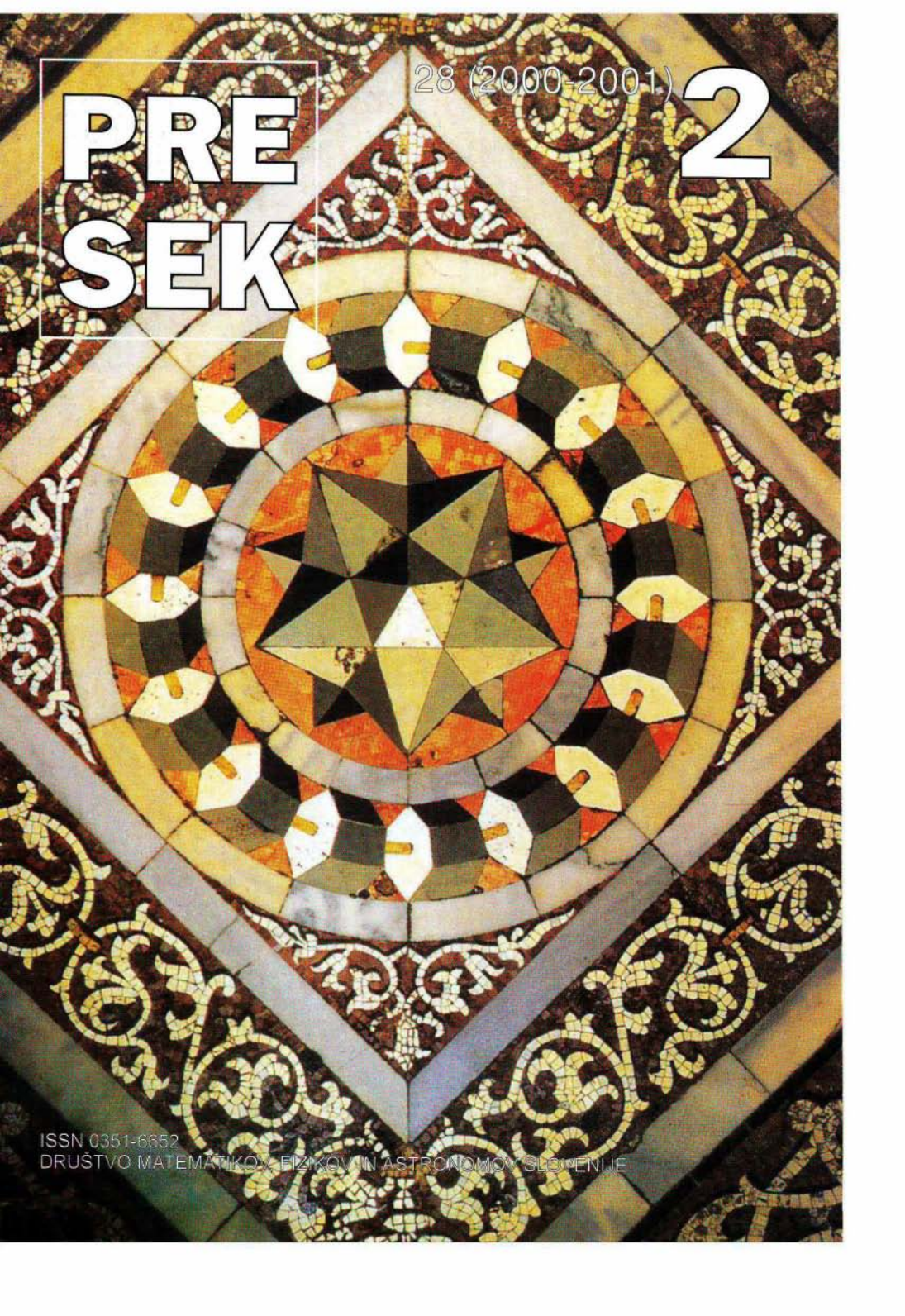




28 (2000-2001)

# PRE SEK

# 2

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



## GOLDBACHOVA DOMNEVA

fabrum, nist besteben, ob nimen aber schon nachfontenleset,  
 \* man dinst series breiter numeros unico modo in duo quadrata  
 divisibiles gabz auf solche Weise will ich auf eine conjecture  
 hazardieren: Daß jede Zahl welche aus zweyen numeros primis  
 zusammengesetzt ist ein aggregatum so vieler numerorum  
 primorum sey als man will: In unitatem mit sechz quadratend)  
 hiß auf die convergenciam omnium unitatum\* zinn symponal

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \quad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \quad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \quad \text{etc}$$

Hiñ auf folgen ein paar observationes so demonstrirats werden.  
 Von Pönnan:

Si  $v$ . sit functio ipsius  $x$ . eiusmodi ut facta  $v = c$ . numero cui-  
 cuque, determinari possit  $x$  per  $c$ . et reliquas constantes in functi-  
 one expressas, poterit etiam determinari valor ipsius  $x$ . in ac-  
 quatione  $v^{x+1} = (2v+1)(v+1)^{x-1}$  |  $\frac{v^{x+1} - (v+1)(v+1)^{x-1}}{v^{x+1} - (v+1)(v+1)^{x-1}}$  dicitur  $v-v-1$

Si incipiatur curva cuius abscissa sit  $x$ . applicata vero sit  
 summa seriei  $\frac{x^n}{n \cdot 2^n}$  posita  $x$ . pro exponente terminorum, hoc est,

$$\text{applicata} = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 2^4} + \text{etc. dico, si fuerit}$$

$$\text{abscissa} = 1. \text{ applicatum fore} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \text{ hoc habet applicata} = 4$$

$$2 \quad \dots \dots \dots \frac{1}{2}.$$

$$3 \quad \dots \dots \dots \frac{1}{2}.$$

$$4 \text{ vel major} \quad \dots \dots \dots \text{infinitum.}$$

Jes. professa sunt aliter asseveratissimè, Beyseßung  
 Linnæi Beyseßungsbefundum angabir bey Linnæo  
 Moscau 7. Jun. st. r. 1742. J. Goldbach.

Del Goldbachovega pisma Eulerju iz leta 1742, v katerem je Goldbach ob robu zapisal domnevo, da lahko vsako od 2 večje naravno število zapišemo kot vsoto treh praštevil (Goldbach je tudi število 1 štel k praštevilom). Domneva še do danes ni niti dokazana niti ovržena.

# PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
28. letnik, leto 2000/2001, številka 2, strani 65–128

## VSEBINA

|                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>MATEMATIKA</b>                                 | Zvezdni poliedri (Vilko Domajnko)..... 68-73                                                                                                                                                                                                    |
|                                                   | Male skrivnosti enakostraničnega trikotnika<br>(Marija Vencelj)..... 82-85                                                                                                                                                                      |
|                                                   | Hipokratove lune (Milan Hladnik) ..... 98-104                                                                                                                                                                                                   |
| <b>FIZIKA</b>                                     | Luminescenca (Zoran Arsov)..... 74-80                                                                                                                                                                                                           |
|                                                   | Plavanje z valovi (Andrej Likar) ..... 92-95                                                                                                                                                                                                    |
| <b>ASTRONOMIJA</b>                                | Mena (Marijan Prosén)..... 86-90                                                                                                                                                                                                                |
| <b>RAČUNALNIŠTVO</b>                              | Trdnjave na šahovnici (Martin Juvan)..... 81                                                                                                                                                                                                    |
|                                                   | Grafična podpora (Martin Juvan)..... 91                                                                                                                                                                                                         |
| <b>NOVICE</b>                                     | Milijon dolarjev za dokaz Goldbachove domneve<br>(Primož Potočnik) ..... 106-107, II                                                                                                                                                            |
| <b>NALOGE</b>                                     | Mala številka križanka (Urška Demšar)..... 66                                                                                                                                                                                                   |
|                                                   | Trgovska (Marija Vencelj) ..... 66                                                                                                                                                                                                              |
|                                                   | Vrstni red tekmovalcev (Dragoljub M. Milošević)..... 67                                                                                                                                                                                         |
|                                                   | Dve za podmladek (Dragoljub M. Milošević) ..... 73                                                                                                                                                                                              |
|                                                   | Vedno velja (Dušan Murovec)..... 80                                                                                                                                                                                                             |
|                                                   | Iz daljice trikotnik (Marija Vencelj) ..... 81                                                                                                                                                                                                  |
|                                                   | Dokaži neenakost (Marko Razpet) ..... 91                                                                                                                                                                                                        |
| <b>REŠITVE NALOG</b>                              | Kje vidimo več, na Zemlji ali na Luni? – s str. 28<br>(Marijan Prosén)..... 105                                                                                                                                                                 |
|                                                   | Matematična križanka – Pitagorov izrek – s str. 3<br>(Dragoljub M. Milošević)..... 105                                                                                                                                                          |
|                                                   | Šahovski konj na poljih kocke – s str. 2 (Marija Vencelj)..... 108                                                                                                                                                                              |
|                                                   | Labirinti na poliedrih – s str. 4 (Izidor Hafner)..... 108-109                                                                                                                                                                                  |
|                                                   | Križanka “Vrste ugank” – s str. 32 (Marko Bokalič) ..... 109                                                                                                                                                                                    |
| <b>ZANIMIVOSTI,<br/>RAZVEDRILO<br/>TEKMOVANJA</b> | Relativnost (Andrej Likar)..... 67                                                                                                                                                                                                              |
|                                                   | Križanka “Estetsko delilno razmerje” (Marko Bokalič)..... 96-97                                                                                                                                                                                 |
|                                                   | 35. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje<br>(Aleksander Potočnik) ..... 110-114                                                                                                                                                      |
|                                                   | 20. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce –<br>popravek poročila iz 1. številke (Nada Razpet) ..... 114                                                                                                                                  |
|                                                   | 20. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce<br>(Nada Razpet)..... 115-119                                                                                                                                                                 |
|                                                   | Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce<br>(Matjaž Željko) ..... 120-121                                                                                                                                                               |
|                                                   | Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev<br>Slovenije v šolskem letu 1999/2000 (Ciril Dominko).... 122-125                                                                                                                      |
|                                                   | 21. mednarodno matematično tekmovanje mest –<br>Naloge pomladanskega kroga (Gregor Cigler)..... 126-128                                                                                                                                         |
| <b>NA OVITKU</b>                                  | Mozaična podoba malega zvezdnega dodekaedra na tleh bazilike<br>Sv. Marka v Benetkah (okrog leta 1420), ki jo pripisujemo slikarju<br>Paolu Uccellu. Glej tudi članek Zvezdni poliedri na str. 68..... I                                        |
|                                                   | Bioluminescenca pri globokomorskih organizmih. Slike k članku<br>Luminescenca na str. 74 (© Steven Haddock, več slik lahko najdete<br>na naslovu <a href="http://lifesci.ucsb.edu/~biolum/">http://lifesci.ucsb.edu/~biolum/</a> )..... III, IV |

## MALA ŠTEVILSKA KRIŽANKA

Posamezne rešitve so naravna števila. Odebeljene črte nakazujejo presledek med dvema številoma.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 |   |   |   |
| 6 |   |   | 7 |
| 8 |   | 9 |   |

### Vodoravno:

1. Razlika števil pod 7 navpično in 6 navpično.
3. Praštevilo.
5. Število s samimi enakimi števki.
6. Deseta potenca.
8. Število je deljivo s 6.
9. Večkratnik števila 6 navpično.

### Navpično:

1. Kub.
2. Prva in zadnja številka števila sta enaki.
3. Produkt praštevil pod 3 vodoravno in 4 navpično.
4. Največje dvomestno praštevilo.
6. Razlika števk je enaka prvi številki števila pod 3 vodoravno.
7. Števki števila sta sodi.

*Urška Demšar*

## TRGOVSKA

V Newtonovi knjigi Splošna aritmetika iz leta 1707 najdemo tole nalogo:

Trgovec je vsako leto za tretjino povečal svoje premoženje, zmanjšano za 100 funtov, ki jih je porabil za svojo družino. Po treh letih je ugotovil, da se je njegovo začetno premoženje podvojilo.

Koliko je bilo njegovo premoženje vredno na začetku?

*Marija Vencelj*



## RELATIVNOST

1. Mark Twain se je spominjal svoje mladosti: "Ko sem bil star 14 let, je bil moj oče tako neumen, da sem ga komaj prenašal. Ko pa sem bil v 21. letu, sem bil presenečen, koliko se je oče med tem naučil."
2. Petletnik pride v ameriški vrtec s Švedske. Ko ga vprašajo, kako je v vrtcu, potoži, da je bolj sam, ker nihče ne zna govoriti švedsko. Ko mu zastavijo enako vprašanje po dveh mesecih, je navdušen: "Sedaj pa vsi govorijo švedsko!"
3. Bohr in Einstein tečeta pred medvedom, ki ju dohiteva. Bohr predlaga: "Albert, vdajva se, medved je hitrejši kot midva." Einstein pa: "Prav vseeno je, če je medved hitrejši od naju. Pomembno je le, da sem jaz hitrejši kot ti!"
4. Radio opozarja voznike: "Pozor, opazili smo avto, ki vozi po napačnem voznem pasu!" Radio posluša tudi prekrškar, ki vzklikne: "Kaj eden, na tisoče!"
5. "Gospod Einstein, preprosto povejte, prosim, kaj pomeni beseda relativno!" "Preprosto," pravi fizik. "Trije lasje na glavi je relativno malo, trije lasje v juhi pa relativno mnogo!"
6. "Kaj je pomembnejše, Sonce ali Luna?" vprašajo petletnika. "Luna, ker sveti ponoči, ko je temno, Sonce pa sveti podnevi, ko je tako ali tako svetlo!"
7. "Ali je res, da tiger ne napade človeka, ki nosi baklo?" je vprašala gospa nekega raziskovalca Afrike. "To, gospa, pa je odvisno od tega, kako hitro človek nosi baklo," je pojasnil raziskovalec.

*Iz različnih virov zbral Andrej Likar*

---

## VRSTNI RED TEKMOVALCEV

Ciril, Janez, Peter, Roman in Marijan so na krosu zasedli prvih pet mest. Določite njihov vrstni red, če veste:

- Marjan ni bil prvi.
- Ciril ni bil niti prvi niti zadnji.
- Janez je bil eno mesto za Marijanom.
- Roman ni bil drugi.
- Peter je bil dve mesti za Romanom.

*Dragoljub M. Milošević*

## ZVEZDNI POLIEDRI

Kadar v matematiki postavljamo definicijo novega pojma, se tega običajno lotimo izkustveno. Vendar se nam lahko pri tem zgodi, da se pod definiranim pojmom skriva več, kakor smo imeli v mislih v začetku. Lep primer za to je definicija pravih poliedrov. Ko se je stoletja dolgo zdelo, da so malodane vse, kar se skriva pod tem pojmom, vedeli že stari Grki, se je na lepem obrnilo drugače. A pojdemo po vrsti.

*Pravilni ravninski večkotnik* je definiran kot lik, ki ima skladne vse stranice in skladne vse notranje kote. Vemo, da zadošča tema zahtevama neskončno mnogo likov (enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni petkotnik).

Vzemimo oglišča  $A_1, A_2, \dots, A_n$  poljubnega pravih  $n$ -kotnika, šteta v nasprotni smeri urinega kazalca. Izberimo naravno število  $k$  ( $0 < k < n$ ) in povežimo oglišča z daljicami

$$A_1A_{1+k}, A_2A_{2+k}, A_3A_{3+k}, A_4A_{4+k}, \dots, A_nA_{n+k}.$$

Če pri tem indeks  $i + k$  oglišča  $A_{i+k}$  preseže število  $n$ , ga spremenimo v  $i + k - n$ . Za vsak izbor števil  $n$  in  $k$  dobimo eno ali več sklenjenih lomljenk. Domenimo se, da bomo pri tem izpustili vse tiste primere, kjer razpade opisani obhod po vseh  $n$  točkah  $A_i$  v več kakor eno samo sklenjeno lomlenko (npr.:  $n = 6, k = 2$ ). Opazujmo območja, ki jih ograjujejo te lomljenke.

Pri izboru  $k = 1$  dobimo "običajne" pravilne  $n$ -kotnike, saj povezujejo med seboj kar vsa sosednja oglišča večkotnika. Pri  $k = 2$  povezujejo med seboj vsako drugo oglišče v zaporedju, pri  $k = 3$  vsako tretje itd. (slika 1).

Naj nas ne zbega, ker se stranice večkotnikov pri  $k > 1$  med seboj tudi sekajo. Rekli bomo, da je večkotnik *enostaven*, če se noben par njegovih stranic ne seka; v nasprotnem primeru je *neenostaven*. Pri tem presečišč stranic *neenostavnega* večkotnika ne štejemo za oglišča.

Zanimivo je, da definiciji pravih večkotnika zadoščajo tudi liki pri vrednostih  $k > 1$ . Zaradi njihove oblike se jih je oprijelo ime *zvezdni večkotniki*. Prav tako je očitno, da so vsi enostavni pravilni večkotniki konveksni (izbočeni). Med zvezdnimi večkotniki seveda ni konveksnih.

Zvezdne večkotnike lahko dobimo tudi s pomočjo podaljškov stranic pravih konveksnih večkotnikov, ki se sekajo. Denimo: zvezdni petkotnik dobimo tako, da podaljšamo stranice konveksnega petkotnika. Oba načina sta enakovredna, to je, omogočata konstrukcijo kateregakoli zvezdnega večkotnika.

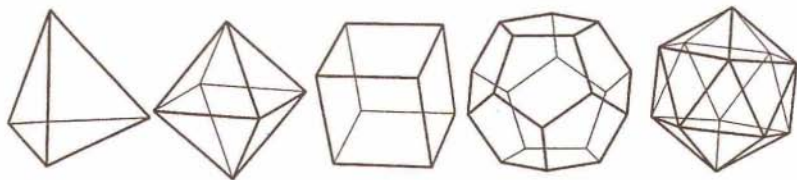


|         | $n = 3$                                                                           | $n = 4$                                                                           | $n = 5$                                                                           | $n = 6$                                                                           | $n = 7$                                                                           | $n = 8$                                                                           |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $k = 1$ |  |  |  |  |  |  |
| $k = 2$ |  |                                                                                   |  |                                                                                   |  |                                                                                   |
| $k = 3$ |                                                                                   |  |  |                                                                                   |  |  |

Slika 1.

Poskusimo s posplošitvijo večkotnikov še nekoliko drugače. Poglejmo, ali obstaja podoben splošnejši opis tudi za pravilne poliedre. Spomnimo se: polieder je *pravilen*, če so vse njegove stranske ploskve pravilni in med seboj skladni večkotniki in če se v vsakem njegovem oglišču stika enako število robov.

Že starogrški matematik Evklid (365–300 pr.n.št.) je v svojih *Elementih* dokazal, da je pravilnih poliedrov samo pet, in sicer tetraeder, oktaeder, kocka, dodekaeder in ikozaeder (slika 2).



Slika 2.

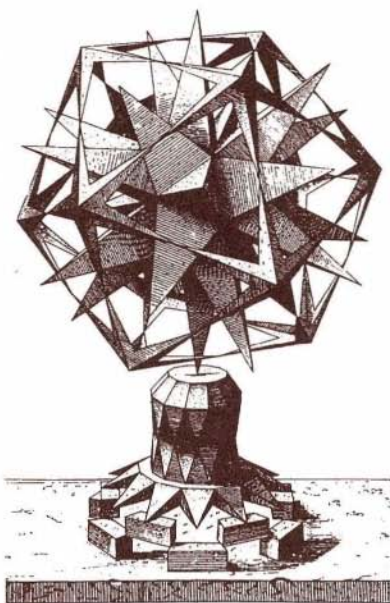
Pravimo jim tudi Platonovi poliedri (Platon jim je namreč dodelil pomembno vlogo pri svoji razlagi ustroja sveta). Ne smemo pa pozabiti, da so imeli matematiki antičnega obdobja v mislih le konveksne poliedre.

Težko je reči, kdaj so odkrili prvi nekonveksni pravilni polieder, saj o tem nimamo zadostnih podatkov. Znana je mozaična podoba malega zvezdnega dodekaedra (glej naslovno stran) na tleh bazilike Sv. Marka v Benetkah (okrog leta 1420), ki jo pripisujemo slikarju Paolu Uccellu. Zelo blizu zvezdnim poliedrom so tudi nekatere risbe iz dela *O zlateg rezu* italijanskega matematika Luca Pacioli (1445–1514), ki jih je domnevno

narisal Leonardo da Vinci, vse pozornosti pa je vredna tudi risba nemškega umetnika Wentzelna Jamnitzerja iz sredine 16. stoletja (slika 3). Prvi, ki je obširneje pisal o teh telesih in čigar delo se je ohranilo do danes, pa je bil nemški astronom in matematik Johannes Kepler (1571–1630).

