosti, ki niha z lastno frekvenco nihajnega kroga, speljimo na vhod. S to *povratno vezjo* ali *povratno zanko* dosežemo, da nihajoči tok v nihajnem krogu spodbuja sam sebe in nihajni krog deluje kot izvir nedušene izmenične napetosti – *oscilator*. Primerjati ga je mogoče z uro na nihalo, v kateri nihalo preko zobatega kolesa in zasunka določa, kdaj utež požene nihalo. Kot je Christian Huygens okoli leta 1657 izumil uro na nihalo s povratno vezjo z zobatim kolesom in zasunkom, je leta 1913 Alexander Meissner izumil električni oscilator s povratno vezjo v krogu s triodo (slika 3b). Odtlej je bilo mogoče dobiti nedušeno električno nihanje z veliko višjo frekvenco od dvajset tisoč nihajev na sekundo. To je bil preobrat, ki je radiu omogočil, da je prenašal tudi govor in glasbo, ne samo Morsovih znakov.



Slika 2. Poenostavljena risba triode s katodo K, mrežico M, ki je navita na izolacijska stebrička, in anodo A ter dogovorjeni znak za triodo (a). Staklena bučka, iz katere je izsesan zrak, ni narisana. Z vezjem (b) izmerimo odvisnost anodnega toka I_a od mrežne napetosti U_m pri konstantni anodni napetosti U_a (c) in odvisnost izmenične napetosti na izhodu ΔRI_a , v odvisnosti od nihajoče mrežne napetosti (d). Amplituda prve je veliko večja od amplitude U_m .

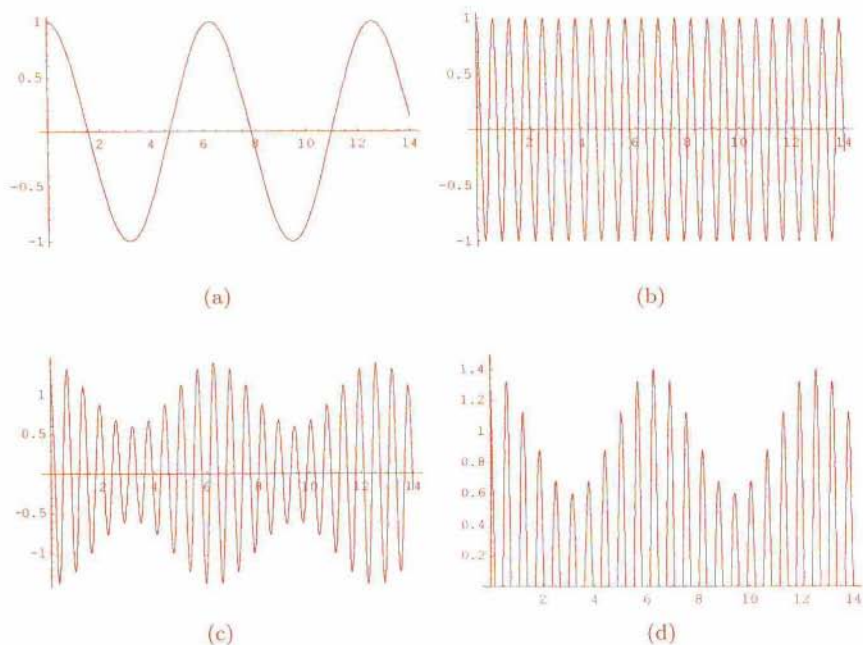


Slika 3. Preprost ojačevalnik s triodo (a) in preprost oscilator s triodo (b). Sosednji tuljavi poskrbita za induktivno sklopitev.

V valovanju sta valovna dolžina λ in frekvenca ν povezani s hitrostjo valovanja $c = \lambda\nu$. Pri radijskih valovih je to hitrost svetlobe v praznem prostoru 300 000 km/s, pri zvoku v zraku v navadnih okoliščinah pa je hitrost valovanja 340 m/s, kar je skoraj milijonkrat manjša hitrost.

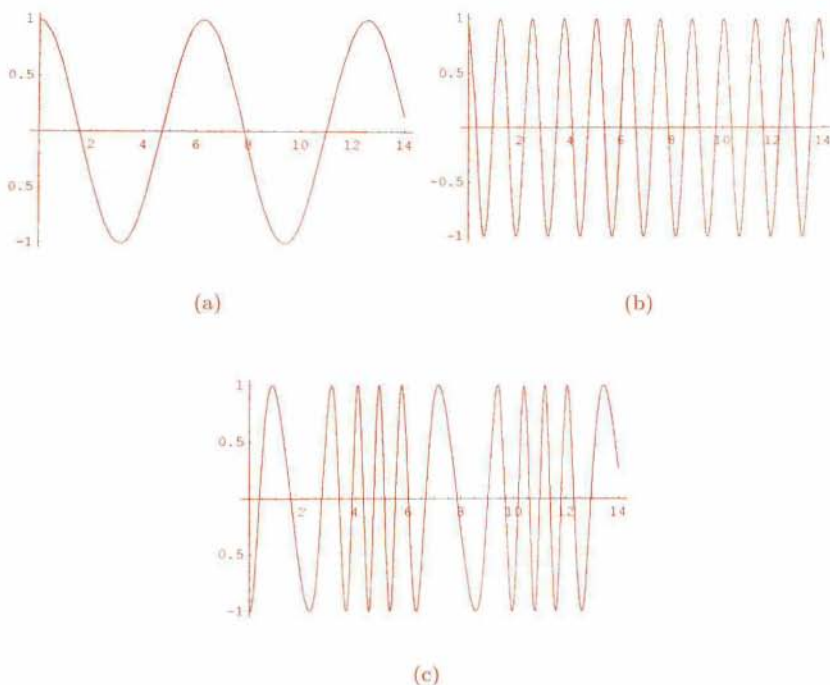
Heinrich Hertz zaradi velikega razmerja med frekvenco radijskih valov in frekvenco zvoka morda ni pomislil na to, da bi s svojimi valovi prenašal sporočila. Dozdevno slabost radijskih valov spremenimo v prednost. Najprej mislimo na *srednje radijske valove* z valovno dolžino med 100 m in 1000 m in s frekvenco med 3 MHz in 0,3 MHz (megahertz, MHz, je milijon nihajev na sekundo). Vzemimo valovno dolžino 202 m ali frekvenco 1,49 MHz Vala 202 na srednjih valovih. Slišimo zvok s frekvenco od 16 s^{-1} do okoli $20 \cdot 10^3\text{ s}^{-1}$, a prenos se znatno ne poslabša, če zajamemo samo frekvence do mejne frekvence 0,01 MHz ali celo 0,005 MHz. Vzemimo, da bi radi prenesli z radijskimi valovi ton s frekvenco 1000 s^{-1} ali 0,001 MHz. Upor mikrofona se spreminja s frekvenco zvoka, ki ga zadene, zato tok v krogu z mikrofonom niha s frekvenco 0,001 MHz (slika 4a).

V nihajnem krogu oddajne postaje niha tok z *nosilno frekvenco* 1,49 MHz (slika 4b) in oddajna antena seva *nosilno valovanje* s to frekvenco, če v radiu ni slišati zvoka. Sestavimo oba nihajoča tokova tako, da se amplituda visokofrekvenčnega toka spreminja z zvočno frekvenco (slika 4c). Postopek je znan kot *amplitudna modulacija* AM. Oddajna antena, po kateri poganjamo ta tok, seva radijske valove. V sprejemni anteni, uglaseni na frekvenco 1,49 MHz, zbudijo izmenični tok, ki ustreza izmeničnemu toku v oddajni anteni. Ta tok lahko sestavimo iz toka s frekvenco 1,49 MHz, toka s frekvenco $(1,49 + 0,001)\text{ MHz}$ in toka s frekvenco $(1,49 - 0,001)\text{ MHz}$. Razlika frekvenc je tako majhna, da lahko izkoristimo resonanco, če anteni uglasimo na nosilno frekvenco 1,49 MHz. Visokofrekvenčni tok v sprejemni anteni ojači visokofrekvenčni ojačevalnik usmerjevalka pa ga usmeri (slika 4d). Spremenljivi del usmerjenega toka ojači še nizkofrekvenčni ojačevalnik. Ojačeni tok poganja zvočnik, ki oddaja ton s frekvenco 1000 s^{-1} . Tako lahko prenesemo ton s katero koli frekvenco ali mešanico tonov do mejne zvočne frekvence. Vsaki oddajni postaji ustreza *kanal*, t.j. frekvenčni pas s širino dveh zvočnih mejnih frekvenc okoli nosilne frekvence, tako da sosednje postaje ne motijo druga druge. Predpisi o širini kanala se spreminjajo od države do države, za radijske oddaje meri širina od 0,005 MHz do 0,01 MHz, pogosto 0,009 MHz, za telefonijo je pas ožji. Modulacijo te vrste in srednje valove so sprva uporabljale vse javne radijske postaje, ki so nastale v ZDA 1916, na Nizozemskem 1919, v Angliji in Franciji 1922, v Nemčiji 1923, v Sloveniji 1928.



Slika 4. Amplitudna modulacija: nizkofrekvenčni tok (a) in visokofrekvenčni tok (b) dasta amplitudno modulirani tok (c), s katerim napajajo oddajno anteno. V sprejemni anteni se pojavi tok z enako časovno odvisnostjo, le da je šibkejši. Tok ojačimo in usmerimo (d) ter zgladimo, da dobimo nizkofrekvenčni tok, po frekvenci enak prvotnemu (a). Tega še enkrat ojačimo in z njim napajamo zvočnik. Na risbi je $\nu_v = 10\nu_z$ ter $k_a = 0,4$. Razmerje med frekvenco srednjih radijskih valov in zvočno frekvenco je v resnici precej večje.

Poznamo še *frekvenčno modulacijo* FM, pri kateri z zvočno frekvenco vplivamo na frekvenco visokofrekvenčnega toka (slika 5). Ta vrsta modulacije zahteva večjo širino kanala, denimo 0,05 MHz, zaradi česar mora biti nosilna frekvenca precej višja. Primerni so *ultrakratki valovi* UKV z valovno dolžino med 1 m in 10 m, t.j. s frekvenco med 30 MHz in 300 MHz. Prenos z njimi se je začel širiti po letu 1950. (Oddajnik Vala 202 ali Drugega programa Radia Slovenija na Krimu npr. oddaja pri frekvenci 93,5 MHz ali valovni dolžini 3,2 m.) Oddajne antene za ultrakratke valove so lahko tudi vodoravne, medtem ko so antene za srednje valove vse navpične. Elektromagnetne motnje v ozračju navadno prizadenejo amplitudo valov, ne njihove frekvence. Zato so motnje pri prenosu s



Slika 5. Frekvenčna modulacija: nizkofrekvenčni tok (a), visokofrekvenčni tok (b) in amplitudno modulirani tok (c), s katerim napajajo oddajno anteno. Na risbi je $\nu_v = 5\nu_z$ in $m = 3$. Razmerje med frekvenco UKV in zvočno frekvenco je v resnici veliko večje.

frekvenčno modulacijo veliko manjše kot pri prenosu z amplitudno modulacijo. Ultrakratki valovi potujejo premo, medtem ko srednji valovi sledijo ukrivljenosti Zemlje. Zaradi tega ultrakratkovalovna oddajna postaja pokriva le območje s premerom, manjšim od sto kilometrov. Slovenija je danes prepletena z mrežo takih postaj, na srednjih valovih oddaja samo še nekaj oddajnikov, namenjenih Slovencem po svetu.

Pri frekvenčni modulaciji je mogoč stereofonski prenos, kar pomeni, da napajamo posebej levi in desni zvočnik v sprejemniku z nihajočima tokovima, ki ustrezata nihajočima tokovima v levemu in desnemu mikrofону. Pri tem je treba upoštevati še dodatno zahtevo, da mora ostati uporaben tudi starejši sprejemnik, ki ni prilagojen stereofonskemu prenosu. Zadeve so dokaj zapletene, zato smo se zadovoljili s površnim opisom.

Amplitudna modulacija. Napetost, ki niha z visoko nosilno frekvenco ν_v , pomnožimo z izrazom, v katerem člen niha z zvočno frekvenco ν_z , in uporabimo zvezo $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta)$:

$$U_0 \cos (2\pi\nu_v t) \cdot [1 + k_a \cos (2\pi\nu_z t)] = \\ = U_0 \cos (2\pi\nu_v t) + \frac{1}{2} k_a U_0 \cos [2\pi(\nu_v + \nu_z)t] + \frac{1}{2} k_a U_0 \cos [2\pi(\nu_v - \nu_z)t];$$

k_a je koeficient amplitudne modulacije, ki je navadno manjši kot 1.

Frekvenčna modulacija. Iz enačbe $2\pi\nu = d\varphi/dt$ izhaja za fazo $\varphi = 2\pi \int \nu dt$. Naj visoka frekvenca vsebuje člen, ki niha z zvočno frekvenco $\nu = \nu_0[1 + k_f \cos(2\pi\nu_z t)]$, pa dobimo

$$U_0 = U_0 \cos \varphi = U_0 \cos (2\pi \int_0^t \nu dt) = \\ = U_0 \cos [2\pi\nu_0 t + (\nu_0/\nu_z)k_f \sin (2\pi\nu_z t)] = \\ = U_0 \cos (2\pi\nu_0) \cos [m \sin (2\pi\nu_z t)] - U_0 \sin (2\pi\nu_0) \sin [m \sin (2\pi\nu_z t)].$$

Uporabili smo zvezo $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$; k_f je koeficient frekvenčne modulacije in $m = \nu_0 k_f / \nu_z$ razmerje med spremembo nosilne frekvenca in zvočno frekvenco. Izraz je precej bolj zapleten kot pri amplitudni modulaciji.

