

# SVETOVNO LETO MATEMATIKE 2000

Plemelj

$\pi$

Riemann

Hilbert

Vega

Gauss

Cauchy

Euler

Diophantus

Leibniz

Euclid

Pythagoras

28 (2000-2001)

Thales

# PRE SEKTA

UNIVERZA V MARIBORU  
PEDAGOŠKA AKADEMIJA  
ODDELEK ZA MATEMATIKO

ISSN 0351-6652  
DMFA SLOVENIJE



Oblikovali: Vladimir Grubelnik Podlaga: Vladimir Potočnik, "Nevita v Prekmurju"

Podpira: UNESCO Pobudnik: International Mathematical Union



Ekipa Slovenije na MMO v Južni Koreji. Od leve proti desni: Matjaž Željko (vodja ekipe), Matjaž Urlep, Mojca Miklavc (bronasta medalja), Aleksandra Franc (pohvala), Sašo Jelenčič, Klemen Šivic (pohvala), Irena Majcen (srebrna medalja) in Gregor Dolinar (član mednarodne tekmovalne komisije).



Ekipa Slovenije na 31. mednarodni fizikalni olimpiadi v Leicestru v Veliki Britaniji. Z leve proti desni: Ciril Dominko (vodja), Andrej Košmrlj, Gregor Tavčar, Matej Kanduč, Igor Veselič, Iztok Pižorn, Jure Bajc (vodja).

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
28. letnik, leto 2000/2001, številka 3, strani 129–192

## VSEBINA

|                      |                                                                                                                                        |            |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>MATEMATIKA</b>    | O perfektnih (popolnih) kvadririh (Ivan Vidav).....                                                                                    | 140-147    |
| <b>FIZIKA</b>        | Proti toku (Janez Strnad).....                                                                                                         | 136-139    |
|                      | Toplotni izmenjevalci (Andrej Likar).....                                                                                              | 156-159    |
| <b>ASTRONOMIJA</b>   | Zanimiva naloga o Jupitru in Saturnu (Marijan Prosen) ..                                                                               | 131-133    |
| <b>RAČUNALNIŠTVO</b> | Trdnjave na šahovnici – rešitev s str. 81 (Martin Juvan) ..                                                                            | 148-150    |
|                      | Grafična podpora – rešitev s str. 91 (Martin Juvan).....                                                                               | 150-151    |
| <b>NOVICE</b>        | Matematični plakat – rezultati tekmovanja<br>(Peter Legiša) .....                                                                      | 134-135    |
|                      | Droben spomin na Giordana Bruna (Marijan Prosen) ....                                                                                  | 152-153    |
|                      | 41. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko) ..                                                                                | 154-155    |
|                      | 31. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko) .....                                                                               | 155        |
|                      | 31. fizikalna olimpiada: Izgubljeni v Leicesteru<br>(Andrej Košmrlj) .....                                                             | 162-163    |
| <b>NALOGE</b>        | Pravokotna številka križanka (Urška Demšar) .....                                                                                      | 130        |
|                      | Neobičajna konstrukcijska naloga (Marija Vencelj) .....                                                                                | 130        |
|                      | Videti je zahtevno, pa ni! (Marija Vencelj) .....                                                                                      | 133        |
|                      | Neenakost (Marko Razpet) .....                                                                                                         | 133        |
| <b>REŠITVE NALOG</b> | Mala številka križanka – s str. 66 (Urška Demšar) .....                                                                                | 139        |
|                      | Trgovska – s str. 66 (Marija Vencelj) .....                                                                                            | 153        |
|                      | Dve za podmladek – s str. 73 (Dragoljub M. Milošević) .....                                                                            | 153        |
|                      | Vrstni red tekmovalcev – s str. 67 (Dragoljub M. Milošević) ..                                                                         | 159        |
|                      | Križanka "Estetsko delilno razmerje" – s str. 96<br>(Marko Bokalič) .....                                                              | 159        |
|                      | Dokaži neenakost – s str. 91 (Marko Razpet) .....                                                                                      | 164-165    |
|                      | Vedno velja – s str. 80 (Dušan Murovec) .....                                                                                          | 165        |
|                      | Rešitve nalog iz članka Hipokratove lune s str. 98<br>(Milan Hladnik) .....                                                            | 166-169    |
|                      | Iz daljice trikotnik – s str. 81 (Marija Vencelj) .....                                                                                | 170        |
| <b>RAZVEDRILO</b>    | Križanka "Pravilni poliedri" (Marko Bokalič) .....                                                                                     | 160-161    |
| <b>TEKMOVANJA</b>    | Urniki tekmovanja v letu 2001 (Darjo Felda) .....                                                                                      | 171-173    |
|                      | 35. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje –<br>rešitve s str. 110 (Aleksander Potočnik) .....                                | 173-175    |
|                      | 20. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce –<br>rešitve s str. 115 (Nada Razpet) .....                                          | 175-180    |
|                      | Izbirno tekmovanje iz matematike – rešitve s str. 120<br>(Matjaž Željko) .....                                                         | 180-183    |
|                      | Rešitve nalog s predtekmovanja iz srednješolske fizike v<br>šolskem letu 1999/2000 – s str. 122 (Bojan Golli) .....                    | 184-189    |
|                      | 21. mednarodno matematično tekmovanje mest<br>(pomladanski krog) – rešitve s str. 126 –<br>1. del (Gregor Cigler) .....                | 189-192    |
| <b>NA OVITKU</b>     | Nagrajeni matematični plakati s tekmovanja ob Svetovnem letu<br>matematike 2000 (glej tudi zapis na str. 134) .....                    | I, III, IV |
|                      | Slovenski olimpijski ekipi na 41. matematični in 31. fizikalni med-<br>narodni olimpiadi. Poročila so na straneh 154, 155 in 162 ..... | II         |

## PRAVOKOTNA ŠTEVILSKA KRIŽANKA

V vsak kvadrateg križanke vpišemo po eno števko posamezne rešitve, ki so naravna števila. Odebeljene črte nakazujejo presledek med dvema številoma.

### Vodoravno:

1. Razlika števil pod 16 vodoravno in 9 navpično.
4. Šesta potenca.
7. Praštevilo.
8. Dvakrat dve zaporedni enaki števki.
9. Obratno število (to je število s števka v obratnem vrstnem redu) je delitelj števila 9 navpično.
10. Enaki števki.
11. Obratno število je količnik števil pod 6 navpično in 15 navpično.
12. Zrcalno število (število, ki je enako svojemu obratnemu številu).
14. Razlika števk je 3.
16. Naraščajoče zaporedne lihe števeke.
17. Kvadrat števila pod 5 navpično.

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 7  |    | 8  |    |    |    |
| 9  |    | 10 |    | 11 |    |
| 12 | 13 |    |    | 14 | 15 |
| 16 |    |    | 17 |    |    |

### Navpično:

1. Zaporedni števki.
2. Praštevilo.
3. Produkt števil pod 17 vodoravno in 11 vodoravno.
4. Sedma potenca lihega števila.
5. Zaporedni števki.
6. Padajoče geometrijsko zaporedje števk s količnikom  $1/3$ .
9. Tretja števka je vsota prvih dveh.
11. Prva števka je vsota drugih dveh.
13. Delitelj števila 14 vodoravno.
15. Dvomestni kvadrat.

*Urška Demšar*

## NEOBIČAJNA KONSTRUKCIJSKA NALOGA

V konstrukcijski ravnini naj bodo dane tri točke  $T_1, T_2, T_3$  (lega). Konstruiraj trikotnik, katerega stranice so osnovnice enakokrakih trikotnikov z vrhovi v točkah  $T_1, T_2, T_3$  in z danimi koti  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  ob vrhovih. Pri tem naj leži enakokraki trikotnik z vrhom  $T_i$  ves v zunanosti iskanega trikotnika, če je kot ob njem  $\varphi_i < 180^\circ$ , in na istem bregu skupne stranice kot iskani trikotnik, če je  $\varphi_i > 180^\circ$  (v tem primeru vzamemo, da je kot ob vrhu  $T_i$  enak  $360^\circ - \varphi_i$ ).

*Marija Vencelj*

## ZANIMIVA NALOGA O JUPITRU IN SATURNU

Po predavanju, ki sem ga imel o astronomiji spomladi na neki osnovni šoli, je pristopil k meni osmošolec in me vprašal: "Pred kratkim sem bral, da se bo letos (to je 2000) na jesenskem nebu Jupiter zelo približal Saturnu, kar se zgodi vsakih 20 let. Zakaj se to zgodi, tega ne razumem."

Bil sem presenečen, saj vprašanje ni bilo prav nič povezano z vsebino predavanja.

"No," sem mu dejal, "ta dva planeta sta letos že ves čas navidezno, tj. na nebu, precej skupaj in zdaj, spomladi, še celo bolj kot bosta jeseni. Še nekaj časa bo tako." Tiščal je vame. Z odgovorom ni bil zadovoljen.

"Pa stvar razčistiva," sem mu rekel.

Radovedni učenec je kazal občutek očitnega zadovoljstva, skoraj se mi je zdelo, da tudi malo nagajivosti.

Premaknila sva se k tabli, začela po njej risati, nekaj učencev pa se nama je pridružilo. Zaradi tega vprašanja se je moje predavanje kar precej zavleklo, vendar sem bil na koncu zelo zadovoljen, ker sem se pri pojasnjevanju še sam nekaj novega naučil. Ob narisani sliki sva takole modrovala:

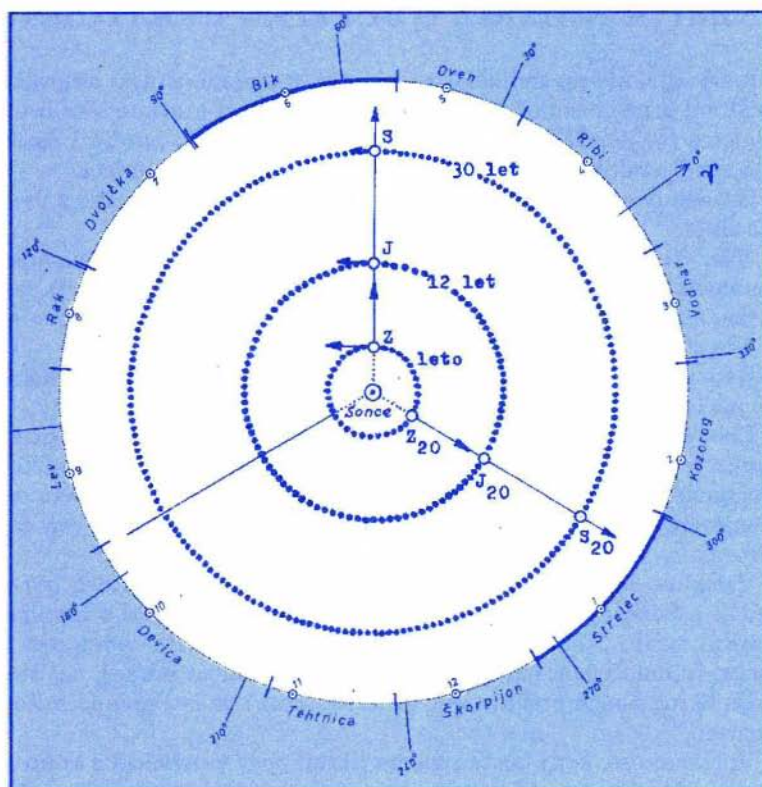
Vzemimo idealen primer, da sta danes Jupiter in Saturn hkrati v opoziciji s Soncem (slika 1). To pomeni, da sta, gledano z Zemlje, na nasprotni strani Sonca. V takem primeru sta planeta vidna vso noč, na nebu (v določenem ozvezdju) ju vidimo zelo blizu skupaj, saj sta pri gibanju okrog Sonca prišla v legi, ki ležita skoraj na isti premici z Zemljo in Soncem.

Vprašamo se, kdaj bosta planeta hkrati spet v opoziciji s Soncem in z Zemlje vidna v istem ozvezdju, v našem primeru v ozvezdju Bik (da bosta planeta čez določen čas torej spet v legi J, S glede na Z in Sonce na sliki 1). Odgovor je preprost. Čez (približno)  $12 \times 30$  let = 360 let, če za obhodni čas Jupitra vzamemo okroglo 12 let, za obhodni čas Saturna pa okroglo 30 let.

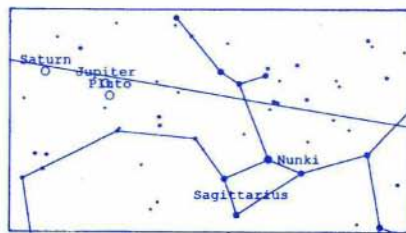
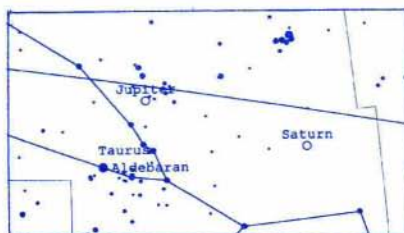
Če pa se vprašamo, kdaj bosta planeta hkrati spet v opoziciji, vendar vidna v drugi smeri, vidna v drugem ozvezdju, pa se to dogodi pogosteje. Recimo, da se to zgodi vsakih  $x$  let.

V enem letu opiše zveznica Sonce-Jupiter kot  $360^\circ/12$ , zveznica Sonce-Saturn pa kot  $360^\circ/30$ . Jupiter kroži hitreje od Saturna. V enem letu pride do razlike  $(360^\circ/12 - 360^\circ/30)$ . Ko čez  $x$  let ta razlika naraste na  $360^\circ$ , bosta planeta spet poravnana z Zemljo in Soncem, vendar z Zemlje vidna v drugi smeri, v drugem ozvezdju. Iz  $(360^\circ/12 - 360^\circ/30) \cdot x = 360^\circ$  dobimo  $(1/12 - 1/30) \cdot x = 1$  in od tod  $x = 20$  let.

Odgovor (ne preveč strogo natančen): Jupiter in Saturn bosta spet navidezno zelo skupaj čez približno 20 let.



Slika 1. Lega Zemlje Z, Jupitra J in Saturna S glede na Sonce – danes (zadnjo jesen); Z<sub>20</sub>, J<sub>20</sub>, S<sub>20</sub> – lege planetov na njihovih tirih čez približno 20 let.



Slika 2. Levo – lega Jupitra in Saturna v ozvezdju Bik blizu njunih opozicij (sredina novembra 2000); desno – lega Jupitra in Saturna na nebu čez približno 20 let (računalniški skici).

Sam rezultat res potrdi to, kar je učenec prebral. Vendar je potrebno še precej dodatnih pojasnil. Čez 20 let bo Jupiter naredil  $20/12 = 5/3$  svoje poti, bo v legi  $J_{20}$ , Saturn bo naredil  $20/30 = 2/3$  svoje poti in bo v legi  $S_{20}$ , Zemlja pa bo v tem času 20-krat obkrožila Sonce in bo v prvotni legi  $Z$  (glej sliko 1). Toda v tem 20. letu (ali okoli tega 20. leta) bo Zemlja na svoji poti okrog Sonca zagotovo prišla enkrat v lego  $Z_{20}$  med Sonce in oba planeta tako, da bosta planeta hkrati približno v opoziciji s Soncem in zato vidna blizu skupaj na nebu, vendar v drugem ozvezdju.

Jupiter in Saturn sta bila jeseni navidezno blizu v ozvezdju Bik, čez 20 let pa bosta drug ob drugem z Zemlje vidna v drugem ozvezdju. Katerem?

O vsem tem se z lahkoto prepričamo na zaslonu računalnika, če imamo ustrezen računalniški astro program (slika 2). Vendar je meni opisano razmišljanje ljubše. Pa tudi učencem je bilo všeč. Živahno in veselo so se razkropili. Zdi se mi, da so bili srečni, ko smo skupaj strli do tedaj za njih tako trd oreh.

*Marijan Prosen*

## VIDETI JE ZAHTEVNO, PA NI!

V nakazanem računu množenja zamenjajte krožce z desetiškimi števki tako, da bo dobljeni račun pravilen.

$$\begin{array}{r}
 \circ\circ\circ \cdot \circ\circ\circ \\
 \hline
 \circ\circ\circ \\
 3\ 5\ 3\ 5 \\
 \circ\circ\circ \\
 \hline
 \circ\circ\circ\circ\circ
 \end{array}$$

*Marija Vencelj*

## NEENAKOST

Naj bodo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  poljubna pozitivna realna števila, za katera je  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Dokaži, da tedaj velja neenakost

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

Kdaj velja enačaj? (Primerjaj z nalogo na strani 91, rešitev na strani 164.)

*Marko Razpet*

## MATEMATIČNI PLAKAT – Rezultati tekmovanja

Mednarodna matematična zveza je leto 2000 razglasila za Svetovno leto matematike. V tem času naj bi ponovno premislili vlogo matematike v naši civilizaciji in poskusili o tem seznaniti tudi javnost.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov je ob tej priložnosti organiziralo tekmovanje v izdelavi matematičnih plakatov. Odziv je bil razveseljiv. Moja edina pripomba bi bila, da nekateri avtorji niso upoštevali navodila, naj bo besedilo plakata dobro berljivo.

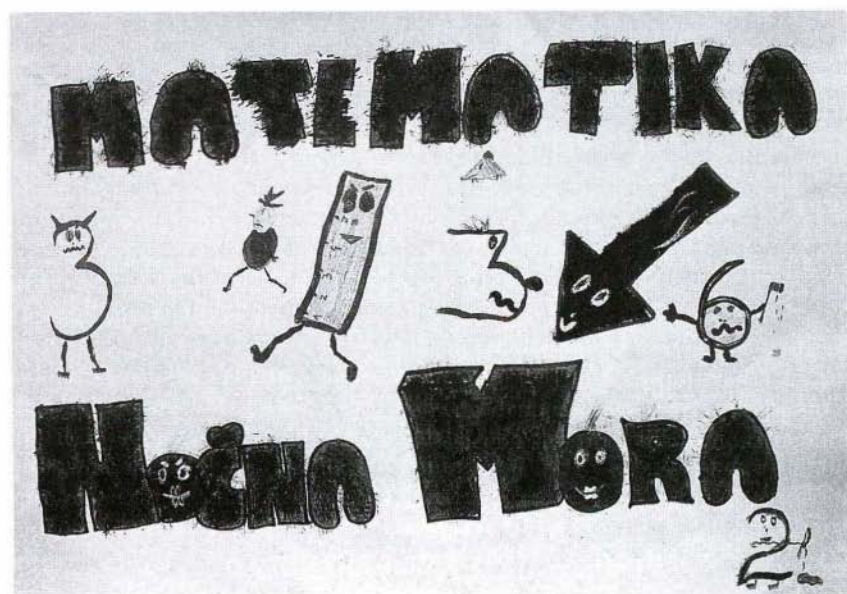
Skupaj s kolegom Matijo Lokarjem sva iz poslanega izbrala 24 plakatov, ki so bili razstavljeni na Občnem zboru našega društva v Zrečah (10. novembra 2000). Društvo bo s knjigami nagradilo tri plakate in eno kolekcijo, ki so posebej izstopali. Ker so njihovi avtorji različnih starosti in izobrazbe, smo se odločili, da vrstnega reda nagrad ne bomo delali. Nagrajenci pa so:

- Vladimir Grubelnik za plakat, ki ga je naročil Oddelek za matematiko Pedagoške fakultete v Mariboru. (Posnetek plakata objavljamo na naslovnici. Ozadje je slika Vladimirja Potočnika: Nevihta v Prekmurju.)
- Boštjan Kuzman, študent FMF iz Ljubljane za plakat z zelo bogato vsebino, ki bi si zaslužil natis v primerno velikem formatu. V "časovnem polžu" imamo kratko zgodovino matematike in sočasnih civilizacijskih dosežkov (III. stran ovitka).
- Dragica in Gregorij Kurillo iz Kranja za domiselno ilustracijo togih premikov z idrijsko čipko (IV. stran ovitka).
- Mentorja Danijel Bezek in Lea Cebe ter njuni učenci: Tjaša Petročnik, Katja Repič in Katja Špeh, Jan Kocjan in Gregor Vrhovnik, Maja in Tanja Oblak, Matija Štirn, Anka Kalan, Katja Zobavnik, Mateja Železnikar, Matija Učakar in Peter Vidmar z Osnovne šole Frana Albrehta v Kamniku za zbirko domiselnih in likovno zelo posrečenih plakatov. (To je le izbor izbora kakih sto plakatov, ki so jih izdelali na tej šoli. Na naslednji strani objavljamo dva, žal v črnbeli tehniki.)

Pohvaliti moram še Osnovno šolo iz Žalca in Osnovno šolo Frana Metelka iz Škocjana, ki sta poslali vsaka svojo zbirko; v zadnji je bil celo kratek matematični strip. Zahvala gre tudi likovnim pedagogom na šolah.

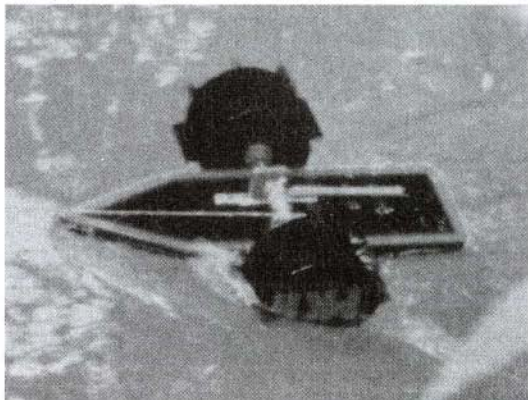
Razstavljene plakate nameravam objaviti na domači spletni strani našega društva: <http://www.dmfa.si/mplakat/plakati.html>. Vsem, ki ste sodelovali v akciji Matematični plakat, čestitam. Le redko mi je bilo kako delo bolj v zadovoljstvo kot pregledovanje Vaših izdelkov.

*Peter Legiša*



## PROTI TOKU

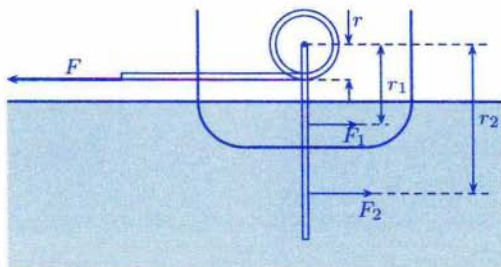
Neka nemška televizijska postaja je z namenom, da bi med učenci širila zanimanje za naravoslovje, razpisala natečaj za predloge za perpetuum mobile. Med dopisi je dobila predlog nekega učenca za napravo, ki "sicer ni pravi perpetuum mobile, a v nasprotju s podobnimi predlogi deluje". Treba je bilo vložiti še precej dela, preden je učenec ob pomoči strokovnjakov izdelal model naprave. To je bila ladjica brez motorja, ki je plula proti toku (slika 1).