Kepler je sicer znan predvsem kot astronom. Odkril je, da se planeti gibljejo okrog Sonca po eliptičnih tirih in razložil osnovne zakone tega gibanja. Zanimivo pa je, da je pri svojem razmišljanju o zgradbi Osončja predvsem v zgodnejših letih delovanja izhajal iz t.i. poliederskega modela, ki je v osnovi določen s petimi pravilnimi poliedri. Takšni nazori so ga pritegnili k poglobljenemu študiju poliedrov na sploh.

V svojem najpomembnejšem delu *Harmonija sveta* (*Harmonices mundi*, 1619) je Kepler povzel svoja odkritja v astronomiji. Pri svoji, precej mistično zasnovani razlagi harmonije sveta, je v veliki meri uporabljal tudi jezik matematike. Vse življenje se je namreč držal načela, da je prav geometrija prasluka lepote sveta. Tako najdemo v tem delu tudi prvi poskus temeljitejše klasifikacije poliedrov. Kepler je poliedre delil na konveksne in nekonveksne. Med prvimi je posebej izpostavil pet pravilnih in trinajst polpravilnih.<sup>1</sup> Zanimivo je, da je pravilne poliedre odkril tudi med nekonveksnimi. Čeprav Kepler samega postopka, ki ga je pripeljal do odkritja, ni opisal, ga je vendarle mogoče rekonstruirati.



Slika 3. Iz Jamnitzerjevega dela *Perspektiva pravilnih teles*.



Johannes Kepler

<sup>1</sup> Glej: T. Pisanski, *Uniformni poliedri*, Presek 1993–94, št. 4.



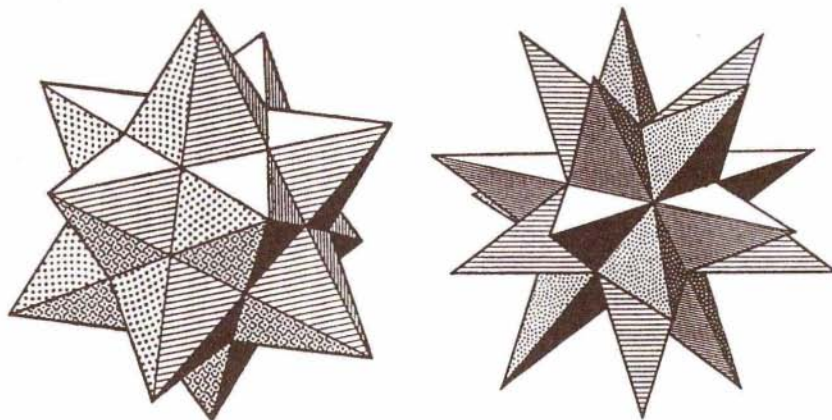
Omenili smo že, da lahko dobimo zvezdne večkotnike tudi s podaljški stranic pravih konveksnih večkotnikov. Ta postopek posplošimo v prostor na ta način, da za vsak pravih polieder razširimo njegove ploskve v ravnine, pri čemer se vsaka seka vsaj z eno od preostalih. V nekaterih primerih dobimo z območjem, ki ga ograjujejo te ravnine, novi polieder.

Pri tetraedru in kocki dobimo na ta način enako telo. Polieder, ki ga dobimo z razširitvijo ploskev oktaedra, je Kepler imenoval *stella octangula* (slika 4). Že sam je opazil, da ga ne moremo šteti kot novo telo, saj je pravzaprav sestavljen iz dveh tetraedrov. Zaradi tega spada med t.i. *sestavljene poliedre*, ki so bili v veliki meri znani že tudi pred Keplerjem. Metoda razvrščanja je v primeru stelle octangule podobna kakor pri zvezdnih večkotnikih, kjer štejejo le tisti, ki so ograjeni z eno samo sklenjeno lomljenko.



Slika 4. Stella octangula.

Povsem novi telesi, ki v matematični literaturi do Keplerjevega časa nista bili znani, dobimo z razširitvijo ploskev dodekaedra in ikozaedra. Kepler ju je sprva imenoval *mali* in *veliki morski ježek*. Danes sta v literaturi znani pod imenoma *mali zvezdni dodekaeder* in *veliki zvezdni dodekaeder* (slika 5). Uvedel ju je angleški matematik Arthur Cayley (1859).



Slika 5. Mali zvezdni dodekaeder (levo) in veliki zvezdni dodekaeder (desno).

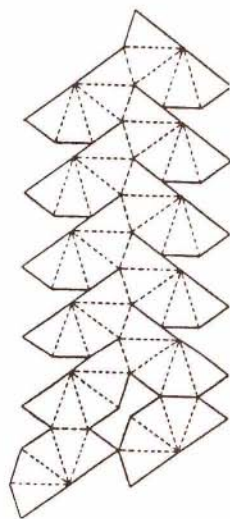
Obe telesi zadoščata definiciji pravičnega poliedra. Njune stranske ploskve so namreč med seboj skladni zvezdni petkotniki, pri malem zvezdnem dodekaedru se jih v vsakem oglišču stika po pet, pri velikem pa po trije. Za razliko od preprostejših poliedrov, pri katerih se stranske ploskve le stikajo vzdolž robov, se njune ploskve tudi sekajo, podobno, kakor se sekajo stranice zvezdnih večkotnikov. Oba zvezdna dodekaedra spadata zaradi svojih "bodice" med nekonveksne poliedre.

Mali zvezdni dodekaeder ima 12 stranskih ploskev (v vsakem od 12 oglišč se jih stika po pet) in 30 robov. Njegova oglišča so hkrati oglišča očrtanega ikozaedra. Veliki zvezdni dodekaeder ima prav tako 12 stranskih ploskev, pri čemer se v vsakem od 20 oglišč stikajo po tri, in spet 30 robov. Njegova oglišča so razmeščena v ogliščih dodekaedra.

Morda bo koga zamikalo izdelati tudi papirnata modela obeh zvezdnih poliedrov. Za model velikega zvezdnega dodekaedra je najenostavnejše, če napravite model ikozaedra in nad vsako njegovo ploskev prilepite tristrano piramido. Seveda je rob osnovne ploskve te piramide enako dolg kot rob ikozaedra, kot stranske ploskve piramide ob vrhu pa meri  $36^\circ$ , saj je to pravzaprav kot v pravičnem zvezdnem petkotniku. Na podoben način izdelate tudi model malega zvezdnega dodekaedra: na vsako stransko ploskev dodekaedra nalepite petstrano piramido. Za dimenzije teh piramid veljajo enake opombe kot v prejšnjem primeru.

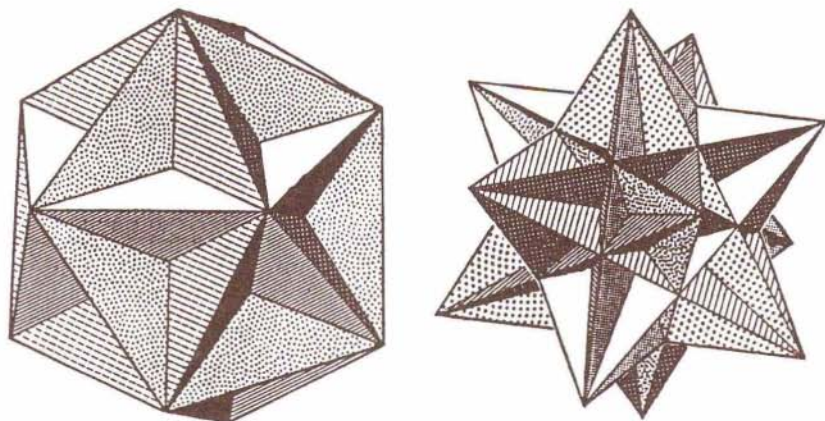
Občudovalci papirnatih modelov poliedrov seveda najraje izdelajo svoj model iz enega samega kosa papirja. Njim je namenjena mreža malega zvezdnega dodekaedra na sliki 6. Sestavljajo jo zgolj plašči omenjenih petkotnih piramid.

Leta 1809 je francoski matematik Louis Poinot odkril še dva pravilna nekonveksna poliedra, in sicer *veliki dodekaeder* ter *veliki ikozaeder* (slika 7). Kmalu zatem pa je leta 1813 francoski matematik Augustin-Louis Cauchy dokazal, da poleg štirih že znanih ne obstaja več noben drug nekonveksen pravilni polieder. S tem je postala zgodba o pravičnih poliedrih zaključena: pet je konveksnih (Platonovi poliedri), štirje pa nekonveksni (Kepler-Poinotovi poliedri).



Slika 6.





Slika 7. Veliki dodekaeder (levo) in veliki ikozaeder (desno).

Zanimivo je, da dva Keplerjev-Poinsotova poliedra ne zadoščata Eulerjevi poliederski formuli. Ta pravi, da je  $o + p = r + 2$ , kjer je  $o$  število, oglišč,  $p$  število ploskev,  $r$  pa število robov poliedra. Za vajo ju poskusite sami poiskati.

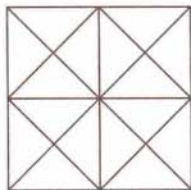
*Vilko Domajnko*

## DVE ZA PODMLADEK

- Skupini šestih krožcev dodajte še dva, tako da boste dobili šest vrst s po tremi krožci v vsaki.



- Koliko trikotnikov je na sliki?



*Dragoljub M. Milošević*

## LUMINESCENCA

Vsi procesi v naravi potekajo tako, da se energija pretaka iz ene oblike v drugo. Pri prostem padu prehaja potencialna energija v kinetično, mehanska energija se pri gnetenju kepe plastelina spreminja v toploto, pri igranju na glasbila se mehanska energija delno prenese v energijo zvočnega valovanja, pri sevanju telesa pa se toplotna energija pretvori v svetlobo. Ogleдали si bomo skupino takih procesov, kjer se različne oblike izhodiščne energije pretvorijo v svetlobo.

### ENERGIJA $\Rightarrow$ (VIDNA) SVETLOBA

V shemi smo zapisali vidna svetloba, ker so običajno taki procesi še bolj zanimivi. V primeru, da energije v izhodiščni obliki ne zaznamo, se zdi namreč tako, kot da bi se svetloba vzela iz nič.

Procese zgornje vrste delimo v grobem na *inkandescenco* (lat. *in candelā*, v sveči) in *luminescenco* (lat. *lumen*, luč). Inkandescenca je pretvorba toplotne energije v svetlobo. Če izhodiščna energija ni v obliki toplote, govorimo o luminescenci oziroma t.i. hladni svetlobi. Različne pojave imenujemo z ustreznimi predponami pred -luminescenco oziroma -escenco.

Preden se posvetimo opisu posameznih pojavov, naj povemo nekaj besed o principih, ki so skriti za vpijanjem (absorpcijo) energije v snovi in oddajanjem (emisijo) energije v obliki svetlobe. Molekule (ali atomi) v snovi imajo določeno energijo, pravimo, da so v določenih energijskih stanjih. Če sestavni del snovi pridobi ali izgubi ustrezno količino energije, lahko preide iz obstoječega v drugo energijsko stanje. Podobno bi lahko trdili, da je človek po zaužitju (absorpciji) hrane v drugačnem 'energijskem' stanju kot pred tem. V primeru, da se zgodi prehod med stanji zaradi svetlobne energije, lahko energijsko razliko  $\Delta E$  med stanjema molekule zapišemo kot

$$\Delta E = h\nu = h \frac{c}{\lambda},$$

kjer je  $h$  Planckova konstanta,  $\nu$  frekvenca svetlobe,  $c$  svetlobna hitrost in  $\lambda$  valovna dolžina svetlobe. Če gre molekula iz višjega v nižje energijsko stanje, pri tem izseva (emitira) svetlobo z ustrezno valovno dolžino, iz nižjega v višje stanje pa preide po absorpciji svetlobe. Ker so energijska stanja za določeno molekulo točno določena, je točno določena tudi energijska razlika med njimi. Za prehod mora torej molekula absorbirati količino svetlobe, ki nosi energijo  $hc/\lambda$ . Takšno količino svetlobe imenujemo 1 kvant svetlobe (1 *foton*). Od tod izhaja tudi ime *kvantna fizika*,



ki se ukvarja z opisom narave na nivoju atomov oz. molekul in njihovih sestavnih delov.

Kot bo razvidno iz primerov, predstavljenih kasneje, so energijske razlike med stanji molekul v mnogih primerih v območju, kjer lahko prehodi med stanji potekajo z izsevanjem vidne svetlobe. Pod pojmom vidne svetlobe razumemo svetlobo, ki ima valovne dolžine približno od 400 nm (modra barva) do 750 nm (rdeča barva), zelena barva ima npr.  $\lambda = 500$  nm, rumena pa  $\lambda = 550$  nm ( $0,000000001$  m =  $10^{-9}$  m = 1 nm).

Za boljšo predstavo bomo energijska stanja molekule primerjali z energijskimi stanji kamna, ki ga dvignemo s tal na polico pri določeni višini. Za potencialno energijo kamna z maso  $m$  velja

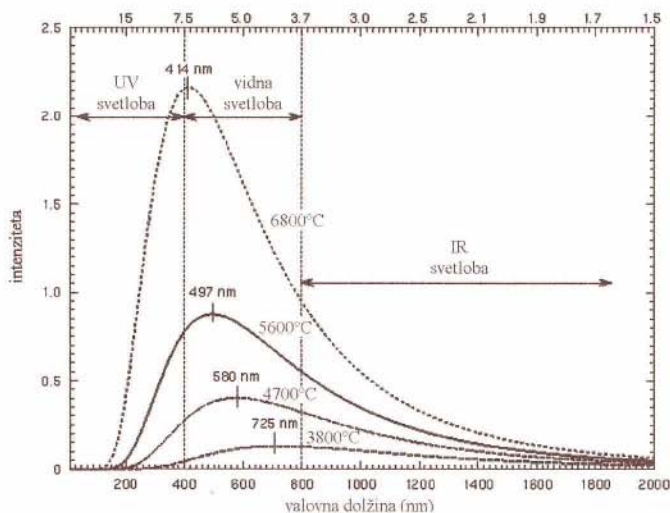
$$W_p(h) = mgh,$$

s težnim pospeškom  $g$  in višino  $h$ , na kateri je polica. Pri konstantni masi in težnem pospešku je potencialna energija sorazmerna višini. Ko je kamen na tleh ( $h = 0$ ), je njegova potencialna energija enaka nič. Kamnu se energija kvečjemu lahko poveča. Tudi za molekulo obstaja neko najnižje energijsko stanje; tako stanje imenujemo *osnovno stanje*. Če okolica ne moti molekule, bo molekula v tem stanju tudi ostala. Podobno bo kamen vztrajal na tleh, dokler ga ne dvignemo. (Ste že kdaj videli kamen, ki bi poskočil sam od sebe?) V višje energijsko stanje bo molekula prešla, če bo za to iz okolice dobila potrebno energijo  $\Delta E$ , npr. z absorpcijo svetlobe. Višja energijska stanja imenujemo *vzbujena stanja*. Z dvigom kamen spravimo v višje energijsko stanje. Najpomembnejša razlika med kamnom in molekulo je, da lahko kamen dvignemo na poljubno visoko polico, molekula pa lahko preide le v energijsko točno določena stanja (višine poličk za molekulo ne moremo poljubno spreminjati). Različne molekule imajo energijska stanja različno razporejena.

Do inkandescence pride, če snov dovolj segrejemo (torej, če ji dovedemo dovolj toplotne energije), da seva vidno svetlobo. Poleg tega mora biti snov gosta; inkandescenco opazimo pri trdninah, kapljevinah in gostih plinih, pri redkih plinih pa ne. Lep primer je segreto jeklo v železarnah, ki pri določeni temperaturi začne žareti. Jeklo, ki rdeče žari, oddaja poleg rdeče tudi svetlobo drugih barv, vendar rdeča prevladuje. Barva svetlobe, ki je snov največ odda, je določena le s temperaturo, ne pa z vrsto molekul v snovi (različne snovi se pri isti temperaturi obnašajo podobno). Pri razumevanju inkandescence si zato ne moremo pomagati s predstavo o energijskih stanjih, ponazorjenih s policami.

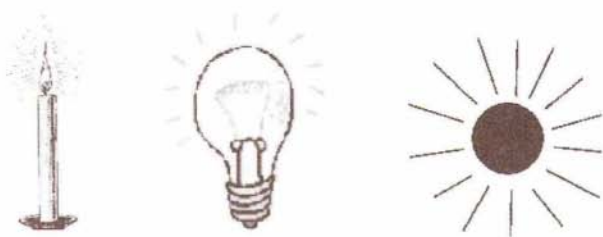
V inkandescenčni svetlobi so torej različno močno zastopane komponente svetlobe z različnimi valovnimi dolžinami. Diagramu, ki kaže

količino izsevane svetlobe (intenziteto) v odvisnosti od valovne dolžine, pravimo *spekter*. Spekter sevanja segretega telesa vidimo na sliki 1. Manj segreta telesa oddajajo predvsem infrardečo (IR) svetlobo ( $\lambda > 750 \text{ nm}$ ), ki je z očmi ne moremo zaznati. IR svetlobo čutimo kot toploto, ki prihaja od segretega telesa. Če telo dovolj segrejemo, seva tudi precej ultravijolične (UV) svetlobe ( $\lambda < 400 \text{ nm}$ ), ki ima krajšo valovno dolžino kot modra svetloba.



Slika 1. Spektri segrelih teles pri različnih temperaturah. Na diagramu so označene tudi valovne dolžine, pri katerih telesa najbolj sevajo.

Izvori inkandescentne svetlobe so plamen sveče (ognja), običajna žarnica, zvezde (slika 2). Del plamena sveče, ki je rumene barve, nastane zaradi inkandescence ogljikovih delcev, ki nastanejo po izgorevanju voska. Žarnica sveti potem, ko skozi tanko žičko spustimo električni tok. Ker tanka žička predstavlja za tok veliko oviro (ima velik upor), se segreva in inkandescentno zasveti. Mimogrede omenimo še, da na podoben način deluje tudi halogenska luč, le da je v halogenki prisoten plin, ki omogoča luči daljšo življenjsko dobo in večjo intenziteto svetlobe. Tudi svetloba zvezd je inkandescentnega izvora. Potrebna izhodiščna energija nastane pri jedrskih reakcijah v jedru zvezde. Ta energija se preko različnih procesov prenese na površino zvezde, ki seva svetlobo. Površina Sonca ima okrog  $5600^\circ\text{C}$ . Ker ima spekter pri tej temperaturi maksimum pri valovni dolžini okrog  $\lambda = 500 \text{ nm}$  (glej sliko 1), Sonce seva svetlobo rumeno-zelene barve. Zanimivo je, da so oči človeka najbolj občutljive prav pri tej valovni dolžini.



Slika 2. Primeri inkandescence.

Sedaj si bomo pobliže ogledali še luminescenco. V tem procesu izhodiščna energija, ki jo absorbira snov, ni toplotna energija. Zato snov, ki oddaja svetlobo pri luminescenci, ni vroča. Glede na to, v kakšni obliki oziroma od kod prihaja izhodiščna energija, ločimo različne pojave. Nekaj je zapisanih spodaj.

**fluorescenca** Izhodiščna energija izvira iz absorpcije svetlobne energije. Običajno na material posvetimo z UV svetlobo. Ker UV svetlobe ne vidimo, fluorescentna snov pa seva vidno svetlobo, se zdi, kot da izsevano svetlobo dobimo iz nič. Fluorescentne snovi uporabljamo v različne namene, najdemo jih, npr. v fluorescentni luči, v mineralih, ki fluorescirajo, v nekaterih pisalih.

**fosforescenca** Snov absorbira svetlobno energijo. Sevanje svetlobe ne sledi neposredno po absorpciji, ampak poteka z zakasnitvijo. Na ta način lahko snov oddaja svetlobo tudi v popolni temi, če smo jo pred tem obsevali s svetlobo. Fosforescentne snovi uporabljamo kot premaz na urnih kazalcih, pri otroških igračah.

**kemoluminescenca** Pri nekaterih kemijskih procesih se energija po končani reakciji sprosti v obliki svetlobe (in ne toplote). Tem reakcijam pravimo kemoluminescentne. Kot primer kemoluminescence omenimo svetleče palčke.

**bioluminescenca** O bioluminescenci govorimo, ko živi organizmi zaradi kemoluminescentnih reakcij oddajajo svetlobo. Najbolj vsakdanji primer so kresničke, gljive, zelo pogosta pa je bioluminescenca pri globokomorskih organizmih.

**elektroluminescenca** Elektroluminescenca povzroči tok nabitih delcev. Kinetična energija delcev se porabi za vzbujanje atomov oz. molekul v snovi v višja energijska stanja. Primeri so televizijski ekran, neonska luč, severni sij, strele.