Dodajmo še kratko pripombo o televiziji, pri kateri moramo prenašati vidni in zvočni signal. Za prenos vidnega signala uporabimo amplitudno modulirano nihanje z zelo visoko frekvenco VHF od 48,5 MHz do 222,75 MHz (za kanale od 2 do 11) ali z ultra visoko frekvenco UHF od 471,25 MHz do 788,75 MHz (za kanale od 21 do 60). Ustrezne valovne dolžine ležijo na območjih od 6,1 m do 1,3 m ter od 64 cm do 38 cm. Za prenos zvočnega signala uporabimo frekvenčno modulacijo. Zvočnemu in vidnemu signalu ustreza skupaj kanal s širino 7 MHz. Upoštevati moramo, da pri današnji barvni televiziji prenašamo podatke za tri barve. Zopet mora biti izpolnjena zahteva, da dobimo pri tem s starim črno belim sprejemnikom črno-belo sliko. Tako si lahko predstavljamo, kako zapletena je zadeva v podrobnostih. Fizik se navadno zadovolji s tem, da okvirno opiše osnove.

Prenos sporočil z radijskimi valovi se je do danes zelo razširil, a nekaj nekdanih naprav ni več v rabi. Med te sodijo elektronke – diode, triode in take z več elektrodami, ki so bistveno prispevale k razvoju radia in televizije, a so svoje mesto prepustile polprevodniškim elementom.

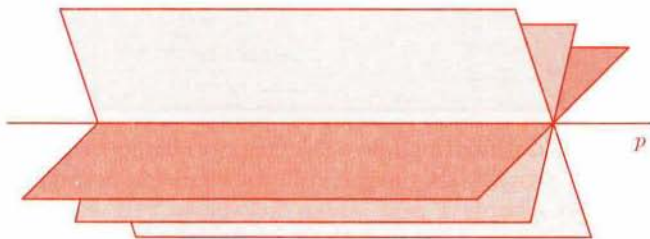
Janez Strnad

DELITEV PROSTORA Z n RAVNINAMI IN Z n OBLAMI – Odgovor na vprašnji s str. 194 in 195

V prejšnji številki Preseka smo vam zastavili dve sorodni nalogi. V prvi smo spraševali, na koliko delov razdeli prostor n ravnin v splošni legi, druga je zahtevala odgovor na podobno vprašanje, le da ravnine v njem zamenjamo z oblami. Ker bomo tudi rešitvi nalog iskali po sličnih poteh, si ju ogledjmo kar v skupnem prispevku.

Delitev prostora z n ravninami v splošni legi

V nalogi smo postavili zahtevo, da imajo poljubne tri ravnine, s katerimi razdelimo prostor, neprazen presek, poljubne štiri pa so brez skupne točke. To pravzaprav pomeni, da imajo poljubne tri ravnine skupno natanko eno točko. Primer medsebojne lege treh ravnin, kakršnega kaže slika 1, namreč ne more nastopiti. Presek poljubne četrte ravnine in dveh od narisanih treh ravnin bi vseboval točko presečne premice p . Ta točka pa bi bila, v nasprotju z našo zahtevo, skupna točka štirih ravnin.



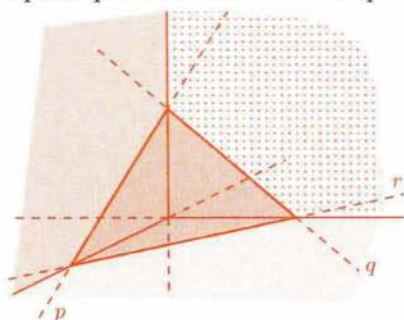
Slika 1.

Je pa navedeni pogoj bistven za enolično rešitev naloge. To lahko uvidimo že na primeru treh ravnin. V primeru s slike 1 je razpadel prostor na šest delov, tri vzporedne ravnine ga razdele na štiri dele. Koordinatne ravnine pravokotnega koordinatnega sistema, na primer, ki imajo skupno natanko eno točko (koordinatno izhodišče), pa razdelijo prostor na osem delov (oktantov).

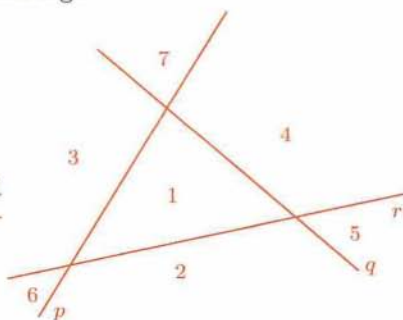
Da bi se splošne naloge lotili z direktnim preštevanjem dobljenih delov prostora, ne pride v poštev, saj bi z večanjem števila ravnin kaj kmalu zašli v brezupno nepregledni položaj. Za nekaj začetnih n pa to le napravimo!

- Ena ravnina razdeli prostor na dva dela.
- Dve sekajoči se ravnini razdelita prostor na štiri dele.

- Tri ravnine, z natanko eno skupno točko, razbijejo prostor na osem delov, kot v primeru koordinatnih ravnin. Na število delov očitno ne vplivajo velikosti kotov, ki jih ravnine oklepajo, da le niso med seboj vzporedne.
- Za $n = 4$ si bomo pomagali s slikama 2a in 2b. Slika 2a prikazuje tipičen primer štirih ravnin v splošni legi.



Slika 2a.



Slika 2b.

Naj bodo prve tri ravnine v našem razmišljanju tiste, ki se na sliki paroma pravokotno sekajo (čeprav taka izbira ni bistvena). Te ravnine sekajo četrto ravnino vzdolž treh paroma se sekajočih premic p , q , r , ki so brez skupne točke (zaradi splošne lege ravnin). Premice p , q in r razdelijo četrto ravnino na sedem kosov (slika 2b). Vsak od teh kosov leži ves v natanko enem od delov, na katere delijo prostor prve tri ravnine, in deli ta del na dva nova dela. Ker ustvarjajo prve tri ravnine v prostoru osem delov, od katerih jih četrta ravnina sedem deli na dva nova dela, je skupno število delov prostora pri razbitju s štirimi ravninami enako $N(4) = 8 + 7 = 15$.

Način premišljanja, s katerim smo ugnali nalogo za $n = 4$, pravzaprav ni več navadno preštevanje. Idejo, ki jo vsebuje, bomo uspešno uporabili tudi v splošnem primeru.

— — —
Splošno rešitev bomo poiskali v treh zaporednih korakih.

1. korak

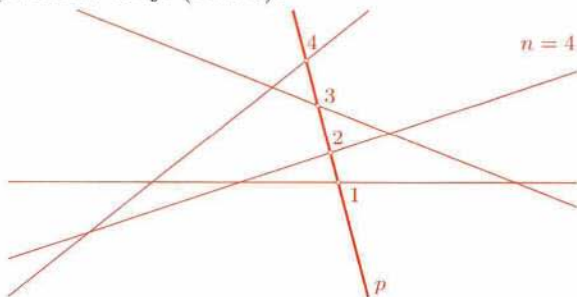
Označimo z $N_1(n)$ število delov, na katere razbije premico n različnih točk te premice. Očitno je $N_1(n) = n + 1$.

2. korak

Naj bo $N_2(n)$ število parcel, na katere razbije ravnino n njenih premic, ki so med seboj v splošni legi (t.j. premice se paroma sekajo, poljubne tri pa so brez skupne točke). Kolikšen je $N_2(n)$?

a) Ena premica razdeli ravnino na dva dela, torej je $N_2(1) = 2$.

b) Denimo, da že poznamo število $N_2(n)$, in opazujemo množico $n + 1$ premic iste ravnine v splošni legi. Prvih n premic deli ravnino na $N_2(n)$ parcel; $(n + 1)$ -ta premica, imenujmo jo p , seka prvih n premic v n različnih točkah. Po rezultatu prvega koraka razdelijo te točke premico p na $N_1(n) = n + 1$ delov, katerih vsak deli po eno od prej dobljenih ravninskih parcel na dvojce (slika 3).



Slika 3.

S tem, da smo n premicam dodali še eno, smo torej število $N_2(n)$ povečali za $N_1(n)$ delov. Torej velja

$$N_2(n+1) = N_2(n) + N_1(n) = N_2(n) + (n+1).$$

Nadomestimo n zapored z $n-1$, $n-2$, ..., 2 in 1:

$$\begin{aligned} N_2(n) &= N_2(n-1) + n \\ N_2(n-1) &= N_2(n-2) + (n-1) \\ &\vdots \\ N_2(3) &= N_2(2) + 3 \\ N_2(2) &= N_2(1) + 2 \end{aligned}$$

Če zgornje enačbe seštejemo in upoštevamo, da je $N_2(1) = 2$, dobimo

$$N_2(n) = N_2(1) + [2 + 3 + \dots + (n-1) + n] = 1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n]$$

in končno

$$N_2(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.^1$$

¹ Vsota prvih n naravnih števil je enaka $\frac{n(n+1)}{2}$.

3. korak

Označimo z $N_3(n)$ število delov, na katere razdeli prostor n ravnin v splošni legi, in opazujemo množico $(n+1)$ ravnin v splošni legi. Dodana ravnina $\mathcal{R}$ seka prvih n ravnin vzdolž n premic ravnine $\mathcal{R}$, ki so med seboj v splošni legi, ker so dane ravnine v medsebojno splošni legi. Teh n premic deli ravnino $\mathcal{R}$ (glej 2. korak) na $N_2(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$ ploskev, katerih vsaka deli po enega od prej dobljenih delov prostora na dvoje. Zato velja

$$N_3(n+1) = N_3(n) + N_2(n) = N_3(n) + \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Spet nadomestimo zapored n z $n-1$, $n-2$, ..., 2 in 1. Dobimo

$$\begin{aligned} N_3(n) &= N_3(n-1) + \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} \\ N_3(n-1) &= N_3(n-2) + \frac{(n-2)^2 + (n-2) + 2}{2} \\ &\vdots \\ N_3(3) &= N_3(2) + \frac{2^2 + 2 + 2}{2} \\ N_3(2) &= N_3(1) + \frac{1^2 + 1 + 2}{2} \end{aligned}$$

Enačbe seštejemo, preuredimo člene in dobimo

$$\begin{aligned} N_3(n) &= N_3(1) + \frac{1}{2}[1^2 + 2^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)] + \frac{1}{2} \underbrace{[2 + 2 + \dots + 2]}_{n-1}. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $N_3(1) = 2$, in uporabimo formuli za vsoto prvih n naravnih števil in vsoto kvadratov prvih n naravnih števil.² Dobimo

$$\begin{aligned} N_3(n) &= 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} + (n-1) = \\ &= \frac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}. \end{aligned}$$

² Vsota kvadratov prvih n naravnih števil je enaka $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Če v formulo vstavimo zapored $n = 1, 2, 3$ in 4 , dobimo $N_3(1) = 2$, $N_3(2) = 4$, $N_3(3) = 8$ in $N_3(4) = 15$, kot smo že na začetku izračunali. Pet ravnin v splošni legi razdeli prostor že na 26 delov, deset pa kar na 176 delov. Direktno preštevanje delov pri večjih n bi se torej res ne obneslo.

Delitev prostora z n oblami

V zastavljeni nalogi smo bralcu prepustili, da v primerjavi s prejšnjo nalogo sam ugotovi, da pogoj, da se oble paroma sekajo, ni dovolj za enolično rešitev naloge. Lahko najdemo primere, ko z enakim številom obel dobimo po številu delov različna razbitja prostora (poiščite kakšen tak primer).

Zato dodatno zahtevamo, da imajo poljubne tri oble skupni vsaj dve točki, poljubne štiri oble pa so brez skupne točke. Tedaj je naloga enolično rešljiva. V takem primeru dobimo tudi največje možno število delov prostora pri delitvi z n oblami.

Spet bomo rešitev naloge poiskali v treh zaporednih korakih.

1. korak

Označimo z $\mathcal{N}_1(n)$ število lokov, na katere razdeli krožnico n parov točk, to je $2n$ točk te krožnice?

Ni težko uvideti, da je $\mathcal{N}_1(n) = 2n$.

2. korak

V ravnini naj bo dana množica krožnic, ki se paroma sekajo, poljubne tri pa so brez skupne točke. Tako množico bomo imenovali množica krožnic v splošni legi. Izračunajmo število parcel, na katere ta množica krožnic razdeli ravnino.

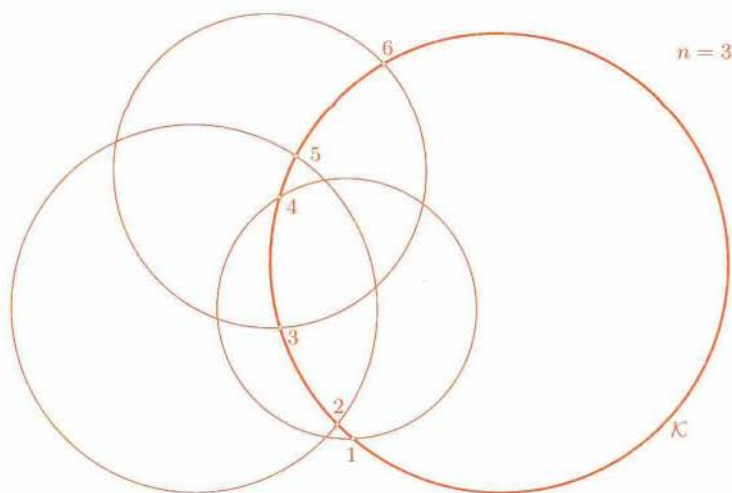
Označimo z $\mathcal{N}_2(n)$ število parcel, na katere razdeli ravnino n krožnic v splošni legi, in opazujmo $(n+1)$ -to krožnico te ravnine, ki je s prvimi n krožnicami v splošni legi. Prvih n krožnic seka $(n+1)$ -to krožnico, imenujmo jo $\mathcal{K}$, v n parih različnih točk. Te točke razdele $\mathcal{K}$ (glej 1. korak) na $\mathcal{N}_1(n) = 2n$ lokov. Vsak od teh lokov deli po eno od prej dobljenih parcel na dvojce (slika 4).

Zato je

$$\mathcal{N}_2(n+1) = \mathcal{N}_2(n) + \mathcal{N}_1(n) = \mathcal{N}_2(n) + 2n.$$

Upoštevamo, da je $\mathcal{N}_2(1) = 2$, poračunamo kot v nalogi z ravninami in dobimo

$$\mathcal{N}_2(n) = n^2 - n + 2.$$



Slika 4.

Posledica

Tudi oblo, na kateri je razporejenih n krožnic v splošni legi, delijo te krožnice na $\mathcal{N}_2(n) = n^2 - n + 2$ parcel.

