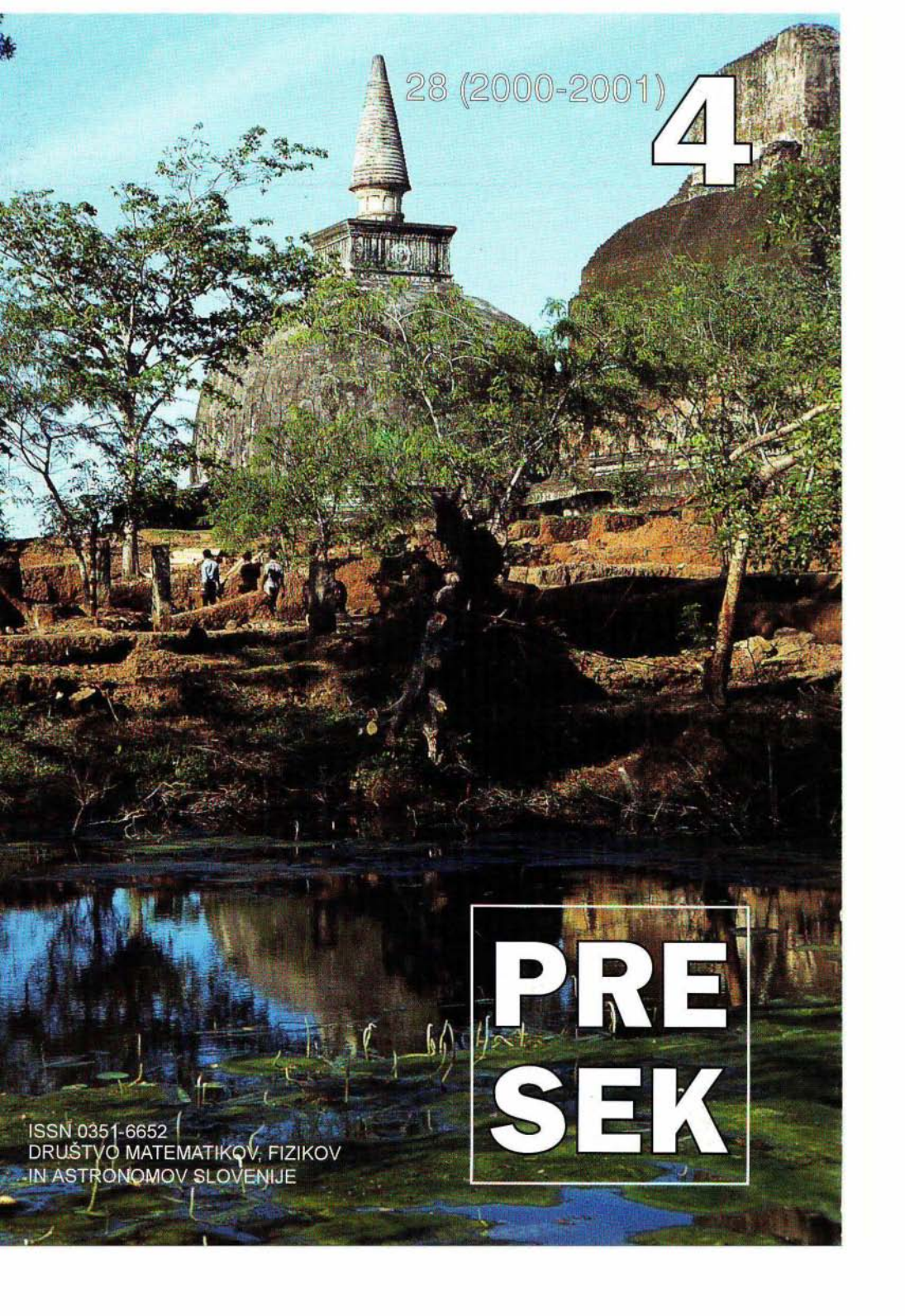


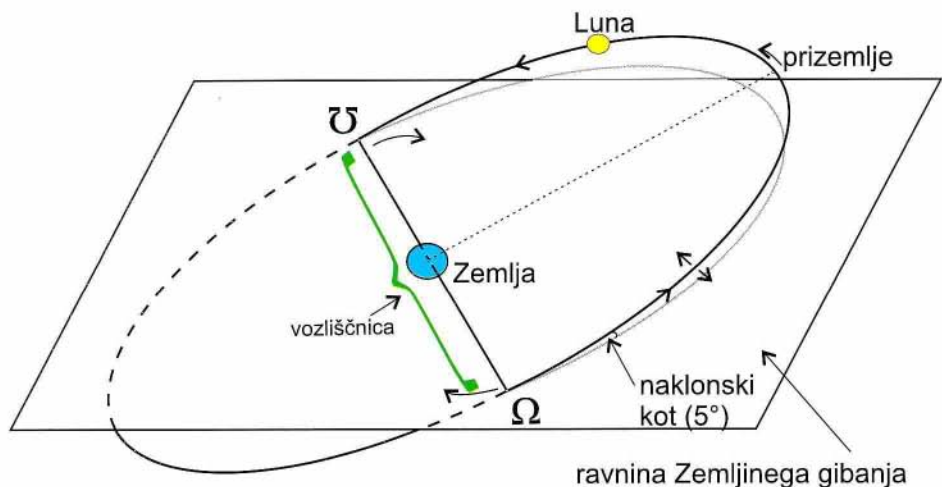


28 (2000-2001)

4

PRE SEK

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV
IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



Slika 4. Ravnina Luninega tira oklepa kot $5,2^\circ$ z ravnino Zemljinega tira gibanja okrog Sonca. Naklonski kot niha okoli osrednje lege. Označeni so: oba vozla (dvižni Ω in padni Υ), vozliščnica in prizemlje. Nakazane so naslednje tri motnje: premikanje prisočja v napredni smeri (v levo), premikanje vozlov v obratni smeri (v desno) in nihanje naklonskega kota (gor in dol). Sonce (moteče telo) si mislimo nekje daleč v desni smeri.

Opomba: Osnovne karakteristike (elementi) Luninega tira se torej neprestano spreminjajo zaradi motenj s strani privlačnosti Sonca in planetov ter tudi zaradi tega, ker Zemlja in Luna nista idealni krogli in enakomerno napolnjeni s snovjo, ampak imata različno razporejene mase na površju (gore, doline, oceane) in v notranjosti. Tako se spreminja ekscentričnost od 0,066 do 0,044 in se zato periodično spreminja tudi dolžina apsidnice. Za elipso se zdi, kot bi pulzirala – se razteguje in skrajšuje – tako da pride prizemlje celo do $56 R_Z$ in odzemlje do $64 R_Z$. Prav tako niha naklonski kot ravnine Luninega gibanja k ravnini ekliptike od $4^\circ 58'$ do $5^\circ 20'$ (okoli povprečne vrednosti $5^\circ 9'$). Premikanje prizemlja Luninega tira v napredni smeri je tudi neenakomerno. Točka prizemlja se obnaša tako, kot bi se pozibavala. Podobno se v obratni smeri premika vozliščnica, opisuje zamotano hkratno rahlo vrtenje in nihanje. Zaradi Sončeve privlačnosti in zaradi eliptičnega Luninega tira in premikanja Luninih vozlov se npr. trajanje sinodskega meseca spreminja v mejah od 29,25 dneva do 29,83 dneva.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
28. letnik, leto 2000/2001, številka 4, strani 193–256

	VSEBINA
MATEMATIKA	Površine in prostornine pravilnih poliedrov (Marko Razpet)..... 212-220
FIZIKA	Zgodba iz Gane (Jože Pahor)..... 196-199 Sto let radia (Janez Strnad)..... 226-233
ASTRONOMIJA	Motnje v gibanju Lune (Marijan Prosen)..... 206-210
RAČUNALNIŠTVO	2001 s kovanci (Martin Juvan)..... 211
NOVICE	Najpomembnejši matematiki (Martin Juvan, Primož Potočnik)..... 200-205
NALOGE	Zloženka (Dragoljub M. Milošević)..... 194 Delitev prostora z ravninami (Marija Vencelj)..... 194 Matematična torta (Silva Kmetič)..... 195 Delitev prostora z n oblami (Marija Vencelj)..... 195 Četrte potence stranic v pravokotnem trikotniku (Dragoljub M. Milošević)..... 211 Številska križanka za matematični podmladek (Marija Vencelj)..... III
REŠITVE NALOG	Neobičajna konstrukcijska naloga – s str. 130 (Marija Vencelj)..... 220-223 Pravokotna številka križanka – s str. 130 (Urška Demšar)..... 233 Videti je zahtevno, pa ni! – Rešitev s str. 133 (Marija Vencelj)..... 234 Križanka "Pravilni poliedri" – s str. 160 (Marko Bokalič)..... 234
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Števniki (Silva Kmetič)..... 194 Križanka "Ob 401. obletnici smrti pogumnega astronoma" (Marko Bokalič)..... 224-225
TEKMOVANJA	36. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)..... 235-236 Državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Nada Razpet)..... 236-242 44. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko)..... 242-245 Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 1999/2000 (Ciril Dominko)..... 245-250 21. mednarodno matematično tekmovanje mest (pomladanski krog) – rešitve s str. 126 – 2. del (Gregor Cigler)..... 250-253 41. mednarodna matematična olimpiada (rešitve izbranih nalog s str. 154) (Matjaž Željko)..... 253-256
NA OVITKU	Dagoba ali stupa v Polonaruwa v Sri Lanki (foto Jože Pahor). Glej tudi prispevek na str. 196..... I Slika k članku Motnje v gibanju Lune na str. 206..... II Kupujemo na trgu v Akri, glavnem mestu Gane (foto Jože Pahor)..... IV

ZLOŽENKA

Če v vodoravne vrste kvadrata v pravilnem vrstnem redu vpišete besede DIADA, ENOTA, FOKUS, METER in RAČUN, boste dobili v obarvanem stolpcu še en matematični pojem.

1				
2				
3				
4				
5				

Dragoljub M. Milošević

ŠTEVNIKI

Izberi poljubno naravno število in ga zapiši z desetiško številko in z besedo. Nato preštej črke v števniku (zapisu z besedo), zapiši dobljeno število in postopek ponavljaj.

Primer: 11 – enajst, 6 – šest, 4 – štiri, ...

Poskusi enako z več izbranimi števili. Kaj opaziš? Oblikuj ugotovitev in jo poskušaj utemeljiti.

Ali velja kaj podobnega v angleškem, nemškem, italijanskem jeziku, ...?

Silva Kmetič

DELITEV PROSTORA Z RAVNINAMI

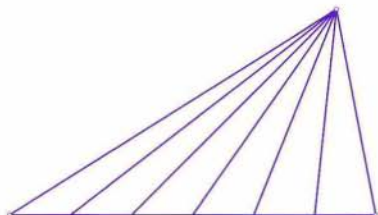
Pravimo, da je množica ravnin v *splošni legi*, če se poljubne tri ravnine te množice sekajo, za poljubne štiri pa velja, da so brez skupne točke.

Vprašanje: Na koliko delov razbije prostor n ravnin, ki so v splošni legi?

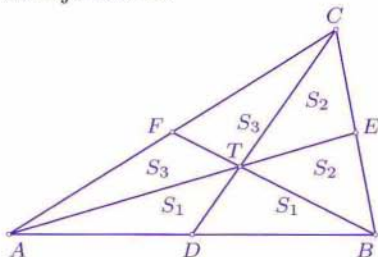
Marija Vencelj

MATEMATIČNA TORTA

Trikotnik lahko razdelimo na 6 ploščinsko enakih delov tako, da ohranimo trikotno obliko posameznega dela, na naslednja načina:



Slika 1.



Slika 2.

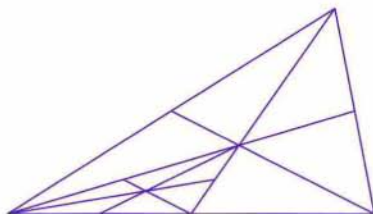
Na sliki 1 je osnovnica razdeljena na 6 skladnih daljic. Nad njimi so trikotniki z isto višino v . Ploščina posameznega dela je $\frac{1}{6}c \cdot v$.

Dokažimo še, da tudi tri težiščnice razdelijo trikotnik (slika 2) na 6 ploščinsko enakih delov. Ploščini trikotnikov ADT in DBT sta enaki, ker imata enaki osnovnici (polovica stranice AB) in skupno višino. Enako velja za para BET , ECT in CFT , FAT . Nato upoštevamo, da imata iz istega razloga enaki ploščini trikotnika ADC in DBC ter ABF in FCB . Sledi $S_1 + 2S_3 = S_1 + 2S_2$, $S_3 + 2S_2 = S_3 + 2S_1$ in od tod $S_1 = S_2 = S_3$.

Trikotna torta

Matematiku so kolegi iz nagajivosti poklonili trikotno torto. Ta je izkoristil izziv in torto razrezal na 6 enakih delov kot kaže slika 3. Debelina torte je po vsej ploskvi približno enaka.

Vsakemu (tudi sebi) je dal en kos torte. Nato je preostali del ponovno razdelil na 6 ploščinsko enakih delov in vsakemu dal en kos. Postopek je želel nadaljevati. Ali bi po tem postopku (če bi bil izvedljiv nešteto krat) res dobil vsak $1/5$ torte?



Slika 3.

Silva Kmetič

DELITEV PROSTORA Z n OBLAMI

Na koliko delov razbijemo prostor z n oblami, ki se paroma sekajo?

Opomba: Obla ali sfera imenujemo površje krogle.

Marija Vencelj

ZGODBA IZ GANE

“O čem bova govorila jutri?” sem vprašal Karla. Sedela sva v vrtu Havelock Tour Inna v Colombu, glavnem mestu Sri Lanke, in pripravljala predavanja za naslednji dan. Morda bi kaj povedala o aktivacijski analizi? V Colombu so se odločili, da pripravijo magistrski študij iz jedrske fizike. Večino predavanj so zmogli sami, naju s Karlom pa je povabila Mednarodna agencija za atomsko energijo, da pomagava pri nekaterih predmetih.

“Zanimivo zgodbico vem,” je rekel Karel. “Morda bi jo uporabila za uvod? V Gani sem na trgu naletel na bakren kipec. Prodajalec je trdil, da je star nekaj sto let. Naj ga kupim? Kako bom vedel, če je pravi ali ponarejen? V Afriki najdemo stare kulture in prav mogoče bi bilo, da je bil kipec res izdelan pred petsto leti.”

Videl sem se na trgu s spominki v Akri. Vročina, vlaga. Oblaki nad nami so se gostili. Bili smo sredi deževne dobe. Množica prodajalcev, ki je oblegala tri kupce. Kipci iz ebenovine, sulice, bobni, maske, kože... Težko se je bilo odločiti za nakup. Ko smo odhajali, nam je kar nekaj prodajalcev sledilo in še vedno ponujalo svoje izdelke.

“Premamilo me je. Ni mi bilo toliko do samega kipca. Bolj me je privlačila želja, da bi raziskal, če je kipec pravi,” je nadaljeval Karel.

“Pa si tudi arheolog?” me je zanimalo.

“Ne, pomagali sta mi kemija, oz. fizika. Bakru, ki ga pridobimo iz rud, je primešano srebro, dostikrat tudi zlato. Zadnjih sto let prečiščujejo baker z elektrolizo. Tako pridejo do primesi, ki so marsikdaj dragocenejše od samega bakra. Pred dobo elektrike za primesi niso vedeli in jih niso znali izločiti. Če je kipec star, vsebuje poleg bakra tudi nekaj srebra. Če je potvorba, vlita nedavno, srebra ne odkriješ.”

“Lahko tebi, ki si kemik,” sem zavidal Karlu, ki se je nasmehnil: “Ravno vi, fiziki, ste omogočili, da hitro preverim, če kipec vsebuje kaj srebra. Kaj pa nevtronska aktivacijska analiza?”

Seveda. Košček srebra, ki ga za nekaj minut izpostavimo obsevanju z nevtroni, postane radioaktiven. To pa pomeni, da oddaja sevanje, tudi ko ga oddaljimo od nevtronskega vira. Radioaktivnosti se je srebro nalezlo zelo hitro, zato ta radioaktivnost tudi hitro usiha. Po desetih ali petnajstih minutah o radioaktivnosti ne bo več niti sledu. Enako velja tudi tedaj, če obsevamo bakreni kipec, ki vsebuje le nekaj srebra. Če torej radioaktivnost kipca, ki jo ugotavljamo z geigerskim ali scintilacijskim števcem, pojema tako, kot to pričakujemo pri srebru, vemo, da je v bakru primes srebra. Kipec je najbrže pristen. Če srebrove aktivnosti ne zasledimo, je kipec iz sodobnega bakra, torej ni mogel biti napravljen pred nekaj stoletji.

Zdaj si oglejmo analizo podrobneje. Najteže je priti do nevtronov. Če imamo raziskovalni jedrski reaktor, nam nevtronov ne manjka. Kadar je reaktor v pogonu, se nevtroni rojevajo pri cepitvah uranovih jeder. Ob rojstvu so ti nevtroni hitri, ob trkih z jedri vodika v vodi, ki obliva uranske palice, se nevtroni upočasnijo. Počasni nevtroni cepijo nova uranova jedra. Marsikateri počasni nevtron pa zadene tudi jedro srebrovega atoma in v njem obtiči, ko spustimo kipec iz Gane v reaktor.

Kaj se torej dogaja srebru v reaktorju? Za kemika je srebro le srebro, fizik pa razlikuje med dvema vrstama srebra: ^{107}Ag in ^{109}Ag . Pri prvem je jedro sestavljeno iz 107 kroglic. 47 je protonov, ki imajo majhen pozitiven naboj, 60 pa je nevtronov, ki so brez naboja. Ko tako jedro v reaktorju pogoltne nevtron, je v jedru kroglica več, zato se imenuje ^{108}Ag . Dodani nevtron je vnesel v jedro nemir. Novonastalo jedro ni stabilno. Prej ali slej se tako jedro spremeni. Izleti elektron, delec z neznatno maso, ki je približno dvatisočkrat manjša od mase protona ali nevtrona, in z nabojem, ki je enak naboju protona, le da je negativen. Ta delec odnaša tudi energijo, saj se giblje. Pojav, da jedra odmetavajo delce in se pri tem spreminjajo, se imenuje radioaktivnost po prvem elementu radiju, ki sta ga zasledila in raziskovala zakonca Pierre in Marie Currie. Pred sto leti, ko so z raziskavami radioaktivnosti začeli, niso vedeli kaj dosti o naravi sevanja, ki je izhajalo iz nekaterih snovi. Sevanje so delili na tri vrste: alfa, beta in gama. Šele kasneje so ugotovili, da gre pri sevanju beta za elektrone. Ime žarki ali delci beta pa se je ohranilo. Od kod pa se je vzel elektron, ki ga v jedru nismo zasledili? Eden od nevtronov se je preobrazil v proton. Nevtron je namreč težji od protona in elektrona skupaj. Tudi z nabojem je vse v redu. Nevtron nima naboja, izleteli elektron in proton, ki je ostal v jedru, imata enake naboje, različne le po predznaku, torej je tudi njun celotni naboj enak 0. Novo jedro s protonom več in nevtronom manj pa ni več srebro, ampak kadmij. Število vseh protonov in nevtronov v jedru je še vedno 108, zato tako kadmijevo jedro imenujemo ^{108}Cd .

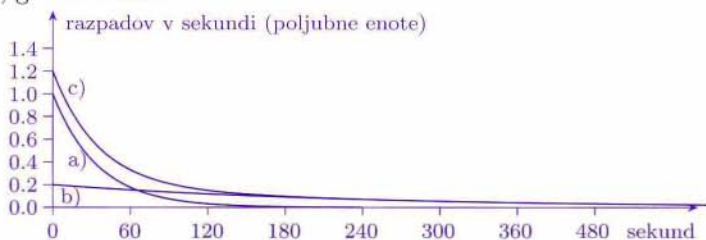
Podobno usodo doživlja ^{109}Ag . Ko pogoltne nevtron, postane ^{110}Ag . Tudi to jedro je nestabilno. Hitro razpade in odda sevanje.

Zdaj, ko smo spoznali, da obe vrsti srebra lahko pogoltneta nevtron, postaneta nestabilna, odmetavata delce in se spremenita v kaj bolj obstojnega, se vprašamo, kako bo naše prepoznavanje srebra sploh delovalo. Poleg srebra vsebuje bakreni kipec lahko tudi druge primesi, ki bodo govtale nevtrone in oddajale sevanje. Tudi samemu bakru bi se utegnilo zgoditi kaj podobnega. Res je, z opisano metodo, ki ji pravimo nevtronska aktivacijska analiza, je mogoče zaznavati mnoge kemijske elemente. Treba pa je nekaj detektivskega duha, da ugotovimo, za kateri element gre.

Nekatera novonastala jedra razpadejo zelo hitro. Še preden jih dvignemo iz reaktorja in pokažemo merilniku radioaktivnosti, bo razpad praktično končan. Nekatera so bolj dolgoživa. Njihov razpad se lahko razteza prek ur ali dni, mesecev ali celo let. Ker ima množica takih jedr za razpad dovolj časa, bodo razpadi le redki in jih bo zato težje zaznati.

Obe različici srebra, fiziki ju imenujemo izotopa, pa imata zelo pripravna razpadna časa. Od 10 000 jedr srebra 108 jih razpade 5 000 v približno 140 sekundah. Za srebro 110 je ta čas le 24 sekund. Posameznih atomov ne znamo prešteti; prav lahko pa je s primernim detektorjem sevanja ugotavljati posamezne razpade tako, da prestrežemo izleteli delec beta. Geigerski števec, ki ga vsaj po imenu dobro poznamo, je za kaj takega zelo primeren.

Svoji dve srebrni bomo prepoznali, če bomo zasledovali upadanje števila izletelih delcev. Če je časovni potek upadanja podoben, kot ga kaže slika 1, gre za srebro.