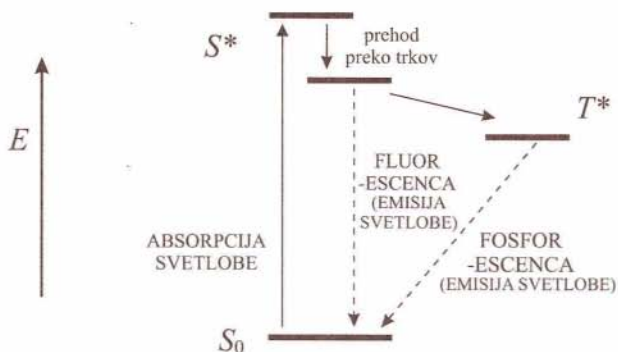
**radioluminescenca** Izhodiščna energija je posledica radioaktivnih razpadov. Nekatere starejše ure so imele na kazalcih radioaktivni premaz, zaradi česar so kazalci svetili tudi ponoči.



**triboluminescenca** Pri triboluminescenci (gr. *tribo*, podrgniti, popraskati) je sevanje svetlobe posledica absorpcije mehanske energije. Do tega pojava lahko npr. pride, ko med seboj podrgnemo dva kosa primerne kamnine.

**termoluminescenca** To je posebna oblika pojava fosforescence. V nekaterih materialih se fosforescenca pojavi šele, ko material dovolj segrejemo.

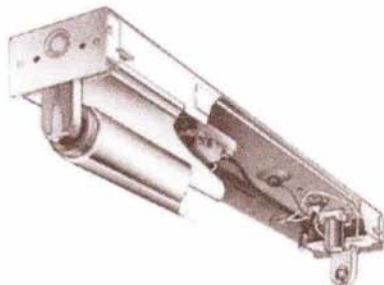
Najprej si oglejmo pojava *fluorescence* in *fosforescence*. Imeni izhajata iz kemijskih elementov fluora in fosforja, saj so pojava najprej opazili pri nekaterih spojinah, ki vsebujejo ta dva elementa. Valovna dolžina fluorescenčne in fosforescenčne svetlobe je odvisna od strukture in postavitve energijskih stanj molekul, ki sestavljajo snov. Valovna dolžina izsevane svetlobe je torej odvisna od kemijske sestave snovi (za razliko od inkandescence). Pri razumevanju fluorescence in fosforescence si lahko pomagamo s predstavo o energijskih stanjih kot policah, med katerimi prehajajo molekule.



Slika 3. Energijska stanja v molekuli ( $E \dots$  energija).  $S_0$  je osnovno stanje,  $S^*$  in  $T^*$  pa predstavljata vzbujena stanja molekule.

Pri obeh pojavih ima izsevana svetloba v primerjavi z absorbirano svetlobo večjo valovno dolžino (npr. pri fluorescenci snov absorbira UV svetlobo in izseva vidno). Pri fluorescenci je ta značilnost posledica prehodov znotraj vzbujenega stanja  $S^*$  (glej sliko 3). Lahko bi rekli, da je vzbujeno stanje  $S^*$  polica, ki je sama sestavljena še iz nekaj poličk (v našem primeru iz višje in nižje poličke). Med temi poličkami lahko molekula prehaja zaradi trkov z ostalimi molekulami, pri čemer lahko molekula izgubi nekaj energije. Energija emitirane svetlobe je zato manjša od

energije absorbirane svetlobe; iz  $\Delta E$  (emisija)  $<$   $\Delta E$  (absorpcija) res sledi  $\lambda$  (emisija)  $>$   $\lambda$  (absorpcija). Pri fluorescenci si po vrsti sledijo naslednji prehodi molekule med energijskimi stanji:  $S_0 \rightarrow S_{\text{višje}}^*$  (absorpcija energije),  $S_{\text{višje}}^* \rightarrow S_{\text{nižje}}^*$  (prehod preko trkov) in na koncu  $S_{\text{nižje}}^* \rightarrow S_0$  (emisija svetlobe). Fluorescenca je osnova za delovanje fluorescentne luči (slika 4). Plin v cevi seva svetlobo zaradi *elektroluminescence* (med koncema cevi je določena napetost). Če plin seva vidno svetlobo, govorimo o neonski luči. V primeru fluorescentne luči seva plin UV svetlobo. Ker je cev premazana s fluorescentno snovjo, luč v resnici sveti zaradi fluorescence.



Slika 4. Fluorescentna luč.

Tudi fosforescenca razložimo z lastnostmi energijskih stanj sistema. Nekatera vzbujena stanja so bolj dolgoživa kot druga, na sliki 3 je to  $T^*$ . Pri absorpciji energije imamo prehod  $S_0 \rightarrow S^*$ . Preko posebnih procesov pride do prehoda  $S^* \rightarrow T^*$ . Nazadnje se zgodi prehod  $T^* \rightarrow S_0$  (emisija svetlobe). Zopet velja  $\lambda$  (emisija)  $>$   $\lambda$  (absorpcija). V stanju  $T^*$  ostane molekula dalj časa kot v običajnem vzbujenem stanju  $S^*$ . To pomeni, da fosforescentna snov emitira svetlobo še dolgo potem, ko jo je absorbirala. Zato lahko vidimo na uro, pri kateri so kazalci premazani s fosforescentno snovjo, tudi ponoči. Če dalj časa spremljamo svetlost kazalcev, lahko opazimo, da s časom postajajo temnejši. Če bi imeli uro dovolj dolgo v temi, kazalcev ne bi več videli. To je razumljivo, saj poide shranjena absorbirana energija. Ko postanejo kazalci pretemni, moramo kazalce zopet 'napolniti' z energijo. To najlažje storimo, če postavimo uro neposredno pod luč ali kakšen drug močan izvor svetlobe.

Pojav, ki je še bolj privlačen za opazovanje, je *bioluminescenca*. Kdo še ni bil navdušen nad letečimi lučkami – kresničkami? Tako smo že navajeni, da so svetilna telesa priključena na nek poseben vir energije (običajno na izvor električne energije), da nas čudi, kako lahko kresnička sveti, ne da bi za sabo vlekla kakšen kabel ali baterijo. Živali in rastline, pri katerih opazimo bioluminescenca, imajo v sebi posebne snovi, ki lahko reagirajo med seboj; pri reakciji se sprošča svetloba (*kemoluminescenca*). Kresničke uporabljajo bioluminescenca pri parjenju, pri globokomorskih organizmih ima pojav še druge biološke funkcije.

V globinah oceanov vladajo posebne razmere. Tam najdemo zelo zanimive in drugačne oblike življenja. Če hočejo organizmi v takih ekstremnih razmerah preživeti, morajo imeti razvite posebne sposobnosti. Bioluminescenco tako organizmi v oceanih uporabljajo za pomoč pri lovljenju plena, za obrambo, pri parjenju, za osvetljevanje. Ta sposobnost koristi tudi raziskovalcem morja, saj lahko z merjenjem bioluminescence v določenih predelih morja spremljajo živahnost in količino življa.

Večina morskih organizmov oddaja modro svetlobo. Tako so se prilagodili okolju, ker ima v vodi največji doseg modro-zelena svetloba (se najkasneje absorbira). Pomen dosega je velik, saj premorejo organizmi le šibke izvore svetlobe. Poleg tega imajo čutnice, ki so največkrat občutljive le na modro svetlobo. Obstaja nekaj izjem, ki znajo proizvajati tudi rdečo svetlobo. Ti organizmi svojo prednost s pridom izkoriščajo, saj lahko plen, ki rdeče svetlobe ne zaznava, zalezujejo neopazno.

Posamezni pojavi, katerih osnova sta inkandescenca in luminescenca, se po vrsti energije, ki jo snov absorbira, precej razlikujejo. Njihova skupna lastnost pa je, da jih vse lahko razložimo, če upoštevamo, da je energijska razlika  $\Delta E$  med energijskimi stanji molekul točno določena. Stanja imajo namreč lahko le nekaj izbranih energij (spomnite se na primerjavo med kamnom in molekulo). Zgoraj opisane pojave lahko torej razumemo le s pomočjo kvantne fizike.

*Zoran Arsov*



Slika 5. Kresnička.

## VEDNO VELJA

Dokaži, da je neenačba

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{7x+1} + \sqrt{1-11x} \leq 3$$

izpolnjena za vsak realen  $x$ , za katerega je definirana.

*Dušan Murovec*



## TRDNJAVE NA ŠAHOVNICI

Med najbolj znanimi nalogami iz razvedrilne matematike je vprašanje, na koliko načinov lahko na običajno šahovsko desko postavimo 8 kraljic tako, da se paroma ne napadajo. Ljubitelji razvedrilne matematike vemo, da je to moč storiti na 92 načinov, med katerimi je 12 bistveno različnih, torej takih, ki jih ni moč dobiti drugega iz drugega z zasuki in zrcaljenji šahovske deske.

Enako vprašanje si lahko zastavimo tudi za trdnjave. Spomnimo se, da je trdnjava šahovska figura, ki napada vsa polja v svoji vrstici in v svojem stolpcu šahovnice. Različnih postavitvev ni težko prešteti. V vsakem stolpcu in v vsaki vrstici šahovnice bo natanko ena trdnjava. Za postavitev trdnjave v prvi stolpec je tako 8 možnosti, za trdnjavo v drugem stolpcu še 7 (vrstica, ki jo zaseda trdnjava iz prvega stolpca, je prepovedana), za tretji stolpec ostane 6 možnosti, itd. Različnih postavitvev je torej

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320.$$

Mimogrede opazimo, da lahko na šahovnico velikosti  $n \times n$  postavimo  $n$  paroma nenapadajočih se trdnjav na  $n!$  načinov.

Sprašujem vas, koliko je **bistveno različnih** postavitvev 8 paroma nenapadajočih se trdnjav na običajno šahovnico? Vseh bistveno različnih postavitvev raje ne poskusite narisati, saj jih je več kot  $\frac{40320}{8} = 5040$  (šahovska deska ima 8 "simetrij", ker pa so nekatere postavitve trdnjav "simetrične", iz njih z zasuki in zrcaljenji dobimo manj kot 8 različnih postavitvev). Štetja se je torej treba lotiti previdno in z veliko mero potrpežljivosti. Če pa vas veseli programiranje, naj vam namignem, da boste nalogo skoraj gotovo hitreje rešili z računalnikom kot s svinčnikom in papirjem.

*Martin Juvan*

---

## IZ DALJICE TRIKOTNIK

Dano daljico na slepo razdelimo na tri manjše daljice.

1. Ali se vam zdi verjetneje, da bomo iz dobljenih kosov (kot stranic) lahko sestavili trikotnik, ali, da ga ne bomo mogli?
2. Za spretnejše: Znete verjetnost, da trikotnik lahko sestavimo, tudi izračunati?

*Marija Vencelj*

## MALE SKRIVNOSTI ENAKOSTRANIČNEGA TRIKOTNIKA

Da ima enakostranični trikotnik same enake stranice, pove že njegovo ime. Posledično ima tudi skladne notranje kote, vsak od njih meri  $60^\circ$ .

Kako iz dolžine stranice izračunamo njegovo višino ali ploščino, sodi med obvezna znanja učenca, ki zaključuje osnovno šolo. Tam se nauči še vrtati enakostranični trikotnik v dano krožnico in izve, da je polmer očrtane krožnice dvakrat tolikšen kot polmer vrtane krožnice ter da je obeh skupaj natanko za trikotnikovo višino.

Ima pa enakostranični trikotnik še vrsto preprostih lastnosti, tudi takih, ki so značilne samo zanj in po katerih ga lahko prepoznamo, ne da bi posebej izračunali in primerjali njegove stranice ali kote.

Najbolj znana je gotovo lastnost, da **leže središče trikotniku očrtane krožnice, središče vrtane krožnice, višinska točka in težišče (pa npr. tudi središče Eulerjeve krožnice) v isti točki**. To točko običajno označimo z  $O$  in jo imenujemo kar središče enakostraničnega trikotnika.

Enakostranični trikotnik je tudi edini trikotnik, v katerem našete točke sovpadajo. Še več. Je edini trikotnik, v katerem sovpadata poljubni dve od navedenih točk. Če se namreč ujemata dve od zgornjih točk, se ujemajo vse. Povedano za vajo dokažite sami!

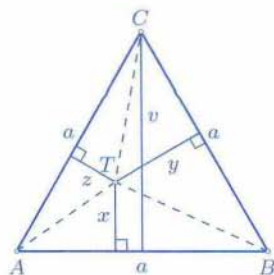
Drugo preprosto, pa zelo uporabno lastnost<sup>1</sup> opisuje naslednja trditev:

**Vsota razdalj poljubne notranje točke enakostraničnega trikotnika od njegovih stranic je neodvisna od izbrane točke. Enaka je višini trikotnika.**

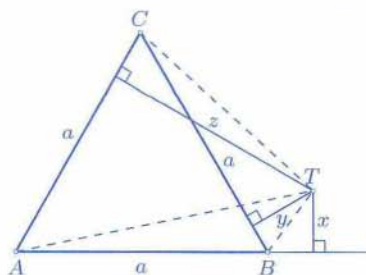
Izrek lahko preprosto dokažemo. Kot na sliki 1 označimo z  $a$  in  $v$  stranico in višino enakostraničnega trikotnika  $\triangle ABC$ , z  $x$ ,  $y$  in  $z$  pa oddaljenosti poljubne notranje točke  $T$  od trikotnikovih stranic. Ker je ploščina trikotnika  $\triangle ABC$  enaka vsoti plosčin trikotnikov  $\triangle ABT$ ,  $\triangle BCT$  in  $\triangle CAT$ , velja

$$\frac{1}{2}av = \frac{1}{2}(ax + ay + az) \quad \text{in od tod} \quad x + y + z = v.$$

<sup>1</sup> Nekaj let nazaj je bila ta lastnost skrita v nalogi na enem od tekmovanj za Vegova priznanja.



Slika 1.



Slika 2.

Trditev velja tudi, če leži točka  $T$  na robu trikotnika. Če je  $T$  oglišče trikotnika, sta dve razdalji enaki nič in tretja  $v$ . Če pa leži  $T$  na stranici, je ena od razdalj enaka nič; da je vsota preostalih dveh  $v$ , dokažemo kot zgoraj, le da razpade v tem primeru trikotnik  $\triangle ABC$  samo na dva trikotnika.

Tudi v primeru, ko je  $T$  zunanja točka trikotnika, lahko izrek smiselno posplošimo. Če leži točka  $T$  na istem bregu nosilke posamezne stranice, kot tej stranici nasprotno oglišče, vzamemo razdaljo točke  $T$  od te nosilke v naši formuli s pozitivnim predznakom, sicer jo pomnožimo z  $-1$ . Za primer s slike 2 torej velja  $x - y + z = v$ . Dokaz (podoben je zgornjemu) izpeljite sami.

Tudi ta lastnost je značilna lastnost enakostraničnih trikotnikov. To so edini trikotniki z lastnostjo, da je vsota razdalj poljubne notranje točke trikotnika od nosilk trikotnikovih stranic neodvisna od izbrane točke. Za ostale trikotnike velja, da je vsota navedenih razdalj po velikosti vedno med najkrajšo in najdaljšo višino trikotnika<sup>2</sup>.

Vrnimo se k enakostraničnemu trikotniku. Še vedno naj bo  $T$  poljubna točka in  $x, y, z$  njene oddaljenosti od trikotnikovih stranic. Njihova vsota  $x + y + z$  je konstantna, produkt  $xyz$  pa očitno ne. Če se točka  $T$  bliža robu trikotnika, se produkt bliža vrednosti nič, in je na robu enak nič. Za točke v notranjosti trikotnika je pozitiven in po zelo grobi oceni ne preseže  $v^3$ , saj je vsaka od razdalj  $x, y, z$  manjša od  $v$ . Zanima nas, kje produkt doseže največjo možno vrednost in kolikšna je. Videli bomo, da velja:

**Produkt razdalj  $xyz$  doseže največjo vrednost v središču enakostraničnega trikotnika in je enak  $\frac{1}{27}v^3$ .**

<sup>2</sup> To je dokazal že italijanski matematik in fizik Viviani (1622 - 1703), ki je sam sebe štel za zadnjega Galileovega učenca.



Trditev lahko po nekoliko daljši poti direktno dokažemo, mi pa se bomo ovinku izognili z uporabo naslednjega izreka za pozitivna števila:

*Geometrijska sredina pozitivnih števil je manjša ali kvečjemu enaka njihovi aritmetični sredini. Obe sredini sta med seboj enaki natanko v primeru, ko so števila med seboj enaka.*

Izrek bomo uporabili za oddaljenosti  $x, y, z$  poljubne notranje točke enakostraničnega trikotnika od njegovih stranic, saj so te razdalje pozitivne. Torej:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$$

in enačaj velja natanko v primeru, ko je  $x = y = z$ .

Ker vemo, da je za notranje točke enakostraničnega trikotnika  $x + y + z = v$ , oceno lahko poenostavimo:

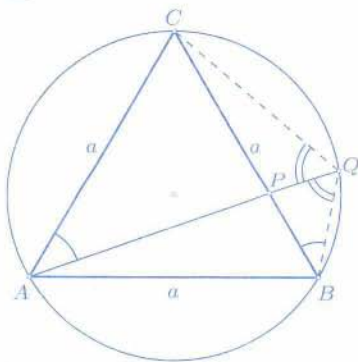
$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}v,$$

od koder sledi

$$xyz \leq \frac{1}{27}v^3.$$

Produkt torej ni večji od vrednosti  $\frac{1}{27}v^3$ . Pa to vrednost sploh doseže? Če jo, se to lahko zgodi le v točki, za katero velja  $x = y = z = \frac{1}{3}v$ . Taka točka v enakostraničnem trikotniku res obstaja in je ena sama. To je prav središče  $O$  enakostraničnega trikotnika. Trditev je torej dokazana.

Za razumevanje zadnje lastnosti si oglejmo sliko 3. Enakostraničnemu trikotniku  $\triangle ABC$  smo očrtali krožnico in na njej izbrali poljubno točko  $Q$ , različno od oglišč. Na sliki je izbrana na tistem loku s krajiščema  $B$  in  $C$ , na katerem ne leži oglišče  $A$ . To ne predstavlja nobene izgube splošnosti, saj lahko sicer trikotnik preoznačimo. Daljica, ki veže  $Q$  z ogliščem  $A$ , naj seka stranico  $BC$  v točki  $P$ .



Slika 3.

Velja trditev:

Če premica, ki poteka skozi oglišče  $A$  enakostraničnega trikotnika, seka nasprotno stranico  $BC$  v točki  $P$  in trikotniku očrtano krožnico v točki  $Q$ , potem je

$$\frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\overline{BQ}} + \frac{1}{\overline{CQ}}.$$

Za dokaz potrebujemo nekaj znanja iz ravninske geometrije. Najprej ugotovimo, da sta trikotnika  $\triangle BQP$  in  $\triangle AQC$  podobna, saj imata enake kote. Vidimo namreč, da je  $\sphericalangle QBP = \sphericalangle QAC$ , saj sta to obodna kota nad istim lokom  $QC$ , in da je  $\sphericalangle BQA = \sphericalangle AQC = 60^\circ$ . Zato imata trikotnika sorazmerne stranice in velja

$$\overline{BQ} : \overline{AQ} = \overline{PQ} : \overline{CQ} \quad \text{ali} \quad \overline{BQ} \cdot \overline{CQ} = \overline{PQ} \cdot \overline{AQ}.$$

V nadaljevanju uporabimo za tetivni štirikotnik<sup>3</sup>  $ABQC$  Ptolomejev izrek, ki pravi:

V tetivnem štirikotniku je produkt diagonal enak vsoti produktov nasprotnih stranic.

Ker je  $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB} = a$ , sledi

$$a \cdot \overline{AQ} = a \cdot \overline{CQ} + a \cdot \overline{BQ}$$

in zato

$$\overline{AQ} = \overline{CQ} + \overline{BQ}.$$

Če vstavimo vrednost za  $\overline{AQ}$  v enačbo, ki smo jo dobili s podobnostjo trikotnikov, sledi

$$\overline{BQ} \cdot \overline{CQ} = \overline{PQ} \cdot \overline{BQ} + \overline{PQ} \cdot \overline{CQ}.$$

Enakost še delimo s produktom  $\overline{BQ} \cdot \overline{CQ} \cdot \overline{PQ}$  in dobimo napovedani rezultat.

*Primer:* Naj bo enakostranični trikotnik vrtan v krožnico s polmerom  $r$  in  $Q$  razpolovišče loka  $BC$ . Potem je  $\overline{BQ} = \overline{CQ} = r$  in sledi  $\frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$ , od koder sledi  $\overline{PQ} = \frac{r}{2}$ . Od tod takoj dobimo znani rezultat, da je polmer enakostraničnemu trikotniku vrtane krožnice enak polovici polmera očrtane krožnice.