3. korak

Naj bo danih $n + 1$ obel, katerih poljubne tri imajo vsaj po dve skupni točki, poljubne štiri pa so brez skupne točke. Od tod sledi, da imajo poljubne tri oble natanko dve skupni točki. Premislite, zakaj!

Označimo z $\mathcal{N}_3(n)$ število delov, na katere razdeli prostor prvih n obel, in opazujmo $(n + 1)$ -to oblo. Prvih n obel seka $(n + 1)$ -to oblo v n krožnicah, ki so na $(n + 1)$ -ti obli razporejene v splošni legi. Te krožnice dele $(n + 1)$ -to oblo na $\mathcal{N}_2(n) = n^2 - n + 2$ parcel, katerih vsaka deli po enega od prej dobljenih prostorskih delov na dva dela. Zato velja

$$\mathcal{N}_3(n + 1) = \mathcal{N}_3(n) + \mathcal{N}_2(n) = \mathcal{N}_3(n) + (n^2 - n + 2).$$

Ker je $\mathcal{N}_3(1) = 2$, dobimo, če malo poračunamo, da je

$$\mathcal{N}_3(n) = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}.$$

Vrednosti za prve tri n so enake kot pri razbitju z ravninami v splošni legi: $\mathcal{N}_3(1) = 2$, $\mathcal{N}_3(2) = 4$, $\mathcal{N}_3(3) = 8$. Potem pa začne $\mathcal{N}_3(n)$ hitreje naraščati kot $\mathcal{N}_3(n)$. Tako je $\mathcal{N}_3(4) = 16$, $\mathcal{N}_3(10)$ pa že 260.

Marija Vencelj

DIRK J. STRUIK (1894–2000)

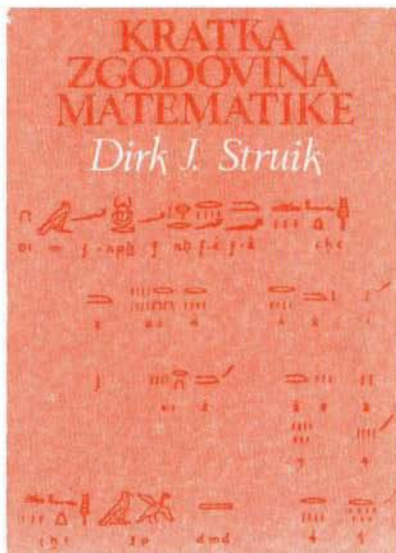
Dirk Jan Struik, eden najbolj znanih zgodovinarjev matematike, je umrl 21. oktobra 2000 na svojem domu v Belmontu, Massachusetts, ZDA, v visoki starosti 106 let.

Struik se je rodil 30. septembra 1894 v Rotterdamu na Nizozemskem. Matematiko (v kombinaciji s fiziko) je študiral na Univerzi v Leidnu¹. Iz matematike je doktoriral leta 1922 na Univerzi v Delftu². Leta 1923 se je poročil s češko matematičarko Ruth Ramler. V zakonu so se jima rodile tri hčere. Zakon je trajal celih 70 let do ženinine smrti leta 1993. Po doktoratu se je izpopolnjeval v Rimu, kjer se je navdušil za študij zgodovine matematike, in v Göttingenu, kjer je spoznal mnoge vodilne matematike tedanjega časa (med drugim Hilberta, Cartana, Couranta, Noetherjevo, itd.).

V Göttingenu je srečal tudi Norberta Wienerja, profesorja z univerze Massachusetts Institute of Technology (MIT) v ZDA. Ta ga je leta 1926 povabil na MIT in Struik je vabilo sprejel. Profesor na MIT je ostal vse do upokojitve leta 1960.

Struik se je že v mladosti navzel levičarskih nazorov in je bil priznan poznavalec marksizma. Zaradi svojih pogledov je v obdobju, ko je senator McCarthy v ZDA vodil "gonjo" proti komunistom in njihovim somišljenikom, postal žrtev neutemeljenih obtožb in v letih od 1951 do 1956 ni smel predavati.

Kot matematik se je Struik ukvarjal z analizo in geometrijo. Bolj kot po svojem znanstvenem delu s področja matematike pa je znan po proučevanju zgodovine matematike. Njegovo najbolj znano delo je knjiga *A Concise History of Mathematics*, ki je (v dveh delih) prvič izšla leta



¹ Leiden je manjše mesto, ki leži približno 25 kilometrov severno od Rotterdamu in ima okoli 115 tisoč prebivalcev. Univerza v Leidnu je bila ustanovljena leta 1575, med profesorji, ki so predavali Struiku, pa je bil tudi Hendrik A. Lorentz, Nobelov nagrajenec za fiziko iz leta 1902.

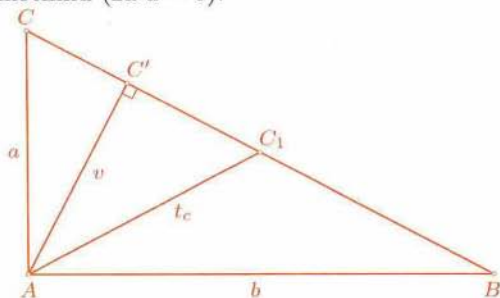
² Delft je mesto z manj kot 100 tisoč prebivalci, ki leži slabih 15 kilometrov severozahodno od Rotterdamu.

1948 pri založbi Dover. V njej je na okoli 250 straneh zgoščeno opisana zgodovina matematike od pradavnine do začetka 20. stoletja. Zadnja, po vrsti četrta izdaja je iz leta 1987 in vsebuje tudi dodatno poglavje o razvoju matematike v prvi polovici 20. stoletja. Knjiga je prevedena v vse pomembnejše svetovne jezike, bralcem Preseka pa je gotovo najbolj znan njen slovenski prevod, ki je pod naslovom *Kratka zgodovina matematike* leta 1978 (in kasneje ponovno leta 1986) izšel v zbirki Knjižnica Sigma. Sam imam knjigo v res lepem spominu, saj je bila to prva knjiga o zgodovini matematike, ki sem jo prebral.

Martin Juvan

ČETRTE POTENCE STRANIC V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU – Rešitev s str. 211

Najprej dokažimo, da je v pravokotnem trikotniku $c \geq 2v$, kjer je v višina na hipotenuzo c . Če izberemo oznake kot na sliki, sledi zaradi pravokotnosti trikotnika CC_1C' ocena $\frac{c}{2} = t_c > v$, torej $c > 2v$. Enačaj velja natanko v primeru, ko točki C_1 in C' sovpadata, to je v enakokrakem pravokotnem trikotniku (za $a = b$).



Preverimo sedaj levi del dvojne neenakosti, t.j. veljavnost ocene $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}c^4$. Iz $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ sledi $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$. Ker je ploščina pravokotnega trikotnika $p = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2}$ in velja v njem Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$, dobimo od tod $a^4 + b^4 = (c^2)^2 - 2c^2v^2 = c^2(c^2 - 2v^2)$ in zaradi $c \geq 2v$ končno $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}c^4$.

Potrdimo še desno neenakost. Ker je hipotenuza c najdaljša stranica pravokotnega trikotnika, velja

$$a^4 + b^4 = a^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot b^2 < c^2(a^2 + b^2) = c^4.$$

S tem je dokaz veljavnosti ocene $\frac{1}{2}c^4 \leq a^4 + b^4 < c^4$ zaključen.

Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj

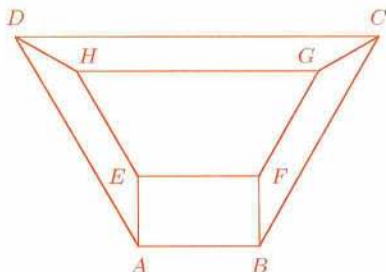
KRIŽANKA “TYCHO BRAHE – 400 LET OD SMRTI”

	LESENA PRIPRAVA ZA DROBLJENJE TROJH ZRN			GORA NA MAKEDON - ALBANSKI MEJI	PESNICA PESJAK	GRAFIK IN ILUS- TRATOR JUSTIN	AKROSTIH	NATAŠA URBANČIČ	IT. PIS ME IZ
	VEZ, KI VEŽE OBA DELA CEPCA	S	K	L	E	P	N	I	
	MESTO OB GARONI V JUŽNI FRANCIJI	T	O	U	L	O	U	S	
	BODOROGA ANTILOPA	O	R	I	K	S		MORSKA OBREŽJA	
	SOPRA- NISTKA OTTA							IT. LETAL DRUŽBA	
	O	P	A	Z	O	V	A	L	
	N	E	B	A			E	L	
	S	O	D	NIKOLAJ TIHOVNOV	POPULAREN SLOV. TEDNIK	HRAŠKI KOŠARKAR KOMAZEC	ZNAK ZA TITAN	T	I
LEVI PRITOK VARDARJA MED SKOPJEM IN VELESOM	P	Č	I	N	J	A	IGOR TORKAR	I	T
GLASBENA PRVINA									PEČ VE OTOK VELE
PREBIVALEC ZGORNJE SOŠKE DOLINE	T	R	E	N	T	A	R	L	A
JUTRANJE KAPLJICE NA TRAVI	Z	O	S	A	IGRALEC CAGE	N	I	C	O
					ČEŠNJE SRČASTE OBLIKE				
HRAŠKI PISATELJ VELI- KANOVICH	I	S	O	ČRNA SNOV V DIMNIKU MESTO OB RONI V J. FRANCIJI	S	A	J	E	BIVALŠČE IZ SNEGA
									REZBAR NOTKE
TV UREDNIK PECKO	O	T	M	A	R	ŠPANSKI VOJVODA, BRAHEJEV SODOBNIK	A	L	B
									BA
LITU	L	I	R	Č	BIBLIJSKI OČAK	N	O	E	BOBNAR PRI BEATLIH (RINGO)
					ŠKOTSKA REKA				IGRALKA RINA
FRANC. TENISAČICA MAURESMO	A	M	I	I	A	DANSKI KRALJ, KI MU JE BIL NAKLONJEN TANTAL	F	R	I
	S	E	K	S	T	A	N	T	STAN ODPA ZELE
	PREMICA SEČNICA	S	E	K	A	N	T	A	

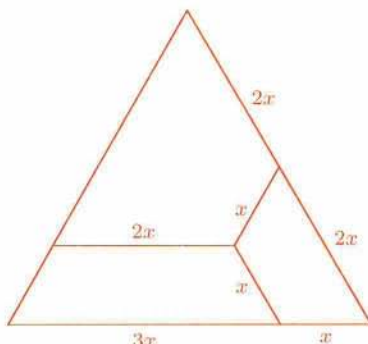
AL. AVA STA LA	SL. NAROD HEROJ, PADEL NA JELOVCI (LOJZE)	AVTOR MARKO BOKALIČ	OBČINA VZHODNO OD LJU- BLJANE	BREZ- KUŽNOST	NIKOLA TESLA	AMER. IGRALEC (GEORGE)	NAJBOLJ VODNATA REKA V AFRIKI	ANDREJ MIKLAJČ				
	K	NJEGOVA DOMOVINA	D	A	N	S	K	A				
S	E	KOSTNA BULA RADIKAL OCETNE KISLINE	O	S	T	E	O	M				
D	B	A	L	A	GIANNA NANNINI BIKOV GLAS	G	N	KLEPTO- MANKA IZ PESMI NECE FALK				
	E	C	MESTO, KJER JE UMRL OZVEZDJE SEV. NEBA	R	R	A	G	A				
A	5. GRŠKA CRKA ŠTANE ŽAGAR	E	P	S	I	L	O	N				
LEJŠI EK IZ GNA	S	T	E	A	K	KONJSKI TEK BREZ POSKAKOVANJA PODRAVSKA SLATINA		K	A	S	NJGOV OBSER- VATORIJ NA OTOKU HVEN	VELIKA MORSKA RIBA V OBILI ROMBA
AT ŽJI POD ITOM	Ž	I	G	NAŠ VRHLUNSKI JE MARKO MILIČ	MAJHEN PES S POTLACENIM GOBCEM	KOZMETIČ. DISAIVA SOPOTNICA ZNANOSTI	P	A	R	F	U	M
	INDIKATOR KISLOSTI	L	A	K	M	U	S	ENOTA ZA MERJENJE TOK ZA PUŠCICE	M	E	R	A
	S	NEDELJSKA TV ODDAJA GROB DOTIK	S	O	O	M	NASILNIK ZBORO- VANJE ŠKOFOV	S	I	R	A	K
	L	U	DOBIČKAR NA BORZAH DRSALKA SLUCKAJA	Š	P	E	K	U	L	A	N	T
DOR LI	RAZŠIRITEV SRCA PRI UTRIPU KATRAN	D	I	A	S	T	O	L	A	I	A	
	T	A	P	R	NICK NOLTE	N	N	HRAŠKI OTOK DELOVA PRILOGA OB TORKIH	R	A	B	MALIGNA TVORBA
	E	R	I	K	IRSKI PRIPovedNIK (FRANK)	O	S	O	N	N	O	R
30. DNO IZO	R	E	N	A	POKOJNI AMER. PEVEC (FRANK)	S	I	N	A	T	R	A
	SLOV. IGRALEC (EVGEN)	C	A	R	ZGORNJA PLAST ZEMELJ POVRŠINE	T	L	A	NEMŠKI SKLADA- TELJ (WERNER)	E	G	K

SESTAVIMO 'ČETVEREC' IZ ENAKIH KROGEL

Ob koncu lanskega leta smo lahko na policah nekaterih trgovin opazili zanimivo geometrijsko sestavljancko. Iz štirih skladnih teles je potrebno sestaviti pravilni (enakorobi) četverec. Prvi razrez četverca je 1940. leta patentiral Edward T. Johnson. Igra, ki sem jo kupila, pa je narejena po predlogi Wolfganga Schneiderja.



Slika 1. Tloris sestavnega dela.

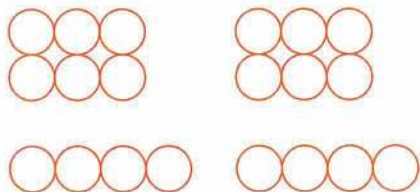


Slika 2. Stranska ploskev sestavljenega pravilnega četverca.