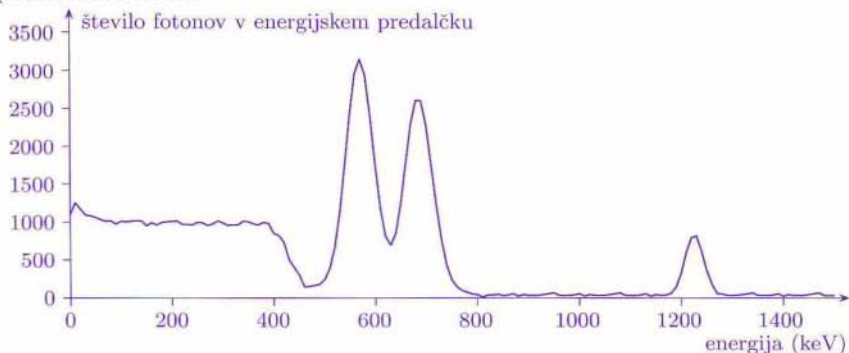
Slika 1. Aktivnost srebra, ki smo ga obsevali z nevtroni 30 sekund: a) razpadna krivulja za srebro 110, b) razpadna krivulja za srebro 108, c) ker ne razlikujemo obeh razpadov, izmerimo vsoto obojih.

Drugo, močnejše orodje za prepoznavanje jedr, ki so postala radioaktivna, je merjenje energije izletavajočih delcev. Nekaj primerov:

V jedro arzena ^{75}As se je ujel nevtron. Drugačnih jedr, z več ali manj nevtroni, pri naravnem arzenu ne poznamo. Arzen 75 je torej postal arzen 76. Pri razpadu bo odletel elektron z večjo ali manjšo energijo. Ker je jedru preostalo še nekaj energije, jo odda s sevanjem gama, ali kot tudi pravimo, s fotonom. Pri razpadu arzena 76 izletavajo fotoni treh različnih energij. Te energije so 560 keV, 675 keV in 1216 keV. Če torej zaznamo fotonska sevanja s temi energijami, vemo, da je obsevani vzorec vseboval arzen. Kako torej ugotoviti energije odletavajočih fotonov?

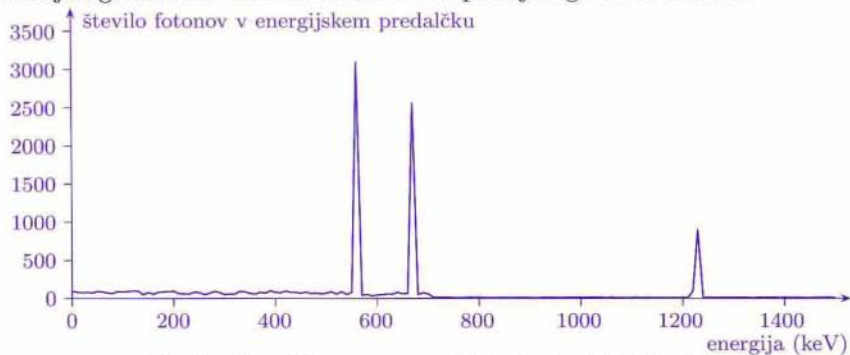
Fotonsko sevanje geigerski števec le slabo zaznava, kaj več pa o njem ne zna povedati. Odgovor na vsak zaznani delec je električni sunek. Žal so vsi sunki po velikosti enaki, ne glede na energijo delca, ki je sunek povzročil. Njegov mlajši brat, scintilacijski števec, lahko meri energijo vsakega delca, ki ga je prestregel. Pri enakih fotonih bodo vsi odgovori več ali manj enaki.

Kaj je videl, pove tudi scintilacijski števec z električnim sunkom. Velikost sunka pa je sorazmerna energiji zaznanega delca, tokrat fotona. Ko dalj časa zbiramo odgovore in jih urejamo po velikostih, lahko rezultate pokažemo s sliko.



Slika 2. Arzen 76 oddaja fotone treh različnih energij: 560 keV, 675 keV in 1216 keV. Tako zazna fotone scintilacijski števec.

Precej dražji in mlajši polprevodniški števec ima ostrejšje oči od scintilacijskega števca. Ta vidi fotone iz razpadajočega arzena takole:



Slika 3. Tako vidi arzenovo sevanje polprevodniški števec.

“Pa je bil kipec res star?” me je zanimalo. Karl je potrdil: “Vseboval je srebro.”

Vseeno pa bodite previdni, če boste kdaj v Sri Lanki kupovali bakrene kipce, ki naj bi jih pred 1800 leti vliвали v Sigiriji ali Anuradapuri. Morda že najini Srilančani, ki so se naučili, kako razlikovati med starim in novim, sodelujejo pri izdelavi spominkov in dodajajo čistemu bakru kanček srebra. Tedaj se tudi z aktivacijsko analizo ne boste mogli več prepričati, ali so vas opeharili ali ne.

Jože Pahor

NAJPOMEMBNEJŠI MATEMATIKI

Ob izteku tisočletja smo se na uredništvu Preseka odločili izvesti kratko in preprosto anketo o *najpomembnejšem matematiku 20. stoletja* in o *najpomembnejšem matematiku vseh časov*. Pravila glasovanja so bila sledeča: V vsaki od obeh konkurenc (*matematiki 20. stoletja* in *matematiki vseh časov*) je vsak vprašani lahko navedel največ tri matematike in med njih razdelil 6 točk – vsakemu matematiku največ 3. Zmagovalec je postal tisti matematik, ki je zbral največje število točk.

Anketne lističe smo razdelili 108 slovenskim matematikom-raziskovalcem. Na seznam smo poskušali vključiti vse, ki se z matematičnim raziskovanjem ukvarjajo poklicno, gotovo pa smo na koga tudi pozabili – tem se iskreno opravičujemo. Do konca novembra je na uredništvo Preseka prispelo 28 pravilno izpolnjenih anket, kar je manj, kot smo pričakovali. Predvsem prvi avtor je bil nad odzivom razočaran, medtem ko se drugemu niti ni zdel tako zelo slab.

Sedaj pa k rezultatom. V konkurenci *matematikov 20. stoletja* so vprašani omenjali 25 imen. Premočno je zmagal **David Hilbert**. Zbral je 49 točk, kar je več kot naslednji trije skupaj. Med svoje izbrance ga je uvrstilo kar 20 od 28 tistih, ki so anketo pravilno izpolnili, od tega mu je maksimalno število točk prisodilo 10 vprašanih. Sledita **John von Neumann** in **Kurt Gödel** z 20 oziroma 17 točkami. O teh treh matematikih bomo zapisali nekaj besed v nadaljevanju. V tabeli smo navedli osem najbolj uvrščenih matematikov. Od preostalih 17 imen, ki so jim vprašani dodeljevali točke, omenimo še Burnsidea,¹ ki je poleg Hilberta, von Neumanna, Banacha, Poincaréja in Cartana edini, ki mu je nekdo prisodil maksimalno število točk, ter Wilesa,² ki je od sedemnajsterice slabše uvrščenih edini dobil glasove več kot dveh vprašanih.

V konkurenci *matematikov vseh časov* je bil boj za zmago bolj izenačen. Anketiranci so glasovali za 17 različnih matematikov, lovorika najpomembnejšega pa je na koncu pripadla **Friederichu Gaussu** (zbral je 43 točk), ki je drugouvrščenega **Evklida** (35 točk) premagal za 8 točk. Pri tem je zanimivo, da je Evklidu maksimalno število točk prisodilo kar sedem vprašanih, Gaussu pa le pet. Gauss je torej zmagal zato, ker je zanj glasovalo kar 19 vprašanih. Sledijo Euler, Newton in Arhimed. Hilbert,

¹ William Burnside (1852–1927), angleški matematik, profesor matematike na šoli Kraljeve mornarice v Cambridgeu. Sprva se je posvečal hidrodinamiki in kompleksni analizi, kasneje pa se je ukvarjal s teorijo grup. Leta 1897 je izdal knjigo z naslovom *Teorija grup končnega reda*, ki še danes predstavlja eno pomembnejših monografij s tega področja.

² Andrew John Wiles (1953). Leta 1995 mu je uspelo dokazati Fermatov izrek.

zmagovalec v konkurenci 20. stoletja, je zbral 7 točk in deli 6. mesto skupaj z Galoisom in Leibnitzom. Z izjemo Cantorja in Fermata na 9. oziroma 10. mestu je vsak od preostalih matematikov dobil le po en glas.

mesto	matematik	točke
1	Hilbert	49
2	von Neumann	20
3	Gödel	17
4	Banach	11
4	Poincaré	11
6	Erdős	8
6	Kolmogorov	8
8	Cartan	7

mesto	matematik	točke
1	Gauss	43
2	Evklid	35
3	Euler	21
4	Newton	16
5	Arhimed	12.5
6	Galois	7
6	Hilbert	7
6	Leibnitz	7

Osem najpomembnejših matematikov 20. stoletja in vseh časov.

Po pričakovanju nihče od vprašanih med izbrance ni uvrstil nobene slovenskega matematika. Pravzaprav to ne drži povsem, saj je bila med odgovori tudi glasovnica, na kateri so bili navedeni sami Slovenci. Kasneje se je izkazalo, da je njen avtor zelo površno prebral navodila. Glasovnice seveda nismo upoštevali. Toliko o razširjenem prepričanju, da so matematiki vestni in natančni. Zdaj pa še nekaj besed o *zmagovalcih*.

David Hilbert³ se je rodil leta 1862 v pruskem mestu Königsberg (danes Kaliningrad v Rusiji), kjer je na tamkajšnji univerzi tudi pričel s svojim matematičnim delovanjem. Prvi pomembnejši izrek, ki se danes imenuje Hilbertov izrek o bazi in sodi na področje algebre, je dokazal leta 1888. Leta 1895 se je preselil na ugledno univerzo v Göttingenu, kjer je zasedel matematično stolicu. Ukvarjal se je z najrazličnejšimi matematičnimi področji: geometrijo, analizo, matematično fiziko in algebro. Za razvoj matematike v 20. stoletju je gotovo najpomembnejše njegovo predavanje na 2. mednarodnem matematičnem kongresu leta 1900 v Parizu, kjer je predaval o matematičnih



³ Glej tudi M. Vencelj, *David Hilbert (1862–1943) — Ob stoletnici Osnov geometrije in skorajšnji stoletnici Hilbertovih problemov*, Presek 27 (1999/2000), str. 26–31.

izzivih 20. stoletja in postavil znamenitih 23 problemov.⁴ Veliko teh problemov je bilo kasneje rešenih, nekaj pa jih je še vedno odprtih. Med Hilbertove učence sodijo veliki matematiki, kot sta Weyl in Zermelo ter celo svetovni šahovski prvak Lasker. Kot podoktorski študent ga je v letih 1900 in 1901 obiskal tudi Josip Plemelj. David Hilbert je kot Plemelj učitelj matematični prednik večini slovenskih matematikov. Hilbert je deloval na univerzi v Göttingenu vse do upokojitve leta 1930.

John von Neumann se je rodil leta 1903 v Budimpešti kot János von Neumann, sin premožnega bankirja Maxa Neumanna. John von Neumann po osnovni izobrazbi ni bil matematik – leta 1926 je končal dodiplomski študij kemije v Zürichu. Čeprav ni imel formalne matematične izobrazbe, pa je ves čas kazal veliko zanimanja za matematiko. Istega leta kot je zaključil dodiplomski študij kemije, je za svoje matematično delo prejel doktorat univerze v Budimpešti. Po doktoratu



je predaval na univerzah v Berlinu in Hamburgu, nekaj časa pa je bil tudi v Göttingenu pri Hilbertu. Še zelo mlad je von Neumann zaslovel v tedanjih matematičnih krogih kot *mladi matematični genij*. Leta 1930 se je preselil v Princeton v ZDA, kjer je deloval vse do svoje smrti leta 1957. Kot večina velikih matematikov se je tudi von Neumann ukvarjal z različnimi matematičnimi disciplinami, od logike in teorije množic prek različnih vej analize do uporabne matematike in matematične fizike. Je tudi eden od očetov teorije iger in eden od pionirjev računalništva. Za konec velja omeniti tudi von Neumannovo sodelovanje z ameriško vojsko pri projektih razvijanja jedrskega orožja.

⁴ Glej npr. <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html>.

Kurt Gödel se je rodil leta 1906 v češkem mestu Brno. Leta 1923 je pričel s študijem matematike na univerzi na Dunaju. Prav tam je leta 1929 tudi doktoriral in se leto kasneje zaposlil. Klima nacistične Avstrije Gödlu ni odgovarjala, zato je leta 1940 emigriral v ZDA. Tam je postal predavatelj matematike na Princetonu. Proti koncu življenja je začel bolehati za preganjavicami. Zaradi prepričanja, da ga hočejo zastrupiti, je pričel odklanjati hrano. Umrl je leta 1978 zaradi podhranjenosti. Njegova najpomembnejša dela sodijo na področje logike in teorije množic.



gov znameniti *izrek o nepolnosti* pravi, da v vsaki matematični teoriji, ki vsebuje klasično aritmetiko naravnih števil, obstajajo trditve, ki se jih znotraj teorije ne da niti dokazati niti ovreči. Pomen njegovega izreka je seveda neizmerljiv. Z njim je postavil na glavo prepričanje, da so v matematiki vsi problemi rešljivi in da je njihova rešitev le vprašanje znanja in spretnosti matematikov, ki se z njimi ukvarjajo. Za mnoge znane odprte probleme (celo za nekaj Hilbertovih problemov) se tako danes sumi, da morda sodijo med *neodločljiva* vprašanja, ki ne bodo nikoli niti dokazana niti ovržena, vsaj ne v obliki, v kateri so bila v začetku postavljena.

Johann Carl Friederich Gauss se je rodil leta 1777 v Braunschweigu v Nemčiji. Že kot sedemletni deček je opozoril na svoje matematične sposobnosti. Znana je anekdota o mladem Gaussu, ki je v šoli v nekaj sekundah izračunal vsoto vseh naravnih števil med 1 in 100. Seštevanja se seveda ni lotil neposredno (kot je pričakoval učitelj), temveč je opazil, da lahko teh 100 števil združimo v 50 parov, tako da je vsota vsakega para enaka 101. Tudi Gaussova kariera je povezana z univerzo v Göttingenu. Tam je namreč leta 1795 pričel svoj matematični študij. Göttingen je zapustil leta 1798



in kmalu zatem objavil svoje prvo pomembno odkritje: konstrukcijo pravičnega 17-kotnika s šestilom in ravnilom ter kriterij, ki pove, za katera naravna števila n je konstrukcija pravičnega n -kotnika s šestilom in ravnilom možna. Svojo doktorsko disertacijo s področja algebre je leta 1799 predložil univerzi v Helmstedtu. V Göttingen se je za vedno vrnil leta 1807, ko je bil imenovan za direktorja tamkajšnjega observatorija. To imenovanje ga je rešilo finančnih skrbi ob vzdrževanju številne družine in mu hkrati dalo dobre možnosti za stalno znanstveno delo. Najpomembnejša Gaussova dela sodijo na področje algebre in teorije števil, ukvarjal pa se je tudi z drugimi matematičnimi področji. Veliko svojega časa je posvečal tudi povsem praktičnim problemom. Med drugim je računal orbite nebesnih teles ter se ukvarjal z Zemljinim magnetizmom in geodezijo. Umrli je leta 1855 v Göttingenu v 78. letu starosti.

O življenju **Evklida** iz Aleksandrije ne vemo veliko. Rodil naj bi se okoli leta 325 pred našim štetjem. Deloval je v Aleksandriji v Egiptu, v mestu, ki ga je ustanovil Aleksander Veliki in je po njegovi smrti s svojo znamenito knjižnico postalo središče helenističnega sveta. Evklidovo najpomembnejše delo so *Elementi*, zbirka 13 knjig, v katerih je zbral večino pomembnejših izrekov grške matematike. Prvih šest knjig obravnava geometrijo v ravnini in ulomke. Tu je naveden tudi znameniti *aksiom o vzporednicah*, ki pravi, da k dani premici skozi izbrano točko obstaja natanko ena vzporednica. Razprave o njem so v prvi polovici 19. stoletja pripeljale do odkritja tako imenovanih *neevklidskih* geometrij, to je geometrij, v katerih navedena zveza med točkami in premicami ne velja. Sedma, osma in deveta knjiga so posvečene teoriji števil. Tako je v sedmi knjigi opisan postopek, s katerim poiščemo največji skupni delitelj dveh števil (danes mu pravimo *Evklidov algoritem*). Deseta knjiga govori o iracionalnih številih. Zadnje tri knjige obravnavajo geometrijo v prostoru. V zadnji, trinajsti knjigi je tako podan dokaz, da obstaja natanko pet pravičnih (*platonskih*) teles: tetraeder, kocka, oktaeder, ikozaeder in dodekaeder. Evklidovi *Elementi* (z dopolnitvami in komentarji) so bili kar dve tisočletji standardni učbenik geometrije, način



podajanja snovi, pri katerem najprej navedemo predpostavke (postulate, aksiome), nato pa iz njih izpeljemo trditve, pa je močno vplival na razvoj moderne matematike. Seveda pa strogosti izpeljav (dokazov) v Evklidovih Elementih ne smemo presoјati z merili današnje matematike. Evklid je umrl okoli leta 265 pred našim štetjem v Aleksandriji.

Leonhard Euler se je rodil leta 1707 v Baslu v Švici. Tam je tudi študiral, sprva na očetovo željo teologijo, ker pa ga ta ni pritegnila, se je prepisal na matematiko. Študij je dokončal leta 1726, leto kasneje pa se je odpravil v Sankt Petersburg, glavno mesto carske Rusije, kjer je dobil službo na matematično-fizikalnem oddelku Akademije znanosti. Tam je ostal do leta 1741, ko se je na povabilo pruskega kralja Friderika II (Velikega) preselil v Berlin. V Berlinu je ostal 25 let, ko pa so se njegovi odnosi s kraljem poslabšali, se je leta 1766 vrnil v Sankt Petersburg. Tam je ostal do svoje



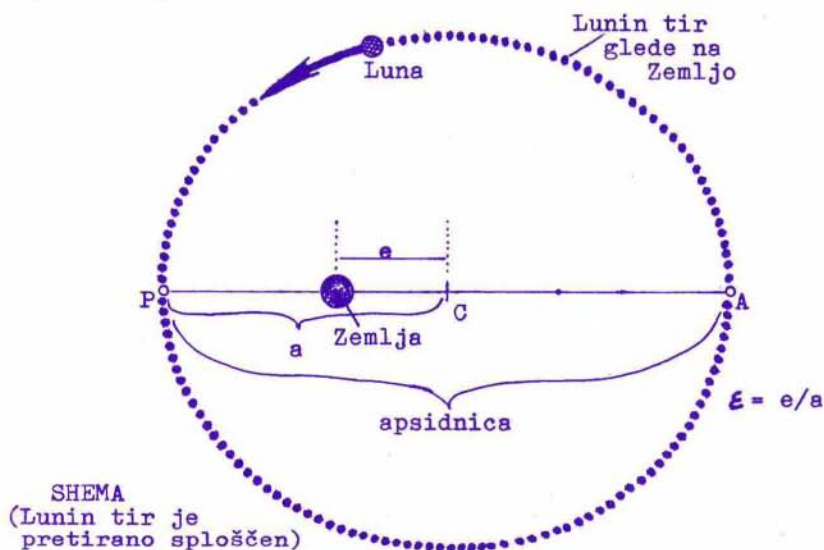
smrti leta 1783. Euler je bil izredno plodovit znanstvenik. Napisal je preko 800 knjig, člankov in drugih matematičnih, pa tudi astronomskih in fizikalnih del. Čeprav je imel že pri tridesetih letih težave z vidom, po vrnitvi v Rusijo pa je popolnoma oslepel, je ostal izredno delaven vse do smrti. Imel je izvrsten spomin, kar mu je omogočalo, da je ob pomoči sodelavcev in sinov kljub slepoti nadaljeval z delom. Pomembno je prispeval k vsem vejam tedanje matematike, zelo vplivni pa so bili tudi njegovi učbeniki, v katerih je sistematično zbral in uredil tedanje znanje z različnih področij matematike. Tako je npr. vpeljal pisavo $f(x)$ za vrednost funkcije v točki x , e za (Eulerjevo) število, ki je osnova naravnih logaritmov, π za razmerje med obsegom in premerom kroga, znak Σ za zapisovanje vsot, itd. Po njem se imenuje tudi Eulerjeva funkcija φ iz teorije števil (vrednost $\varphi(n)$ pove, koliko števil od 1 do n je tujih s številom n), Eulerjeva formula, ki v osnovni različici podaja zvezo med številom oglišč, robov in lic pri poliedrih, Eulerjevi sprehodi v teoriji grafov (to so sprehodi, ki vsebujejo vsako povezavo grafa natanko enkrat) idr.

Martin Juvan, Primož Potočnik

MOTNJE V GIBANJU LUNE

Pri Luni navadno obravnavamo le eno gibanje, rečemo mu kar kroženje okrog Zemlje. Dejansko se Luna giblje okrog Zemlje po elipsi. To razmeroma redko omenjamo, še redkeje pa, da se Luna vrti okrog svoje vrtilne osi. Da bi imela Luna še kakšno drugo, dodatno gibanje, o tem skorajda ne govorimo. Nekateri celo mislijo, da je o tem nevarno govoriti in pisati. Pogum velja.

Tako bomo tokrat spregovorili prav o nekaterih teh – drugih gibanjih. Predvsem zato, da bi spoznali, kako zamotano vesoljsko telo je Luna. Človek ji zlepa ni kos. Včasih se mi zdi, da je Luna bolj podobna okrog Zemlje gugajočemu se krompirju kot pa resnemu vesoljskemu telesu, ki naj bi se pokoravalo vsem vesoljskim zakonom gibanja, saj je njeno gibanje zelo nepravilno in neverjetno nepredvidljivo. Že njen vzid v določenem kraju težko napovemo.