Marija Vencelj

<sup>3</sup> Tetivni štirikotnik je tak štirikotnik, ki mu lahko očrtamo krožnico.

## MENA

Večkrat slišimo o Luninih menah (prvi krajec, ščip, zadnji krajec, mlaj), včasih tudi o menah notranjih planetov (Venere in Merkurja), redkeje pa o menah zunanjih planetov (Marsa). Marsikdo ne ve, kaj je ščip, mlaj zamenja za ščip, mlado luno zamenja za staro, sploh pa ne zna pojasniti Luninih men.

Zato bomo tokrat povedali nekaj o meni na splošno. Pogledali bomo, kaj mena je, kako je definirana in zakaj se spreminja pri opazovanih bližnjih vesoljskih telesih.

*Mena* ali *faza* Lune oziroma bližnjega planeta pove, kolikšen del navidezne okrogle ploščice (diska) vesoljskega telesa, vidnega z Zemlje, je v določenem trenutku osvetljen. Mena je definirana kot kvocient od Sonca osvetljenega dela Luninega (planetovega) navideznega premera in celotnega premera (slika 1). Zaradi gibanja Zemlje, s katere opazujemo premikajoča se vesoljska telesa, se mena teles stalno spreminja, kar je posebno opazno pri bližnjih vesoljskih telesih.

Slike 2, 3 in 4 prikazujejo, zakaj pride do men Lune in planetov ter kako jih vidimo. Pri omenjenih slikah si moramo vsakič predstavljati, da smo na Zemlji v označeni legi in da gledamo proti določenemu vesoljskemu telesu (Luni, Veneri, Marsu), ki se giblje po svojem tiru in je torej v različnih legah. Zaradi velike oddaljenosti Sonca so sončni žarki, ki padajo na Luno ali planete, skoraj vzporedni. Luno in planete vidimo zaradi odbite sončne svetlobe, ki se odbije na teh telesih in pride v naše oko. Vsa gibanja naj se odvijajo v ravnini Zemljinega gibanja okrog Sonca. Ob robu vsake slike so prikazane navidezne slike vesoljskih teles – mene za ustrezno lego telesa na tiru.

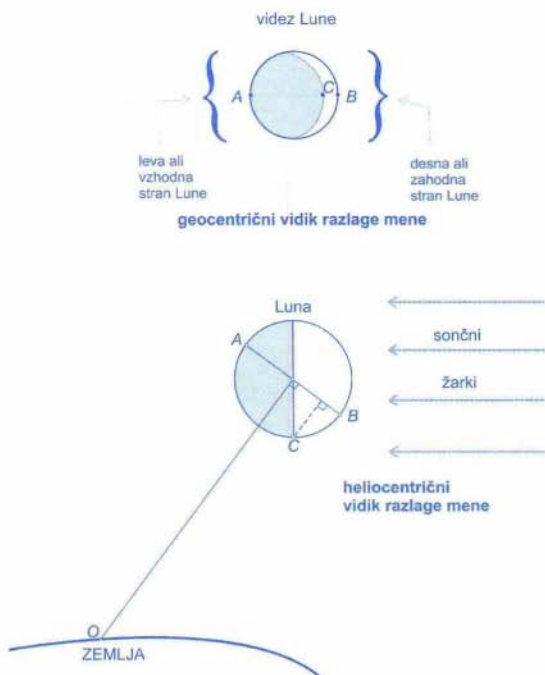
Meno lahko prikažemo tudi s poskusom v temi. Za Sonce uporabimo kar baterijo, za Luno ali planet pa žogico (slika 5). Mene Lune ali bližnjega planeta lahko tudi fotografiramo (slika 6).

### Lunine mene

Slika 2 prikazuje Luno v osmih legah na njenem tiru okrog Zemlje, ob vsaki legi pa je dodana navidezna Lunina oblika – mena, vidna z Zemlje. Časovni presledek med zaporednima istovrstnima menama (npr. ščipoma) imenujemo *sinodski obhodni čas* ali *sinodski mesec* (lunacija). V povprečju meri 29,53 dneva, se pa s časom spreminja za nekaj ur zaradi sploščenosti Zemljinega in Luninega elipsnega tira.



Od mlaja do ščipa se Luna navidezno debeli ali 'gor jemlje' (*mlada luna*), od ščipa do mlaja pa se navidezno tanjša, 'crkava' ali 'dol jemlje' (*stara luna*). Posamezna mena je torej prikaz trenutnega videza Lune, pri mladi in stari luni pa gre za časovni razmik približno pol meseca. Vse to z lahkoto ugotovimo z opazovanjem s prostim očesom.

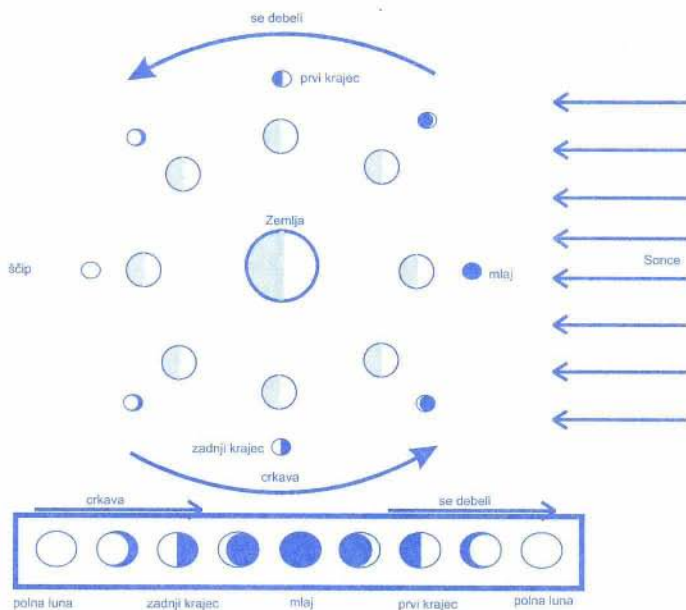


Slika 1. Mena  $f$  je kvocient osvetljenega dela premera in celotnega premera vesoljskega telesa, opazovanega z Zemlje, torej  $f = \frac{|BC|}{|AB|}$ .  $O$  – opazovalec na Zemlji.

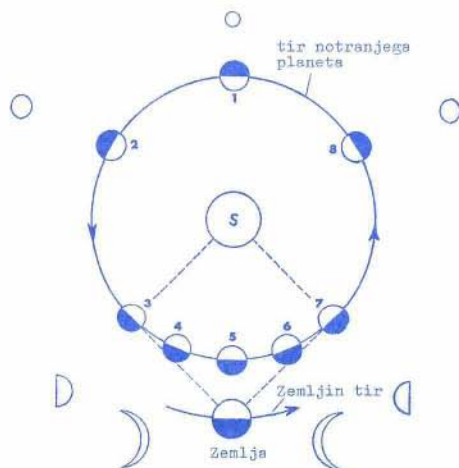
Za Lunine mene velja: ob mlaju je  $|BC| = 0$  in  $f = 0$  (mena je nič), ob prvem ali zadnjem krajcu je  $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$  in  $f = \frac{1}{2}$ , ob ščipu je  $|BC| = |AB|$  in  $f = 1$  itn. Slika prikazuje videz vesoljskega telesa (to je Lune) pri pogledu z Zemlje. V prikazani meni se Luna navidezno debeli;  $f \approx \frac{1}{4}$ .

## Mene notranjega planeta

Vzemimo, da od zunaj gledamo tir notranjega planeta. Z zunanjega opazovališča, torej z Zemlje, lahko vidimo vse planetove mene, tako kot npr. vidimo Lunine mene. Razlika je le v tem, da navidezni premer, to je zorni kot Lune, ostane ves čas skoraj stalen pri vseh menah, za notranje planete pa to ne velja.



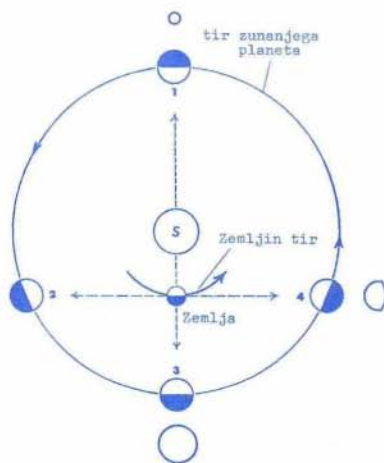
Slika 2. Razlaga Luninih men. V okvirčku je prikazano navidezno debeljenje in tanjšanje Lune.



Slika 3. Mene notranjega planeta, npr. Venere.

Pri kroženju okrog Sonca se notranjemu planetu zelo hitro spreminja oddaljenost od Zemlje. Zato se navidezni premer planeta spreminja od mene do mene. Slika 3 prikazuje lege notranjega planeta na njegovem tiru in njegov vsakokratni videz – meno. Blizu zunanje konjunkcije (1) je vidna skoraj celotna, od Sonca osvetljena polkrogla planeta, ki pa je tedaj najbolj oddaljen od Zemlje. Planet je viden kot svetel disk (svetla okrogla ploščica – polna mena), ki je zelo majhen. Ko se planet premika po tiru in pride v lego (2), se njegova oddaljenost od Zemlje zmanjšuje, povečuje pa se navidezni premer, osvetljeni del se obrača stran od Zemlje, planet se zdi nekoliko zabuhel. V največji vzhodni elongaciji ali kotni razdalji od Sonca (3) ima planet meno v obliki prvega krajca, a je že navidezno večji. Ko gre skozi pojemajočo meno (4), se seveda zorni kot planeta še vedno veča, dokler ne doseže v notranji konjunkciji (5) največjega navideznega premera, toda od Sonca osvetljena stran je obrnjena proč od Zemlje in planet je neviden. Pa tudi sicer je tedaj planet skupaj s Suncem na nebu in neviden. Po nekaj dneh se že pojavi kot tanek srpek (6), ki se počasi debeli z zmanjševanjem navideznega premera planeta, dokler ne doseže zadnjega krajca pri največji zahodni elongaciji (7). Planet se nato naprej navidezno debeli (8), dokler ne doseže naslednje zunanje konjunkcije, ko je za Suncem in nekaj časa neviden.

Zaradi bližine Sonca ne moremo opazovati vseh Venerinih men, kaj šele Merkurja, ki je še bližje Soncu in še dosti manjši je od Venere. Sij planeta je tako odvisen od mene kot tudi od oddaljenosti planeta od Sonca in od Zemlje ter tudi njegovega albeda (odbojnosti svetlobe). Zanimivo je, da je na primer Venera v največjem siju okoli 35 dni pred notranjo konjunkcijo in prav toliko dni po njej, ko je njena mena razmeroma precej tanek srpek.



Slika 4. Mene zunanjega planeta, npr. Marsa.

## Mene zunanjega planeta

Zunanje planete opazujemo od znotraj navzven, ker kroži Zemlja okrog Sonca bližje kot ti planeti. Tako zunanji planeti nikdar ne morejo priti med Sonce in Zemljo, torej v notranjo konjunkcijo, kot to velja za notranje



planete. S slike 4 razberemo, da je polna mena planeta možna v dveh legah: v konjunkciji (1), ko je planet sicer neviden, in v opoziciji (3), ko je v nasprotni legi kot Sonce in tako viden vso noč, pri čemer je zaradi manjše oddaljenosti od Zemlje planet navidezno precej večji (3). Med obema navedenima legama pa je planet videti *rahlo* odebeljen (za to meno nimamo ustreznega izraza), najbolj v kvadraturah, torej v legah (2) in (4).

Zaradi tega, ker je Zemljin tir majhen v primerjavi s tiri zunanjih planetov, so njihove mene zelo neizrazite. Že pri Saturnu ni mogoče ugotoviti mene, sploh pa ne pri še bolj oddaljenih planetih. Celo pri Marsu, ki nam je od zunanjih planetov najbližji, je ob najopaznejši meni zatemnjena le desetina celotne poloble.



Slika 5. Preprost prikaz mene okroglega telesa (npr. Lune), ki kroži okrog drugega telesa (npr. Zemlje) – poskus z modelom.



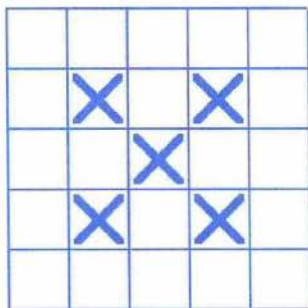
Slika 6. Levo: fotografija stare lune (zgoraj je planet Saturn); v sredini: fotografija Venere blizu njenega prvega krajca; desno: fotografija Merkurjeve mene z vesoljske sonde Mariner 10.

## GRAFIČNA PODPORA

V programerski hiši CrissCross™ so vas zadolžili za pripravo grafične podpore njihovi najnovejši vzgojni igrici. Vaša naloga je, da v programskem jeziku logo sestavite ukaz, ki nariše kvadratno mrežo velikosti  $5 \times 5$  in na njej s križci označi tista polja, katerih koordinate se nahajajo v seznamu, ki je parameter ukaza. Posamezno polje mreže je opisano s parom (seznamom) števil, pri čemer levemu spodnjemu polju ustreza par  $[0\ 0]$ , desnemu spodnjemu par  $[4\ 0]$ , levemu zgornjemu par  $[0\ 4]$  in desnemu zgornjemu polju par  $[4\ 4]$ . Tako na primer klic

```
prikazi [[1 1] [2 2] [3 3] [1 3] [3 1]]
```

nariše spodnjo sliko.



Pozor, križci so narisani z nekoliko debelejšo črto kot kvadratna mreža. Ukaz, s katerim v logu spremenite debelino želvinega peresa, se imenuje `SETPENSIZE`.

*Martin Juvan*

---

## DOKAŽI NEENAKOST

Naj bodo  $x$ ,  $y$  in  $z$  poljubna pozitivna realna števila, za katera je  $x + y + z = 1$ . Dokaži, da tedaj velja

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

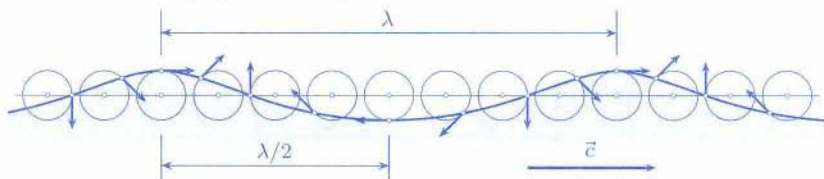
Kdaj velja v zgornji oceni enačaj? (Naloga je bila zastavljena na avstrijski matematični olimpiadi leta 1970.)

*Marko Razpet*

## PLAVANJE Z VALOVI

Ste že kdaj plavali v takšnem valovitem morju, ko se povsem pogreznemo v dolino in nas morje spet dvigne na vrh? Na take valove še sedaj nestrpno čakam, ko sem na letovanju. Izkušnje mnogih let kažejo, da pridejo vsako leto, če smo le kaka dva tedna na morju.

Valovanje na vodni gladini ni tako preprosto kot na napeti vrvi. Na slednji nihajo delci pravokotno na širjenje valov. Takemu valovanju pravimo transversalno valovanje. Tudi zvočni valovi so preprostejši od valov na vodi, saj delci zraka nihajo v smeri razširjanja valov – valovanju te vrste pravimo longitudinalno valovanje. Na vodni gladini, ko je voda globoka v primeri z valovno dolžino, pa delci vode krožijo, valovanje je torej nekakšna kombinacija transversalnega in longitudinalnega valovanja. Na valovnem vrhu teče voda v smeri valovanja, v dolu pa v nasprotni smeri (slika 1). Vmes sta točki, ko se vodni delci gibljejo v navpični smeri, torej pravokotno na širjenje valovanja.



Slika 1. Gibanje vodnih delcev v valu. Izbrani delec se giblje po krogu s polmerom, ki je enak amplitudi vala. Val se giblje od leve proti desni, kot kaže vektor valovne hitrosti  $\vec{c}$ .

Hitrost toka v valovnem vrhu ali dolu je povezana z amplitudo valovanja  $s_0$  in njegovo valovno dolžino  $\lambda$ . Ker se pot izbranega vodnega delca po krožni poti zaključi v času, ko valovanje napreduje za valovno dolžino, torej v obhodnem času

$$t_0 = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c},$$

je njegova obodna hitrost enaka razmerju med dolžino krožnice s polmerom, ki je enak amplitudi valovanja  $s_0$ , kar je  $2\pi s_0$ , in obhodnim časom  $t_0$ :

$$v_k = \frac{2\pi s_0}{t_0} = c \frac{2\pi s_0}{\lambda}.$$



S c smo označili hitrost valovanja, ki je v globoki vodi podana z izrazom

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Za razliko od izrazov za hitrost valovanja na vrvi ali zvočnega valovanja v zraku vsebuje ta izraz tudi valovno dolžino, kar je še ena posebnost valovanja na vodni gladini.

Ko plavamo vzdolž valov, prav jasno čutimo, da nas na valovnem vrhu tok žene naprej, v dolu pa nas zavira. Tudi ni mogoče prezreti, da plavimo vzdolž valov znatno hitreje kot proti njim, čeprav se v obeh primerih enako naprezamo. Oglejmo si, zakaj je tako, in izračunajmo povprečno hitrost plavanja v obeh primerih.

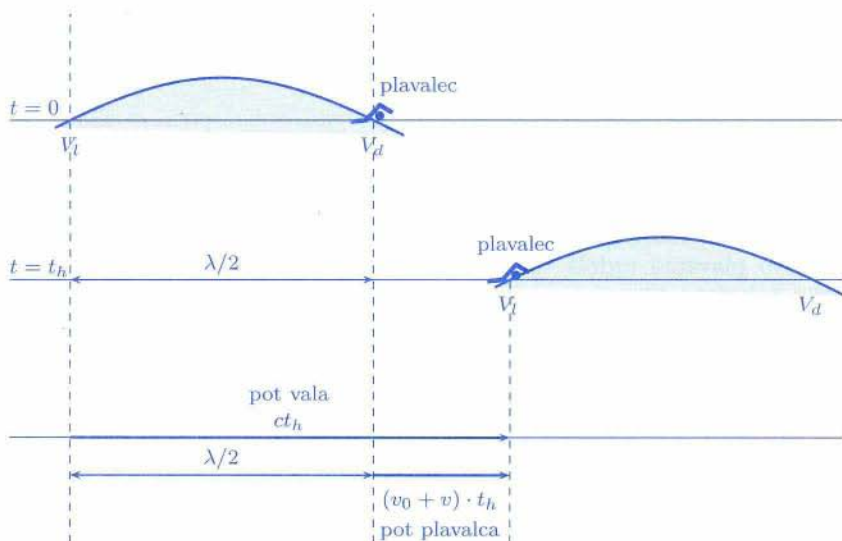
Najprej se vprašajmo, zakaj smo pri plavanju vzdolž valov hitrejši, saj delci vode pri valovanju le krožijo in se premikajo okrog negibne točke. Na prvi pogled bi sklepali, da se bo zaviranje v dolu in pospeševanje na vrhu izravnilo in bo torej povprečna hitrost plavalca enaka kot v mirnem morju. Natančnejši premislek pojasni opazovanja: plavalec plava dlje časa na valovnem vrhu kot v valovnem dolu. V vrhu ima večjo hitrost kot v dolu, zato ga dol pozneje doseže. Ker je njegova hitrost v vrhu nekoliko večja, je povprečna hitrost plavalca večja od hitrosti, s katero plava v mirnem morju.

Poskusimo to izraziti še z računom. Da si ga poenostavimo, bomo privzeli, da ima plavalec v področju valovnega hriba, torej tam, kjer so delci vode nad nemoteno gladino, hitrost  $v_0 + v$ , drugje pa hitrost  $v_0 - v$ , kjer je  $v_0$  hitrost plavalca v mirni vodi. Plavalec bo v naših računih zelo kratek v primeri z valovno dolžino, dolžina valovnega hriba pa naj bo  $\frac{\lambda}{2}$  in tako enaka dolžini dola. Le pri zelo majhni nemoteni hitrosti  $v_0$  se bo pokazalo, da je dolžina dola nekoliko daljša kot hriba. Valovanje potuje s hitrostjo  $c$ . Izračunajmo čas, ki ga plavalec preživi v valovnem hribu, označimo ga s  $t_h$ . Pri računu si pomagamo s sliko 2, kjer so razmere jasno prikazane. Področje valovnega hriba je dolgo  $\frac{\lambda}{2}$ . Ko je plavalec ob vznožju  $V_l$  hriba in ima hitrost  $v_0 + v$ , ga val dohiteva s hitrostjo  $c$ , zato velja

$$(v_0 + v)t_h + \frac{\lambda}{2} = ct_h.$$

Prvi člen na levi strani enačbe je pot plavalca, dokler ga ne dohiti dol, na desni strani pa je pot, ki jo mora opraviti vznožje  $V_d$ , da dohiti plavalca. Iz te enačbe sledi

$$t_h = \frac{\lambda}{2(c - v_0 - v)}.$$



Slika 2. Razmere ponazarjajo enačbo za izračun časa  $t_h$ . Zgornja slika kaže plavalca ob vznožju valovnega hriba v času  $t = 0$ , srednja pa plavalca, ko ga je dohitela dolina v času  $t_h$ . Točki  $V_l$  in  $V_d$  potujeta z valom.