Slika 1. Model broda proti toku, ki ga je ob pomoči strokovnjakov izdelal nemški učenec. Model se je s hitrostjo 5 metrov na minuto gibal proti toku s hitrostjo 40 metrov na minuto. Slika je vzeta iz članka W. Bürger, *Das Gegenstromschiff*, *Physikalische Blätter* 54 (1998) 1131. Razmerju  $v_b/v = 1/8$  ustrežajo razmerja  $a = 1$ ,  $b = 2,8$  in  $r_2/r = 3,8$ .

Večina vas bo rekla, da kaj takega ni mogoče. Pa je. Vendar plovilo, ki se je prepuščeno samo sebi gibalo proti toku, ni bilo prosto, ampak z vrvjo povezano z okolico. Zato je bolje govoriti o brodu. Brod ima preprosto zgradbo. Trup izpodriva vodo in poskrbi za vzgon. Na sredi je na trup preko ležajev pritrjena prečna gred s kolesoma z lopaticami. Lopatice koles na levem in desnem boku segajo v vodo. Voda preko lopatic poganja gred, da se vrti in se nanjo navija vodoravna vrv. Drugo krajišče vrvi je pritrjeno v točki sredi toka pred brodom, denimo, na sredi mostu. Brod se giblje proti toku, ko se vrv navija na gred.

Pospremimo prejšnje trditve s preprostimi enačbami. Voda deluje na potopljeni del trupa s silo, katere komponenta navpično navzgor je vzgon  $F'_1$  in vodoravna komponenta v smeri toka upor broda  $F_1$ . Na brod deluje navpično navzdol teža  $F_g$ , ki jo uravnovesi vzgon. Na potopljeni del lopatic deluje še sila tekoče vode  $F_2$  v smeri toka, to je upor lopatic, in na gred sila vrvi  $F$  v nasprotni smeri toka (slika 2).



Slika 2. Sile in komponente sile, ki delujejo na brod v vodoravni smeri.

V ravnovesju, ko brod miruje ali se enakomerno giblje, je vsota komponent vseh sil v navpični in vodoravni smeri enaka 0:

$$F'_1 - F_g = 0, \quad F_1 + F_2 - F = 0.$$

V ravnovesju je enaka 0 tudi vsota vseh navorov. Računajmo jih glede na os gredi, ker lahko v ravnovesju poljubno izbiramo os. Glede na to os delujeta navor upora  $r_2 F_2$  in v nasprotni smeri navor vrvi  $r F$ . Ročica je pri prvem razdalja sredine potopljenega dela lopatice od osi  $r_2$  in pri drugem polmer gredi  $r$ . Navora sta v ravnovesju:

$$r_2 F_2 - r F = 0.$$

Iz enačb  $F = F_1 + F_2$  in  $r_2 F_2 = r F$  odpravimo silo vrvi in preostane enačba

$$r F_1 = (r_2 - r) F_2 \quad \text{ali} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r} - 1.$$

Kaj je z navorom sile vode na trup? Okoli izbrane osi vrtljivi trup se zaradi navora upora  $r_1 F_1$  malo zasuče, tako da se sprednji del broda malo globlje potopi in zadnji del malo bolj pogleda iz vode. Pri tem je  $r_1$  razdalja premice upora trupa od osi. Zato se prijemališče vzgona v težišču potopljenega dela vode premakne malo proti sprednjemu delu broda, prijemališče teže pa ostane na sredi. Navor dvojice sil teže in vzgona  $l F'_1$  uravnoteži navor upora. Premici teh sil sta v razdalji  $l$  (slika 3).

Pomagali smo si z dvema približkoma. V vodo sega več lopatic z različno dolgimi deli. Zato sta  $F_2$  in  $r_2$  povprečni vrednosti. Po površini trupa porazdeljeno silo upora nadomestimo s silo  $F_1$ , ki prijemlje v težišču čelnega preseka potopljenega dela trupa, po prostornini potopljenega dela trupa porazdeljeni vzgon  $F'_1$  pa prijemlje v težišču izpodrinjenega dela vode.



Slika 3. Sile in komponente, ki delujejo na brod v navpični smeri na mirujoči vodi (a). Med gibanjem proti toku navor dvojice teže in vzgona  $lF'_1$  uravnovesi navor upora trupa  $r_1F_1$  (b).

Vzemimo, da je hitrost vode tolikšna, da lahko upor trupa  $F_1$  in lopatic  $F_2$  izračunamo s kvadratnim zakonom, po katerem je upor sorazmeren s koeficientom upora  $c_u$ , s čelnim presekom ovire  $S$  in s kvadratom hitrosti vode glede na oviro. Upora sta potem v razmerju

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{c_{u1}S_1v_1^2}{c_{u2}S_2v_2^2} = \frac{c_{u1}S_1(v+v_b)^2}{c_{u2}S_2(v+v_b-v_br_2/r)^2}.$$

Indeks 1 zadeva potopljeni del trupa, indeks 2 pa potopljeni del lopatice. Hitrost broda glede na vodo sestavljata hitrost vode glede na obalo  $v$  in hitrost broda glede na obalo  $-v_b$  v nasprotni smeri:  $v_1 = v - (-v_b) = v + v_b$ . Hitrost srednjega dela lopatic glede na vodo je za  $v_br_2/r$  manjša:  $v_2 = v + v_b - v_br_2/r$ . Hitrost sredine potopljenega dela lopatice glede na brod je namreč enaka  $\omega r_2$  s kotno hitrostjo gredi  $\omega$ . Hitrost broda glede na obalo pa določa hitrost, s katero se vrv navija na gred s polmerom  $r$  in je  $v_b = \omega r$ , tako da je  $\omega = v_b/r$ .

Vpeljimo koeficienta  $a = c_{u1}S_1/c_{u2}S_2$  in  $b = r_2/r - 1$  ter izračunajmo razmerje hitrosti broda glede na obalo in hitrosti vode glede na obalo:

$$\frac{v_b}{v} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b^3} + \sqrt{a}}.$$

Iz enačbe izhaja, da mora veljati  $r_2/r - 1 = b > a$ , če naj se brod giblje proti toku. Čim večji je upor broda, tem daljše morajo biti lopatice.

Z enačbo je mogoče izračunati, pri katerem razmerju  $b$  je pri danem razmerju  $a$  hitrost broda največja. Enačbo odvajamo po  $b$  in odvod postavimo enak 0, pa dobimo zvezo  $2\sqrt{b^3} = \sqrt{a}(3b+1)$ , iz katere sledi  $v_b/v = 1/3b$ . Čim daljše morajo biti lopatice, tem manjša je hitrost broda. Brod z velikim uporom doseže zelo majhne hitrosti. V mejnem primeru ustreza temu primeru kolo z lopaticami, ki se vrtili na mestu, na primer na zasidranem brodu.

Mlinska kolesa ob rekah so poznali že v davnini in taka kolesa na zasidranih ladjah v rekah vsaj od leta 537, ko so Goti med obleganjem prebivalce Rima pregnali na ladje. Pozneje se je ta rešitev precej razširila in so kolesa z lopaticami na zasidranih ladjah na rekah poganjala mline, žage, črpalke. Pri nas poznamo take mline na Muri. Vojaški inženir Konrad Keyser je leta 1405 narisal načrt za brod proti toku. Morda je Denis Papin, najprej Huygensov pomočnik v Parizu in nato Boylov pomočnik v Londonu, ki je prvi zgradil parni stroj na nižji tlak, leta 1707 uporabil tak brod na Fuldi v Nemčiji. Vendar ni nobenega nedvoumnega poročila, da bi kak brod, ki bi se gibal proti toku, izkoristili za prevoz ljudi ali tovara. Razlog za to v času pred uvedbo parnih strojev lahko najbrž iščemo v ceneni delovni sili. Težaki so hodili ob obali in z vrvmi ladje vlekli proti toku. Težava je bila najbrž tudi v tem, da brod zahteva raven tok reke in most ali drugo pripravno točko, na katero pritrdimo krajišče vrvi. Danes ta okolju prijazna rešitev ni uporabna, ker regulirane reke tečejo počasi in bi se brod z velikim uporom proti toku gibal še počasneje.

*Janez Strnad*

## MALA ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 66

Možni potek reševanja:

Pod 4 navpično je največje dvomestno praštevilo, to je 97. Takoj sledi, da je pod 5 vodoravno število 7777. Pod 3 vodoravno so kandidati praštevila 19, 29, 59, 79 in 89. Pod 3 navpično je produkt tega praštevila s številom 97. Od možnosti:  $19 \times 97 = 1843$ ,  $29 \times 97 = 2813$ ,  $59 \times 97 = 5723$ ,  $79 \times 97 = 7663$  in  $89 \times 97 = 8633$  ima na drugem mestu števko 7 le  $59 \times 97 = 5723$ , torej je pod 3 navpično število 5723 in pod 3 vodoravno število 59. Pod

6 vodoravno je  $2^{10} = 1024$  kot edina štirimestna deseta potenca. Pod 6 navpično je število 16, ki edino izpolnjuje pogoj o razliki števk. Pod 9 vodoravno je 32 kot večkratnik števila 16. Pod 1 navpično je 27, edini dvomestni kub, ki se konča na 7. Izračunamo še, da je 1 vodoravno  $42 - 16 = 26$ , dokončamo zapis števila 2 navpično, preverimo pravilnost 8 vodoravno in križanka je rešena.

|              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <sup>1</sup> | <sup>2</sup> | <sup>3</sup> | <sup>4</sup> |
| 2            | 6            | 5            | 9            |
| <sup>5</sup> |              |              |              |
| 7            | 7            | 7            | 7            |
| <sup>6</sup> |              |              | <sup>7</sup> |
| 1            | 0            | 2            | 4            |
| <sup>8</sup> |              | <sup>9</sup> |              |
| 6            | 6            | 3            | 2            |

*Urška Demšar*

## O PERFEKTHNIH (POPOLNIH) KVADRIH

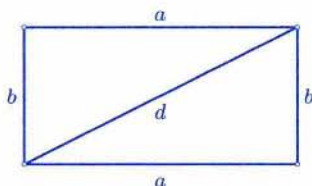
Perfektni (popolni) kvader imenujemo tak kvader, pri katerem se izražajo dolžine robov, telesne diagonale in diagonal vseh stranskih ploskev s celimi (torej naravnimi) števili. Pravzaprav smemo tako imenovati vsak kvader, pri katerem so vse našteje dolžine racionalna števila ali pa so med seboj v racionalnih razmerjih. Če so namreč vse racionalne, se pravi ulomki, pomnožimo robove z najmanjšim skupnim imenovalcem teh ulomkov. Tako dobimo podoben kvader, pri katerem se vse navedene dolžine izražajo z naravnimi števili. Če pa so vsa razmerja med njimi racionalna, lahko izberemo enoto za dolžino tako, da so potem vse te količine cela števila.

Ali v tem smislu perfektni kvadri obstajajo?

Kvader je telo v trirazsežnem prostoru. V ravnini ima pravokotnik vlogo kvadra. Po analogiji bi imenovali pravokotnik "perfekten", če se izražajo dolžine njegovih stranic in diagonale z naravnimi števili, oziroma, kar je v bistvu isto, z racionalnimi števili.

Diagonala razdeli pravokotnik na dva skladna pravokotna trikotnika s katetama  $a$  in  $b$ , hipotenuza pa je diagonala  $d$  (slika 1). Zato velja po Pitagorovem izreku zveza

$$a^2 + b^2 = d^2.$$



Slika 1.

Pri "perfektnem" pravokotniku so  $a$ ,  $b$ ,  $d$  naravna števila, ki zadoščajo tej enačbi. Takih trojk  $a$ ,  $b$ ,  $d$  je nešteto, imenujemo jih pitagorejske trojke, najmanjša med njimi je  $a = 3$ ,  $b = 4$  in  $d = 5$ .

Če razširimo obravnavo na pravokotnike, pri katerih so dolžine  $a$ ,  $b$ ,  $d$  racionalna števila, smemo vzeti, da je ena izmed njih enaka 1, npr.  $b = 1$  (ustrezno daljico smo izbrali za enoto dolžine). Zgornja enačba se zdaj glasi

$$a^2 + 1 = d^2. \quad (1)$$

Iz nje dobimo  $d^2 - a^2 = 1$ . Če levo stran razstavimo v produkt, lahko zapišemo enačbo (1) v obliki

$$(d + a)(d - a) = 1. \quad (1a)$$

Denimo, da pozitivni racionalni števili  $a$  in  $d$  zadoščata (1), torej tudi (1a). Očitno je  $d > 1$ . Postavimo  $d + a = t$ , kjer je  $t$  prav tako racionalen

in večji od 1, saj je  $t = d + a > d > 1$ . Iz (1a) dobimo zdaj  $d - a = 1/t$ , od tod pa izračunamo

$$a = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad d = \frac{t^2 + 1}{2t}, \quad t > 1. \quad (2)$$

Za vsako racionalno rešitev enačbe (1) obstaja potemtakem tako racionalno število  $t > 1$ , da se  $a$  in  $d$  izražata z obrazcema (2). Narobe je prav tako res: Izberimo si poljubno racionalno število  $t \neq 0$  in ga vstavimo v leva izraza (2). Dobljena  $a$  in  $d$  sta racionalni števili, ki zadoščata enačbi (1), kar pokaže preprost račun. Če sta  $a$  in  $d$  pozitivna – taka sta, kadar je  $t > 1$  – določata  $a$  in  $b = 1$  pravokotnik z racionalnimi stranicami in racionalno diagonalno  $d$ .

*Pripomba.* Kadar je  $t < 1$ , je bodisi  $a$  bodisi  $d$  negativno število. V tem primeru je dolžina ustrezne stranice enaka  $|a|$  (oziroma diagonale  $|d|$ ).

Racionalno število  $t > 1$  lahko zapišemo v obliki ulomka  $t = p/q$ , kjer sta števec  $p$  in imenoalec  $q$  naravni tuji si števili in  $p > q$ . Če to vstavimo v (2), se  $a$  in  $d$  izražata v obliki teh-le ulomkov

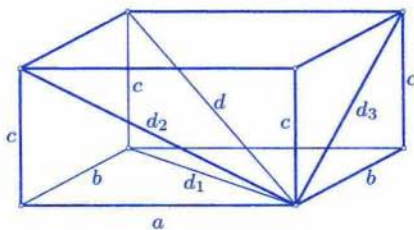
$$a = \frac{p^2 - q^2}{2pq}, \quad d = \frac{p^2 + q^2}{2pq}.$$

Pomnožimo stranici  $a$  in  $b = 1$  s skupnim imenovalcem  $2pq$ , pa dobimo podoben pravokotnik, ki ima stranici in diagonalno

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq, \quad d = p^2 + q^2. \quad (3)$$

Za vsak par naravnih števil  $p$  in  $q$ ,  $p > q$ , so tako dobljeni  $a, b, d$  pitagorejska trojka.

Vzemimo zdaj kvader z robovi  $a, b$  in  $c$  (slika 2). Zaznamujmo z  $d$  telesno diagonalno (telesne diagonale so štiri, so pa med seboj enake), z  $d_1, d_2$  in  $d_3$  pa diagonale stranskih ploskev. Pri tem je  $d_1$  diagonalna osnovnega pravokotnika s stranicama  $a$  in  $b$ ,  $d_2$  diagonalna stranskega pravokotnika s stranicama  $a$  in  $c$ ,  $d_3$  pa diagonalna stranskega pravokotnika s stranicama  $b$  in  $c$ . Po Pitagorovem izreku dobimo zveze



Slika 2.

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + c^2 = d_2^2, \quad b^2 + c^2 = d_3^2. \quad (4)$$

Telesna diagonala  $d$  je hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama  $d_1$  in  $c$  (slika 2). Zato je  $d_1^2 + c^2 = d^2$ , oziroma, če upoštevamo prvo enačbo (4),

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \quad (5)$$

Pri poljubno izbranih pozitivnih številih  $a, b, c$  izračunamo iz (4) in (5) stranske diagonale  $d_1, d_2, d_3$  in telesno diagonalo  $d$ . Če so  $a, b, c$  cela (oziroma racionalna) števila, pa dobljeni  $d_1, d_2, d_3$  in  $d$  niso vselej cela (niti racionalna) števila.

Kakor smo povedali na začetku, je za obstoj perfektnega kvadra dovolj, če najdemo pozitivna racionalna števila  $a, b, c, d_1, d_2, d_3$  in  $d$ , ki zadoščajo enačbam (4) in (5). Odslej bomo torej iskali racionalne rešitve. Zdaj smemo vzeti, da je  $c = 1$  (tretji rob kvadra smo izbrali za enoto dolžine). Enačbe (4) in (5) dobijo potem tole obliko

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \quad a^2 + 1 = d_2^2, \quad b^2 + 1 = d_3^2 \quad (4a)$$

in

$$a^2 + b^2 + 1 = d^2. \quad (5a)$$

Denimo, da imamo kakšno racionalno rešitev. Druga in tretja enačba (4a) imata obliko enačbe (1). Če se spomnimo, kako dobimo racionalne rešitve enačbe (1), vidimo, da obstajata taki racionalni števili večji od 1, imenujmo ju zdaj  $x$  in  $y$ , da je

$$a = \frac{x^2 - 1}{2x}, \quad d_2 = \frac{x^2 + 1}{2x} \quad (6a)$$

in

$$b = \frac{y^2 - 1}{2y}, \quad d_3 = \frac{y^2 + 1}{2y}. \quad (6b)$$

Ker lahko zapišemo enačbo (5a) v obliki

$$d_1^2 + 1 = d^2$$

in sta  $d_1$  in  $d$  racionalna, obstaja racionalno število  $z > 1$ , da je

$$d_1 = \frac{z^2 - 1}{2z}, \quad d = \frac{z^2 + 1}{2z}. \quad (6c)$$

Če vstavimo dobljene izraze za  $a$ ,  $b$  in  $d_1$  v prvo enačbo (4a), ki smo jo pomnožili s 4, dobimo tole zvezo

$$\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y^2-1}{y}\right)^2 = \left(\frac{z^2-1}{z}\right)^2. \quad (7)$$

Povzemimo, kaj smo doslej ugotovili: Če obstaja perfektni kvader, lahko najdemo racionalna števila  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , vsa večja od 1, ki zadoščajo enačbi (7). Vzemimo zdaj, obratno, da od nič različna racionalna števila  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ustrezajo tej enačbi. Potem so

$$a = \frac{x^2-1}{2x}, \quad b = \frac{y^2-1}{2y}, \quad c = 1$$

racionalni robovi kvadra, pri katerem se izražajo stranske diagonale  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  in telesna diagonalna  $d$  z obrazci (6a), (6b) in (6c). Vsa ta števila so racionalna. Štiri enačbe (4a) in (5a) smo tako nadomestili z eno samo enačbo (7).

Takoj vidimo, da je enačba (7) izpolnjena, če postavimo  $x^2 = 1$ ,  $z = y$ , ali pa  $y^2 = 1$  in  $z = x$ . V prvem primeru je  $a = 0$ , v drugem  $b = 0$ . Kvader se je izrodil v pravokotnik. Če pa je  $z^2 = 1$ , pove enačba (7), da mora biti  $x^2 = 1$  in  $y^2 = 1$ . (Leva stran je namreč vsota dveh kvadratov in je enaka nič samo tedaj, kadar sta oba sumanda enaka nič.) Zdaj je  $a = b = 0$ , tako da se je kvader izrodil v daljico. Pravi perfektni kvader nam da le taka trojka  $x$ ,  $y$ ,  $z$  racionalnih števil, ki so vsa večja od 1 in zadoščajo enačbi (7). Ali obstaja taka trojka? Odgovora na to vprašanje ne vem. Doslej niso še našli perfektnega kvadra niti niso dokazali, da ga ni. Z računalniki so ugotovili samo to, da je dolžina najmanjšega roba perfektnega kvadra (z robovi, ki so cela števila) večja od  $10^9$ , seveda, če tak kvader sploh obstaja.

*Pripomba.* Ni posebno težko ugotoviti, da ima enačba (7) rešitev, pri kateri so racionalni  $x$ ,  $y$ ,  $z$  vsi večji od 1, brž ko premore kakšno rešitev, pri kateri je  $x^2 \neq 1$  in  $y^2 \neq 1$ . Ker nastopajo  $x$ ,  $y$  in  $z$  v (7) samo v kvadratih, je namreč ta enačba izpolnjena tudi tedaj, kadar kakšno neznanko zamenjamo z njeno nasprotno vrednostjo, npr.  $x$  z  $-x$ . Prav tako pa smemo vsako neznanko zamenjati z njeno recipročno vrednostjo, torej  $x$  z  $1/x$ . S takimi zamenjavami pridemo iz vsake rešitve, pri kateri je  $x^2 \neq 1$  in  $y^2 \neq 1$ , do rešitve, kjer so vse neznanke večje od 1.

Zastavimo si zdaj vprašanje, ali obstajajo kvadri z racionalnimi robovi in racionalnimi stranskimi diagonalami. Torej ne zahtevamo več, da naj bi bila tudi telesna diagonalna  $d$  racionalna.

Če si izberemo poljubni racionalni števili  $x$  in  $y$ , ki sta obe večji od 1, nam dajo obrazci (6a) in (6b) kvader z racionalnimi robovi  $a$ ,  $b$ ,  $c = 1$  in racionalnima diagonalama  $d_2$  in  $d_3$ . Vstavimo izraza za  $a$  in  $b$  v prvo enačbo (4a) in dajmo levo stran na skupni imenovalc. Potem je pred nami enačba

$$\frac{y^2(x^2 - 1)^2 + x^2(y^2 - 1)^2}{4x^2y^2} = d_1^2. \quad (8)$$

Diagonala  $d_1$  je racionalna, če je ulomek na levi kvadrat racionalnega števila. Za to pa zadošča, da je števec kvadrat racionalnega števila, saj je imenovalc kvadrat racionalnega števila  $2xy$ . Števec lahko zapišemo v obliki

$$x^2y^2(x^2 + y^2 - 4) + x^2 + y^2.$$

Izberimo zdaj racionalni števili  $x$  in  $y$  tako, da bo med njima zveza

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (9)$$

Potem je števec enak 4, iz (8) pa dobimo  $d_1 = 1/xy$  in je tudi diagonala  $d_1$  racionalna. Pripadajoči kvader ima robove

$$a = \frac{x^2 - 1}{2x}, \quad b = \frac{y^2 - 1}{2y}, \quad c = 1, \quad (10a)$$

stranske diagonale pa so

$$d_1 = \frac{1}{xy}, \quad d_2 = \frac{x^2 + 1}{2x}, \quad d_3 = \frac{y^2 + 1}{2y}. \quad (10b)$$

Vsa ta števila so racionalna. Kvader ima potemtakem racionalne robove in racionalne stranske diagonale. Seveda morata racionalni števili  $x$  in  $y$  zadoščati enačbi (9). Kako taka števila dobimo?

Denimo, da je  $y \neq 0$ . Delimo enačbo (9) z  $y^2$  in postavimo

$$\frac{x}{y} = u, \quad \frac{2}{y} = v. \quad (11)$$

Če sta  $x$  in  $y$  racionalna, sta taka tudi  $u$  in  $v$ . Med njima pa je tale zveza

$$u^2 + 1 = v^2. \quad (9a)$$

Kakor vemo, se vsaka racionalna rešitev te enačbe izraža v obliki

$$u = \frac{t^2 - 1}{2t}, \quad v = \frac{t^2 + 1}{2t} \quad (12)$$

pri primerno izbranem racionalnem številu  $t \neq 0$ . Za vsak racionalen  $t \neq 0$  pa sta tako dobljena  $u$  in  $v$  racionalna in zadoščata enačbi (9a). Iz enačb (11) in (12) zdaj lahko izračunamo

$$x = 2 \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{4t}{t^2 + 1}. \quad (13)$$

Ker si lahko racionalni  $t$  poljubno izberemo, določata obrazca (13) nešteto parov racionalnih števil  $x, y$ , ki zadoščajo enačbi (9). Formule (10a) in (10b) pa določajo nešteto kvadrov, pri katerih so dolžine robov in stranskih diagonal racionalne. Npr. za  $t = 2$  imamo  $x = 6/5$ ,  $y = 8/5$ . Robovi in stranske diagonale pripadajočega kvadra so

$$a = \frac{11}{60}, \quad b = \frac{39}{80}, \quad c = 1, \quad d_1 = \frac{25}{48}, \quad d_2 = \frac{61}{60}, \quad d_3 = \frac{89}{80}.$$

Pomnožimo robove z 240, ki je najmanjši skupni imenovalac vseh navedenih ulomkov, pa dobimo tale podobni kvader, ki ima za robove in stranske diagonale cela števila

$$a = 44, \quad b = 117, \quad c = 240, \quad d_1 = 125, \quad d_2 = 244, \quad d_3 = 267.$$

Telesna diagonal  $d = \sqrt{73\,225} = 5\sqrt{2929}$  pa je iracionalna.

Racionalno število  $t$  lahko zapišemo v obliki ulomka  $t = p/q$ , kjer sta  $p$  in  $q$  naravni tuji si števili. Če to vstavimo v izraza (13), dobimo

$$x = \frac{2(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}, \quad y = \frac{4pq}{p^2 + q^2}.$$

Preprost, čeprav nekoliko dolgovezen in zato dolgočasen račun, ki ga bralec lahko preskoči, pokaže, da se robova  $a$  in  $b$  izražata takole

$$a = \frac{3p^4 - 10p^2q^2 + 3q^4}{4(p^2 - q^2)(p^2 + q^2)}, \quad b = \frac{14p^2q^2 - p^4 - q^4}{8pq(p^2 + q^2)}.$$

Skupni imenovalac obeh ulomkov na desni je  $8pq(p^2 - q^2)(p^2 + q^2) = 8pq(p^4 - q^4)$ . Če z njim pomnožimo  $a$ ,  $b$  in  $c = 1$ , dobimo kvader z robovi

$$\begin{aligned} a &= 2pq(3p^4 - 10p^2q^2 + 3q^4), & b &= (p^2 - q^2)(14p^2q^2 - p^4 - q^4), \\ c &= 8pq(p^4 - q^4). \end{aligned} \quad (14)$$

Vsa števila na desni so cela, če sta tako  $p$  in  $q$ . Stranske diagonale se izražajo pri tem kvadru s celimi števili, in sicer so

$$\begin{aligned} d_1 &= (p^2 + q^2)^3, & d_2 &= 2pq(5p^4 - 6p^2q^2 + 5q^4), \\ d_3 &= (p^2 - q^2)(p^4 + 18p^2q^2 + q^4). \end{aligned}$$

Te formule je poznal že Leonard Euler. Povedati pa je treba, da nam ne dajo vseh (nepodobnih) kvadrov, pri kateri so dolžine robov in stranskih diagonal cela števila.

Nešteto je kvadrov, ki imajo za robove in telesno diagonalo cela števila. Dobimo jih z rešitvami enačbe (5), to je, enačbe

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

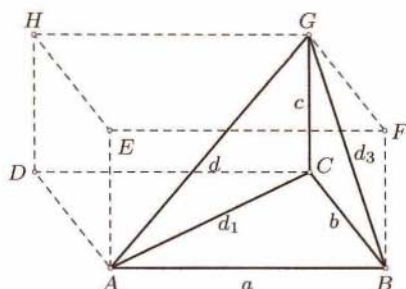
v naravnih številih  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in  $d$ . Najpreprostejša med njimi se glasi  $a = b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 3$ . Kako dobimo vse njene rešitve v celih številih, pa lahko bralec zve iz knjige J. Grassellija, *Diofantske enačbe* (Ljubljana, 1984), na str. 64–68.

Ali obstajajo tudi kvadri, pri katerih se izražajo dolžine robov, telesne diagonale in dveh stranskih diagonal z naravnimi števili? Obstajajo. Najmanjši tak kvader ima robove

$$a = 104, \quad b = 153, \quad c = 672. \quad (15)$$

Tu je telesna diagonalna  $d = 697$ , stranski diagonalni  $d_1 = 185$  in  $d_3 = 680$  se izražata s celima številoma, diagonalna  $d_2 = 6\sqrt{10101}$  pa je iracionalna. Navedeni primer seveda ni edini tak kvader. Obstajajo parametrični obrazci, podobni obrazcem (14), ki dajo nešteto kvadrov s to lastnostjo, vendar so bolj zapleteni, kakor so (14), in tudi izpeljava je dolgoveznejša. Zato jih tu ne bomo navajali.

Vzemimo poljuben kvader, pri katerem se izražajo dolžine robov  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , telesne diagonale  $d$  in dveh stranskih diagonal  $d_1$  in  $d_3$  z naravnimi števili. Naj bodo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  oglišča spodnje osnovne ploskve,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  pa oglišča zgornje (slika 3). Točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $G$  določajo tristrano piramido (tetraeder), ki ima za osnovno ploskev trikotnik  $ABC$  s stranicami  $a$ ,  $b$ ,  $d_1$ , njeni stranski robovi pa so  $c$ ,  $d$  in  $d_3$ . Vsi se izražajo s celimi



Slika 3.

števili. Mejne ploskve so štirje pravokotni trikotniki: Osnovna ploskev  $ABC$  in stranska ploskev  $BCG$  sta polovici pravokotnikov  $ABCD$  in  $BCGF$ ; v stranskem trikotniku  $ACG$  leži stranica  $AC$  (to je diagonala  $d_1$ ) v osnovni ploskvi kvadra in je zato pravokotna na stranico  $CG$ , ki je tretji rob kvadra; v trikotniku  $ABG$  pa je stranica  $AB$  rob kvadra in je zato pravokotna na stranico  $BG$  (to je diagonala  $d_3$ ), ki leži v stranski ploskvi  $CBFG$  kvadra. Če so stranice pravokotnega trikotnika cela števila, je tudi njegova ploščina, ki je enaka polovici produkta katet, celo število (v pitagorejski trojki je vselej ena kateta sodo število, glej enačbe (3)).

Vzemimo za zgled kvader z robovi (15). Za ploščine  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  in  $p_4$  stranskih ploskev tetraedra  $ABCG$  dobimo tale števila

$$p_1 = \frac{1}{2}ab = 7\,956, \quad p_2 = \frac{1}{2}bc = 51\,408, \quad p_3 = \frac{1}{2}cd_1 = 62\,160, \\ p_4 = \frac{1}{2}ad_3 = 35\,360.$$

Prostornina  $V$  tetraedra  $ABCG$  pa je šestina prostornine kvadra, saj je ploščina  $p_1$  osnovne ploskve  $ABC$  polovica ploščine osnovne ploskve  $ABCD$  kvadra, višina pa je pri obeh telesih enaka  $c$ , torej  $V = \frac{1}{6}abc$ . V našem primeru je prostornina  $V = 1\,782\,144$ , se pravi celo število.

Tako smo ugotovili tole: Vsak kvader, pri katerem se izražajo robovi, telesna diagonala in dve stranski diagonali z naravnimi števili, določa tristrano piramido (tetraeder), pri kateri se izražajo robovi, ploščine stranskih ploskev (to so trikotniki) in (izkaže se) tudi prostornina z naravnimi števili.

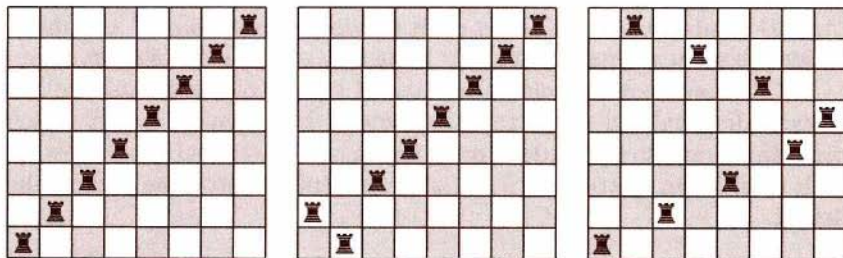
Ivan Vidav

## TRDNJAVE NA ŠAHOVNICI – Rešitev s str. 81

Za vprašanje, koliko je bistveno različnih postavitev osmih paroma nenapadajočih se trdnjav na običajno šahovnico, sem prvič slišal že pred časom. Gre za klasično vprašanje iz razvedrilne matematike, ki je sicer manj znano kot enako vprašanje za postavitev kraljic, vendar pa je nanj tudi težje odgovoriti. Pravijo, da se je z njim spoprijel tudi H. E. Dudeney (1857–1930), eden od mojstrov raznovrstnih ugank in razvedrilnih matematičnih nalog s konca 19. in začetka 20. stoletja, vendar ga ni uspel razrešiti.

Opis rešitve sem prvič videl v zanimivi knjigi [1]. Knjiga je prvič izšla že leta 1966. V njej avtor trdi, da je bistveno različne postavitve trdnjav prvi leta 1962 preštel neki D. F. Smith iz San Francisca. Skrajšani opis rešitve, podan v knjigi, ima 5 strani, in ker se po krajšem razmisleku tudi sam nisem domislil ničesar bistveno krajšega, programiranje pa mi je v veselje, sem se odločil, da nalogo rešim z računalnikom.

Vseh postavitev nenapadajočih se trdnjav je  $8! = 40320$ . Pri zmožljivosti današnjih računalnikov je to majhno število, tako da me čas izvajanja programa in poraba pomnilnika nista preveč skrbela. Šahovska deska ima 8 simetrij: iz začetne lege jo lahko zasukamo za  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  in  $270^\circ$ , prezrcalimo npr. prek vodoravne simetrale ter prezrcaljeno zopet zasukamo za  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  in  $270^\circ$ . Iz ene postavitve trdnjav tako dobimo do 8 različnih postavitev. Ker pa postavitev nenapadajočih se trdnjav nikoli ni enaka svoji zrcalni sliki, vedno dobimo vsaj 2 različni postavitvi. Razmislek tudi pove, da mora število različnih postavitev, ki jih dobimo z uporabo simetrij, deliti število vseh simetrij (učeno bi rekli, da mora moč podgrupe deliti moč grupe). Če povzamem: z uporabo simetrij iz vsake postavitve nenapadajočih se trdnjav dobimo 2, 4 ali 8 različnih (a ne bistveno različnih) postavitev. Primeri postavitev, iz katerih s simetrijami dobimo po 2, 4 oziroma 8 različnih postavitev, so prikazani na spodnji sliki.



Program sem nekoliko matematično obarval in ga zasnoval takole. Postavitve trdnjav sem označil s števili od 0 do 40319. Pri pretvarjanju med postavitvami trdnjav in števili sem uporabil "faktorielni" zapis števil. O njem smo v Preseku pred časom že pisali (glej prispevek [2]). Vsako naravno število  $x$  od 0 do  $n! - 1$  lahko enolično zapišemo kot

$$x = c_{n-1} \cdot (n-1)! + c_{n-2} \cdot (n-2)! + \dots + c_2 \cdot 2! + c_1 \cdot 1!,$$

kjer za številke  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , velja  $c_i \in \{0, 1, \dots, i-1, i\}$ . Postavitve trdnjav pretvorimo v število tako, da za vsako trdnjavo v prvih sedmih stolpcih preštejemo, koliko vrstic pod njo še ni zasedenih s trdnjavami iz prejšnjih stolpcev. Tako po vrsti dobimo številke  $c_7, c_6, c_5, c_4, c_3, c_2$  in  $c_1$ . Levi postavitvi na zgornji sliki tako pripada število 0, srednji postavitvi število  $1 \cdot 7! = 5040$ , desni postavitvi pa število

$$0 \cdot 7! + 6 \cdot 6! + 0 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1! = 6 \cdot 720 + 4 \cdot 24 + 2 \cdot 2 = 4420.$$

Podobno poteka tudi pretvarjanje števila v postavitev trdnjav.

S programom sem tako pregledal vsa števila od 0 do 40319. Vsako število sem pretvoril v postavitev trdnjav, na postavitvi opravi zasuke in zrcaljenje, sproti preštel, koliko različnih števil predstavljajo dobljene postavitve, in si v pomožnih števcih zapomnil ugotovitve (pri tem sem seveda pazil, da istih postavitev nisem štel večkrat). Ko sem program zagnal (v resnici je bilo predtem še nekaj "neuspešnih" poskusov), je v hipu izračunal, da za šahovnico velikosti  $8 \times 8$  obstaja natanko 5282 bistveno različnih postavitev osmih paroma nenapadajočih se trdnjav. Dobljeni rezultat se ujema z vrednostjo, ki je navedena v knjigi [1].

Program sem preizkusil tudi na manjših šahovnicah in tako naračunal spodnjo tabelo. V zadnjih treh stolpcih so zbrana števila tistih postavitev, iz katerih lahko z zasuki in zrcaljenji dobimo  $k = 2, 4$  ali 8 postavitev trdnjav.

| velikost<br>šahovnice | vse<br>postavitev | bistveno različne<br>postavitev | postavitev, ki določajo $k$ drugih |         |         |
|-----------------------|-------------------|---------------------------------|------------------------------------|---------|---------|
|                       |                   |                                 | $k = 2$                            | $k = 4$ | $k = 8$ |
| 2                     | 2                 | 1                               | 2                                  | 0       | 0       |
| 3                     | 6                 | 2                               | 2                                  | 4       | 0       |
| 4                     | 24                | 7                               | 8                                  | 8       | 8       |
| 5                     | 120               | 23                              | 8                                  | 40      | 72      |
| 6                     | 720               | 115                             | 20                                 | 140     | 560     |
| 7                     | 5040              | 694                             | 20                                 | 452     | 4568    |
| 8                     | 40320             | 5282                            | 88                                 | 1672    | 38560   |

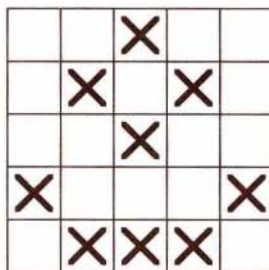
Iz tabele razberemo, da je velika večina postavitev trdnjav povsem brez simetrij, saj iz njih z zasuki in zrcaljenji dobimo po 8 različnih postavitev (na običajni šahovnici je takih postavitev kar 38560 od skupno 40320, torej več kot 95% vseh postavitev). Povprečno število različnih postavitev, ki jih na običajni šahovnici dobimo iz posamezne postavitve, pa je enako  $\frac{2 \cdot 88 + 4 \cdot 1672 + 8 \cdot 38560}{40320} = \frac{315344}{40320} \approx 7.821$ .

Martin Juvan

- [1] J. S. Madachy, *Madachy's mathematical recreations*, Dover, 1979  
 [2] M. Juvan, *Iščemo besedo*, Presek 26 (1998/1999), št. 6, str. 365–367

## GRAFIČNA PODPORA – Rešitev s str. 91

V programerski hiši CrissCross™ so nam zaupali pripravo grafičnega dela njihove priljubljene računalniške igrice. V logu moramo napisati ukaz, ki bo narisal kvadratno mrežo velikosti  $5 \times 5$ , na kateri bodo s križci označena izbrana polja (glej spodnjo sliko).



Risanje slike je torej sestavljeno iz dveh delov: najprej narišemo kvadratno mrežo, nato pa na njej označimo izbrana polja. Odločimo se, da bo mreža sestavljena iz kvadratkov velikosti  $30 \times 30$  enot. Mrežo narišemo tako, da potegnemo 6 vodoravnih in 6 navpičnih črt, pri čemer so črte razmaknjene za 30 enot. Ko je mreža narisana, se v zanki "sprehodimo" skozi vhodni seznam, vzamemo par, ki je na začetku seznama, narišemo križec na mestu, ki ga določa par, ter pa zberemo iz seznama.

```

TO prikazi :seznam
  (LOCAL "dolzina "par)
  REPEAT 6 [                                ; Narišemo vodoravne črte.
    RT 90 FD 5*30 PU BK 5*30 LT 90 FD 30 PD
  ]
  PU BK 6*30 PD
  REPEAT 6 [                                ; Narišemo navpične črte.
    FD 5*30 PU BK 5*30 RT 90 FD 30 LT 90 PD
  ]
  PU RT 90 BK 6*30 LT 90 PD
  MAKE "dolzina COUNT :seznam
  REPEAT :dolzina [                        ; S križci označimo izbrane kvadratke.
    MAKE "par FIRST :seznam ; Vzamemo par, ki določa položaj križca.
    krizec (FIRST :par) (LAST :par)      ; Narišemo križec.
    MAKE "seznam BF :seznam              ; Skrajšamo seznam.
  ]
END

```

Pri risanju križcev smo si pomagali z naslednjim pomožnim ukazom.

```

TO krizec :x :y
  LOCALMAKE "pero PENSIZE
  ; Premaknemo se na sredino kvadratka, kjer bomo narisali križec.
  PU RT 90 FD 15+30*:x LT 90 FD 15+30*:y PD
  SETPENSIZE [3 3]                        ; Spremenimo debelino peresa.
  RT 45
  REPEAT 4 [                              ; Narišemo križec.
    FD 15 PU BK 15 RT 90 PD
  ]
  LT 45
  SETPENSIZE :pero                        ; Debelino peresa vrnemo na staro vrednost.
  ; Vrnemo se na mesto, kjer smo bili pred risanjem križca.
  PU BK 15+30*:y RT 90 BK 15+30*:x LT 90 PD
END

```

Seveda lahko našo igro igrata dva igralca, eden riše križce, drugi pa krogece. Lepo bi bilo, če bi naš ukaz sprejel še drugi (morda neobvezni) parameter, ki bi določal, v katere kvadratke mreže je treba narisati krogece. Tudi velikost mreže (in velikost posameznih kvadratkov) bi bila lahko spremenljiva. Možnosti za nadaljnje delo je torej še veliko.

*Martin Juvan*

## DROBEN SPOMIN NA GIORDANA BRUNA

*Ob 400-letnici smrti velikega italijanskega filozofa-astronoma, borca proti sholastični miselnosti in cerkvenim pogledom o vesolju, gorečega propagatorja materialističnega svetovnega nazora in neomajnega zagovornika Kopernikovega nauka.*

Giordano Bruno se rodi v mestecu Nola blizu Neaplja. Že s petnajstimi leti stopi v vrste dominikanskega meniškega reda. Leta 1572 postane duhovnik, kmalu nato pa še doktor filozofije. V samostanu se vneto izobražuje. V roke mu pridejo številni spisi preteklosti in pod njihovim vplivom privzame ateistični svetovni nazor. Upre se mu študij sholastike.

Leta 1575 ga obsodijo krivoverških misli. Bruno izstopi iz dominikanskega reda in se preseli v Rim. Tam pa spozna, da pripravljajo proti njemu sodni proces. Zato zbeži, najprej v severno Italijo, nato v Švico, potem v Francijo, kjer predava astronomijo na univerzah v Toulousu in Parizu.

Leta 1583 se zateče v Anglijo. Tu kritizira sholastično šolo in teologe. Javno nastopa tudi proti Ptolemejevemu geocentričnem sistemu (Zemlja v središču vesolja in vse se giblje okrog nje).

V Londonu izda (v italijanskem jeziku napisano) vrsto spisov iz filozofije in tudi svoje najpomembnejše delo, knjigo *O neskončnosti, vesolju in svetovih* (1584). Kmalu se preseli v Nemčijo, kjer propagira nov svetovni pogled, svoje ideje glede zgradbe vesolja, predvsem pa krčevito zagovarja Kopernikov heliocentrični sistem (Sonce v središču, okrog njega pa se gibljejo planeti, med njimi tudi Zemlja).

Na povabilo nekega plemiča pride 1592 v Benetke. Tu ga zahrbtno prime inkvizicija. Obtožijo ga razširjanja krive vere, ki se daleč ne sklada z uradnim naukom rimokatoliške cerkve glede zgradbe vesolja in še drugih stvari. Zaprejo ga.

Skoraj osem let Bruno preživi v temačnih beneških in rimskih ječah. Možato prenaša mučenje in trpljenje. Ves čas korenito zagovarja svoje



Slika 1. Giordano Bruno (1548 do 1600) – učenjak nezlomljivega značaja, strasten glasnik novih idej in zagovornik Kopernikovega heliocentričnega sistema.

prepričanje. Ne kloni. Ker ne odstopi od svojih nazorov, ga obsodijo na smrtno kazen. Javno ga sežgejo na grmadi 17. 2. 1600 na nekem trgu v Rimu.

Bruno je v svojih delih zagovarjal in nadalje razvijal Kopernikov nauk. Menil je, da je vesolje neskončno in da Sonce ni središče vesolja (saj je za tako središče v neskončnem vesolju mogoče vzeti poljubno zvezdo) in da ne miruje. Prav tako je zagovarjal misel, da je v vesolju nešteto zvezd, podobnih našemu Soncu, in da v vsem vesolju vladajo enaki zakoni. Najpomembnejša filozofska misel Brunovega nauka pa je bila trditev glede mnoštva naseljenih svetov (teles), podobnih naši Zemlji, kar je v temeljih rušilo bistvo cerkvenega pogleda na svet oziroma vesolje. Ves poznejši razvoj astronomije je potrdil Brunova znanstvena predvidevanja.

Brunovo življenje je bilo en sam velik in neustrašen boj za priznanje znanstvene resnice. Svojim idejam in nazorom se ni nikoli odrekel kljub preteči smrtni kazni. V zgodovini znanosti še dandanes na široko odmevajo zadnje besede, ki jih je izrekel ta velikan misli tik pred smrtjo: "Sežgati, ne pomeni, odreči se."