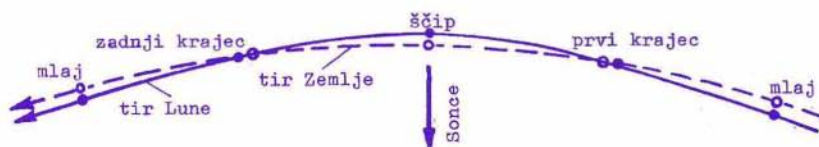


Slika 1. Luna se giblje okrog Zemlje po elipsi (ne po krogu), katere velika polos je $a = 60,3 R_Z$, ekscentričnost pa $\epsilon = \frac{1}{18}$. V prizemlju je Luna bliže Zemlji za $\frac{1}{18}$ velikosti velike polosi, to je za $\epsilon = a/18 = 60,3 R_Z/18 = 3,35 R_Z = 21\,000\text{ km}$, v odzemlju pa za toliko dlje (od srednje oddaljenosti).

Luna je zares velika uganka, a ne samo glede gibanja. (Vemo sicer, da Luna vzhaja in zahaja, da ima svoje navidežno dnevno gibanje od vzhoda

proti zahodu zaradi vrtenja Zemlje in da ima svoje navidezno mesečno gibanje glede na zvezde od zahoda proti vzhodu zaradi kroženja okrog Zemlje. Preberite si še prispevek *Premikanje Lune glede na zvezde*, Presek 27 (2000), 136.) Število Luninih skrivnosti se je z obiskom astronomov samo še povečalo.

Luna se giblje v napredni ali pozitivni smeri po eliptičnem tiru (ne po krožnici) okrog Zemlje. Srednja oddaljenost Lune od Zemlje, to je velika polos te elipse, meri $a = 384\,400$ km, kar je približno $60 R_Z$ – polmerov Zemlje. Ekscentričnost (mera za sploščenost) elipse je $\varepsilon = e/a = 0,055 \approx \frac{1}{18}$. Zato oddaljenost Lune od Zemlje niha med $57 R_Z$, ko je Luna najbližje Zemlji v prizemlju (perigeju) P , in $63 R_Z$, ko je v odzemlju (apogeju) A , od Zemlje najbolj oddaljeni točki Luninega tira.



Slika 2. Tir gibanja Lune in tir gibanja Zemlje glede na Sonce.

Povprečna hitrost Lune na tiru je 1 km/s. Ravnina tira Luninega gibanja je nagnjena proti ravnini tira Zemljinega gibanja (ekliptike) za dobrih 5° . Vse omenjene količine pa niso konstantne, ampak se s časom (periodično) spreminjajo.

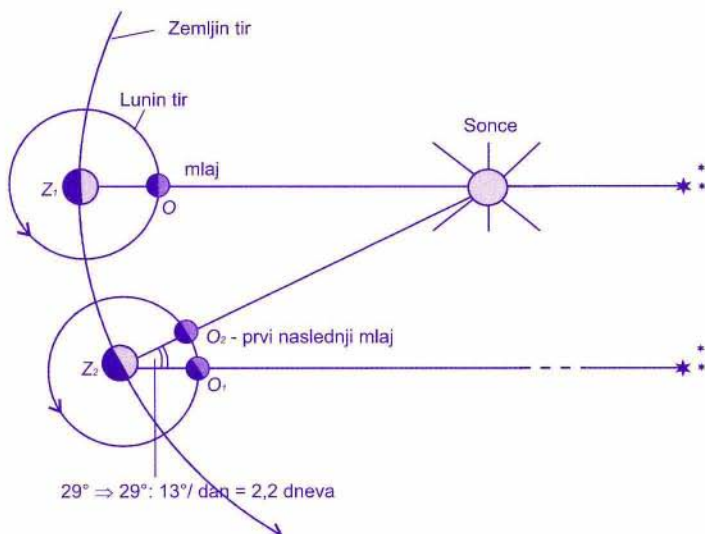
Obhodnemu času Lune navadno rečemo mesec. Glede na izbiro točke ali črte, po kateri opredelimo poln obhod Lune okrog Zemlje, pa razlikujemo različne mesece, ki so različno dolgi.

Čas med dvema zaporednima prehodom Lune čez iste zvezde, to je $27,3$ dneva, je siderski ali zvezdni mesec (geocentrični vidik). To je tudi obhodni čas Lune okrog Zemlje (heliocentrični vidik). Čas, ki ga potrebuje Luna, da pride v enako navidezno ali kotno razdaljo (lego) glede na Sonce, je sinodski mesec (lunacija). Po enem sinodskem mesecu se zvrstijo vse mene in se spet pojavi ista mena. Sinodski mesec je za $2,2$ dneva daljši od zvezdnega, in torej meri $29,5$ dneva. Zakaj pride do te razlike, pojasnjuje slika 3.

Čas med dvema zaporednima prehodom Lune čez pomladišče (točke na nebu, v katero pride Sonce ob spomladanskem enakonočju) pa se imenuje tropski mesec. Je nekoliko krajši kot zvezdni mesec, ker se pomladišče zaradi precesije pomika v smeri nasprotni gibanju Lune. Poznamo pa še druge mesece (glej dalje in razpredelnico).

ime meseca	obhod Lune okrog Zemlje glede na	trajanje dni
drakonski	isti vozlel	27,2122
tropski	pomladišče	27,3216
zvezdni	iste zvezde	27,3217
anomalistični	perigej	27,5545
sinodski	isto meno	29,5306
koledarski	(dogovor)	28 do 31

Preglednica mesecev in njihovo trajanje



Slika 3. Razlaga, zakaj sinodski mesec traja dlje od zvezdnega. Čas, v katerem pride Luna iz lege O v lego O₁, je zvezdni mesec. Čas, v katerem pride Luna iz lege O v lego O₂, pa je sinodski mesec. Da pride Luna iz O₁ v O₂, mora na nebu preiti kotno razdaljo 29°, torej potovati še 29° : 13°/dan = 2,2 dneva.

Opazovalcu na ekliptički ravnini bi se zdelo, da Luna zaradi hkratnega gibanja Zemlje opleta okrog Zemlje, pri čemer se Luna oddalji od Zemlje le za 1/400 razdalje Zemlja-Sonca. Privlačna sila Sonca povzroči, da ostaja Lunin tir vedno konkaven.

Gledano z Zemlje, se zdi gibanje Lune zelo zapleteno. Luna je razmeroma blizu Sonca, ki s svojo ogromno maso povzroča v njenem gibanju močne spremembe oz. periodične odklone, imenovane *motnje* (perturbacije). Zaradi bližine Zemlje opazno vplivajo na gibanje Lune tudi relief

in neenakomerna porazdelitev mase v Zemljini notranjosti (Zemlja ni enakomerno gosta). Poznavanje porazdelitve mas na Zemlji je še vedno velika uganka. Iz gibanja umetnih satelitov, ki so zaradi večje bližine Zemlje bolj izpostavljeni vplivom Zemlje in manj Sonca, sicer o tem vemo vedno več, vendar še vedno premalo. Motnje v gibanju Lune so številne in jih težko pojasnimo, ker se prepletajo druga z drugo. Tu bomo o tem spregovorili le nekaj malega. Zaradi čim večje razumljivosti bomo snov primerno poenostavili.

Najprej omenimo premikanje vozliščnice, to je daljice, ki povezuje oba Lunina vozla. Premika se v nasprotni smeri, kot se giblje Luna. Čas med dvema zaporednima prehodoma Lune preko istega, npr. dviznega vozla, vozlovski ali drakonski mesec, je zato za 0,11 dneva krajši od zvezdnega. Polni kot (360°) vozliščnica popiše v 18,6 leta, torej v enem letu približno 20° . (Glej tudi sliko 4 na II. strani ovitka.)

Premikanje apsidnice, to je daljice, ki povezuje spremenljivo odzemlje in spremenljivo prizemlje, kar je v bistvu spremenljiva velika os elipse, pa povzroča, da se npr. prizemlje Luninega tira premika v isti smeri, kot se giblje Luna, in sicer s periodo 8,9 leta. Zato Luna potrebuje 0,23 dneva več, kot meri zvezdni mesec, da ponovno pride v največjo bližino Zemlje. Ta obhodni čas imenujemo anomalistični mesec, ker Luna po tem času doseže spet isto anomalijo (neka količina, ki nastopa pri gibanju).

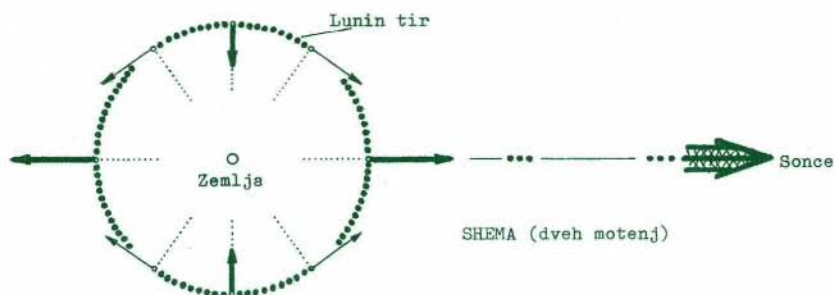
Na splošno pa se gibanje Lune pokorava zakonom gibanja teles v vesolju, to je Keplerjevim zakonom in gravitacijskemu zakonu. Luna se giblje nekoliko hitreje ali nekoliko počasneje od 1 km/s pač glede na to, ali je blizu prizemlja ali blizu odzemlja.

Zaradi periodičnih odmikov ($\pm 6^\circ$) od zamišljenega enakomernega gibanja Lune se ta motnja imenuje *središčna enačba Lune* (velika neenakost v Luninem gibanju). Dodatna motnja, imenovana *evekcija*, povzroči približno odmik ($\pm 1,3^\circ$) Lune od središčne enačbe in ima periodo okoli 32 dni. Manjša nihanja ($40'$ oziroma $11'$) povzročata *varijacija* s periodo pol sinodskega meseca in *letna enačba* (letna neenakost) s periodo enega leta. Še ena periodična motnja v Luninem tiru se imenuje *paralaktična neenakost* s periodo enega meseca. Neperiodična sprememba Luninega gibanja pa je *sekularna akceleracija*. Ta vpliva, da se Luna v sto letih za $8''$ premakne v napredni smeri (v levo), kar bi bilo za pričakovati po teoriji.

Gibanje Lune na njenem tiru vidimo z Zemlje kot potovanje Luninega diska (krožca) v napredni smeri glede na zvezde na nebesni krogli. To navidezno gibanje hitro opazimo, saj se Luna v povprečju premakne od zahoda proti vzhodu kar za 13° na dan, to je za okoli $0,5^\circ$ (Lunin zorni kot) na uro. Ker se to gibanje odvija nasproti navideznemu dnevnemu

gibanju neba, Luna vsakič vzide (zaide) dobrih 50 minut kasneje, kar pa je odvisno še od deklinacije Lune, to je njene kotne razdalje od nebesnega ekvatorja.

Ne glede na tako veliko zapletenost v gibanju Lune pa astronomi znajo po določenih metodah in z uporabo računalnika določiti njeno lego na tiru z veliko natančnostjo za tisočletja naprej in nazaj. Takšen primer je npr. napoved Luninih in Sončevih mrkov.



Slika 5. Zgled za dve motnji s strani Sonca; radialna motnja vpliva na sploščenost eliptičnega Luninega tira (ga stiska in vleče narazen), tangencialna pa Luno na njenem tiru narahlo pospešuje ali pa zavira (Luna se prvič giblje malo hitreje, drugič pa malo počasneje glede na povprečno gibanje). Zaradi preprostosti smo Lunin tir prikazali kar s krogom.

Značilno za Luno je še, da je njeno vrtenje vezano. To pomeni, da je vrtilni čas Lune okrog njene vrtilne osi enak obhodnemu času okrog Zemlje. Zato je Luna vedno obrnjena z isto stranjo proti Zemlji, o čemer se z lahkoto prepričamo z opazovanjem Lune kar s prostim očesom.

Poleg tega Luna še nekoliko niha – prikimava in odkimava – zaradi česar je z Zemlje vidnega malo več kot polovica njenega površja. O teh gibanjih – *Luninih kimanjih* – pa je tudi že pisal Presek **26** (1998/99) na strani 26.

Pri navideznem gibanju Luna tu in tam zakrije tudi kako zvezdo (okultacija). Zaradi točkastega videza so lege zvezd veliko bolj natančno izmerjene kot lege razsežnih vesoljskih teles. Zakritje zvezd tako lahko s pridom uporabimo za določitev natančne lege Lune. Kako, to pa je že povsem nova zgodba.

Marijan Prosen

2001 S KOVANCI

V Sloveniji so za plačevanje z gotovino (poleg bankovcev) v obtoku kovanci za 10, 5, 2 in 1 tolar ter za 50, 20 in 10 stotinov. V nalogi nas stotinski drobiž ne bo zanimal, računali bomo le s celimi tolarji.

(a) Če imamo na razpolago skupino kovancev, lahko z njimi izplačamo različne zneske. Tako lahko npr. s kovanci za 1, 2, 2 in 5 tolarjev izplačamo vsak (tolarski) znesek od 1 do 10 tolarjev. Hitro se tudi lahko prepričamo, da tega z manj kot štirimi kovanci ni moč storiti. Sprašujem vas, najmanj koliko kovancev potrebujemo, da lahko z njimi izplačamo vsak znesek od 1 do 2001 tolarja. Ali je takih po številu kovancev najmanjših skupin več?

(b) Posamezne zneske lahko izplačamo na več bistveno različnih načinov. Tako lahko npr. 10 tolarjev izplačamo na 11 bistveno različnih načinov:

$$\begin{aligned}
 10 &= 1 \cdot 10 \\
 &= 2 \cdot 5 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \\
 &= 5 \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \\
 &= 10 \cdot 1.
 \end{aligned}$$

V zgornjem zapisu so števila, ki predstavljajo vrednosti kovancev, natisnjena krepko. Sprašujem vas, na koliko različnih načinov lahko izplačamo 2001 tolar.

Odgovor na prvo vprašanje najdete z razmislekom. Pri drugem vprašanju pa se računanju ne bo dalo izogniti. Ker vam računanje s svinčnikom in papirjem verjetno ne diši, si boste seveda pomagali s kalkulatorjem, še lažje pa boste do odgovora prišli s kratkim računalniškim programom.

Martin Juvan

ČETRTE POTENCE STRANIC V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU

Dokaži, da v pravokotnem trikotniku s katetama a in b ter hipotenuzo c velja ocena

$$\frac{1}{2}c^4 \leq a^4 + b^4 < c^4.$$

Dragoljub M. Milošević

POVRŠINE IN PROSTORNINE PRAVILNIH POLIEDROV

O pravih poliedrih je bilo v Preseku že mnogo napisanega. Ponovimo: Pravi polieder je tako konvexno geometrijsko telo, ki izpolnjuje pogoja:

1. omejeno je s samimi med seboj skladnimi pravih večkotniki;
2. v vsakem oglišču se stika enako število teh večkotnikov.

V zvezi s tem je zanimivo poudariti, da je pravih večkotnikov, do podobnosti natančno, nešteto mnogo (enakostranični trikotnik, kvadrat, pravih petkotnik, ...), pravih poliedrov pa je le pet, seveda do podobnosti natančno. Imena so dobili glede na število svojih mejnih ploskev: pravih tetraeder (četverec), pravih heksaeder (šesterec, kocka), pravih oktaeder (osmerec), pravih dodekaeder (dvanašterec) in pravih ikozaeder (dvajseterec). Da je pravih poliedrov le pet, je znano že iz antičnih časov. Videli bomo, da je obravnava slednjih dveh kar zapletena reč, zato ni čudno, da o njiju ni veliko napisanega v učbenikih.

Na tem mestu se ne bomo spuščali v dokazovanje, zakaj je pravih poliedrov samo pet, kajti tokrat je naš cilj, da izrazimo površino P , prostornino V , polmer včrtane krogle r , polmer očrtane krogle R in kot ϑ med sosednjima stranskima ploskvama z dolžino roba a , seveda za vsak pravih polieder posebej. Mimogrede pa bomo spoznali še kaj, kar utegne biti zanimivo in koristno. Za sosednji bomo imeli mejni ploskvi telesa, če imata skupen rob. Kot ϑ imenujemo tudi diedrski kot pravih poliedra.

Število oglišč obravnavanega pravih poliedra naj bo v , število robov e in število mejnih ploskev f . Ta tri števila niso neodvisna, povezuje jih namreč Eulerjeva poliedrska formula $v - e + f = 2$.

Nadalje naj število p označuje, koliko oglišč ima mejna ploskev, število q pa, koliko robov se stika v vsakem oglišču pravih poliedra. Navedena števila so zbrana v preglednici.

Vsak pravih polieder ima še dodatno zanimivost. Središča njegovih mejnih ploskev določajo pravih polieder, in sicer pravih tetraeder da pravih tetraeder, pravih heksaeder (kocka) da pravih oktaeder, pravih oktaeder da kocko, pravih dodekaeder da pravih ikozaeder, in obratno, pravih ikozaeder da na ta način pravih dodekaeder. Pravimo, da ima vsak pravih polieder za dualno telo tudi pravih polieder – pravih tetraeder je dualen sam sebi; dualna sta si kocka in pravih oktaeder ter pravih dodekaeder in pravih ikozaeder.

pravilni	v	e	f	p	q
tetraeder	4	6	4	3	3
heksaeder	8	12	6	4	3
oktaeder	6	12	8	3	4
dodekaeder	20	30	12	5	3
ikozaeder	12	30	20	3	5

Izkaže se, da se iskane količine P , V , r , R in ϑ izražajo s številoma p in q ter robom a , toda razmeroma zapleteno. Brez težav najdemo povezavo med S , V in r . Pravilni polieder namreč lahko razrežemo na f skladnih pravilnih piramid, ki imajo skupni vrh v poliedrovem središču in za osnovno ploskev poliedrove mejne ploskve. Osnovna ploskev take piramide ima ploščino S/f in višino r . Zato je njena prostornina enaka $(1/3) \cdot (S/f) \cdot r$, prostornina obravnavanega poliedra pa $V = f \cdot (1/3) \cdot (S/f) \cdot r = (1/3)Sr$. Torej velja za vsak pravilni polieder formula

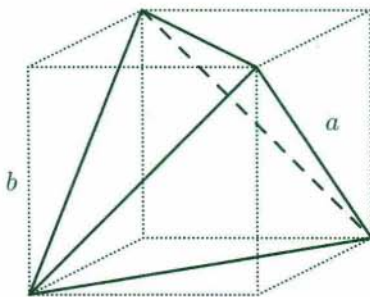
$$V = \frac{1}{3} Sr. \quad (1)$$

1. Pravilni tetraeder vrtajmo kocki tako, kot kaže slika 1. Njegovi robovi so enaki šestim paroma nevzporednim mimobežnim ploskovnim diagonalam kocke. Rob kocke b se izraža z robom tetraedra a po formuli: $b = a/\sqrt{2}$. Površina tetraedra je seveda $S = 4 \cdot a^2\sqrt{3}/4 = a^2\sqrt{3}$. Prostornino pravilnega tetraedra lahko dobimo tako, da od prostornine kocke z robom b odštejemo prostornine štirih piramid, ki imajo za osnovno ploskev polovico mejne ploskve kocke in za višino rob kocke:

$$V = b^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot b = b^3 - \frac{2}{3} \cdot b^3 = \frac{1}{3} \cdot b^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

Polmer očrtane krogle R je očitno enak polovici telesne diagonale kocke:

$$R = \frac{1}{2} \cdot b\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4} a.$$



Slika 1. Kocka in pravilni tetraeder.

Polmer r pa dobimo iz formule (1)

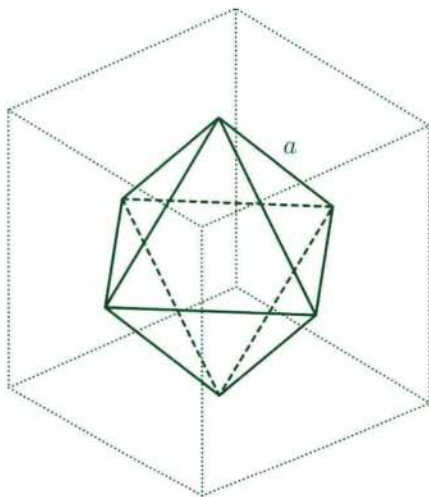
$$r = 3V/S = \frac{\sqrt{6}}{12} a.$$

Kot med sosednjima stranskima ploskvama ϑ dobimo iz pravokotnega trikotnika, ki ima za hipotenuzo višino enakostraničnega trikotnika s stranico a , za kateti pa polmer takemu trikotniku včrtanega kroga in višino tetraedra. Kot ϑ leži nasproti telesni višini tetraedra. Tako imamo $\cos \vartheta = 1/3$, iz česar sledi približek $\vartheta \doteq 70^\circ 31' 44''$. Združimo vse rezultate za pravilni tetraeder:

$$S = \sqrt{3} a^2, V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3, r = \frac{\sqrt{6}}{12} a, R = \frac{\sqrt{6}}{4} a, \cos \vartheta = \frac{1}{3}.$$

2. Pravilni heksaeder ali kocka z robom a nam ne dela težav:

$$S = 6 a^2, V = a^3, r = \frac{1}{2} a, R = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \vartheta = 90^\circ.$$



Slika 2. Kocka in pravilni oktaeder kot dualna poliedra.