Privzeli smo, da je hitrost valovanja  $c$  večja od hitrosti  $v_0 + v$ , kar je pri plavanju brez pomoči kakega motorja vedno izpolnjeno. Podobno dobimo čas  $t_d$ , ki ga plavalec preživi v valovni dolini:

$$t_d = \frac{\lambda}{2(c - v_0 + v)}.$$

Sedaj lahko izračunamo povprečno hitrost plavalca, saj vemo, da traja plavanje v valovnem hribu čas  $t_h$  s hitrostjo  $v_0 + v$  in čas  $t_d$  v valovni dolini s hitrostjo  $v_0 - v$ . Skupna pot  $s_s$ , ki jo opravi plavalec v skupnem času  $t_s = t_h + t_d$  je  $(v_0 + v)t_h + (v_0 - v)t_d$ , zato je njegova povprečna hitrost

$$\bar{v} = \frac{s_s}{t_s} = \frac{(v_0 + v)t_h + (v_0 - v)t_d}{t_h + t_d}.$$

Po krajšem računu dobimo za povprečno hitrost

$$\bar{v} = v_0 + \frac{v^2}{c - v_0}.$$

Pri računanju smo upoštevali, da je  $c > v + v_0$ , tako da je imenovalec v zgornji enačbi vedno večji od  $v$  in zato povprečna hitrost  $\bar{v}$  vedno manjša od  $v_0 + v$ . Na meji, ko velja  $c = v_0 + v$ , je  $\bar{v} = c$ , kar ustreza plavanju na valovnem vrhu. Zaradi velike hitrosti nekajmetrskih valov na globokem morju v primeri s hitrostjo, ki jo dosežemo s plavanjem, je to mejo praktično nemogoče doseči. Če v izraz postavimo  $v_0 = 0$ , bi pričakovali rezultat  $\bar{v} = 0$ , dobimo pa od nič različno vrednost. Pri majhni hitrosti  $v_0$  bi morali upoštevati, da je dolžina dola nekoliko večja od hriba, kar jasno vidimo na sliki 1.

Pri plavanju valovom naproti je računanje podobno. Sedaj gresta plavalec in val drug proti drugemu in je enačba za računanje časa plavanja v valovnem hribu

$$(v_0 + v)t_h + ct_h = \frac{\lambda}{2},$$

v valovni dolini pa

$$(v_0 - v)t_h + ct_h = \frac{\lambda}{2}.$$

Po podobnem računu kot zgoraj pridemo do navidez podobnega rezultata:

$$\bar{v} = v_0 - \frac{v^2}{c + v_0}.$$

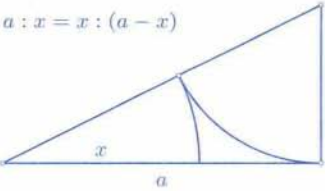
Pri plavanju v valove je torej povprečna hitrost manjša od nemotene hitrosti  $v_0$ , a izgubljammo nekoliko manj hitrosti kot je pridobivamo s plavanjem z valovi. Imenovalec v izrazu za  $\bar{v}$  je sedaj  $c + v_0$  in je tako vedno večji kot v prejšnjem primeru.

Oglejmo si še številski primer. Valovi z amplitudo kakega metra imajo valovno dolžino kakih dvajsetih metrov in hitrost  $c = \sqrt{\frac{10 \cdot 20 \text{ m}^2}{6,28 \text{ s}^2}} = 5,6 \text{ ms}^{-1}$  ter hitrost toka v vrhu in dolu  $v_k = 1,8 \text{ ms}^{-1}$ . Rekreativni plavalec z ne preveč truda plava s hitrostjo  $v_0 = 0,7 \text{ ms}^{-1}$ . S temi podatki dobimo, da je povprečna hitrost plavalca v smeri valov  $1,4 \text{ ms}^{-1}$ , če privzamemo, da je  $v = v_k$ . To je dvakratno povečanje njegove nemotene hitrosti. Primer je nekoliko pretiran, saj je privzeti podatek  $v = v_k$  le zgornja meja za hitrost  $v$ . Če pa smo dovolj spretni, učinek valov povečamo tako, da se na valovnem vrhu ali pa nekaj prej še posebno močno odrinemo. Takrat je privzeto morda bolj na mestu. Pri plavanju proti valovom pa je povprečna hitrost le  $\bar{v} = 0,2 \text{ ms}^{-1}$ , kar je občutno zmanjšanje nemotene hitrosti.

Andrej Likar



## KRIŽANKA “ESTETSKO DELILNO RAZMERJE”

|                                                                                                         |  |                                                       |  |                                                                                 |  |                                       |  |                                       |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------|--|---------------------------------------|--|
| $a : x = x : (a - x)$  |  | $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$ |  | NAČRTO-<br>VALEC<br>ZGRADB,<br>KI TUJI<br>UPORABLA<br>TO<br>DELILNO<br>RAZMERJE |  | SLAST<br>DO<br>JEDI,<br>TEK           |  | VNOM<br>UPRIZO<br>TV DI               |  |
| PREPOVEDAN<br>POLOŽAJ NAPADALCA<br>PRI NOGOMETU                                                         |  | CIRKONIJI<br>POTEZE NA<br>OBRAZU<br>PRED JOKOM        |  | HOKEJSKI<br>PLOŠČEK                                                             |  | VELIKA<br>NOČ<br>(NAREČNO<br>VZHODNO) |  | RAZVOJ TEGA RAZMERJA V ...            |  |
| TROEN<br>ZAŠČITNI<br>OVOJ<br>TELESA                                                                     |  |                                                       |  |                                                                                 |  | IZBRANA<br>DRUŽBA                     |  |                                       |  |
| REKLO                                                                                                   |  |                                                       |  |                                                                                 |  | KRAJ PRI<br>DINACI                    |  |                                       |  |
|                                                                                                         |  |                                                       |  |                                                                                 |  | RDEČKASTA<br>LIŠA                     |  |                                       |  |
| DEL<br>IGRE PRI<br>TENISU,<br>NIZ                                                                       |  |                                                       |  | HRIB NAD<br>LJUBLJANO                                                           |  |                                       |  | MOŠ, PEVSKI<br>GLAS                   |  |
|                                                                                                         |  |                                                       |  | NIELS<br>BOHR                                                                   |  |                                       |  | MATJUA PO<br>DOMAČE                   |  |
| AMONI-<br>AKOVA<br>SPOJINA                                                                              |  |                                                       |  | NEPASIRANA<br>MARMELADA                                                         |  |                                       |  | KROŽNA<br>ŽAGA ZA<br>ČELJENJE<br>LESA |  |
|                                                                                                         |  |                                                       |  | MOŠTVENI<br>SPORT                                                               |  |                                       |  |                                       |  |
| JONAŠ<br>ŽNIDARŠIČ                                                                                      |  | KITARIST                                              |  |                                                                                 |  |                                       |  |                                       |  |
|                                                                                                         |  | MESNA JED<br>V KISLI<br>OMAKI                         |  |                                                                                 |  |                                       |  |                                       |  |
| NIZO-<br>ZEMSKI<br>AVTO                                                                                 |  |                                                       |  | OČKA,<br>ATI                                                                    |  |                                       |  | MESTO V<br>ROMUNJI                    |  |
|                                                                                                         |  |                                                       |  | ALENKA<br>BIKAR                                                                 |  |                                       |  | FR. IGRA<br>S KARTAMI                 |  |
| 1, 1, 2, 3,<br>5, 8, 13, 21,<br>34, 55, ...                                                             |  | RAZRED<br>ČLENO-<br>NOŽCEV                            |  |                                                                                 |  | IZRAELSKA<br>LUKA                     |  |                                       |  |
|                                                                                                         |  | GLAS                                                  |  |                                                                                 |  | ŽARGON<br>(ORIG.)                     |  |                                       |  |
| SIROMAŠTVO                                                                                              |  |                                                       |  |                                                                                 |  |                                       |  |                                       |  |
| STRANSKI<br>DEL<br>TELESA                                                                               |  |                                                       |  | MARJUA PO<br>DOMAČE                                                             |  |                                       |  | MESTO OB<br>SAVI                      |  |
|                                                                                                         |  |                                                       |  | EVROPSKI<br>VELETOK                                                             |  |                                       |  | AVS. SMUČAR<br>(HANS)                 |  |
| ŠVEDSKO<br>IME<br>FINSKEGA<br>JEZERA<br>INARI                                                           |  |                                                       |  |                                                                                 |  | SLADKOV,<br>RIBA,<br>PEZDIREK         |  |                                       |  |
|                                                                                                         |  |                                                       |  |                                                                                 |  | KARLOVAC                              |  |                                       |  |
| PRAV. LIK S<br>POLM. OČRT.<br>KROŽNICE IN<br>STRANICO<br>V TEM<br>RAZMERJU                              |  |                                                       |  |                                                                                 |  |                                       |  |                                       |  |
| KONEC<br>PRI<br>MOLITVI                                                                                 |  |                                                       |  | PREBI-<br>VALKA<br>GRŠKE<br>PRESTOL-<br>NICE                                    |  |                                       |  |                                       |  |



## HIPOKRATOVE LUNE

To je zelo stara zgodba, stara toliko kot kvadratura kroga (v resnici je z njo v tesni zvezi) in izvira še iz "herojskih" časov starogrške matematike. Ker pa je kljub svoji častitljivi starosti tudi med matematiki bolj malo znana, jo kaže obnoviti.

Začetek zgodbe je povezan z grškim matematikom *Hipokratom s Kiosa*, ki je živel v 5. stoletju pred našim štetjem<sup>1</sup>. Hipokrat se je z rojstnega otoka Kiosa preselil v Atene, kjer je učil geometrijo nekako v letih od 450 do 430 pr.n.št. Pripisujejo mu avtorstvo (izgubljene) knjige *Elementi geometrije*, iz katere je kasneje črpal Evklid. V njej naj bi med drugim podal geometrijsko rešitev kvadratne enačbe in postavil temelje metodi izčrpavanja. Ukvarjal se je tudi s problemom podvojitve kocke, najbolj znan pa je zaradi "kvadrature lune".

Kot vemo, je bila kvadratura kroga za Grke eden od osnovnih matematičnih problemov in prav Hipokrat se je s tem vprašanjem največ ukvarjal. Odkril je presenetljivo dejstvo, da lahko nekatere krivočrtne like kvadriramo, to je, z ravnilom in šestilom (danes bi rekli z evklidskim orodjem) pretvorimo v ploščinsko enak kvadrat. Hipokratovo odkritje je grškim matematikom vzbudilo tudi upanje, da je mogoče na podoben način kvadrirati ves krog.

V tem prispevku si bomo ogledali nekaj nalog, ki jih je znal rešiti že Hipokrat. Ker niso zelo težke, vabimo bralca, da se jih loti tudi sam (rešitve bomo objavili v naslednji številki). Ob reševanju ne bo samo uril možganov, ampak bo s tem prehodil tudi nekaj začetnih korakov v razvoju tega zanimivega problema, ki ima, kot bomo videli, dolgo in pestro zgodovino.

Prvi Hipokratov primer je bil *lunin krajec*, ki nastane, če nad stranico kvadrata (z zunanje strani) narišemo polkrog in od njega "odščipnemo" presek s krogom, ki je očrtan kvadratu (slika 1).

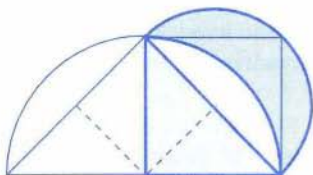
Hipokrat je rešil ta problem s pravilnim sklepanjem, da je razmerje ploščin podobnih krožnih odsekov enako razmerju ploščin kvadratov nad

---

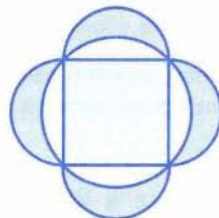
<sup>1</sup> Ne smemo ga zamenjevati s prav tako ali pa še bolj slavnim, v istem času živečim soimenjakom, znamenitim zdravnikom, ki pa je bil doma z otoka Kosa.



tetivama. Tako je pokazal, da je ploščina luninega krajca enaka ploščini polovice kvadrata (rahlo osenčenemu trikotniku na sliki 1), od koder je lahko brez težav poiskal ploščinsko enak kvadrat. S kvadraturo lune si je Hipokrat vsekakor pridobil velik sloves.



Slika 1.



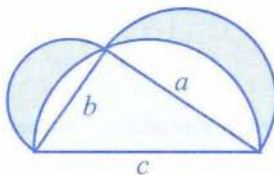
Slika 2.

Naslednja naloga je le različica Hipokratove prve uspešne kvadrature lune in jo lahko srečamo v učbenikih in na tekmovanjih.

**Naloga 1.** *Kvadrat povečajmo za štiri polkroge nad stranicami in od dobljenega lika odrežimo kvadratu očrtan krog (slika 2). Pokažite, da je ploščina ostanka enaka ploščini prvotnega kvadrata.*

Rahla posplošitev Hipokratovega sklepa je naloga, ki jo je okrog leta 1000 zastavil in rešil *Hasan Ibn al Haitam (Ibn al-Haytham)*, znan tudi kot *Alhazen*, kar je latinizirana oblika njegovega imena. Zanimivo je, da jo je približno pet stoletij kasneje, verjetno neodvisno, rešil tudi *Leonardo da Vinci*. Med njegovimi rokopisi so namreč našli številne skice na to temo.

**Naloga 2.** *Nad katetama pravokotnega trikotnika konstruirajmo polkroga in od tako povečanega trikotnika odrežimo polkrog nad hipotenuzo (slika 3). Pokažite, da je ploščina ostanka enaka ploščini prvotnega pravokotnega trikotnika.*



Slika 3.

Tudi to sliko pogosto vidimo v knjigah in priročnikih. Hipokratova kvadratura lune je očitno poseben primer naloge 2, ko je pravokotni trikotnik enakokrak.

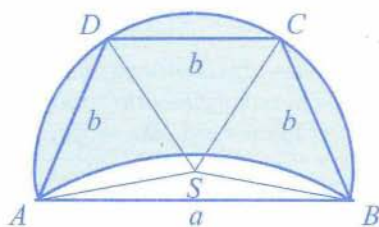
**Naloga 3.** *Konstruirajte kvadrat, ki ima enako ploščino kot pravokotni trikotnik s katetama  $a$ ,  $b$  in hipotenuzo  $c$ .*

Če torej uspešno rešimo nalogi 2 in 3, dobimo kvadrat, ki je ploščinsko enak osenčenima lunama na sliki 3. S tem kvadriramo obe luni hkrati.

Vrnimo se h kvadraturi ene same lune. V prvem Hipokratovem primeru je bil krožni odsek, ki ga določa zunanji lunin lok, ravno polovica kroga. Toda Hipokrat je poleg tega našel še dva druga primera polmesecev, ki ju lahko kvadriramo; pri enem je krožni odsek večji, pri drugem pa manjši od polovice kroga. Na žalost so ta dva njegova rezultata spregledali, ju v 18. stoletju ponovno odkrili in šele kasneje ugotovili, da ju je poznal že Hipokrat.

Pri drugem Hipokratovem polmeseču je središčni kot zunanjega loka večji od  $180^\circ$ . Do njegove konstrukcije pridemo po naslednjem postopku:

Narišimo najprej tak enakokraki trapez  $\mathcal{T}$  z osnovnico  $a$ , krakoma  $b$  in vzporedno osnovnico  $c = b$ , da velja  $a^2 = 3b^2$ . Trapez  $\mathcal{T}$  naj ima oglišča  $A, B, C, D$ , pri čemer naj bosta  $AB$  in  $CD$  osnovnici,  $BC$  in  $AD$  pa kraka. Temu trapezu očrtajmo krog. Tako dobimo zunanji lok  $ADCB$  polmeseča, notranji lok pa naj bo podoben loku nad stranico  $DC$  (slika 4).



Slika 4.

Če sledimo Hipokratovim navodilom, se nam porodi kar nekaj vprašanj. Zastavimo jih bralcu v obliki naslednjih štirih nalog:

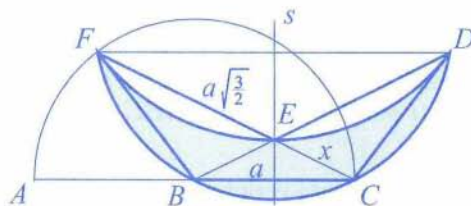
**Naloga 4.** *Kako načrtamo  $a$ , če poznamo  $b$  in mora biti  $a^2 = 3b^2$ ?*

**Naloga 5.** Pokažite, da leži središče  $S$  očrtanega kroga znotraj trapeza  $\mathcal{T}$ , se pravi, da je krožni odsek  $ADCB$  večji od polovice očrtanega kroga.

**Naloga 6.** Prepričajte se, da je ploščina polmeseca enaka ploščini trapeza  $\mathcal{T}$ .

**Naloga 7.** Konstruirajte kvadrat z enako ploščino, kot jo ima trapez  $\mathcal{T}$ .

Tretja Hipokratova konstrukcija, pri kateri je zunanji lok manjši od  $180^\circ$ , je nekoliko bolj zapletena. Načrtajmo polkrožnico nad premerom  $AC$ . Točka  $B$  naj bo njeno središče,  $s$  pa simetrala daljice  $BC$ . Nato položimo skozi točko  $C$  premico, ki seka simetralo  $s$  v točki  $E$  in polkrožnico v točki  $F$ , pri čemer naj velja  $FE^2 = \frac{3}{2}FB^2$  (slika 5).



Slika 5.

Kako to storimo, je poseben problem, povezan z geometrijskim reševanjem kvadratne enačbe. Naj bo  $BC = a$  in  $CE = x$ . Potem zaradi podobnosti trikotnikov  $FBC$  in  $BCE$  velja  $CF \cdot CE = BC^2$ , se pravi  $(x + \sqrt{\frac{3}{2}}a)x = a^2$  oziroma  $x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax - a^2 = 0$ . Če poznamo  $x$ , lahko konstruiramo točko  $E$  in nato še točko  $F$ . Kot je bilo rečeno na začetku, je Hipokrat znal geometrijsko reševati take kvadratne enačbe.

**Naloga 8.** Konstruirajte z ravnilom in šestilom daljico dolžine  $x$ , če poznate dolžino daljice  $a$  in če velja  $x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax - a^2 = 0$ .

Točko  $F$  prezrcalimo preko simetralske  $s$  tako, da dobimo še točko  $D$ , in enakokrakemu trapezu  $FBCD$  očrtajmo krog. Nato narišimo še krožni lok  $DEF$  tako, da dobimo polmeseček  $FBCDE$  (slika 5).

**Naloga 9.** Pokažite, da je vsak od krožnih odsekov nad  $FE$  oziroma  $ED$  podoben vsakemu od krožnih odsekov nad  $FB$ ,  $BC$  in  $CD$ .



Od tod lahko potem brez težav uženemo tudi glavno nalogo:

**Naloga 10.** Pokažite, da je ploščina luninega krajca  $FBCDE$  enaka ploščini petkotnika  $BCDEF$ .

Morda se je dobro tudi prepričati, da je v tem tretjem primeru Hipokrat kvadriral luno, katere zunanji lok je krajši od polovice krožnega oboda.

**Naloga 11.** Pokažite, da je zunanji lok polmesece krajši od polovice krožnice.

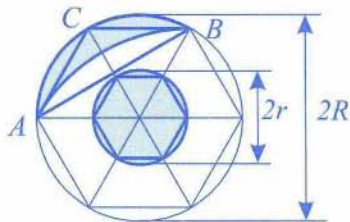
Poleg teh treh glavnih primerov kvadriranja lun je Hipokratu uspelo kvadrirati tudi eno od lun in krog (skupaj). Če načrtamo koncentrična kroga s polmeroma  $r$  in  $R$  tako, da je  $R^2 = 6r^2$ , in vsakemu od njiju včrtamo pravilni šestkotnik, poleg tega pa nad krajšo diagonalo večjega narišemo podoben lok, kot je nad vsako stranico (glej sliko 6), lahko brez večjih težav rešimo naslednjo nalogo:

**Naloga 12.** Pokažite, da je skupna ploščina luninega krajca in manjšega kroga enaka vsoti ploščin trikotnika  $ABC$  in manjšega šestkotnika (slika 6).