Robovi telesa so: $DC = 3x$, $AB = AE = DH = GC = x$, $BC = AD = HG = 2x$. Osnovna ploskev je enakokraki trapez $ABCD$, stranske ploskve enakokraki trapezi $DHGC$, $DAEH$, $BCGF$ in kvadrat $ABFE$, zgornja ploskev pa enakokraki trapez $EFGH$. Izdelava mreže tega telesa je preprosta.

Ob tej sestavljancki sem se spomnila na sestavljancko iz samih enakih krogel. Eno izmed takih sestavljanek prodajajo tudi v naših trgovinah.

Iz 20 danih krogel, ki so zlepljene v gručo tako, kot kaže slika 3, je potrebno sestaviti pravilni 'četverec'.



Slika 3.

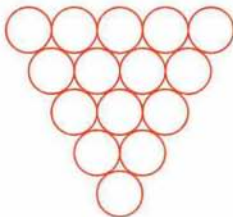


Slika 4.

Iz 20 krogel lahko sestavimo 'četverec' tudi, če so štirje sestavni deli med seboj enaki. Kako jih povežemo, kaže slika 4, kako zložimo pa fotografija na III. strani ovitka.

Nekaj računanja

Koliko krogel potrebujemo za pravilni 'četverec', če osnovni rob sestavlja n krogel?



Slika 5.

Označimo število krogel na osnovni ploskvi s P_n , v celotnem 'četvercu' pa s K_n . S slike razberemo, da ima vsaka vrsta v osnovnem trikotniku eno kroglo manj. Začnemo z n kroglami in končamo z 1 kroglo. Torej je

$$P_n = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 = \frac{1}{2} n(n + 1) = \binom{n + 1}{2}.$$

Vsaka naslednja plast, ki sestavlja pravilni 'četverec', je trikotnik, ki ima za osnovnico eno kroglo manj. Vse krogle dobimo, če seštejemo krogle po plasteh. Torej je:

$$K_n = \sum_{k=1}^n P_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} k(k + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k).$$

Po znanih formulah dobimo

$$K_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) + \frac{1}{2} n(n + 1) \right) = \frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2) = \binom{n + 2}{3}.$$

Za nekaj začetnih števil sestavimo tabelo za število krogel K_n , ki jih potrebujemo za sestavljanje 'četverca', ki ima na osnovnici n krogel.

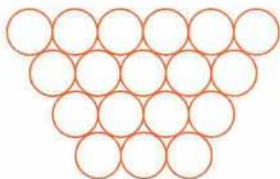
n	1	2	3	4	5	6	7	8
K_n	1	4	10	20	35	56	84	120

Če želimo sestaviti pravilni četverec iz 4 skladnih delov, mora biti število krogel deljivo s 4. To pa pomeni, da je prva taka možnost (če ne upoštevamo trivialne rešitve, ko je $n = 2$) četverec z robom $n = 4$. Tega smo že sestavili.

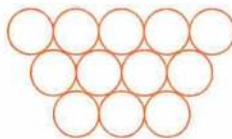
Druga naslednja možnost je, da vzamemo za osnovni rob 6 krogel (potrebujemo 56 krogel). Izkáže se, da ne moremo narediti štirih skladnih delov; tudi pri $n = 7$, ko potrebujemo 84 krogel, ne gre (sestavni deli so zrcalno simetrični). Prvi naslednji pravilni četverec, ki ga lahko sestavimo iz 4 skladnih delov, ima rob $n = 8$. Zanj potrebujemo 120 kroglic. Vsak del ima torej 30 kroglic.

To pa bi lahko ugotovili že iz slike stranske ploskve četverca, ki smo ga sestavili iz štirih skladnih teles na prvi sliki. Osnovni rob četverca je bil razdeljen v razmerju 1 : 3.

Sestavni del za pravilni četverec z robom $n = 8$ ima dve plasti.



Spodnja plast sestavnega dela za pravilni četverec z robom $n = 8$.



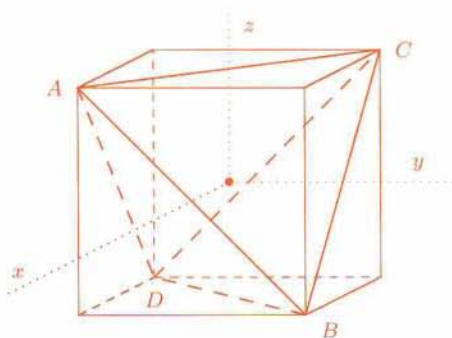
Zgornja plast sestavnega dela za pravilni četverec z robom $n = 8$.

Slika 6.

Pravilnemu 'četvercu' iz krogel očrtamo pravilni četverec

Poglejmo še, kako bi izračunali stranico pravilnega četverca, ki mu je 'četverec' iz krogel včrtan.

Da bomo lažje posplošili primer, začnimo s pravilnim 'četvercem' iz 4 krogel (tri v prvi plasti in ena v drugi). Središča krogel A , B , C in D ležijo v ogliščih kocke in tvorijo oglišča pravilnega četverca.



Slika 7.

Koordinatno izhodišče postavimo v središče kocke, koordinatne osi pa vzporedno z njenimi robovi. Rob kocke naj bo 1. Polmer krogel naj bo r . Očitno je, da je $r = \sqrt{2}/2$.

Glede na izbrani koordinatni sistem imajo središča krogel naslednje koordinate:

$$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad D\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Določimo enačbo ravnine, ki gre skozi točke A, B, C . Normalni vektor ravnine skozi točke A, B, C je $\vec{n} = (1, 1, 1)$ in enačba ravnine je

$$x + y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

Razdalja te ravnine od koordinatnega izhodišča je $d_0 = 1/(2\sqrt{3})$.

Četverec, ki je očrtan krogelam, ima eno izmed ploskev vzporedno s to ravnino. Označimo jo s Π . Ravnina Π je od točk A, B in C oddaljena ravno za polmer krogel.

Oddaljenost d_1 ravnine Π od koordinatnega izhodišča je

$$d_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}.$$

Ker pa so si vsi pravilni četverci med seboj podobni, dobimo iz razmerja

$$d_1 : r = \frac{1 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6}$$

splošni izraz za d_1 , ki se glasi:

$$d_1 = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} \cdot r.$$

Razdalja d_1 naj bo polmer včrtane krogle za četverec s stranico a_2 . Iz znane formule za polmer pravilnemu četvercu včrtane krogle

$$d_1 = \frac{a_2\sqrt{6}}{12}$$

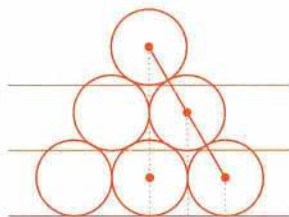
dobimo

$$\frac{6 + \sqrt{6}}{6} \cdot r = \frac{a_2 \sqrt{6}}{12}$$

in iz tega

$$a_2 = 2(\sqrt{6} + 1)r.$$

Ali znamo poiskati stranico očrtanega četrca za poljubni pravilni 'čtetverec', ki ima na osnovnici n krogel? Najprej narišimo pomožno sliko. Vemo, da so ploskve četrca vzporedne z zveznico središč krogel, ki so označene na sliki 8.



Slika 8.

S slike razberemo, da se dolžine stranic očrtanega četrca pri dodajanju posameznih plasti razlikujejo ravno za premer krogle (polovica stranice se razlikuje za r). Ker je pri $n = 2$ stranica $a_2 = 2(\sqrt{6} + 1)r$, je pri n krogah na osnovnici stranica očrtanega četrca enaka

$$a_n = 2r(\sqrt{6} + (n - 1)).$$

Preverimo, da rezultat velja tudi za eno kroglo:

$$a_1 = 2r\sqrt{6} \implies r = \frac{a_1 \sqrt{6}}{12}.$$

Nada Razpet

ZLOŽENKA – Rešitev s str. 194

1. meter, 2. enota, 3. račun, 4. fokus, 5. diada; iskano geslo v obarvanem stolpcu je TOČKA.

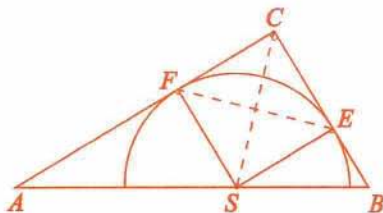
Dragoljub M. Milošević

36. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 235

7. razred

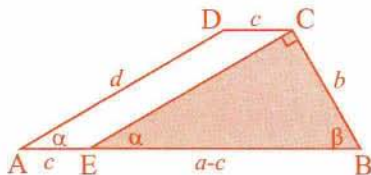
1. Vrednost ulomka je 3.
2. V vseh sedmih mestih skupaj tekmuje 20-krat toliko sedmošolcev kot v Novi Gorici. Ker je vseh tekmovalcev 220, jih v Novi Gorici tekmuje 11. V Ljubljani tekmuje 66 sedmošolcev, v Mariboru 55, v Kopru, Kranju, Celju in Novem mestu pa po 22.
3. Za $x = 1$ je potenca $\overline{xy}^x$ dvomestno število, za $x = 3$ pa petmestno. Trimestno število je le za $x = 2$. Tedaj dobimo zapis $\overline{2y}^2 = \overline{yz}y$. Zato je y lahko le 1 ali 6. Za $y = 1$ je $21^2 = 441$ in y ne more biti 1. Za $y = 6$ je $26^2 = 676$. Torej je $x = 2$, $y = 6$, $z = 7$.
4. $p_i = \frac{l \cdot r}{2}$, zato je $49\pi = \frac{7\pi \cdot r}{2}$ in od tod $r = 14$ cm. Zaradi $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$ je $7\pi = \frac{\pi \cdot 14 \cdot \alpha}{180^\circ}$ in $\alpha = 90^\circ$.

5. $\overline{SE} = \overline{SF} = r$, $SF \perp AC$, $SE \perp BC$, $\overline{FS} = \overline{CE}$, $\overline{ES} = \overline{CF}$, zato je štirikotnik $SECF$ kvadrat. FE in SC sta njegovi diagonalni, zato sta enaki.

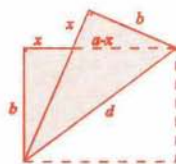


8. razred

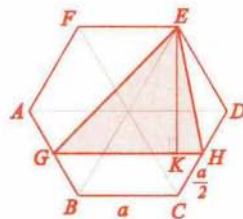
1. Vrednost izraza je 1.
2. $(x^2 + 4x) + (y^2 - 10y) + z^2 + 2000 = (x + 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 + z^2 + 2000 = (x + 2)^2 + (y - 5)^2 + z^2 + 1971$. Najmanjša vrednost izraza je 1971.
3. $\overline{AE} = \overline{CD} = 2$ cm, $\overline{BE} = 13$ cm in $\angle BCE = 90^\circ$. Zato je $\overline{CE}^2 = 13^2 - 5^2$ in $\overline{CE} = d = 12$ cm.



4. Zaradi $d^2 = a^2 + b^2$ je $d = 5$ cm. Iz $b^2 + x^2 = (a - x)^2$ pa dobimo $x = \frac{a^2 - b^2}{2a} = \frac{7}{8}$ cm. Obseg je tedaj $o = d + 2b + 2x = 12\frac{3}{4}$ cm, ploščina pa $p = \frac{ab}{2} + \frac{xb}{2} = 7\frac{5}{16}$ cm².



5. V tristrani prizmi velja $\overline{GH} = \frac{3a}{2}$ in $\overline{KE} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$, zato je njena prostornina $V_3 = \frac{9a^3\sqrt{3}}{16}$. Prostornina pravilne enakorobe šeststrane prizme je $V_6 = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. Tedaj je $\frac{V_3}{V_6} = \frac{3}{8} = 0,375$. Prostornina izrezane tristrane prizme je 37,5 % prostornine pravilne enakorobe šeststrane prizme.



Aleksander Potočnik

DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve nalog s str. 236

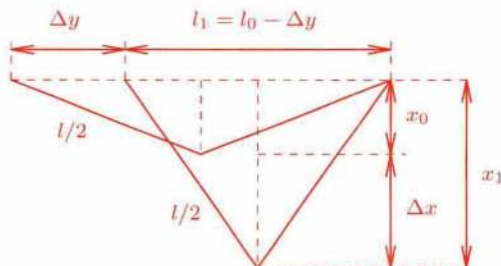
Teoretične naloge za 7. razred

1. a) $l_0 = 15$ m, $x_0 = 1$ m, $F_l = 600$ N. Iz podobnih trikotnikov ugotovimo

$$\frac{\frac{F_l}{2}}{F} = \frac{x_0}{\frac{l}{2}}, \quad F = \frac{\frac{F_l}{2} \frac{l}{2}}{x_0} = \frac{\frac{F_l}{2} \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + x_0^2}}{x_0} = 2270 \text{ N}.$$

Pri tem smo uporabili Pitagorov izrek: $(l/2)^2 = (l_0/2)^2 + x_0^2$.

- b) $l_0 = 15$ m, $x_0 = 1$ m, $\Delta y = 2$ m.



Ker je vrv neraztegljiva, velja (spet uporabimo Pitagorov izrek)

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + x_0^2$$

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + x_1^2.$$

S slike vidimo, da je $l_1 = l_0 - \Delta y$. Torej je

$$\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + x_0^2 = \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + x_1^2 = \frac{1}{4}(l_0 - \Delta y)^2 + x_1^2.$$

Od tod dobimo

$$x_1^2 = \left(\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + x_0^2\right) - \frac{1}{4}(l_0 - \Delta y)^2 = x_0^2 + \frac{1}{2}l_0\Delta y - \left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2 = 15 \text{ m}^2$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = (\sqrt{15} - 1) \text{ m} = 2,87 \text{ m}.$$

Delo je potem enako: $A = F_l \Delta x = 1724 \text{ J} \approx 1720 \text{ J}$.