3. Pravilni oktaeder ima površino, ki je enaka 8-kratni ploščini enakostraničnega trikotnika s stranico a , torej $S = 8 \cdot a^2 \sqrt{3}/4 = 2\sqrt{3} a^2$. Ker je pravilni oktaeder dvojna pravilna kvadratna piramida, dobimo $V = 2 \cdot (1/3) \cdot a^2 \cdot (a\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/3) a^3$. Polmer očrtane krogle je enak polovici diagonale kvadrata s stranico a , torej $R = a\sqrt{2}/2$. Polmer včrtane krogle

pa lahko dobimo iz formule (1) $r = 3V/S = a\sqrt{6}/6$. Brez težav dobimo tudi kot ϑ med dvema sosednjima mejnima ploskvama:

$$\cos(\vartheta/2) = 1/\sqrt{3}.$$

Po formuli $2\cos^2(\vartheta/2) = 1 + \cos \vartheta$ pridemo še do enačbe $\cos \vartheta = -1/3$, iz katere izračunamo približek $\vartheta \doteq 109^\circ 28' 16''$. Zbrani rezultati so:

$$S = 2\sqrt{3}a^2, V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3, r = \frac{\sqrt{6}}{6}a, R = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \cos \vartheta = -\frac{1}{3}.$$

4. Pravilni ikozaeder je nekoliko bolj zahteven za obravnavo. Tu bomo uporabili koordinatno metodo, pri kateri nam bo pomagal zlati pravokotnik, o katerem smo v Preseku tudi že pisali. Zlati pravokotnik ima stranici v razmerju zlatega števila $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, ki je pozitivna rešitev enačbe $\phi^2 = 1 + \phi$. Vzemimo tri skladne zlate pravokotnike z daljšo stranico ϕa in krajšo a , jih med seboj prebodimo ter vpeljimo pravokotni koordinatni sistem $Oxyz$ tako, kot kaže slika 3. Če gledamo iz zelo oddaljene točke na pozitivni polovici osi x , vidimo oglišča

$$A_x(0, \frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2}), B_x(0, -\frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2}), C_x(0, -\frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2}), D_x(0, \frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2}),$$

iz zelo oddaljene točke na pozitivni polovici osi y vidimo oglišča

$$A_y(\frac{a}{2}, 0, \frac{\phi a}{2}), B_y(\frac{a}{2}, 0, -\frac{\phi a}{2}), C_y(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{\phi a}{2}), D_y(-\frac{a}{2}, 0, \frac{\phi a}{2})$$

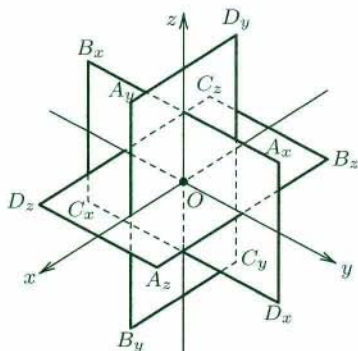
in iz zelo oddaljene točke na pozitivni polovici osi z oglišča

$$A_z(\frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2}, 0), B_z(-\frac{\phi a}{2}, \frac{a}{2}, 0), C_z(-\frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2}, 0), D_z(\frac{\phi a}{2}, -\frac{a}{2}, 0).$$

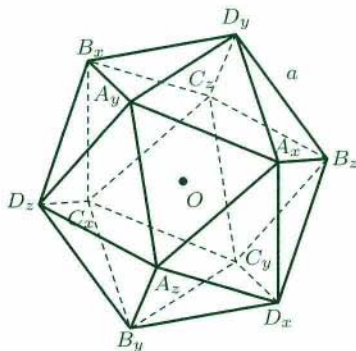
Vidimo torej, da so vsa oglišča, glede na koordinate, oblike:

$$(0, \pm \frac{\phi a}{2}, \pm \frac{a}{2}), (\pm \frac{a}{2}, 0, \pm \frac{\phi a}{2}), (\pm \frac{\phi a}{2}, \pm \frac{a}{2}, 0).$$

Število točk vsake vrste je 4, skupaj 12. Ni težko ugotoviti, da naštetje točke sestavljajo oglišča pravilnega ikozaedra z robom a . Njegovih dvajset mejnih ploskev sestavljajo enakostranični trikotniki. Naštejmo tistih pet, ki imajo skupno oglišče A_x : $A_x D_y A_y$, $A_x A_y A_z$, $A_x A_z D_x$, $A_x D_x B_x$, $A_x B_x D_y$.



Slika 3. Paroma pravokotni zlati pravokotniki.



Slika 4. Pravilni ikozaeder.

Da je na primer trikotnik z oglišči $A_x D_y A_y$ enakostraničen s stranico a , preverimo neposredno:

$$|A_x D_y|^2 = |A_y A_x|^2 = \frac{a^2}{4}(1 + \phi^2 + (\phi - 1)^2) = a^2 = |D_y A_y|^2.$$

Središče (= težišče) tega trikotnika je v točki

$$A\left(\frac{1}{3}\left(0 - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right), \frac{1}{3}\left(\frac{\phi a}{2} + 0 + 0\right), \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2} + \frac{\phi a}{2} + \frac{\phi a}{2}\right)\right).$$

Po poenostavljanju dobimo

$$A\left(0, \frac{\phi a}{6}, \frac{(1 + 2\phi)a}{6}\right).$$

Sedaj lahko že izračunamo polmera r in R za pravilni ikozaeder. Najprej velja

$$r = |OA| = \frac{a}{6} \sqrt{\phi^2 + (1 + 2\phi)^2} = \frac{a}{6} \sqrt{6 + 9\phi}.$$

Nazadnje dobimo

$$r = \frac{a}{12} \sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \frac{a}{12} (3\sqrt{3} + \sqrt{15}).$$

Še lažje izračunamo R :

$$R = |OA_x| = \frac{a}{2} \sqrt{\phi^2 + 1} = \frac{a}{2} \sqrt{2 + \phi} = \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Ker je očitno $S = 20 \cdot (a^2\sqrt{3}/4) = 5a^2\sqrt{3}$, dobimo po formuli (1)

$$V = \frac{1}{3}Sr = \frac{5a^3}{36}\sqrt{3}(3\sqrt{3} + \sqrt{15}) = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}).$$

Bralec, ki je več vektorskega računa, bo morda prostornino izračunal še kako drugače, npr. kot dvajsetkratno prostornino tetraedra $OA_xD_yA_y$:

$$V = 20 \cdot \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA_x}, \overrightarrow{OD_y}, \overrightarrow{OA_y}) = \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 0 & \phi & 1 \\ -1 & 0 & \phi \\ 1 & 0 & \phi \end{vmatrix} = \frac{5a^3}{12} \cdot (2\phi^2).$$

Nazadnje bo dobil enak rezultat.

Da bi izračunali kot med sosednjima mejnima ploskvama, poiščemo še središče B trikotnika $A_xA_yA_z$. Dobimo

$$B\left(\frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{(1+\phi)a}{6}\right).$$

Iskani kot ϑ je suplementaren kotu ϑ' med vektorjema $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ oz. kotu med vektorjema $\vec{a} = (0, \phi, 1 + 2\phi)$ in $\vec{b} = (1 + \phi, 1 + \phi, 1 + \phi)$, ki smo ju dobili iz $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ s krajšanjem s faktorjem $a/6$. Torej velja

$$\cos \vartheta' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 + 7\phi}{6 + 9\phi} = \frac{2\phi - 1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Tako smo dobili $\cos \vartheta = -\sqrt{5}/3$ in približek $\vartheta \doteq 138^\circ 11' 23''$.

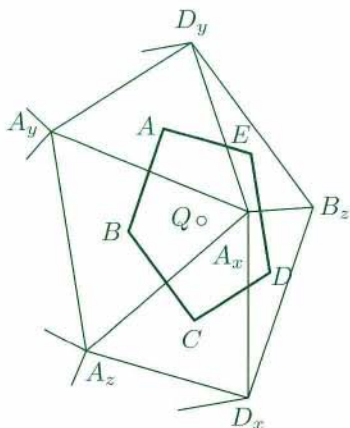
Zberimo rezultate za pravilni ikozaeder:

$$S = 5\sqrt{3}a^2, \quad V = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3,$$

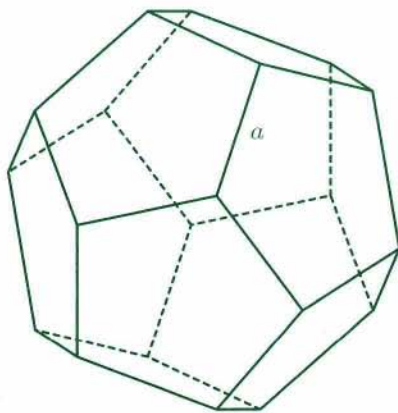
$$r = \frac{1}{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})a, \quad R = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}a, \quad \cos \vartheta = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

5. Pravilni dodekaeder bomo obravnavali kot dual pravilnega ikozaedra. S pridom bomo uporabili rezultate, dobljene pri ikozaedru. Središča tistih petih mejnih ploskev pravilnega ikozaedra, ki imajo skupno oglišče, npr. A_x , so oglišča pravilnega petkotnika s stranico $|AB|$, za katero velja

$$|AB|^2 = \left(\frac{a}{6}\right)^2((1 + \phi)^2 + 1 + \phi^2) = \frac{4\phi^2a^2}{36}.$$



Slika 5. Nastanek pravilnega dodekaedra.



Slika 6. Pravilni dodekaeder.

Torej je $|AB| = \phi a/3$. Da dobimo pravilni dodekaeder z robom a , moramo torej vse koordinate oglišč pravilnega ikozaedra in iz njega dobljenih oglišč dualnega poliedra pomnožiti s faktorjem $3/\phi$. Tako bi dobili koordinate vseh dvajsetih oglišč pravilnega dodekaedra, npr.

$$A(0, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{\phi a}{6}, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+2\phi)a}{6}), B(\frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+\phi)a}{6}, \frac{3}{\phi} \cdot \frac{(1+\phi)a}{6}).$$

Podobno se izražajo koordinate točk C, D in E . Namenoma smo izbrali vsa oglišča iste mejne ploskve, to je pravilnega petkotnika $ABCDE$. Ko koordinate poenostavimo, dobimo:

$$A(0, \frac{a}{2}, \frac{(1+\phi)a}{2}), B(\frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}), C(\frac{a}{2}, \frac{(1+\phi)a}{2}, 0), \\ D(-\frac{a}{2}, \frac{(1+\phi)a}{2}, 0), E(-\frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}, \frac{\phi a}{2}).$$

Iz oglišč pravilnega ikozaedra lahko ugotovimo, da so vse koordinate oglišč pravilnega dodekaedra oblike:

$$(0, \pm \frac{a}{2}, \pm \frac{(1+\phi)a}{2}), (\pm \frac{(1+\phi)a}{2}, 0, \pm \frac{a}{2}), \\ (\pm \frac{a}{2}, \pm \frac{(1+\phi)a}{2}, 0), (\pm \frac{\phi a}{2}, \pm \frac{\phi a}{2}, \pm \frac{\phi a}{2}).$$

Število točk prve, druge in tretje vrste je po 4, točk četrte vrste pa je 8, skupaj res dvajset.

Polmer R sedaj zlahka izračunamo:

$$R = |OA| = \frac{a}{2} \sqrt{1 + (1 + \phi)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3\phi^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3}\phi = \frac{a}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15}).$$

Prav tako ni težko izračunati kota ϑ med sosednjima mejnima ploskvama pravilnega dodekaedra. Ta kot je suplementaren kotu ϑ' , ki ga npr. oklepata vektorja $\overrightarrow{OA_y}$ in $\overrightarrow{OB_y}$ v pravilnem ikozaedru. To je kot, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = (1, 0, \phi)$ in $\vec{b} = (1, 0, -\phi)$ oz. diagonali zlatega pravokotnika. Račun poteka takole:

$$\cos \vartheta' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 - \phi^2}{1 + \phi^2} = \frac{\phi}{2 + \phi} = \frac{2\phi - 1}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Tako smo dobili $\cos \vartheta = -\sqrt{5}/5$ in približek $\vartheta \doteq 116^\circ 33' 54''$.

Središče pravilnega petkotnika $ABCDE$ je v točki Q s koordinatami

$$\left(0, \frac{(3 + 4\phi)a}{10}, \frac{(1 + 3\phi)a}{10}\right),$$

od koder dobimo

$$r = |OQ| = \frac{a}{10} \sqrt{(3 + 4\phi)^2 + (1 + 3\phi)^2} = \frac{a}{20} \sqrt{250 + 110\sqrt{5}}.$$

Polmer ϱ vrtanega kroga mejne ploskve izračunamo z dvakratno uporabo Pitagorovega izreka:

$$\varrho^2 = R^2 - r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{(25 + 10\sqrt{5})a^2}{100},$$

torej je

$$\varrho = \frac{a}{10} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

Površina pravilnega dodekaedra je zato

$$S = 12 \cdot 5 \cdot \frac{a\varrho}{2} = 30a\varrho = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

Prostornino dobimo po formuli (1)

$$V = \frac{1}{3}Sr = \frac{a^3}{20} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot \sqrt{250 + 110\sqrt{5}} = \frac{a^3}{4} \sqrt{470 + 210\sqrt{5}}.$$

Ker je $470 + 210\sqrt{5} = (15 + 7\sqrt{5})^2$, imamo nazadnje

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

Zberimo dobljene rezultate za pravilni dodekaeder:

$$S = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} a^2, \quad V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) a^3, \\ r = \frac{1}{20}\sqrt{250 + 110\sqrt{5}} a, \quad R = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15}) a, \quad \cos \vartheta = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Tako smo izračunali vse pomembne količine pri pravilnih poliedrih z robom a . Morda bi se dalo marsikaj opraviiti kako drugače in enostavneje. Poskusite!

Marko Razpet

NEOBIČAJNA KONSTRUKCIJSKA NALOGA – Rešitev s str. 130

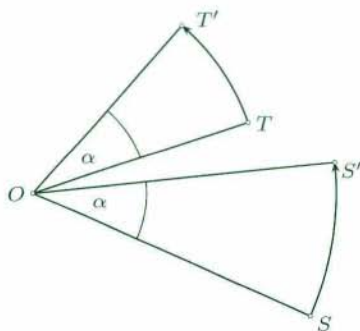
Naloga ni samo neobičajna, ampak tudi zahtevna, saj kar ne vemo, kje naj začnemo.

Dokaj preprosto in zelo elegantno pa jo lahko rešimo, če pri njeni analizi uporabimo ravninske zasuke. Zato povejmo najprej nekaj najnujnejšega o njih.

Zasuki v ravnini

Definicija

Naj bo O dana točka ravnine in α dani kot. Zasuk okrog točke O za kot α togo zavrti ravnino okrog O za kot α . To pomeni, da poljubno točko T ravnine preslika v točko T' , ki leži na isti krožnici s središčem v O kot točka T takó, da poltraka OT in OT' oklepata kot α . Običajno merimo kot od poltraka OT k OT' v pozitivni smeri, to je smeri, nasprotni gibanju kazalcev na uri (slika 1). Če želimo opisati zasuk za velikost kota α v nasprotni smeri, govorimo o zasuku za kot $-\alpha$ ali za kot $360^\circ - \alpha$. Točko O

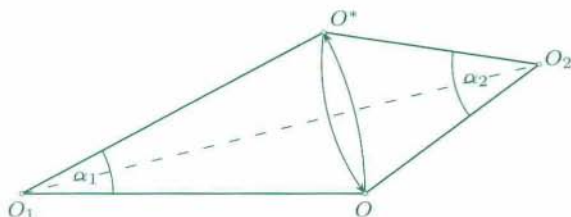


Slika 1.

imenujemo *središče zasuka*. To je edina točka ravnine, ki se pri danem zasuku preslika vase (miruje, je negibna točka zasuka).

Sestavljanje zasukov

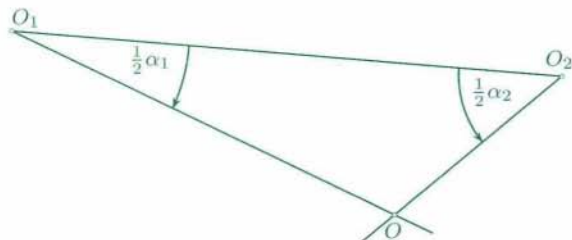
Če zapored izvedemo dva zasuka, prvega okrog točke O_1 za kot α_1 in drugega okrog točke O_2 za kot α_2 , je sestavljena preslikava spet zasuk, in sicer za kot $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Kako dobimo središče sestavljenega zasuka, razberemo s slike 2. To je oglišče O narisane deltoida $O_1OO_2O^*$.



Slika 2.

Res: Pri zasuku okoli O_1 za kot α_1 se O preslika v O^* in ta nato z zasukom okoli O_2 za kot α_2 nazaj v O . Torej je O negibna točka sestavljenega zasuka in zato njegovo središče. (Če zamenjamo vrstni red zasukov in zavrtimo ravnino najprej okoli O_2 in nato okoli O_1 , je središče sestavljenega zasuka točka O^* .)

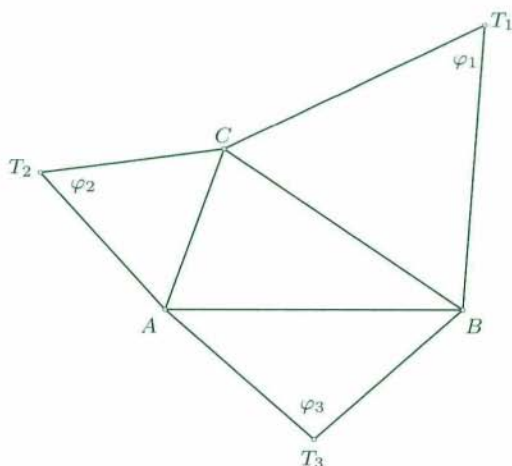
Središče sestavljenega zasuka konstruiramo torej takole: Od daljice, ki veže središči obeh zasukov, odmerimo v negativni smeri polovični kot prvega zasuka z vrhom v središču prvega zasuka in v pozitivni smeri polovični kot drugega zasuka z vrhom v središču drugega zasuka. Presečišče dobljenih poltrakov je iskano središče sestavljenega zasuka (slika 3).



Slika 3.

Rešitev naloge

Oglejmo si primer, kakršnega prikazuje skica na sliki 4. Oglišča iskanega trikotnika smo označili z A , B in C , tako da je T_1 vrh enakokrakega trikotnika nad stranico BC , T_2 je vrh enakokrakega trikotnika nad AC in T_3 vrh enakokrakega trikotnika nad AB .

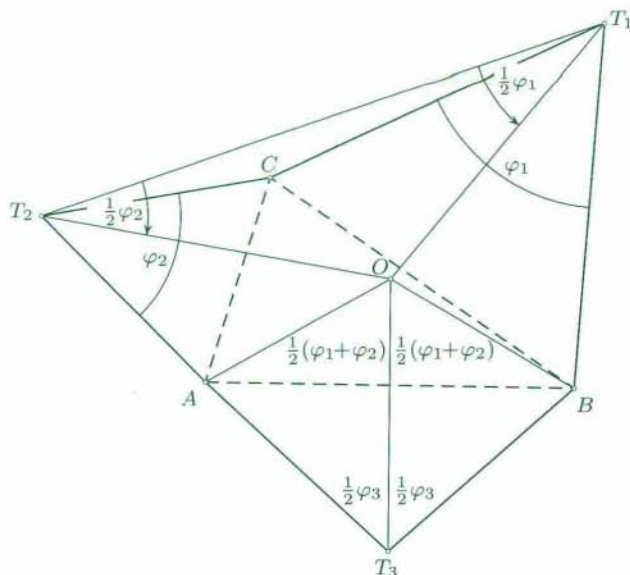


Slika 4.

Če zasukamo ravnino najprej okrog točke T_2 za kot φ_2 in nato še okrog točke T_1 za kot φ_1 , preide pri prvem zasuku oglišče A v oglišče C , pri drugem pa oglišče C v oglišče B . Sestavljeni zasuk torej preslika oglišče A v oglišče B . Središče O sestavljenega zasuka (slika 5) zlahka konstruiramo po navodilu s slike 3, kot sestavljenega zasuka je $\varphi_1 + \varphi_2$.

Iz ugotovitve, da pri tem zasuku preide točka A v točko B , sledi, da sta A in B enako oddaljeni od O . Točka O je torej vrh enakokrakega trikotnika nad osnovnico AB s kotom $\varphi_1 + \varphi_2$ ob vrhu. Ker je tudi T_3 vrh enakokrakega trikotnika nad osnovnico AB (s kotom φ_3 ob vrhu), je premica skozi točki O in T_3 simetrala stranice AB .

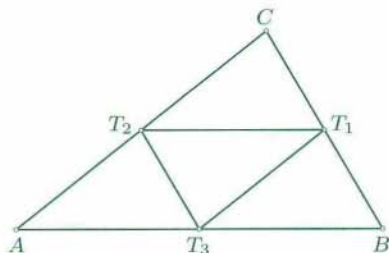
Nadaljevanje je preprosto. Na vsako stran simetrale odmerimo v O kot $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ in v T_3 kot $\frac{1}{2}\varphi_3$. Presečišči ustreznih narisanih poltrakov sta oglišči A in B . Povežemo A s T_2 in B s T_1 , odmerimo od poltraka T_2A v pozitivni smeri kot φ_2 in od poltraka T_1B v negativni smeri kot φ_1 . Presečišče na novo narisanih krakov kotov je oglišče C iskanega trikotnika (slika 5).



Slika 5.

Opombe

- Če je $\varphi_1 + \varphi_2 = 360^\circ$, se poltraka, ki izhajata iz T_1 oziroma T_2 , ne sekata in središče sestavljenega zasuka O ni določeno. Teda j nadomestimo par T_1, T_2 s T_1, T_3 ali s T_2, T_3 in nadaljujemo kot zgoraj. V primeru, ko je $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_3 = 360^\circ$, je $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 180^\circ$. Dane točke T_1, T_2, T_3 so teda j razpolovišča stranic iskanega trikotnika, njegove stranice so vzporedne stranicam iskanega trikotnika (slika 6).
- Če je $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 360^\circ$, točki O in T_3 sovpadata in rešitev ni določena.
- Nalogo smo analizirali ob skici s slike 4, ki prikazuje primer, pri katerem je rezultirajoči trikotnik ABC pozitivno orientiran, $\varphi_1 + \varphi_2 < 180^\circ$ in $\varphi_3 < 180^\circ$. Metodo reševanja lahko uporabimo tudi v drugačnih primerih, le nekoliko jo je treba prilagoditi. Kako, pa prepuščamo bralcem v premislek.



Slika 6.

Marija Vencelj

KRIŽANKA “OB 401. OBLETNICI SMRTI POGUMNEGA

		NEMŠKO-AMERIŠKI FILMSKI REŽISER MELODRAM (DOUGLAS)		PRISTA- NIŠČE V JUŽNI FRANCIJI	PISATELJ HEMING- WAY	POSVO- JENEČ	RADIJ	ANTON NANUT	TEŽI ORO.
		ESTER STEARIN KISLINE							
		VELIKA BRITANIJA							
								GRŠKI ASTRONOM, S KATERIM SE NI STRINJAL	
								PESNICA MUSER	ZAČETNIK OLIMPIZMA
		LJUDSKI JUNAK (PETER)							STR.
									GUS IPAVI
4. SOLMIZACIJSKI ZLOG				PESNIŠKI IZRAZ ZA VOJAŠKI TABOR					
USPEH PRIDOBITNE DEJAVNOSTI, DOBIČEK				KAMNOSEK	BREZALK. PIJACA				
NEPOVE- ZANOST, PRETR- GANOST									
OSREDNJI PREDMET V CERKVI						IGRALEC NEESON	KVARNERSKI OTOK		ELEM. PARTE TELOV
							KILOGRAM		RAVE
NEKDANJA MESTNA OSNOVNA SOLA								GRŠKI BOG LJUBEZNI	
								ŽITNA LUSKA	
PLIN, KI VPIJA UV SEVANJE IZ VESOLJA					KDOR SE DELA NE- VEDNEGA				
					KNAP				
ZVEZNA DRŽAVA V SZ. MEHIKI							NEMŠKI SKLADATELJ IN ORGANIST (CASPAR)		NASE ZAH. MARIB
PRISTOJNI ORGAN							ITAL. SLIKAR IN KIPAR (ROBERTO)		
		ČEBELJI PROIZVOD					MESTO, KJER JE ŽIVEL, KO JE ZAPUSTIL RED	AM. IGRALEC (RYAN)	
		PORUŠEN KRAJ POD MANGARTOM				KRAVJA ANTILOPA		KOSTUMO- GRAFIKA VOGELNIK	
PIVO STARIH SLOVANOV			HRV. PRE- STOLNICA						TROP DIV- JIH ŽIVALI
			PAVLE RAVNOHRIB						GORAZD PENKO
POLJSKI ASTRONOM, S KATERIM SE JE STRINJAL								KUP LESA NA KATEREM SO GA SEŽGALI	
DEBELA LIČINKA HROŠČA					IGRALKA THURMAN			TVOREC AKSIOMOV O MNOŽICI NARAVNIH ŠTEVIL	

¹ Krajši zapis o tem astronomu je izšel v prejšnji številki Preseka.

GA ASTRONOMA”¹

AVTOR MARKO BOKALIČ	VZORNIK MLADIH, MALIK	NJEGOVO ROJSTNO MESTO PRI NEAPLIJU	POLJEDELEC	PESKASTO ČISTILNO SREDSTVO	ŽENSKO IME ŠPANSK. IZVORA	VOTLINA Z DALEČ VIDNIM VHODOM	IVANA KOBILICA	UVOZNA DAJATEV	HRAŠKA NAFTNA DRUŽBA	”PROSTOR”, KJER JE PREŽIVEL ZADNJIH OSEM LET	PROVINCA V SEVER. DELU SUMATRE
CERKVENO SODIŠČE, KI GA JE OBSODILO											
KOT ČLAN REDA JE BIL ...											
TONJE PAVČEK											
							KRAJ PRI MARIBORU				
							ZAČIMBA IZ MORJA				
AN				STARO GER- MANSKO PLEME					ANDREJ HIENG		
TAJ- EC									JOŽE UDOVČIČ		
	PRESTOL	VZHOD (ANG.)	TANJA ZAJC	NAJVEČJA TELESNA ŽILA	LASTNOST SNOVI, KI JO ZAZNAJAMO Z NOSOM					FILOZOFSKA SMER, KI JO JE V ZAČETKU STUDIRAL, POTEM PA SE MU JE UPLILA	
					ČEŠKI PREMIER (VACLAV)						MAJHEN PREDELEK
					RELIGIJA	POLUKSOV BRAT					
ENT- RNE ADBE							JELEN LOPATAR	VILI RESNIK	HAROLD PINTER		
NA									ZADNJI ALB. KRALJ		
			ZEVSOVA MATI				ZGLEDEN PRIMER				
							POKRAJINA NA ŠVEDSKEM				
			VOTLO MOČVIRSKO STEBLO			NOVINARKA NA POP TV (VESNA)					
						SL. RISAR (MIKI)					
LIE OD ORA	STAREJŠI SLOV. SAHIST (BRUNO)	NAJVEČJI PRITOK LENE	BOLEZEN Z NAPADI DUŠENJA					STRUPENA KAČA			
								REKA V NORMANDIJI			
			MESTO V JUŽNI FRANCIJI, KJER JE PREDNAL NA UNIVERZI								
			PRIVAT- ZACUJSKI DRŽAVNI SEKRETAR PRIKMAJER	ISTRSKO LETOVIŠČE					TOMAŽ LAJEVEČ		
				LANTAN							
						BODICA			IZTOK ČOP		
						BOJAN UMEK			TINA MAZE		
					ITAL. MESTO, KJER SO GA PRIJELI						
									ČRN NADEV V GIBANICI		



STO LET RADIA

Leta 2000 je bilo nekaj pomembnih fizikalnih obletnic. Najpomembnejša je stoletnica Planckove zamisli o energijskih kvantih, ki je uvedla kvantno fiziko in pozneje pripeljala do kvantne mehanike. V njeni senci je ostala stoletnica radia. Za to je nekaj razlogov. Začetka radia ni mogoče povezati z določenim datumom, kot je 14. december 1900, ko je Planck svojo zamisel razkril na zasedanju berlinske podružnice Nemškega fizikalnega društva. Poleg tega radio ni pripeljal do novih osnovnih spoznanj v fiziki. Je pa radio tako močno vplival na naše življenje, da je vredno na kratko osvetliti njegove začetke.

Prve začetke lahko vidimo v raziskovanju električnega nihanja. William Hyde Wollaston je leta 1801, torej pred dvesto leti, učinek toka, ki ga je po sklenjenem električnem krogu pognala Voltova baterija, primerjal z učinkom kratkotrajnega toka, ko je po enakem krogu izpraznil naelektreno leidensko steklenico – tedanji kondenzator. Pri elektrolizi vode je opazil, da se je v drugem primeru na eni in na drugi elektrodi nabrala mešanica vodika in kisika. Po tem je sklepal, da je tok ubral zdaj eno zdaj drugo smer. Joseph Henry je leta 1842 opazoval indukcijo pri praznjenju leidenske steklenice in po nihanju magnetnice ob krogu sklepal, da je "glavnemu toku v eni smeri sledilo nekaj odbitih tokov nazaj in naprej, šibkejših od prejšnjih". Hermann von Helmholtz je leta 1847 pribil, da se pri praznjenju kondenzatorja pojavi tok v eno in drugo stran kot "nihanje, ki postaja vse šibkejše". Po letu 1853 je lord Kelvin za nihajni krog iz kondenzatorja s kapaciteto C in tuljave z induktivnostjo L izpeljal frekvenco $\nu = 1/2\pi(LC)^{1/2}$. Behrend Willhelm Feddersen je okoli leta 1860 z osciloskopom na vrteče se zrcalo opazoval časovni potek isker pri praznjenju kondenzatorja. Vodnik v nihajnem krogu so prekinili in krajišči oblikovali v konici. Z mikrometrskim vijakom so uravnavali razmik med konicama in opazovali iskre med njima.

Helmholtz je uporabil nihajni krog s tuljavo z razmeroma veliko induktivnostjo in kondenzator z majhno kapaciteto. Poskuse je leta 1885 povzel njegov nekdanji asistent Heinrich Hertz. Nihanje v nihajnem krogu z iskriščem je zaznaval tako, da mu je približal drug nihajni krog v obliki ovoja z iskriščem. Z mikrometrskim vijakom je spreminjal razmik med konicama v *sprejemnem krogu* in z največjim razmikom, pri katerem so še preskakovale iskre, ocenil, kako močno je nihanje. Ugotovil je, da so bile iskre daljše, če je *oddajnemu krogu* dodal ravno žico s kovinskama telesoma na krajiščih kot *oddajno anteno*. Največja dolžina isker v iskrišču se je spreminjala, ko je spreminjal obseg sprejemnega nihajnega kroga.

Tako je opazoval resonanco električnega nihanja v sprejemnem krogu z nihanjem v oddajnem krogu.

S prilagajanjem naprav in okoliščin pri poskusih je dosegel, da je vpliv nihanja v oddajnem krogu segel do sprejemnega kroga v oddaljenosti več kot deset metrov. Proti koncu leta 1887 je naredil poskus, pri katerem so se valovi odbili na pločevini in je nastalo stoječe valovanje. To valovanje je otipal s sprejemnim krogom in določil valovno dolžino 9,6 metra. Tako je odkril radijske valove. Novo vrsto poskusov je naredil z valovi z valovno dolžino 66 centimetrov. V goriščno črto v parabolični valj zvite pločevine je postavil oddajno anteno in dobil vzporeden curek valovanja. Z njim je opazoval odboj, lom in pojave, značilne za valovanje. O Hertzevih poskusih in o njihovem pomenu pri uveljavljanju Maxwellove elektrodinamike je poročal članek *Ob stoletnici smrti Heinricha Hertza*, Presek **21** (1993/94) 226.

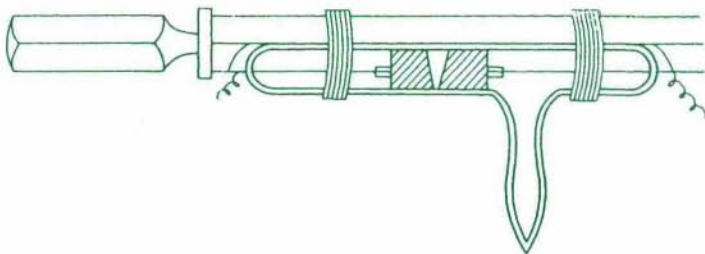
Zdaj gre za drugo posledico Hertzevih poskusov, ki so jih kmalu ponovili Oliver Lodge v Angliji, Augusto Righi v Italiji, Aleksandr Popov v Rusiji in Eduard Branly v Franciji. Spočetka nihče ni pomislil na to, da bi lahko radijske valove uporabil za prenašanje sporočil na daljavo. To se danes zdi nenavadno, ker se je več raziskovalcev ukvarjalo z žičnim telegrafom in telefonom. George Fitzgerald je celo zapisal, da ni mogoče "povzročiti z električnimi silami valovne motnje v etru". Tudi Hertz naj bi na vprašanje münchenskega inženirja odgovoril, da njegovih valov ne bo mogoče izkoristiti za prenašanje sporočil. Ni jasno, ali je tako mislil zaradi velike razlike med frekvenco radijskih valov in frekvenco zvoka ali zaradi močnega dušenja električnega nihanja. Med prvimi je William Crookes leta 1892 omenil možnost, da bi z radijskimi valovi prenašali sporočila z Morsovimi znaki.

Zaznavanje valov z opazovanjem isker v sprejemnem krogu v odvisnosti od razdalje med konicama je bilo zamudno in nenatančno. Že nekaj časa so vedeli, da se upor kovinskega praška ali opilkov na izolatorski ploščici ali v stekleni cevki izrazito zmanjša, ko v bližini izpraznijo kondenzator. Pojav je podrobneje obdelal Branly, ki je leta 1890 zapisal: "Če sestavimo krog iz Daniellovega člena, občutljivega galvanometra, kovinskega vodnika in ebonitne ploščice z nanesenimi bakrenimi opilki ali cevke z opilki, je tok večinoma zanemarljivo majhen. Upor pa se sunkovito zmanjša, kar opazimo po velikem odklonu galvanometra, če blizu kroga povzročimo eno ali več razelektritev." Pri poskusih je uporabil opilke iz železa, aluminija, kadmija, antimona, cinka in bizmuta. Štiri leta pozneje je objavil še eno razpravo, ne da bi pojav povezal z radijskimi valovi. To je tega leta storil Lodge, ki je uvedel kovinske opilke v stekleni cevki kot nekakšen ojačevalnik. Imenoval ga je *koherer* in menil, da je precej

pripravnější od iskrišča. Pojava pozneje niso podrobneje raziskali, ker so koherer po petih letih nehali uporabljati in je danes popolnoma pozabljen. Kovinski koščki se v električnem polju delno uredijo, tako da se poveča površina, na kateri se med seboj dotikajo, in se zaradi tega zmanjša upor.

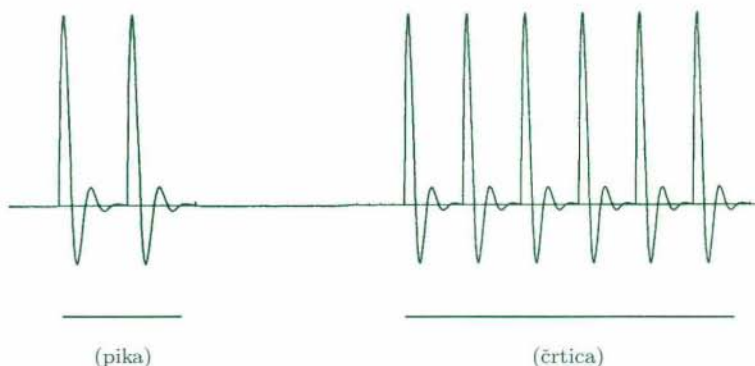
Po Hertzevi smrti leta 1894 je o njegovih poskusih bral Guglielmo Marconi, ki je pozneje zapisal: "Zazdelo se mi je, da bi bilo mogoče pošiljati sporočila preko znatnih razdalj, če bi sevanje ojačili, razvili in nadzorovali. Moja glavna težava je bila v tem, da je bila zamisel v svoji logiki tako preprosta. Težko sem verjel, da je ni uresničil že kdo drug. Mislim sem, da je veliko zrelih znanstvenikov sledilo istemu razmišljanju in prišlo do skoraj podobnih sklepov. Že spočetka se mi je zazdela tako resnična, da nisem mogel dojeti, da je za druge popolnoma fantastična."

Marconi je v Bologni leta 1895 ponovil Hertzeve poskuse in ugotovil, da bo s Hertzevimi valovi mogoče prenašati sporočila in da se bodo ti valovi obnesli veliko bolje od svetlobnih signalov. Uporabil je izpopolnjeni koherer, v katerem je med srebrni elektrodi v stekleni cevki dal nikljeve in srebrove opilke (slika 1). Izkoristil je resonanco med oddajnim ter sprejemnim nihajnim krogom in prenašal sporočila na razdaljo poldruga kilometra. Koherer je vključil v krog z Voltovo baterijo in občutljivim telegrafskim relejem, ki je v drugem krogu sprožil magnet v pisalniku ali zvonec. Za krajši ali daljši čas je sklenil tipkalno stikalo v oddajnem krogu in tako povzročil, da je oddajnik oddajal sunke radijskih valov krajši ali daljši čas. Tako je dobil pike in črtice (slika 2).

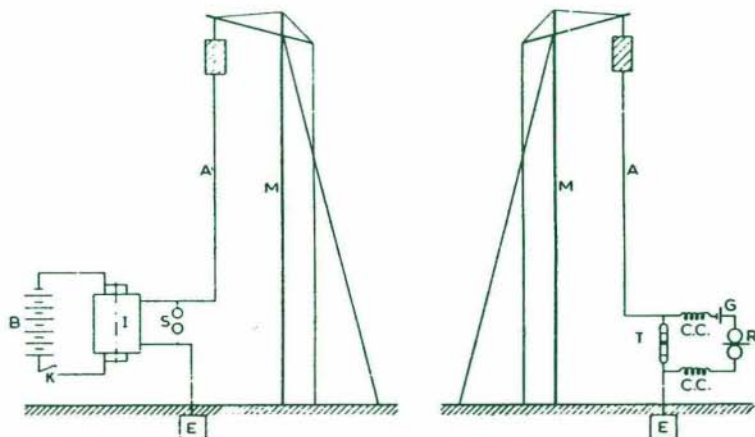


Slika 1. Marconijev koherer je imel v stekleni cevi med srebrnima elektrodama (osenčeno) srebrove in nikljeve opilke. Koherer je deloval kot nekakšen ojačevalnik: ko so skozenj speljali visokofrekvenčni tok iz sprejemne antene, se mu je zmanjšal upor, tako da se je povečal tok.

Postopno je uvedel še druge izboljšave. Ozemljlil je eno krajišče oddajnega kroga in drugo krajišče priključil na visoko oddajno anteno, v katero je vezal kovinsko telo s čim večjo kapaciteto (slika 3). Z dva metra visoko anteno s kositrno kocko z robom 30 centimetrov je dosegel razdaljo



Slika 2. Z radijskimi valovi so prenašali Morsove znake. Oddajna postaja je oddajala kratkotrajne sunke radijskih valov ali pa jih ni oddajala. Sunke so sestavili v pike ali črte – in iz njih oblikovali črke, na primer S . . . in O ----. Poziv na pomoč se je na primer glasil SOS: . . . ---- . . . (shematično). – Pred sto leti je Marconi kot prvo sporočilo s cornwallske obale preko Atlantika na Novo Fundlandijo prenesel znak za črko S.



Slika 3. Oddajni (levo) in sprejemni (desno) krog G. Marconija iz leta 1895: navpični anteni s kovinskim telesom s čim večjo kapaciteto (osenčeno) A, steber M, induktor I, baterija B, stikalo s tipko K, iskrišče S, ozemljitev E, koherer T, tuljava CC, galvanski člen G. Induktor je nekakšen transformator, pri katerem enosmerni tok na primarni strani prekinjamo in dobimo na sekundarni strani sunke visoke napetosti. Dandanes za vsako postajo kot značilen podatek navedemo valovno dolžino, spočetka pa to ni bilo v navadi.

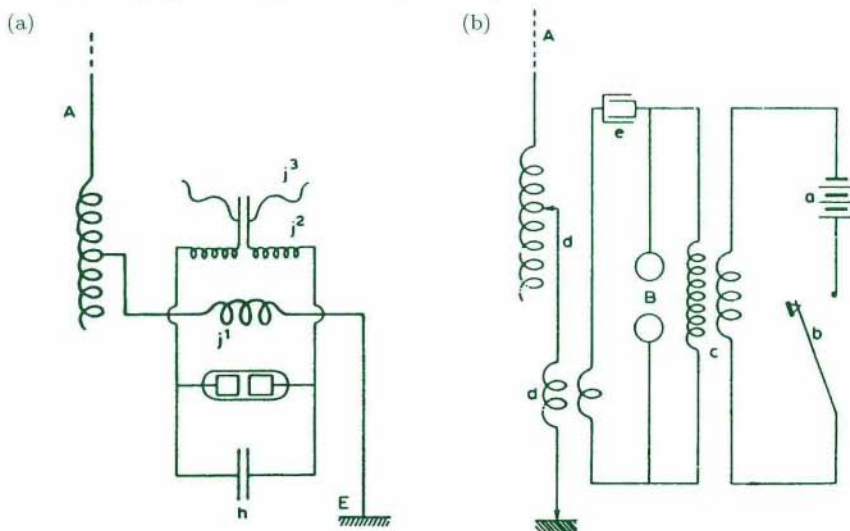
30 metrov, s štirimetrsko anteno razdaljo 100 metrov in z osemmetrsko anteno razdaljo 400 metrov, če je uporabil kositrno kocko z robom en meter pa celo 2400 metrov. Leta 1896 je prenašal sporočila na razdaljo 2800 metrov in je napravo patentiral. Uvidel je, da v Italiji nima dovolj možnosti za razvoj in se je preselil v Anglijo. Tam je leta 1897 prenašal sporočila najprej na razdaljo več kot šest kilometrov in nato še na razdaljo 14 kilometrov.

Rusi zatrjujejo, da je Popov že pred Marconijem leta 1895 predaval o možnosti radijskega prenosa. Naslednje leto je tak prenos demonstriral na zasedanju ruskega fiziko-kemijskega društva med kemijsko in fizikalno predavalnico univerze v Peterburgu na razdalji 250 metrov. Pri tem je uporabil navpični žici kot oddajno in sprejemno ansteno. Naslednje leto naj bi prenašal sporočila med ladjama v oddaljenosti pet kilometrov. Leta 1899 so na ta način prenesli sporočilo na razdaljo 43 kilometrov pri reševanju skupine ribičev v Baltiku. Italijani poudarjajo zasluge Righija, ki je meril z valovi z valovno dolžino 10,6 in pozneje 7,5 centimetra. Pri razvoju radia je sodeloval tudi Nikola Tesla, ki je neodvisno od Popova uporabil navpično žico kot anteno, uvedel anteno s polovično valovno dolžino, predlagal dvojni nihajni krog v oddajniku in sprejemniku ter leta 1898 na daljavo krmaril ladjico. Izumil je *Teslov transformator* z iskriščem, s katerim je delal poskuse z visokofrekvenčnim tokom in pokazal, da človeku ne škodi. Zamislil si je celo, da bi z radijskimi valovi – namesto z daljnovodom – prenašal električno energijo. Poskusi pa niso dali zaželenih rezultatov in jih je moral pozneje zaradi pomanjkanja denarja opustiti.

Nekateri so menili, da Marconi v resnici ni odkril nič novega in se je le okoristil z delom drugih. To je bilo slišati posebno leta 1909, ko si je delil Nobelovo nagrado za fiziko s Ferdinandom Braunom, odkriteljem katodne cevi. Marconi je v Nobelovem predavanju priznal, da ni nikoli študiral fizike ali elektrotehnike in da je poslušal samo en tečaj fizike, da pa je zasledoval delo Hertza, Righija in Branlyja. Nepristranski opazovalec je tedaj zapisal, "da bi se brez Marconijeve zagnanosti, zmožnosti in podjetnosti radio ne mogel komercialno uveljaviti, ne bi prekril Zemlje s svojimi postajami in ne bi dosegel vpliva, ki ga ima".

Od leta 1898 Marconi ni vezal kohererja med anteno in zemljo, ampak v sekundarno tuljavo transformatorja, katerega primarna tuljava je bila priključena med sprejemno anteno in zemljo. Tako je bolje izkoristil resonanco in dosegel, da je sprejemna antena z uglasenim nihajnim krogom sporočilo sprejela, druge sprejemne antene z neuglasenim krogom pa sporočila niso zaznale. Po številnih poskusih v Italiji in Angliji je Marconi leta 1899 prenašal sporočila že na razdaljo 64 kilometrov med

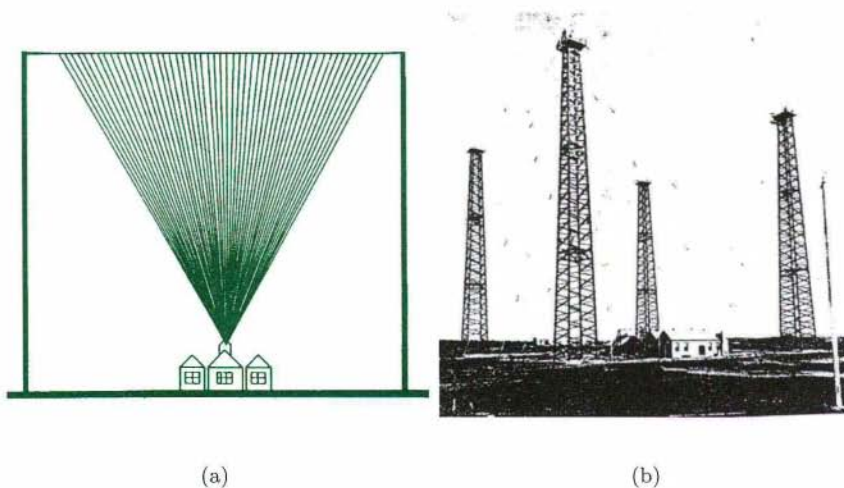
Anglijo in Francijo. Še naprej je izpopolnjeval naprave. Leta 1899 je povečal kapaciteto oddajnih anten tako, da je ob njih napel ozemljene prevodnike in zaporedno z njimi vezal tuljave (slika 4a). Marconi je pač na vse načine poskušal povečati doseg svojega oddajnika. Med temi načini so bili tudi taki, ki se morda danes zdijo nekoliko nenavadni. Podobno so ravnali tudi drugi, npr. Braun. Marconi je zmanjšal še dušenje v nihajnem krogu in tako bolje izkoristil resonanco. Nihajnemu krogu z močnim dušenjem namreč ustreza široka resonančna krivulja, krogu z manjšim dušenjem pa ožja. V krogih z manjšim dušenjem je tako resonanca postala pomembnejša. Z manj dušenim nihajnim krogom je bilo mogoče zaznati valove na večji razdalji. Na isto oddajno anteno je priključil več različno uglašanih nihajnih krogov. Marconijeva naprava je leta 1900 imela toliko novosti, da jo je znova patentiral (slika 4b).



Slika 4. V Marconijevem sprejemnem krogu iz leta 1898 je bila antena A preko primarne tuljave transformatorja j^1 priključena na zemljo E, sekundarna tuljava j^2 pa je bila vključena v nihajni krog s kohererjem in kondenzatorjem (a). Oddajnik iz leta 1900 je vseboval krog z baterijo a, stikalo s tipko b in primarno tuljavo c. Baterija je pognala tok po krogu, ko so sklenili stikalo. Drugi krog je vseboval sekundarno tuljavo, iskrišče B, kondenzator e in še tuljavo d, ki je bila inductivno sklopljena s tuljavo v oddajni anteni A (b).

Pri prenašanju sporočil na zelo veliko oddaljenost so pričakovali nekaj težav, od katerih pa se nekatere sploh niso pojavile. Tako npr. ukrivljenost zemeljskega površja ni motila. Na začetku leta 1901 je Marconi prenašal

sporočila med krajema na angleški obali v oddaljenosti 300 kilometrov, čeprav anteni nista bili višji od 100 metrov. Zaradi ukrivljenosti površja se je med njima pojavila 1600 metrov visoka ovira, ki pa radijskih valov ni zmotila. Potovali so ob zemeljskem površju. Proti koncu leta 1901, torej pred sto leti, je prvič prenašal sporočila čez Atlantik. Oddajna antenna na angleški obali je vsebovala veliko žic, ki so bile napete pahljačasto med zgradbo in 60 metrov dolgim vodoravnim nosilcem v višini 48 metrov (slika 5a). Dotlej je uporabljal v oddajniku razmeroma majhno električno moč, zdaj pa je moč dosegla 25 kW. Sprejemna postaja je bila na obali Nove Fundlandije. Naslednje leto je iz iste oddajne postaje prenašal sporočila do angleške raziskovalne ladje, ki je plula proti ameriški obali. Pri tem se je pokazalo, da je ponoči prenos precej manj moten kot podnevi. Motnje so se pojavile tudi zvečer in zjutraj, ko so radijski valovi prešli iz osvetljenega dela zemeljskega površja v neosvetljeni del ali obratno. Marconi je to pripisal toku naelektrenih delcev s Sonca. Naslednje leto je ponovil poskuse med omenjeno oddajno postajo in križarko, ki mu jo je dal na voljo italijanski kralj. Tega leta so izmenjali prve uradne brzojavke čez Atlantik. Spomladi 1903 je londonski Times začel vsak dan objavljati novice, ki jih je po radiu dobil iz ZDA. Tedaj so že zgradili oddajne in sprejemne antene z več stolpi (slika 5) in antene, ki so oddajale v eni smeri močnejše kot v drugih.



Slika 5. Oddajna antenna v Poldhuju na cornwallski obali Anglije, s katero so leta 1901 prvič prenesli sporočilo z radjskimi valovi preko Atlantika do postaje na Novi Fundlandiji (a), in fotografija ene od poznejših anten s štirimi stolpi (b).

Beseda radio se je uveljavila šele med letoma 1910 in 1915 kot okrajšava za radiotelegraf. Ne gre pozabiti, da so vse opisane naprave oddajale sporočila le v Morsovi abecedi. To so bile predhodnice radia, ki prenaša govor in glasbo in katerega razvoj bo opisal prispevek v naslednji številki. Do danes je veliko naprav, ki so jih nekdanj uporabljali pri radijskem prenosu, zatonilo v pozabo. Glavna zamisel pa se je razvijala dalje in se tako razvila, da si je življenje brez radia težko zamisliti.

Janez Strnad

PRAVOKOTNA ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 130

Rešujemo lahko takole:

Pod 4 navpično iščemo petmestno sedmo potenco lihega števila. To je lahko le $5^7 = 78125$. Pod 4 vodoravno iščemo trimestno šesto potenco, kar je lahko le $3^6 = 729$. Za 6 navpično potrebujemo padajoče geometrijsko zaporedje števk s količnikom $1/3$ in, ker je prva števka 9, je to 931. Sledi, da je 5 navpično 23, kar nam reši tudi 17 vodoravno: $23^2 = 529$. 15 navpično je dvomestni kvadrat, ki se konča na 9, torej 49, pod 11 vodoravno je število 91. Sedaj lahko določimo tudi število pod 11 navpično; to je 972. Število pod 8 vodoravno je 8833. Izračunamo 3 navpično, $529 \cdot 91 = 48139$. Sedaj lahko pod 12 vodoravno zapišemo zrcalno število 2332, pod 13 navpično pa 37 kot delitelj števila 74 iz 14 vodoravno. Pogojem za 16 vodoravno ustreza število 579. Sledi, da je pod 9 navpično število 325, za 9 vodoravno pa zapišemo število 31 (obratno število 13 je namreč delitelj števila 9 navpično $325 = 25 \cdot 13$). Pod 1 vodoravno zapišemo razliko 16 vodoravno in 9 navpično $579 - 325 = 254$ in pod 1 navpično zaporedni števk 23. Pod 2 navpično je praštevilo oblike $5a1$. Kandidati so: 521, 541 in 571. Pod 7 vodoravno je dvomestno praštevilo, ki ima na prvem mestu števko 3, torej je bodisi 31 bodisi 37. Pogojema ustrezata praštevili 571 in 37. Križanka je rešena.

¹ 2	² 5	³ 4	⁴ 7	⁵ 2	⁶ 9
⁷ 3	7	⁸ 8	8	3	3
⁹ 3	1	¹⁰ 1	1	¹¹ 9	1
¹² 2	¹³ 3	3	2	¹⁴ 7	¹⁵ 4
¹⁶ 5	7	9	¹⁷ 5	2	9

Urška Demšar

36. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

V soboto, 20. maja 2000, se je 226 sedmošolcev in 306 osmošolcev, ki so se na področnem tekmovanju najboljše odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Kranju, Novi Gorici in Novem mestu na državnem tekmovanju slovenskih osnovnošolcev v znanju matematike.

Zlato Vegovo priznanje je osvojilo 79 sedmošolcev in 94 osmošolcev, prejeli pa so ga sedmošolci, ki so osvojili vsaj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 14 od 25 možnih točk.

Državna tekmovalna komisija, ki jo je vodila prof. Terezija Uran, je pripravila naloge, pregledala rešitve in določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj. Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

7. razred

1. Izračunaj vrednost ulomka $\frac{2^{18} \cdot 3^{22} \cdot 5 - 2^{18} \cdot 3^{21} \cdot 7}{6^{18} \cdot 9^2 - 4^9 \cdot 9^{10}}$.
2. Tekmovanje iz matematike poteka istočasno v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Kranju, Novi Gorici in v Novem mestu. Letos tekmuje 220 sedmošolcev. V Mariboru jih tekmuje petkrat toliko, v Ljubljani šestkrat toliko, v vsakem od ostalih mest pa po dvakrat toliko kot v Novi Gorici, kjer jih tekmuje najmanj. Koliko sedmošolcev tekmuje v posameznih mestih?
3. Namesto črk x, y, z zapiši take številke, da bo potenca dvomestnega števila xy^x enaka trimestnemu številu zyz ($xy^x = zyz$). Odgovor utemelji.
4. V krogu s središčem S in polmerom r narišemo središčni kot α . Krožni izsek, ki pripada središčnemu kotu α , ima ploščino $49\pi \text{ cm}^2$, omejujejo ga krožni lok dolžine $7\pi \text{ cm}$ in polmera. Izračunaj polmer kroga in središčni kot α .
5. Pravokotnemu trikotniku $\triangle ABC$ (AC in BC sta kateti, AB je hipotenuza) je vrisana polkrožnica, ki se dotika katet v točkah E in F in ima središče S na hipotenuzi. Utemelji, da velja: $\overline{EF} = \overline{SC}$.

8. razred

1. Izračunaj

$$\left(\left(\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x} \right)^n} : x^n \right) \cdot \frac{1}{x^{2n+1}} \right) : \frac{4}{x^{2n-1}} \right)^3$$

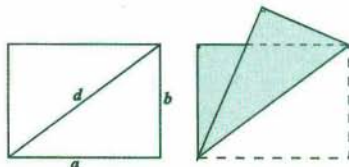
za $x = -2$ in $n = 2$.

2. Določi najmanjšo vrednost izraza $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 10y + 2000$.
3. V trapezu $ABCD$ merita osnovnici $\overline{AB} = a = 15$ cm in $\overline{CD} = c = 2$ cm ter krak $\overline{BC} = b = 5$ cm. Vsota notranjih kotov ob daljši osnovnici je 90° .

Kolikšna je dolžina kraka d ? ($\overline{AD} = d$)

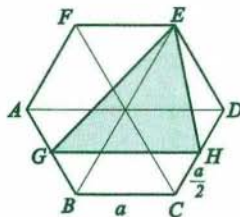
4. Listič papirja pravokotne oblike ($a = 4$ cm, $b = 3$ cm) prepognemo po diagonali, kot je prikazano na skici.

Izračunaj obseg in ploščino nastalega petkotnika.



5. Iz pravilne enakorobe šeststrane prizme z robom a smo izrezali tristrano prizmo, kot kaže slika tloris.

- a) Kolikšna je prostornina tristrane prizme?
b) Koliko odstotkov prostornine pravilne enakorobe šeststrane prizme je prostornina tristrane prizme?

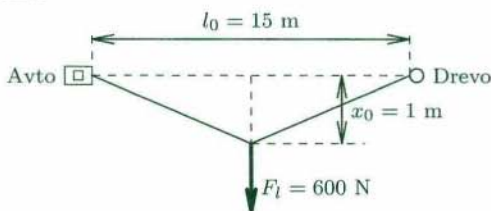


Aleksander Potočnik

DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Teoretične naloge za 7. razred

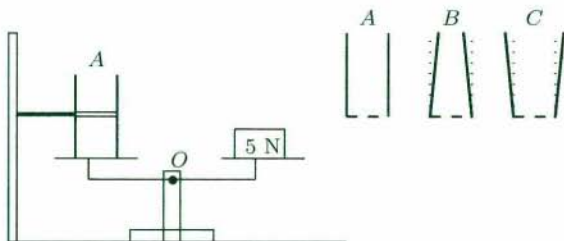
1. Avto zdrsne s ceste. Lastnik, ki bi ga rad zvlekel nazaj na cesto, priveže neraztegljivo vrv z enim koncem na avto, z drugim na drevo. Lastnik vleče vrv s silo 600 N, kakor kaže slika.



- a) S kolikšno silo vleče vrv avto, ko le-ta še miruje?
b) Ko se začne avto premikati, lastnik ves čas vleče vrv z enako silo 600 N v smeri, kakor kaže slika. Pri tem se avto premika proti drevesu (in ne v smeri sile vrvi). Kolikšno delo opravi lastnik, ko se premakne avto za 2 metra?

Nalogo lahko rešiš z računanjem ali z načrtovanjem.

2. Na sliki so tri posode A, B in C, ki imajo dno s površino $0,5 \text{ dm}^2$. Vsem trem posodam odrežemo dno, potem pa vsako posebej pritrdimo na stojalo (slika kaže posodo A na stojalu). Pod stojalo postavimo gugalnico s prečko, vrtljivo v točki O. Če je prečka gugalnice vodoravno, potem voda iz posode ne izteka, če pa se prečka nagne, začne iz posode brez dna voda iztekati.



Na en konec gugalnice položimo 5 N težko utež.

- Kako visoko lahko v posode A, B in C nalijemo vodo, da bo gugalnica v ravnovesju in voda pri dnu posode ne bo iztekala?
 - Stojala za posode odstranimo. Vsako posodo posebej postavimo na gugalnico. V tem primeru voda iz posode ne bo mogla iztekati. Kolikšno maso vode moramo naliti v posode A, B in C, da bo prečka v ravnovesju? Masa vsake posamezne posode je 100 g.
3. Temperatura vrelišča vode je odvisna od tlaka, pri katerem voda vre. To izkorišča varčni (ekonom) lonec. Zveza, ki pove, kako se vrelišče vode spreminja v odvisnosti od tlaka, je vse prej kakor preprosta. V priročnikih jo običajno podajajo grafično ali v tabelah. Ena takih tabel je natisnjena pod to nalogo in z njo si pomagaj pri reševanju naloge.

temperatura vrelišča [°C]	tlak [bar]
30	0,04242
35	0,05622
40	0,07375
45	0,09582
50	0,12335
55	0,1574
60	0,1992
65	0,2501
70	0,3116
75	0,3855
80	0,4736
85	0,5780
90	0,7011

temperatura vrelišča [°C]	tlak [bar]
95	0,8453
100	1,0133
105	1,208
110	1,433
115	1,691
120	1,985
125	2,321
130	2,701
135	3,131
140	3,614
145	4,155
150	4,760
155	5,533

- a) Nariši graf, ki kaže, kako se spreminja vrelišče vode (na ordinati) v odvisnosti od tlaka (na abscisi), ko je vrelišče med 50°C in 110°C . Točke na grafu tudi poveži.
Enote in oznake na obeh oseh izberi tako, da bo graf kar najbolj nazoren.
- b) Običajna temperatura, pri kateri se kuha juha v ekonom loncu, je 120°C . Kolikšen je tedaj tlak v ekonom loncu?
- c) Alpinisti si pri vzponu na osemtisočake skuhamo tudi kakšno juho. Kolikšna je temperatura vrele juhe, če se kuha na višini, kjer je tlak 0,5 bar?

Eksperimentalni nalogi

- 4. **Potrebščine:** plastenka z odrezanim vratom in iztokom, zamašenim s plastelinom, menzura, kad, posoda z vodo, štoparica, merilo, 2 elastiki.
 - a) Izmeri višine vodne gladine v plastenki v odvisnosti od časa. Začetna višina vodne gladine naj bo 15 cm nad dnom plastenke. Meritve v enakomernih časovnih presledkih po 20 s vpisuj v tabelo. Iz podatkov v tabeli nariši graf višine vodne gladine v odvisnosti od časa.
 - b) Iz grafa ali z razmislekom ugotovi, kolikšna je višina vodne gladine v plastenki po daljšem času, npr. po eni uri.
 - c) Izmeri ali iz grafa izračunaj, koliko vode na sekundo steče skozi iztok, ko je višina vodne gladine 7,5 cm, 10 cm in 15 cm.
 - d) Nariši še graf za prostorninski tok (kolikšna je prostornina vode, ki izteče skozi iztok vsako sekundo) v odvisnosti od časa.

Navodilo

Plastenka ima iztok na spodnjem delu. Zamašen je s plastelinom. Na plastenko je z dvema elastikama pritrjeno merilo, ki omogoča odčitavanje višine vodne gladine.

Najprej izmeri višino iztoka. Višine meri glede na podlago oziroma glede na dno plastenke. V plastenko nalij vodo do iztoka. Nato z menzuro izmeri, koliko vode moraš doliti v plastenko, da bo vodna gladina 15 cm nad dnom plastenke. Iz te meritve lahko izračunaš, koliko vode moraš doliti v posodo, da se gladina dvigne za 1 mm.

Sedaj lahko začneš z meritvami. Dodaj še nekoliko vode in odstrani plastelin iz iztoka. Meri čas in višino vodne gladine. Čas začni meriti, ko je gladina 15 cm nad dnom plastenke. Ves poskus delaj v priloženi kadi in vanjo tudi prestrezi iztekajočo vodo. Višino vodne gladine opazuj in meri približno 5 minut.

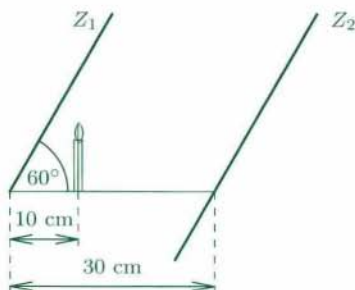
Ko poskus končaš, izlij vodo iz kadi v lijak in s plastelinom ponovno zapri iztok na plastenki.

Podatke v tabeli vneseš v graf, nato pa skozi točke v grafu s prosto roko potegni gladko krivuljo. Vse točke verjetno ne bodo ležale na krivulji. To pomeni, da je meritev obremenjena z napako, ki pa se ji ni mogoče izogniti.

5. **Potrebščine:** stojalo, elastika, vzmet, uteži, merilo, merjenec.
- Vzmet obesi na stojalo. Na vzmet obešaj uteži in zapisuj raztezke **v tabelo**.
 - Nariši graf**, ki prikazuje odvisnost raztezka vzmeti od teže obešenih uteži.
 - Na vzmet obesi merjenec in iz grafa odčitaj njegovo **težo**.
 - Meritve ponovi še **z elastiko**. Izmerke vpisuj **v tabelo**.
 - Nariši graf**, ki prikazuje odvisnost raztezka elastike od teže uteži.
 - Primerjaj grafa. Katere razlike opaziš? Ali za elastiko velja Hookov zakon? **Utemelji odgovor**.

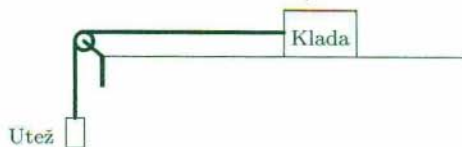
Teoretične naloge za 8. razred

1. Med dve vzporedni zrcali, nagnjeni za kot 60° , postavimo 10 cm visoko svečo (glej sliko). Odbojni strani zrcal sta obrnjeni proti sveči.



- Nariši sliko sveče, ki jo da prvo zrcalo Z_1 (sliko imenujmo S_1), in sliko sveče, ki jo da drugo zrcalo Z_2 (sliko imenujmo S_2).
- Nariši sliko slike S_2 (označi jo z S_4), ki jo da zrcalo Z_1 , in sliko slike S_1 (označi jo z S_3), ki jo daje zrcalo Z_2 .
- Kako velike so slike? Z načrtovanjem ugotovi razdalje med vrhom plamena sveče in vrhovi "plamenov" posameznih slik.
- Kakšno smer imata slike sveče S_3 in S_4 glede na svečo?

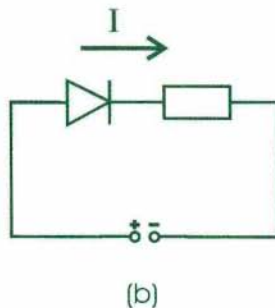
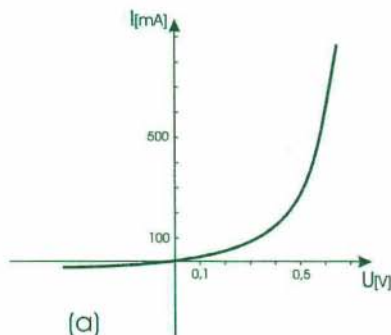
2. Klada z maso $M = 5 \text{ kg}$ je prek neraztegljive vrvi z dolžino $l = 1,5 \text{ m}$ in maso $m_v = 1 \text{ kg}$ povezana z utežjo z maso $m = 2 \text{ kg}$, kakor kaže slika. Viseči del vrvi meri na začetku $l_1 = 0,3 \text{ m}$.



Za težni pospešek vzemi $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Utež se spusti za $\Delta h = 0,5 \text{ m}$.

- Za koliko se pri tem spremeni potencialna energija klade?
 - Za koliko se spremeni potencialna energija uteži?
 - Za koliko pa se spremeni potencialna energija vrvi?
 - Za koliko se spremeni potencialna energija celotnega sistema (klada, utež in vrv)?
 - Kolikšno hitrost ima tedaj klada?
3. Polprevodniška dioda je sestavina elektronskih vezij, ki ima nelinearno karakteristiko. To pomeni, da tok skozi diodo in napetost na diodi nista sorazmerna in zanju ne velja Ohmov zakon. Skozi polprevodniško diodo lahko teče velik tok že pri majhni napetosti, če je priključena v prevodni smeri, kakor kaže slika (b). V karakteristiki diode pripišemo tedaj napetosti pozitiven predznak. V zaporni smeri je tok skozi njo zelo majhen tudi pri velikih napetostih. Tedaj pravimo, da je na diodi negativna napetost. V vezjih označujemo diodo s puščico, ki ponazarja smer, v kateri dioda dobro prevaja.



Na sliki (a) je podana karakteristika neke diode. Iz podatkov, ki jih razbereš iz karakteristike, odgovori na naslednja vprašanja:

- a) Kolikšen tok teče skozi diodo, če je priključena v prevodni smeri na napetost 0,4 V?
- b) Za koliko se spremeni tok skozi diodo, če se spremeni napetost na diodi z 0,4 V na 0,5 V?

Diodo vežemo zaporedno z uporom za 1 Ω in priključimo na baterijo z napetostjo U (slika (b)).

- c) Skozi upornik v vezju teče tok 500 mA. Kolikšna je napetost na diodi?
- d) Kolikšna je napetost baterije, če je napetost na diodi 0,6 V?

Eksperimentalni nalogi

4. **Potrebščine:** žarnice, voltmeter, napetostni vir.

Pri kateri napetosti na žarnici je njena moč 1 W?

Električna moč žarnice raste s kvadratom napetosti. Odvisna je tudi od upora žarnice, ki pa se z napetostjo spreminja. Zato napetosti ne moremo izračunati, ampak si pomagamo z meritvijo: izmerimo moč v odvisnosti od napetosti U in narišemo graf za moč v odvisnosti od U^2 ($P = P(U^2)$).

Navodilo

- a) Sestavi vezje z žarnico, voltmetrom in ampermetrom ter nariši ustrezno shemo.
- b) Izmeri tok pri napetostih 1 V, 2 V, ... in vsakič izračunaj moč žarnice. Meri vse do napetosti, pri kateri je moč večja od 1 W. Meritve zapiši v tabelo.
- c) Nariši krivuljo $P = P(U^2)$, ki ni premica. Nato iz grafa preberi kvadrat napetosti pri moči 1 W in izračunaj ustrezno napetost.

Merilnega območja instrumentov ne spreminjaj, da ne prekoračiš toka 0,6 A. Žarnica je grajena za največjo napetost 6 V, zato pazi, da te napetosti ne prekoračiš.

U	I	$P = UI$	U^2
[V]	[A]	[W]	[V ²]
1,0			
2,0			
3,0			
4,0			
5,0			

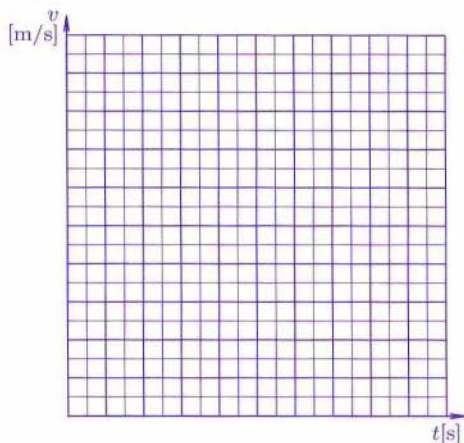
Tabela za rezultate meritev.

5. **Potrebščine:** ravnilo z merilom.

Avto ima vgrajen merilnik z računalnikom, ki beleži položaj telesa v vsaki sekundi. Na sliki je primer računalniškega izpisa. 1 cm na izpisu pomeni 2 m v naravi.

V trenutku, ko avto spelje z mesta, ga prehití kolesar, ki se giblje enakomerno s hitrostjo 8 m/s.

- Dokaži, da se avto giblje enakomerno pospešeno.
- V kolikšnem času avto dohiti kolesarja?
- Kolikšna je v tem času prevožena pot obeh vozil?
- V isti koordinatni sistem nariši grafa hitrosti avtomobila in kolesarja v odvisnosti od časa.



Nada Razpet

44. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Poročilo s tekmovanja smo objavili v prvi letošnji številki Preseka, sedaj objavljamo še naloge:

Prvi letnik

1. V izrazu

$$4 \cdot RAKEC = CEKAR$$

zamenjaj črke s števki tako, da bo račun pravilen (različnim črkam pripadajo različne številke).

2. Poišči vsa realna števila
- a
- , za katera ima enačba

$$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \cdots + |x - 99| = a$$

natanko eno rešitev.

3. Naj bo CD višina na stranico AB trikotnika ABC in naj bo $|AB| = |CD|$. Narišimo kvadrata $DBEF$ in $ADGH$ (točki F in G ležita na višini CD). Pokaži, da se daljice CD , AE in BH sekajo v isti točki.
4. Naj bo $n \geq 3$ naravno število. V ravnini leži konveksen n -kotnik, katerega oglišča imajo celoštevilске koordinate. Pokaži, da je njegova ploščina večja ali enaka $\frac{n-2}{2}$.

Drugi letnik

1. Naj
- n
- označuje število peterk naravnih števil
- $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$
- , ki zadoščajo enačbi

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

Ali je n sodo število?

Opomba. Gornja enačba ima res končno mnogo rešitev in tega **ni treba dokazovati**.

2. Po treh ravnih stezih, ki ležijo v isti ravnini, začnejo istočasno enakomerno hoditi trije ljudje. Dokaži: Če v začetku niso vsi trije na isti premici, potem se lahko med potjo največ dvakrat vsi trije znajdejo na isti premici.
3. V notranjosti enakokrakega trikotnika ABC s kotom 80° pri vrhu C leži takšna točka D , da je $\sphericalangle DAB = 10^\circ$ in $\sphericalangle DBA = 20^\circ$. Izračunaj kot $\sphericalangle ACD$.
4. Aleš in Jaka imata vsak po 1000 listkov. Oba napišeta na svoje listke vsa števila od 1 do 2000 v poljubnem vrstnem redu, na vsako stran listka po eno število. Nato postavita listke na tla tako, da je ena stran vidna. Dokaži, da jih lahko vedno postavita tako, da so vidna vsa števila od 1 do 2000 naenkrat.

Tretji letnik

1. Poišči vsa praštevila, ki vsebujejo vsako števko $0, 1, \dots, b-1$ natanko enkrat, če jih zapišemo v številske sistemu z osnovo b . (Števka 0 se lahko pojavi na začetku.)
2. Za polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

z realnimi koeficienti velja $0 \leq a_i \leq a_0$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Naj bo a koeficient pri x^{n+1} polinoma $q(x) = (p(x))^2$. Dokaži, da je

$$2a \leq (p(1))^2.$$

3. Naj bo H višinska točka ostrokotnega trikotnika ABC , v katerem je $|AC| \neq |BC|$. Premica skozi razpolovišči daljic AB in HC naj seka simetralo kota ACB v točki D . Koliko meri kot $\angle ACB$, če poteka premica HD skozi središče trikotniku ABC očrtane krožnice?
4. Na mizi so kovanci, razvrščeni v kupčke. Na posameznem koraku izberemo kupček z vsaj tremi kovanci, en kovanec s tega kupčka odstranimo z mize, ostale kovance v tem kupčku pa razdelimo na dva nova (ne nujno enako velika) kupčka. Ali lahko po nekaj korakih dobimo same kupčke s po tremi kovanci, če začnemo z enim kupom z 2000 kovanci?

Četrty letnik

1. Zaporedje realnih števil $a_1, a_2, a_3, \dots$ naj zadošča zvezi

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \quad \text{za } n = 2, 3, 4, \dots$$

in začetnim pogojem $a_1 = 2$, $a_2 = 500$ in $a_3 = 2000$. Dokaži, da so vsi členi tega zaporedja naravna števila in da je število a_{2000} deljivo z 2^{2000} .

2. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo pogoju

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y \quad \text{za vsaka } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Označimo presečišče diagonal tetivnega štirikotnika $ABCD$ z E , razpolovišči stranic AB in CD pa z F in G . Dokaži, da se pravokotnica iz G na AC , pravokotnica iz F na BD in pravokotnica iz E na AD sekajo v isti točki.

4. Dane so tri škatle in v vsaki od njih leži vsaj ena kroglica. Na vsakem koraku podvojimo število kroglic v eni izmed škatel tako, da vzamemo manjkajoče kroglice iz ene izmed drugih dveh škatel. Ali lahko po nekaj korakih katero izmed škatel izpraznimo?

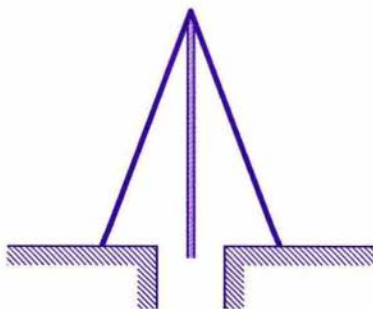
Matjaž Željko

NALOGE Z DRŽAVNEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 1999/2000

Naloge je 15. aprila 2000 v Šolskem centru Rudolfa Maistra v Kamniku reševalo 125 tekmovalcev, ki so se na tekmovanje uvrstili z regijskih tekmovanj.

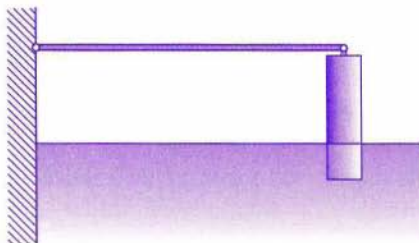
Skupina A

1. V posodi z vodo plava homogena lesena klada v obliki kvadra. Višina dela klade, ki gleda iz vode, je 6 cm. V posodo začnemo počasi dolivati olje, ki se z vodo ne meša. Olje prenehamo dolivati, ko se zgornja ploskev klade poravna z gladino olja. Kolikšna je tedaj višina plasti dolitega olja, če je specifična teža olja 6 kN/m^3 ? Kaj pa se zgodi, če je specifična teža olja 8 kN/m^3 ? Specifična teža vode je 10 kN/m^3 , specifična teža lesa, iz katerega je klada, pa 7 kN/m^3 .
2. Tanek zvezek s trdimi platnicami odpremo in postavimo na dve bližnji enako visoki mizi tako, da se vsaka platnica dotika svoje mize. Zvezek je vzdolž daljših robov obeh platnic oprt na mizi, listi pa prosto visijo v prostoru med mizama (glej sliko). Mizi počasi razmikamo in, ko doseže kot med platnico in mizo 60° , platnici hkrati zdrsneta. Koeficient lepenja med platnico in površino mize znaša 0,4. Kolikšen del teže celotnega zvezka predstavlja teža obeh platnic?
3. Človek z višino 1,7 m hodi s hitrostjo 1,5 m/s po sredini vodoravne ceste. V medsebojnih razdaljah po 18 m so postavljene viseče ulične



svetilke tako, da so luči 5 m nad sredino ceste. Kako se s časom spreminja dolžina človekove najtemnejše sence? Na milimetrski papir nariši graf dolžine sence v odvisnosti od časa (ne pozabi navesti enot na oseh).

4. Deska z dolžino 3 m in težo 2000 N je v enem krajišču vrtljivo vpeta v steno bazena, v drugem pa na valjasto plavajočo bojo s polmerom 15 cm, ki je spodaj obtežena tako, da vedno plava navpično. V ravnovesju je deska vodoravna (glej sliko). Na desko postavimo utež s težo 1500 N in deska se nagne. Ker med utežjo in desko ni lepenja, zadržujemo utež v mirovanju z vodoravno silo.



- Kako daleč od levega krajišča moramo na desko postaviti utež, da bo deska oklepala z vodoravnico kot 30° ?
- S kolikšno silo deluje v primeru a) stena na desko?

Boja je dovolj dolga, da se med poskusom ne potopi v celoti v vodo. Specifična teža vode je 10 kN/m^3 .

Skupina B

- Na vodoravno krožno ploščo z radijem 50 cm položimo majhno utež z maso 10 g in jo z neraztegljivo nitko povežemo s središčem plošče. Ploščo pričnemo vrteti okoli navpične osi skozi središče tako, da kotno hitrost vrtenja zelo počasi povečujemo. Utež pri tem kroži po krožnici z radijem 30 cm in miruje glede na ploščo. Nitka se pretrga, ko sila, ki jo napenja, preseže 3 N. Trenje (lepenje) s podlago je zanemarljivo majhno.
 - Pri kolikšni kotni hitrosti se vrstica pretrga?
 - V kolikšnem času, merjeno od trenutka pretrganja, doseže utež rob plošče?
 - Pod kolikšnim kotom zapusti utež ploščo? Kot merimo od zveznice med točko, v kateri zapusti ploščo, in središčem plošče.
- Čoln in gliser plujeta po vzporednih premicah drug proti drugemu. Hitrost gliserja je 30 m/s , hitrost čolna pa 2 m/s . Smer ter hitrost čolna in gliserja sta podani glede na vodo. Ko sta plovili najbližje drugo drugemu, vržejo z gliserja v čoln 10 kilogramsko vrečo peska s hitrostjo 2 m/s v pravokotni smeri. Smer gibanja in hitrost vreče sta podani za opazovalca na gliserju. S kolikšno hitrostjo in pod kolikšnim kotom glede na prvotno smer pluje čoln potem? Masa čolna je 150 kg, masa gliserja pa mnogo večja.

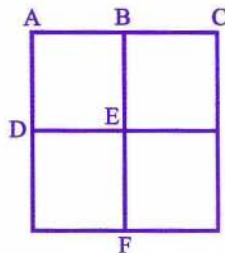
3. Fizik sklene narediti lesen lok. Za tetivo vzame neraztegljivo vrvico z dolžino 1 m, ki jo vpne med krajišči loka. Ko je lok brez puščice, je vrvica napeta s silo 100 N. Zadnji konec puščice postavi na sredino tetive ter lok napne. Okvir loka se pri napenjanju upogne. Silo, ki deluje na krajišču loka, opišemo s Hookovim zakonom, $F = k\Delta x$, kjer je F sila, ki deluje vzdolž zveznice obeh pritrdišč vrvice, in Δx razlika razdalj med krajiščema nenapetega in napetega loka. Sorazmernostna konstanta je $k = 400 \text{ N/m}$.
Fizik napne lok tako, da je kot med smerjo puščice in tetivo 30° . S kolikšno hitrostjo izleti puščica, ko jo izpusti? Masa puščice je 50 g.
4. Težka navpična plošča se giblje v vodoravni smeri s stalno hitrostjo 2 m/s, ki kaže v smeri pravokotnice na ploščo. Nasproti ji prileti prožna kroglica, ki se tik pred trkom giblje v vodoravni ravnini s hitrostjo 2 m/s. Hitrost kroglice tvori kot 30° s pravokotnico na ploščo. Obe hitrosti sta podani glede na okolico.
Kroglica se prožno odbije. Za koliko se spremeni kinetična energija kroglice ob trku? Masa kroglice je 100 g, masa plošče pa je zelo velika.

Skupina C

1. Na prozorni gumijasti cevi je načrtano milimetrsko merilo, ki je umerjeno pri temperaturi tališča ledu. V sobi s temperaturo 24°C s tem merilom izmerimo širino mize in dobimo 50,8 cm. Če po cevi nekaj časa pretakamo tekoči dušik s temperaturo 77 K in ponovno izmerimo širino mize, dobimo 52,3 cm. Kolikšna je dejanska širina mize? Privzem, da je temperaturni koeficient dolžinskega raztezka cevi neodvisen od temperature.
2. Iz treh enakih steklenih plošč v obliki kvadrata sestavimo žleb tako, da ena plošča služi za vodoravno dno, drugi dve pa za navpični steni. V žleb vložimo dve navpični kovinski plošči, ki imata enaki velikosti kot steklene plošče. Kovinski plošči sta pravokotni na dno in na steni žleba. Stiki med posameznimi ploščami dobro tesnijo, tudi če kovinski plošči premikamo. Razdalja med kovinskima ploščama je tako majhna, da ju smemo obravnavati kot ploščati kondenzator s kapaciteto $3,5 \cdot 10^{-11} \text{ F}$. V prostor med kovinskima ploščama nalijemo toliko olja z dielektričnostjo 5, da z njim zapolnimo 45 % vmesnega prostora. Med plošči je priključen akumulator z napetostjo 50 V. Kolikšen naboj steče skozi akumulator, ko razdaljo med kovinskima ploščama zmanjšamo na polovico? Kaj pa, če jo zmanjšamo na tretjino?

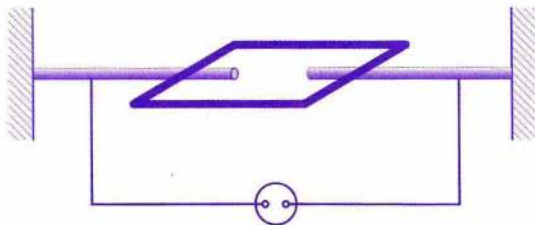
Influenčna konstanta je $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

3. Iz bakrene žice s specifičnim uporom $0,0175 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$ in presekom $1,0 \text{ mm}^2$ zvarimo okvir, prikazan na sliki. Vse stranice manjših kvadratov so enake in merijo po $5,0 \text{ cm}$. Izračunaj upor okvirja, če ga priključimo med točki



- a) B in F b) A in C
c) D in E .

4. Togo prevodno žico z zanemarljivo majhnim uporom vpneemo v obeh krajiščih tako, da je vodoravna. Iz sredine žice izrežemo kratek del, nato pa med vpeti krajišči priključimo napetost 10 mV . Kvadraten okvir iz bakrene žice s stranico 14 cm položimo na vpeta dela žice tako, da sta jima dve stranici okvirja vzporedni, od preostalih dveh stranic pa se vsaka dotika po enega dela (glej sliko). Okvir podpiramo s prstom tako, da je njegova ravnina vodoravna. Vključimo homogeno magnetno polje z gostoto $0,16 \text{ T}$, ki ima vodoravno smer in je pravokotno na togo žico. Kolikšna mora biti razdalja med vpeto žico in njej bližnjo vzporedno stranico okvirja, da okvir obmiruje v prvotnem položaju, ko odmaknemo prst? Skiciraj lego okvirja v tem položaju in na skici nedvoumno označi smeri tokov in magnetnega polja, za katere je izračunana lega res ravnovesna. Gostota bakra znaša 8900 kg/m^3 , specifični upor bakra pa $0,0175 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$. Težni pospešek je $9,8 \text{ m/s}^2$.



Skupina D

Ker so bile v tej skupini naloge oziroma deli nalog različno vrednoteni, je na koncu v oklepaju napisano možno število točk.

1. Tanka deska z maso M je prosto vrtljiva okoli nepremične vodoravne osi, ki poteka skozi težišče in je vzporedna krajši stranici deske. Levo krajišče držimo tako, da je deska v vodoravnem položaju, na desno krajišče pa položimo majhno utež z maso m . Koeficient lepenja med desko in utežjo je k . Desko izpustimo. Kolikšen kot oklepa deska z vodoravnico, ko utež zdrсне z nje? [7 točk]

2. Togo prevodno žico z zanemarljivo majhnim uporom vpnemo v obeh krajiščih tako, da je vodoravna. Iz sredine žice izrežemo kratek del, nato pa med vpeti krajišči priključimo napetost 10 mV. Kvadraten okvir iz bakrene žice s stranico 14 cm položimo na vpeta dela žice tako, da sta jima dve stranici okvirja vzporedni, od preostalih dveh stranic pa se vsaka dotika po enega dela (glej sliko pri 4. nalogi v skupini C). Okvir podpiramo s prstom tako, da je njegova ravnina vodoravna. Vključimo homogeno magnetno polje z gostoto 0,16 T, ki ima vodoravno smer in je pravokotno na togo žico.

a) Kolikšna mora biti razdalja med vpeto žico in njej bližnjo vzporedno stranico okvirja, da okvir obmiruje v prvotnem položaju, ko odmaknemo prst? Skiciraj lego okvirja v tem položaju in na skici nedvoumno označi smeri tokov in magnetnega polja, za katere je izračunana lega res ravnovesna. [5 točk]

b) Na katerem intervalu mora ležati vrednost napetosti, da obstaja več kot samo ena ravnovesna lega okvirja v vodoravnem položaju? [3 točke]

Gostota bakra znaša 8900 kg/m^3 , specifični upor bakra pa $0,0175 \text{ }\Omega\text{mm}^2/\text{m}$. Težni pospešek je $9,8 \text{ m/s}^2$.

3. Razsežno steno z debelino 10 cm segrejemo in pustimo, da se ohlaja. Z odvajanjem toplote poskrbimo, da je temperatura obeh površij ves čas stalna in enaka temperaturi okolice 20°C . Eksperimentator meri prečni temperaturni profil v steni s senzorji, razmaknjenimi po 1 cm. V nekem trenutku izmeri

$x \text{ [cm]}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T \text{ [}^\circ\text{C]}$	20,0	23,1	25,9	28,1	29,5	30,0	29,5	28,1	25,9	23,1	20,0

(Razdalja x je merjena od površja stene, drugo površje je pri $x = 10 \text{ cm}$.)

Toplotna prevodnost snovi je $1,8 \text{ W/mK}$, gostota $2,7 \text{ g/cm}^3$ in specifična toplota 1200 J/kgK .

- a) Na milimetrski papir nariši graf spreminjanja gostote toplotnega toka v steni v odvisnosti od razdalje x . Kolikšna je gostota toplotnega toka na sredini in kolikšna na površju? [2 točki]
- b) Kolikšna bi morala biti temperatura površja, da bi se stena ohlajala le s sevanjem? Predpostavimo lahko, da je stena črno telo. Stefanova konstanta je $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. [3 točke]

- c) Izračunaj temperaturni profil po 3 minutah in ga zapiši v obliki tabele. Namig: Steno razdeli v plasti z debelino po 1 cm in za vsako plast zapiši energijsko bilanco v času treh minut. Plast prejema toploto od sosednje toplejše plasti in jo oddaja sosednji hladnejši plasti. [3 točke]
- d) Eksperimentator domneva, da pada temperatura v vsaki plasti eksponentno s časom, torej

$$T(t) = T_0 + (T(t=0) - T_0) e^{-t/\tau}$$

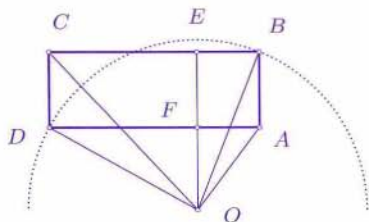
če je T_0 temperatura okolice. Preveri, če je takšna predpostavka smiselna, in določi (povprečni) τ . V kolikšnem času pade temperatura v sredini stene na polovico? [2 točki]

Ciril Dominko

21. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST (pomladanski krog) – Rešitve s str. 126 – 2. del

Prva skupina (drugi del)

1. Naj bo O središče danega kroga, r njegov polmer, $d < r$ pa oddaljenost točke A od središča kroga. Premica skozi O , vzporedna daljici AB , naj seka stranico BC v točki E in daljico AD v točki F (glej sliko).



Po Pitagorovem izreku dobimo

$$\begin{aligned} OA^2 + OC^2 &= (OF^2 + AF^2) + (OE^2 + CE^2) = \\ &= (OE^2 + BE^2) + (OF^2 + DF^2) = OB^2 + OD^2. \end{aligned}$$

Ker so dolžine OA , OB in OD konstantne, je tudi OC konstantna, kar pomeni, da C leži na krožnici s središčem v O in polmerom $\sqrt{2r^2 - d^2} > r$. Če obratno izberemo neko točko C na tej krožnici, krožnica s premerom AC seka rob danega kroga v dveh točkah B in D . Po Talesovem izreku sta kota ob točkah B in D prava, ker pa so točke A , B , C in D enako oddaljene od razpolovišča daljice AC , je $ABCD$ pravokotnik. Geometrijsko mesto točke C je torej vsa krožnica s središčem v O in polmerom $\sqrt{2r^2 - d^2} > r$.

2. Žepar si lahko zagotovi 46 kovancev. Dokler je na kupu vsaj šest kovancev, naj jemlje pesti s šestimi kovanci. Če Torbica dobi devet pesti s šestimi kovanci, jih ima 54, kar pomeni, da jih za Žeparja ostane 46. Če dobi Žepar prvi devet pesti s šestimi kovanci, je še v boljšem položaju, saj jih ima on 54. V preostalem primeru imata po šestnajsti izbiri oba osem pesti z šestimi kovanci, kar znaša 48 kovancev. Tedaj bo imel Žepar na koncu vsaj 48 kovancev. Prepričajmo se, da si Žepar ne more zagotoviti več kot 46 kovancev. Če mu Torbica prepusti vse pesti, ki vsebujejo manj kot šest kovancev, bo imel Žepar na koncu kvečjemu 46 kovancev. Res! V primeru, ko dobi Torbica prvi devet pesti, bodo te vsebovale vsaj po šest kovancev in jih bo imel tako vsaj 54, kar pomeni, da jih bo imel Žepar največ 46. Če dobi Žepar prvi devet pesti, bodo te vsebovale največ po pet kovancev, zato jih bo imel kvečjemu 45. V preostalem primeru se delitev konča še preden ima Žepar devet pesti, kar pomeni, da ima kvečjemu osem pesti z največ petimi kovanci, torej kvečjemu 40 kovancev.

3. Slika prikazuje, kako lahko na šahovnico v skladu z zahtevami postavimo 16 skakačev.

Pokažimo, da tega števila ni mogoče povečati.

Šahovnico pobarvajmo, kot običajno, z belo in črno barvo, pri čemer naj bodo vogali črne barve. Ker lahko skakač na belem polju napade le skakača s črnega polja in obratno, je število

	•	•	•	
•	•		•	•
•				•
•	•		•	•
	•	•	•	

skakačev na belih poljih enako številu skakačev na črnih poljih. Če bi na šahovnico lahko postavili več kot 16 skakačev, bi bila prosta največ štiri črna polja in največ tri bela polja, saj tedaj na šahovnici stoji vsaj 18 skakačev. Skakač na osrednjem polju šahovnice bi napadal osem belih polj, od katerih bi moralo biti zato prostih šest polj, kar seveda ni mogoče. Torej je osrednje polje šahovnice prazno. Skakač na belem polju, ki meji na osrednje polje šahovnice, napada šest črnih polj, od katerih morajo ostati prazna štiri polja. Skupno z osrednjim praznim črnim poljem bi bilo praznih pet črnih polj, kar spet ni mogoče. Od tod sledi, da morajo vsa štiri bela polja, ki mejijo na osrednje polje, ostati prazna. Zopet protislovje, torej lahko na šahovnico postavimo največ 16 skakačev.

Druga skupina (drugi del)

1. Postavimo večkotnik v pravokotni koordinatni sistem, pri čemer je velikost enote enaka dolžini stranic kvadratkov mreže, koordinatno izhodišče pa leži v enem izmed vozlišč mreže. S premicami z enačbo $y = n$, kjer je n celo število, je večkotnik razdeljen na vodoravne

trakove. Gornji in spodnji kos te delitve sta trikotnika, ostali trakovi pa imajo obliko trapeza, ki ga lahko razdelimo na dva trikotnika. Tedaj je vsak vodoravni odsek tvorilk mreže, ki leži znotraj večkotnika, osnovnica dveh takih trikotnikov z višino 1. To pomeni, da je vsota dolžin teh vodoravnih odsekov ravno enaka ploščini danega večkotnika. Enako (s pomočjo navpične delitve) zaključimo, da je vsota dolžin navpičnih odsekov prav tako enaka ploščini večkotnika, torej sta vsoti enaki.

2. Če izračunamo vsoti števk dveh zaporednih celih števil, se razlikujeta za 1, razen v primeru, ko se prvo konča z 9. V prvem primeru se parnost vsote spremeni, v drugem primeru pa se parnost ne spremeni, če se prenos konča pri deseticah, tisočicah, stotisočicah,... V vsakem primeru se parnost ne more spremeniti pri dveh zaporednih prehodih enic iz 9 na 0 (vsaj enkrat se prenos konča pri deseticah). Če želimo ustreči zahtevam naloge, se mora parnost dobljenih vsot spreminjati, razen morda pri prvem členu zaporedja, saj 1 deli vsako število. To pomeni, da imamo lahko kvečjemu dve spremembi enic iz 9 na 0, pri čemer se prva pojavi že na začetku zaporedja, in sicer brez spremembe parnosti vsote števk. Od tod sledi, da je $N \leq 21$. V naslednji tabeli je zaporedje 21 zaporednih naravnih števil, ki zadošča zahtevam naloge:

število	vsota števk	delitelj
479...989	27730	1
479...990	27722	2
479...991	27723	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
479...998	27730	10
479...989	27731	11
480...000	12	12
480...001	13	13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
480...008	20	20
480...009	21	21

3. (a) Predpostavimo najprej, da ima turnir $2n$ udeležencev in zato $n(2n-1)$ partij. Povprečno število točk na igralca tedaj znaša $\frac{2n-1}{2}$. Tedaj ima najboljših n igralcev vsaj $\frac{n(2n-1)}{2}$ točk. Ker natanko $\frac{n(n-1)}{2}$ teh točk izhaja iz medsebojnih partij teh n igralcev, so si

v partijah proti zadnjim n igralcem s končne lestvice priigrali vsaj $\frac{n(2n-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2}$ točk. Te točke so torej dobili v partijah, ki niso bile nepravilne. Od tod ugotovimo, da je delež pravih partij vsaj $\frac{\frac{n^2}{2}}{\frac{n^2}{2n(2n-1)}} > \frac{1}{4}$, kar pomeni, da je delež nepravilnih manjši od $\frac{3}{4}$. Oglejmo si še turnir z $2n+1$ šahisti, na katerem je bilo odigranih $n(2n+1)$ partij. Povprečno število točk na udeleženca znaša n točk, zato je najboljših $n+1$ igralcev turnirja dobilo vsaj $n(n+1)$ točk. V medsebojnih partijah si je teh $n+1$ igralcev razdelilo $\frac{n(n+1)}{2}$ točk, v partijah proti preostalim n udeležencem pa so tako dobili vsaj $n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ točk. Torej je bilo vsaj $\frac{n(n+1)}{2}$ priigranih v pravih partijah, zato je delež slednjih vsaj $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2n(2n+1)}} > \frac{1}{4}$. Zopet dobimo, da je delež nepravilnih partij manjši od $\frac{3}{4}$.

(b) Naj bo na turnirju $4n^2+6n+1$ udeležencev in skupno $n(2n+3) \cdot (4n^2+6n+1)$ partij. Razdelimo igralce v skupine $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ in B , z $2n+1$ igralci v vsaki skupini A_i in $2n$ igralcev v skupini B . Za vsak i , $1 \leq i \leq 2n+1$ naj vsak igralec skupine A_i doseže natanko n točk v partijah znotraj skupine A_i . Premaga naj $2n+1-i$ igralcev skupine B , z ostalimi iz B pa izgubi. Premaga naj vsakega igralca skupine A_{i+j} za $n+1 \leq j \leq 2n$ in izgubi z vsakim igralcem iz skupine A_{i+j} za $1 \leq j \leq n$, kjer indeksom $i+j$ odštejemo $2n+1$, kadar presegajo $2n+1$. To pomeni, da ima igralec skupine A_i več točk kot igralec skupine A_j natanko tedaj, ko je $i < j$. Za $2 \leq i \leq n+1$ igralci skupine A_i premagajo igralce skupine A_j za $1 \leq j \leq i-1$, od koder dobimo $(1+2+\dots+n)(2n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)^2}{2}$ nepravilnih partij. Za $n+2 \leq i \leq 2n+1$ igralci skupine A_i premagajo igralce skupine A_j za $i-n \leq j \leq i-1$, od koder dobimo še $n^2(2n+1)^2$ nepravilnih partij. Skupno število nepravilnih partij je torej vsaj $\frac{n(n+1)(2n+1)^2}{2} + n^2(2n+1)^2 = \frac{n(3n+1)(2n+1)^2}{2}$ in s tem delež nepravilnih partij vsaj $\frac{(3n+1)(2n+1)^2}{2(2n+3)(4n^2+6n+1)}$. Ker je limita zadnjega ulomka ravno $\frac{3}{4}$, navedene meje ne moremo zmanjšati.

Gregor Cigler

41. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA – Rešitve izbranih nalog s str. 154

Ker bomo v prvi rešitvi geometrijske naloge uporabili usmerjene kote, navedimo najprej nekaj teorije. Naj bodo A , B in C različne točke v

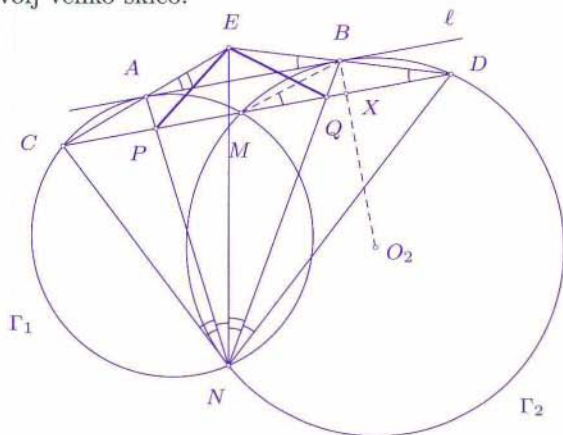
ravnini. Usmerjeni kot $\sphericalangle ABC$ je najmanjši kot, za katerega moramo v pozitivni smeri zavrteti premico AB okoli točke B , da preide v premico BC . Torej za poljubno točko D , $D \neq B$ na premici BC velja $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$. Usmerjeni koti pridejo še posebej do izraza pri izreku o koncikličnosti, saj velja:

Različne točke A, B, C in D v ravnini so konciklične natanko tedaj, ko je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

1. naloga

Rešitev Aleksandre Franc

Narišimo dovolj veliko skico.



Iz enakosti obodnih kotov sledi

$$\sphericalangle EBN = \sphericalangle DMN = \sphericalangle CMN = \sphericalangle CAN = \sphericalangle EAN,$$

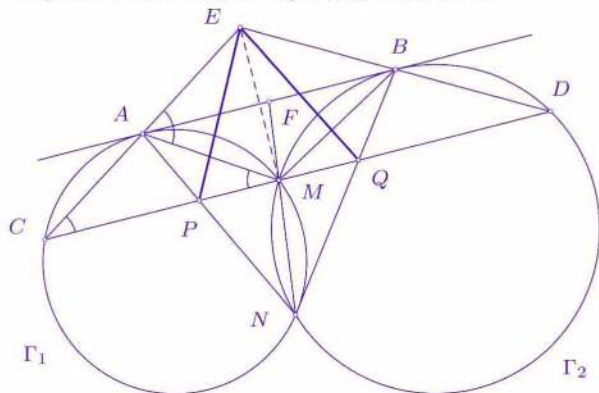
zato je $ANBE$ tetivni štirikotnik. Torej je $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ENA$. Ker je $AB \parallel CD$, je $\sphericalangle EBA = \sphericalangle EDC$. Iz $\sphericalangle ENA = \sphericalangle ENP$ in $\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDP$ sledi $\sphericalangle ENP = \sphericalangle EDP$, zato je tudi $EDNP$ tetivni štirikotnik. Podobno je tudi $ECNQ$ tetivni štirikotnik. Velja še $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BNE$ in $\sphericalangle DNB = \sphericalangle DMB$. Ker je $|MO_2| = |DO_2|$ in $BO_2 \perp MD$, premica BO_2 pravokotno razpolavlja MD . Torej je MBD enakokrak trikotnik z vrhom B in zato $\sphericalangle DMB = \sphericalangle BDM$ in $\sphericalangle DNB = \sphericalangle ENA$. Podobno je tudi $\sphericalangle ANC = \sphericalangle BNE$.

Sledi $\sphericalangle ENC = \sphericalangle DNE$. Zaradi tetivnosti štirikotnikov $EDNP$ in $ECNQ$ je $\sphericalangle ENC = \sphericalangle EQC$ ter $\sphericalangle DNE = \sphericalangle DPE$ in zato $\sphericalangle DPE = \sphericalangle EQC$. Preidimo na absolutne kote. Kota $\sphericalangle DPE$ in $\sphericalangle EQC$ ne

moreta biti suplementarna, saj je v tem primeru trikotnik PQE izrojen in bi se krožnici Γ_1 in Γ_2 le dotikali. Torej morata biti kota DPE in EQC enaka. Trikotnik PEQ je tako enakokrak z vrhom E in velja $|EQ| = |EP|$.

Rešitev Irene Majcen

Podobno kot v prejšnji rešitvi dokažemo, da je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle CMA = \sphericalangle BAM$, kjer zadnja enakost velja zaradi izmeničnih kotov ob premici AM . Ker je tudi $\sphericalangle MBA = \sphericalangle ABE$, je $AEBM$ deltoid, zato diagonala AB pravokotno razpolavlja diagonalo ME .



Označimo z F presečišče premic MN in AB . Po izreku o potenci točke F na krožnici Γ_1 in Γ_2 je

$$|AF|^2 = \vec{FM} \cdot \vec{FN} = |FB|^2,$$

zato je $|AF| = |FB|$. Zaradi podobnosti trikotnikov ABN in PQN ter kolinearnosti točk F , M in N je točka M razpolovišče daljice PQ . Ker je $EM \perp PQ$, je premica EM srednjica daljice PQ , zato sta pravokotna trikotnika PME in QME skladna. Sledi $|EQ| = |EP|$, kot je bilo potrebno dokazati.

2. naloga Pokazali bomo, da lahko čarovnik razporedi karte na 12 načinov. Zaradi enostavnosti pravimo, da ima število k barvo x , če se karta, na kateri je zapisano število k , nahaja v škatli barve x . Ločimo dva primera.

- Obstaja tako število k , da so števila k , $k+1$ in $k+2$ različnih barv, recimo barv R , B in M . Ker je $k + (k+3) = (k+1) + (k+2)$, je lahko število $k+3$ le barve R . Torej tri zaporedna števila različnih barv natančno določajo barvo naslednjega števila. Ker pa je $(k-1) + (k+2) = k + (k+1)$, je tudi barva števila $k-1$ natančno določena:

biti mora barve M. Torej je barva vseh števil natančno določena: poljubna tri zaporedna števila so različnih barv, kar lahko napravimo na 6 različnih načinov. Seveda pa vsako tako barvanje ustreza, saj dajo vsote $R+B$, $B+M$ in $M+R$ različne ostanke pri deljenju s 3.

- Nobena tri zaporedna števila niso različnih barv. Naj bo 1 barve R. Naj bo b najmanjše število, ki ni rdeče; recimo, da je b barve B. Naj bo še m najmanjše število barve M. Ker nobena tri zaporedna števila niso različnih barv, je $b+1 < m$.

Privzemimo za hip, da je $m < 100$. Iz $b+m = (b-1) + (m+1)$ sklepamo, da je število $m+1$ rdeče. Slednje pa ni možno, saj nam leva vsota v enakosti $(b+1) + m = b + (m+1)$ določa rdečo škatlo, desna vsota pa modro. Torej je $m = 100$.

Ker je $(b-1) + 100 = b+99$, je lahko 99 le belo. Če je $t > 1$ še kakšno rdeče število, mora zaradi $t+99 = (t-1) + 100$ biti $t-1$ modro. Slednje pa ni možno, saj je 100 najmanjše modro število. Torej imamo razporeditev RBB...BBM, ki nam skupaj s permutacijami da še šest rešitev.

Nazadnje preverimo, da je razporeditev RBB...BBM res ustrezna. Če je vsota izbranih števil manjša od 101, čarovnik izbere modro škatlo.

Če je vsota izbranih števil enaka 101, čarovnik izbere belo škatlo. Če pa je vsota izbranih števil večja od 101, čarovnik izbere rdečo škatlo.

Čarovnik lahko torej razporedi karte v škatle na ducat načinov.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
28. letnik, šolsko leto 2000/2001, številka 4, strani 193–256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4766-553, telefaks (01) 2517-281, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2000/2001 je za posamezne naročnike **2.400 SIT**, za skupinska naročila šol **2.000 SIT**, posamezna številka **600 SIT**, letna naročnina za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, Ljubljana, SWIFT: SKBASIX, številka računa 042961.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Založilo DMFA – založništvo
Tisk: DELO Tiskarna, Ljubljana

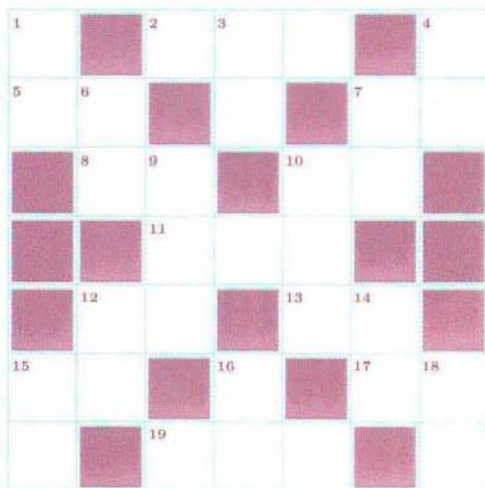
© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1445

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

ŠTEVILSKA KRIŽANKA ZA MATEMATIČNI PODMLADEK

Vodoravno:

2. Produkt dveh zaporednih lihih števil, ki sta obe praštevili (praštevilska dvojčka).
5. Število 82.6, zaokroženo na dve mesti.
7. Števec ulomka z imenovalcem 72, ki je ekvivalenten (enak) ulomku $\frac{8}{9}$.
8. $31 + (-9)$.
10. Število oglišč šeststrane prizme.
11. Produkt kuba in kvadrata različnih naravnih števil.
12. Vrednost $f(9)$ za $f(x) = 20 - x$.
13. Praštevilo z enakima števčkama.
15. Stranica kvadrata s ploščino 625.
17. Potenca števila 2.
19. Produkt zaporednih naravnih števil, v katerem je prva številka enaka kvadratu srednje številke.



Navpično:

1. Zapiši $72_{(8)}$ v desetiškem številskem sestavu.
3. $12 - (-8)$.
4. Število robov osemkotne prizme.
6. Peta potenca naravnega števila.
7. Število, ki smiselno nadaljuje zaporedje 5, 12, 20, 29, 39, 50.
9. Produkt drugega, četrtega in petega praštevila.
10. Zapiši produkt $22_{(5)} \times 3_{(5)}$ v petiškem številskem sestavu.
12. Koliko stopinj meri šestina pravega kota?
14. Baza številskega sestava, v katerem je pravilen račun $63 - 47 = 19$.
15. Koliko večkratnikov števila 4 je manjših od števila 100?
16. Dvomestni približek vrednosti izraza $28.68 + 53.87$.
18. Ploščina trikotnika s stranicami 6, 8 in 10 enot.

Marija Vencelj