Zanimivo je, da so nekaj časa verjetno prav zaradi tega Hipokratovega uspeha zmotno mislili, da mu je uspela kvadratura kroga, češ, če zna kvadrirati luno, poleg tega pa še luno in krog, zna kvadrirati tudi krog. Pri tem so spregledali, da pri obeh rešitvah ne gre za isto luno.

Podobno zapeljiva je naslednja naloga:

**Naloga 13.** Pokažite, da je ploščina šestih polmesecev, ki nastanejo, če od pravilnega šestkotnika s stranico 1, povečanega za šest polkrogov nad stranicami, odrežemo očrtani krog, enaka ploščini tega šestkotnika z izrezano okroglo luknjo s premerom 1 (slika 7).

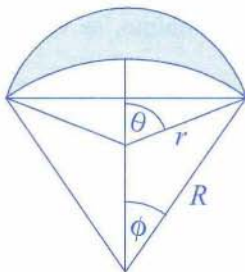


Slika 6.



Slika 7.

Zgodba o Hipokratovih lunah pa se ni zaključila v antiki, niti ne v srednjem veku ali renesansi, ampak – v 20. stoletju. Če hočemo vsaj na kratko opisati, kaj se je zgodilo, moramo dati problemu kvadrature lune drugačno, trigonometrično obliko. Oglejmo si poljuben lunin krajec, katerega zunanji lok pripada krogu s polmerom  $r$  in središčnemu kotu  $2\theta$ , notranji lok pa krogu s polmerom  $R$  in središčnemu kotu  $2\phi$  (slika 8).



Slika 8.

**Naloga 14.** Denimo, da kote merimo vadianih. Pokažite, da tedaj za ploščino  $p$  luninega krajca na sliki 8 velja formula

$$p = r^2\theta - R^2\phi + \frac{1}{2} (R^2 \sin 2\phi - r^2 \sin 2\theta) .$$

Če se omejimo samo na primer, ko sta ploščini obeh krožnih izsekov enaki, se pravi, ko je  $r^2\theta = R^2\phi$ , se formula nekoliko poenostavi:

$$p = \frac{1}{2} (R^2 \sin 2\phi - r^2 \sin 2\theta) .$$

Denimo, da je v takem primeru razmerje med središčnima kotoma enako racionalnemu številu  $k$ , torej  $\theta = k\phi$ . Potem je  $R = r\sqrt{k}$  in ploščina lune  $p = r^2(k \sin 2\phi - \sin 2k\phi)/2$ . Ker pa vedno velja  $r \sin \theta = R \sin \phi$ , saj tako leva kot desna stran pomenita polovico iste lunine tetive (glej sliko 8), so za kot  $\phi$  možne le tiste vrednosti, pri katerih je

$$\sin k\phi = \sqrt{k} \sin \phi .$$

To je v splošnem kar zapletena enačba. V posebnih primerih racionalnih števil  $k$  pa se na srečo precej poenostavi, tako da za  $\sin \phi$  dobimo enačbo, iz katere lahko samo s kvadratnimi koreni in štirimi računskimi operacijami izrazimo  $\sin \phi$ . Kot je dobro znano (glej npr. Ivan Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Knjižnica Sigma,

DMFAS, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972, str. 91), lahko tedaj  $\sin \phi$ , oziroma potem tudi sam kot  $\phi$ , konstruiramo samo z ravnilom in šestilom. To pa pomeni, da lahko tudi lunin krajec nad dano tetivo (ali z danim zunanjim ali notranjim polmerom) konstruiramo le z evklidskim orodjem. Formula za ploščino pove, da lahko enako konstruiramo tudi vrednost za  $p$  oziroma ploščinsko enak kvadrat. Torej lahko v takem primeru upravičeno govorimo, da je kvadratura lune uspela.

Tri Hipokratove primere dobimo, če vzamemo  $k = 2$ ,  $k = 3$  ali  $k = 3/2$ .

**Naloga 15.** Izračunajte  $\sin \phi$  iz enačbe  $\sin k\phi = \sqrt{k} \sin \phi$ , če je  $k$  enak 2, 3 ali  $3/2$ .

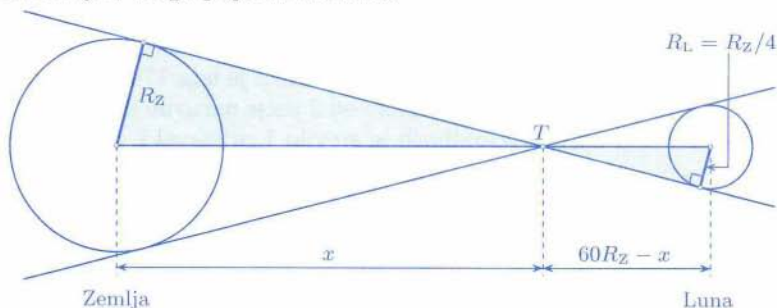
Nadaljnja dva primera, ko je kvadratura lune možna, je našel *M. J. Wallenius* leta 1766, in sicer za  $k = 5$  in  $k = 5/3$ . *T. Clausen* pa je leta 1840 ponovno rešil primere  $k = 3, 3/2, 5, 5/3$  (tedaj še ni bilo znano, da je primera  $k = 3$  in  $k = 3/2$  poznal že Hipokrat). Postavil je tudi domnevo, da razen teh in prve Hipokratove kvadrature ( $k = 2$ ) ni drugih primerov uspešnega kvadriranja lune pri racionalnem razmerju središčnih kotov. Raziskovanje problema se je nadaljevalo v 20. stoletju. *E. Landau* je leta 1903 raziskal problem brez predpostavke, da je razlika med ploščinama krožnih izsekov, tj. med  $r^2\theta$  in  $R^2\phi$ , enaka 0, ampak je enaka ploščini, ki je konstruktibilno število (se pravi, da jo lahko izrazimo iz števila 1 samo z racionalnimi operacijami in kvadratnimi koreni). Pokazal je, da ta razširitev ne pripelje do novih primerov kvadriranja. Istočasno je podal tudi dokaz, da za liho praštevilo  $k$  kvadratura ni možna, če  $k$  ni Fermatovo praštevilo (tj. praštevilo oblike  $k = 2^{2^j} + 1$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Leta 1929 je *L. Čakalov* dokazal Landauvov izrek na krajši način in prispeval še neskončno drugih primerov, ko kvadrature ni. Seveda je bilo to še daleč od dokaza, da je kvadratura možna le v omenjenih petih primerih. Prvi pozitivni rezultat je leta 1934 prispeval *N. Čebotarev*, ki je Clausenovo domnevo potrdil za primer  $k = m/n$ , kjer sta  $m$  in  $n$  tuji lihi števili: izmed takih števil, je kvadratura možna le za  $k = 3/1 = 3$ ,  $k = 5/1 = 5$  in  $k = 5/3$ . Pri tem je uporabljal teorijo ti.  $p$ -adicih števil. Problem je dokončno rešil šele *A. V. Dorodnov* leta 1947 z detajlno proučitvijo preostalega primera, ko je eno od števil  $m, n$  liho, drugo pa sodo. S tem je bila Clausenova domneva v celoti potrjena, zgodba o Hipokratovih lunah pa zaenkrat zaključena.

Milan Hladnik



## KJE VIDIMO VEČ, NA ZEMLJI ALI NA LUNI? – Rešitvi vaj s strani 28

- a) Uporabimo izraz  $\frac{h}{2r}$ . Za Luno velja:  $\frac{30R_Z - \frac{1}{4}R_Z}{2 \cdot 30R_Z} = 49,6 \%$ , za Zemljo pa  $\frac{30R_Z - R_Z}{2 \cdot 30R_Z} = 48,3 \%$ . Iz središča razdalje Zemlja–Luna vidimo 49,6 % Lunine površine in 48,3 % Zemljine površine.
- b) Točko, iz katere vidimo Luno in Zemljo pod enakim zornim kotom, izračunamo iz enačbe (glej skico):  $\frac{x}{R_Z} = \frac{60R_Z - x}{\frac{1}{4}R_Z}$ , od koder sledi  $x = 48R_Z$ . Spet uporabimo izraz  $\frac{h}{2r}$ . Za Luno velja:  $\frac{12R_Z - \frac{1}{4}R_Z}{2 \cdot 12R_Z} = 48,96 \%$ , za Zemljo pa  $\frac{48R_Z - R_Z}{2 \cdot 48R_Z} = 48,96 \%$ . Rezultat je tako razumljiv, da ga pojasni kar sam.



K opazovanju Zemlje in Lune iz točke, od koder sta obe vesoljski telesi vidni pod enakim zornim kotom.

Marijan Prosén

## MATEMATIČNA KRIŽANKA – PITAGOROV IZREK – Rešitev s str. 3

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   | 6 | 7 |   |   |
|   |   | 1 | 2 | 4 |   | 8 |
|   | 2 | 1 | 8 | 1 | 9 |   |
| 3 | 2 | 8 | 2 | 3 | 3 | 6 |
|   | 4 | 1 | 0 | 1 | 3 |   |
|   |   | 5 | 4 | 8 |   |   |

Dragoljub M. Milošević

## MILIJON DOLARJEV ZA DOKAZ GOLDBACHOVE DOMNEVE

Gotovo nas je že veliko razmišljalo, kako priti do denarja, ki bi nam omogočil ob lepih bančnih obrestih lagodno preživeti preostanek življenja. Reševanje matematičnih problemov se verjetno nikomur ni zdela prava pot za doseg takšnega cilja. In vendar lahko z matematiko pridemo do zajetnega kupčka denarja. Vse, kar je potrebno storiti, je dokazati dobrih 250 let staro domnevo pruskega zgodovinarja in matematika Christiana Goldbacha. Komur uspe do 15. marca 2002 dokazati, da je vsako od 5 večje naravno število vsota treh praštevil, mu bo angleški založnik Toby Faber izplačal milijon ameriških dolarjev nagrade. Oglejmo so Christiana Goldbacha in njegovo domnevo malo поблиže.

Christian Goldbach se je rodil leta 1690 v mestecu Königsberg<sup>1</sup> v tedanji Prusiji. Pomemben del njegovega matematičnega ustvarjanja je zajet v živahnem dopisovanju z Eulerjem. Tako je leta 1742 v enem od pisem postavil domnevo, da lahko vsako od 2 večje naravno število zapišemo kot vsoto treh praštevil (Goldbach je število 1 prišteval k praštevilom):

*Es scheint wenigstens das eine jede Zahl, die grösser ist als 2,  
ein aggregatum trium numerorum primorum sey.*

Euler je opazil, da je Goldbachova domneva ekvivalentna trditvi, da lahko vsako od 3 večje sodo število zapišemo kot vsoto dveh praštevil, in dodal, da je v pravilnost trditve prepričan, čeprav dokaza ne najde. Prvi večji korak v smeri dokaza Goldbachove domneve je bil storjen šele leta 1930, ko je ruski matematik Šnilerman dokazal, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto ne več kot 20 praštevil. Sedem let kasneje je Vinogradov dokazal, da obstaja število  $M$ , za katero se vsako od  $M$  večje liho število zapiše kot vsota ne več kot treh praštevil. Najboljši rezultat trenutno pripada kitajskemu matematiku Chen Jing Runu, ki je leta 1973 objavil dokaz trditve, da se vsako dovolj veliko sodo število zapiše kot vsota praštevil in produkta dveh praštevil.

Goldbachova domneva malce spominja na Fermatov zadnji izrek. Obe trditvi sta preprosti in njuno vsebino lahko razume prav vsak. Kljub

<sup>1</sup> Königsberg je matematikom znan tudi zaradi Eulerjevega problema königsberških mostov, katerega rešitev štejemo za začetek danes ene najhitreje razvijajočih se vej matematike – teorije grafov.

svoji preprostosti pa sta vse prej kot enostavno dokazljivi. Obe trditvi sta bili postavljeni *na robu papirja*, Fermatov teorem kot izrek, ki mu avtor zaradi pomanjkanja prostora na listu ni dodal čudovitega in preprostega dokaza, Goldbachova domneva pa kot pripomba na robu pisma Eulerju. Na dokaz Fermatovega izreka smo čakali 350 let. Bomo morali na odgovor o pravilnosti 250 let stare Goldbachove domneve čakati še nadaljnjih 100 let ali pa bo lepa denarna nagrada pospešila razvoj na tem področju in pripomogla k skorajšnji rešitvi problema? Strokovnjaki s področja teorije števil so skeptični. Po besedah nosilca Fieldsove medalje<sup>2</sup>, Alana Bakerja, denar vrhunskim matematikom ne predstavlja ključne motivacije: *Kdor bi znal, bi domnevo dokazal zaradi izziva samega.*

Angleški založniški mogotec Toby Faber je visoko denarno nagrado razpisal marca letošnjega leta ob izidu romana *Stric Peter in Goldbachova domneva* grškega pisatelja *Apostolos Doxiadisa*. Knjiga govori o uspešnem grškem matematiku, Petrosu Papachristouju, z ugledno matematično kariero, ki pa ga dolgoletna obsedenost z Goldbachovo domnevo pahne na rob družbe. Avtor pripoveduje zgodbo skozi oči matematikovega nečaka, ki počasi odkriva resnico o čudaškem stricu Petru in ki ob stričevi skriti strasti nikakor ne ostane ravnodušen. Roman še ni preveden v slovenščino, Presekovi bralci, ki jim angleščina ne povzroča težav, pa lahko knjigo za 18 ameriških dolarjev naročijo preko interneta. Ker je roman v pol leta, odkar je izšel angleški prevod, postal ena najbolj prodajanih knjig v Angliji in Združenih državah, se je razpisana denarna nagrada založnikom gotovo že povrnila (mimogrede, založniki so se za primer uspešne rešitve Goldbachove domneve zavarovali pri zavarovalnici, tako da lahko tudi sami z vso iskrenostjo želijo srečo vsem, ki jih bo zajeten kupček dolarjev premamil in se bodo podali na nevarno pot junaka njihove zgodbe).

Za konec pa naj razočaram vse tiste vnete bralce Preseka, ki so se že videli na kakšnem od tihomorskih otokov s polnimi žepi dolarskih bankovcev – za milijonsko nagrado lahko kandidirajo le polnoletne osebe s stalnim prebivališčem v Veliki Britaniji ali Združenih državah Amerike. Podrobnejše pogoje razpisa nagrade si lahko ogledate na internetni strani [www.faber.co.uk/faber/goldbachrules](http://www.faber.co.uk/faber/goldbachrules).

*Primož Potočnik*

---

<sup>2</sup> Fieldsova medalja je ekvivalent Nobelovi nagradi, ki je, kot vemo, za dosežke v matematiki ne podeljujejo. Kljub temu pa je med nosilci Nobelove nagrade veliko matematikov. V zadnjih letih je nagrada za dosežke v ekonomski znanosti praviloma pripadla matematiku.



## ŠAHOVSKI KONJ NA POLJIH KOCKE – Rešitev s str. 2

Če ste prepoznali pesmico Naš maček Simona Jenka, ste lahko hitro našli naslednjo rešitev zastavljene naloge. Vpisana števila pomenijo zaporedno številko koraka, na katerem konj obišče dano polje.

Lahko pa nalogo tudi obrnete in se iz rešitve naučite prvi dve kitici nagajive pesmice.

1. plast

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 10 | 7  | 22 | 17 |
| 21 | 18 | 9  | 6  |
| 8  | 11 | 20 | 23 |
| 19 | 24 | 5  | 12 |

2. plast

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 27 | 62 | 15 | 2  |
| 14 | 1  | 26 | 63 |
| 61 | 28 | 3  | 16 |
| 4  | 13 | 64 | 25 |

3. plast

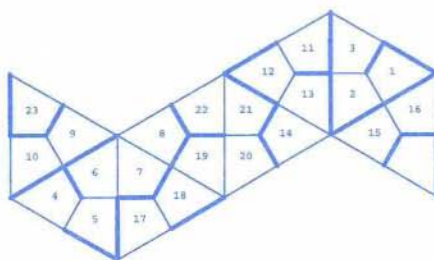
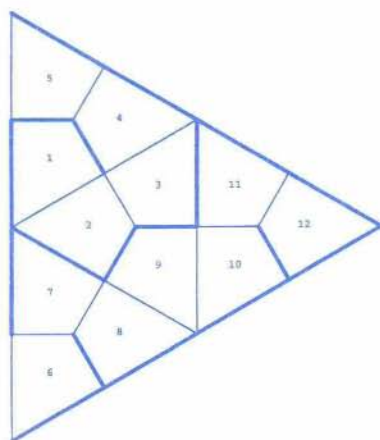
|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 42 | 37 | 56 | 51 |
| 55 | 52 | 43 | 40 |
| 38 | 41 | 50 | 53 |
| 49 | 54 | 39 | 44 |

4. plast

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 57 | 30 | 47 | 36 |
| 48 | 33 | 58 | 31 |
| 29 | 60 | 35 | 46 |
| 34 | 45 | 32 | 59 |

Marija Vencelj

## LABIRINTI NA POLIEDRIH – Rešitev s str. 4





### 35. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

Potem ko je 16. marca 2000 približno 40 000 učencev od 2. do 8. razreda na šolskem tekmovanju za bronasto Vegovo priznanje reševalo naloge Evropskega matematičnega kengurija, se je 15. aprila 2000 1577 šestošolcev, 1483 sedmošolcev in 1524 osmošolcev na področnem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 536 učencev 6. razreda, 548 učencev 7. razreda in 529 učencev 8. razreda. Tudi letos so učenci reševali naloge dveh sklopov. Prvih osem nalog je bilo izbirnega tipa z obkrožanjem ustreznega odgovora, nato pa so sledile še tri "klasične" naloge. Naloge, ki jih je pod predsedstvom prof. Terezije Uran izbrala državna tekmovalna komisija, predstavljamo tudi bralcem Preseka.

#### 6. razred

**A1** Rekel sem, da je število večkratnik števil 2 in 5. Vem, da se motim. Tedaj to število zagotovo

- (A) ni večkratnik števila 2.                      (B) ni večkratnik števila 5.  
 (C) ni večkratnik števila 10.                    (Č) je večkratnik števil 2 ali 5.  
 (D) je večkratnik števil 2 in 5.

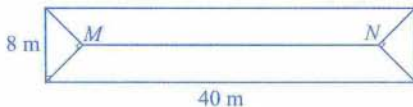
**A2** V dveh škatlah je skupaj 150 kovancev. Sedemnajst kovancev premestimo iz prve v drugo škatlo in tako je v drugi škatli dvakrat več kovancev kot v prvi.

Koliko kovancev je bilo pred premikom v prvi škatli?

- (A) 50    (B) 67    (C) 70    (Č) 75    (D) 87

**A3** Kolikšna je dolžina daljice  $MN$  na sliki?

- (A) 8 m    (B) 16 m    (C) 24 m  
 (Č) 32 m    (D) 36 m



**A4** Uspešna manekenka je ugotovila, da je zadnjih 10 dni sodelovala pri snemanju od 4<sup>h</sup> do 21<sup>h</sup>, vmes pa si je vsak dan privoščila le enourni odmor.

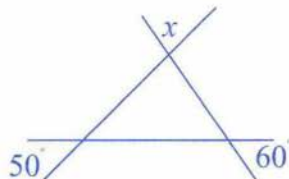
Koliko ur je porabila za snemanje?

- (A) 170    (B) 160    (C) 50    (Č) 40    (D) 17



**A5** Velikost kota  $x$  na sliki je

- (A)  $50^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $65^\circ$   
(Č)  $70^\circ$  (D)  $110^\circ$



**A6** Na koliko različnih načinov lahko število 24 zapišemo kot vsoto dveh praštevil?

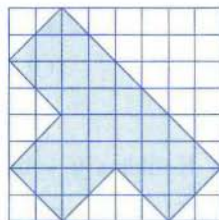
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (Č) 3 (D) 4

**A7** V krog na poljuben način vrišemo štiri tetive. Tako lahko krog razdelimo največ na

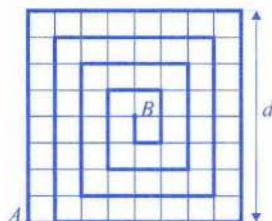
- (A) 7 delov. (B) 8 delov. (C) 9 delov. (Č) 10 delov. (D) 11 delov.

**A8** Kolikšen del največjega kvadrata na sliki je osenčen?

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{7}{16}$  (C)  $\frac{9}{16}$  (Č)  $\frac{15}{32}$  (D)  $\frac{17}{32}$



**B1** Na skici je v kvadratni mreži od točke  $A$  do  $B$  narisana lomljenka dolžine 4 m. Izračunaj ploščino kvadrata s stranico  $d$ .



**B2** Načrtaj krog s središčem  $S$  in polmerom 2 cm. Krogu očrtaj trikotnik s kotoma  $\alpha = 60^\circ$  in  $\beta = 45^\circ$ . (Kota nariši s šestilom.) Načrtovanje opiši.