*Marijan Prosen*

## TRGOVSKA – Rešitev s str. 66

Če z  $a$  označimo vrednost trgovčevega premoženja na začetku prvega leta in sledimo pogojem naloge, dobimo za neznani  $a$  enačbo

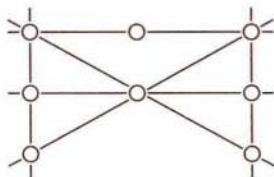
$$\frac{4}{3} \left( \frac{4}{3} \left( \frac{4}{3} (a - 100) - 100 \right) - 100 \right) = 2a,$$

ki ima rešitev  $a = 1480$ . Toliko funtov je imel trgovec na začetku.

*Marija Vencelj*

## DVE ZA PODMLADEK – Rešitev s str. 73

1.



2. Na sliki je 44 trikotnikov.

*Dragoljub M. Milošević*

## 41. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

V Taejonu (Južna Koreja) je bila v sredini julija 41. matematična olimpiada, na kateri je sodelovalo 461 tekmovalcev iz 82 držav. V slovenski ekipi so bili tekmovalci Aleksandra Franc s I. gimnazije v Celju, Irena Majcen, Sašo Jelenčič in Klemen Šivic z Gimnazije Bežigrad, Mojca Miklavec s Škofijske klasične gimnazije Ljubljana, Matjaž Urlep s Šolskega centra Celje – Splošne in strokovne gimnazije Lava, član mednarodne tekmovalne komisije Gregor Dolinar s Fakultete za elektrotehniko ter vodja ekipe Matjaž Željko s Fakultete za matematiko in fiziko.

Ekipa je prispela v Korejo nekaj dni pred tekmovanjem. Ta čas smo preživeli v Seulu. Med mestnimi znamenitostmi so napravile na nas najgloblji vtis poulične tržnice, na katerih lahko dobiš vse. Najbolj pestro pa je bilo seveda 19. in 20. julija, ko so se tekmovalci spoprijeli z nalogami, med katerimi sta bili tudi naslednji dve:

1. Krožnici  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_2$  se sekata v točkah  $M$  in  $N$ . Naj bo  $\ell$  taka skupna tangenta krožnic  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_2$ , da je točka  $M$  bližje tangenti  $\ell$  kot točka  $N$ . Tangenta  $\ell$  se dotika krožnice  $\Gamma_1$  v točki  $A$ , krožnice  $\Gamma_2$  pa v točki  $B$ . Premica, ki gre skozi točko  $M$  in je vzporedna s tangento  $\ell$ , seka krožnico  $\Gamma_1$  še v točki  $C$ , krožnico  $\Gamma_2$  pa še v točki  $D$ . Premici  $CA$  in  $DB$  se sekata v točki  $E$ , premici  $AN$  in  $CD$  se sekata v točki  $P$ , premici  $BN$  in  $CD$  pa se sekata v točki  $Q$ .  
Dokaži, da je  $|EP| = |EQ|$ .
2. Čarovnik ima sto kart, ki so po vrsti oštevilčene od 1 do 100. Vse karte razporedi v rdečo, belo in modro škatlo tako, da je v vsaki škatli vsaj ena karta.  
Član občinstva izbere dve škatli, izbere po eno karto iz vsake od njiju in pove vsoto števil na izbranih dveh kartah. Ko čarovnik izve to vsoto, pove, iz katere škatle ni bila izbrana nobena karta.  
Na koliko načinov lahko čarovnik razporedi karte v te tri škatle tako, da bo trik vedno uspel?

Po napornih tekmovalnih dnevih so si tekmovalci ogledali še nekaj lokalnih znamenitosti in se z avtobusi podali na dvodnevni izlet po Koreji.

Ekipa Slovenije je tudi tokrat na olimpiadi uspešno sodelovala, saj je Irena Majcen osvojila srebrno medaljo, Mojca Miklavec pa bronasto. Uspeh ekipe sta s pohvalama dopolnila še Aleksandra Franc in Klemen Šivic. Poudariti velja, da je Irena Majcen prva dijakinja iz Slovenije, ki je na mednarodni matematični olimpiadi prejela srebrno medaljo. To je bila tudi prva srebrna medalja, odkar (od leta 1993) Slovenija kot samostojna država nastopa na mednarodnih matematičnih olimpiadah.

Zahvala za uspehe naših olimpijcev in tekmovalcev na tekmovanjih gre predvsem učiteljem-mentorjem, ki mladim nadebudnežem pomagajo pri spoznavanju matematike, nastop na olimpiadi pa so v veliki meri omogočili Ministrstvo za šolstvo in šport, Ministrstvo za znanost in tehnologijo in sponzorji HERMES SoftLab, Abanka in SKB Banka iz Ljubljane, Krekova banka iz Celja ter Mura in Modna kravata Gjergjek iz Murske Sobote.

Matjaž Željko

## 31. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Olimpiada je potekala med 8. in 16. julijem 2000 v Leicesteru v Veliki Britaniji. Sodelovalo je 296 tekmovalcev iz 63 držav. V slovenski ekipi so bili Andrej Košmrlj, Gregor Tavčar, Igor Veselič, vsi z Gimnazije Bežigrad Ljubljana, Matej Kanduč s Srednje vzgojiteljske šole in gimnazije Ljubljana ter Iztok Pižorn s I. gimnazije v Celju. Spremljevalca slovenske ekipe in člana mednarodne komisije sva bila Jure Bajc, Uprava RS za geofiziko, in Ciril Dominko, DMFA Slovenije. Udeležbo na olimpiadi je finančno pokrilo Ministrstvo za šolstvo in šport.

Tako kot doslej so se tekmovalci spopadli s tremi teoretičnimi nalogami in dvema eksperimentalnima. V primerjavi z nalogami s prejšnjih olimpiad so bile naloge dokaj obsežne in zahtevne, zato so bili povprečni rezultati olimpiade (rezultati vseh tekmovalcev) relativno slabi.

Trije udeleženci iz slovenske ekipe so na olimpiadi prejeli pohvalo: Andrej Košmrlj (26,7 točk), Matej Kanduč (24,0) in Iztok Pižorn (22,8). Sicer pa je bilo treba letos doseči za zlato medaljo najmanj 37 točk od 50 možnih, za srebrno 32, za bronasto 27 in za pohvalo 20 točk.

Ker meje za medalje in pohvalo na fizikalni olimpiadi niso vnaprej določene, ampak so odvisne od vsakoletne uspešnosti tekmovalcev oziroma težavnosti nalog, neposredna primerjava priznanj v posameznih letih ni merilo uspeha. Vsakoletno relativno uspešnost ekipe približno dobimo, če neuradno ovrednotimo medalje in pohvale, ki so jih prejeli tekmovalci posameznih držav (uradno tekmujejo dijaki na olimpiadi kot posamezniki in ne kot ekipa). Letošnje tri pohvale nas na taki lestvici uvrščajo relativno visoko, saj tekmovalci iz kar 21 držav niso prejeli nobene medalje ali pohvale, 13 držav je doseglo manj kot mi, štiri države pa so bile tako uspešne kot naša. Tako smo na tej lestvici uvrščeni v prvo polovico sodelujočih držav.

Naslednja, 32. mednarodna fizikalna olimpiada, bo od 28. junija do 6. julija 2001 v mestu Antalya v Turčiji.

Ciril Dominko

## TOPLOTNI IZMENJEVALCI

Pri prezračevalnih napravah velikih stavb se srečamo z zanimivo nalogo. Topel, a izrabljen zrak v stavbi moramo nadomestiti s svežim, ki je pozimi lahko zelo hladen. Nesmotno bi bilo topli zrak spuščati naravnost na prosto in ga nadomeščati s hladnim iz okolice. Poleg neprijetnega ledenega piša v prostorih bi tako porabili zelo veliko toplote za dodatno ogrevanje. V prezračevalnih napravah sta svež in izrabljen zrak speljana po ceveh, ki tečejo tesno skupaj. Topli zrak tako ogreva hladnega in izhaja s temperaturo, ki je le malo večja od zunanje.

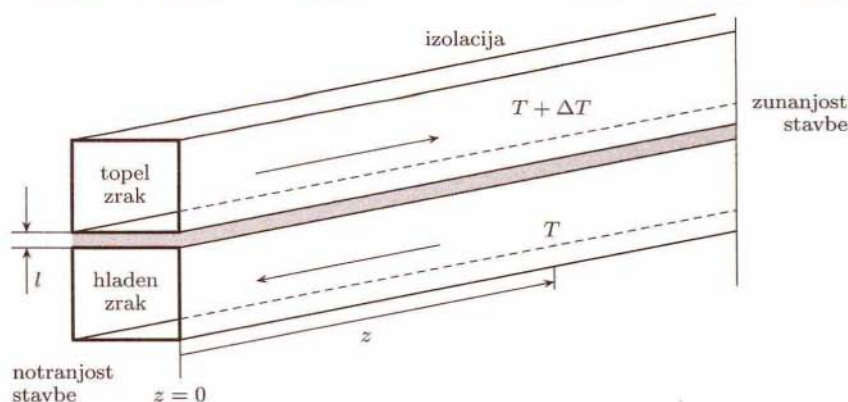
Na sliki 1 sta prikazani taki cevi s kvadratnim prerezo, ki sta v toplotnem stiku, sicer pa izolirani. Stranica kvadrata naj bo dolga  $a$ , torej je ploščina prereza cevi enaka  $a^2$ . Temperatura toplega zraka iz stavbe v zgornji cevi pada vzdolž toka, temperatura hladnega zraka v spodnji pa v smeri toka narašča. Segrevanje plina v spodnji cevi torej poteka na račun ohlajanja plina v zgornji. Masna pretoka zraka v ceveh naj bosta enaka. Privzeli bomo, da je temperaturna razlika zraka v ceveh  $\Delta T$  neodvisna od mesta, kjer jo merimo. Kasneje bomo videli, da je ta privzetek pravilen. Razliko  $\Delta T$  lahko povežemo z masnim tokom plina v ceveh, debelino stene med cevema  $l$  in toplotno prevodnostjo  $\lambda$ . Opazujmo del plina v cevi z dolžino  $\Delta z$  in s presekom  $S = a^2$ , ki potuje po cevi s hitrostjo  $v$  (slika 2). Ker je temperaturna razlika med toplejšim zrakom v zgornji cevi in opazovanim delom plina ves čas enaka  $\Delta T$ , se opazovani del plina v spodnji cevi v času  $t$  segreje za  $\delta T$  na račun toplotnega toka skozi steno. Toplotni tok vzdolž cevi bomo zanemarili. Velja torej

$$\lambda \frac{\Delta T}{l} a t \delta z = \Delta m c_p \delta T.$$

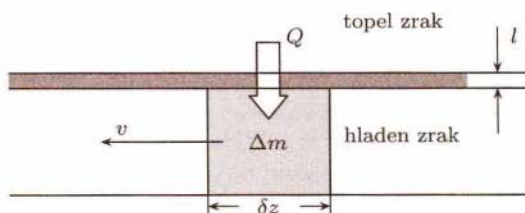
Na levi strani enačbe smo zapisali toploto, ki zaradi prevajanja preide skozi steno v času  $t$ . Na njen račun se segreje del plina z maso  $\Delta m$  in specifično toploto  $c_p$  za  $\delta T$ . S  $c_p$  smo označili specifično toploto zraka, vrednost zanjo je  $1000 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ . Ker je  $\Delta m = \rho S \Delta l$ , lahko enačbo poenostavimo, če upoštevamo še zvezo med masnim pretokom skozi cev  $\Phi_m = \rho S v$ , kjer je  $v = \frac{z}{t}$  hitrost plina v cevi,

$$\frac{\Delta T}{l} = \frac{\Phi_m c_p}{\lambda a} \frac{\delta T}{z}.$$

Tu smo vpeljali vzdolžni prirast temperature plina v cevi  $\delta T$  na razdalji  $z$ . Temu kvocientu pravimo tudi vzdolžni temperaturni gradient. Enačba



Slika 1. Cévi s kvadratnim prerezom, po katerih teče zrak v nasprotnih smereh. V zgornji cevi se zrak vzdolž toka ohlaja, v spodnji pa segreva.



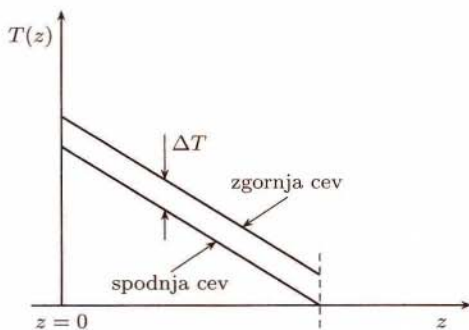
Slika 2. Označeni del plina v spodnji cevi se enakomerno segreva, ko potuje vzdolž cevi s hitrostjo  $v$ .

torej povezuje temperaturni gradient v vmesni steni s temperaturnim gradientom vzdolž cevi. Sedaj je čas, da primerjamo velikost obeh gradientov. Pri masnem toku  $\Phi_m = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$  po cevi s stranico  $a = 1 \text{ cm}$  in bakreno vmesno steno s toplotno prevodnostjo  $\lambda = 390 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$  dobimo

$$\frac{\Delta T}{l} = \frac{1}{4} \frac{\delta T}{z}.$$

Vidimo, da sta gradienta primerljiva. Pri 1 m dolgi cevi in temperaturni razliki med zrakom v stavbi in na prostem  $\delta T = 40 \text{ K}$  je gradient  $\frac{\Delta T}{l} = 10 \frac{\text{K}}{\text{m}}$ . Pri 1 mm debeli vmesni steni je torej  $\Delta T = 0,01 \text{ K}$ , razlika med temperaturama zraka v ceveh je torej zanemarljiva. Zračenje prostora opravimo skoraj povsem brez toplotnih izgub. Naprave, ki na tak način varčujejo s toplotno energijo, imenujemo toplotni izmenjevalci.

Slika 3 kaže potek temperature v ceveh v odvisnosti od oddaljenosti  $z$ . Izhodišče  $z = 0$  smo za obe cevi postavili na topli strani. Premisleki in enačba, ki smo jo izpeljali za spodnjo cev, veljajo tudi za zgornjo, le da se plin vzdolž toka ohlaja. Temperaturni gradient v zgornji cevi je torej prav tak kot v spodnji, vzdolž toka ima le spremenjen predznak. Abscisa  $z$  v diagramu narašča v zgornji cevi



Slika 3. Temperaturni potek  $T(z)$  v zgornji in spodnji cevi. Izhodišče  $z = 0$  smo postavili na začetek cevi na tistem koncu.

proti toku, zato je temperaturni gradient v zgornji cevi glede na  $z$  prav tak kot v spodnji, temperaturna razlika pa je enaka ne glede na  $z$ . Tako je privzetek o stalni razliki  $\Delta T$  upravičen.

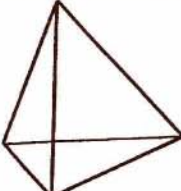
Prijem toplotne izmenjave je narava uporabila že davno pred človekom. Telesna temperatura večine rib je enaka temperaturi vode, v kateri živijo. Ribe namreč diha s škrgami, ki jih obliva voda. Kri mora biti v škrgah čim tesneje v stiku z vodo, da dobi riba dovolj kisika za življenje. Tako tesen stik pa pomeni, da je toplotni tok iz krvi v vodo že pri neznatni temperaturni razliki tako velik, da ga riba s presnovo ne more nadomestiti. Kri v škrgah mora torej imeti skoraj enako temperaturo kot voda. Pri večini rib kri ohlaja telo na temperaturo vode v okolici. Pri tem pomaga še toplotni tok s površja telesa v vodo.

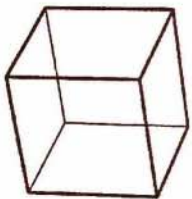
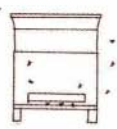
Tune in nekatere vrste morskih psov so pri tem izjema. Merjenja so pokazale, da je njihova telesna temperatura globoko v notranjosti mišice kar za 20 K višja od temperature vode. Surova tunina je tudi po izrazito rdeči barvi podobna mesu sesalcev, ki imajo stalno telesno temperaturo. Temperatura mišic pomembno vpliva na njihovo aktivnost – višja temperatura omogoča ribi večjo aktivnost in zmogljivost. Znano je, da tune plavajo neprekinjeno vse življenje. Kako tuna ohrani mišice tople, čeprav diha s škrgami?

Dovodne in odvodne žile (arterije in vene) mišice so pri tuni tesno skupaj, tudi ko se žile cepijo v žilice. Tako tečeta dovodna in odvodna kri tesno skupaj. Ker je dovodna kri hladnejša, se greje na račun oddane toplote toplejše krvi, ki teče iz mišice. Temperaturna razlika med dovodno in odvodno krvjo je lahko manjša od enega kelvina. Odvodna kri odnese iz mišice zelo malo toplote, če je le dolžina odvodnih oziroma dovodnih žil dovolj velika. V enačbi, ki povezuje oba temperaturna gradienta, sedaj



## KRIŽANKA “PRAVILNI POLIEDRI”

|                                                                                                 |                         |                |                          |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------|--------------------------|---------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|                | SESTAVIL MARKO BOKALIC  | MNOŽICA, GRUPA | VOJAŠKO VADIŠČE          | LISASTA AMER. DIVJA MAČKA | DOBRINA, KI JO DOBIMO ZASTONJ | NEKDANJI TUNIZUSKI VLADAR                                                         | OTROŠKA OKONČINA                    | DEKLE (PESNIŠKO)      | VNAJ PLAC DE KUP                                                                     |
|                                                                                                 | IMPULZ, INICIATIVA      |                |                          |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
|                                                                                                 | INTERNET EXPLORER       |                |                          |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
| $V = \text{št. OGLUŠC}$ , $R = \text{št. ROBOV}$<br>$S = \text{št. STRANIC}$<br>$V - R + S = 2$ |                         |                |                          |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
| <br>OKUSNOST   | REVUJA ZA OSNOVNO-SOLCE |                |                          |                           | LJUBE-ZENSKI ZMENEK           | FORDOV MALČEK                                                                     |                                     |                       | OBRE PLAC DE KUP                                                                     |
|                                                                                                 | ŠPORTNI NOVINAR BERGANT |                |                          |                           |                               |  | DEČEK, KI SLUŽI NA KMETUJI, HLAPČEK | POLOŽAJ TE-LESA, POŽA | STARI KRU                                                                            |
|                                                                                                 | GLASBENI ZNAK           |                |                          |                           |                               | ZMEREN MRAZ                                                                       |                                     | LUKA V TOSKANI        |                                                                                      |
|                                                                                                 | MAJHEN RT               |                |                          |                           |                               | 100 m <sup>2</sup>                                                                |                                     |                       |                                                                                      |
| VSAK OD OBEH DE-LOV LISTA, PLAT                                                                 |                         |                |                          |                           | KRATKO-TRAJEN MOČEN DEŽ       |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
|                                                                                                 |                         |                |                          |                           | SIMBOL                        |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
| GIBANJE PREDMETA PO ZRAKU                                                                       |                         |                | NAGOVOR OB NAZDRAVLJANJU |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
|                                                                                                 |                         |                | ITAL. VERMUT             | SMUČ. REŠ. PRIPRAVA       |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
| PREBI-VALCI GRŠKEGA POLOTOKA                                                                    |                         |                |                          |                           |                               |                                                                                   | PODAT-KOVNIK                        |                       |                                                                                      |
| OSREDNJI DEL STEBLA, STRŽEN                                                                     |                         |                |                          |                           |                               | VEČJA TABOR-NISKA ORGANI-ZACIJA                                                   | POLOVICA BESEDE ČRTA                |                       | MES-NA S KOROS                                                                       |
|                                                                                                 |                         |                |                          |                           |                               |                                                                                   | TELUR                               |                       |                                                                                      |
| TANTAL                                                                                          |                         |                | STRUP V TOBAKU           |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       | PRAH TOI ŠVI                                                                         |
|                                                                                                 |                         |                | ROZKA                    |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
| KUNA S CENJENIM KRZNOM, NORKA                                                                   |                         |                |                          | OZNAKA KARLOVCA           | GLASBENIK ŽGUR                |                                                                                   |                                     |                       | NEKD-ITA PRE SED PER                                                                 |
|                                                                                                 |                         |                |                          |                           | A/STRALSKI NOU                |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
| GERMAN, VOJSKO-VODJA IZ 5. STOL.                                                                |                         |                |                          |                           |                               |                                                                                   | KORNELIA ENDER                      |                       |                                                                                      |
| KRAJŠI SPISEK                                                                                   |                         |                |                          |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
| SKUPINA TREH GLASBE-NIKOV                                                                       |                         |                |                          | SLOV. ZGODO-VINAR (LOŽE)  |                               |                                                                                   |                                     |                       |                                                                                      |
|                                                                                                 |                         |                |                          |                           |                               |                                                                                   |                                     |                       |  |

|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| PREJ<br>CAN<br>L<br>MINE                                                         |  | VRTIN-<br>ČAST<br>TROPSKI<br>VIHAR | RADIJSKA<br>UREDNIKA<br>RAUH           | MOTOCIKEL<br>Z MAJHNIMI<br>KOLESI           | POGANJEK<br>IZ<br>SEMENA                |  |   |
|                                                                                  | MOČAN<br>PRIJEM                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  | BITJE, KI<br>KAZNUJE<br>PREDICO                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  | AM. AVTO                                                                         |                                    |                                        |                                             |                                         | ANA BOHTE                                                                         |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         | DANSKA                                                                            |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         | PRIKAZ<br>RODBINSKIH<br>VEZI                                                      |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         |                                                                                   | ENOTA ZA<br>TEMPE-<br>RATURO                                                       |
| DNO<br>CILO                                                                      |                                                                                  |                                    |                                        |                                             | AM. FILM.<br>REŽISER<br>(MEL)           |                                                                                   | SKRČKA Z<br>NAZAJ PO-<br>KRČENIMI<br>NOGAMI                                        |
| DIZR.<br>KLJ                                                                     |                                                                                  |                                    |                                        |                                             | RIBIŠKA<br>VRVICA                       |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    | EVA<br>LONGYKA                         |                                             | POT, KI SE<br>LOČI OD<br>GLAVNE<br>POTI |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    | TV<br>ZASLON                           |                                             | MLADENKA                                |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  | LESEN POD<br>ZA SUŠE-<br>NJE ZRNJA                                               |                                    |                                        |                                             | KRAJ PRI<br>KRANJU                      |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  | OČESNA SI-<br>VA MRENA                                                           |                                    |                                        | ZMAGOVIT<br>UDAREC<br>PRI BOKSU             |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
| KROGLASTA<br>BAKTERIJA                                                           |                                                                                  |                                    |                                        | SKANDIN.<br>DROBIŽ                          |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
| ITAL.<br>TENORIST<br>(ENRICO)                                                    |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  | Z REŠO PO-<br>RASEL SVET           |                                        |                                             |                                         | IVANA<br>KOBILICA                                                                 |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  | PET MUZI-<br>KANTOV                |                                        |                                             |                                         | REFLEK-<br>TOR                                                                    |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        | KNEZOVA<br>HČI                              |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
| TO<br>LOV/<br>SKEM                                                               |                                                                                  |                                    |                                        | LIDIJA<br>KRAJŠE                            |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        | ŠPORTNA<br>DVORANA V<br>ŠKOF. LOKI          |                                         |                                                                                   |  |
| SAN-<br>V<br>CI                                                                  |                                                                                  |                                    | IGRALNA<br>KARTA Z<br>ŽENSKO<br>PODOBO | IGRA S<br>KARTAMI<br>ZADNJI DEL,<br>ZAČELJE |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
| ANJJI<br>L.<br>ED-<br>NIK<br>TINI                                                |                                                                                  |                                    |                                        |                                             | OBODBJE<br>RAZVOJA<br>EPOHA             | NASILNA<br>TATVINA                                                                |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         | VODNA<br>ŽIVAL                                                                    |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         | BRIT. VIO-<br>LINISTKA<br>(VANESSA)                                               |                                                                                    |
|                                                                                  |                                                                                  |                                    |                                        |                                             |                                         | GR. ČRKA                                                                          |                                                                                    |
|  | ČLOVE-<br>KOVA<br>ČUSTVENA<br>NARAVA                                             |                                    |                                        |                                             |                                         |                                                                                   |                                                                                    |
|                                                                                  | OČE                                                                              |                                    |                                        | OKRASJE<br>NA<br>TELESU                     |                                         |                                                                                   |                                                                                    |

## 31. FIZIKALNA OLIMPIADA: IZGUBLJENI V LEICESTRU

Naše potovanje v Leicester se je začelo 8. julija 2000 na letališču Brnik. Kljub temu, da smo se zbrali že zgodaj zjutraj, smo bili kar dobre volje. Pred mano pa je bila že prva dogodivščina: prvič sem letel z letalom. Po mirnem dveurnem letu smo pristali na londonskem letališču Heathrow. Tu smo že lahko spoznali pravo angleško vreme, ki se je spreminjalo vsakih nekaj minut; nekaj časa je deževalo, pa potem spet sijalo sonce. Nato smo se z avtobusom podali na triurno vožnjo do Leicestra.

Ko smo prispeli, so nas že čakali organizatorji. Takrat smo se morali tudi posloviti od naših spremljevalcev, saj so ju nastanili ločeno od nas, kot zahtevajo pravila. Po nas je prišel kombi in nas odpeljal v študentsko naselje, kjer nas je pričakala naša vodička Ranj. Vodička je imela indijske korenine, tako kot kar polovica prebivalcev Leicestra. Že takoj smo izvedeli, da nas je zamenjala s Slovaki in smo ji zato natančno razložili geografsko lego Slovenije. Naš dom je bil opremljen bolj slabo, pa tudi čistoča ni bila njegova odlika. Gostitelji so nam še istega dne razkazali mesto Leicester. Hranili smo se v študentski menzi. S hrano nismo bili preveč zadovoljni, saj je bila brez okusa, tako da smo imeli najraje sladice, pa še s pijačo so skoparili, saj so nam za kosilo in večerjo privoščili samo vodo. Tudi za zabavo v prostem času je bilo bolj slabo poskrbljeno; na voljo je bila samo skupna soba s televizijo. Še tista biljardna miza, ki je bila v sobi, je bila polomljena.

Prvo jutro smo se odpravili na slovesno odprtje 31. mednarodne fizikalne olimpiade. Tam smo prvič lahko videli, kako veliko je tekmovalcev z vsega sveta. Še posebej zanimivi so bili Jugoslovani, ki so se hoteli slikati kar z vsemi ekipami. Zvečer smo se odpravili v mesto na bowling. Prav vsi smo se prvič spoznali s tem športom in moram priznati, da smo se neznansko zabavali. To je bila kar pravšnja sprostitev, ob kateri smo nekoliko pozabili na tekmovalni del, ki je sledil.

Naslednjega dne nas je čakal teoretični del tekmovanja, ki je vseboval tri sklope nalog. V prvem sklopu smo računali razne stvari pri bungee jumpingu, starost Zemlje, električno energijo nabite krogle, delovanje idealnega toplotnega stroja in vrtenje obroča v zemljinem magnetnem polju. Pri drugi nalogi smo morali izračunati razmerje med maso in nabojem elektrona. Pri tretji nalogi smo se preizkusili z modelom naprave, ki naj bi merila težni pospešek na 19 decimalk natančno. Na koncu se je izkazalo, da take naprave ni moč narediti, saj bi morala biti 100-krat večja od Zemlje.

Sledil je dan počitka po težkih in zelo obsežnih nalogah. Organizatorji so nas odpeljali v rojstno hišo znamenitega fizika Isaaca Newtona. Nato pa smo si ogledali še univerzo Cambridge in njen Cavendishov laboratorij. Kot zanimivost naj povem, da so Angleži naravnost obsedeni z oznakami za požarne izhode. Med predavanjem v laboratoriju smo tudi mi doživeli požarni alarm, vendar se ni zgodilo nič hudega.

Dan potem pa nas je čakal še eksperimentalni del tekmovanja. Sestavljen je bil iz dveh nalog. Pri prvi smo raziskovali prevodnost fotoupora v odvisnosti od valovne dolžine vpadle svetlobe. Pri drugi pa smo se ukvarjali z majhnim magnetnim diskom, ki smo ga spuščali po aluminijastem klancu.

V naslednjih dneh smo se udeležili še izleta v zabavišni park Alton Towers. Na tem izletu smo zelo uživali, še posebej na vlakcih smrti. Vozili smo se tako na Oblivionu, kjer se 50 m spuščaš skoraj v prostem padu proti tlem, kot tudi na najbolj slavnem evropskem vlakcu Nemesis, kjer ti noge bingljajo iz vlakca.

Zelo zanimivo in glasno je bilo tudi predavanje o razstrelivih, kjer so nam stvari tudi praktično prikazali. Pokazali pa so nam tudi vesoljski center na univerzi, kjer se med drugim ukvarjajo tudi s prvo evropsko odpravo na Mars leta 2003. Pri tem delu so se organizatorji gotovo bolj izkazali kot pri prehrani in nastanitvi, tako da smo bili s programom zelo zadovoljni.

V tem času smo spoznali kar precej mladih, največ pa smo se družili s Hrvati. Morda tudi zato, ker se z njimi najlažje sporazumevamo. Z njimi smo odigrali tudi biljard, kjer so nas premagali, zato pa smo bili mi boljši pri nogometu, ki smo ga odigrali na bližnjem travniku. Tam so domačini skoraj vsak dan igrali kriket. Zanimivi so bili tudi Avstralci, ki bi po svojih žonglerskih sposobnostih lahko nastopali celo v cirkusu.

Predzadnji dan je bila organizirana zaključna prireditev z govori organizatorjev in podelitvijo medalj in pohval. Najuspešnejši so bili tokrat Kitajci, ki so osvojili vseh pet zlatih medalj. Mi smo osvojili tri pohvale, naši prijatelji iz Hrvaške pa so ostali praznih rok. Zvečer je bil organiziran še banket, ki pa se je hitro končal. Nato smo se še poslovili od Hrvatov, ki so se že sredi noči odpravili domov. Mi smo odpotovali šele naslednji večer, zato smo kosili v eni od mestnih restavracij. To je bilo najboljše kosilo v celem tednu! Po dolgočasni vožnji do Londona je sledil še polet do Brnika, kjer so nas že čakali starši.

*Andrej Košmrlj*

# DOKAŽI NEENAKOST – Rešitev s str. 91

Označimo po vrsti z  $A(a, b, c)$ ,  $G(a, b, c)$  in  $H(a, b, c)$  aritmetično, geometrično in harmonično sredino pozitivnih števil  $a$ ,  $b$  in  $c$ . Definirane so z izrazi:

$$A(a, b, c) = \frac{a + b + c}{3}, \quad G(a, b, c) = \sqrt[3]{abc}, \quad H(a, b, c) = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Znano je, da vselej velja relacija

$$H(a, b, c) \leq G(a, b, c) \leq A(a, b, c),$$

da v njej obvelja enačaja na obeh mestih hkrati in sicer natanko tedaj, ko je  $a = b = c$ .

V našem primeru najprej velja:

$$\begin{aligned} G\left(1 + \frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{y}, 1 + \frac{1}{z}\right) &\geq H\left(1 + \frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{y}, 1 + \frac{1}{z}\right) = \\ &= \frac{3}{3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)}. \end{aligned}$$

Ker je

$$\frac{3}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}} = H(x+1, y+1, z+1) \leq A(x+1, y+1, z+1) = \frac{4}{3},$$

velja neenakost

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4}.$$

Iz nje dobimo najprej

$$3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \leq \frac{3}{4},$$

nato

$$G\left(1 + \frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{y}, 1 + \frac{1}{z}\right) \geq 4,$$

in nazadnje s kubiranjem neenakost, ki jo je bilo treba dokazati.

Enačaj velja natanko takrat, ko je  $x = y = z$ . Ker je  $x + y + z = 1$ , mora biti v tem primeru  $x = y = z = 1/3$ .

Marko Razpet

## VEDNO VELJA – Rešitev s str. 80

Čeprav je po mnenju lorda Kelvina vektor *nekoristen ostanek*, od katerega nobeno živo bitje nikoli ni imelo niti najmanjše koristi, lahko z uporabo vektorjev rešimo tudi kakšno nalogo, pri kateri tega ne bi pričakovali. To velja tudi za našo, v prejšnji številki zastavljeno nalogo.

Uporabili bomo lastnost, da skalarni produkt dveh vektorjev  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  nikoli ni večji od produkta velikosti vektorjev:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Enačaj velja, če sta vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  vzporedna v isto smer.

Vpeljimo vektorja

$$\vec{a} = (1, 1, 1) \quad \text{in} \quad \vec{b} = (\sqrt{4x+1}, \sqrt{7x+1}, \sqrt{1-11x}).$$

Pri tem je  $\vec{b}$  definiran za iste  $x$  kot naša neenačba, to je na intervalu  $[-\frac{1}{7}, \frac{1}{11}]$ . Ker je

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot \sqrt{4x+1} + 1 \cdot \sqrt{7x+1} + 1 \cdot \sqrt{1-11x} = \\ &= \sqrt{4x+1} + \sqrt{7x+1} + \sqrt{1-11x}, \\ |\vec{a}| &= \sqrt{3} \quad \text{in} \quad |\vec{b}| = \sqrt{(4x+1) + (7x+1) + (1-11x)} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

velja zaradi omenjene lastnosti skalarnega produkta naša neenačba

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{7x+1} + \sqrt{1-11x} \leq 3$$

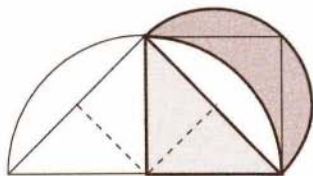
za vsak  $x$ , za katerega je definirana. Enačaj velja za  $x = 0$ .<sup>1</sup>

Dušan Murovec

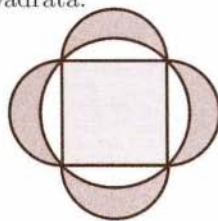
<sup>1</sup> Premislite, ali je izbrana metoda splošno uporabna pri reševanju neenačb, v katerih je na eni strani vsota kvadratnih korenov, oziroma, kaj je posebnost dane enačbe, da smo metodo lahko uspešno uporabili. Op. ur.

## HIPOKRATOVE LUNE – Rešitve nalog s str. 98

**Naloga 1.** Oglejmo si slike 1 in 2. Na prvi je krožni odsek nad diagonalo kvadrata podoben vsakemu od skladnih krožnih odsekov nad stranico kvadrata. Kot vemo, je razmerje med diagonalo in stranico kvadrata  $\sqrt{2} : 1$ , razmerje ploščin podobnih likov nad diagonalo in stranico pa  $2 : 1$ . Torej je ploščina krožnega odseka nad diagonalo enaka skupni ploščini obeh odsekov nad stranico. Ploščino luninega krajca s slike 1 potemtakem dobimo, če od ploščine polkroga nad diagonalo odštejemo ploščino krožnega odseka nad diagonalo, torej ploščini obeh krožnih odsekov nad stranico. To pa je isto kot ploščina polovice kvadrata.



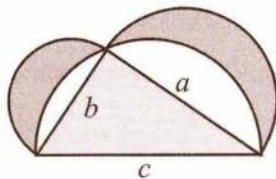
Slika 1.



Slika 2.

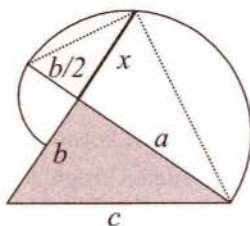
Če na sliki 2 razdelimo kvadrat z obema diagonalama na štiri dele, vidimo po pravkar dokazanem, da je vsak od luninih krajev ploščinsko enak četrtini kvadrata, vsi štirje skupaj pa celemu kvadratu.

**Naloga 2.** Sklep je podoben kot pri rešitvi prejšnje naloge, le da zdaj namesto razmerja med diagonalo in stranico kvadrata upoštevamo PitaGOROV izrek  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ta tudi pove, da je vsota ploščin polkrogov nad katetama enaka ploščini polkroga nad hipotenuzo. Iz slike 3 je jasno, da je skupna ploščina obeh luninih krajev enaka ploščini trikotnika.

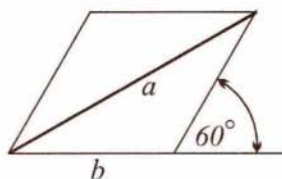


Slika 3.

**Naloga 3.** Načinov, kako dobimo stranico  $x$  ploščinsko enakega kvadrata, je več. Ker mora veljati  $x^2 = a(b/2)$ , je morda najpreprosteje uporabiti izrek, da je v pravokotnem trikotniku kvadrat višine na hipotenuzo enak produktu projekcij katet na hipotenuzo. Postopek je razviden iz slike 3a.



Slika 3a.

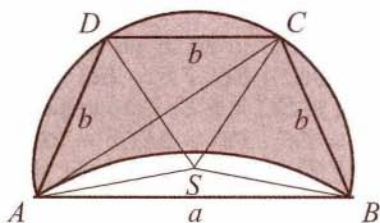


Slika 3b.

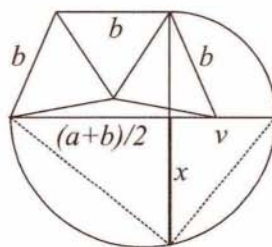
**Naloga 4.** Ker je  $a = b\sqrt{3}$ , dobimo  $a$  kot daljšo diagonalo romba s kotom  $60^\circ$  (slika 3b).

**Naloga 5.** V dokazu bomo večkrat uporabili dejstvo, da je v poljubnem trikotniku  $ABC$  kot pri  $C$  pravi, če velja  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , ostri, če velja  $AB^2 < AC^2 + BC^2$ , in topi, če je  $AB^2 > AC^2 + BC^2$ . Sklicujoč se na oznake s slike 4, najprej ugotovimo, da je v trapezu  $\mathcal{T}$  kot pri  $B$  manjši, kot pri  $D$  pa večji od  $90^\circ$ . To sledi iz dejstva, da je  $AB > CD$  in sta v enakokrakem trapezu kota pri  $B$  in  $D$  suplementarna. V trikotniku  $ACD$  po prejšnjem torej velja  $AC^2 > AD^2 + DC^2$ , se pravi tudi  $AC^2 + CB^2 > AD^2 + DC^2 + CB^2 = 3b^2 = a^2 = AB^2$ . To pomeni, da je v trikotniku  $ABC$  kot pri  $C$  manjši od  $90^\circ$ . Za kot pri  $B$  že vemo, da je ostri, enako pa velja tudi za kot pri  $A$ , ker je manjši od kota pri  $C$ , saj je nasprotna stranica  $BC$  krajša od stranice  $AB$ , ki leži nasproti kota pri  $C$ . Torej je trikotnik  $ABC$  ostrokotni, zato vsebuje središče  $S$  očrtanega kroga.

**Naloga 6.** Polmesec dobimo, če od trapeza  $\mathcal{T}$  odrežemo krožni odsek nad osnovnico  $AB$  in mu dodamo tri krožne odseke nad kraki  $BC$ ,  $CD$  in  $AD$  (slika 4). Ker pa je zaradi  $a^2 = 3b^2$  dodana ploščina enaka odvzeti, ima polmesec enako ploščino kot trapez  $\mathcal{T}$ .



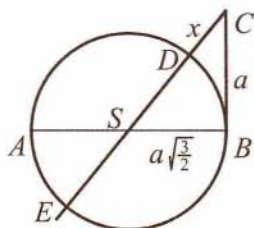
Slika 4.



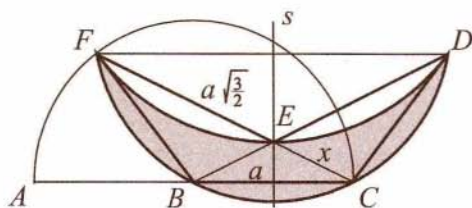
Slika 4a.

**Naloga 7.** Trapez  $\mathcal{T}$  ima ploščino  $\frac{a+b}{2} \cdot v$ , kjer je  $\frac{a+b}{2}$  njegova srednjica in  $v$  njegova višina. Višino prenesemo na osnovnico, stranico  $x$  ploščinsko enakega kvadrata pa dobimo spet kot višino ustreznega pravokotnega trikotnika (slika 4a).

**Naloga 8.** Če je  $x$  pozitivna rešitev kvadratne enačbe  $x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax - a^2 = 0$ , velja med  $x$  in  $a$  tudi relacija  $a^2 = x(x + a\sqrt{\frac{3}{2}})$ . Narišimo krog s središčem v  $S$  in premerom  $a\sqrt{\frac{3}{2}}$  ter daljico  $BC$  dolžine  $a$ , pravokotno na premer  $AB$  v krajišču  $B$  (slika 5a). Premica skozi  $C$  in središče kroga  $S$  naj seka krožnico v točkah  $D$  in  $E$ . Potem je zaradi podobnosti trikotnikov  $BCD$  in  $EBC$  (zakaj?)  $BC^2 = CD \cdot CE$ . Torej je  $x = CD$ , se pravi, enak razdalji od točke  $C$  do najbližjega presečišča s konstruirano krožnico.



Slika 5a.



Slika 5b.

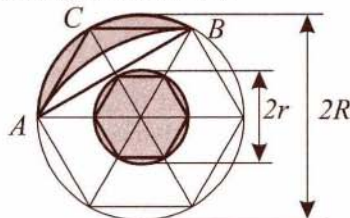
**Naloga 9.** Enakokraka trikotnika  $FBC$  in  $BCD$  na sliki 5b sta skladna, saj je drugi po konstrukciji zrcalna slika prvega preko simetrale  $s$ . Ker sta si enakokraka trikotnika  $FBC$  in  $EBC$  podobna, sta si podobna tudi enakokraka trikotnika  $FBC$  in  $FED$ . Torej sta si podobna tudi krožna odseka nad krakoma  $FE$  in  $FB$ , enako pa velja zaradi skladnosti tudi za druge krožne odseke.

**Naloga 10.** Ploščini krožnih odsekov nad  $FE$  in  $FB$  sta v razmerju  $3 : 2$ , zato je skupna ploščina dveh odsekov, nad  $FE$  in  $ED$ , enaka skupni ploščini treh odsekov, nad  $FB$ ,  $BC$  in  $CD$ . Torej je ploščina luninega krajca enaka ploščini petkotnika  $FBCDE$ .

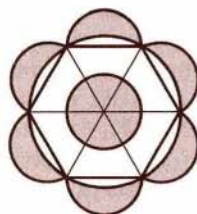
**Naloga 11.** Zaradi podobnosti trikotnikov  $FBC$  in  $BCE$  na sliki 5b je  $EC \cdot FC = BC^2$ . Ker je zaradi tega  $EC^2 < EC^2 + EC \cdot FE = EC \cdot (EC + FE) = EC \cdot FC = BC^2 = \frac{2}{3}FE^2 < FE^2$ , je  $EC < FE$ . Zato velja tudi  $FC = FE + EC > 2EC$  in  $FB^2 = BC^2 = EC \cdot FC > 2EC^2 = 2EB^2$ . Torej je  $FE^2 = \frac{3}{2}FB^2 = FB^2 + \frac{1}{2}FB^2 > FB^2 + EB^2$ . To pomeni, da je v trikotniku  $BDF$  kot pri  $B$  topi in zunanji lok polmeseca  $FBCD$  meri manj kot pol krožnice.

**Naloga 12.** Primerjajmo podobne krožne odseke na sliki 6. V velikem šestkotniku je odsek nad diagonalo  $AB$  ploščinsko trikrat večji od odseka nad stranico  $AC$  (ali  $CB$ ). Le-ta pa je po konstrukciji šestkrat večji od odseka nad stranico malega šestkotnika. Če torej od manjšega kroga

odvzamemo šest krožnih odsekov, lahko skupaj s krožnima odsekom nad  $AC$  in  $CB$  sestavimo krožni odsek nad  $AB$ . Torej je skupna ploščina polmeseca  $ABC$  in manjšega kroga enaka skupni ploščini trikotnika  $ABC$  in malega šestkotnika.



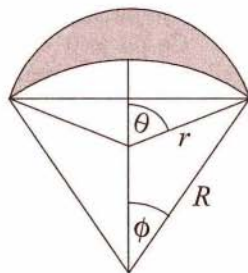
Slika 6.



Slika 7.

**Naloga 13.** Ploščina vseh polkrogov, ki so konstruirani nad stranicami šestkotnika na sliki 7, je enaka trikratni ploščini sredinskega kroga. Ploščina šestkotniku očrtanega kroga pa je štirikratnik ploščine sredinskega kroga. Torej je skupna ploščina šestih polmesecov, ki jih dobimo, če uniji šestkotnika in šestih polkrogov nad stranicami izrežemo šestkotniku očrtani krog, enaka ravno ploščini šestkotnika, zmanjšani za ploščino sredinskega kroga.

**Naloga 14.** Iz slike 8 je razvidno, da je ploščina luninega krajca enaka razliki ploščin obeh krožnih odsekov, kar pa lahko izrazimo s ploščinami ustreznih krožnih izsekov in ploščinami ustreznih trikotnikov z znanimi trigonometričnimi formulami. Torej je  $p = (\frac{1}{2}r^2 2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta) - (\frac{1}{2}R^2 2\phi - \frac{1}{2}R^2 \sin 2\phi) = r^2\theta - R^2\phi + \frac{1}{2}(R^2 \sin 2\phi - r^2 \sin 2\theta)$ .



Slika 8.

**Naloga 15.** Potrebujemo nekaj znanja trigonometrije. (a) V primeru  $k = 2$  iz enačbe  $\sin 2\phi = \sqrt{2} \sin \phi$  takoj izračunamo  $\cos \phi = \sqrt{2}/2$  in  $\sin \phi = \sqrt{2}/2$  oziroma  $\phi = \pi/4$ . (b) V primeru  $k = 3$  upoštevajmo formulo za trojni kot  $\sin 3\phi = 3 \sin \phi - 4 \sin^3 \phi$ , pa iz enačbe  $\sin 3\phi = \sqrt{3} \sin \phi$  dobimo  $4 \sin^2 \phi = 3 - \sqrt{3}$  oziroma  $\sin \phi = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \sqrt{3}}$ . (c) V primeru  $k = 3/2$  se enačba glasi  $\sin \frac{3}{2}\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \phi$ . S formulo za trojni kot pridemo do enačbe  $4 \cos^2 \frac{\phi}{2} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} \cos \frac{\phi}{2} - 1 = 0$ . To je kvadratna enačba za  $\cos \frac{\phi}{2}$ , iz katere dobimo  $\cos \frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{11}}{4\sqrt{2}}$ , in nato poiščemo še  $\cos \phi = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}$  in  $\sin \phi = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15 + \sqrt{33}}{2}}$ .

Milan Hladnik

## IZ DALJICE TRIKOTNIK – Rešitev s str. 81

Če dano daljico na slepo razdelimo na tri krajše daljice, bomo iz dobljenih kosov (kot stranic) lahko sestavili trikotnik natanko takrat, ko bo dolžina posamezne stranice manjša od vsote dolžin ostalih dveh stranic. Videli bomo, da je precej manj verjetno, da je ta pogoj izpolnjen, kot obratno.

Vzemimo dolžino dane daljice za enoto. Potem lahko predstavimo daljico na številski premici z množico točk, ki leže med 0 in 1 (seveda vključno z 0 in 1), to je z intervalom  $[0, 1]$ . Slepi delitvi daljice na tri dele ustreza, v tej predstavitvi, neodvisna izbira dveh različnih notranjih točk  $x$  in  $y$  s tega intervala.

Če je  $0 < x < y < 1$ , so dolžine dobljenih daljic enake  $x$ ,  $y - x$  in  $1 - y$ . Iz njih bomo lahko sestavili trikotnik, če bodo hkrati izpolnjeni naslednji pogoji:

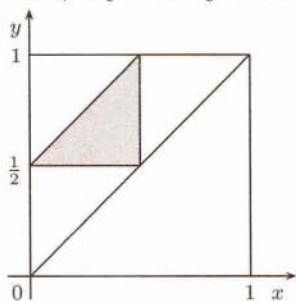
$$x < (y - x) + (1 - y)$$

$$y - x < x + (1 - y)$$

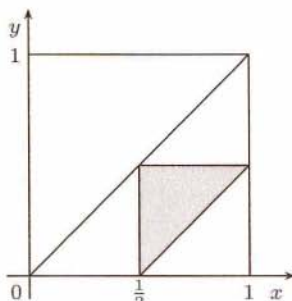
$$1 - y < x + (y - x)$$

V koordinatnem sistemu  $x, y$  ustrežajo vsem tem pogojem točke trikotnika, ki je na sliki 1 temneje obarvan.

Če pa je  $0 < y < x < 1$ , dobimo s podobnim premislekom še točke trikotnika, ki je temneje obarvan na sliki 2.



Slika 1.



Slika 2.

Ker neodvisni izbiri dveh točk  $(x, y)$  z intervala  $[0, 1]$  ustreza slepa izbira točke  $(x, y)$  v kvadratu  $[0, 1] \times [0, 1]$ , je verjetnost, da bomo iz dobljenih daljic lahko sestavili trikotnik, enaka razmerju med vsoto ploščin obarvanih trikotnikov in ploščino kvadrata s stranico 1. Vidimo, da je to razmerje enako  $\frac{1}{4}$ , in je torej res precej manj verjetno, da bomo trikotnik lahko sestavili, kot da ga ne bomo mogli.

Marija Vencelj

## URNIK TEKMOVANJ V LETU 2001

| področje                    | šola                                                   | tekmovanje                                               | datum                                                               |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| matematika                  | osnovna                                                | šolsko<br>področno<br>državno                            | 15. marec<br>21. april<br>19. maj                                   |
|                             | srednja                                                | šolsko<br>izbirno<br>sredozemsko<br>državno<br>olimpiada | 15. marec<br>7. april<br>april<br>12. in 13. maj<br>1. do 14. julij |
|                             | za dijake<br>srednjih<br>poklicnih šol                 | šolsko<br>področno<br>državno                            | 15. marec<br>12. maj<br>26. maj                                     |
|                             | za dijake sred-<br>njih tehniških in<br>strokovnih šol | šolsko<br>področno<br>državno                            | 15. marec<br>12. maj<br>26. maj                                     |
| fizika                      | osnovna                                                | šolsko<br>področno<br>državno                            | 12. marec<br>7. april<br>12. maj                                    |
|                             | srednja                                                | področno<br>državno<br>izbirno<br>olimpiada              | 24. marec<br>21. april<br>4. maj<br>28. junij do 6. julij           |
| logika                      | osnovna                                                | šolsko<br>izbirno<br>državno                             | september<br>oktober<br>november                                    |
|                             | srednja                                                | izbirno<br>državno                                       | oktober<br>november                                                 |
|                             | študentje                                              | državno                                                  | november                                                            |
| matematika<br>za razvedrilo | osnovna in<br>srednja                                  | državno                                                  | 29. september                                                       |
| računalništvo               | osnovna                                                | šolsko<br>področno<br>državno                            | 1. februar<br>9. marec<br>7. april                                  |
|                             | srednja                                                | področno<br>državno                                      | 9. marec<br>7. april                                                |

## Nekaj informacij o tekmovanjih

## Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Podatke najdete na spletni strani DMFA Slovenije (<http://www.dmfa.si/>). Pojasnila

dobite pri gospodu Aleksandru Potočniku na OŠ Božidarja Jakca, Nussdorferjeva 10, Ljubljana, telefon (041)-420-618 oziroma na elektronskem naslovu [aleksander.potocnik@guest.arnes.si](mailto:aleksander.potocnik@guest.arnes.si).

### Matematika – srednja šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Prvi izbirni test bo 26. januarja, drugi pa 25. aprila 2001. Podrobnejše informacije dajeta gospod Darjo Felda, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (01)-47-68-233 ali (01)-47-68-234, in gospod Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (01)-47-66-500, dobite pa jih tudi po elektronski pošti na naslovu [math.comp@fmf.uni-lj.si](mailto:math.comp@fmf.uni-lj.si). Koledar aktivnosti najdete na spletni strani *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>). Posebej bodite pozorni na dve novi matematični tekmovanji za srednješolce. *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike* ureja tekmovanja, ki se jih lahko udeležujejo izključno dijaki srednjih poklicnih šol. Več informacij o teh tekmovanjih lahko dobite pri gospe Dušanki Vrenčur, Srednja živilska šola, Vodovodna 28, Maribor, tel. (02)-32-08-600, elektronska pošta [dusanka.vrencur@guest.arnes.si](mailto:dusanka.vrencur@guest.arnes.si). Tudi dijaki srednjih tehniških in strokovnih šol, ki ne obiskujejo gimnazijskega programa, se bodo odslej lahko udeleževali tekmovanja v posebni kategoriji. Tekmovanja v tej kategoriji ureja *Pravilnik o tekmovanju dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike*. Informacije dobite pri gospe Sonji Perko, Srednja ekonomska šola, Trg Borisa Kidriča 3, Maribor, tel. (02)-25-13-461.

Naj poudarimo, da se matematičnih tekmovanj srednješolcev, ki jih podrobno ureja *Pravilnik o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*, lahko udeležujejo vsi srednješolci ne glede na vrsto šole, ki jo obiskujejo. Seveda pa je tekmovanje v tej kategoriji podvrženo mednarodni primerljivosti zaradi končnega izbora ekip, ki sodelujejo na mednarodnih tekmovanjih.

### Fizika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Dodatne informacije dobite na spletni strani *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>) in pri gospe Jelislavi Sakelšek, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (01)-52-44-401.

### Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja v znanju fizike je objavljen na spletni strani *DMFA Slovenije* (<http://www.dmfa.si/>). Informacije dobite pri gospodu Cirilu Dominku na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (01)-3000-400.

### Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrilna matematika*.

### Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki so v času tekmovanja na predmetni stopnji osnovne šole, dijaki srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, Ljubljana. Druge informacije daje gospa Mija Kordež na ZOTKS, tel. (01)-25-13-727, faks (01)-25-22-487, elektronska pošta [mija.kordez@guest.arnes.si](mailto:mija.kordez@guest.arnes.si).

### Računalništvo – osnovna in srednja šola

Informacije najdete na Internetu (<http://www2.arnes.si/~ljzotks2>) ali na naslovu ZOTKS, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (01)-25-13-727 ali (01)-25-13-743, faks (01)-25-22-487, elektronska pošta [ljzotks2@guest.arnes.si](mailto:ljzotks2@guest.arnes.si).

*Darjo Felda*

## 35. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 110

### 6. razred

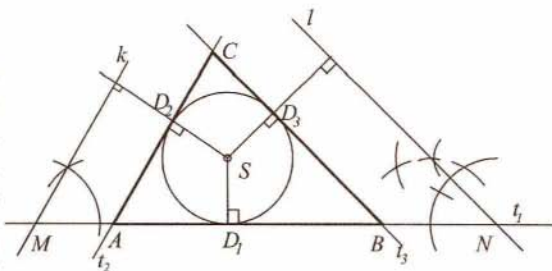
#### Sklop A

|                  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| naloga           | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
| pravilni odgovor | C  | B  | Č  | B  | Č  | Č  | D  | A  |

#### Sklop B

**B1** Dolžina narisane lomljenke je 80 dolžinskih enot. Dolžina enote je  $400 \text{ cm} : 80 = 5 \text{ cm}$ . Stranica kvadrata je  $d = 40 \text{ cm}$ , ploščina pa  $p = 1600 \text{ cm}^2$ .

- B2** Narišemo krog s središčem  $S$  in polmerom 2 cm ter tangento  $t_1$ . Nato narišemo kot  $\alpha$  z vrhom  $M$ , tangento  $t_2$  in oglišče  $A$ . Sedaj pa še kot  $\beta$  z vrhom  $N$ , tangento  $t_3$  in oglišči  $B$  in  $C$ .



- B3** Ulomek je enak 1, če je  $n + 7 \cdot (120 - \frac{1}{2} \cdot 4) - 3 = 1600$ , torej  $n + 823 = 1600$ , od koder dobimo  $n = 777$ .

## 7. razred

### Sklop A

|                  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| naloga           | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
| pravilni odgovor | Č  | B  | D  | Č  | A  | D  | B  | C  |

### Sklop B

- B1** Vrednost izraza je 2000.
- B2** Število  $b$  ni enako 0, ker ulomek ne bi imel pomena. Tudi število  $a$  ne more biti 0, ker bi bil ulomek 0. Tedaj je  $c = 0$ . Dobimo ulomek  $\frac{a \cdot (-b)}{b} > 0$  in ugotovimo, da morata biti števec in imenovalc enako predznačena. To je le tedaj, če je  $a < 0$ . Zato mora biti  $b > 0$ .
- B3** V trapezu je  $c = 16$  cm in  $v = 6$  cm, zato je  $p = 120$  cm<sup>2</sup>. Za romb velja  $\frac{ef}{2} = 120$  cm<sup>2</sup>. Ker je ena diagonala dolga 10 cm, je dolžina druge diagonale 24 cm.

## 8. razred

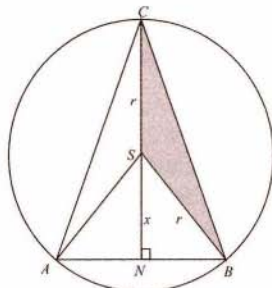
### Sklop A

|                  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| naloga           | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
| pravilni odgovor | Č  | A  | B  | D  | C  | B  | A  | C  |

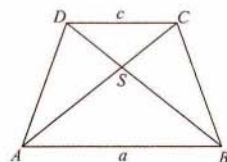
### Sklop B

- B1** Označimo vrvice z  $a$ ,  $b$  in  $c$  ter ostanke z  $x$ . Ker so ostanki enaki, velja  $x = \frac{3a}{4} = \frac{2b}{3} = \frac{c}{2}$ . Izrazimo  $a$ ,  $b$  in  $c$  z  $x$ :  $a = \frac{4x}{3}$ ,  $b = \frac{3x}{2}$  in  $c = 2x$ . Enačba  $\frac{4x}{3} + \frac{3x}{2} + 2x = 29$  ima rešitev  $x = 6$ . Vrvce so bile dolge 8 cm, 9 cm in 12 cm.

- B2** Vidimo, da je  $r = \overline{BS} = 25$  cm in  $\overline{NB} = 7$  cm, zato je  $x = \overline{NS} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$  cm. Tedaj je  $p_{NBS} = 84$  cm<sup>2</sup> in  $p_{NBC} = 171,5$  cm<sup>2</sup>, zato pa  $p_{BCS} = p_{NBC} - p_{NBS} = 87,5$  cm<sup>2</sup>.



- B3** Ker je  $\overline{AS} : \overline{SC} = 2 : 1$ , je  $\overline{AS} = 10$  cm in  $\overline{SC} = 5$  cm. Trikotnika  $\triangle ABS$  in  $\triangle CDS$  sta podobna, zato velja  $\overline{AS} : a = \overline{SC} : c$ , od tod pa dobimo  $c = 8$  cm.



Aleksander Potočnik

## 20. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 115<sup>1</sup>

### 7. razred

1. a) Ker utež miruje in ne drsi po vrvici, morata biti sila  $F_0$  in sila  $F_r$  enaki, njuna vsota pa mora uravnotežiti težo uteži

$$F_0 = F_r = \frac{F_g}{2} = 5 \text{ N}.$$

- b) Sili morata biti po velikosti enaki, njuna rezultanta pa mora biti enaka teži uteži. Iz slike lahko razberemo, da na diagramu sil predstavlja teža uteži diagonalo kvadrata, stranici kvadrata pa sta sili  $F_0$  in  $F_r$ , torej

$$F_0 = F_r = \frac{F_g \sqrt{2}}{2} = 7,1 \text{ N}.$$

- c) Sila roke mora biti enaka sili teže uteži, če naj utež miruje:

$$F_r = 10 \text{ N}.$$

<sup>1</sup> Rešitve lahko najdete tudi na domačih straneh DMFA Slovenije: [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)

Ker je sistem v ravnovesju, sila roke in sila teže pa imata enako smer, mora sila v obesišču uravnovesiti obe sili:

$$F_0 = F_g + F_r = 20 \text{ N}.$$

2. Označimo maso velike kocke z  $M$ , maso male kocke pa z  $m$ . Stranica velike kocke naj bo  $2a$ , stranica male kocke pa  $a$ . Osnovna ploskev velike kocke naj bo  $S_M$ , male pa  $S_m$ . Gostota snovi, iz katere sta narejeni kocki, naj bo  $\varrho$ , in  $g$  težni pospešek.

a)

$$\frac{\text{teža velike kocke}}{\text{teža male kocke}} = \frac{Mg}{mg} = \frac{\varrho (2a)^3}{\varrho a^3} = 8 : 1.$$

- b) V primerih A) in B) ista teža pritiska na različni površini. Zato je

$$\frac{\frac{(M+m)g}{S_M}}{\frac{(M+m)g}{S_m}} = \frac{a^2}{(2a)^2} = 1 : 4.$$

- c) Potencialno energijo določa lega težišča, ki je na sredini kocke:

$$\frac{W_p \text{ (velike kocke spodaj + male kocke zgoraj)}}{W_p \text{ (male kocke spodaj + velike kocke zgoraj)}} = \frac{Mga + mg(2a + \frac{a}{2})}{mg\frac{a}{2} + Mg(a + a)}$$

Iz rezultata A uporabimo še razmerje mas  $M = 8m$  in dobimo

$$\frac{8 + 2,5}{0,5 + 8 \cdot 2} = 0,63.$$

3. a) Dolžina nove ure je

$$H = \frac{24 \text{ h}}{10} = 2,4 \text{ h}.$$

- b)  $t = 9^{50} = 9,83 \text{ h}$  dopoldne, torej bi nova ura kazala čas

$$T = \frac{9,83 \text{ h}}{2,4} = 4,10 \quad (4 : 09 : 72)$$

in podobno

$$T = \frac{22 \text{ h}}{2,4} = 9,17 \quad (9 : 16 : 67).$$

4. a) Ko pade skakalec  $l_0 = 7$  m globoko, kolikor je dolga vrv, se mu zmanjša potencialna energija za  $mg l_0$ . Ravno toliko se mu poveča kinetična energija, torej

$$\Delta W_k = mg l_0 = 800 \text{ N} \cdot 7 \text{ m} = 5,6 \text{ kJ}.$$

- b) Potencialno energijo skakalca štejemo od najnižje točke C, kjer je  $W_p = 0$ .

Celotna energija skakalca in vrvi (vsota potencialne, kinetične in prožnostne energije) je ves čas enaka:  $W_{\text{celotna}} = W_p + W_k + W_{pr}$ .

### Točka A

Na mostu je celotna energija enaka potencialni energiji

$$W_p = mgh = 800 \text{ N} \cdot 16 \text{ m} = 12,8 \text{ kJ}.$$

Kinetična energija  $W_k = 0$ , saj skakalec miruje.

Prožnostna energija  $W_{pr} = 0$ , saj vrv ni raztegnjena.

### Točka B

Elastična vrv ravno še ni nič raztegnjena, ko skakalec pade za 7 m. Tedaj je 9 m nad točko C in je njegova potencialna energija

$$W_p = mg(h - l_0) = 800 \text{ N} \cdot 9 \text{ m} = 7,2 \text{ kJ}.$$

Kinetična energija se je povečala za toliko, za kolikor se je potencialna zmanjšala, torej

$$W_k = mg l_0 = 800 \text{ N} \cdot 7 \text{ m} = 5,6 \text{ kJ}.$$

$W_{pr} = 0$ , saj vrv še vedno ni raztegnjena.

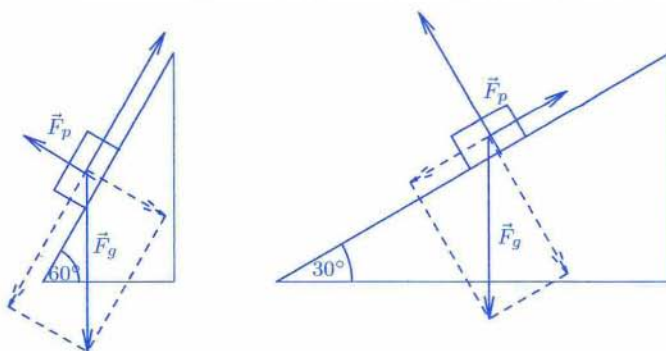
### Točka C

Potencialna in kinetična energija sta enaki nič. Celotna energija je prožnostna energija vrvi  $W_{pr} = mgh = 12,8 \text{ kJ}$ .

5. a) Če ni trenja, je delo, ki ga opravimo na kladah, nasprotno enako delu sile teže, to pa je enako spremembi potencialne energije  $\Delta W_p = mgh$ , pri čemer je  $h = 5$  m višina klanca. V obeh primerih opravimo enako delo, in sicer

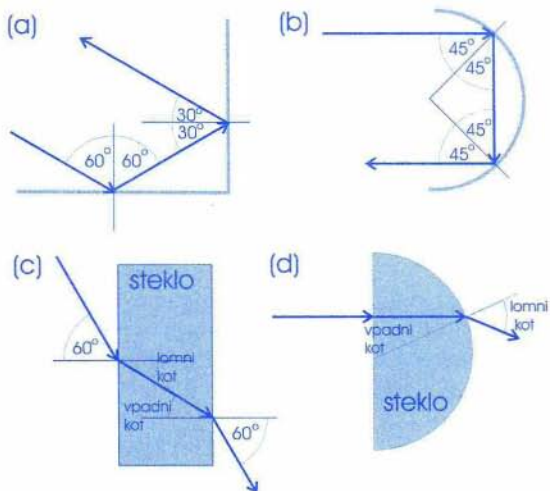
$$A = mgh = 100 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 500 \text{ J}.$$

- b) Enako kot v primeru a).



## 8. razred

1.



Slika 1. (a) pravokotno postavljeni ravni zrcali, (b) konkavno zrcalo s polmerom  $r$ , (c) steklena plošča v obliki kvadra in (d) steklena plošča z osnovno ploskvijo v obliki polkroga.

2.

| časovno obdobje [min] | smer gibanja | vrsta gibanja |
|-----------------------|--------------|---------------|
| 0 – 1                 | naprej       | enakomerno    |
| 1 – 1,75              | naprej       | zaviranje     |
| 1,75 – 2,25           | miruje       | enakomerno    |
| 2,25 – 3,5            | nazaj        | pospešuje     |

b)  $0 \text{ m/s}^2$ .

c) Razdalja kolesarja od začetne lege je

$$x = 6 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ m/s} \cdot 45 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ m/s} \cdot 30 \text{ s} = \\ = (360 + 135 - 45) \text{ m} = 450 \text{ m}.$$

3. Potencialno energijo skakalca štejemo od mostu, kjer je  $W_p = 0$ . Ker se skakalec spušča, se  $W_p$  zmanjšuje in je  $W_p = -mgh$ , kjer je  $h$  globina, merjena od mostu. Od globine  $l_0$  naprej lahko pišemo  $h = l_0 + x$ , kjer je  $x$  raztezek vrvi. Torej je tedaj potencialna energija v odvisnosti od raztezka  $W_p = -mg(l_0 + x)$ . Prožnostna energija vrvi je  $W_{pr} = (1/2)kx^2$ . Celotna energija skakalca in vrvi (vsota potencialne, prožnostne in kinetične energije) je ves čas enaka. Na začetku skakalec miruje, zato je

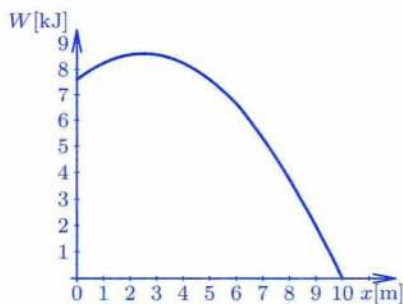
$$W_{\text{celotna}} = W_p + W_k + W_{pr} = 0$$

in

$$W_k = -W_p - W_{pr} = mg(l_0 + x) - \frac{1}{2}kx^2.$$

| raztezek $x$<br>[m] | $W_p = -mg(l_0 + x)$<br>[kJ] | $W_{pr} = (1/2)kx^2$<br>[kJ] | $W_k$<br>[kJ] |
|---------------------|------------------------------|------------------------------|---------------|
| 0                   | -7,6                         | 0                            | 7,6           |
| 2                   | -9,2                         | 0,64                         | 8,56          |
| 4                   | -10,8                        | 2,56                         | 8,24          |
| 6                   | -12,4                        | 5,76                         | 6,64          |
| 8                   | -14,0                        | 10,24                        | 3,76          |
| 10                  | -15,6                        | 16,00                        | 0             |

Skakalec doseže globino 19 m (19,3 m); ko se ustavi, je  $W_k = 0$ , raztezek vrvi pa je 10 m (9,8 m).



4. Iz grafa odčitamo, da se je voda v času opazovanja segrela za  $60^{\circ}\text{C}$ . V učbeniku preberemo, da je zato, da segrejemo 1 kg vode za 1 stopinjo, potrebno 4,2 kJ toplote.

a) Električno delo, porabljeno za gretje vode, je

$$A_1 = m c \Delta T = 1 \text{ kg} \cdot 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot 60 \text{ K} = 252 \text{ kJ}.$$

b) Grelec je v tem času oddal električno delo

$$A_2 = UIt = 220\text{V} \cdot 4\text{A} \cdot 480 \text{ s} = 422,4 \text{ kJ}.$$

Ker se je le 252 kJ porabilo za gretje vode, se je z ostalim električnim delom  $422,4 \text{ kJ} - 252 \text{ kJ} = 170,4 \text{ kJ}$  ogrela okolica.

5. (a) 9 V (b) 9 V (c) 0 V (d) 4,5 V

Nada Razpet

## IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE –

### Rešitve s str. 120

**I/1.** Če je  $x \leq 0$ , iz prve enačbe sledi  $y = 5$ , nato pa iz druge  $x = 10$ , kar je protislovje. Zato je  $x > 0$  in prvo enačbo zapišemo:  $2x + y = 5$ . Če je  $y \geq 0$ , druga enačba prinese  $x = 10$ , nato pa iz prve izračunamo  $y = -15$ , kar ni mogoče. Torej je  $y < 0$  in drugo enačbo zapišemo  $x - 2y = 10$ . Sedaj ni težko priti do rešitev  $x = 4$  in  $y = -3$ .

**I/2.** Enačbo najprej preoblikujemo

$$1000 = (100x + 10y + z)(x + y + z).$$

Ker so  $x$ ,  $y$  in  $z$  števke, je  $0 \leq x + y + z \leq 27$ . Ker je število  $x + y + z$  delitelj števila 1000, je lahko le  $x + y + z \in \{2, 4, 5, 8, 10, 20, 25\}$ . Ker je  $\frac{1}{2} = 0.5$ ,  $\frac{1}{4} = 0.25$ ,  $\frac{1}{5} = 0.2$ ,  $\frac{1}{8} = 0.125$ ,  $\frac{1}{10} = 0.1$ ,  $\frac{1}{20} = 0.05$  in  $\frac{1}{25} = 0.04$ , je vsota  $x + y + z$  enaka 8, kar nam da edino rešitev  $x = 1$ ,  $y = 2$  in  $z = 5$ .

**I/3.** Oglejmo si ravnino, ki vsebuje os stožca in dve nasprotni oglišči spodnje ploskve kocke. Presek kocke in stožca s to ravnino sestoji iz pravokotnika s stranicama  $x$  in  $x\sqrt{2}$  ter enakokrakega trikotnika z osnovnico 2 in višino 3, kjer je  $x$  dolžina stranice kocke. Iz podobnih trikotnikov dobimo  $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{3-x} = \frac{1}{3}$ , od koder izpeljemo  $x = \frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}-6}{7}$ .

**I/4.** Označimo z  $B$  iskano število. Potem  $B \mid a$ ,  $B \mid a + n + 2$  in  $B \mid a + 2n - 3$ . Torej  $B \mid n + 2$  in  $B \mid 2n - 3$ . Sedaj pa  $B \mid (2n - 3) - 2(n + 2)$  oz.  $B \mid 7$ . Ker je  $B > 1$  (saj ima Brane večjo hišno številko kot Andrej), je  $B = 7$ .

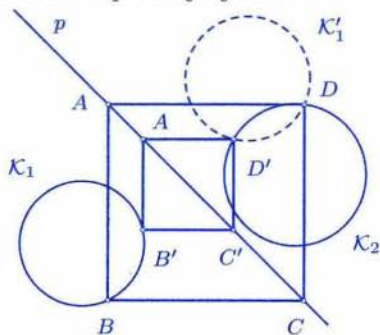
II/1. Recimo, da ima  $m^2$  vsoto števk 2000. Potem je

$$m^2 = 10^n c_n + \dots + 10c_1 + c_0 = (10^n - 1)c_n + \dots + (10 - 1)c_1 + 2000$$

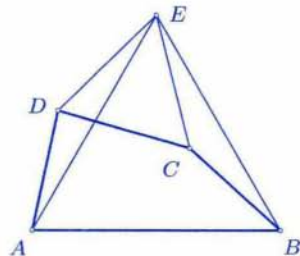
in  $m^2 - 2 = (10^n - 1)c_n + \dots + (10 - 1)c_1 + 1998$ . Ker je število na desni deljivo s 3, bi moralo biti tako tudi število  $m^2 - 2$ . Slednje pa ni možno, saj ima lahko popolni kvadrat ostanek le 0 ali 1 pri deljenju s 3.

II/2. Iskani kvadrat naj bo  $ABCD$ , kjer  $A$  in  $C$  ležita na premici  $p$ . Krožnico  $\mathcal{K}_1$  prezrcalimo čez  $p$  v  $\mathcal{K}'_1$ . Naj se krožnici  $\mathcal{K}'_1$  in  $\mathcal{K}_2$  sekata v točkah  $D$  in  $D'$ , ki se z zrcaljenjem čez  $p$  preslikata zaporedoma v  $B$  in  $B'$ . Kvadrata z diagonalama  $BD$  in  $B'D'$  sta rešitvi naloge.

Če se krožnici  $\mathcal{K}'_1$  in  $\mathcal{K}_2$  ne sekata, ni rešitve. Če se dotikata, je rešitev ena sama. Če krožnici sovpadata, je rešitev neskončno mnogo.



II/3. Ker je vsota notranjih kotov v štirikotniku  $ABCE$  enaka  $360^\circ$  in  $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA = 120^\circ = \sphericalangle CDE + \sphericalangle ECD$ , velja  $\sphericalangle ADC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle DCB + \sphericalangle ECD = 360^\circ$ . Zato je  $\sphericalangle ADE = 360^\circ - \sphericalangle DBC - \sphericalangle ECD = \sphericalangle BCE}$ . Ker je  $|DE| = |CE|$  in  $|AD| = |BC|$ , sta trikotnika  $AED$  in  $BEC$  skladna in  $|AE| = |BE|$ . Velja še  $\sphericalangle AEB = 60^\circ$ , saj je  $\sphericalangle DEC = 60^\circ$  in  $\sphericalangle DEA = \sphericalangle CEB}$ .



II/4. Po Dirichletovem principu ima vsaj ena država vsaj 41 predstavnikov, od katerih jih je 21 istega spola. Trdimo, da je med temi vsaj pet enako starih. Če to ne bi bilo res, bi bili v vsaki starostni skupini največ 4 ljudje. Tako bi v tej skupini enaindvajsetih imeli najmanj šest starostnih skupin. Če izberemo po enega predstavnika iz vsake, dobimo očitno protislovje z enim izmed pogojev naloge.

III/1. Uvedimo novo spremenljivko  $y = x + 2n$ . Enačba dobi obliko

$$(y - 1)(y - 2) \cdots (y - 2n) + (y + 1)(y + 2) \cdots (y + 2n) = 0. \quad (1)$$

Očitno je  $y \neq 0, 1, \dots, 2n$ , zato dobimo

$$\left| \frac{y+1}{y-1} \right| \cdots \left| \frac{y+2n}{y-2n} \right| = 1. \quad (2)$$

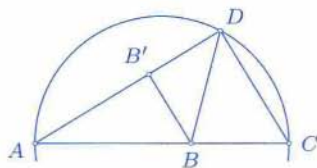
Recimo, da je neki pozitiven  $y$  rešitev enačbe (1). Potem za vsak  $k \in \{1, \dots, 2n\}$  velja  $\left| \frac{y+k}{y-k} \right| > 1$ , kar je v protislovju z (2). Če pa je  $y$  negativni koren enačbe (1), za vsak  $k \in \{1, \dots, 2n\}$  velja  $\left| \frac{y+k}{y-k} \right| < 1$ , kar je zopet v protislovju z (2). To pomeni, da dana enačba nima realnih rešitev.

### III/2. Označimo

$$p = \sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}} = \sqrt{25 + 2\sqrt{n}}.$$

Potem je  $n = \left(\frac{p^2 - 25}{2}\right)^2$  in  $p$  liho število, ki ni manjše od 5. Če je  $p \geq 9$ , je  $n > \frac{625}{4}$  in bi prvotni izraz ne bil realen. Ostaneta še možnosti  $p = 5$  in  $p = 7$ , ki po vrsti dasta  $n = 0$  in  $n = 144$ .

III/3. Označimo pravokotno projekcijo točke  $B$  na  $AD$  z  $B'$ . Potem je  $\text{tg} \angle ADB = \frac{|BB'|}{|B'D|}$  in  $\text{tg} \angle BAD = \frac{|BB'|}{|AB'|}$ . Vrednost izraza je tako enaka  $\frac{|AB'|}{|B'D|}$ , kar je zaradi podobnih (pravokotnih!) trikotnikov  $ABB'$  in  $ACD$  enako  $\frac{|AB|}{|BC|}$ .



III/4. Za  $i = 1, \dots, 4$  in  $j = 1, \dots, 7$  označimo z  $a_{ij}$  višino  $j$ -tega dijaka v  $i$ -ti vrsti v končni razvrstitvi. Zapišimo števila  $a_{ij}$  v preglednico s 4 vrstami in 7 stolpci. Po predpostavki naloge je razlika med maksimalnim in minimalnim elementom v vsaki vrstici kvečjemu  $d$ ; v našem primeru  $d = 15$  cm.

Dokažimo trditev s protislovjem. Naj bo razlika med maksimalnim in minimalnim elementom v vrstici  $i$  večja od  $d$ . Ker je  $d > 0$ , obstajata  $a_{ij}$  in  $a_{ik}$ , ki se razlikujeta za več kot  $d$ ; recimo  $a_{ij} > a_{ik}$ . Potem je

$$a_{1j} \geq a_{2j} \geq \dots \geq a_{ij} > a_{ik} \geq a_{i+1,k} \geq \dots \geq a_{m,k}$$

in po Dirichletovem principu se vsaj dva od zgornjih 5 elementov v prvotni razvrstitvi nahajata v isti vrstici, to sta  $a_{pj}$ ,  $p \leq i$ , in  $a_{qk}$ ,  $q \geq i$ . Dobimo  $a_{pj} - a_{qk} \geq a_{ij} - a_{ik} > d$ , kar je protislovje.

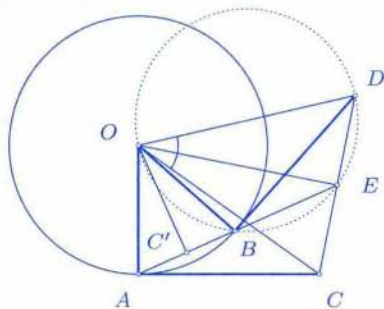
IV/1. Iz enakosti  $f(n) = f(f(f(n+2)+2)) = f(n+2)+2$  dobimo formulo  $f(n+2) = f(n) - 2$ . Velja še  $f(1) = f(f(0)) = 0$ . Trdimo, da mora biti  $f(n) = 1 - n$  za vsako celo število  $n$ . Trditev dokažemo z

indukcijo: za  $n = 0$  in  $n = 1$  trditev drži, sicer pa je za  $n \geq 0$   $f(n+2) = f(n) - 2 = 1 - n - 2 = 1 - (n+2)$ , za  $n \leq -1$  pa  $f(n-2) = f(n) + 2 = 1 - n + 2 = 1 - (n-2)$ . Zlahka se prepričamo, da funkcija  $f(n) = 1 - n$  ustreza pogojem naloge.

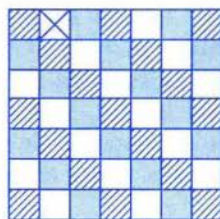
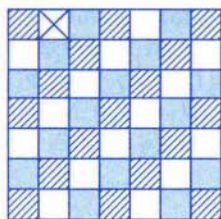
**IV/2.** Naj bo  $d$ ,  $d \neq 0$ , razlika (diferenca) tega aritmetičnega zaporedja. Recimo, da je poljubni člen tega zaporedja enak  $a^2$ . Poiščimo kasnejši člen, ki je spet popolni kvadrat. Tedaj velja  $a^2 + nd = b^2$ . Sledi  $n = \frac{b^2 - a^2}{d}$ . Sedaj pa vidimo, da lahko izberemo število  $b$  na neskončno mnogo načinov tako, da je število  $n$  celo. Vzamemo lahko npr.  $b = a + kd$ , kjer je  $k \in \mathbb{N}$ . Popolni kvadrat je tako  $(a + kd)^2$ .

**IV/3.** Naj bo  $\angle COD = \varphi$ . Označimo z  $E$  razpolovišče daljice  $CD$ . Ker je  $COD$  enakokraki trikotnik, je  $\angle COE = \varphi/2$ . Zaradi  $\angle DBO = \angle DEO = \frac{\pi}{2}$  je  $OBED$  tetivni štirikotnik, zato je  $\angle EBD = \frac{\varphi}{2}$ .

Iz konstrukcije sledi  $\angle AOB = \angle COD = \varphi$ . Po izreku o kotu med tetivo in tangento meri kot med tetivo  $AB$  in tangento  $BD$  v točki  $B$  ravno  $\frac{\varphi}{2}$ , kar pomeni, da so točke  $A$ ,  $B$  in  $E$  kolinearne.



**IV/4.** Domino  postavimo npr. na polje označeno z  in dokažimo, da preostanka tabele ni možno pokriti na zelen način. Trditev bomo dokazali s protislovjem. Recimo, da nam je to uspelo. Pobarvajmo preostalih 48 polj tabele s tremi barvami na dva načina. Pri prvem barvanju imamo 17 polj barve , 15 polj barve  in 16 polj barve . Ker vsaka domina  pokrije po eno polje vsake barve, mora domina  ležati tako, kot prikazuje leva skica.



Če pa tabelo pobarvamo tako, kot prikazuje desna skica, ugotovimo, da bi morala biti domina  drugače zasukana.

Matjaž Željko

# REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1999/2000 – s str. 122

Objavljamo rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 25. marca 2000. Besedila nalog smo objavili v letošnji drugi številki Preseka.

## Skupina A

1. Podatki:  $h_0 = 28$  cm,  $h_1 = 21$  cm,  $F_g = 3$  N,  $F_t = 13$  N.

Višina potopljenega dela proti celotni višini klade je v enakem razmerju kot specifična teža klade proti specifični teži vode, torej  $\sigma_k = \sigma_v h_1/h_0$ . Za prostornino klade dobimo

$$V_k = \frac{F_g}{\sigma_k} = \frac{h_0 F_g}{h_1 \sigma_v}.$$

Ko vso klado potopimo, je celotni vzgon vode na klado enak

$$F_v = \sigma_v V_k = \frac{h_0}{h_1} F_g = 4 \text{ N}.$$

Dodatna sila je torej  $F = F_v - F_g = 1$  N. Za toliko več pokaže tudi tehtnica, torej 14 N.

2. Podatki:  $l = 1$  m,  $F_0 = 100$  N,  $k = 400$  N/m,  $\alpha = 30^\circ$ .

a) Če naj deluje na vrvico sila  $F_0$ , mora biti razdalja med krajiščema loka manjša za  $\Delta l_0 = F_0/k = 0,25$  m glede na nenapeti lok. Torej je dolžina tetive pri nenapetem loku enaka  $l + \Delta l_0 = 1,25$  m.

b) Krajišči loka in sredina vrvice tvorijo enakostranični trikotnik s stranico  $a = \frac{1}{2}l = 0,5$  m. Razdalja med krajiščema se pri tem zmanjša še za  $\Delta l = l - a = l - \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}l$ . Sila, ki leži na zveznici krajišč, je enaka  $F = F_0 + k\Delta l = 300$  N. Ta sila je enaka komponenti sile vrvice v smeri zveznice krajišč,  $F = \frac{1}{2}F_v$ , torej je sila vrvice enaka

$$F_v = \frac{F}{\frac{1}{2}} = 2F = 2F_0 + kl = 600 \text{ N}.$$

3.a Podatki:  $F_g = 100 \text{ N}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

a) Silo v vrvi najlažje določimo tako, da zapišemo pogoj za ravnotežje navorov za os v krajišču ob steni:

$$F_v l = F_g \frac{l}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad F_v = \frac{\sqrt{3}}{4} F_g = 43 \text{ N}.$$

b) Pravokotno komponento sile vogala najhitreje dobimo iz ravnotežja navorov za os v težišču, saj k navoru ne prispevata niti teža niti vzdolžna komponenta sile podlage. Brez računanja hitro vidimo, da je ta komponenta enaka sili vrvice, torej  $F_\perp = 43 \text{ N}$ , in kaže v isti smeri kot sila vrvice. Vzdolžno komponento uravnovesi vzdolžna komponenta teže, ki je po velikosti enaka ravno polovici velikosti teže, torej  $F_\parallel = \frac{1}{2} F_g = 50 \text{ N}$ , in kaže v smeri proti drugemu krajišču palice.

3.b Podatki:  $v_0 = 5 \text{ m/s}$ ,  $v_1 = 10 \text{ m/s}$ , ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

Gibanje žoge v navpični smeri opišemo kot  $y_1 = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$ , gibanje padalca pa kot  $y_0 = -v_0 t$ , če postavimo izhodišče v točko srečanja. Poti izenačimo,  $y_1 = y_0$ , in dobimo enačbo za čas do naslednjega srečanja:

$$(v_1 + v_0)t = \frac{1}{2} g t^2, \quad t = \frac{2(v_1 + v_0)}{g} = 3 \text{ s}.$$

Padalec se v tem času spusti za  $\Delta y = v_0 t = 15 \text{ m}$ .

### Skupina B

1. Podatki:  $h = 30 \text{ m}$ ,  $\Phi_m = 10 \text{ kg/s}$ ,  $t = 2 \text{ s}$ , ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

K sili prispeva teža koruze, ki se v tem času nabere na dnu silosa, in sila, ki zaustavlja padanje koruze in jo zapišemo kot pri sili (vodnega) curka:

$$F = F_g + F_c = \Phi_m g t + \Phi_m v = \Phi_m (g t + \sqrt{2gh}) = 450 \text{ N}.$$

Višina koruze na dnu silosa je v tem času še zanemarljivo majhna, zato smemo za  $h$  vzeti kar začetno vrednost.

2. Podatki:  $m = 1400 \text{ kg}$ ,  $F = 50 \text{ kN}$ ,  $r = 120 \text{ m}$ ,  $v = 60 \text{ m/s}$ , ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

Vodoravna komponenta sile vrvi povzroča kroženje bremena po krožnici z radijem  $r + l \sin \alpha$ , navpična komponenta pa uravnovesi njegovo težo:

$$F \sin \alpha = m \omega^2 (r + l \sin \alpha), \quad F \cos \alpha = m g.$$

Iz druge enačbe izračunamo kot  $\alpha$ ,  $\alpha = 73,7^\circ$ . Kotna hitrost je enaka kotni hitrosti helikopterja  $\omega = v/r$ . Iz prve enačbe dobimo

$$l = r \left( \frac{Fr}{mv^2} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) = 18 \text{ m}.$$

Vrv mora biti krajša od 18 m.

3. Podatki:  $s = 10 \text{ m}$ ,  $k_1 = 0,2$ ,  $k_2 = 0,5$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

- a) Hitrost klade na dnu klanca najlažje izračunamo iz izreka o mehanski energiji. Delo trenja ( $F_{\text{tr}} = mgk \cos \alpha$ ) za prvi klanec zapišemo kot  $A = mg \cos \alpha (k_1 s_1 + k_2 s_2)$  in za drugi klanec kot  $A' = mg \cos \alpha (k_2 s_1 + k_1 s_2)$ . Če naj bosta končni hitrosti enaki, morata biti obe deli enaki, torej

$$k_1 s_1 + k_2 s_2 = k_2 s_1 + k_1 s_2 \quad \text{in dobimo} \quad s_1 = s_2 = \frac{1}{2} s.$$

Iskano razmerje je torej enako 1.

- b) Po klanecu se klada giblje s pospeškom  $a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$ ; na odseku s trenjem  $k_1$  je pospešek enak  $a_1 = 3,2 \text{ m/s}^2$ , na drugem odseku pa  $a_2 = 0,66 \text{ m/s}^2$ . Za prvi del poti na prvem klanecu porabi klada čas  $t_1 = \sqrt{2s_1/a_1} = \sqrt{s/a_1} = 1,77 \text{ s}$  in doseže hitrost  $v_1 = a_1 t_1 = 5,66 \text{ m/s}$ , na drugem klanecu dobimo  $t_2 = \sqrt{2s_1/a_2} = \sqrt{s/a_2} = 3,89 \text{ s}$  in  $v_2 = a_2 t_2 = 2,57 \text{ m/s}$ . Na drugem odseku prvega klanca velja za pot enačba

$$s_2 = \frac{1}{2} s = v_1 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

s smiselno rešitvijo

$$t'_1 = \frac{\sqrt{v_1^2 + a_2 s}}{a_2} - \frac{v_1}{a_2} = 0,84 \text{ s}.$$

Iz analogne enačbe ( $v_1 \rightarrow v_2$ ,  $a_2 \rightarrow a_1$ ) dobimo na drugem klanecu  $t'_2 = 1,14 \text{ s}$ . Čas potovanja na prvem klanecu je skupaj  $2,6 \text{ s}$  in na drugem  $5,0 \text{ s}$ . Prej prispe do dna klada na prvem klanecu, in sicer  $2,4 \text{ s}$  pred klado na drugem klanecu.

### Skupina C

1. Podatki:  $R_1 = 180 \Omega$ ,  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $U_1 = 5,19 \text{ V}$ ,  $I_2 = 46,7 \text{ mA}$ .

- a) Pri prvi vezavi velja  $U_1 = U_g - I_1 R_n$  in  $I_1 = U_1/R_1$ , pri drugi pa  $U_2 = U_g - I_2 R_n$ . Enačbi odštejemo in dobimo za notranji upor

izvira

$$R_n = \frac{U_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} = 160 \, \Omega$$

in iz prve  $U_g = U_1 + I_1 R_n = 9,8 \, \text{V}$ .

b) Ko sta oba upornika vezana vzporedno, teče skozi izvir tok

$$I = \frac{U_g}{R_n + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 49,2 \, \text{mA}.$$

Na drugem uporniku je padec napetosti  $U'_2 = U_g - I R_n = 1,93 \, \text{V}$   
in moč  $P_2 = U'^2_2 / R_2 = 74 \, \text{mW}$ .

2. Podatki:  $l = 2 \, \text{m}$ ,  $\lambda = 150 \, \text{W/mK}$ ,  $S_1 = 5 \, \text{cm}^2$ ,  $S_2 = 15 \, \text{cm}^2$ ,  
 $P = 2 \, \text{W}$ ,  $l_1 = \frac{1}{3}l$ ,  $\Delta l = 2 \, \text{cm}$ .

Radija na krajiščih sta  $r_1 = \sqrt{S_1/\pi}$  in  $r_2 = \sqrt{S_2/\pi}$ , na tretjini pa  
 $r = r_1 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1) = 1,57 \, \text{cm}$ . Presek palice na tem mestu je  $S = \pi r^2$ .  
Za toplotni tok med termometroma uporabimo kar zvezo, ki velja pri  
konstantnem preseku, saj se na tako kratkem delu palice presek le  
malo spreminja. Razliko temperatur med točkama, razmaknjenima  
za  $\Delta l$ , potem lahko zapišemo kot

$$\Delta T = \frac{P \Delta l}{S \lambda} = 0,34 \, \text{K}.$$

3. Podatki:  $h_0 = 10 \, \text{cm}$ ,  $\sigma = 2 \cdot 10^{-5} \, \text{As/m}^2$ ,  $p_0 = 1 \, \text{bar}$ ,  $E_0 =$   
 $= 30 \, \text{kV/cm}$ .

a) Električno privlačno silo med ploščama zapišemo kot

$$F = eE = \frac{e^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0}.$$

(Pri tem je  $E$  jakost električnega polja ene plošče in je enaka  
polovici električne poljske jakosti v kondenzatorju.) Zaradi ele-  
ktrične privlačne sile se poveča tlak zraka med ploščama  $p =$   
 $= p_0 + F/S = p_0 + \sigma^2/2\epsilon_0$ . Iz Boylevega zakona  $p_0 h_0 S = p h S$   
dobimo za novo višino

$$h = \frac{h_0 p_0}{p} = \frac{h_0}{1 + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0 p_0}}$$

in za razliko višin

$$\Delta h = h_0 - h = h_0 \frac{\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 p_0}}{1 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 p_0}} \approx h_0 \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0 p_0} = 0,022 \text{ mm} = 22 \text{ } \mu\text{m}.$$

- b) Električna poljska jakost v kondenzatorju je enaka  $E = e/\varepsilon_0 S = \sigma/\varepsilon_0 = 22,5 \text{ kV/cm}$ , kar je manj od  $E_0$ , in zato še ne pride do preboja.

### Skupina D

1. Podatki:  $T_0 = 293 \text{ K}$ ,  $p_0 = 101 \text{ kPa}$ ,  $S = 100 \text{ cm}^2$ ,  $h_0 = 50 \text{ cm}$ ,  $m = 2,5 \text{ kg}$ ,  $\kappa = 1,4$ .

Tlak v posodi se poveča na  $p = p_0 + mg/S = 103,5 \text{ kPa}$ .

- a) Sprememba je adiabatna in velja

$$p_0(Sh_0)^\kappa = p(Sh_1)^\kappa, \quad h_1 = h_0 \left(1 + \frac{mg}{Sp_0}\right)^{-\frac{1}{\kappa}},$$

$$\Delta h = h_0 - h_1 = 9 \text{ mm}.$$

- b) Plin se ohlaja, dokler temperatura ne pade na začetno vrednost. Ker se glede na začetno stanje temperatura ni spremenila, lahko začetno in končno stanje povežemo z Boylovim zakonom  $p_0 Sh_0 = p Sh_2$  in dobimo  $h_2 = h_0 p_0 / p$ . Plošča se premakne še za  $h_1 - h_2 = 3 \text{ mm}$ .

- c) Najvišja temperatura je na koncu adiabatnega stiskanja. Velja

$$T_1^\kappa p^{1-\kappa} = T_0^\kappa p_0^{1-\kappa}, \quad T_1 = T_0 \left(1 + \frac{mg}{Sp_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 295 \text{ K} = 22^\circ\text{C}.$$

2. Podatki:  $s = 60 \text{ cm}$ ,  $l = 240 \text{ cm}$ ,  $m = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg}$ ,  $k = 1,3 \cdot 10^7 \text{ N/m}$ . Žlebički tresejo avto s frekvenco  $\nu = v/s$ , če je  $v$  njegova hitrost. Avto prične poskakovati, ko je frekvenca tresenja enaka lastni frekvenci vzmetnega nihala, ki ga predstavlja avto na amortizerjih. Ker je medosna razdalja enaka celemu večkratniku razdalje med žlebički, vsa štiri kolesa hkrati poskakujejo in h koeficientu vzmeti prispevajo enako vsi štirje amortizerji. Lastno frekvenco nihanja avta zapišemo

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k}{m}} = 31 \text{ s}^{-1}$$

in dobimo  $v = sv = 66$  km/h. Možne so tudi rešitve pri polovični, tretjinski, ... hitrosti, ko avto med sosednjima žlebičkoma dvakrat, trikrat, ... zaniha, vendar je tedaj pojav zaradi dušenja manj izrazit.

3. Podatki:  $l = 2$  m,  $\zeta = 1 \cdot 10^{-2}$  W/mK,  $S_1 = 5$  cm<sup>2</sup>,  $S_2 = 15$  cm<sup>2</sup>,  $I = 5$  A,  $l_1 = \frac{1}{3}l$ ,  $\Delta l = 2$  cm.

- a) Radija na krajiščih sta  $r_1 = \sqrt{S_1/\pi}$  in  $r_2 = \sqrt{S_2/\pi}$ , na tretjini pa  $r = r_1 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1) = 1,57$  cm. Presek palice na tem mestu je  $S = \pi r^2$ . Za upor odseka palice med priključkoma uporabimo zvezo, ki velja pri konstantnem preseku, saj se na tako kratkem odseku presek le malo spreminja. Za napetost med točkama, razmaknjenima za  $\Delta l$ , dobimo

$$U = \frac{I \Delta l \zeta}{\pi r^2} = 1,3 \text{ V}.$$

- b) Palico razdelimo na dva odseka z dolžinama  $x$  in  $l - x$ . Radij palice pri  $x$  označimo z  $r(x)$ . Padec napetosti na odseku z dolžino  $x$  zapišemo kot  $U_1 = I \zeta x / \pi r_1 r(x)$  in na odseku z dolžino  $l - x$  kot  $U_2 = I \zeta (l - x) / \pi r_2 r(x)$ . Če naj bo  $U_1$  polovica skupnega padca,  $U_1 + U_2$ , morata biti padca enaka, torej

$$\frac{I \zeta x}{\pi r_1 r(x)} = \frac{I \zeta (l - x)}{\pi r_2 r(x)}, \quad \frac{x}{r_1} = \frac{l - x}{r_2}, \quad \frac{x}{l - x} = \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

in dobimo

$$x = \frac{l}{1 + \sqrt{3}} = 0,73 \text{ m}.$$

Bojan Golli

## 21. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST (pomladanski krog) – Rešitve s str. 126 – 1. del<sup>1</sup>

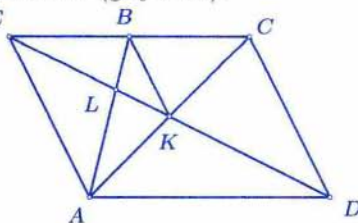
### Prva skupina (prvi del)

1. Naj bosta  $n$  in  $n + 1$  dve zaporedni naravni števili ter  $2k$  in  $2k + 2$  dve zaporedni sodi naravni števili, tako da velja  $n(n + 1) = 2k(2k + 2)$ . Od tod dobimo  $4n^2 + 4n = 16k^2 + 16k$  oziroma  $(2n + 1)^2 + 3 = (4k + 2)^2$ . Edini dve naravni števili, katerih kvadrata se razlikujeta za 3, sta števili 1 in 2. Ker  $2n + 1 \neq 2$ , je  $2n + 1 = 1$  in  $n = 0$ , zato je odgovor nikalen.

<sup>1</sup> Rešitve drugega dela bomo objavili v naslednji številki.

2. Dopolnimo trapez do paralelograma  $ACDE$  (glej sliko).

Ker se diagonali paralelograma razpolavljata, je točka  $K$  tudi razpolovišče daljice  $DE$ . Ker je  $B$  razpolovišče stranice  $EC$ , je  $L$  težišče trikotnika  $ACE$ , od koder sledi, da je  $DK = KE = 3KL$  in  $AL = 2BL$ . Označimo ploščino večkotnika  $\mathcal{P}$  s  $P_{\mathcal{P}}$  in



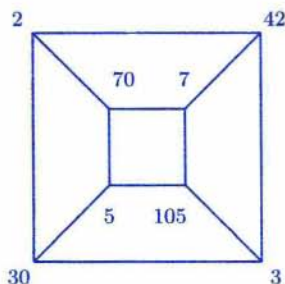
naj bo  $P_{BLK} = x$ . Tedaj je  $P_{ALK} = 2x$  (dvojna osnovnica, ista višina) in  $P_{DCK} = P_{ADK} = 6x$  (ista osnovnica  $AK$ , trojna višina). Nadalje je  $P_{BCK} = 3x$ , od koder sledi  $P_{ABCD} = 18x$  in zato  $x = \frac{1}{18}$ . Od tod izračunamo

$$P_{BCKL} = 4x = \frac{2}{9}.$$

3. (a) Denimo, da je  $n$  večkratnik števila 3. Ciklično pobarvamo oglišča spodnje osnovne ploskve z rdečo, rumeno in modro barvo, zatem pa vsako izmed oglišč gornje ploskve pobarvamo z barvo, s kakršno je pobarvano oglišče pod njim. Ni se težko prepričati, da tako barvanje zadošča danim zahtevam.

(b) Naj bodo izbrane tri barve: znova rdeča, rumena in modra. Denimo, da je mogoče oglišča pobarvati v skladu z opisanimi zahtevami in je število rdeče pobarvanih oglišč enako  $r$ . Vsako rdeče oglišče je sosednje z tremi različnimi oglišči. Torej ima natančno  $3r$  oglišč rdečega soseda, saj nobeno oglišče ni sosednje z dvema rdečima ogliščema. Ker je vsako oglišče sosed nekega rdečega soseda, velja  $3r = 2n$ , od koder sledi, da je  $n$  deljivo s 3.

4. Obstaja neskončno rešitev danega problema! V štiri paroma nesosednje vogale kocke postavimo različna praštevila. V vsakega izmed preostalih vogalov postavimo produkt praštevil iz sosednjih treh vogalov. Ni se težko prepričati, da opisani postopek pelje k rešitvi. Eno možnost prikazuje skica.



### Druga skupina (prvi del)

1. Naj bo  $ABCD$  dani štirikotnik, točka  $P$  pa presečišče njegovih diagonal. Za trikotnik  $\mathcal{T}$  označimo s  $P_{\mathcal{T}}$  njegovo ploščino. Pri predpostavkah naloge velja

$$P_{PAB} + P_{PCD} = P_{PAD} + P_{PCB}. \quad (1)$$

Naj bo  $PC = uPA$ ,  $PD = vPB$  ter  $P_{PAB} = 1$  (sicer štirikotnik primerno raztegemo). Tedaj je

$$P_{PCB} = \frac{P_{PCB}}{P_{PAB}} = \frac{|PC|}{|PA|} = u$$

in podobno  $P_{PAD} = v$  ter  $P_{PCD} = uv$ . Iz zveze (1) dobimo

$$0 = 1 + uv - u - v = (1 - u)(1 - v),$$

od koder sledi, da je bodisi  $u = 1$  ( $P$  razpolovišče  $AC$ ) bodisi  $v = 1$  ( $P$  razpolovišče  $BD$ ).

2. Ko manjše kockice zložimo v večjo, je na stranskih ploskvah večje kocke vidna natančno po ena stranska ploskva iz para enako označenih stranskih ploskvic vsake izmed kockic. To pomeni, da v skupno vsoto pik na stranskih ploskvah vsaka kockica prispeva po 6 pik, zato je vsota vseh pik na stranskih ploskvah večje kocke enaka 48. Ker šest zaporednih števil vsebuje natančno tri liha števila, je njihova vsota liho število, torej različno od 48, zato na stranskih ploskvah ne moremo dobiti šest zaporednih števil.
3. Uporabimo indukcijo na  $n$ . Za  $n = 1$  sta obe strani enaki 1 in neenačba velja. Denimo, da neenačba velja za neki  $n \geq 1$ . Potem velja

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k + (n+1)^k \leq \frac{n^{2k} - (n-1)^k}{n^k - (n-1)^k} + (n+1)^k.$$

Da dokaz zaključimo, moramo pokazati, da je desna stran gornje neenačbe manjša od  $\frac{(n+1)^{2k} - n^k}{(n+1)^k - n^k}$ . Če izraza odštejemo, za števec

ustreznega ulomka dobimo

$$\begin{aligned}
 & ((n+1)^{2k} - n^k)(n^k - (n-1)^k) - (n^{2k} - (n-1)^k)((n+1)^k - n^k) - \\
 & - (n+1)^k((n+1)^k - n^k)(n^k - (n-1)^k) = \\
 & = n^k(n+1)^{2k} - n^{2k} - (n+1)^{2k}(n-1)^k + n^k(n-1)^k - n^{2k}(n+1)^k + \\
 & + (n-1)^k(n+1)^k + n^{3k} - n^k(n-1)^k - n^k(n+1)^{2k} + n^{2k}(n+1)^k + \\
 & + (n-1)^k - (n+1)^{2k} - n^k(n+1)^k(n-1)^k = \\
 & = n^{3k} - n^{2k} - n^k(n+1)^k(n-1)^k + (n+1)^k(n-1)^k = \\
 & = (n^k - 1)(n^{2k} - (n^2 - 1)^k) \geq 0
 \end{aligned}$$

4. (a) Definirajmo  $a_{10n+1} = (0.1)^{n+1} - 9$  za  $n \in \mathbb{N}$ , ostali členi zaporedja pa naj bodo enaki 1. Tedaj je v vsakem naboru desetih zaporednih členov natanko eden negativen in večji od  $-9$ , ostali pa so enaki 1, torej je vsota števil takega nabora pozitivna. Ker je vsota prvih  $10n$  členov enaka  $0.1 + (0.1)^2 + \dots + (0.1)^n < 1$  in  $a_{10n+1} < -8$ , je vsota prvih  $10n+1$  členov negativna. Zaporedje  $a_k$  torej ustreza zahtevam naloge.
- (b) Takega zaporedja ni. Ker je vsota členov od  $(10n+2)$ -gega člena do  $(10n+11)$ -ega člena pozitivno celo število, je večje ali enako 1 pri poljubnem  $n$ . Če hočemo, da je vsota prvih  $10n+1$  členov negativna, od tod sledi, da je  $a_1 \leq -n$  za vsak  $n$ , kar seveda ni mogoče.

*Gregor Cigler*

#### PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
28. letnik, šolsko leto 2000/2001, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosen (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2000/2001 je za posamezne naročnike **2.400 SIT**, za skupinska naročila šol **2.000 SIT**, posamezna številka **480 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1441

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

**Kadarkoli in kjerkoli na svetu** je vzrastle plodna civilizacija, vedno so njene dosežke v tehniki, znanosti ali umetnosti spremljala tisa stovara in milijardi ljudi. Splošno je znano, da so preproste računske operacije, z balo polne že prvih milijard let, bile politične za primitivnih ljudstev, z nastankom pisave pa je matematika zapostavljala uradnike in knjigovodje prvih držav. Vladaревim astronomom je omogočala sestavljanje koledarja in napovedovanje za poljedelstvo zelo pomembnih deževnih dob, jih spremljala pri predlovanju nebežnih teles in pri vojni. Vse to je bilo potrebno, da so nastajali ob obdobjih naravnih katastrof.

**Mogočne starodavne stavbe** v Egiptu, Perziji, Grčiji in Rimu. Ameriki odzvenijo znanje svoje dobi, podobno kot v antiki, kar pa se napredek matematičnega razmišljanja vedno kaže tudi v drugih vrstah umetnosti. Filozofske probleme si najprej zastavljajo tako antični dramatik kot matematiki. V renesansi so bili slikarji pogosto tudi matematiki in obratno, odkrivanje perspektive pa je sodobovalo z napredkom umetnosti. Če matematični genij ni bil, ni bil umetnik. V 19. stoletju so se matematični geniji in globoko izraženo razumevanje sveta, razumevanjem časa pred sabo vsilili v zgodovino tudi veliki glasbeniki. V 20. stoletju je abstraktna matematika dozorovala skupaj z abstraktno glasbo in slikarstvom.

**Že od antične Grčije dalje** matematika ni pomenila več le praktično uporabnega računanja. Veliki grški misleci so ob vprašanje "Kako?" postavili tudi vprašanje "Zakaj?", ki se jim je zdelo za pomembnejše. Njihova podpora po logični sodbi ni bila dovolj in so se v 3. stoletju razcvet. Odšli so se matematiki ukvarjali tudi s čisto abstraktnimi problemi, zgolj zaradi njihove lepote in zanimivosti in ne le iz praktične potrebe. Nizkokrat pa se je tako nastala teorija sčasoma izkazala za izjemno uporabno. Imaginarna števila, ki so bila le nenavadna izmišljotina v 16. stoletju, so postala s teorijo kompleksnih števil v 19. stoletju nepogrešljiva priroj. Dve teoriji je domelja matematikov razvenatelo iskanje pravih, čeprav so zares praktično uporabo dobila šele v današnji dobi pri šifriranju elektronskih informacij. Šele potem, ko so ustrezna abstraktna orodja pripravili matematiki, so se lahko razvile tudi nove fizikalne teorije. Kot najprej Einsteinova teorija relativnosti. Mnoge probleme v zvezi s kvantno mehaniko, pa so matematično rešili šele po drugi svetovni vojni, pred četrtem prvih elektronskih računalnikov.



**Dandanes uporabljamo** matematične dosežke skoraj v vsakem trenutku, ne da ti se tega sploh zavedal. Ko stojimo na vrhu močnega zgradbe, v kateri je vse, kar vidimo, rezultat matematičnih izračunov in planiranja, gradnji zagotavlja varnost. Ko poslušamo glasbo s CD pločke, uporabljamo prenosni telefon, osebi računalnik, plačujemo z bančno kartico ali pa ko nas zdravnik pregleduje z ultrazvokom, tedaj v matematičnih operacijah milijone matematičnih operacij v delcu sekunde. Razvoj lastne tehnologije brez prispevka matematikov ne bi bil mogoč. Še vedno raziskujemo, kako lahko matematično izračunamo obvesti celotna naša, matematičnega znanja.

**Sodobna matematika** pa ima z vsakdanjim računstvom le še malo zveze. V 20. stoletju so se izoblikovale številne matematične discipline, ki so dostopne le še ozkemu krogu strokovnjakov. Čeprav so zrasle iz klasičnih in uporabnih teorij, so nekateri postale povsem abstraktne, kot na primer topologija, algebra ali funkcionalna analiza. Nekateri druge, nismo verjetno razumeli, kajta grafov in množic, in celo množice, ki so se zdaj izoblikovale iz razpravi z logičnimi problemi, čeprav so zaradi abstraktnega jezika matematikom največkrat nerazumljive. Hitrost razvoja matematike pa je postala tako velika, da lahko le še redkodo sposti spremlja napredek posamezne vede, kaj šele, da bi kot ves matematično osebno obvladal vse matematično svojega časa, zavrnil pa se ukvarja s tem, kaj je matematika in kaj potreba po povzemanju seino daje današnji matematiki tudi poseben čar. Za napredek morajo raziskovalci z vsega sveta svoje znanje povezati v ogromen skupen mozak, v katerega pa lahko vsakdo prispeva svoj kamenček. Tudi mi!



P proti NP

Goldbachova domneva

Hodgeova domneva

Collatzov problem  $3n+1$

NEREŠENI  
PROBLEMI  
MATEMATIKE

Vprašanje  
praševilskih parov

Birch in Swinerton-  
Dyerjeva domneva

Riemannova hipoteza

Obstoja in gladkost

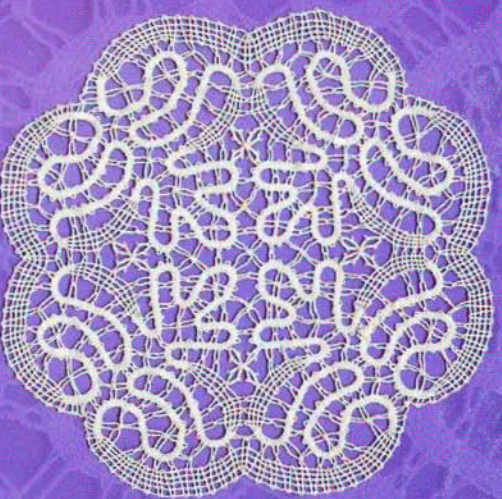
Navier-Stokesove funkcije

Ali obstaja liho  
popolno število?

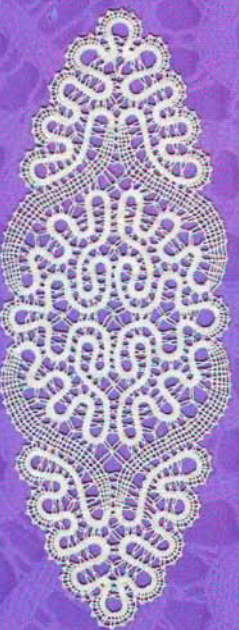
2000

SVETOVNO LETO MATEMATIKE

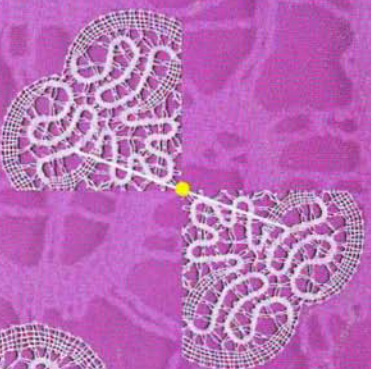
ilustrirana čipka ...



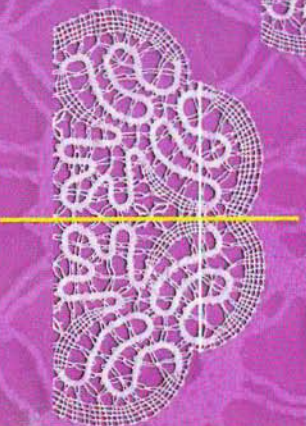
... izvir za matematiko



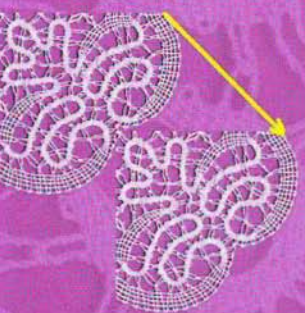
zrcaljenje čez točko



zrcaljenje  
čez premico



ozporedni premiki



zasink