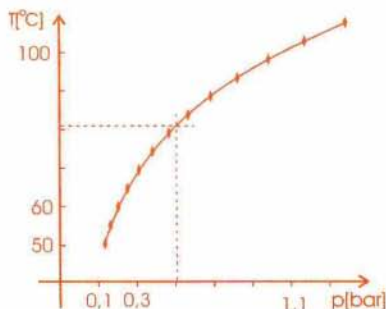
2. a) V vseh posodah stoji voda enako visoko, $h = 1 \text{ dm}$, saj je pomembna le sila, s katero deluje voda na gugalnico $F = p \cdot S = \sigma h S = \rho g h S = 5 \text{ N}$. Tlak na "dno" posode mora biti v vseh primerih enak.

b) V vseh posodah mora biti enaka količina vode, tako da je $(m_{\text{posode}} + m_{\text{vode}})g = 5 \text{ N}$. Ker je $m_{\text{posode}} = 0,1 \text{ kg}$, dobimo $m_{\text{vode}} = 0,4 \text{ kg}$.

3. a) Graf je predstavljen na sliki na desni.

b) Iz tabele lahko razberemo, da je v ekonom loncu, ko juha vre pri 120°C , tlak enak $1,985 \text{ bara}$.

c) Voda vre že pri 81°C , kar lahko odčitamo z grafa.

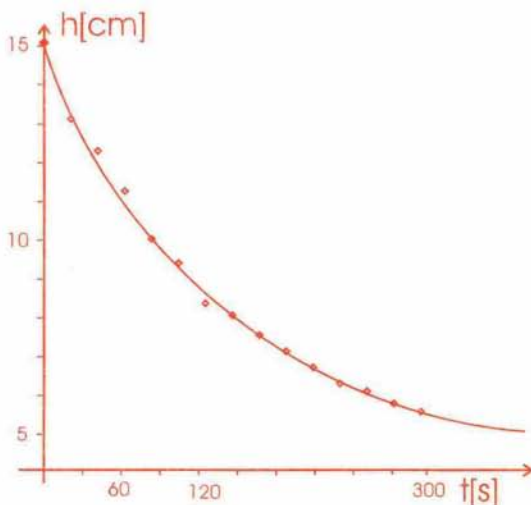


Temperatura vrelišča v odvisnosti od tlaka za temperaturno območje od 50°C do 110°C

Eksperimentalni nalogi

4. a)

čas [s]	višina vodne gladine [cm]
0	15
20	13,1
40	12,4
60	11,3
80	10,1
100	9,5
120	8,5
140	8,2
160	7,7
180	7,3
200	6,9
220	6,5
240	6,3
260	6,2
280	6,0
300	5,8



Višina vodne gladine v plastenki v odvisnosti od časa

- b) Po zelo dolgem času bo gladina vode na višini spodnjega roba iztoka. Pri uporabljenih plastenkah je bilo to na višini približno 5 cm.
- c) Iz umeritve ugotovimo, da se gladina vode zviša za $h_0 = 10$ cm, če vanjo dolijemo $V_0 = 6$ dl vode. Iz teh podatkov lahko izračunamo, koliko vode izteče na sekundo.

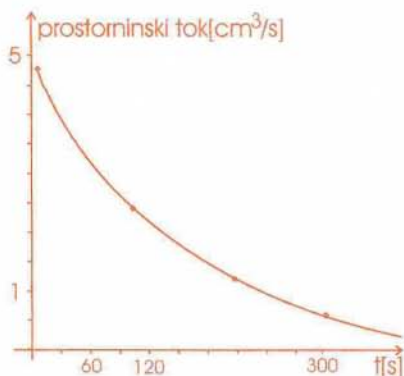
Z grafa odčitamo, da se, pri začetni višini vodne gladine okoli 7,5 cm, vodna gladina v $\Delta t = 20$ s spusti za $\Delta h = 0,4$ cm. Povprečen prostorninski tok v dvajsetih sekundah merjenja je

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{h_0} V_0 \frac{1}{\Delta t} = \frac{0,4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} 6 \text{ dl} \frac{1}{20 \text{ s}} = 1,2 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}.$$

Ko je vodna gladina 10 cm visoko, razberemo iz grafa, da se je v 20 s gladina znižala za 0,8 cm. To pomeni, da je v istem času izteklo dvakrat več vode kot prej. Povprečen prostorninski tok je $2,4 \text{ cm}^3/\text{s}$. Na začetku merjenja se je vodna gladina znižala za 1,6 cm, torej štirikrat bolj kakor v prvem primeru. Povprečen prostorninski tok je $4,8 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Pravilni odgovori so: $1,2 \text{ cm}^3$, $2,4 \text{ cm}^3$ in $4,8 \text{ cm}^3$.

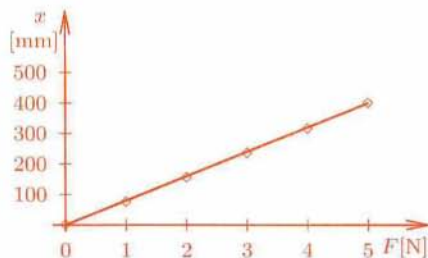
- d) Za risanje grafa lahko izračunamo še kakšno dodatno točko, ni pa nujno. V grafu moramo upoštevati, da se tok zmanjšuje nelinearno in da bo po dolgem času skoraj nič. Ne more pa biti negativen.



Prostorninski tok vode v odvisnosti od časa

5.a) in b) **Meritve z vzmetjo**

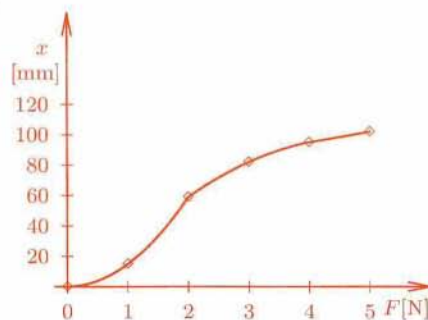
$F[\text{N}]$	$x[\text{mm}]$
0	0
1	75
2	155
3	235
4	315
5	400



- c) Vzmet se pri neznani uteži raztegne za 275 mm. Teža merjenca je 3,5 N.

d) in e) **Meritve z elastiko**

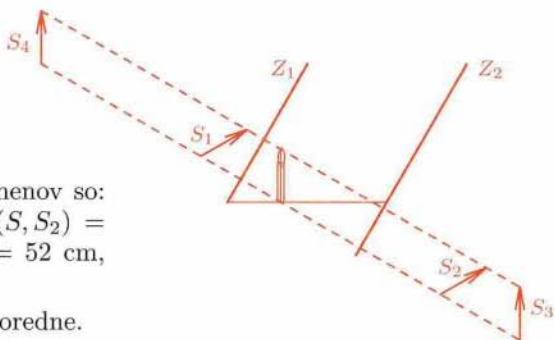
$F[\text{N}]$	$x[\text{mm}]$
0	0
1	15
2	59
3	82
4	95
5	102



- f) Pri elastiki so raztezki manjši. Za elastiko ne velja Hookov zakon. Pri večji obremenitvi se raztezki manjšajo.

Teoretične naloge za 8. razred

1. Rešitvi za a) in b) sta na sliki.



- c) Razdalje vrhov plamenov so:
 $d(S, S_1) = 7 \text{ cm}$, $d(S, S_2) = 45 \text{ cm}$, $d(S, S_3) = 52 \text{ cm}$,
 $d(S, S_4) = 52 \text{ cm}$.
- d) Sveča in sliki so vzporedne.
- 2.a) Klada: Začetna in končna potencialna energija klade glede na mizo je 0, saj je klada ves čas na mizi. Zato je sprememba potencialne energije klade $\Delta W_{pk} = 0$.
- b) Utež: Utež se spusti za $\Delta h = 0,5 \text{ m}$. Sprememba potencialne energije je $\Delta W_{pu} = -mg\Delta h = -10 \text{ J}$.
- c) Vrv: Težišče na začetku visečega dela vrvi se zniža za $\Delta h = 0,5 \text{ m}$. Pri tem se temu delu vrvi potencialna energija zmanjša za $\Delta W_{pv1} = -m_{v1}g\Delta h$.
 Masa m_{v1} visečega dela vrvi je

$$m_{v1} = \left(\frac{m_v}{l}\right) l_1 = \frac{1 \text{ kg} \cdot 0,3 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} = 0,2 \text{ kg}.$$

Torej je $\Delta W_{pv1} = -\left(\frac{m_v}{l}\right) l_1 g \Delta h = -1 \text{ J}$.

Obenem se 0,5 m dolg del vrvi, ki je bil na začetku vodoravno, spusti, tako da je težišče tega dela $\Delta h_1 = 0,25 \text{ m}$ pod robom mize. Sprememba njegove potencialne energije je

$$\begin{aligned} \Delta W_{v2} &= -\left(\frac{m_v}{l} \Delta h\right) g \Delta h_1 = \\ &= -\frac{1 \text{ kg} \cdot 0,5 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0,25 \text{ m} = -0,83 \text{ J}. \end{aligned}$$

Skupna sprememba potencialne energije vrvi je $\Delta W_{pv} = -1,83 \text{ J}$.

- d) Sprememba potencialne energije je enaka vsoti $\Delta W_p = \Delta W_{pk} + \Delta W_{pu} + \Delta W_{pv} = -11,83 \text{ J}$.
- e) Izrek o kinetični energiji pravi, da je vsota sprememb kinetične in potencialne energije enaka delu vseh zunanjih sil razen sile teže. Ker razen teže ne deluje nobena zunanja sila, velja

$$\Delta W_k + \Delta W_p = 0.$$

Sprememba kinetične energije je tedaj enaka

$$\Delta W_k = -\Delta W_p = +11,83 \text{ J}.$$

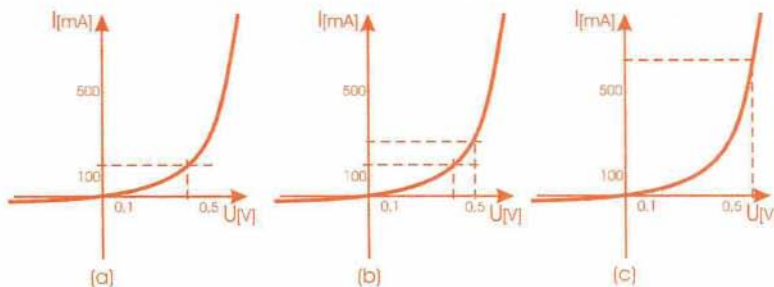
Ker je začetna hitrost in z njo kinetična energija sistema enaka nič, je

$$\Delta W_k = W_k = \frac{1}{2}(M + m + m_v)v^2$$

in tedaj

$$v^2 = \frac{2\Delta W_k}{M + m + m_v} \quad \Rightarrow \quad v = 1,72 \text{ m/s}.$$

3. a) Iz karakteristike diode odčitamo (slika (a)), da teče pri napetosti 0,4 V skozi diodo tok približno 160 mA.
- b) Če se spremeni napetost na diodi z 0,4 V na 0,5 V, se tok skozi njo poveča s 160 mA na 270 mA oziroma se poveča za 110 mA (slika (b)).



Ilustracije k rešitvi naloge

- c) Tudi skozi diodo teče enak tok 500 mA, zato je napetost na diodi enaka 0,58 V.

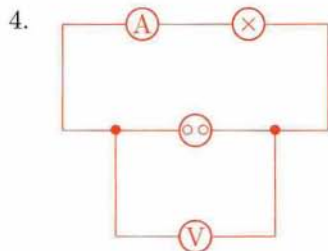
- d) Če je napetost na diodi enaka 0,6 V, potem teče skozi njo tok 630 mA (slika (c)). Enak tok teče tudi skozi upornik. Na uporniku je zato napetost

$$U_R = IR = 630 \text{ mA} \cdot 1 \Omega = 0,63 \text{ V}.$$

Napetost baterije je enaka vsoti napetosti na diodi in na uporniku:

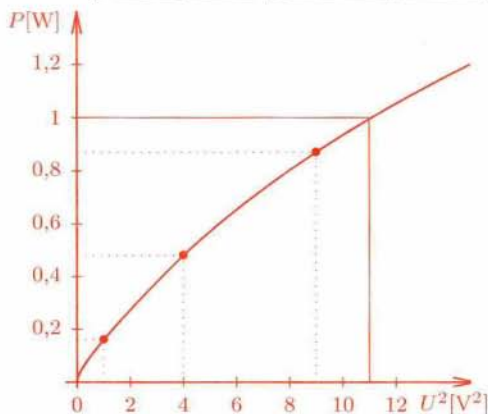
$$U_g = U_R + U_d = 0,63 \text{ V} + 0,6 \text{ V} = 1,23 \text{ V}.$$

Eksperimentalni nalogi



U	I	$P = UI$	U^2
V	A	W	V ²
1,0	0,16	0,16	1,0
2,0	0,24	0,48	4,0
3,0	0,29	0,87	9,0
4,0	0,34	1,36	16,0
5,0	0,49	2,45	25,0

Iz grafa $P(U^2)$ preberemo:
 $U^2 = 11 \text{ V}^2 \Rightarrow U = 3,3 \text{ V}.$



5. a) Ker narašča pot avtomobila s kvadratom časa, je gibanje enakomerno pospešeno.

$$s_1 = 1 \text{ m} \quad s_2 = 4 \text{ m} \quad s_3 = 9 \text{ m} \quad s_4 = 16 \text{ m} \quad s_5 = 25 \text{ m}$$

$$t_1 = 1 \text{ s} \quad t_2 = 2 \text{ s} \quad t_3 = 3 \text{ s} \quad t_4 = 4 \text{ s} \quad t_5 = 5 \text{ s}$$

Torej je: $s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : s_5 = t_1^2 : t_2^2 : t_3^2 : t_4^2 : t_5^2 = 1 : 4 : 9 : 16 : 25.$

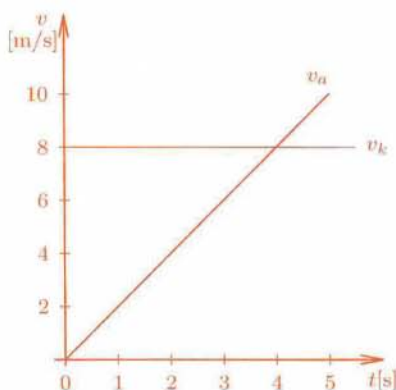
- b) Avto dohiti kolesarja, ko oba naredita enako pot. Kolesar vozi enakomerno s hitrostjo $v_k = 8 \text{ m/s}$ in prevozi $s_k = v_k t$. Avto vozi enakomerno pospešeno, njegova pot je $s_a = (1/2)at^2$. S slike razberemo, da je pospešek

$$a = \frac{2s_a}{t^2} = \frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Iz $s_a = s_k$ sledi

$$v_k t = \frac{1}{2} at^2, \quad t = \frac{2v_k}{a} = 8 \text{ s}.$$

- c) Pot, ki jo prevozita v osmih sekundah, je $s = s_a = s_k = 64 \text{ m}$.
d) Grafa hitrosti avtomobila in kolesarja v odvisnosti od časa:



Nada Razpet

44. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE – Rešitve nalog s str. 242

I/1. Ker je število *CEKAR* deljivo s 4, je *R* soda številka. Zmnožek ima enako mest kot večji faktor, zato je $R = 2$. (Tudi če dopustimo, da se število začne z 0, možnost $R = 0$ odpade. V tem primeru bi namreč moral biti $C = 5$, kar pa zaradi $4 \cdot 0AKEC < 40000$ ni možno.) Potem je *C* lahko 3 ali 8 (saj se $4 \cdot 3$ in $4 \cdot 8$ končata s številko 2), toda 3 ne more biti, saj je *C* prva številka v zmnožku in ne more biti manjša od 4; *C* je torej enaka 8. Tako imamo $4 \cdot 2AKE8 = 8EK A2$. Ker pri $4 \cdot A$ ni prenosa (imamo $4 \cdot 2 = 8$) in ker *A* ne more biti enak 2 (saj je že $R = 2$), je $A = 1$ in imamo $4 \cdot 21KE8 = 8EK 12$. Število $4 \cdot E + 3$ se konča s številko 1, zato je $E = 7$, saj možnost $E = 2$ odpade ($4 \cdot 21 > 82$). Nazadnje izračunamo $K = 9$, zato se račun glasi: $4 \cdot 21978 = 87912$.

I/2. Če je x rešitev, je tudi $100 - x$ rešitev. Ker sme imeti enačba le eno rešitev, je $x = 100 - x$, od koder izračunamo $x = 50$. Torej je $a = 49 + 48 + \dots + 1 + 0 + 1 + \dots + 49 = 49 \cdot 50 = 2450$.

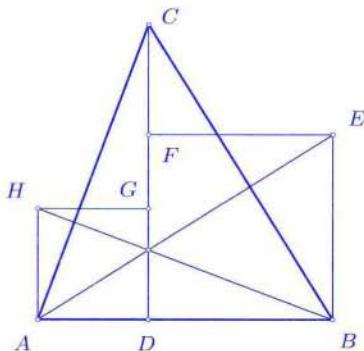
I/3. Pravokotna trikotnika DBC in BEA sta skladna ($|AB| = |CD|$, $|DB| = |BE|$), zato je

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle BEA.$$

Zaradi vzporednih daljic CD in EB velja tudi

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle EBC.$$

Torej sta AE in BC med seboj pravokotni in na AE leži višina na stranico BC . Analogno sklepamo, da sta BH in AC med seboj pravokotni. Daljice CD , AE in BH se sekajo v višinski točki trikotnika ABC .



I/4. Označimo oglišča konveksnega n -kotnika z $A_1, \dots, A_n$. Izberemo si točko A_1 in jo povežemo z vsemi oglišči. Dobimo $n - 2$ trikotnika, katerih oglišča imajo tudi celoštevilske koordinate. Spomnimo se, da lahko ploščino trikotnika z oglišči v točkah $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ in $T_3(x_3, y_3)$ izračunamo po obrazcu

$$p = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

Ker so števila x_i in y_i cela, je tako ploščina tega trikotnika vsaj $\frac{1}{2}$. Torej je ploščina n -kotnika vsaj $\frac{1}{2}(n - 2)$.

II/1. Takoj lahko odvržemo vse tiste peterke, za katere je $a_1 \neq a_2$, saj take nastopajo v parih. Podobno lahko predpostavimo tudi, da je $a_3 = a_4$. Tako dobimo enačbo $\frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_3} + \frac{1}{a_5} = 1$. Sedaj ponovimo razmislek in odvržemo še vse tiste rešitve, pri katerih je $a_1 \neq a_3$. Dobimo enačbo $\frac{4}{a_1} + \frac{1}{a_5} = 1$, ki jo preoblikujemo v $(a_1 - 4)(a_5 - 1) = 4$. Ta enačba pa ima rešitve $(5, 5)$, $(6, 3)$ in $(8, 2)$. Torej je n liho število.

Opomba. Dokažimo, da ima omenjena enačba res končno mnogo rešitev. Še več, z indukcijo bomo dokazali, da ima za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsako racionalno število q enačba

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = q \tag{1}$$

končno mnogo (lahko 0) rešitev v naravnih številih. Ker je enačba (1) simetrična v $a_1, \dots, a_n$, zadošča oceniti število tistih rešitev te enačbe, za katere je $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Pri $n = 1$ ima enačba (1) največ eno rešitev. V dokazu induksijskega koraka pa zaradi privzetka $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ sledi, da je $a_1 \leq \frac{n}{q}$. Ker je a_1 naravno število, imamo zato za a_1 le končno mnogo možnosti. Pri vsaki izmed njih moramo zato rešiti enačbo

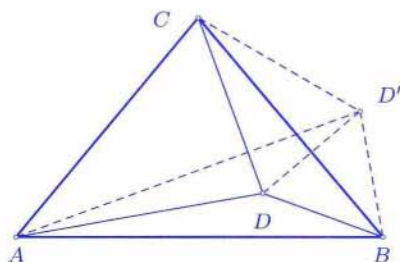
$$\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = q - \frac{1}{a_1},$$

ki pa ima po induksijski hipotezi za $n - 1$ le končno mnogo rešitev.

Kot zanimivost povejmo še, da ima enačba $\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_5} = 1$ natančno 134 urejenih rešitev (t.j. $a_1 \leq \dots \leq a_5$), ki nam skupaj z vsemi permutacijami dajo kar 11 061 rešitev zastavljenega problema. Še posebej zanimiva je rešitev (2, 3, 7, 43, 1806), saj je pri njej število a_5 največje možno.

II/2. Točke $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ in $T_3(x_3, y_3)$ ležijo na isti premici le, če je trikotnik $T_1T_2T_3$ izrojen, t.j. ima ploščino 0. Torej velja $p = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| = 0$. Če pešči hodijo enakomerno po premici, so njihove koordinate linearne funkcije časa t (npr. $x_i = x_{i0} + ta_i$ in $y_i = y_{i0} + tb_i$) in gornja enačba preide v kvadratno enačbo z neznanko t . Ta ima največ dve rešitvi.

II/3. Ker je trikotnik ABC enakokraki trikotnik, merita kota ob osnovnici 50° . Prezrcalimo točko D čez BC . Trikotnik DBD' je enakostranični. Ker je $\sphericalangle ADB = 150^\circ$ in $\sphericalangle BDD' = 60^\circ$, je tudi $\sphericalangle D'DA = 150^\circ$. Torej sta trikotnika ABD in $AD'D$ skladna. Sledi $\sphericalangle AD'D = 20^\circ$, zato je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AD'B = 80^\circ$. Štirikotnik $ABD'C$ je tako



tetivni in $\sphericalangle AD'C = 50^\circ$. Torej je kot ob vrhu C enakokrakega trikotnika $DD'C$ enak 40° , od koder izračunamo še $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB - \frac{1}{2}\sphericalangle DCB = 60^\circ$.

II/4. Označimo števila na listkih tako, kot prikazuje spodnja preglednica

Aleševi listki				Jakovi listki			
a_1	a_3	$\dots$	a_{1999}	b_1	b_3	$\dots$	b_{1999}
a_2	a_4	$\dots$	a_{2000}	b_2	b_4	$\dots$	b_{2000}

Na prvem Aleševem listku naj bo odkrito število a_1 , zakrito pa število a_2 . Jaka mora zato med svojimi listki odkriti to število. Recimo, da je $a_2 = b_1$, zato postane zakrito število b_2 , ki ga mora odkriti Aleš. Ko pa Aleš med svojimi listki odkrije število b_2 , zakrije neko drugo število $\dots$

Med samim postopkom se seveda lahko zgodi, da eden izmed njiju zakrije tisto število, ki je pri drugem že bilo odkrito. Tedaj drugi odkrije poljubno izmed preostalih še neodkritih števil in prvi nadaljuje enako kot zgoraj.

III/1. Označimo $(a_{b-1}a_{b-2}\dots a_1a_0)_b = p$ in računajmo

$$\begin{aligned} p &= a_0 + a_1b + \dots + a_{b-1}b^{b-1} = \\ &= (a_0 + \dots + a_{b-1} + a_1(b-1) + a_2(b^2-1) + \dots + a_{b-1}(b^{b-1}-1) = \\ &= \frac{b(b-1)}{2} + a_1(b-1) + \dots + a_{b-1}(b^{b-1}-1). \end{aligned}$$

Če je $b = 2k$, potem $b-1 \mid p$ in vidimo, da je možno le $b = 2$. Res je $2 = (10)_2$.

Če pa je $b = 2k+1$, potem $k \mid p$ in zato $k = 1$. Torej je $b = 3$. Poiščemo vse možnosti: $(012)_3 = 5$, $(021)_3 = 7$, $(102)_3 = 11$ in $(201)_3 = 19$.

III/2. Očitno je $a = a_1a_n + a_2a_{n-1} + \dots + a_{n-1}a_2 + a_na_1$ in zato $a \leq a_1a_0 + a_2a_0 + \dots + a_{n-1}a_0 + a_na_0$. Ko seštejemo gornja izraza, dobimo

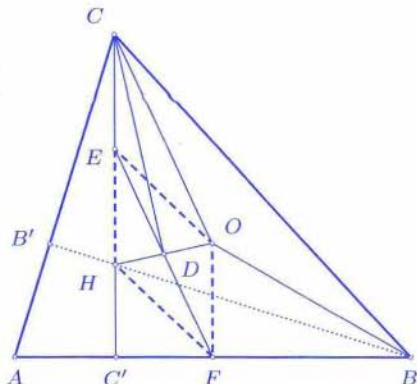
$$\begin{aligned} 2a &\leq a_1(a_0 + a_n) + a_2(a_0 + a_{n-1}) + \dots + \\ &\quad + a_{n-1}(a_0 + a_2) + a_n(a_0 + a_1) \leq \\ &\leq a_1(a_0 + \dots + a_n) + a_2(a_0 + \dots + a_n) + \dots + \\ &\quad + a_{n-1}(a_0 + \dots + a_n) + a_n(a_0 + \dots + a_n) = \\ &= (a_1 + \dots + a_n)(a_0 + \dots + a_n) \leq \\ &\leq (a_0 + \dots + a_n)(a_0 + \dots + a_n) = (p(1))^2, \end{aligned}$$

kot je bilo potrebno dokazati.

III/3. Privzemimo običajne oznake za kote trikotnika ABC . Polmer trikotniku ABC oči rtane krožnice naj bo r . Zaradi simetrije smemo privzeti, da je $\alpha > \beta$.

Če je F razpolovišče daljice AB , je $OF \perp AB$. Ker je $\angle FOB = \gamma$, je $|OF| = r \cos \gamma$. Ker je $|BC| = 2r \sin \alpha$, $|B'C| = |BC| \cos \gamma$ in

$$|HC| = \frac{|B'C|}{\cos \angle ACC'} = \frac{|B'C|}{\sin \alpha},$$



je $|HC| = 2r \cos \gamma = 2|OF|$ oziroma $|EH| = |OF|$. Ker je $CC' \parallel OF$, je $HFOE$ paralelogram, zato se njegovi diagonalni razpolavljata v točki D .

Po drugi strani pa s koti neposredno izračunamo, da je $\angle HCD = \frac{\alpha - \beta}{2} = \angle DCO$. Torej je simetrala CD kota HCO hkrati težiščnica na HO , zato je $|HC| = |CO| = r$. Izračunali pa smo že, da je $|HC| = 2r \cos \gamma$, od koder sledi $2 \cos \gamma = 1$ oziroma $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

III/4. Recimo, da nam to uspe po k korakih. Po vsakem koraku je na mizi en kovanec manj, na koncu mora biti število kovancev na mizi deljivo s 3, število 2000 pa da pri deljenju s 3 ostane 2, zato mora biti k oblike $3n - 1$. Z vsakim korakom se število kupčkov poveča za 1, torej jih je po k korakih na mizi $3n$. Velja $3(3n) = 2000 - (3n - 1)$ oziroma $4n = 667$, kar je seveda nemogoče, saj je n naravno število. Takega zaporedja korakov torej ni.

IV/1. Iz rekurzivne zveze izpeljemo $a_{n-1}(a_{n+2} + a_{n+1}) = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1})$, od koder sledi $a_{n+2}a_{n-1} = a_{n+1}^2$ za $n = 2, 3, \dots$. Ker noben člen zaporedja ni enak 0, lahko to enakost zapišemo tudi kot

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_na_{n-1}} \quad \text{za } n = 2, 3, \dots$$

Od tod z indukcijo sledi, da je vrednost izraza $\frac{a_{n+1}}{a_na_{n-1}}$ konstantna, in sicer enaka $\frac{a_3}{a_2a_1} = 2$. Zato je $a_{n+2} = 2a_na_{n+1}$ in so vsi členi tega zaporedja naravna števila. Število $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ je torej celo in je deljivo z 2 za vsako naravno število n .

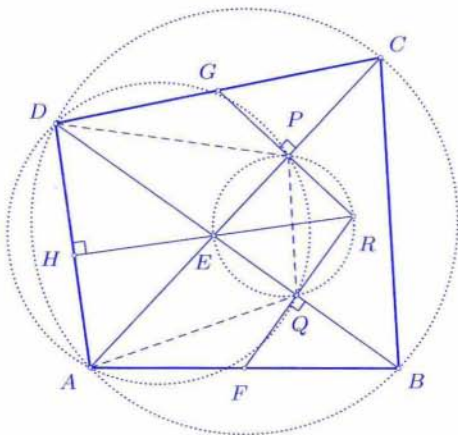
Pišimo

$$a_{2000} = \frac{a_{2000}}{a_{1999}} \cdot \frac{a_{1999}}{a_{1998}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} a_1.$$

V tem produktu imamo 1999 faktorjev, deljivih z 2, in faktor $a_1 = 2$. Torej je število a_{2000} res deljivo z 2^{2000} .

IV/2. Za $x = 0$, $y = 1$ dobimo $f(-f(1)) = 0$. Za $y = -f(1)$ sledi $f(x) = 1 + f(1) - x$. Označimo $a = 1 + f(1)$ oziroma $f(x) = a - x$. Vstavimo slednje v funkcijsko enačbo in dobimo $a = \frac{1}{2}$. Nazadnje preverimo, da funkcija $f(x) = \frac{1}{2} - x$ res zadošča funkcijski enačbi za vsaka x in y .

IV/3. Označimo točki P in Q , kot kaže skica. Točko R definiramo kot presečišče premic PG in FQ , točka H pa naj bo nožišče višine iz E na stranico AD . Dokazati je torej potrebno, da so točke H , E in R kolinearne. Trikotnika DEC in ABE sta si podobna. Ker sta točki F in G razpolovišči ustreznih daljic, sta si podobna tudi trikotnika DPE in AQE . Torej je $\angle DPE = \angle AQE$ in je zato $AQPD$ tetivni štirikotnik. Zaradi pravih kotov $\angle EQR$ in $\angle RPE$ pa je tudi $EQRP$ tetivni štirikotnik. Torej je



$$\angle ADQ = \angle APQ = \angle EPQ = \angle ERQ.$$

Sledi $\angle DEH = \angle QER$, zato iz kolinarnosti točk D , E in Q sledi kolinearnost točk H , E in R .

IV/4. V škatlah naj bo po vrsti a , b oziroma c kroglic. Privzeti smemo, da je $0 < a \leq b \leq c$. Pri deljenju števila b s številom a dobimo taki celi števili r in q , da je $b = aq + r$, kjer je $0 \leq r < a$ in $q \geq 1$. Zapišimo število q v dvojiškem sistemu:

$$q = m_0 + 2m_1 + \dots + 2^k m_k,$$

kjer so $m_i \in \{0, 1\}$ in je $m_k = 1$. Dajmo v prvo škatlo zaporedoma $2^i a$ ($i = 0, 1, \dots, k$) kroglic tako, da pri $m_i = 1$ vzamemo $2^i a$ kroglic iz druge škatle, sicer pa vzamemo $2^i a$ kroglic iz tretje škatle. Tako smo vzeli največ $(2^k - 1)a < qa \leq b \leq c$ kroglic iz tretje škatle ter natančno qa kroglic iz druge škatle in jih tam pustili $r < a$.

Škatla, ki ima sedaj najmanj kroglic, vsebuje manj kot a kroglic, torej manj kot prej. Po opisanem postopku bomo tako eno izmed škatel prej ali slej izpraznili.

Matjaž Željko

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1999/2000 – s str. 246

Objavljamo rešitve nalog z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 15. aprila 2000 v Kamniku. Besedila nalog smo objavili v letošnji četrti številki Preseka.

Skupina A

1. Podatki: $h' = 6 \text{ cm}$, $\sigma_1 = 10 \text{ kN/m}^3$, $\sigma = 7 \text{ kN/m}^3$, a) $\sigma_2 = 6 \text{ kN/m}^3$, b) $\sigma_2 = 8 \text{ kN/m}^3$.

Na začetku sta v ravnovesju teža klade in vzgon. Če s h označimo celotno višino klade, s h' višino dela klade, ki gleda iznad gladine vode, s σ_1 specifično težo vode in s σ specifično težo lesa, zapišemo $\sigma Sh = \sigma_1 S(h - h')$. Od tod sledi za višino klade

$$h = \frac{h'}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_1}} = 20 \text{ cm}.$$

Po končanem dolivanju olja s specifično težo σ_2 so v ravnovesju teža klade ter vzgon olja in vzgon vode. Velja $\sigma Sh = \sigma_1 Sh_1 + \sigma_2 Sh_2$, kjer je $h_1 = h - h_2$ višina dela klade, ki je v vodi. Iz pogoja za ravnovesje dobimo

$$h_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2} h = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} h'.$$

V prvem primeru je $\sigma_2 = 600 \text{ kg/m}^3$ in izračunamo $h_2 = 15 \text{ cm}$. V drugem primeru bi za $\sigma_2 = 800 \text{ kg/m}^3$ dobili $h_2 = 30 \text{ cm}$, kar je več od višine klade. V tem primeru ima olje večjo specifično težo od lesa in klada plava v njem tako, da je del vedno gleda iz olja. Rešitev v tem primeru ne obstaja.

2. Podatki: $k = 0,4$.

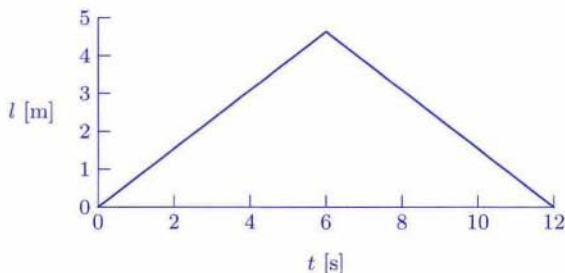
Težo posamezne platnice označimo z F_{g2} , težo celotnega zvezka pa z F_g . Navpični komponenti sil podlage na platnici sta enaki in znašata po $F_0 = \frac{1}{2} F_g$. Zapišimo še pogoj za ravnovesje navorov za eno izmed platnic. Os postavimo v stičišče platnic in listov. Vodoravna komponenta sile podlage je sila lepenja, ki v trenutku tik pred zdrsom znaša $F_l = k_l F_0$. Če širino zvezka označimo z l , velja

$$F_{g2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} + F_l l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F_0 l \cdot \frac{1}{2},$$

od koder dobimo $F_{g2} = 2F_0(1 - \sqrt{3}k_l)$. Iz $F_0 = \frac{1}{2}F_g$ končno sledi, da je delež teže platnic

$$\frac{2F_{g2}}{F_g} = 2(1 - \sqrt{3}k_l) = 0,6.$$

3. Spreminjanje dolžine sence s časom je prikazano na grafu:



4. Podatki: $l = 3$ m, $F_d = 2000$ N, $F_g = 1500$ N, $\alpha = 30^\circ$, $\sigma = 10$ kN/m³, $r = 15$ cm.

Ko na deski ni uteži, je vzgon (nasprotno) enak polovici teže deske, drugo polovico teže pa uravnesi sila stene, ki ima v tem primeru smer navpično navzgor.

a) Ker med desko in utežjo ni lepenja, je sila uteži na desko F_u vedno pravokotna na desko. Vodoravna sila, s katero zadržujemo utež, ter teža F_g in F_u tvorijo pravokotni trikotnik, v katerem F_u predstavlja hipotenuzo. Kot med težo in silo F_u meri 30° , zato velja $F_u = F_g \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Pri tem se boja potopi za $\frac{1}{2}l$ in vzgon na desko se poveča za $\pi r^2 \frac{1}{2}l\sigma$ na vrednost $F_v = \pi r^2 \frac{1}{2}l\sigma + \frac{1}{2}F_d$, če je F_d teža deske. Zapišimo pogoje za ravnovesje navorov na desko. Os postavimo v krajišče pri steni in z x označimo razdaljo od osi do uteži. Potem velja

$$F_d \frac{l}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + F_u x - F_v l \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Vstavimo zgornja izraza za F_v in F_u ter dobimo

$$x = \frac{3\pi r^2 \sigma l^2}{8F_g} = 1,6 \text{ m}.$$

(Rezultat je neodvisen od teže deske.)

b) Komponenti sile stene na desko označimo z F_x in F_y . Izračunamo ju iz pogoja za ravnovesje sil na desko v vodoravni smeri

$$F_x - \frac{1}{2}F_u = 0, \quad F_x = \frac{F_g}{\sqrt{3}} = 870 \text{ N}$$

in navpični smeri

$$F_y + F_v - F_d - F_g = 0, \quad F_y = \frac{1}{2}F_d + F_g - \frac{1}{2}\pi r^2 \sigma l = 1440 \text{ N}.$$

Skupina B

1. Podatki: $m = 10 \text{ g}$, $r = 30 \text{ cm}$, $R = 50 \text{ cm}$, $F = 3 \text{ N}$.

a) Kotno hitrost, pri kateri se nitka pretrga, dobimo iz Newtonovega zakona za kroženje:

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{mr}} = 31,6 \text{ s}^{-1}.$$

b) Ko se nitka pretrga, začne utež potovati po plošči v tangentni smeri s stalno hitrostjo $v = \omega r$. Pot $s = \sqrt{R^2 - r^2} = 40 \text{ cm}$ prepotuje v času $t = s/v = 0,042 \text{ s}$.

c) Točka, v kateri utež zapusti ploščo, tvori skupaj s točko, v kateri je prišlo do pretrganja nitke, in s središčem kroženja pravokotni trikotnik s hipotenuzo R in kateto r . Od tod dobimo kot, pod katerim zapusti utež ploščo: $\sin \alpha = r/R$, $\alpha = 37^\circ$.

2. Podatki: $v_1 = 30 \text{ m/s}$, $v_2 = 2 \text{ m/s}$, $v_p = 2 \text{ m/s}$, $m = 10 \text{ kg}$, $M = 150 \text{ kg}$.

Vreča se po metu giblje s hitrostjo v_1 v smeri, ki je vzporedna s čolni, in s hitrostjo v_p v prečni smeri. (Vse hitrosti so merjene glede na vodo.) Ohranitev gibalne količine vreče in čolna v vzporedni smeri pove $mv_1 - Mv_2 = (m + M)v_{||}$, če z $v_{||}$ označimo vzporedno komponento hitrosti čolna po metu. Dobimo $v_{||} = 0$. V prečni smeri pa velja $mv_p = (M + m)v_{\perp}$, od koder sledi za pravokotno komponento $v_{\perp} = 0,125 \text{ m/s}$. Čoln torej pluje pod kotom 90° glede na prvotno smer.

3. Podatki: $l_0 = 1 \text{ m}$, $m = 50 \text{ g}$, $F_0 = 100 \text{ N}$.

Ko lok napnemo s tetivo z dolžino l_0 , se krajišči loka zblížata za

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k} = 25 \text{ cm}.$$

Ko lok dodatno napnemo s puščico tako, da je kot med tetivo in puščico 30° , je kot med obema polovicama tetive enak 60° . Prijemališče puščice in tetive ter pritrdišči tetive na lok tvorijo enakostranični trikotnik s stranico $l_0/2 = 50 \text{ cm}$. Krajišči loka se dodatno zblížata za $\Delta x_2 = l_0 - l_0/2 = l_0/2 = 50 \text{ cm}$, skupaj torej za $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 75 \text{ cm}$. Od tod dobimo za komponento sile na tetivo v navpični smeri $F_y = k\Delta x = 300 \text{ N}$. Celotna sila na tetivo pa je

$$F = \frac{F_y}{\cos 60^\circ} = 2F_y = 600 \text{ N}.$$

Začetno hitrost dobimo iz zakona o ohranitvi energije. Potencialna prožnostna energija, ko lok napnemo, je

$$W_p = \frac{1}{2} k(\Delta x^2 - \Delta x_1^2).$$

Ko lok sprožimo, se prožnostna energija pretvori v kinetično, $W_k = \frac{1}{2}mv^2$. Za hitrost puščice tik potem, ko zapusti lok, dobimo

$$v = \sqrt{\frac{k(\Delta x^2 - \Delta x_1^2)}{m}} = 63,2 \text{ m/s}.$$

4. Podatki: $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $v = 2 \text{ m/s}$, $\alpha = 30^\circ$, $m = 100 \text{ g}$.

Vzporedna komponenta hitrosti kroglice se pri trku ohranja, $v_{\parallel} = v \sin \alpha$, v pravokotni smeri pa se kroglica odbije z nasprotno enako hitrostjo, merjeno *glede na plosčco*. Glede na okolico se velikost pravokotne komponente poveča: $v_{\perp} = 2v_0 + v \cos \alpha$. Kinetična energija se spremeni za

$$\Delta W_k = \frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - v^2) = 2mv_0(v_0 + v \cos \alpha) = 1,5 \text{ J}.$$

Skupina C

1. Podatki: $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $T_1 = 24^\circ\text{C}$, $l_1 = 50,8 \text{ cm}$, $T_2 = 77 \text{ K}$, $l_2 = 52,3 \text{ cm}$.

Razdalja med dvema črticama na merilu naj bo pri temperaturi umeritve $T_0 = 273 \text{ K}$ enaka s . Pri temperaturi $T_1 = 297 \text{ K}$ je ta razdalja enaka $s_1 = s(1 + \alpha(T_1 - T_0))$, pri temperaturi $T_2 = 77 \text{ K}$ pa $s_2 = s(1 + \alpha(T_2 - T_0))$. Če je dejanska širina mize enaka l , bomo z merjenjem pri temperaturi T_1 dobili $l_1 = (l/s_1)s$ in podobno za l_2 . Imamo torej enačbi

$$l_1 = \frac{l}{1 + \alpha(T_1 - T_0)}, \quad l_2 = \frac{l}{1 + \alpha(T_2 - T_0)}$$

z neznankama α in l . Po kratkem preurejanju dobimo

$$l = l_1 \frac{T_1 - \frac{l_1 T_1 - l_2 T_2}{l_1 - l_2}}{T_0 - \frac{l_1 T_1 - l_2 T_2}{l_1 - l_2}} = \frac{l_1 l_2 (T_1 - T_2)}{l_1 (T_1 - T_0) - l_2 (T_2 - T_0)} = 51 \text{ cm}.$$

2. Podatki: $C_0 = 3,5 \cdot 10^{-11} \text{ F}$, $\varepsilon = 5$, $U = 50 \text{ V}$.

Če označimo stranico kvadratnih plošč z a , razmik med kovinskima ploščama z l in začetno višino vode v kondenzatorju s h , kapaciteto kondenzatorja zapišemo kot

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{l} (a - h + \varepsilon h) = C_0 \left(1 + (\varepsilon - 1) \frac{h}{a} \right),$$

kjer je $C_0 = \varepsilon_0 a^2 / l$ podana kapaciteta praznega kondenzatorja. Ko razmik med ploščama zmanjšamo na l' , velja za novo višino vode h' zveza $lh = l'h'$, če je $h' < a$, sicer pa je $h' = a$ in nekaj vode izteče iz kondenzatorja. V prvem primeru je nova kapaciteta enaka

$$C' = \frac{\varepsilon_0 a}{l'} \left(a + (\varepsilon - 1) \frac{lh}{l'} \right) = C_0 \left(\frac{l}{l'} + (\varepsilon - 1) \frac{h}{a} \left(\frac{l}{l'} \right)^2 \right).$$

Zaradi spremenjene kapacitete steče skozi baterijo z napetostjo U naboj

$$e = (C' - C)U = C_0 \left(\frac{l}{l'} - 1 \right) \left(1 + (\varepsilon - 1) \frac{h}{a} \left(\frac{l}{l'} + 1 \right) \right) U.$$

V drugem primeru na podoben način pridemo do

$$e = (C' - C)U = C_0 \left(\varepsilon \frac{l}{l'} - 1 - (\varepsilon - 1) \frac{h}{a} \right) U.$$

Vprašanje a) ustreza prvemu primeru, tako da dobimo $e = 1,12 \cdot 10^{-8}$ As. Vprašanje b) seveda ustreza drugemu primeru, kjer dobimo $e = 2,14 \cdot 10^{-8}$ As.

Opomba. Podatki v nalogi so izbrani tako, da je $a = 2,0$ dm in $l = 1,0$ cm.

3. Podatki: $S = 1 \text{ mm}^2$, $l = 5 \text{ cm}$, $\zeta = 0,0175 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$.

Upor žice med točkama A in B je $R = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ } \Omega$. Zvarek pod točko C označimo z G .

a) Pri priključitvi okvirja med B in F so v točkah D , E in G enake razlike napetosti glede na točko B . Tako imamo le vzporedno vezane upornike z upori $2R$, $4R$ in $4R$, skupni upor pa je $R_{BF} = R$.

b) Če okvir priključimo med A in C , so glede na A enake napetosti v B , E in F . Med točkama D in G imamo vzporedno vezana upornika z uporoma $2R$ in $4R$ tako, da je nadomestni upor $R_{DG} = \frac{4}{3}R$. Med A in C imamo potem vzporedno vezana upornika z uporoma $2R$ in $R + R_{DG} + R = \frac{10}{3}R$, se pravi $R_{AC} = \frac{5}{4}R$.

c) Pri tem primeru pa je vseeno potrebno nekoliko več računanja. Točko D zapuščajo trije tokovi, in sicer $I_{DE} = I_1$ in dva $I_{DA} = I_2$. Označimo še $I_{BE} = I_3$, potem pa je $I_{BC} = I_2 - I_3$ in $I_{GE} = 2(I_2 - I_3)$. Padec napetosti med D in E je neodvisen od tega, po kateri poti gremo: direktno ali preko A in B . Torej velja $RI_1 = 2RI_2 + RI_3$ oziroma $I_1 = 2I_2 + I_3$. Na podoben način dobimo iz padca napetosti med točkama C in E enačbo $4I_2 = 5I_3$. Iz obeh enačb sledi $I_2 = \frac{5}{14}I_1$ in $I_3 = \frac{2}{7}I_1$, kar pomeni, da točko D zapušča tok $I = I_1 + 2I_2 = \frac{12}{7}I_1 = \frac{12}{7} \frac{U}{R} = \frac{U}{R_{DE}}$, od koder končno dobimo $R_{DE} = \frac{7}{12}R$.

4. Podatki: $l = 14 \text{ cm}$, $B = 0,16 \text{ T}$, $U = 10 \text{ mV}$, $\rho = 8,9 \text{ g/cm}^3$, $\zeta = 0,0175 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$.

Dotikališči vpetih delov prevodne žice z okvirjem razdelita okvir na dva pravokotnika, prvega s stranicami l in $l-x$ in drugega s stranicami l in x . Okvir tako predstavlja vzporedno vezana upornika z uporoma $R_1 = \frac{\zeta}{S}(3l - 2x)$ in $R_2 = \frac{\zeta}{S}(l + 2x)$, če je S presek žice okvirja.

Napetost med dotikališčema okvirja označimo z U ; magnetni sili na stranici okvirja, vzporedni premici skozi dotikališči, sta potem enaki

$$F_1 = IlB = \frac{UlB}{R_1} = \frac{USlB}{\zeta(3l-2x)} \quad \text{in} \quad F_2 = \frac{USlB}{\zeta(l+2x)}.$$

Ročici teh sil, glede na os skozi dotikališči, sta po vrsti $l-x$ in x . Navor magnetnega polja na okvir s tokom je potem enak

$$M = \frac{USlB}{\zeta} \left(\frac{l-x}{3l-2x} - \frac{x}{l+2x} \right) = \frac{USlB}{\zeta} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{y}{(l+y)(l-y)},$$

kjer je $y = \frac{l}{2} - x$ oddaljenost težišča okvirja od osi. Ob primerno izbrani polariteti napetosti deluje magnetni navor v nasprotni smeri kot navor teže $M_g = 4mgy$, kjer je $m = \rho Sl$ masa stranice okvirja. V ravnovesju torej velja

$$y \left[y^2 - l^2 \left(1 - \frac{UB}{8\rho\zeta gl} \right) \right] = 0.$$

Poleg vnaprej pričakovane rešitve $y = 0$ dobimo še rešitvi

$$y = \pm l \sqrt{1 - \frac{UB}{8\rho\zeta gl}} = \pm l \sqrt{1 - \alpha}, \quad \text{kjer je} \quad \alpha = \frac{UB}{8\rho\zeta gl}.$$

Po podatkih v nalogi je $y = \pm 3,5$ cm, se pravi $x = 3,5$ cm, ali pa $x = 10,5$ cm (en položaj je zrcalna slika drugega).

Skupina D

1. Dolžina deske naj bo $2r$. Do zdrsa uteži se ohranja vsota kinetične in potencialne energije sistema deske in uteži, saj poleg navora teže ni ostalih zunanjih navorov:

$$mgr \sin \varphi = \frac{1}{2} J \frac{v^2}{r^2}, \quad J = \left(\frac{M}{3} + m \right) r^2.$$

Dobimo

$$v^2 = \frac{mgr \sin \varphi}{\frac{1}{2}(m + \frac{M}{3})}.$$

Z v smo označili hitrost uteži (ki je tudi hitrost roba deske) tik pred zdrsom. Naj bo v trenutku pred zdrsom normalna komponenta sile deske na utež F_0 , pospešek uteži a in kotni pospešek deske α . Zapišimo Newtonov zakon za tangentno smer gibanja uteži ($ma = = mg \cos \varphi - F_0$) in za vrtenje celotnega sistema ($J\alpha = mgr \cos \varphi$). Ker velja $a = r\alpha$, sledi

$$F_0 = mg \cos \varphi \frac{\frac{M}{3}}{m + \frac{M}{3}}.$$

V radialni smeri velja za gibanje uteži $\frac{mv^2}{r} = F_l - mg \sin \varphi$. Utež prične drseti, ko lepenje doseže maksimalno možno vrednost $F_l = = kF_0$. Od tod dobimo, ob upoštevanju izrazov za F_0 in v^2 , iskani kot φ

$$\tan \varphi = \frac{k}{1 + 9\frac{m}{M}}.$$

2. Podatki: $l = 14$ cm, $B = 0,16$ T, $U = 10$ mV, $\rho = 8,9$ g/cm³, $\zeta = 0,0175$ Ω mm²/m.

a) Glej rešitev 4. naloge v skupini C.

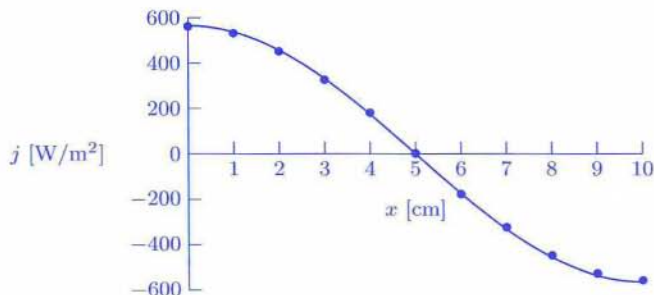
b) Če hočemo poleg rešitve $y = 0$ dobiti še preostali dve, mora biti izpolnjen pogoj $0 \leq y \leq \frac{l}{2}$, se pravi $\frac{3}{4} \leq \alpha \leq 1$, od koder dobimo iskani interval $8,0$ mV $\leq U \leq 10,7$ mV.

3. Podatki: $l = 10$ cm, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $\Delta x = 1$ cm, $\lambda = 1,8$ W/mK, $\rho = 2,7$ g/cm³, $c_p = 1200$ J/kgK.

a) Gostoto toplotnega toka v izbrani plasti računamo iz zveze $j = = \lambda(T_2 - T_1)/2\Delta x$, če sta T_2 in T_1 temperaturi v sosednjih plasteh. Pri prvi in zadnji plasti pa vzamemo temperaturno razliko med izbrano in sosednjo plastjo. Rezultati so zbrani v drugem stolpcu razpredelnice.

x [cm]	T [°C]	j [W/m ²]	ΔT	$T(3 \text{ min})$	$\ln \frac{T(0)-T_0}{T(3 \text{ min})-T_0}$
0	20,0	560	0	20,0	0,102
1	23,1	530	-0,3	22,8	0,107
2	25,9	450	-0,6	25,3	0,104
3	28,1	325	-0,8	27,3	0,100
4	29,5	179	-0,9	28,6	0,105
5	30,0	0	-1,0	29,0	0,100
6	29,5	-179	-0,9	28,6	0,105
7	28,1	-325	-0,8	27,3	0,100
8	25,9	-450	-0,6	25,3	0,104
9	23,1	-530	-0,3	22,8	0,107
10	20,0	-560	0	20,0	0,102

Odvisnost gostote toplotnega toka od razdalje kaže graf:



b) Površje seva gostoto toka σT^4 in prejema gostoto toka iz notranjosti $j(0)$ in iz okolice σT_0^4 :

$$\sigma T^4 = j(0) + \sigma T_0^4, \quad T = \sqrt[4]{\frac{j(0)}{\sigma} + T_0^4} = 362 \text{ K} = 89^\circ \text{C}.$$

c) Zapišemo energijsko bilanco v izbrani plasti z maso $\Delta m = S \Delta x \rho$. Velja $\Delta m c_p \Delta T = (P_{\text{prejeti}} - P_{\text{oddani}}) \Delta t$, od koder sledi

$$\Delta T = \frac{\lambda \Delta t}{\rho c_p (\Delta x)^2} (T_+ + T_- - 2T),$$

kjer smo s T_+ označili temperaturo v sosednji toplejši plasti, s T_- temperaturo v sosednji hladnejši plasti in s T temperaturo v izbrani plasti. Vrednost izraza pred oklepajem je ravno 1.

d) Parameter τ dobimo z logaritmiranjem zveze, podane v besedilu naloge:

$$\tau = \frac{t}{\ln((T(0) - T_0)/(T(3 \text{ min}) - T_0))}.$$

Vrednosti logaritmov so za posamezne plasti navedene v zadnjem stolpcu tabele. Odstopanja so majhna, zato je eksperimentatorjeva domneva smiselna. Določimo povprečno vrednost logaritmov in dobimo $\tau = 30 \text{ min}$.

Bojan Golli

IZBIRNA TESTA ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO

Za uvrstitev v ekipo, ki je zastopala Slovenijo na 41. mednarodni matematični olimpiadi v Južni Koreji, so se kandidati pomerili tudi na dveh izbirnih testih. Prvi test je bil 21. januarja, drugi pa 21. aprila 2000.

Prvi izbirni test

1. Naj bo H višinska točka neenakostraničnega ostrokotnega trikotnika ABC , O pa središče njemu očrtane krožnice. Premici AH in AO naj sekata očrtano krožnico še v točkah M in N . Označimo s P , Q in R zaporedoma presečišča premic BC s HN , BC z OM in HQ z OP . Dokaži, da je $AORH$ paralelogram.
2. Dana je množica $N = \{1, 2, 3, \dots, 1999, 2000\}$. Dokaži, da obstaja 14 podmnožic množice N z naslednjo lastnostjo:
Za vsak $n \in N$ obstaja sedem izmed teh množic, katerih edini skupni element je n .
3. Za neko funkcijo $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ velja

$$f(19 + x) = f(19 - x),$$

$$f(99 + x) = f(99 - x) \quad \text{in}$$

$$f(19 \cdot 99 + x) = f(19 \cdot 99 - x)$$

za vsak $x \in \mathbb{Z}$. Dokaži, da je $f(x + 4) = f(x)$ za vsak $x \in \mathbb{Z}$.

Drugi izbirni test

1. Nad stranicami konveksnega štirikotnika $ABCD$, kjer je $|AC| = |BD|$, so z zunanje strani narisani enakostranični trikotniki. Dokaži, da se daljici, ki povezujeta središči nasprotnih dveh trikotnikov, sekata pravokotno.
2. Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Za pozitivna realna števila $x_1, \dots, x_n$ naj velja

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Dokaži, da je

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq (n-1)^n.$$

3. Na krožnici se nahaja $4n$ točk, ki so izmenično pobarvane z modro in rdečo barvo. Modre točke poljubno razdelimo v n parov in točki v vsakem paru povežemo z modro tetivo. Podobno tudi rdeče točke poljubno razdelimo v n parov in točki v vsakem paru povežemo z rdečo tetivo. Točke na krožnici naj ležijo tako, da se nobene tri izmed tetiv ne sekajo v isti točki. Dokaži, da obstaja vsaj n točk, ki so presečišča po ene rdeče in modre tetive.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

28. letnik, šolsko leto 2000/2001, številka 5, strani 257–320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2000/2001 je za posamezne naročnike **2.400 SIT**, za skupinska naročila šol **2.000 SIT**, posamezna številka **480 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠS

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1452

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