**B3** Za katero naravno število  $n$  bo ulomek  $\frac{1600}{n+7 \cdot \left(120 - \frac{1}{2} \cdot 4\right) - 3}$  enak 1?

## 7. razred

**A1** Katere od naštetih števil je rešitev enačbe  $2\frac{1}{3} : x = -2$ ?

- (A)  $-7$  (B)  $-3$  (C)  $-2\frac{1}{6}$  (Č)  $-1\frac{1}{6}$  (D)  $-\frac{1}{3}$

**A2** Kolikšna je vrednost izraza  $(0,3)^3 - (0,2)^2$ ?

- (A)  $-0,0013$  (B)  $-0,013$  (C)  $0,0013$  (Č)  $0,013$  (D)  $0,05$

**A3** Naj bo  $n$  naravno število. Katero od naslednjih števil je zagotovo liho?

- (A)  $n^3$  (B)  $n^2$  (C)  $3n$  (Č)  $n+2$  (D)  $2n+1$

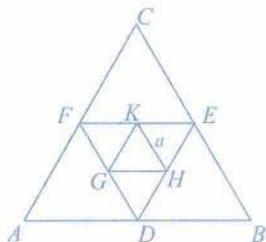
**A4** Trговец je ceno izdelka zvišal za 20 %, nato pa znižal za 20 % nove cene.

Koliko odstotkov prvotne cene izdelka pomeni zadnja cena?

- (A) 76 % (B) 80 % (C) 90 % (Č) 96 % (D) 100 %

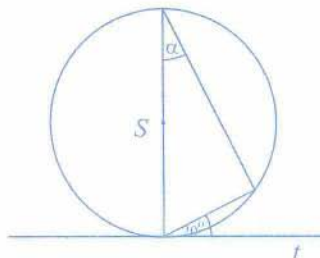
**A5** Kolikšna je vsota obsegov enakostraničnih trikotnikov  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DEF$  in  $\triangle GHK$  na sliki?

- (A)  $21a$  (B)  $18a$  (C)  $16a$   
(Č)  $12a$  (D)  $8a$



**A6** Kolikšna je velikost kota  $\alpha$  na sliki?

- (A)  $70^\circ$  (B)  $50^\circ$  (C)  $45^\circ$   
(Č)  $30^\circ$  (D)  $20^\circ$

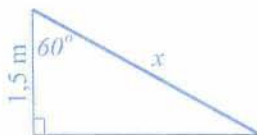


**A7** Kolikšen je najmanjši produkt dveh števil iz množice  $\{-7, -5, -1, 1, 3\}$ ?

- (A)  $-35$  (B)  $-21$  (C)  $-15$  (Č)  $-1$  (D)  $3$

**A8** Kolikšna je dolžina daljice  $x$  na sliki?

- (A)  $0,75$  m (B)  $1,5$  m (C)  $3$  m  
(Č)  $6$  m (D)  $12$  m



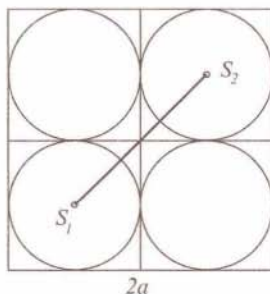
**B1** Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{-\frac{5}{6} - \frac{2}{9}}{-1 + \frac{17}{36}} + \frac{13,875 \cdot (-12) \cdot \sqrt{144}}{(-1)^{365}}$$

- B2** Naj bodo  $a$ ,  $b$  in  $c$  tri različna cela števila, od katerih je eno negativno, eno pozitivno in eno enako nič. Premisli in ugotovi, katero od števil je negativno, katero je pozitivno in katero je enako nič, če velja  $\frac{a \cdot (c-b)}{b} > 0$ . Odgovor utemelji.
- B3** Romb z diagonalo 1 dm ima enako ploščino kot trapez z osnovnicama  $a = 24$  cm,  $c = \frac{2}{3}a$  in višino  $v = \frac{1}{4}a$ . Izračunaj dolžino druge diagonale romba.

## 8. razred

- A1** Kolikšna je vrednost izraza  $\frac{2}{\sqrt{5}-1} : \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$  ?  
 (A)  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  (B)  $\frac{3-\sqrt{5}}{3}$  (C)  $1 - \sqrt{5}$  (Č) 1 (D)  $\sqrt{5}$
- A2** Enakostranični trikotnik s stranico  $a$  prezrcalimo čez težišče. Nastane šeststrana zvezda. Kolikšna je ploščina te zvezde?  
 (A)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  (C)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$  (Č)  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$  (D)  $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$
- A3** Vse robove kocke skrajšamo za 10 %. Koliko odstotkov prvotne prostornine meri prostornina manjše kocke?  
 (A) 70 % (B) 72,9 % (C) 81 % (Č) 90 % (D) 92,9 %
- A4** Količnik kvadrata razlike in razlike kvadratov dveh različnih števil  $x$  in  $y$  pomnožimo z njuno vsoto. Kateri izraz dobimo?  
 (A)  $\frac{x-y}{x+y}$  (B)  $\frac{1}{x-y}$  (C)  $(x-y)^2$  (Č)  $x+y$  (D)  $x-y$
- A5** Ploščina kroga meri  $\pi^3$ . Kolikšen je obseg tega kroga?  
 (A)  $2\pi$  cm (B)  $\pi^2$  cm (C)  $2\pi^2$  cm (Č)  $\pi$  cm (D)  $\frac{\pi}{2}$  cm
- A6** Dolžina stranice kvadrata na sliki je  $2a$ . Točki  $S_1$  in  $S_2$  sta središči krožnic. Kolikšna je dolžina daljice  $S_1S_2$ ?  
 (A)  $2a\sqrt{2}$  (B)  $a\sqrt{2}$  (C)  $a(\sqrt{2}-1)$   
 (Č)  $2a\sqrt{2}-1$  (D)  $a(\sqrt{2}-2)$

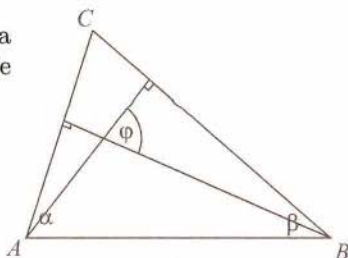


- A7** Za naravni števili  $x$  in  $y$  velja enačba  $x + y + xy = 34$ . Kolikšna je vsota  $x + y$ ?  
 (A) 10 (B) 12 (C) 20 (Č) 34 (D) ni rešitve



- A8** V trikotniku  $\triangle ABC$  merita kota  $\alpha = 72^\circ$  in  $\beta = 27^\circ$ . Kolikšna je velikost kota  $\varphi$ ?

(A)  $45^\circ$  (B)  $75^\circ$  (C)  $81^\circ$   
(Č)  $90^\circ$  (D)  $99^\circ$

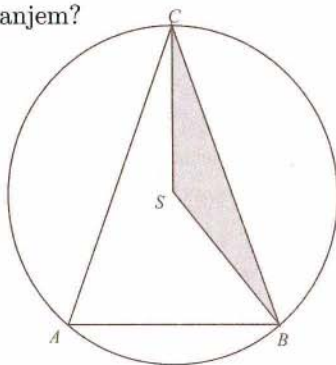


- B1** Tri različno dolge vrvice merijo skupaj 29 m. Če od prve vrvice odrežemo četrtno njene dolžine, od druge tretjino njene dolžine, od tretje pa polovico njene dolžine, so ostanki posameznih vrvic enako dolgi.

Koliko dolge so bile vrvice pred rezanjem?

- B2** Enakokrakemu trikotniku  $\triangle ABC$  z osnovnico  $\overline{AB} = 14$  cm je očrtan krog s središčem  $S$  in premerom 5 dm (glej skico).

Izračunaj ploščino trikotnika  $\triangle BCS$ .



- B3** Enakokraki trapez  $ABCD$  ima osnovnico  $a = 16$  cm in diagonalo 15 cm. Diagonali trapeza se sekata v točki  $S$ , ki ju deli v razmerju 2 : 1.

Izračunaj dolžino stranice  $c$ .

*Aleksander Potočnik*

## 20. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – popravek poročila iz 1. številke Preseka

Učenca **Simon Jesenko** in **Ana Titan**, sedaj že dijaka, ki sta med dobitniki Zlatega Stefanovega priznanja za osmi razred, sta bila učenca OŠ Poljane nad Škofjo Loko in ne OŠ Poljane, Ljubljana, kot je bilo objavljeno. Dijakoma in šoli se za pomoto opravičujemo.

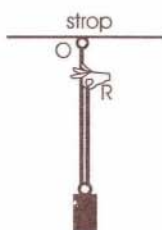
*Nada Razpet*

## 20. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

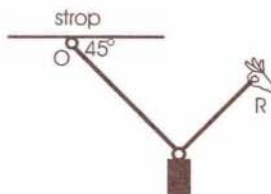
Datum za dvajseto področno tekmovanje iz fizike je bil zares dobro izbran. Število 20 se je lepo ujemalo z letnico 2000, tudi dan ni bil napačen, saj je bil 1. april, da o nalogah ne govorimo, rajši si jih preberite in jih skušajte rešiti.

### 7. razred

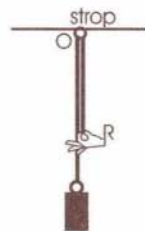
1. Na stropu je pritrjen obroč (obesišče O). Na obroč pritrdimo vrstico in jo napeljemo skozi uho kilogramske uteži tako, da lahko utež brez trenja drsi po vrstici. Drugi konec vrstice držimo z roko (R), da utež visi v zraku.
  - a) **Z razmislekom, računom ali načrtovanjem** ugotovi, kolikšni sta sila roke  $F_R$  in sila vrstice  $F_O$  na obesišče v primerih, predstavljenih na sliki 1 in sliki 2.
  - b) **Nato vrstico odvežemo z obroča na stropu in privežemo na uho uteži.** Vrstico napeljemo skozi obroč na stropu. Vrstica lahko drsi po obroču brez trenja. Ponovno držimo vrv z roko tako, da utež visi v zraku, kakor vidimo na sliki 3. Kolikšni sta sedaj sila roke in sila na obesišče?



Slika 1.

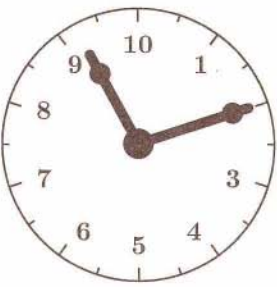


Slika 2.

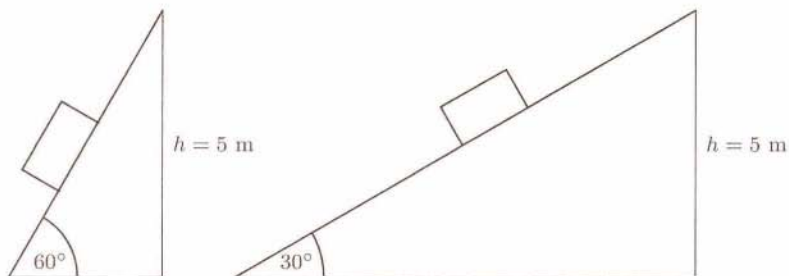


Slika 3.

2. Iz enake snovi izdelamo dve kocki. Večja kocka ima dvakrat daljšo stranico kot manjša kocka. Kocki položimo na mizo. Oglejmo si dva primera.
  - A) Na mizi leži večja kocka in nanjo položimo manjšo kocko.
  - B) Na mizi leži manjša kocka in nanjo položimo večjo kocko.

- a) **Izračunaj** razmerje med težo večje in težo manjše kocke.
- b) **Izračunaj** razmerje med tlakom, s katerim pritiska na mizo večja kocka v primeru A, in tlakom, s katerim pritiska na mizo manjša kocka v primeru B.
- c) **Izračunaj** razmerje med skupno potencialno energijo obeh kock (glede na površino mize) v primeru A in skupno potencialno energijo obeh kock v primeru B.
3. Ob uvedbi desetiškega merskega sestava so želeli, da bi tudi čas merili podobno kakor dolžino in maso. Dolžino nove ure bi določili tako, da bi bil dan dolg 10 ur. Vsaka nova ura bi imela 100 novih minut.
- a) Koliko naših ur bi merila nova ura?
- b) Za merjenje časa po novem so izdelali tudi uro, ki je prikazana na sliki. Koliko bi nova ura (glej sliko) kazala takrat, ko kažejo naše ure  $9^{50}$  dopoldne in  $10^{00}$  zvečer?
- 
4. Bungee, elastična vrv, na katero se nekateri pogumneži privežejo, ko skačejo z mostov, se obnaša podobno kakor vijačna vzmet. Neraztegnjena meri 7 m, njen koeficient je  $320 \text{ N/m}$ . Pri reševanju zanemari zračni upor. Teža skakalca je  $800 \text{ N}$ , težo vrvi zanemarimo.
- a) Kolikšno kinetično energijo ima skakalec, ko pade tako globoko, da elastična vrv ravno še ni nič raztegnjena?
- b) Skakalec doseže največjo globino 16 m. Izračunaj potencialno, kinetično in prožnostno energijo sistema (skakalec in vrv) v treh točkah:
- na vrhu mostu (točka A),
  - ko elastična vrv ravno še ni nič raztegnjena (točka B)
  - in v najnižji točki C.
- Potencialno energijo računaj glede na točko C.
5. Po dveh enako visokih klancih, enem z nagibom  $30^\circ$ , drugem z nagibom  $60^\circ$ , zvlečemo navkreber enaki,  $100 \text{ N}$  težki kladi, tako da se ves čas gibljeta enakomerno. Oba klanca sta visoka  $5 \text{ m}$  (glej sliko). Trenje zanemarimo.



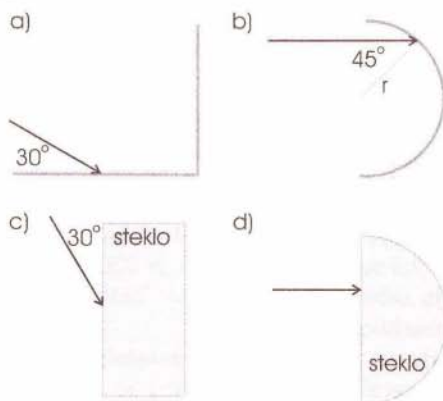


- Kolikšno delo opravimo, ko zvlečemo klado do vrha prvega klanca?
- Kolikšno delo opravimo, ko zvlečemo klado do vrha drugega klanca?
- V merilu nariši sile, ki delujejo na klado na prvem in na drugem klanecu.

Napotek: na sliki naj sili 100 N ustreza dolžina 4 cm.

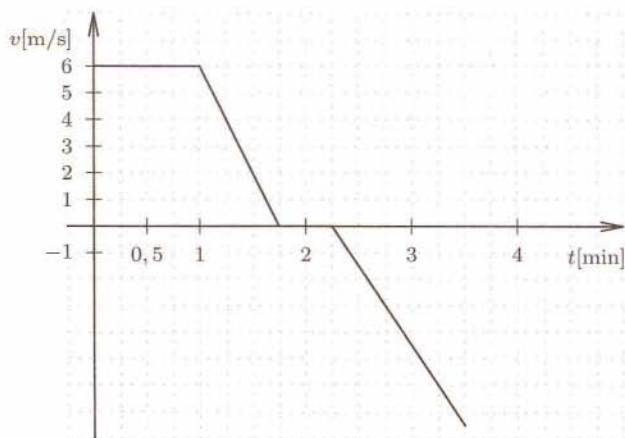
## 8. razred

- Na slikah a) in b) so zrcala, na slikah c) in d) pa stekleni plošči. Nanje posvetimo s curkom svetlobe, kakor prikazujejo slike. Na vsako sliko nariši curek svetlobe, vse dokler ta več ne spreminja smeri. Za vsak odboj ali lom nariši vpadno pravokotnico ter označi vpadni in odbojni kot oziroma vpadni in lomni kot. Kjer je mogoče, napiši tudi vrednosti kotov.



Slika 1. a) pravokotno postavljeni ravni zrcali, b) konvavno zrcalo s polmerom  $r$ , c) steklena plošča v obliki kvadra in d) steklena plošča z osnovno ploskvijo v obliki polkroga.

2. Graf na sliki kaže, kako se je hitrost kolesarja spreminjala s časom  $t$ .



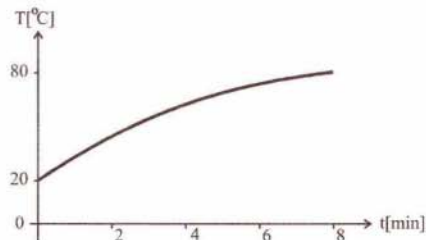
- a) V tabelo vpiši **smer** (naprej, nazaj, miruje) in **vrsto** gibanja (enakomerno, pospeševanje, zaviranje) kolesarja v posameznih časovnih obdobjih.

| časovno obdobje [min] | smer gibanja | vrsta gibanja |
|-----------------------|--------------|---------------|
| 0 – 1                 |              |               |
| 1 – 1,75              |              |               |
| 1,75 – 2,25           |              |               |
| 2,25 – 3,5            |              |               |

- b) Kolikšen je pospešek ob času 1,5 sekunde?  
 c) Kako daleč od začetne lege je kolesar po 2,75 minutah?
3. Bungee, elastična vrv, na katero se nekateri pogumneži privežejo, ko skačejo z mostov, se obnaša podobno kakor vijačna vzmet. Neraztegnjena meri 9,5 m, njen koeficient je 320 N/m. Pri reševanju zanemari zračni upor. Teža skakalca je 800 N, težo vrvi lahko zanemarimo.
- Naredi tabelo in vanjo zapišuj raztezek vrvi, potencialno energijo, prožnostno energijo ( $W_{pr}$  take vrvi je  $\frac{1}{2}kx^2$ ) in kinetično energijo skakalca. Potencialno energijo računaj glede na vrh mostu.
- Nato nariši še graf za kinetično energijo skakalca v odvisnosti od raztezka vrvi. Z grafa ugotovi, kolikšno globino doseže skakalec.

*Priporočilo:* V tabeli in na grafu začni z raztezkom 0 m ter ga povečuj v korakih po 2 m do raztezka 10 m. Raztezku 2 m naj na grafu ustreza dolžina 1,5 cm, energiji 1 kJ pa dolžina 0,5 cm.

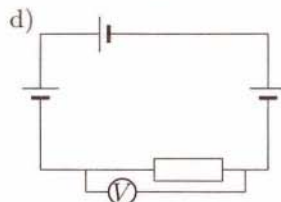
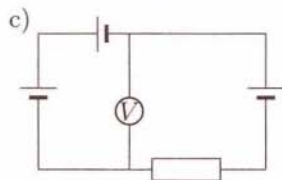
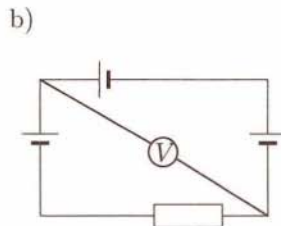
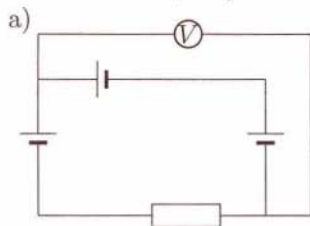
4. Raziskovalec je v posodo nalil liter vode pri sobni temperaturi  $20^{\circ}\text{C}$ . V posodo je potopil grelec, skozi katerega teče tok 4 A, če je priključen na 220 V. Raziskovalec je vključil grelec, hkrati pa je začel meriti temperaturo vode v posodi. Izmerjeno temperaturo v odvisnosti od časa je vnesel v spodnji graf.



- Iz grafa razberi, koliko električnega dela je bilo v času opazovanja porabljeno za gretje vode.
- Izračunaj, koliko električnega dela je bilo porabljeno za gretje okolice.

Potrebne podatke poišči v učbeniku.

5. Tri enake baterije za 4,5 V vezemo tako, kakor kažejo slike. Z voltmetrom izmerimo napetosti. Koliko kažejo voltmetri v primerih a), b), c) in d). (Tokovi v vezju so dovolj majhni, da je napetost baterij ves čas enaka 4,5 V.)



Nada Razpet



## IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Izbirno tekmovanje iz matematike je potekalo v soboto, 8. aprila 2000. Tekmovalci so se spoprijeli z naslednjimi nalogami:

### Prvi letnik

1. Poišči  $x$  in  $y$ , če veš, da velja  $|x| + x + y = 5$  in  $x + |y| - y = 10$ .
2. Določi števke  $x$ ,  $y$  in  $z$  tako, da bo  $\frac{1}{x+y+z} = 0.xyz$ , kjer  $0.xyz$  označuje racionalno število, ki ima na mestu desetin števko  $x$ , na mestu stotin števko  $y$  in na mestu tisočin števko  $z$ .
3. Osnovna ploskev pokončnega stožca je krog s polmerom 1, višina tega stožca pa je 3. Koliko meri stranica kocke, ki jo vrtamo v stožec tako, da ležijo štiri njena oglišča na osnovni ploskvi, preostala štiri oglišča pa na plašču stožca?
4. Andrej, Brane in Cene so sosedje s hišnimi števkami v naraščajočem vrstnem redu. Skupaj hodijo na tenis, kjer ima vsak svoj predal v garderobi. Andrej ima predal številka  $a$ , Brane predal številka  $a + n + 2$ , Cene pa predal  $a + 2n - 3$ . Branetova hišna številka deli številke njihovih predalov. Kolikšna je?

### Drugi letnik

1. Dokaži, da kvadrat naravnega števila ne more imeti vsote števk enake 2000.
2. V ravnini ležijo krožnici  $K_1$  in  $K_2$  ter premica  $p$  tako, da ležita krožnici na različnih bregovih premice  $p$ . S šestilom in ravnilom načrtaj kvadrat, ki ima po eno oglišče na vsaki krožnici, dve oglišči pa ima na premici  $p$ .
3. V štirikotniku  $ABCD$  naj velja  $|AD| = |BC|$  in  $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA = 120^\circ$ . Zunaj njega leži točka  $E$ , ki leži na drugem bregu premice  $DC$  kot točka  $A$ . Vemo, da je trikotnik  $DEC$  enakostranični. Dokaži, da je tudi trikotnik  $AEB$  enakostranični.
4. Na kongresu sodeluje 281 udeležencev iz sedmih različnih držav. V poljubno izbrani skupini šestih kongresnikov sta vsaj dva enako stara. Dokaži, da med udeleženci lahko najdemo pet enako starih oseb istega spola, ki prihajajo iz iste države.

**Tretji letnik**

1. Naj bo  $n$  naravno število. Dokaži, da enačba

$$x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+2n-1) + (x+2n+1)(x+2n+2) \cdot \dots \cdot (x+4n) = 0$$

nima realnih rešitev.

2. Določi vsa cela števila  $n$ , za katera je vrednost izraza

$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$

celo število.

3. Izberimo poljubno točko  $B$  na premeru  $AC$  dane krožnice  $\mathcal{K}$  in poljubno točko  $D$ ,  $A \neq D \neq C$ , na krožnici  $\mathcal{K}$ . Dokaži, da je vrednost izraza  $\frac{\text{tg} \angle ADB}{\text{tg} \angle BAD}$  neodvisna od izbire točke  $D$ .
4. V razredu je 28 dijakov. Pri telovadbi so se postavili v štiri vrste po sedem dijakov tako, da se višini najvišjega in najnižjega dijaka v vsaki vrsti razlikujeta za največ 15 cm. Nato so se v vsakem od sedmih stolpcev dijaki postavili od najvišjega do najnižjega. Dokaži, da se višini najvišjega in najnižjega dijaka v vsaki vrsti še vedno razlikujeta za največ 15 cm.

**Četrty letnik**

1. Poišči vse funkcije  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , za katere velja:  $f(f(n)) = n$  in  $f(f(n+2)+2) = n$  za vsako celo število  $n$  ter  $f(0) = 1$ .
2. Če se v aritmetičnem zaporedju, katerega členi so naravna števila, pojavi popolni kvadrat, je v tem zaporedju neskončno mnogo popolnih kvadratov. Dokaži.
3. Na krožnici  $\mathcal{K}$  s središčem  $O$  ležita različni točki  $A$  in  $B$ . Potegnimo tangenti  $AC$  in  $BD$  na krožnico  $\mathcal{K}$  tako, da sta trikotnika  $ACO$  in  $BDO$  skladna in enako usmerjena. Dokaži, da premica  $AB$  seka daljico  $CD$  v njenem razpolovišču.
4. Dana je tabela velikosti  $7 \times 7$ . Dokaži, da lahko na tabelo položimo enotski kvadratiček (domino oblike  $\square$ ) tako, da preostalih 48 polj ni možno pokriti z eno domino oblike  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$  in 15 dominami oblike



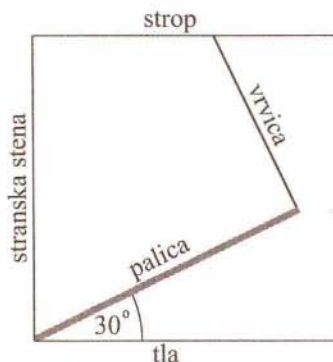
Matjaž Željko

## NALOGE Z REGIJSKEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 1999/2000

Naloge je 25. marca 2000 reševalo približno 1000 dijakov iz 55 srednjih šol. Najuspešnejši iz posameznih skupin so se uvrstili na državno tekmovanje. V skupini A sta bili dve različici nalog, ki pa sta se razlikovali samo v tretji nalogi. Tekmovalec je tako reševal samo eno izmed nalog 3a in 3b.

### Skupina A

- Posodo z vodo, v kateri plava lesena klada, postavimo na tehtnico, ki pokaže 13 N. Klada ima obliko kvadra, plava pa tako, da je ena izmed ploskev kvadra vzporedna z gladino vode. Teža klade znaša 3 N, višina potopljenega dela klade meri 21 cm, višina klade pa je 28 cm. Koliko kaže tehtnica, ko v središču zgornje ploskve klade pritiskamo s tolikšno silo, da je celotna klada ravno potopljena? Specifična teža vode je  $10 \text{ kN/m}^3$ .
- Fizik sklene narediti lesen lok. Za tetivo vzame neraztegljivo vrvico dolžine 1 m, ki jo vpne med krajišči loka. Ko je lok brez puščice, je vrvica napeta s silo 100 N. Zadnji konec puščice postavi na sredino tetive ter lok napne. Okvir loka se pri napenjanju upogne. Silo, ki deluje na krajišči loka, ko le-tega napenja, opišemo s Hookovim zakonom,  $F = k\Delta x$ , kjer je  $F$  sila, ki deluje vzdolž zveznice obeh pritrdišč vrvice in  $\Delta x$  razlika v razdalji med krajiščema nenapetega in napetega loka. Sorazmernostna konstanta je  $k = 400 \text{ N/m}$ .
  - Najmanj kolikšna bi morala biti dolžina tetive, da na vrvico ne bi delovala nobena sila?
  - S kolikšno silo je vrvica napeta v primeru, ko lok napnemo in je kot med puščico in tetivo  $30^\circ$ ?
- a) Palico s težo 100 N postavimo z enim krajiščem v vogal sobe, drugo krajišče pa obesimo z vrvico na strop tako, da je kot med vrvico in palico  $90^\circ$  (glej sliko).
  - S kolikšno silo je napeta vrvica?
  - Kolikšni pa sta komponenti sile vogala na palico vzdolž palice in pravokotno na palico?





- 3.b Športni padalec se enakomerno spušča s hitrostjo  $5 \text{ m/s}$  glede na tla. Poredni fantič ga s tal poskuša zadeti z nogometno žogo, ki jo brcne navpično navzgor. Žoga zgreši padalca in se dviga s hitrostjo  $10 \text{ m/s}$  glede na tla, ko gre mimo padalca. Za koliko se padalec spusti od tega trenutka do trenutka, ko gre žoga spet mimo njega, če veš, da vmes še ne pristane? Za težni pospešek vzemi  $10 \text{ m/s}^2$ .

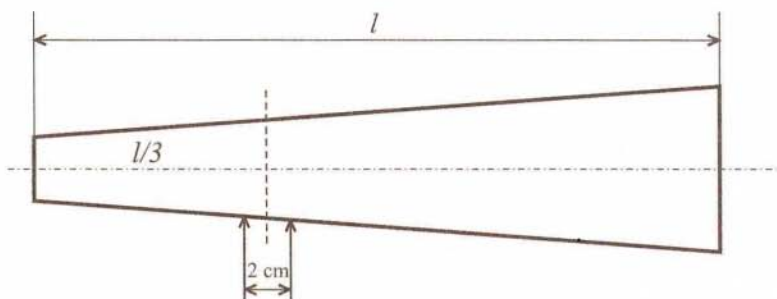
### Skupina B

1. V prazen,  $30 \text{ m}$  visok silos (valj z notranjim premerom  $4 \text{ m}$ ), sipajo z vrha silosa koruzno zrnje. Začetna hitrost koruze je zanemarljivo majhna, sipajo pa jo enakomerno z masnim tokom  $10 \text{ kg/s}$ . Kolikšna sila deluje na dno silosa po  $2 \text{ s}$  od trenutka, ko so prva zrna zadela dno? Za težni pospešek vzemi  $10 \text{ m/s}^2$ .
2. Helikopter prevaža breme z maso  $1400 \text{ kg}$ , obešeno na vrvi, ki zdrži največjo silo  $50 \text{ kN}$ . Največ koliko sme biti dolga ta vrv, da se ne bo pretrgala, ko leti helikopter s hitrostjo  $60 \text{ m/s}$  po krožnici z radijem  $120 \text{ m}$ , ves čas na isti višini? Za težni pospešek vzemi  $10 \text{ m/s}^2$ .
3. Dva klanca, z dolžino po  $10 \text{ m}$  in naklonom  $30^\circ$ , sta razdeljena na dva odseka. Zgornja odseka obeh klancev sta enako dolga. Prvi klanec ima na zgornjem odseku koeficient trenja  $0,2$  in na spodnjem  $0,5$ , drugi klanec pa ravno obratno.
  - a) V kolikšnem razmerju morata biti dolžini zgornjega in spodnjega odseka, da bo klada, ki jo spustimo z vrha prvega klanca, imela enako končno hitrost kot klada, ki jo spustimo z vrha drugega klanca, če obe na začetku mirujeta?
  - b) Katera klada prej prispe do konca klanca, če ju spustimo istočasno? Kolikšna je časovna razlika? (Razmerje dolžin je tako kot pri a.)Za težni pospešek vzemi  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

### Skupina C

1. Na napetostni izvir z neznano gonilno napetostjo in neznanim notranjim uporom priključimo upornik za  $180 \Omega$  ter izmerimo z idealnim voltmetrom na njem napetost  $5,19 \text{ V}$ . Upornik odstranimo in na izvir priključimo drug upornik za  $50 \Omega$ . Z idealnim ampermetrom izmerimo skozenj tok  $46,7 \text{ mA}$ .
  - a) Kolikšna sta gonilna napetost in notranji upor izvira?
  - b) Kolikšno moč troši upornik za  $50 \Omega$ , če oba upornika vezemo vzporedno in priključimo na izvir?

2. Palica z dolžino 2 m iz snovi s toplotno prevodnostjo  $150 \text{ W/mK}$  ima obliko prisekanega stožca. Presek na enem krajišču palice je  $5 \text{ cm}^2$ , na drugem pa  $15 \text{ cm}^2$ . Krajišči palice sta na različnih temperaturah, zato teče skozi palico toplotni tok  $2 \text{ W}$ . Na tretjini dolžine, merjeno od tanjšega krajišča, se palice dotaknemo z dvema termometroma tako, da je prvi  $1 \text{ cm}$  bliže tanjšemu krajišču, drugi pa  $1 \text{ cm}$  dlje, merjeno po simetrali od točke na tretjini dolžine (glej sliko). Kolikšna je razlika temperatur, ki ju pokažeta termometra?



3. V vodoravno postavljeno cev iz izolatorja postavimo pravokotno na simetrijsko os dve veliki vzporedni kovinski plošči v medsebojni razdalji  $10 \text{ cm}$ . Plošči sta prosto gibljivi vzdolž simetrijske osi, vendar dobro tesnita zrak, ki je med njima. Na plošči nanesemo enako velika naboja nasprotnih prezdnakov tako, da imamo na eni plošči površinsko gostoto naboja  $\sigma$  in na drugi  $-\sigma$ , kjer je  $\sigma = 2 \cdot 10^{-5} \text{ As/m}^2$ .
- Za koliko se spremeni razdalja med ploščama po dolgem času, če ves čas skrbimo, da ostaneta vzporedni?
  - Ali med ploščama pride do električnega preboja, če je prebojna jakost v zraku  $30 \text{ kV/cm}$ ?

Zunanji zračni tlak in tlak zraka med ploščama pred nabitjem plošč je  $1 \text{ bar}$ . Influenčna konstanta je  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ .

### Skupina D

1. V sobi s temperaturo zraka  $20^\circ\text{C}$  in tlakom  $101 \text{ kPa}$  imamo odprto valjasto posodo s presekom osnovne ploskve  $100 \text{ cm}^2$  in višino  $50 \text{ cm}$ . Posoda je postavljena pokonci tako, da je zgoraj odprti del. Tik nad odprtino posode držimo v vodoravnem položaju okroglo ploščo z maso

2,5 kg in premerom, ki je enak notranjemu premeru valjaste posode. Obod plošče je na tanko premazan s tekočo mastjo, ki omogoča, da plošča dobro tesni, ko se nahaja znotraj posode, poleg tega pa mast dobro duši gibanje plošče vzdolž posode.

- a) Ploščo nenadoma izpustimo. Za koliko se ta spusti, preden se ustavi?
- b) Za koliko se plošča dodatno spusti po dolgem času?
- c) Kolikšna je najvišja temperatura zraka v posodi?

Razmerje specifičnih toplot za zrak je 1,4, težni pospešek pa  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Stena, dno posode in plošča so iz snovi z majhno toplotno prevodnostjo.

2. Površina makadamske ceste je na določenih delih periodično nagnjena v smeri vožnje tako, da profil ceste sestavljajo zaporedni žlebički, ki potekajo pravokotno na smer vožnje in segajo preko celotne širine ceste. Žlebički so vzdolž ceste razporejeni enakomerno tako, da je razdalja med sosednjima 60 cm. Po takem delu ceste pelje avto s skupno maso 1400 kg in medosno razdaljo 240 cm (razdalja med sprednjim in zadnjim parom koles). V amortizerju vsakega kolesa je vzmet s prožnostnim koeficientom  $1,3 \cdot 10^7 \text{ N/m}$ . Pri kolikšni hitrosti vožnje začne avto močno poskakovati?

3. Palica z dolžino 2 m iz snovi s specifičnim uporom  $1 \cdot 10^{-2} \Omega \text{ m}$  ima obliko prisekanega stožca. Presek na enem krajišču palice je  $5 \text{ cm}^2$ , na drugem pa  $15 \text{ cm}^2$ . Krajišči palice sta priključeni na napetostni izvir, zato teče skozi palico tok 5 A. Na tretjini dolžine, merjeno od tanjšega krajišča, se palice dotaknemo s priključkoma digitalnega voltmetra tako, da je prvi priključek 1 cm bližje tanjšemu krajišču, drugi pa 1 cm dlje, merjeno po simetrali od točke na tretjini dolžine (glej sliko pri 2. nalogi v skupini C).

- a) Kolikšno napetost kaže voltmeter?
- b) Prevajanje toka po takšni palici dobro opišemo, če v izraz za upor vstavimo povprečni radij palice, ki je enak geometrijski sredini obeh krajnih radijev,  $\bar{r} = \sqrt{r_1 r_2}$ . Z uporabo te zveze določi razdaljo od tanjšega krajišča do točke, v kateri je napetost enaka polovici napetosti med krajiščema palice.

*Ciril Dominko*



## 21. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Naloge pomladanskega kroga

### Prva skupina (prvi del)

1. Ali je lahko produkt dveh zaporednih naravnih števil enak produktu dveh zaporednih sodih naravnih števil? (3 točke)
2. V trapezu s ploščino 1 je razmerje osnovnic  $BC$  in  $AD$  enako

$$|BC| : |AD| = 1 : 2.$$

Naj bo  $K$  razpolovišče diagonale  $AC$ , premica skozi točki  $D$  in  $K$  pa naj seka stranico  $AB$  v točki  $L$ . Določi ploščino štirikotnika  $BCKL$ . (4 točke)

3. (a) Dokaži, da je možno pobarvati oglišča  $3n$ -strane prizme s tremi barvami tako, da je vsako oglišče z robovi povezano z oglišči vseh treh barv. (2 točki)  
(b) Naj bodo oglišča  $n$ -strane prizme pobarvana s tremi barvami tako, da je vsako oglišče z robovi povezano z oglišči vseh treh barv. Dokaži, da je število  $n$  deljivo s 3. (3 točke)
4. V vsakem oglišču kocke je zapisano neko naravno število. Ali je možno, da je v vsakem paru števil, ki sta v krajiščih skupnega roba, eno število deljivo z drugim, ni pa drugih parov s to lastnostjo? (5 točk)

### Druga skupina (prvi del)

1. Konveksni štirikotnik je z diagonalama razdeljen na štiri trikotnike. Vsota ploščin dveh trikotnikov, ki se stikata le v presečišču diagonal, je enaka vsoti ploščin preostalih dveh trikotnikov. Dokaži, da je presečišče diagonal hkrati razpolovišče vsaj ene izmed njiju. (3 točke)
2. Dve nasprotni stranski ploskvi kocke sta označeni s po eno piko, dve s po dvema pikama in ostali dve s po tremi pikami. Osem takih kock zložimo v kocko velikosti  $2 \times 2 \times 2$  in izračunamo vsote pik na vsaki stranski ploskvi te kocke. Ali so lahko te vsote šesterica zaporednih naravnih števil? (4 točke)

3. Naj bosta  $n$  in  $k$  naravni števili. Dokaži neenakost

$$1^k + 2^k + \dots + n^k \leq \frac{n^{2k} - (n-1)^k}{n^k - (n-1)^k}.$$

(4 točke)

4. Dano je zaporedje števil, v katerem je vsota poljubnih desetih zaporednih členov pozitivna, vsota prvih  $10n + 1$  členov pa je negativna za vsako naravno število  $n$ .

(a) Ali obstaja tako zaporedje realnih števil? (3 točke)

(b) Ali obstaja tako zaporedje celih števil? (3 točke)

### Prva skupina (drugi del)

1. Dan je krog in točka  $A$  v njegovi notranjosti. Določi geometrijsko mesto oglišča  $C$  pravokotnika  $ABCD$ , pri katerem oglišči  $B$  in  $D$  ležita na robu danega kroga. (6 točk)
2. Pocestna tatova Žepar in Torbica si delita izkupiček stotih kovancev. Žepar zgrabi pest kovancev, Torbica pa se odloči, čigava bo ta pest. To ponavljata, dokler eden izmed njiju ne dobi devetih pesti kovancev. Zatim dobi drugi preostanek (lahko se zgodi, da se delitev konča, še preden eden izmed njiju dobi devet pesti kovancev). Žepar se vsakič lahko odloči, koliko kovancev bo zgrabil. Največ koliko kovancev si lahko zagotovi, ne glede na odločitve Torbice? (Določi število kovancev, natančno opiši, kako naj Žepar postopa, da si zagotovi tako število kovancev, in dokaži, da si več kovancev ne more zagotoviti.) (7 točk)
3. Določi največje možno število skakačev, ki jih lahko postavimo na šahovnico velikosti  $5 \times 5$  tako, da vsak izmed njih napada natanko dva izmed preostalih. (Določi to število in dokaži, da večjega števila skakačev ne moremo postaviti na predpisani način.) (7 točk)

### Druga skupina (drugi del)

1. V ravnini, ki je z navpičnimi in vodoravnimi premicami razdeljena na kvadratke, leži konveksni večkotnik, katerega oglišča so v presečiščih dane kvadratne mreže in nobena njegova stranica ni niti navpična niti vodoravna. Dokaži, da je vsota dolžin tistih odsekov vodoravnih premic mreže, ki ležijo znotraj večkotnika, enaka vsoti dolžin tistih odsekov navpičnih premic kvadratne mreže, ki ležijo znotraj večkotnika. (5 točk)

2. Določi največje naravno število  $N$ , za katero obstaja tako zaporedje iz  $N$  zaporednih naravnih števi, da je vsota števk prvega števila v zaporedju deljiva z 1, vsota števk drugega števila deljiva z 2, vsota števk tretjega števila deljiva s 3, ... (7 točk)
3. Na šahovskem turnirju vsak udeleženec igra z vsakim drugim natanko enkrat. Zmaga šteje eno točko, remi pol točke in poraz nič točk. Partijo imenujmo nepravilna, če ima igralec, ki je zmagal, po končanem turnirju skupno manj točk od igralca, ki je partijo izgubil.
  - (a) Dokaži, da je po končanem turnirju vedno manj kot  $3/4$  partij nepravilnih. (6 točk)
  - (b) Dokaži, da meje  $3/4$  ni mogoče nadomestiti z manjšim številom. (6 točk)

*Gregor Cigler*

#### PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
28. letnik, šolsko leto 2000/2001, številka 2, strani 65 – 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Primož Potočnik (novice), Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (01) 4232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 2000/2001 je za posamezne naročnike **2.400 SIT**, za skupinska naročila šol **2.000 SIT**, posamezna številka **480 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ  
Založilo DMFA – založništvo  
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1432

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana





