

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

PRE SEK

27 (1999-2000)

6

ZGODOVINA MATEMATIKE – ZGODBE O PROBLEMIH

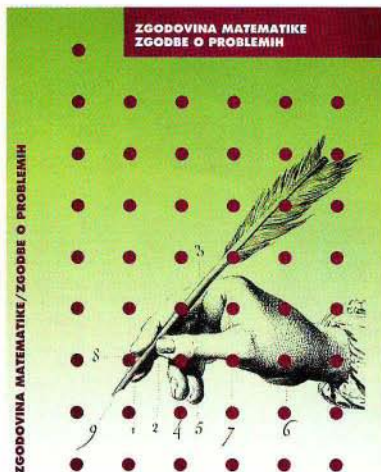
Tokrat bomo predstavili drugo od knjig, ki sta izšli v jubilejnem, 40. letu, zbirke *Sigma*. To je *Zgodovina matematike – zgodbe o problemih*. Delo je prevod zbirke daljših člankov, katerih avtorji so raziskovalci v francoskih inštitutih za raziskave v matematičnem izobraževanju (IREM).

Vsako od šestih poglavij je posvečeno določenemu matematičnemu problemu, katerega reševanje je sprožilo nastanek in razvoj kakega pomembnega dela sodobne matematike. Prvo poglavje pripoveduje o praštevilih, od starogrškega odkritja, da je praštevil neskončno mnogo, preko raznih metod za iskanje praštevil, do današnje splošne uporabe praštevil v kriptografiji. Drugo poglavje govori o popolnih številih, to je številih, ki so enaka vsoti svojih pravih deliteljev. Pri tem je posebno zani-

miv poseben odnos do števil, ko na njihove lastnosti gledamo kot na odsek njihovega 'značaja'. Tretje in četrto poglavje bosta navdušila tiste z geometrijsko žilico. V prvem izvemo, kako so stari Grki izračunali velikost Zemlje, razdaljo od Zemlje do Lune in do Sonca, kako so Kopernik, Galilei, Kepler in Newton odkrivali zakonitosti, ki določajo gibanje zvezd, ter, kako iz Einsteinove relativnostne teorije mogoče sledi, da je vesolje ukrivljeno. Drugo od geometrijskih poglavij pripoveduje o 'slikarski' geometriji, to je o problemu, kako na sliki ponazoriti globino, in nas tako pripelje do osnovnih pojmov projektivne geometrije. Peto poglavje se ukvarja z zgodovino enega najzanimivejših matematičnih problemov – reševanja enačb, predvsem polinomskih. Ta problem najdemo že v egipčanskih papirusih in mu sledimo od antičnih časov vse do Gaussa ter drugih velikih matematikov 18. in 19. stoletja. Rešitev problema je obenem prva uporaba teorije grup, enega najbolj plodovitih pojmov sodobne matematike. Povejmo, da je, kljub mnogim, včasih zelo globokim rezultatom, razumevanje prvih petih poglavij dosegljivo povprečnemu srednješolcu. Le tu in tam bo treba kakšni razlagi verjeti na besedo, ne da bi jo povsem razumeli. Zadnje poglavje, *Problem brahistohrone*, je nekoliko zahtevnejše. Začenja s presenetljivo ugotovitvijo, da spust po ravnem toboganu ni najhitrejši, in nadaljuje z vprašanjem, kakšna naj bo njegova oblika, da bo čas spusta najkrajši. Bernoullijeva rešitev problema je eno prvih zmagoslavij takrat šele nastajajočega variacijskega računa.

Knjigo toplo priporočam vsem, ki radi pokukajo v zgodovino in v ozadje matematičnih problemov ter metod, ki jih srečajo v šoli.

Petar Pavešić



list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, leto 1999/2000, številka 6, strani 321–384

VSEBINA

MATEMATIKA	Fotografija in matematika V – Leče, stekla, očala (Peter Legiša) 324-329 Kriterij deljivosti s praštevili (Anton Suhadolc) 342-343 Koliko pijače lahko natočimo v kozarec? (Nada Razpet) 348-351
FIZIKA	O tranzistorjih (Janez Strnad) 330-337
ASTRONOMIJA	Trije načini določitve teznega pospeška (Marijan Prosén) 344-347
RAČUNALNIŠTVO	Lokalne volitve – reš. str. 356 (Martin Juvan) 340-341
NOVICE	Mladinski astronomski raziskovalni tabor 2000 (Igor Grom) 341
NOVE KNJIGE	Zgodovina matematike – zgodbe o problemih (Petar Pavešić) II
NALOGE	Številska izpolnjevanja s simetrijo (Marija Vencelj) 322 Trinajst deliteljev (Marija Vencelj) 322 Elipsa, parabola in pravokotni tangenti (Marko Razpet) 322
REŠITVE NALOG	Premisli in nariši – s str. 269 (Marija Vencelj) 337-339 Številska piramida – s str. 258 (Marija Vencelj) 339 Križanka "Jubilejno leto našega največjega poeta" – s str. 288 (Marko Bokalič) 355 Svetlost Lune ob mrku – s str. 258 (Mitja Rosina) . 359-360 Dve nalogi – s str. 258 (Marko Razpet) 361-362 2000 – s str. 130 (Martin Juvan) 362-365
ZANIMIVOSTI,	Avala, Beograd, Cetinje... in fizikalna antifonetična abeceda (Primož Peterlin in Janja Majhenc) 323
RAZVEDRILO	Križanka "Poplava mobilnih telefonov" – reš. str. 365 (Marko Bokalič) 352-353 Obdobje zanimivih datumov (Mark Pisanski in Tomaž Pisanski) 354-355
TEKMOVANJA	Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado – rešitve nalog s str. 319 (Matjaž Željko) 366-369 21. mednarodno matematično tekmovanje mest – naloge (Gregor Cigler) 370-372 21. mednarodno matematično tekmovanje mest – rešitve nalog s str. 370 (Gregor Cigler) 372-379
LETNO KAZALO	 380-384
NA OVITKU	Fotografije k članku na strani 324 (foto Peter Legiša) . I, III Nekoliko nenavadna perspektiva, posneta s teleobjektivom z Ljubljanskega gradu (foto Peter Legiša) IV

ŠTEVILSKA IZPOLNJEVANKA S SIMETRIJO

V vsako prazno okence izpolnjevanke vpiši po eno desetiško števko tako, da bodo računi, nakazani v vodoravnih vrsticah, pravilni. Pri tem izvajamo operacije od leve proti desni, tudi vmesni rezultati so naravna števila in nobeno večmestno število ne začne s števko 0.

Dodatno velja, da je rezultat računa v prvi (drugi, tretji, ...) vodoravni vrsti enak vsoti števil v prvem (drugem, tretjem, ...) stolpcu (te vsote so zapisane pod vodoravno črto).

7	×	□	:	2	+	2	=	□	□	
8	:	□	×	□	+	□	4	=	2	□
9	+	□	−	□	+	2	□	=	2	□
□	×	5	×	2	−	1	□	=	□	□

□	□	+	□	9	+	□	□	+	□	□	=	□	□	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Marija Vencelj

TRINAJST DELITELJEV

1. Ali obstaja kakšno tako naravno število, ki ima natanko trinajst pozitivnih deliteljev?
2. Če taka števila obstajajo, poišči najmanjše med njimi.

Marija Vencelj

ELIPSA, PARABOLA IN PRAVOKOTNI TANGENTI

1. Kaj je v ravnini elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ geometrijsko mesto tistih točk, iz katerih se tangenti na to elipso sekata pod pravim kotom?
2. Kaj je v ravnini parabole $y^2 = 2px$ geometrijsko mesto tistih točk, iz katerih se tangenti na to parabolo sekata pod pravim kotom? Pri tem je parameter p pozitiven.

Marko Razpet

AVALA, BEOGRAD, CETINJE... IN FIZIKALNA ANTIFONETIČNA ABECEDA

Ljudje so si izmislili razne fonetične abecede, da bi zmanjšali možnost napak zaradi podobno zvenječih glasov – denimo nosnikov M in N ali ustničnih zapornikov P in B – pri prenosu govora po kanalih, obremenjenih s šumom, kot sta telefon ali radio. Ena bolj znanih tovrstnih abeced, angleška "pilotska": Alpha, Bravo, Charlie, Delta..., je uradna fonetična abeceda več mednarodnih organizacij in zvez, med njimi mednarodne organizacije za civilno zračno plovbo ITAO in mednarodne zveze za telekomunikacije ITU.

V rajni Jugoslaviji je bila uradna fonetična abeceda sestavljena iz geografskih imen. Slovenijo sta v tem geografskem izboru zastopali Ljubljana za črko LJ in Žirovnica za Ž.

Raznolikost črk, ki jih uporabljamo za oznake fizikalnih količin, nas je, tedaj še študente fizike, navedla na misel, da bi tudi iz njih sestavili nekakšno fonetično abecedo. Oznake za fizikalne količine so mednarodne in so praviloma fonetičnega izvora, največkrat angleškega, redkeje nemškega. Da je bila stvar zabavnejša, smo našo abecedo sprevrgli v *anti*-fonetično. Noben "mnemotehnični pripomoček" se ni smel začeti s črko, ki jo je predstavljal: *G* kot gibalna količina, na primer, ni veljalo, saj se gibalna količina začne na črko *G*. Veljavni pa so opisi:

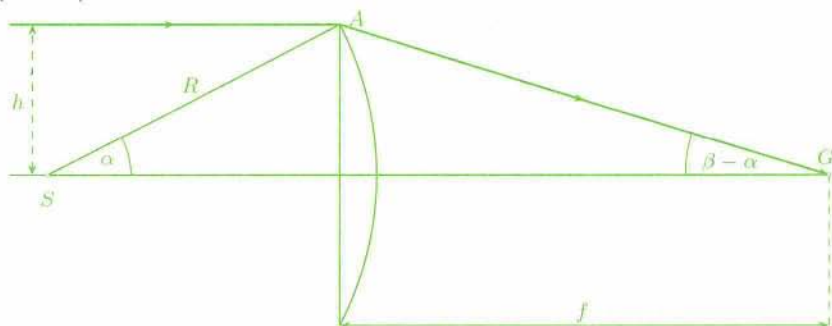
<i>A</i> kot delo	<i>M</i> kot navor
<i>B</i> kot gostota magnetnega polja	<i>n</i> kot lomni količnik
<i>c</i> kot svetlobna hitrost	<i>P</i> kot moč
<i>D</i> kot gostota električnega polja	<i>Q</i> kot toplota
<i>e</i> kot naboj	<i>R</i> kot upornost
<i>F</i> kot sila	<i>S</i> kot entropija
<i>g</i> kot težnostni pospešek	<i>t</i> kot čas
<i>h</i> kot višina	<i>U</i> kot napetost
<i>I</i> kot tok	<i>v</i> kot hitrost
<i>J</i> kot vztrajnostni moment	<i>W</i> kot energija
<i>k</i> kot Boltzmannova konstanta	<i>Z</i> kot valenca
<i>l</i> kot dolžina	

Včasih imamo na voljo več možnosti: *a* je lahko tudi pospešek, *C* kapacitivnost, *F* prosta energija, *G* prosta entalpija, *H* jakost magnetnega polja, entalpija (ali pa, pisano z malo, Planckova konstanta), *L* induktivnost, *p* tlak, *R* splošna plinska konstanta ali polmer, *S* površina ali pot, ipd. Poleg generičnih oznak za spremenljivke *x* in *y* je največ težav s črko *O*. Tej se, zaradi možne zamenjave z ničlo pri oznakah količin, raje izognemo. Edina izjema je fonetična oznaka za obseg, ki jo uporabljamo v geometriji.

Primož Peterlin in Janja Majhenc

FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA V – LEČE, STEKLA, OČALA

Imamo tanko zbiralno lečo z eno ravno in eno sferično površino (to je *plankonveksno* lečo). Leča je odsek krogle s polmerom R in središčem S (slika 1).



Slika 1.

Debelo narisani žarek prihaja vzporedno optični osi leče in se lomi šele na zakrivljeni strani v točki A . Daljica SA je polmer krogle in zato pravokotna na površje. Mesto loma si povečano ogledjmo na sliki 2.

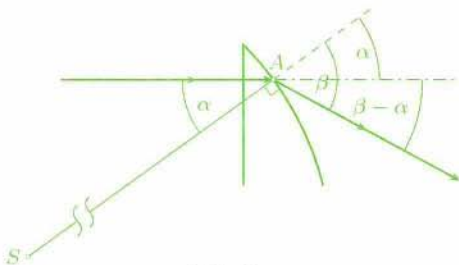
Velja lomni zakon:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n,$$

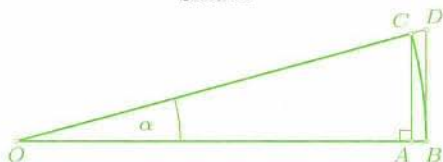
kjer je n lomni količnik snovi, iz katere je leča. Lomljeni žarek gre skozi gorišče G leče. Če je f goriščna razdalja, je očitno

$$\sin \alpha = \frac{h}{R}, \quad \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{h}{f}.$$

Od zdaj naprej bomo kote merili le v *radianih*. Če je α majhen, je $\sin \alpha \doteq \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha$ (slika 3).



Slika 2.



Slika 3. Krožni lok OBC ima polmer $|OB| = |OC| = 1$. Njegova dolžina je približno enaka $|AC| = \sin \alpha$ in $|BD| = \operatorname{tg} \alpha$.

Ker sta potem majhna tudi β in $\beta - \alpha$, velja približno

$$\frac{\beta}{\alpha} \doteq n, \quad \alpha \doteq \frac{h}{R}, \quad \beta - \alpha \doteq \frac{h}{f}$$

in od tod

$$\frac{1}{f} \doteq \frac{\beta - \alpha}{h} \doteq \frac{(n - 1)\alpha}{\alpha R} = \frac{n - 1}{R}.$$

Dobili smo formulo

$$\frac{1}{f} = \frac{n - 1}{R}. \quad (1)$$

Denimo, da lečo potrebujemo za očala. Optična moč $\frac{1}{f}$ je potem predpisana. Če vzamemo steklo z večjim n , iz (1) sledi, da moramo zvečati R . Pri enakem premeru $2h$ to pomeni tanjšo lečo.

Osebam, ki potrebujejo večjo korekcijo vida (včasih pa tudi drugim), danes optiki ponujajo stekla z lomnim količnikom 1.7 ali celo "super tanka" stekla z lomnim količnikom 1.8 ali 1.9. (Zanimivo je, da taka stekla niso lažja, saj imajo večjo gostoto).

Čim večji je lomni količnik, tem dražja so stekla. Toliko bolj presenetljivo je, da v Zeissovem katalogu pri najcenejšem steklu Punktal z lomnim količnikom 1.53 piše: *zelo dobre upodobitvene lastnosti*. Pri steklu z lomnim količnikom 1.6 piše: *dobre upodobitvene lastnosti*. Stekla s še višjim lomnim količnikom pa niso več deležna tovrstne pohvale.

To je povezano s tako imenovano *barvno napako*. Lomni količnik stekla pada z valovno dolžino: za rdečo svetlobo je manjši kot za modro. To pa po formuli (1) pomeni, da je goriščna razdalja naše leče za modro svetlobo manjša kot za rdečo; za vijolično pa še manjša kot za modro. Morda ste že opazili, da je na fotografskih objektivih oznaka za ostrenje za infrardečo svetlobo na drugem mestu kot za navadno svetlobo. Objektiv ima torej za infrardečo svetlobo drugačno (večjo) goriščno kot za običajno svetlobo.

Kako bi primerjali barvno napako dveh plankonveksnih leč z enako goriščno razdaljo in enakim premerom, a izdelanih iz različnih materialov?

Denimo, da imajo vse naše leče enako goriščno razdaljo za rumeno svetlobo (r_u) z valovno dolžino $D \doteq 588 \text{ nm}$ (nanometrov) $= 588 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Torej je

$$\frac{1}{f} = (n_{ru} - 1) \frac{\alpha}{h}.$$

Robne žarke, vzporedne osi leče, ta prelomi za kot približno

$$\beta - \alpha = (n - 1)\alpha.$$

Modri žarek (mo) z valovno dolžino $F \doteq 486$ nm prelomi za kot približno

$$(n_{\text{mo}} - 1)\alpha,$$

rdeči žarek (rd) z valovno dolžino $C \doteq 656$ nm pa steklo manj upočasni kot modri in zato prelomi za manjši kot, ki je približno enak

$$(n_{\text{rd}} - 1)\alpha.$$

(Valovne dolžine D , F , C pripadajo trem značilnim spektralnim črtam.)

Kot med rdečim in modrim žarkom je torej približno

$$\delta = (n_{\text{mo}} - n_{\text{rd}})\alpha \doteq \frac{(n_{\text{mo}} - n_{\text{rd}})h}{f(n_{\text{ru}} - 1)}.$$

Ker sta h , f dana, je kot med modrim in rdečim žarkom sorazmeren količniku

$$\frac{n_{\text{mo}} - n_{\text{rd}}}{n_{\text{ru}} - 1}.$$

Čim manjši je ta količnik oziroma čim večja je njegova inverzna vrednost

$$V = \frac{n_{\text{ru}} - 1}{n_{\text{mo}} - n_{\text{rd}}},$$

tem manj leča razkloni belo svetlobo in tem manj uporabnik očal občuti barvno napako.

Kvocient V je *Abbejevo število* stekla (za interval med F in C). Giblje se nekako med 20 in 90. (Ernst Abbe je bil znan nemški optik, ki je deloval v prejšnjem stoletju in postavil na noge tovarno Carl Zeiss.) Torej je

$$\delta \doteq \frac{h}{fV}. \quad (2)$$

Iz (2) sledi, da je pri danem steklu in danem polmeru h stekelc v očalih kot δ med modrim in rdečim žarkom sorazmeren f^{-1} , se pravi optični moči stekelc. Pri močnejši korekciji uporabnik bolj občuti barvno napako. Zmanjšamo jo lahko le tako, da zmanjšamo polmer h stekelc ali pa zvečamo Abbejevo število V .

Prva možnost deloma pojasni, zakaj kontaktne leče (ki imajo majhen polmer h) bolje korigirajo vid močno kratkovidnim in daljnovidnim ljudem kot očala.

Čim več dioptrij, tem debelejše so tudi leče po formuli (1). Debelina pa prinaša še druge optične napake. Zato bi bilo zelo dobro imeti stekla z velikim lomnim količnikom in velikim Abbejevim številom – ne samo za očala, ampak tudi za druge optične priprave.

Včasih so lomni količnik stekla večali z dodajanjem svinčevega oksida. Pri tem pa se je naglo zmanjševalo Abbejevo število. Za kristalne vaze je bilo to zaželeno, saj so se v svetlobi mavrično iskriale. Pred približno 120 leti so nemške tovarne s sistematičnimi raziskavami ugotovile, da lahko z barijem, borom in nekaterimi drugimi elementi izdelajo stekla, ki so v primerjavi s prejšnjimi pri podobnih lomnih količnikih imela višja Abbejeva števila. Zelo znano je borovo BK-7 steklo, ki ima lomni količnik 1.52 in $V = 64$. Uporaba novih stekel je prinesla velik napredek v optiki in prve res dobre fotografske objektivne.

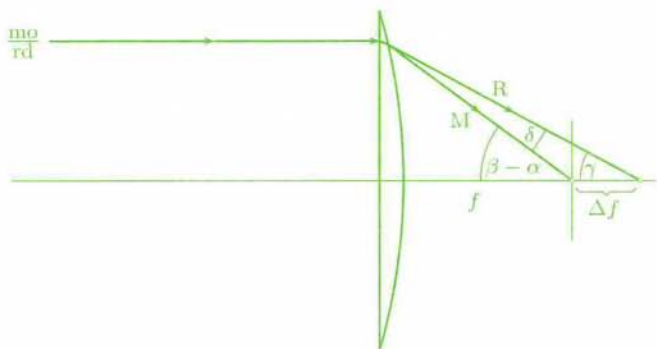
Sen o steklih z velikim lomnim količnikom in velikim Abbejevim številom pa se ni uresničil. Tik pred drugo svetovno vojno so sicer odkrili, da z dodatkom *redkih zemelj* (predvsem *lantana*) dobijo stekla z zelo visokimi lomnimi količniki in s sprejemljivimi Abbejevimi števili. Eden od nazivov za stekla s temi lastnostmi je HLD (high index, low dispersion). Iz kataloga prej omenjenega proizvajalca stekel za očala sem si prepisal podatke o najbolj uporabljenih materialih. Navajam jih v zaokroženi obliki:

n	V	
1.53	58	Plastika: $n = 1.5$, $V = 58$.
1.6	44	
1.7	40	
1.8	35	
1.9	30	

Vrnimo se k sliki 1, le da bo naša leča zdaj v fotoaparatu. Vzemimo, da je h dosti manjši kot f , tako da je

$$h \doteq (\beta - \alpha)f \quad (\text{slika 4}).$$

Denimo, da svetloba na lečo prihaja iz več raznobarvnih luči, postavljenih druga ob drugi daleč stran od leče. Če kot na sliki 4 ostra slika modre



Slika 4.

luči nastane na filmu, potem ostra slika rdeče luči nastane v oddaljenosti Δf za filmom. Ker je $\gamma = \beta - \alpha - \delta$, je

$$h \doteq (f + \Delta f)\gamma = (f + \Delta f)(\beta - \alpha) - (f + \Delta f)\delta.$$

Primerjajmo z gornjo enačbo, pa je

$$(\Delta f)(\beta - \alpha) = (f + \Delta f)\delta \doteq f\delta.$$

Po (2) je

$$f\delta \doteq \frac{h}{V} \doteq \frac{(\beta - \alpha)f}{V}.$$

Torej je

$$\Delta f \doteq \frac{f}{V}. \quad (3)$$

Čim večji je f , tem bolj narazen sta sliki modre in rdeče luči.

Kot vemo iz članka o globinski ostrini v naši seriji *Fotografija in matematika* (Presek XXV/4), pri zaslonskem številu 8 ostra slika lahko nastane po dogovoru 8/30 mm stran od filma, pa bo na filmu še sprejemljivo ostra. Če hočemo obenem upodobiti modro in rdečo luč, smeta njuni sliki nastati kvečjemu $\Delta f = 16/30$ mm narazen. Za BK-7 steklo z $V = 64$ je ustrezna goriščnica največ

$$f \doteq V \cdot \Delta f \doteq 34 \text{ mm}.$$

Premer take leče je $34/8$ mm $\doteq 4$ mm. Da bi hkrati dobro upodobili vse luči – od temno rdeče do vijolične – bi bilo treba vzeti še manjši f .

Z enostavno lečo si torej ne moremo kaj prida pomagati. Sestavimo zato *akromat* iz zbiralne leče in razpršilne leče (slika 5). Zbiralna leča naj ima lomni količnik n_1 in Abbejevo število V_1 ter goriščno razdaljo f_1 , kjer je

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n_1 - 1}{R_1}.$$

Razpršilna leča naj ima lomni količnik n_2 in Abbejevo število V_2 ter goriščno razdaljo f_2 , kjer je

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1 - n_2}{R_2} < 0.$$



Slika 5.

(V mislih zapolnite vdolbino v razpršilni leči s plankonveksno lečo. . .) Kot vemo, je goriščna razdalja sestava f , kjer je

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{n_1 - 1}{R_1} + \frac{1 - n_2}{R_2}.$$

Zahtevamo, da je f isti za rdečo in za modro svetlobo, se pravi

$$\frac{n_{1rd} - 1}{R_1} + \frac{1 - n_{2rd}}{R_2} = \frac{n_{1mo} - 1}{R_1} + \frac{1 - n_{2mo}}{R_2}.$$

Od tod je

$$\frac{n_{1rd} - n_{1mo}}{R_1} = \frac{n_{2rd} - n_{2mo}}{R_2}.$$

Upoštevajmo definicijo za $V = (n_{ru} - 1)/(n_{rd} - n_{mo})$, pa je

$$\frac{n_{1ru} - 1}{R_1} \cdot \frac{1}{V_1} = \frac{n_{2ru} - 1}{R_2} \cdot \frac{1}{V_2}.$$

Ker je $1/f_{1ru} = (n_{1ru} - 1)/R_1$, je tako

$$f_{1ru}V_1 = -f_{2ru}V_2.$$

Če naj bo sestav zbiralna leča, mora biti $f_{1ru} < -f_{2ru}$, zato mora biti $V_1 > V_2$. Za akromat torej potrebujemo stekli z različnima Abbejevima številoma.

Peter Legiša

O TRANZISTORJIH

V prejšnji številki Preseka smo obdelali polprevodnik s primesjo. Polprevodniku germaniju ali siliciju dodamo majhno primes petvalentnega elementa, na primer fosfora ali arzena. Pri sobni temperaturi se najsižbejše vezani elektron odtrga od petvalentnega atoma in kot prevodniški elektron sodeluje pri prevajanju, pozitivni ion pa ostane vezan na svoje mesto v kristalu. Tako dobimo polprevodnik n. V njem se sicer pojavijo tudi vrzeli, njihova gostota pa je veliko manjša kot gostota prevodniških elektronov.

Polprevodniku lahko dodamo majhno primes trivalentnega elementa, na primer bora ali galija. Pri sobni temperaturi atom trivalentnega elementa veže elektron in nastala vrzel sodeluje pri prevajanju, negativni ion pa ostane vezan na svoje mesto v kristalu. Tako dobimo polprevodnik p. V njem se sicer pojavijo tudi prevodniški elektroni, njihova gostota pa je veliko manjša kot gostota vrzeli.

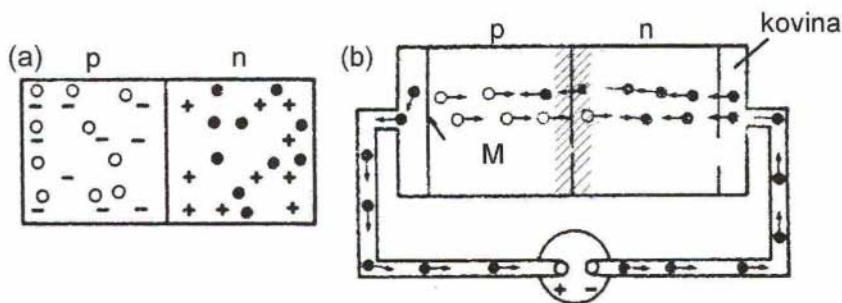
Po tem povzetku iz prejšnjih prispevkov se lotimo *polprevodniških elementov*. Najpreprostejši element je *polprevodniška dioda*, kristal polprevodnika z območjem n in z območjem p. Obravnavajmo le nosilce naboja, ki prevladujejo, to je prevodniške elektrone v območju n in vrzeli v območju p. Po območju n potujejo prevodniški elektroni in njihov naboj izravnavajo pozitivni ioni petvalentne primesi, ki ostanejo vezani na svoja mesta v kristalu. Po območju p potujejo vrzeli in njihov naboj izravnavajo negativni ioni trivalentne primesi, ki ostanejo vezani na svoja mesta v kristalu.

Ob stiku *n-p* na meji obeh območij posamezni prevodniški elektroni iz območja n odtavajo v območje p in tam zasedejo vrzeli. Posamezne vrzeli iz območja p odtavajo v območje n in jih tam zasedejo prevodniški elektroni. V obeh primerih prenehajo obstajati pari prevodniških elektronov in vrzeli. Zaradi tega na meji območja n primanjkuje prevodniških elektronov in prevlada pozitivni naboj ionov petvalentne primesi, na meji območja p pa primanjkuje vrzeli in prevlada negativni naboj ionov trivalentne primesi (slika 1a). Ob stiku nastaneta zelo tanki plasti: plast v območju n je naelektrena pozitivno in plast v območju p negativno. Plasti s svojima nabojema preprečujeta, da bi prehajali dodatni prevodniški elektroni iz območja n v območje p in dodatne vrzeli iz območja p v območje n.

Povežimo z območjem n pozitivni priključek in z območjem p negativni priključek zunanega izvira napetosti. Nekaj dodatnih prevodniških elektronov preide iz območja n v območje p in nekaj dodatnih vrzeli iz območja p v območje n. Nekoliko se povečata pozitivni naboj ionov petvalentne primesi na meji območja n in negativni naboj ionov trivalentne

primesi na meji območja p, nič drugega. V *zaporni smeri*, ko je območje n povezano s pozitivnim priključkom in območje p z negativnim, dioda ne prepušča toka.

Drugače je, če območje n povežemo z negativnim priključkom in območje p s pozitivnim priključkom zunanjega izvira. Prevodniški elektroni potujejo po območju n do meje in vrzeli po območju p v drugi smeri do meje. V območju na eni in drugi strani meje prevodniški elektroni zasedajo vrzeli in tam prenehajo obstajati pari prevodniških elektronov in vrzeli. Pri tem se sprošča energija, ki jo del kristala navadno oddaja kot toploto. Na priključku na meji med kovino in območjem p pa nastajajo pari prevodniških elektronov in vrzeli. Prevodniški elektroni potujejo po kovini in vrzeli v nasprotni smeri po območju p, tako da je tok sklenjen (slika 1b). Dioda prepušča tok v *prepustni smeri*, ko je območje n povezano z negativnim priključkom in območje p s pozitivnim. Dioda *usmerja*.

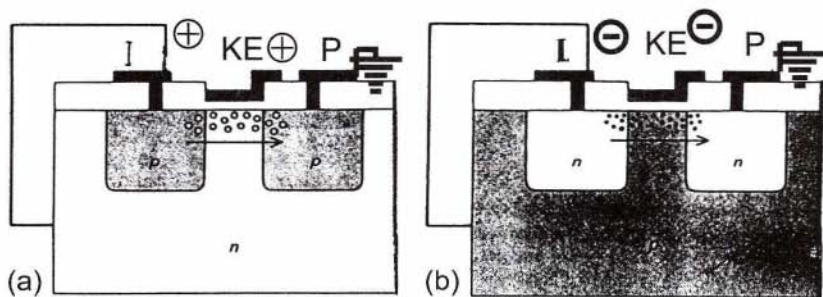


Slika 1. Polprevodniška dioda, ko nanjo ni priključen zunanji izvir napetosti (a), in sklenjeni tok, ko je priključen zunanji izvir v prepustni smeri (b). • kažejo prevodniške elektrone, o vrzeli, + pozitivne ione petvalentne primesi in – negativne ione trivalentne primesi, ki ostanejo vezani na svoja mesta v kristalu. Plast na stiku n-p, v kateri prevladata naboja tega in drugega znaka, sta debeli le kako tisočino milimetra. Na osenčenem območju ob meji, ki je precej širše od omenjene plasti, prenehajo obstajati pari prevodniških elektronov in vrzeli, na meji M med kovino in območjem p pa pari nastajajo.

Bolj zapleten polprevodniški element sestavimo iz dveh diod n-p in p-n ali p-n in n-p. Tako dobimo *tranzistor n-p-n* ali *tranzistor p-n-p*. Ta *bipolarna tranzistorja* bomo preskočili. Ime opozarja, da sodelujejo pri njunem delovanju prevodniški elektroni in vrzeli. Opisali bomo le preprostejše *unipolarne tranzistorje*, v katerih sodelujejo samo prevodniški elektroni ali samo vrzeli.

V kristalu silicija p naj bosta otočka n, ki ju imenujemo *izvir* in *ponor* (slika 2a). Nad območjem med njima, *kanalom*, je tanka plast izolatorja – silicijevega dioksida – in nad tem drobna kovinska elektroda – *krmilna elektroda*. Ponor je proti izviru na pozitivni napetosti. V takih razmerah potuje le malo prevodniških elektronov iz izvira po kanalu z množico vrzeli do ponora. Razmere se spremenijo, ko priključimo na krmilno elektrodo pozitivno napetost proti izviru. Pozitivni naboj na krmilni elektrodi privlači prevodniške elektrone in nekaj prevodniških elektronov pritegne v zelo tanko plast na površju. Ti elektroni po površju lahko potujejo proti ponoru, ne da bi jih motile vrzeli pod površjem kanala. Čim višja je napetost na krmilni elektrodi, tem bolj krmilna elektroda privlači prevodniške elektrone, tem več jih pritegne v zelo tanko plast na površju in tem večji je tok teh prevodniških elektronov. Z napetostjo na krmilni elektrodi uravnavamo tok prevodniških elektronov od izvira do ponora. Tako lahko ojačimo signal na krmilni elektrodi ali ga kako drugače preoblikujemo. Med krmilno elektrodo in polprevodnikom je izolatorska plast, tako da med elektrodo in polprevodnikom ni toka. To pomeni, da ni treba dovajati električnega dela, ko preoblikujemo signal. Zelo malo električnega dela se porabi le za to, da na krmilni elektrodi pozitivni naboj povečamo ali zmanjšamo.

Zamislimo si napravo, v kateri vse pozitivne priključke in naboje zamenjamo z negativnimi in obratno, ne da bi spremenili kaj drugega. V kristalu silicija n sta otočka p izvir in ponor, ki je proti izviru na negativni napetosti (slika 2b). Čim večja je negativna napetost krmilne elektrode proti ponoru, tem več vrzeli potuje po zelo tanki plasti na površju proti ponoru. Tako z napetostjo na krmilni elektrodi uravnavamo tok vrzeli od izvira do ponora in ojačimo ali kako drugače preoblikujemo signal.



Slika 2. n MOSFET (a) in p MOSFET (b). I izvir, P ponor, KE krmilna elektroda, • prevodniški elektroni in o vrzeli.

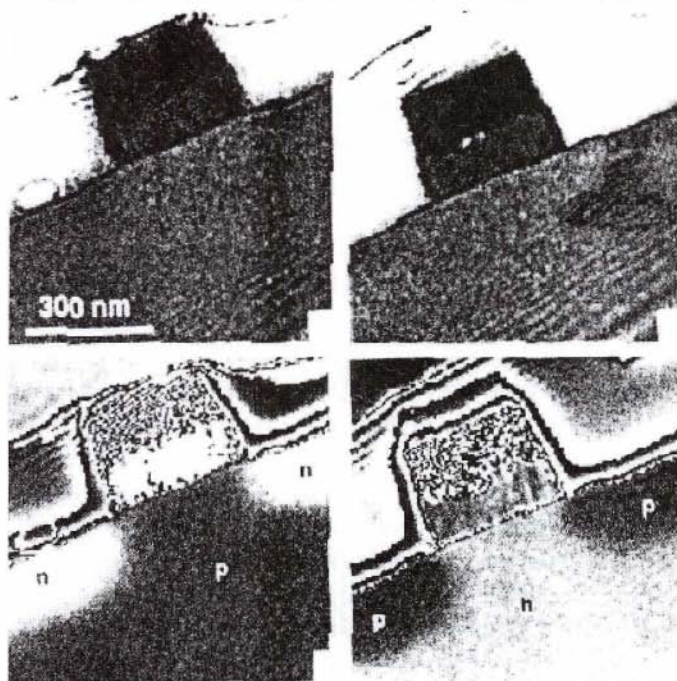
Opisali smo n MOSFET in p MOSFET, "delovna konja" v današnjih silicijevih ploščicah ali "čipih". V prvem so pomembni le prevodniški elektroni in v drugem le vrzeli. Nekoliko dolga kratica pomeni kovina – oksid – učinek polja – tranzistor (**metal oxide semiconductor field effect transistor**). Med krmilno elektrodo in izvirom ali ponorom ni toka in na prevodniške elektrone ali vrzeli v kanalu vpliva le naboj na krmilni elektrodi s svojim električnim poljem.

Uporabljajo tudi bipolarne tranzistorje, ki imajo svojo prednost – so, na primer, hitrejši. Vendar so unipolarni tranzistorji manjši in zato pripravljeni za uporabo na silicijevi ploščici. Silicijev kristal n ali p s premerom dobrih deset centimetrov vzgojijo iz taline in ga narežejo na tanke režnje. Na vsakem režnju naredijo več enakih ploščic, od katerih ima vsaka ploščino od enega do dveh kvadratnih centimetrov in vsebuje do več milijonov tranzistorjev in drugih elementov. Ploščice izdelujejo tako, da površje režnja v vakuumu na določenih delih prekrijejo z zaščitno snovjo in preostale dele obdelajo. Postopek večkrat ponovijo in pri tem z zaščitno snovjo prekrijejo različne dele režnja. V vodni pari pri višji temperaturi površje silicija prevleče tanka plast silicijevega dioksida. Na silicij naparijo trivalentno ali petvalentno primes in kristal segrejejo, da nastanejo območja p ali n. Na silicij naparijo tanko plast aluminija, da nastanejo kovinske elektrode.

Na najmanjši sedanji tranzistor v silicijevi ploščici odpade le nekaj sto milijonin milimetra, to je nekaj sto nanometrov, nm. V skrajnem primeru mu po dolžini ustreza stopetdeset in po globini petdeset atomov (slika 3). Polprevodniški elementi postajajo vse manjši in rabijo vse manj energije. Izkušnje kažejo, da se v poldrugem letu podvoji njihova zmogljivost (slika 4).

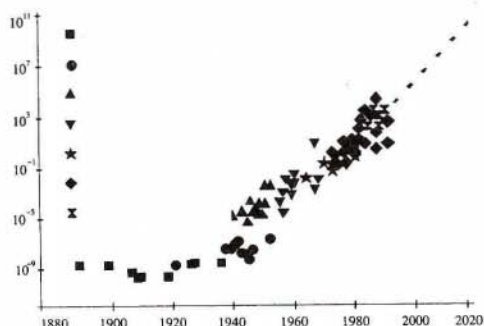
Odkritje tranzistorja leta 1947 "je imelo na raziskovanje v fiziki večji vpliv kot katero koli drugo odkritje." William Shockley, John Bardeen in Walter H. Brattain so leta 1956 dobili Nobelovo nagrado za "raziskovanja polprevodnikov in odkritje tranzistorskega pojava."¹

¹ John Bardeen je edini dobil dve Nobelovi nagradi za fiziko. Leta 1972 je delil z Leonom N. Cooperjem in Johnom R. Schriefferjem nagrado za teorijo superprevodnosti. Dve Nobelovi nagradi sta dobila le še Marie Curie za fiziko skupaj s Henrijem Becquerelom in Pierrom Curiejem in za kemijo ter Linus Pauling za kemijo in za mir.



Slika 3. S posebnim prijemom so določili gostoto nosilcev naboja v tankem prečnem režnju n MOSFET (levo) in p MOSFET (desno). Med otočkoma, ki ustrežata izviru in ponoru, je dobro vidna krmilna elektroda. Sliko so dobili z elektronsko holografijo. Del curka elektronov so vodili skozi reženj na slikovno napravo in drugi del curka naravnost na napravo. Spodnja slika podaja gostoto nosilcev naboja. W. D. Rau in drugi, *Two-dimensional mapping of the electrostatic potential in transistors by electron holography*, Physical Review Letters **82** (1999) 2614.

Slika 4. Po Moorovem "zakonu" se v poldrugem letu podvoji ali v dvajsetih letih desettisočkrat poveča zmogljivost polprevodniških elementov. Na navpično os je naneseno število bitov, ki jih element na 1 britanski funt (iz leta 1990) obdela na sekundo. S črticami je nakazana napoved. Znamenja od zgoraj navzdol ustrezajo: mehaničnim elementom, elektromehaničnim elementom, elektronkam, tranzistorjem, silicijevim ploščicam, mikroprocesorjem in ploščicam iz galijevega arzenida.

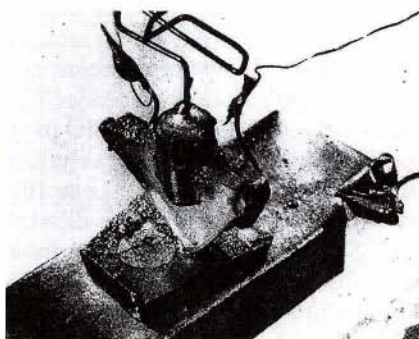
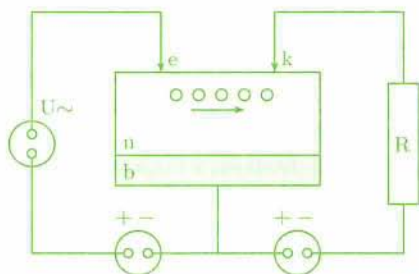


Že leta 1874 je oče katodne cevi, Ferdinand Braun, ugotovil, da kristal cinkove svetlice ZnS med dvema točkastima priključkoma v eni smeri bolje prevaja kot v drugi. Arthur Schuster je krog s stikom med starima bakrenima žicama priključil na izmenično napetost. Ampermeter v krogu je kazal odklon v konstantni smeri, ker je usmerjala tanka plast dibakrovega oksida Cu_2O na površju stikajočih se žic. Leta 1906 so priznali patenta za usmerjanje s karborundom SiC in silicijem. Okoli leta 1915 so v radijskih sprejemnikih na veliko uporabljali usmernik ali *detektor* s cinkovo svetlico in točkastim priključkom. Leta 1925 so uporabili usmernik s selenom in naslednjega leta usmernik z dibakrovim oksidom, ki je zmozel precejšen tok. Začeli so delati poskuse z monokristali in so spoznali, da električna prevodnost polprevodnikov z naraščajočo temperaturo narašča kot $e^{-\alpha/T}$ s konstanto α od 2300 do 4600 K. Izid so pojasnili z energijsko špranjo med vrhom valenčnega in dnom prevodnega pasu s širino od 0,2 do 0,4 eV.

Pred drugo svetovno vojno so pri družbi Bell Telephones v ZDA spoznali, da mehanično preklapljanje stikal močno zmanjšuje hitrost pri telefoniranju. V njenem raziskovalnem laboratoriju so se ponovno začeli zanimati za dibakrov oksid in pozneje za silicij, da bi morebiti prišli do hitrejših stikal. S taljenjem v vakuumu so si prizadevali dobiti kolikor mogoče čist silicij. Pri tem so ugotovili, da so nekateri kristali usmerjali tako, nekateri drugače. Ene so imenovali *n*, druge *p*. Spočetka niso mogli vplivati na to, ali so dobili kristal *n* ali kristal *p*. Po naključju so dobili kristal, ki je imel na enem delu območje *n* in na drugem delu območje *p*. Iz njega so izrezali prvo polprevodniško diodo. Potem so ugotovili, da je mogoče vplivati na izid pri čiščenju kristala z neznatno primesjo petvalentnega ali trivalentnega elementa. Primesi tedaj še ni bilo mogoče določiti ne s kemijsko analizo ne spektroskopsko po izsevani svetlobi.

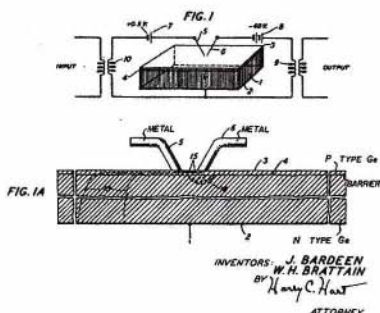
Leta 1946 so osnovali skupino, ki naj bi raziskala delovanje polprevodnikov in ugotovila, ali bi bilo mogoče z njimi izdelati ojačevalnik. V skupini pod vodstvom Williama Shockleya je bilo poleg nagrajencev še nekaj drugih raziskovalcev iz Bellovih laboratorijev, ki so sodelovali tudi z raziskovalci iz nekaterih drugih laboratorijev. Tedaj so že znali izdelati kristal silicija ali germanija z želeno prevodnostjo. Poskusi pa so dajali nepričakovane rezultate. Pojasnil jih je John Bardeen s *površinskimi stanji*. Elektroni se lahko gibljejo po površju polprevodnika v dveh razsežnostih, medtem ko je po prostornini polprevodnika porazdeljen enako velik nabor nasprotnega znaka. Po zgledu detektorja so sestavili *tranzistor s točkastima stikoma*, ki je bil uporaben kot stikalo ali ojačevalnik (slika 5). Današnji unipolarni tranzistor *p* MOSFET (slika 2b) je njegov bližji sorodnik. Ime za novo napravo si je izmislil J. R. Pierce. V pogovoru je Bardeena in Brattaina opozoril na količino, ki je pomembna za elektronke,

strmino, agleško tranconductance, in njeno obratno vrednost, angleško transresistance, ter tvoril besedo tranzistor. Ime se je prijelo.



Oct. 3, 1950 J. BARDEEN ET AL. 2,524,035
THREE-TERMINAL CIRCuits EMPLOYING
SEMICONDUCTIVE MATERIALS
Filed June 17, 1948 3 Sheets-Sheet 1

Slika 5. Prvi tranzistor s točkastima stikoma iz leta 1947 in prijava patenta, ki sta jo 17. junija 1948 vložila J. Bardeen in W. H. Brattain. V vezju pomeni U izmenični signal in R delovni upornik, točkasta stika sta emitor e , ki oddaja vrzeli v polprevodnik n , in kolektor k , ki jih zbira, b je baza. Vlogo emitorja v tranzistorju pogosto primerjajo z vlogo katode v triodi, vlogo kolektorja z vlogo anode in vlogo baze z vlogo mrežice.



Leta 1949 je Shockley pojasnil delovanje diode, predložil tranzistor p-n-p in dve leti pozneje tranzistor n-p-n ter še leto pozneje obdelal učinek polja. Vzporedno z razlago so se razvijali tehniški prijemi. Do leta 1952 so dobivali polprevodnike n in p samo s kristalizacijo iz taline. Tega leta so začeli izkoriščati nov postopek. Spojino petvalentnega ali trivalentnega elementa so nanесли na kristal polprevodnika in kristal za dalj časa segreli, da so se atomi primesi vgradili v kristal. Unipolarni tranzistorji so se razvili po letu 1960, posebno še po letu 1965, ko so se navadili na kristalu izdelovati zelo tanke izolatorske plasti silicijevega dioksida. Uspeh so prinesla integrirana vezja in splošna miniaturizacija. Nekaj časa je bil v ospredju germanij, ker ga je bilo mogoče bolje prečistiti, potem pa je prevladal silicij, ki je omogočil miniaturizacijo. V novjšem času vse več uporabljajo galijev arzenid GaAs.

Kot se je širila uporaba polprevodniških elementov, so vakuumske elektronke postopno prihajale iz rabe. Leta 1904 je John Fleming uporabil prvo vakuumsko diodo, elektronko z dvema elektrodama, od katerih so katodo segrevali, da so iz nje izhlapevali elektroni. Take diode so uporabljali za usmerjanje. Dve leti pozneje je Lee de Forest sestavil triodo, v kateri je med katodo in anodo vstavil tretjo elektrodo, mrežico. Čim višja negativna napetost proti katodi je na mrežici, tem manjši je tok elektronov s katode na anodo. Triodo so uporabljali za ojačevanje. Do tridesetih let so prevladale elektronke in z detektorjem so se zadovoljili le najskromnejši radioamaterji. Danes so elektronke tako rekoč pozabljene. So razmeroma velike, v njih je treba segrevati katodo, zaradi česar porabijo veliko električnega dela in se kvarijo. Za razliko od njih so polprevodniški elementi majhni, odporni in obstojni in zase ne porabijo skoraj nobenega električnega dela.

Janez Strnad

PREMISLI IN NARIŠI – Rešitev s str. 269

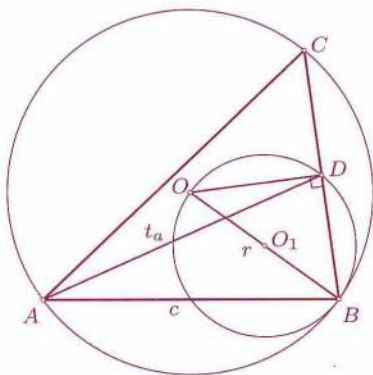
Izberimo oznake kot na sliki 1.

Začetek konstrukcije je preprost. Narišemo iskanemu trikotniku ABC očrtano krožnico s središčem O in polmerom r ter stranico AB kot tetivo te krožnice z dolžino c .

Tretje oglišče C bomo konstruirali tako, da bomo najprej poiskali točko D (skupno točko stranice a in težiščnice t_a) in nato od B trivialno nadaljevali preko D do C na očrtani krožnici.

Premislimo, kako poiskati točko D .

Ker je D razpolovišče stranice BC , je daljica OD pravokotna na BC . Zato leži D (po Talesovem izreku o obodnem kotu nad premerom) na krožnici s premerom OB . Po drugi strani je D za t_a oddaljena od točke A . Torej je D presečišče dveh krožnic: krožnice s premerom OB in krožnice $\mathcal{K}(A, t_a)$ s središčem v točki A in s polmerom t_a .



Slika 1.

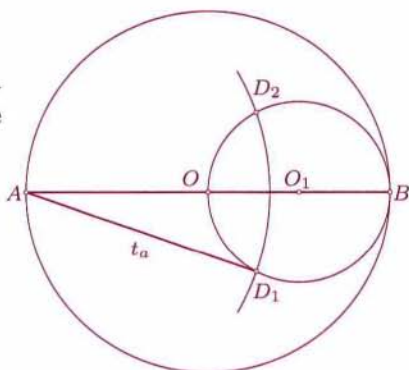
Drugi del naloge sprašuje po številu neskladnih rešitev naloge. Iz zgornjega opisa konstrukcije sledi, da ima lahko naloga dve (bodisi skladni bodisi neskladni) rešitvi, eno ali nobene rešitve. Preglejmo možnosti:

1. $c > 2r$

Naloga nima rešitve, saj stranica ne more biti večja od premera očrtane krožnice.

2. $c = 2r$

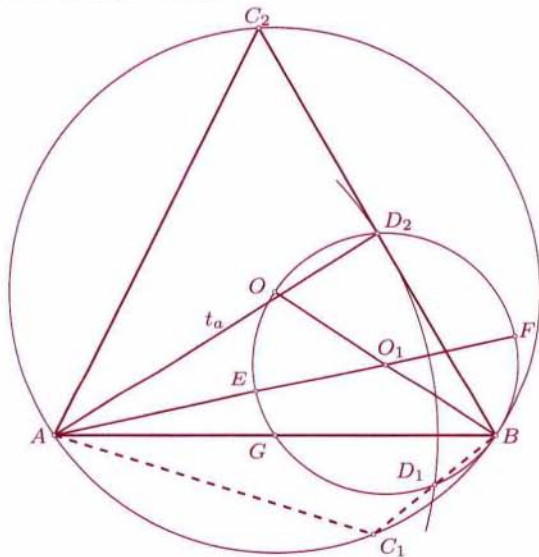
S slike 2 razberemo, da ima naloga dve (skladni) rešitvi, če je $r < t_a < 2r$. Sicer nima rešitve.



Slika 2.

3. $c < 2r$

Tak primer prikazuje slika 3. Z O_1 smo označili središče krožnice s premerom OB (njen polmer je $\frac{r}{2}$) in z EF tisti premer te krožnice, ki leži na premici skozi A in O_1 .



Slika 3.

Za $\overline{AE} < t_a < \overline{AF}$ imata krožnica s premerom OB in krožnica $\mathcal{K}(A, t_a)$ dve presečišči D_1 in D_2 , ki vodita do dveh neskladnih rešitev naloge, trikotnikov ABC_1 in ABC_2 . Če je $t_a = \overline{AE}$ ali $t_a = \overline{AF}$, imamo po eno rešitev, sicer rešitve ni.

Kako na ta odnos vplivajo podatki?

Na sliki 3 smo z G označili točko, v kateri stranico c seka krožnica s premerom OB . Ker je daljica OG pravokotna na AB (spet po Talesovem izreku), točka G razpolavlja stranico c (ker je to tetiva krožnice s središčem v O). Če izrazimo potenco točke A glede na krožnico s premerom OB na dva načina, dobimo $c \cdot \frac{c}{2} = \overline{AO_1}^2 - (\frac{r}{2})^2$, in od tod

$$\overline{AO_1}^2 = \frac{1}{4}(r^2 + 2c^2).$$

Dve neskladni rešitvi torej dobimo, če je

$$\frac{1}{2}(\sqrt{r^2 + 2c^2} - r) < t_a < \frac{1}{2}(\sqrt{r^2 + 2c^2} + r).$$

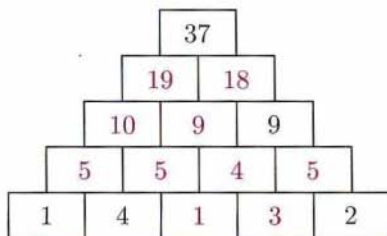
Če je težiščnica t_a enaka ali levi ali desni strani te ocene, imamo eno samo rešitev. Sicer rešitve ni.

Marija Vencelj

ŠTEVILSKA PIRAMIDA – Rešitev s str. 258

V zastavljeni nalogi so med pripravo prejšnje številke Preseka iz piramide izginili narisani zidaki. Ker ni težko uganiti, kako morajo biti postavljeni, naloge ne bomo ponavljali, ampak si oglejmo le njeno rešitev.

Nalogo lahko rešimo s poskušanjem ali jo prevedemo na reševanje sistema dveh linearnih enačb. Če označimo z x število na tretjem in z y število na četrtem zidaku z leve v spodnji vrsti, upoštevamo pogoje naloge ter že vpisana števila, dobimo sistem enačb $x + 2y + 2 = 9$ in $5x + 2y + 26 = 37$, ki ima rešitev $x = 1$, $y = 3$. Potem piramide ni več težko dopolniti.



Marija Vencelj

LOKALNE VOLITVE

Nedavno so se v Kašlju odločili, da krajevno skupnost razdelijo na dva dela: Spodnji Kašelj in Zgornji Kašelj. Seveda je treba po razdelitvi opraviti nove lokalne volitve. Žal pa sta volilna imenika za oba Kašlja nekoliko neurejena.

In tako so se v odboru za pripravo volitev spomnili Vas, kašelskega programerskega vseznalca. Poiskati morate napake v volilnih imenikih.

Vsaka oseba ima enolično določeno štirimestno identifikacijsko številko. Vhodni podatki so tri (neurejena) zaporedja števil. Vsako se konča z vrednostjo -1 . Prvo zaporedje predstavlja seznam volivcev, torej gre za seznam identifikacijskih števil tistih oseb, ki lahko volijo. Paziti morate, da se v tem seznamu nobeno število ne pojavi večkrat; če se pojavi, izpišite opozorilo (za vsakega volivca samo enkrat):

Volivec xxxx je prijavljen večkrat.

Drugo in tretje zaporedje predstavljata nova volilna imenika za Spodnji oziroma Zgornji Kašelj. Tu je treba preveriti več stvari. Najprej je treba ugotoviti, ali imajo osebe iz teh dveh imenikov sploh volilno pravico, ali se torej nahajajo v prvem seznamu. Če najdete osebo brez volilne pravice, izpišite obvestilo (za vsako osebo v vsakem imeniku samo enkrat):

Oseba xxxx iz Spodnjega Kašlja nima volilne pravice.
oziroma

Oseba xxxx iz Zgornjega Kašlja nima volilne pravice.

Če se taka oseba nahaja v obeh imenikih, izpišite obe obvestili. Za osebe, ki imajo volilno pravico, je treba preveriti, da niso hkrati prijavljene v obeh Kašljih. Če so, morate izpisati:

Volivec xxxx je prijavljen v Spodnjem in Zgornjem Kašlju.

Za volivce, ki so le v enem od obeh imenikov, je treba preveriti, da so vanj vpisani le enkrat. Obvestilo o odkriti napaki je podobno kot pri seznamu oseb z volilno pravico:

Volivec xxxx je v Spodnjem Kašlju prijavljen večkrat.

Če gre za volivca iz Zgornjega Kašlja, v izpisu besedico *Spodnjem* zamenjamo z *Zgornjem*. Nazadnje je treba še preveriti, da je vsak volivec

vpisan v volilni imenik za Spodnji ali za Zgornji Kašelj. Če odkrijete volivca, ki ni vpisan v nobenem Kašlju, morate izpisati:

Volivec xxxx ni vpisan v noben volilni imenik.

Za konec si oglejmo še primer. Recimo, da imamo na vhodu naslednja zaporedja števil:

0002	1234	3784	1234	8652	9399	1980	2213	0999	-1
8652	4321	8652	4321	3784	8652	2213	9399	-1	
1980	1234	3784	7777	1234	4321	7777	3784	0002	-1

Program za preverjanje pravilnosti volilnih imenikov mora izpisati naslednja obvestila:

Volivec 1234 je prijavljen večkrat.

Oseba 4321 iz Spodnjega Kašlja nima volilne pravice.

Oseba 7777 iz Zgornjega Kašlja nima volilne pravice.

Oseba 4321 iz Zgornjega Kašlja nima volilne pravice.

Volivec 3784 je vpisan v Spodnjem in Zgornjem Kašlju.

Volivec 8652 je v Spodnjem Kašlju prijavljen večkrat.

Volivec 1234 je v Zgornjem Kašlju prijavljen večkrat.

Volivec 0999 ni vpisan v noben volilni imenik

Volitve so pred vrati, zato kar hitro na delo.

Martin Juvan

MLADINSKI ASTRONOMSKI RAZISKOVALNI TABOR 2000

Astronomsko društvo JAVORNIK Ljubljana sporoča, da bo letošnji tabor potekal od 19.8. do 26.8. v Centru za šolske in obšolske dejavnosti Medved na Medvedjem brdu pri Godoviču. Predvideno je delo v petih skupinah: meteorji, splošna astronomija, radijska astronomija, računalniško modeliranje v astronomiji, zvezde in zvezdni sistemi. Z astrofotografijo pa se bo po želji lahko ukvarjal vsak udeleženec tabora. Več informacij dobite pri vodji tabora Igorju Gromu – telefon: (01) 565-13-98. Prijavite se čimprej! Prijave sprejemamo po telefonu, na e-naslov: marko.pust@yahoo.com, lahko pa pišete tudi na naslov Astronomsko društvo Javornik, Ljubljana, Kolodvorska 6.

Igor Grom

KRITERIJ DELJIVOSTI S PRAŠTEVILI

Profesor Rihard Zupančič¹ je objavil leta 1909 v časopisu *L'Enseignement mathématique*, volumen 11, na straneh 300–301 članek “Sur une question elementaire de divisibilite”. V njem je na kratko izpeljal kriterij deljivosti naravnega števila s praštevilom. Ta preprost kriterij deljivosti se mi zdi zanimiv, zato ga podajam v nekoliko razširjeni obliki.

Dano naj bo naravno število n , zapisano v desetiškem sistemu. Naj bo p praštevilo, večje ali enako 7. Vsako naravno število lahko zapišemo v obliki

$$n = 10q + r, \quad 0 \leq r \leq 9. \quad (1)$$

Privzemimo najprej, da je število n deljivo s p :

$$n = 10q + r = k_1 p, \quad k_1 \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Vsako naravno število, zato tudi q , lahko zapišemo v obliki

$$q = k_2 p + m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Iz enačbe (2) potem sledi

$$r = (k_1 - 10k_2)p - 10m. \quad (4)$$

Oglejmo si sedaj polinom $q + rx$, kjer naj x teče po celih številih. Za q in r vstavimo izraza iz formul (3) in (4) ter dobimo

$$q + rx = (k_2 + k_1 x - 10k_2 x)p + m(1 - 10x). \quad (5)$$

Sedaj pokažimo, da je za vsako praštevilo p , večje ali enako 7, mogoče izbrati celo število x tako, da bo $1 - 10x$ deljivo s p ; tedaj bo seveda tudi $q + rx$ deljivo s p . Obstaja torej $x \in \mathbb{Z}$, da velja

$$1 - 10x = k_3 p$$

ali za neki k_3 je

$$x = \frac{1 - k_3 p}{10} \quad (6)$$

¹ Dr. Rihard Zupančič je bil profesor matematike na tehniški fakulteti v Ljubljani od leta 1919 do leta 1945. Bil je tudi drugi rektor ljubljanske univerze v šolskem letu 1920/21.

celo število. To dokažemo takole: Praštevila večja od 7 so seveda liha, v njihovem dekadičnem zapisu je zadnja številka eno od števil 1, 3, 7 ali 9 (5 ne more biti, ker bi bilo tako število deljivo s 5). Za praštevila z zadnjo številko 1 izberemo zgoraj $k_3 = 1$; za ona z zadnjo številko 3, 7 ali 9, izberemo npr. $k_3 = 7, 3$ in 9. V vseh štirih primerih bo imel produkt k_3p zadnjo številko enako 1, zato bo x v formuli (6) gotovo celo število.

Napravimo kratko tabelo števil p in x :

p	7	11	13	17	19	23
x	-2	-1	4	-5	2	7

Opazimo, da ima enačba (6) neskončno mnogo rešitev; poleg rešitve $x = -5$ pri $p = 17$ je npr. rešitev tudi $x = 12$ itd.

Pri danem naravnem številu n in praštevilu $p \geq 7$ ugotavljamo deljivost števila n s p takole: Najprej poiščemo eno rešitev x enačbe (6) in izračunamo število $q + rx$. Če je to število deljivo s p ,

$$q + rx = k_4p,$$

vstavimo q iz te enačbe v enačbo (1) in dobimo

$$n = 10(k_4p - rx) + r = 10k_4p + r(1 - 10x).$$

Ker je x rešitev enačbe (6), sledi

$$n = (10k_4 + rk_3)p$$

ali, n je deljiv s p .

Izrek: Za dano praštevilo $p \geq 7$ naj bo x ena rešitev enačbe (6). Tedaj je n deljiv s p natanko tedaj, ko je $q + rx$ deljivo s p .

Primer: Vzemimo $n = 7014$. Zanima nas, ali je to število deljivo s 7. Ker je $7014 = 10 \cdot 701 + 4$, je $q = 701$ in $r = 4$. Pri $p = 7$ je ena rešitev enačbe (6) $x = -2$. Po izreku izračunamo $q - 2r = 701 - 8 = 693$. Ker je to število veliko, moremo njegovo deljivost s 7 spet ugotavljati po našem izreku. Sedaj je $q = 69$ in $r = 3$, zato $q + rx = 69 - 2 \cdot 3 = 63$, ki je deljivo s 7. Torej je tudi število 693 in zato 7014 deljivo s 7.

Poglejmo še, ali je število 7014 deljivo tudi s 13. Sedaj vzamemo npr. $x = 4$ in dobimo $q + rx = 717$. Če za število 717 ponovno uporabimo navodilo izreka, dobimo $q + rx = 99$, to število pa očitno ni deljivo s 13, zato tudi 7014 ni.

Anton Suhadolc

TRIJE NAČINI DOLOČITVE TEŽNEGA POSPEŠKA

Pospešek prostega pada oziroma težni ali gravitacijski pospešek na površju kakega vesoljskega telesa je pomemben podatek za to telo. Težni pospešek na zemeljskem površju je $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ali približno 10 m/s^2 , sicer pa se s krajem (zemljepisno širino) spreminja (glej preglednico). V Ljubljani meri $9,805 \text{ m/s}^2$.

zemljepisna širina	težni pospešek
0° (ekvator)	$9,780 \text{ m/s}^2$ – najmanjši
10°	$9,782 \text{ m/s}^2$
20°	$9,786 \text{ m/s}^2$
30°	$9,793 \text{ m/s}^2$
40°	$9,802 \text{ m/s}^2$
50°	$9,811 \text{ m/s}^2$
60°	$9,819 \text{ m/s}^2$
70°	$9,826 \text{ m/s}^2$
80°	$9,831 \text{ m/s}^2$
90° (pol)	$9,832 \text{ m/s}^2$ – največji

Težni pospešek ob morski gladini v odvisnosti od zemljepisne širine.

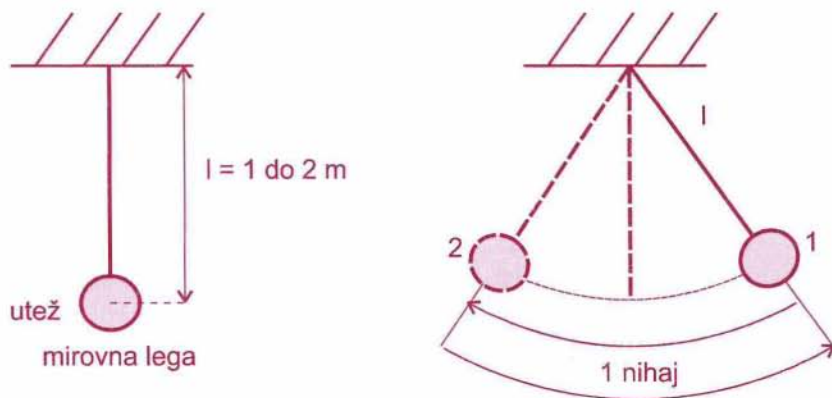
Težni pospešek določimo na več načinov. Omenili bomo tri. Vse lahko opravijo že osmošolci.

1. Določitev z nitnim nihalom

Izhajamo iz enačbe za nihajni čas t_0 nitnega (matematičnega) nihala z znano dolžino l . Za majhne amplitude velja:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Vzamemo eno ali dve nitni nihali (lahko tudi več, vendar ne pretiravajmo) in vsakemu izmerimo nihajni čas. Najbolje je, da izmerimo čas desetih nihajev in nato ta čas delimo z 10, da dobimo čim natančnejšo povprečno vrednost t_0 .



Slika 1. Nitno nihalo; v enem nihaju pride utež od skrajne lege na eni strani (1) do skrajne lege na drugi strani (2) in nazaj do (1). Nihajni čas je čas, v katerem nihalo (utež) naredi en nihaj.

Enačbo za t_0 preoblikujemo v $g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{t_0^2}$. Vstavimo vrednosti za t_0 in l v enačbo in izračunamo g . Teh meritev lahko naredimo veliko. Izračunamo povprečno vrednost težnega pospeška. Sestavimo tabelo:

l	t_0	t_0^2	$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{t_0^2}$

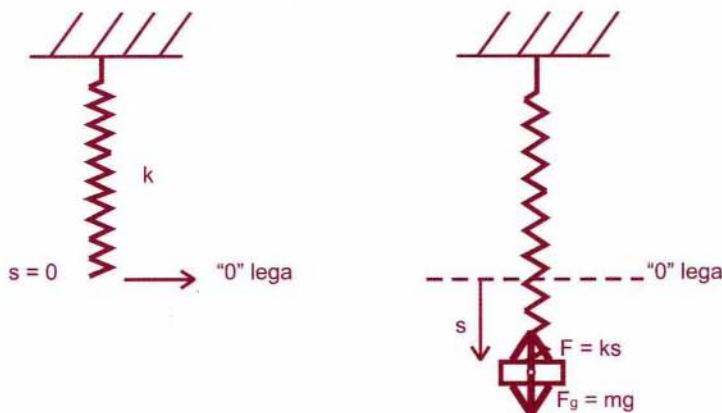
2. Določitev s prožno vzmetjo

Za prožno vzmet (vzmetno tehtnico) v območju prožnosti velja Hookov zakon: podaljšek s je sorazmeren z natezno silo (obremenitvijo) $F = ks$, kjer je k znana konstanta vzmeti (enota N/m).

Če k ne poznamo, ga pred meritvami težnega pospeška še določimo. Na vzmet obesimo nekaj (tri do pet) uteži in vsakič izmerimo podaljšek. Vsak kvocient $\frac{F_1}{s_1}, \frac{F_2}{s_2}, \frac{F_3}{s_3}, \dots$ da k . Izračunamo povprečno vrednost.

Naj se vzmet podaljša za s , če nanjo obesimo utež z maso m oziroma če na utež deluje sila teže $F_g = mg$.

Vzamemo eno ali dve prožni vzmeti (lahko tudi več, a ne pretiravajmo), nanju obesimo utež z znano maso m in vsakič izmerimo podaljšek s , ko pride do ravnovesja med F in F_g .



Slika 2. Prožna vzmet z znano konstanto vzmeti k , na katero obesimo utež z maso m . Dol vleče $F_g = mg$, gor pa $F = ks$. V ravnovesju je $mg = ks$, od koder sledi $g = \frac{ks}{m}$.

V enačbo $g = \frac{ks}{m}$ vstavimo izmerjene vrednosti za s , m in k ter izračunamo g . Naredimo lahko veliko meritev in izračunamo povprečno vrednost težnega pospeška. Sestavimo tabelo:

k	m	s	$g = \frac{ks}{m}$

Primerjamo povprečni vrednosti težnega pospeška po prvem in drugem načinu. Kritično razpravljamo o posameznem načinu.

3. Določitev po teoriji

Ker je sila teže enaka gravitacijski privlačnostni sili med dvema telesoma v vesolju, velja $mg = G \frac{mM}{R^2}$, če je m masa telesa, M masa Zemlje, R polmer Zemlje, G gravitacijska konstanta. Po krajšanju z m dobimo $g = G \frac{M}{R^2}$. To je znana enačba. Iz nje pri znanih G , M in R z lahkoto izračunamo g . Vendar vzemimo, da G in M ne poznamo, poznamo pa $R = 6400$ km (ta podatek učenci dobro poznajo).

Pomagamo si z gibanjem Lune okrog Zemlje. Vzamemo, da se giblje po krožnici s polmerom $r = 384\,000\text{ km} = 60\,R$ in da je obhodni čas $t_0 = 27,3$ dneva. Radialna sila pri kroženju $F_r = m \frac{v^2}{r}$ (če je m masa krožečega telesa, njegova hitrost v , razdalja od središča kroženja pa r) je gravitacijska privlačna sila. Za Luno z znanimi gornjimi podatki velja $m \frac{v^2}{r} = G \frac{mM}{R^2}$, od koder sledi $M = \frac{v^2 r}{G}$, kar vstavimo v prvotno enačbo za $g = \frac{G}{R^2} \cdot \frac{v^2 r}{G} = \frac{v^2 r}{R^2}$. Za izračun težnega pospeška potrebujemo vrednosti za v in r . Ker pa je hitrost ($v = \frac{2\pi r}{t_0} = \frac{2\pi \cdot 384\,000\text{ km}}{27,3 \cdot 24 \cdot 60\text{ s}} = 1\text{ km/s}$; Luna se giblje s hitrostjo 1 km/s) odvisna od obhodnega časa t_0 , dejansko za izračun potrebujemo le r in t_0 . Sedaj v enačbo vstavimo vrednosti za v , r in R ter izračunamo težni pospešek poljubno natančno, odvisno od tega, s kako natančnimi podatki razpolagamo.

Pred leti smo si na astronomskem taboru zadali nalogo, da izračunamo g samo s podatki, ki jih znamo na pamet. Težni pospešek smo ocenili takole: $g \approx \frac{(1000\text{ m/s})^2 \cdot 60\,R}{R^2} = \frac{10^6\text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot 60}{6\,400 \cdot 10^3\text{ m}} \approx 9,4\text{ m/s}^2$. Pri tem smo naredili 4% napako, kar pa je v okviru pouka fizike v osnovni šoli sprejemljivo. Težni pospešek smo izračunali, ne da bi uporabili vrednost gravitacijske konstante, to je podatka, ki ga redko znamo na pamet.

Ob koncu naj povem še drobno zanimivost.

Luna je zelo zapleteno vesoljsko telo. Čeprav nam je od vseh vesoljskih teles najbližje, težko obvladamo vse njene muhavosti. Merjenja količin v zvezi z Luno so zelo zahtevna, saj se stalno in zelo hitro spreminjajo. Seveda to velja tudi za vrednosti t_0 in r . Vrednosti $r = 60R$ in $t_0 = 27,3$ dneva pomenita povprečni vrednosti, dobljeni iz zares številnih opazovanj Lune, ki jih astronomi ne opravijo v enem tednu ali mesecu, ampak v dolgih desetletjih. (*Opomba:* Ti dve vrednosti pravzaprav nihata, $r = 60R \pm 3R$ in $t_0 = 27,3\text{ dneva} \pm 0,5\text{ dneva}$.)

Da bi preveril veljavnost svojega gravitacijskega zakona, je Newton, ki vrednosti gravitacijske konstante še ni poznal, nujno potreboval podatka za t_0 in r . Zanju je prosil prvega kraljevega (greenwiškega) astronoma Flamsteeda, ki je veliko opazoval Luno in je edini razpolagal s tema podatkom. Newton in Flamsteed nista bila v prijateljskih odnosih. Podatka je Newton dobil, vendar šele po dolgem prepričevanju in prosjačenju.

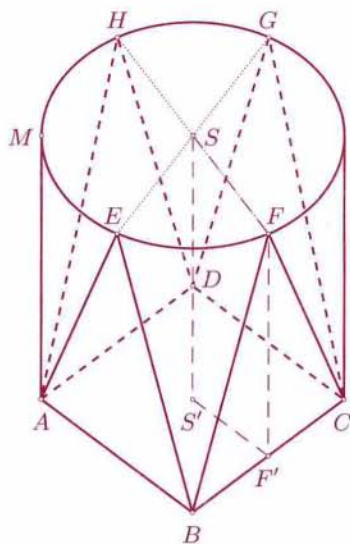
Tako je bila Luna prvo vesoljsko telo, na katerem je Newton uspel potrditi ta, v vesolju splošno veljavni zakon.

Marijan Prosén

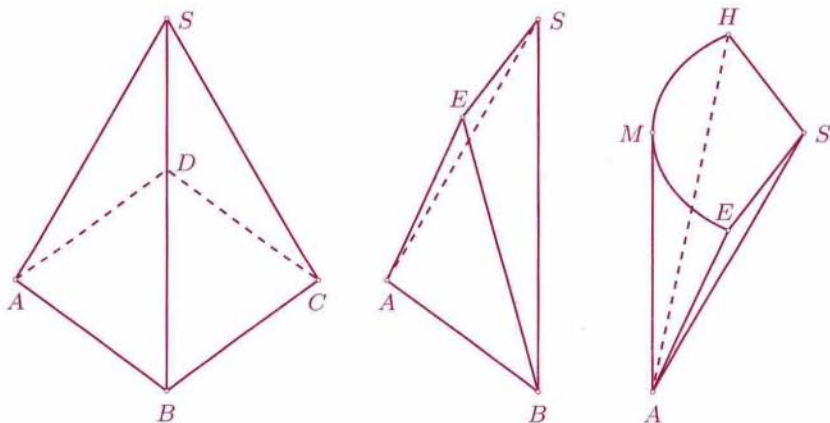
KOLIKO PIJAČE LAHKO NATOČIMO V KOZAREC?

Na enem izmed poletov z letalom nam je stewardesa prinesla kozarce nenavadne oblike. Dno je bilo kvadratno, zgornji rob pa krožnica, ki bi jo lahko očrtali kvadratu. Del plašča so sestavljali trikotniki (slika 1). Kozarec smo lahko postavili v za to pripravljeno stojalo tako, da se je vanj pogreznil do polovice. Ker zaradi slabe vidljivosti opazovanje okolice ni bilo zanimivo, smo se začeli pogovarjati, kako bi izračunali, koliko tekočine bi lahko nalili do roba takega kozarca. Kaj takega si v letalu seveda ne bi mogli privoščiti, saj letalo navadno začne premetavati, brž ko stewardese postrežejo s pijačo.

Vzemimo, da je polmer krožnice r , in zato osnovnica kvadrata $a = r\sqrt{2}$, višina kozarca v ter da je notranjost zapolnjena.



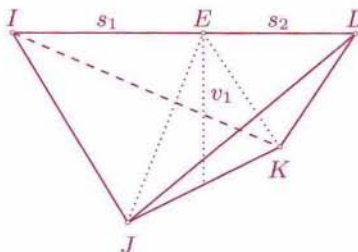
Slika 1.



Slika 2. Trije osnovni deli razzanega kozarca.

Kozarec razrežemo na več delov, in sicer na pravilno štiristrano piramido, ki ima za osnovno ploskev dno kozarca, štiri piramide, katerih dva mimobežna robova sta pravokotna, in štiri četrtinske stožce, ki imajo za osnovno ploskev četrtino kroga (slika 2).

Preden začnemo računati prostornino posameznih delov, pogledjmo, kako izračunamo prostornino piramide $IJKL$ (slika 3), katere mimobežna robova IL in JK sta pravokotna. Piramido presekamo z ravnino, ki vsebuje rob JK in je pravokotna na rob IL tako, da osnovna piramida razpade v dve piramidi, ki imata za osnovni ploskvi trikotnik JKE in višini $IE = s_1$ in $EL = s_2$. Vsota obeh višin je ravno dolžina roba IL .



Slika 3. Piramida, katere mimobežna robova IL in JK sta pravokotna.

Piramida $IJKL$ je torej sestavljena iz dveh piramid in njena prostornina je

$$V = V_1 + V_2 = \frac{|JK| \cdot v_1 \cdot s_1}{2 \cdot 3} + \frac{|JK| \cdot v_1 \cdot s_2}{2 \cdot 3} = \frac{|JK| \cdot |IL| \cdot v_1}{6}.$$

Prostornina piramide, katere mimobežna robova sta pravokotna, je torej enaka šestini produkta dolžin obeh mimobežnih pravokotnih robov in njune medsebojne razdalje.

Vrnimo se k našemu kozarcu in zapišimo prostornine posameznih delov.

Prostornina pravilne štiristrane piramide z osnovnim robom a je

$$V_1 = \frac{a^2 v}{3} = \frac{2r^2 v}{3}.$$

Piramida $ABES$ ima pravokotna mimobežna robova $AB = a$ in $ES = r$, zato je

$$V_2 = \frac{rav}{6} = \frac{r^2 v \sqrt{2}}{6}.$$

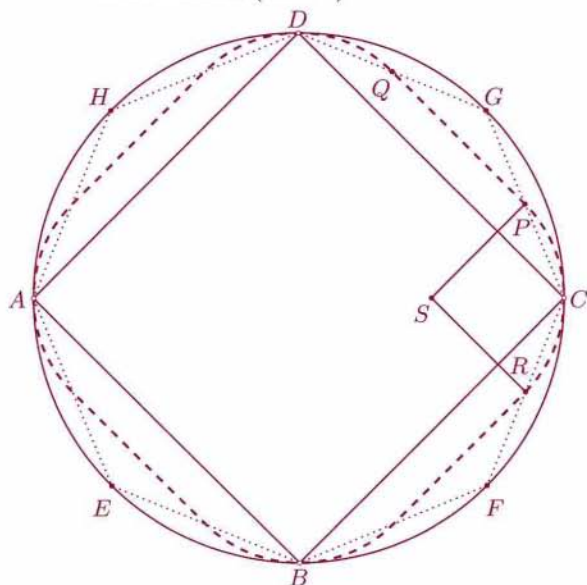
Prostornina dela, ki ima za osnovno ploskev četrtno kroga, je

$$V_3 = \frac{\pi r^2 v}{4 \cdot 3}.$$

Skupna prostornina je

$$V = V_1 + 4V_2 + 4V_3 = \frac{2r^2 v}{3} + \frac{2r^2 v \sqrt{2}}{3} + \frac{\pi r^2 v}{3} = \frac{r^2 v}{3} (2 + 2\sqrt{2} + \pi).$$

Poglejmo, kakšne oblike je odprtina podstavka, v katerega postavimo tak kozarec. Narišimo tloris kozarca (slika 4).



Slika 4. Tloris kozarca.

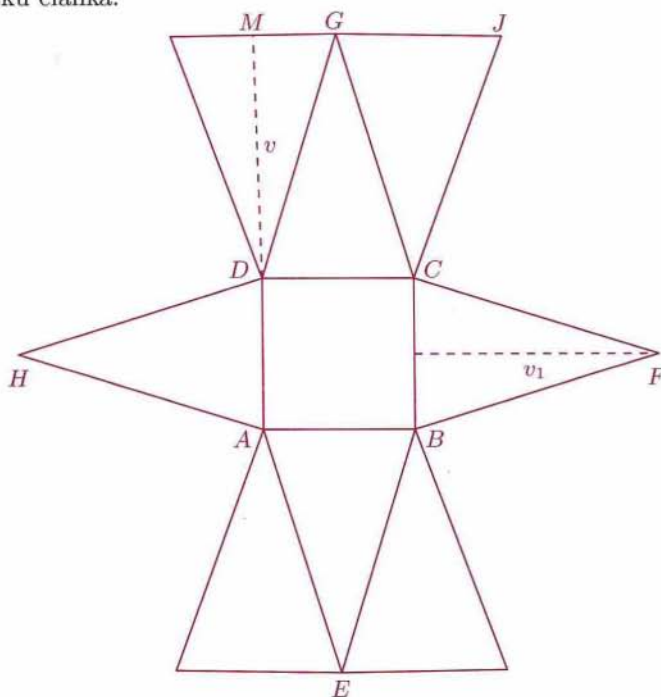
Enakokraki trikotniki, ki imajo za osnovnico stranice kvadrata, vrh pa na robu krožnice, so deli ravnine (na sliki so projekcije krakov označene pikčasto), zato so vodoravni prerezi kozarca sestavljeni iz daljic (na primer QP) in delov krožnice (PR). Z naraščajočo višino kozarca se daljice krajšajo, polmeri krožnic na vogalih pa večajo. Na polovici višine kozarca je ravni del enak $a/2$, polmer vogalnega dela krožnice pa $r/2$. Bralec naj sam izračuna, kako se z višino spreminjata dolžina ravnega dela in polmer vogalne krožnice.

Za konec izdelajmo model takega kozarca. Mrežo prikazuje slika 5 (narisana je v pravilnem razmerju, zato jo lahko samo povečate). Pri tem velja

$$|GJ| = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}, \quad |MD| = v, \quad |AB| = r\sqrt{2},$$

$$v_1 = \sqrt{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{r^2 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) + v^2}.$$

Trikotnik $G CJ$ je enakokrak, njegova osnovnica je GJ . Stransko višino v_1 izračunamo iz pravokotnega trapeza $S'F'FS$, označenega na sliki kozarca na začetku članka.



Slika 5. Mreža kozarca.

V trgovinah je na policah veliko kozarcev nenavadnih oblik. Premislite, če znate izračunati prostornine takih kozarcev. Seveda pa je najlažje določiti prostornino kozarca s prelivanjem tekočine v merilno posodo.

Nada Razpet

KRIŽANKA “POPLAVA MOBILNIH TELEFONOV”

				10 ²	POMOR	ČLOVEKU PODOBNE ŽIVALI	HLOD, KRLJ (NAREČNO)	REKA V NORMANDIJ	MESTNI DEL NISA IN SKOPJA	V
			Z MOBILNIM TELEFONOM GA LAHKO POSILJAMO							
			FRIZERSKI POSTOPEK							
			TEKOČE ŽIVILLO							
DEL, PARCELA (NAREČNO)				OLIVER CROMWELL			ENCIM TREBUSNE SLINAVKE			
MOBILNOV PAKET ZA OTROKE				VEDA						
STOJA NA POKRČENIH NOGAH							POJAVNA OBLIKA ELEMENTA Z RAZLIČNO ATOMSKO MASE		DEJANJE	
VAS ZAHODNO OD VELIKIH LASC					VELIKA PISANA PAPIGA	NAJVEČJI SLOVENSKI DRAMATIK (VAN)	ŽIDOVSKA DRŽAVA V AZIJ		LUKNJA, VRZEL	
AMER. BEATNIŠKI PISATELJ (JACK)							ZELIŠČE			
							PRVI PERZIJSKI KRALJ			
DO, RE, MI, ?, SO, ...				POLJSKO MESTO						
FINSKA ZNAMKA MOBILNIH TELEFONOV				A/S. SMILČAR (HANS)						
GLASBENI ZNAKI					SOKRATOV TOŽNIK				POSODA ZA OLJE PRI AVTU	
					ZDRAVLJNA KROGLICA				DOTOK	
OSEBNI ZAIMEK			NIKO PRIJATELJ			KROPILNA PRIPRAVA				
			AM. ŠERIF (WYATT)			NOVINARKA TEPINA				
IME TV NOVINARKE HORVAT							DESTI- LACIJA			
							KURIR			
KRAJ MED OPATUJO IN LOVRANOM				AM. KEMIK ONSAGER				ILLINOIS		
				SANI Z VOLANOM				PRILOGA DELA IN SL. NOVIC		
VELIKO POTNIŠKO LETALO							GRŠKI BOG VETROV			
							IRIDU			
										
			SLOVENSKA SOPRA- NISTKA (IRENA)					POLJE ZUNAJ IGRIŠČA		

PEVKA DIMITROVSKA	DANSKI FIZIK (HANS CHRISTIAN)	AVTOR MARKO BOKALIČ	ČLAN KRALJEVSKE DRUŽINE	VODNI ČLENOVOŽEC	PREDLOG	NAŠ OPERATER MOBILNE TELEFONJE	UJETNICA V ROKAH TERORISTOV	TELICA, JUNIČA (NAREČNO)	CIGARETNI OGOREK	GRŠKI POVELJNIK PRED TROJJO	INDUSKO ŽENSKO OBLAČILO
			NAJCENEJŠI MOBITELOV PAKET								
			RADIJSKO SEVANJE								
			NIKELIJ								
PORED OLSKIH DMETOV						SL. IGRALKA (ZVEZDANA)					
G. GROF						NEPRIJETEN VONJ					
					SADNA PLJACA			KRAJEVNA PROGA	SILICIJ		
					ZLATENICA				ŠVEDSKA ZNAJKA MOBILCEV		
			ANTIČNO TOLKALO							MORALIST	SIMOBLOV PREDPLAČNI PAKET
			AVS. OPERNI REŽISER								
				TELESNA TEKOČINA				PLOD V TROJI LUPINI			
				FR. FIZIK (LOUIS)							
	ZOBNI GLAS V SLOVNICI						ČVRSTO VEZIVNO TKIVO				
							UDAV				
EMŠKA KA OB ALTIKU	ANG. REŽISER (CAROL)					PALIČAST MIKROB					
	ARKTIČNI PTIČ, NJORKA	GOSTOVANJE V TLUH OMREŽIJH				KOCINA					
						KRAJ NA VZH. ROBU LJUBLJAN, KOTLINE					
			LUTECIJ			RIBIŠKA VRVICA				ENOTA ZA DELO IN ENERGIJO	MOBITELOV PREDPLAČNI PAKET
			KRAŠKI POŽI- RALNIK			MOBILJEV PAKET					
				GLAS SLOG Z JAMAJKE			AED				
				RIBJA JAJČECA			ŠVIC.-MADŽ. PIANIST (GEŽA)				
	KENIJSKI VODITELJ (DANIEL ARAP)				PRITOK VOLGE			BIBLUSKI OČANEC			
					IGRALKA MARGRET			POLT			
ZNAKA UTINE	NEKDANJI POBIRALEC NAROČNINE								SOŠEDNJI CRKI		
									KILOGRAM		
	GERMANŠKA BOGINJA USODE						MLADENKA				
	KRAJ MED SKOFJO LOKO IN SV. DUHOM						KRILATO BOŽJE BITJE				

OBDOBJE ZANIMIVIH DATUMOV

Ko se je prva številka letnice na silvestrovo zamenjala in smo iz leta 1999 vstopili v leto 2000, smo se po telefonu pogovarjali s sorodniki v Ameriki. Imeli smo občutek tisočletnega preskoka, ker so pri nas koledarji kazali že 1.1.2000, čez lužo pa je bil še 31.12.1999. Ta zanimiv časovni moment je trajal le nekaj ur in ponovno smo spoznali milijnost takšnih dogodkov, ki jim nismo priča ravno vsak dan. Naslednja primerljiva situacija se bo ponudila našim zanamcem šele čez slabih tisoč let. Pred tem smo v Sloveniji drli gledat poslednji popolni Sončev mrk tisočletja. In pred kratkim, natnačnjeje 29.2.2000, smo preživljali še enega od izjemnih datumov. Kot vemo, so že Rimljani vpeljali prestopna leta in leto podaljšali vsake štiri leta za en dan ter tako popravili zaostajanje koledarja za dejanskim časom, ki je potreben za en obrat Zemlje okoli Sonca. Ker ta popravek ni točen, se je napaka nabirala v drugi smeri. Koledar je prehiteval dejansko leto. Zato so za časa papeža Gregorja koledar še enkrat reformirali. Prestopna so tista leta, ki so deljiva s 4. Izjema so tista leta, ki so deljiva s 100. In izjema izjem so leta, ki so deljiva s 400. To pomeni, da so bila npr. prestopna leta 1980, 1984, 1988, 1992, 1996 in bodo prestopna leta 2004, 2008, 2012 itd. Izjemoma je prestopno leto tudi leto 2000, čeprav leta 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 in 2300 niso prestopna. Prejšnja izjema izjem je bil 29.2.1600 in naslednja bo čez štiristo let, 29.2.2400. Smolčki, ki so rojeni 29.2., praznujejo rojstni dan vsake štiri leta. Naši sodobniki, smolčki, pa imajo malo manj smole, ker so tudi letos lahko praznovali. Letošnje leto je res izjemno. Kar dvatisoč let bo treba počakati na ponovitev. Kombinacija prestopnega leta in spremembe prve številke bo na sporedu šele leta 4000, saj 3000 ni deljivo s štiri.

Nekateri datumi so zanimivi tudi z numerološkega stališča. Lani je bil zanimiv npr. datum 31.11.1999. Zapisati ga je mogoče le z lihimi števkami. Tudi nekaj dni prej, 19.11.1999, je imel datum to lastnost. Recimo mu *popolnoma lihi datum*. Zanimivo je, da bo preteklo kar nekaj časa do naslednjega popolnoma lihega datuma. Naslednji popolnoma lihi datum bo 1.1.3111. Ta pa bo tudi *dvoštevski datum*. Za zapis potrebujemo le dve številki (1 in 3). Pravkar smo obhajali podoben dvoštevski datum, in sicer 2.2.2000, pred tem pa 11.11.1999. Oba primerka odlikuje še ena posebna lastnost. Medtem ko je prvi *padajoč*, je drugi *naraščajoč*. V letu 2000 bomo praznovali še veliko padajočih datumov, od 2.2.2000 do 9.9.2000. Od 11.11.1999 bo treba počakati do naslednjega naraščajočega datuma kar nekaj časa – to bo 1.1.2222. Dvoštevski datumi uporabljajo le dve številki. Še bolj asketski so *enoštevski datumi*. V preteklosti je nam najbližji 11.11.1111, v prihodnosti pa bo to 2.2.2222. Seveda so enoštevski

LOKALNE VOLITVE – Rešitev s str. 340

Navodila za preverjanje pravilnosti volilnih imenikov, podana v besedilu naloge, so nekoliko razvlečena in kar zapletena. Podatek, ki bistveno vpliva na zasnovo rešitve, pa je omenjen že na začetku: vsaka oseba je enolično opisana s štirimestno identifikacijsko številko. Potencialnih volivcev torej ni več kot 10000.

Rešitev bomo sprogramirali v programskem jeziku C, brez težav pa jo bo moč predelati tudi v pascal in druge sorodne jezike. Zmerno število volivcev nam omogoča, da v programu seznam volivcev in oba volilna imenika predstavimo s tremi tabelami **sez**, **ime1** in **ime2**, ki bodo vse imele po 10000 elementov. Če bi bilo potencialnih volivcev več, bi s tako zastavljeno rešitvijo lahko zašli v težave zaradi pomanjkanja pomnilnika. Vrednosti elementov tabel bodo le 0, 1 ali 2. Element z indeksom *i* bo imel vrednost 0, če osebe z identifikacijsko številko *i* ne bo v seznamu volivcev oziroma v pripadajočem volilnem imeniku, vrednost 1, če se bo v seznamu oziroma imeniku pojavila natanko enkrat, in vrednost 2, če se bo pojavila večkrat. Da ne bomo preveč potratni s pomnilnikom, bodo elementi tabele tipa **char** (v C-ju se tudi znaki obnašajo kot majhna števila).

Opišimo še, kako poteka preverjanje seznama volivcev in obeh volilnih imenikov. Najprej v zanki preberemo identifikacijske številke volilnih upravičencev. Uporabili bomo zanko **do**. Seznam številke se konča z vrednostjo **-1**, zato tedaj, ko preberemo to vrednost, z **break** končamo zanko. Identifikacijsko številko preberemo v spremenljivko **oseba**. Če ima **sez[oseba]** vrednost 0, to vrednost le popravimo na 1. Če ima **sez[oseba]** vrednost 1, vrednost povečamo na 2, hkrati pa tudi izpišemo obvestilo, da je volivec večkrat prijavljen. Kadar ima **sez[oseba]** vrednost 2, ne storimo ničesar (obvestilo o večkratni prijavi smo že izpisali pri spremembi vrednosti z 1 na 2, ponovljenih obvestil pa ne smemo izpisovati). Na enak način preberemo tudi podatke o osebah iz volilnih imenikov za Spodnji in Zgornji Kašelj. Razlika je le pri preverjanju in izpisovanju opozoril. Tokrat izpišemo opozorilo, ko prvič naletimo na osebo, ki ni na seznamu volivcev (vrednost **sez[oseba]** je enaka 0, pa tudi **ime1[oseba]** oziroma **ime2[oseba]** mora imeti vrednost 0).

Ko so vsi podatki prebrani, opravimo še preostala štiri preverjanja. Vsako od njih je sestavljeno iz zanke **for**, v kateri spremenljivka **oseba** preteče vse možne identifikacijske številke. Pogoji, ki jih pri posameznem prehodu preverjamo, so:

kaj preverjamo	sez[oseba]	ime1[oseba]	ime2[oseba]
oseba, prijavljena v obeh Kašljih	!= 0	!= 0	!= 0
oseba, večkrat prijavljena v Spodnjem Kašlju	!= 0	== 2	== 0
oseba, večkrat prijavljena v Zgornjem Kašlju	!= 0	== 0	== 2
volivci, ki niso vpisani v nobenem Kašlju	!= 0	== 0	== 0

Program v C-ju je nekoliko daljši, kot so običajno rešitve v Preseku, a programersko ni posebej zahteven:

```
#include <stdio.h>

#define MAX 10000 /* zgornja meja za število volivcev */
#define NIZ1 "Oseba %04d iz %s nima volilne pravice.\n"
#define NIZ2 "Volivec %04d je %s.\n"

int main(void)
{
    char sez[MAX] = {0}, ime1[MAX] = {0}, ime2[MAX] = {0};
    int oseba;

    do { /* Pregled seznama volivcev. */
        scanf("%d", &oseba);
        if (oseba == -1) break; /* konec seznama volivcev */
        if (sez[oseba] == 0 || sez[oseba] == 1) {
            if (sez[oseba] == 1) printf(NIZ2, oseba, "prijavljen večkrat");
            sez[oseba]++;
        }
    } while (1);

    do { /* Pregled volilnega imenika za Spodnji Kašelj. */
        scanf("%d", &oseba);
        if (oseba == -1) break; /* konec imenika */
        if (ime1[oseba] == 0 || ime1[oseba] == 1) {
            if (sez[oseba] == 0 && ime1[oseba] == 0)
                printf(NIZ1, oseba, "Spodnjega Kašlja");
            ime1[oseba]++;
        }
    } while (1);
}
```

```

do { /* Pregled volilnega imenika za Zgornji Kašelj. */
    scanf("%d", &oseba);
    if (oseba == -1) break; /* konec imenika */
    if (ime2[oseba] == 0 || ime2[oseba] == 1) {
        if (sez[oseba] == 0 && ime2[oseba] == 0)
            printf(NIZ1, oseba, "Zgornjega Kašlja");
        ime2[oseba]++;
    }
} while (1);

/* Poiščemo osebe, ki so prijavljene v Spodnjem in Zgornjem Kašlju. */
for (oseba = 0; oseba < MAX; oseba++)
    if (sez[oseba] != 0 && ime1[oseba] != 0 && ime2[oseba] != 0)
        printf(NIZ2, oseba, "prijavljen v Spodnjem in Zgornjem Kašlju");

/* Iščemo večkratne prijave v imenik za Spodnji Kašelj. */
for (oseba = 0; oseba < MAX; oseba++)
    if (sez[oseba] != 0 && ime1[oseba] == 2 && ime2[oseba] == 0)
        printf(NIZ2, oseba, "v Spodnjem Kašlju prijavljen večkrat");

/* Iščemo večkratne prijave v imenik za Zgornji Kašelj. */
for (oseba = 0; oseba < MAX; oseba++)
    if (sez[oseba] != 0 && ime2[oseba] == 2 && ime1[oseba] == 0)
        printf(NIZ2, oseba, "v Zgornjem Kašlju prijavljen večkrat");

/* Iščemo volivce, ki niso vpisani ne v enem ne v drugem Kašlju. */
for (oseba = 0; oseba < MAX; oseba++)
    if (sez[oseba] != 0 && ime1[oseba] == 0 && ime2[oseba] == 0)
        printf("Volivec %04d ni vpisan v noben volilni imenik.\n", oseba);

return 0;
}

```

Ker ima revija Presek majhne strani, smo si pri vrsticah, ki vsebujejo daljše izpise, pomagali s simboličnima konstantama NIZ1 in NIZ2 in tako malce skrajšali te vrstice.

Program bere podatke s standardnega vhoda. Če ga želite preizkusiti z večjo količino podatkov, te najprej pripravite na datoteki, nato pa prevedeni program poženite iz ukazne vrstice in vhod preusmerite na datoteko (npr. volitve <vhod.dat).

Verjetno ste tudi opazili, da program prve tri vrste obvestil izpisuje urejene tako, kot so osebe navedene v vhodnih podatkih, nadaljnje vrste obvestil pa so urejene po naraščajočih identifikacijskih številkah. Če bi, na primer, želeli doseči, da bi bila obvestila o večkratni prijavi v Spodnjem Kašlju urejena enako, kot se večkrat prijavljene osebe pojavijo v volilnem imeniku, bi morali program kar precej spremeniti.

Za konec pa še izziv za tiste, ki jim programiranja ni nikoli dovolj. V tabelah hranimo le vrednosti 0, 1 in 2. Za zapis treh vrednosti zadoščata že 2 bita. Torej lahko podatke namesto v tri tabele zložimo v eno samo. Pri posameznem elementu tabele prva bita porabimo za vrednost, ki je sedaj v tabeli `sez`, naslednja dva za vrednost iz `ime1`, še nadaljnja dva pa za vrednost iz `ime2`. Seveda je treba tudi ustrezno prilagoditi program (dodatno računanje oziroma uporaba bitnih operacij).

Martin Juvan

SVETLOST LUNE OB MRKU – Komentar k naslovnici 5. številke Preseka in odgovor na vprašanji s str. 258

Če niste zaspanuh, ste najbrž opazovali popolni Lunin mrk 21. januarja 2000 od pete do šeste ure zjutraj. Ali ste bili kaj presenečeni, da se je Luna tako dobro videla, čeprav se je skrila v Zemljino senco? Najbrž ste uganili, da zemeljsko ozračje lomi svetlobo kot kakšna leča in Luno kar precej osvetli. Če Zemlja ne bi imela ozračja, bi bila Luna seveda čisto temna, videli bi le, da nič ne vidimo: na tistem mestu, kjer je Luna, ne bi videli nobenih zvezd.

Pa najprej ugotovimo, ali je Zemlja res dobra zbiralna leča. Seveda gredo žarki le skozi zemeljsko ozračje, ki deluje kot nekakšna obročasta leča. Najbrž se še spomnite formule za goriščno razdaljo konveksne leče iz dveh krogelnih kapic krogle s polmerom R : $f = R/2(n-1)$. Če vstavimo za polmer Zemlje $R = 6400\text{ km}$ in za lomni količnik zraka $n = 1,0003$, dobimo goriščno razdaljo 10^7 km . Žarki iz takšne zbiralne leče bi krepko zgrešili Luno. K sreči pa obstajajo "napake leč"; zaradi tako imenovane sferične aberacije ima zunanji obroč kroglaste leče dosti krajšo goriščno razdaljo kot sredina leče. Z ustreznim računom se boste spoprijeli, ko boste na univerzi, sama formula pa je preprosta: $f = (\sqrt{Rh/2\pi})/(n-1)$. Pri tem je h povprečna debelina zemeljskega ozračja. Upoštevali smo tudi, da gostota zraka in $(n-1)$ z višino približno eksponentno pojemata. Višino h ocenimo takole: na vsak cm^2 na Zemlji pritiska 1 kg zraka (pri tlaku $1\text{ atmosfere} = 10^5\text{ pascala}$). Za 1 kg zraka z gostoto $1,3\text{ kg/m}^3$ pa potrebujemo volumen $0,77\text{ m}^3$, kar ustreza prizmi z osnovno ploskvijo 1 cm^2 in višino $h = 7,7\text{ km}$. S temi podatki dobimo goriščno razdaljo 300000 km , kar je zelo blizu oddaljenosti Lune od Zemlje. Kakšno srečno naključje, Zemlja je ravno pravšnja leča za osvetljevanje "mrknjene" Lune!

Nato ocenimo še svetlost Lune! Na zračni obroč okoli Zemlje pade svetlobni tok $2\pi Rh \times j_0$, kjer je $j_0 = 100000\text{ lx}$ gostota svetlobnega toka,

ki pada s Sonca na Zemljo (in tudi na Luno, kadar ni mrka). Ocenimo, da se ta svetlobni tok na območju Lune porazdeli na približno tolikšno ploščino, kot je središčni presek Zemlje (πR^2). Torej bi Luna lahko dobila $j = j_0 (2\pi Rh/\pi R^2) = j_0(2h/R) = 240 \text{ lx}$. Ta gostota svetlobnega toka je precej manjša kot $j_0 = 10^5 \text{ lx}$, vendar je kar izdatna, saj pri tolikšni osvetljenosti lahko zvečer beremo. Dejanjsko moramo pričakovati, da je Luna precej manj osvetljena, ker ozračje ni čisto in ker je velik del Zemlje oblačen. Ocenjeni osvetljenosti ustreza gostota odbitega svetlobnega toka $j^* = ja \approx 20 \text{ lx}$, kjer je $a = 0.08$ albedo Lune.

Sedaj pa primerjajmo "teorijo" z opazovanjem. Na naslovnici 5. številke Preseka je bila čudovita slika popolnega Luninega mrka nad kamniško grajsko kapelo (foto Lojze Vrankar). Za nekatere namene je naše oko odličen fizikalni inštrument. Nima sicer kazalca, ki bi direktno odčitaval svetlost, lahko pa ugotovi, kdaj sta dva predmeta enako svetla. Dva predmeta se nam zdita enako svetla, če oddajata enako gostoto odbitega svetlobnega toka v enak prostorski kot. Torej lahko primerjamo svetlost Lune in svetlost kapele.

Kapela je osvetljena z reflektorjem z močjo 250 W, čemur ustreza svetlobni tok kakih 4000 lumnov¹. Ker je osvetljena vsa kapela, se ta svetlobni tok porazdeli približno na ploščino $S = (20\text{m})^2$ in dobimo $j = P/S = 10 \text{ lx}$. Gostota svetlobnega toka, ki se odbije od zidu (z albedom kakih 0.6), je potem $j_{zid}^* = ja = 6 \text{ lx}$, od strehe (z albedom kakih 0.06) pa se odbije $j_{streha}^* \approx 0.6 \text{ lx}$.

Hitro vidimo, da je spodnji del Lune le nekoliko temnejši kot sprednji del zidu kapele, torej odbija skoraj 6 lx. Srednji del Lune pa je precej svetlejši od strehe, torej bi mu pripisali gostoto odbitega svetlobnega toka vsaj 1 lx. Ti vrednosti sta v skladu s predvidevanji zgoraj, da je zaradi oblakov na Zemlji gostota odbitega svetlobnega toka z Lune najbrž nekajkrat manjša od ocene 20 lx.

Medtem ko lahko čase in geometrijo Luninih mrkov natančno napovemo za stoletja naprej, pa svetlosti Lune ob mrkih ne moremo napovedati, saj je odvisna od vremena. Tako dolgoročnih vremenskih napovedi namreč ni. Zanimivo opažanje, da je Luna na sliki spodaj bistveno svetlejša kot drugod, je morda prav v zvezi s tem, da je bilo ob mrku vreme na eni strani Zemlje drugačno kot na drugi.

Mitja Rosina

¹ Učili ste se, da 250 W ustreza $250 \times 680 \text{ lumnov} = 170000 \text{ lumnov}$ rumenozelene svetlobe, toda žarnice imajo slab izkoristek (nekaj %) in oko vidi ostale barve slabše. Lahko si je zapomniti, da pri žarnici zaleže 1 W za svetlobni tok $P \approx 12 \text{ lumnov}$. Za naš reflektor smo privzeli nekoliko boljši izkoristek.

DVE NALOGE – Rešitev s str. 258

1. Po definiciji mestnega zapisa v desetiškem številskem sestavu je

$$x = 5 + 2(10 + 10^2 + \dots + 10^{n+1}) + (10^{n+2} + 10^{n+3} + \dots + 10^{2n+1}).$$

Uporabimo znano formulo

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{q^N - 1}{q - 1}, \quad (q \neq 1)$$

za vsoto prvih N členov geometričnega zaporedja in dobimo

$$x = 5 + \frac{20}{9}(10^{n+1} - 1) + \frac{1}{9}10^{n+2}(10^n - 1) = \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 10 \cdot 10^{n+1} + 25).$$

Na desni strani zgornje enačbe takoj opazimo popolni kvadrat

$$x = \left(\frac{1}{3}(10^{n+1} + 5) \right)^2.$$

Torej je število

$$\sqrt{x} = \frac{1}{3}(10^{n+1} + 5) = 5 + \frac{30}{9}(10^n - 1)$$

res naravno. Zapišemo ga lahko tudi v slogu podatkov:

$$\sqrt{x} = 5 + 3(10 + 10^2 + \dots + 10^n) = \underbrace{333 \dots 3}_n 5.$$

2. Označimo z d desno stran naše enačbe. Rešujemo torej enačbo $9x^2 = d + 137$. Ker je

$$d = 8(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n+1}) + (10^{n+2} + 10^{n+3} + \dots + 10^{2n+1}),$$

ravnamo podobno kot v prvi nalogi, in dobimo

$$d = \frac{8}{9}(10^{n+2} - 1) + \frac{1}{9}10^{n+2}(10^n - 1) = \frac{1}{9}(10^{2n+2} + 7 \cdot 10^{n+2} - 8).$$

Po množenju z 9 dobi dana enačba obliko

$$81x^2 = 10^{2n+2} + 7 \cdot 10^{n+2} + 1225 = (10^{n+1} + 35)^2.$$

Torej ima enačba dve rešitvi

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{9}(10^{n+1} + 35) = \pm \left(\frac{1}{9}(10^{n+1} - 1) + 4 \right),$$

ki ju lahko zapišemo tudi takole:

$$x_{1,2} = \pm \underbrace{111 \dots 1}_n 5.$$

Marko Razpet

2000 – Rešitev s str. 130

V tretji številki Preseka sem vas povprašal, kolikšno je najmanjše število enakih števk, ki jih potrebujemo, da samo s pomočjo štirih osnovnih računskih operacij (+, −, ·, /) in stikanja števk iz njih sestavimo število 2000. Videli smo, da (ne glede na števko) vedno zadošča 11 enakih števk:

$$2000 = (xxxx - xxx) \cdot (x + x) / (x \cdot x).$$

Izkaže se, da je za vsako števko $x \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$ moč najti še krajši zapis. V dobri uri poskušanja sem našel naslednje kratke zapise:

$$2000 = (1111 - 111) \cdot (1 + 1) \quad (9 \text{ enic})$$

$$2000 = 2222 - 222 \quad (7 \text{ dvojk})$$

$$2000 = 333 \cdot (3 + 3) + (3 + 3)/3 \quad (8 \text{ trojk})$$

$$2000 = 44 \cdot 44 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \quad (7 \text{ štiric})$$

$$2000 = (5 - 5/5) \cdot (555 - 55) \quad (8 \text{ petic})$$

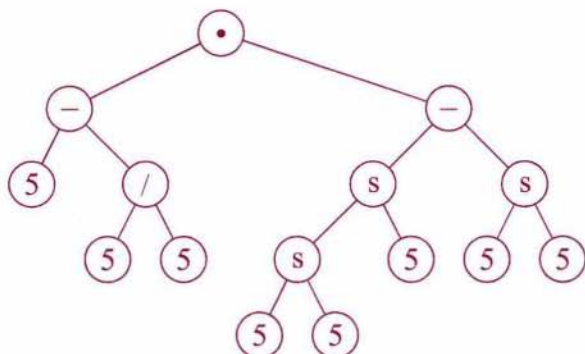
$$2000 = (666 \cdot (6 + 6 + 6) + 6 + 6)/6 \quad (9 \text{ šestic})$$

$$2000 = (7 \cdot 7 + 7/7) \cdot (7 \cdot 7 - 7 - (7 + 7)/7) \quad (10 \text{ sedmic})$$

$$2000 = (8888 + 8)/8 + 888 \quad (9 \text{ osmic})$$

$$2000 = (999 \cdot (9 + 9) + 9 + 9)/9 \quad (8 \text{ devetic})$$

Kako pa ugotoviti, ali so gornji zapisi res najkrajši? Takole sem razmišljal. Vsak izraz, s katerim zapišemo število 2000, lahko predstavimo kot dvojiško drevo. V listih drevesa so števke, v notranjih vozliščih pa operatorji, ki določajo operacijo, ki jo naredimo z vrednostima obeh poddreves. Na primer, izraz $(5 - 5/5) \cdot (555 - 55)$ predstavimo z naslednjim drevesom:



Pri tem je z s označen operator za stik števk. Ker uporabljamo le dvomestne operatorje, je vsako vozlišče drevesa bodisi list bodisi ima dva sinova. Če ima tako drevo k listov, ima potem $k - 1$ notranjih vozlišč.

Najprej sem pomislil, da bi z računalniškim programom zgradil vsa možna drevesa z izbranim številom listov, v notranjih vozliščih preizkusil vse možne postavitve operatorjev in izračunal vrednost, ki jo predstavlja zgrajeno drevo. Število listov bi postopno povečeval, dokler ne bi našel števila 2000. Zapisi, ki sem jih našel s poskušanjem, povedo, da mi nikoli ne bi bilo treba pregledovati dreves z več kot 10 listi. Malo sem poračunal in dobil naslednjo tabelo:

število listov	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
število dreves	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

Različnih dreves torej ni zelo veliko. Število različnih možnosti pa precej naraste, ko upoštevamo, da lahko (vsaj načeloma) v vsako notranje vozlišče postavimo še enega od petih operatorjev (res je sicer, da imamo za uporabo stikanja števk kar nekaj omejitev). Ker je $5^8 = 390625$, bi moral torej pri številki 7, da bi dokazal, da ni zapisa z devetimi sedmicami, pregledati kakih $1.9 \cdot 10^9$ možnosti. To je sicer veliko, a s "pametnim" pregledovanjem izvedljivo na osebem računalniku brez prevelikih težav.

Potem pa sem opazil, da lahko razmislek precej poenostavim. Upal sem, da večina zapisov, ki sem jih našel, vsebuje najmanjše možno število števk. Preveriti bi moral le, da ni zapisov, ki porabijo manj števk. Torej me pravzaprav ne zanimajo drevesa, ampak le vrednosti, ki jih predstavljajo. Recimo, da že poznam množice števil, ki jih lahko zapišem z natanko $1, 2, \dots, k$ števki x . Naj bodo to množice $S_1^x, \dots, S_k^x$. Množico

števil S_{k+1}^x , v kateri bodo natanko vsa števila, ki jih lahko zapišem s pomočjo $k+1$ števk x , potem dobim tako, da za $i = 1, \dots, k$ vzamem vsako število $a \in S_i^x$ in vsako število $b \in S_{k+1-i}^x$ ter v S_{k+1}^x za vsak operator $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ dodam število $a \circ b$. Nazadnje v S_{k+1}^x dodam še število $\underbrace{xx \dots x}_{k+1 \text{ števk}}$ (to je edino število, ki ga dobimo iz drevesa, ki ima

v korenu in potem tudi v vseh drugih notranjih vozliščih operator za stikanje).

Predno sem se lotil programiranja, sem še malo premislil, kako si lahko olajšam delo. Kmalu sem ugotovil, da za pozitivna števila vedno obstaja tak najkrajši zapis, v katerem so tudi vrednosti vseh podizrazov, ki nastopajo v izračunu in ustrezajo poddrevesom drevesa, ki opisuje celotni izraz, pozitivne. To pomeni, da nam negativnih števil ni treba vključevati v množice S_i^x . Upal sem, da bi podobna lastnost lahko veljala tudi za naravna števila. Vendar pa se je hitro izkazalo, da obstajajo naravna števila, za katera ima vsak najkrajši zapis kak podizraz, katerega vrednost je pravi ulomek in ni naravno število. Prvi primer, ki sem ga našel, je zapis števila 39 s 5 šesticami: $39 = 6 \cdot (6 + 6 / (6 + 6))$. Prepričal sem se, da števila 39 ni moč zapisati s 5 šesticami tako, da bi imeli tudi vsi podizrazi za vrednost naravno število. Podobno lastnost imata tudi števili 60 in 68, ki ju je moč zapisati s 5 osmicami, a pri vsakem takem zapisu obstaja podizraz, katerega vrednost ni naravno število.

Programiranja sem se lotil v programskem paketu Mathematica. Gre za zmogljiv programski paket za simbolno računanje, ki omogoča tudi programiranje, grafični prikaz podatkov in še marsikaj drugega. Seveda bi se reševanja lahko lotil tudi v pascalu ali v C-ju, a Mathematica je bila ravno pri roki, pa tudi osvežitev znanja o, v Mathematico vgrajenih ukazih, mi je prav prišla. Ko sem po slabi uri programiranja preizkusil program, sem doživel "neprijetno" presenečenje. Program me je postavil na laž in ugotovil, da je število 2000 moč zapisati z 8 osmicami. Malo sem se začudil, a res

$$2000 = ((8 + 8) \cdot (8 + 8) - 8) \cdot 8 + 8 + 8.$$

Še precej bolj pa me je vznemirjalo spoznanje, da sem "spregledal" zapis števila 2000 s samo 6 peticami,

$$2000 = 5 \cdot 5 \cdot (55 + 5 \cdot 5).$$

Res nerodno. Za konec pa si oglejmo, kakšne so moči množic S_i^x , $1 \leq x \leq 9$, $1 \leq i \leq 10$, kot jih je naračunal program:

x	$ S_1^x $	$ S_2^x $	$ S_3^x $	$ S_4^x $	$ S_5^x $	$ S_6^x $	$ S_7^x $	$ S_8^x $	$ S_9^x $	$ S_{10}^x $
1	1	3	9	26	81	250	786	2567	8627	29546
2	1	3	12	43	156	565	2109	8046	31021	122009
3	1	4	16	62	234	904	3618	14740	61083	258196
4	1	4	16	65	266	1095	4545	19257	82835	364074
5	1	4	16	66	277	1138	4787	20532	89671	399274
6	1	4	16	67	297	1244	5345	23298	104562	477121
7	1	4	17	75	329	1450	6406	29072	133909	630313
8	1	4	17	75	333	1451	6522	29891	139303	662836
9	1	4	16	71	318	1362	6109	27625	128552	607895

Moči množic, v katerih nastopa število 2000, so izpisane krepko.

Martin Juvan

**KRIŽANKA "POPLAVA MOBILNIH
TELEFONOV" – Rešitev s str. 352**

[illegible]

IZBIRNI TESTI ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO – Rešitve nalog s str. 319

I/1. Pišimo $y = x + a$. Enačbo potem poenostavimo v

$$(9 - 3a)x^2 + (9a - 3a^2)x + 127 - a^3 = 0. \quad (1)$$

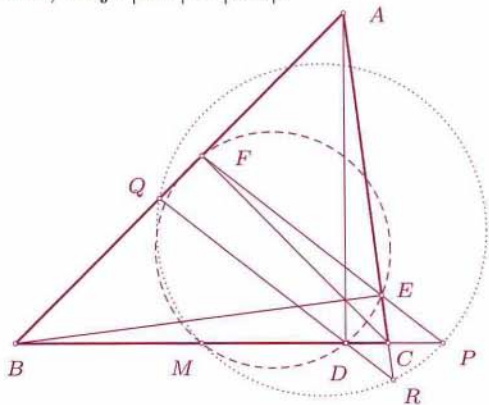
Da bi imela ta kvadratna enačba kakšno celoštevilsko rešitev, mora biti (vsaj) rešljiva v realnem. Diskriminata te enačbe je

$$D = (9a - 3a^2)^2 - 4(9 - 3a)(127 - a^3) = (9 - 3a)(a^3 + 9a^2 - 508).$$

Če je $a \geq 6$, je $a^3 + 9a^2 \geq 540$ in je $D < 0$. Za $a \leq 5$ pa je $a^3 + 9a^2 \leq 350$. (Slednje vidimo elementarno tako, da ločimo tri primere: Za $0 \leq a \leq 5$ je $a^3 + 9a^2 \leq 350$. Za $a \leq -9$ je $a^3 + 9a^2 \leq 0$, za $-8 \leq a \leq -1$ pa oceno $a^3 + 9a^2 \leq 108$ z računom neposredno preverimo.)

Torej je $D \geq 0$ le za $a \in \{3, 4, 5\}$. Za $a = 3$ dobimo iz enačbe (1) protislovno enačbo $100 = 0$. Za $a = 4$ dobimo enačbo $x^2 + 4x - 21 = 0$, ki ima rešitvi $x = 3$ in $x = -7$. Za $a = 5$ pa dobimo enačbo $3x^2 + 15x - 1 = 0$, ki nima celoštevilskih rešitev. Edini rešitvi sta torej para $(3, 7)$ in $(-7, -3)$.

I/2. Iz podatkov naloge sledi, da je $|AB| \neq |AC|$. Zaradi simetrije smemo zato privzeti, da je $|AB| > |AC|$.



Označimo z M razpolovišče stranice BC . Trikotniku DEF očrtana krožnica je krožnica devetih točk trikotnika ABC , zato poteka skozi točko M . Dokazati je torej potrebno le še, da je štirikotnik $PRMQ$ tetivni. Po izreku o potenci točke na krožnico tako zadošča dokazati

$$|DP| \cdot |DM| = |DR| \cdot |DQ|. \quad (2)$$

Kota $\sphericalangle BEC$ in $\sphericalangle BFC$ sta prava, zato je štirikotnik $BCEF$ tetiven in $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ABD$. Trikotnika ABC in AEF sta si torej podobna. Ker pa je $EF \parallel RQ$, velja $\sphericalangle CRD = \sphericalangle AEF = \sphericalangle DBA$ in sta si podobna tudi trikotnika BDQ in RDC . Sledi

$$|BD| : |DQ| = |RD| : |DC|,$$

torej je enakost (2) ekvivalentna enakosti

$$|DP| \cdot |DM| = |BD| \cdot |DC|. \quad (3)$$

Kot smo že omenili, je štirikotnik $BCEF$ tetiven. Ker je tudi štirikotnik $EFMD$ tetiven, velja

$$|PD| \cdot |PM| = |PE| \cdot |PF| = |PC| \cdot |PB|. \quad (4)$$

Če označimo $|BM| = x$, $|MD| = y$, $|DC| = x - y$ in $|PC| = z$, zlahka preverimo, da iz (4) sledi $xy + yz = x^2$, kar je ekvivalentno enakosti (3).

I/3. Zaradi $f(0) = 0$ in $f(1) = 1$ je stopnja polinoma f vsaj 1, kar reši nalogo za primer $p = 2$. V nadaljevanju zato privzemimo, da je p liho praštevilo.

Dokažimo trditev s protislovjem. Privzemimo torej, da je $d \leq p - 2$. Polinom f je tako natančno določen z vrednostmi v točkah $0, 1, \dots, p - 2$. Po Lagrangeovi interpolacijski formuli lahko zato zapišemo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-2} f(k) \frac{x(x-1) \dots (x-k+1)(x-k-1) \dots (x-p+2)}{k!(-1)^{p-k}(p-k-2)!}.$$

Ko v gornji izraz vstavimo $x = p - 1$, dobimo

$$f(p-1) = \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p-k} f(k) \frac{(p-1)!}{k!(p-k-1)!} = \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p-k} f(k) \binom{p-1}{k}.$$

Ker je $\binom{p-1}{k} = \binom{p}{k} - \binom{p-1}{k-1}$ in $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ za $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, se lahko z indukcijo prepričamo, da je $\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$ za vsako število $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Sledi $f(p-1) \equiv (-1)^p \sum_{k=0}^{p-2} f(k) \pmod{p}$, od koder zaradi lihosti števila p izpeljemo

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(k) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Po predpostavki naloge je vsak člen $f(k) \bmod p$ lahko le 0 ali 1. Ker je $f(0) = 0$, je zato $\sum_{k=0}^{p-1} f(k) \leq p-1 \pmod{p}$. Z upoštevanjem $f(1) = 1$ pa imamo še $\sum_{k=0}^{p-1} f(k) \geq 1 \pmod{p}$, kar pomeni, da je

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(k) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Protislovje torej dokazuje, da je bila predpostavka $d \leq p-2$ napačna.

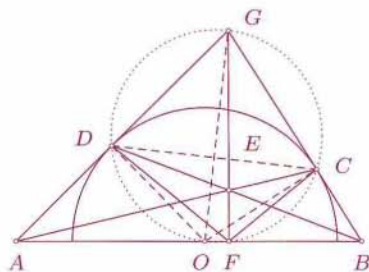
Na koncu omenimo, da za vsako praštevilo p tak polinom tudi zares obstaja. Po Eulerjevem izreku se zlahka prepričamo, da ima $f(x) = x^{p-1}$ vse opisane lastnosti.

II/1. Označimo obrekljivke po vrsti z A, B, C, D, E in F .

(a) Zlahka preverimo, da nalogo rešijo zaporedni pogovori $p_{CE}, p_{DF}, p_{AC}, p_{BD}, p_{AB}, p_{CD}, p_{CE}$ in p_{DF} .

(b) Privzemimo, da je možno s 7 pogovori (označimo jih zaporedoma s $p_1, \dots, p_7$ in ti predstavljajo povezave grafa Γ , kjer je $V(\Gamma) = \{A, B, C, D, E, F\}$) izmenjati vse čenče. Po prvih štirih pogovorih nobena med obrekljivkami še ne ve vsega (tj. podgraf Γ' , kjer je $V(\Gamma') = V(\Gamma)$ in $E(\Gamma') = \{p_1, \dots, p_4\}$, ni povezan), zato morajo v preostalih treh pogovorih sodelovati vse obrekljivke in vsaka le enkrat. Zaradi simetrije lahko privzamemo, da je $p_5 = p_{AB}$, $p_6 = p_{CD}$ in $p_7 = p_{EF}$. Ker osebi A in B zadnjič nastopita v 5. pogovoru, mora biti graf $\Gamma' \cup \{p_5\}$ povezan. Podobno se prepričamo, da sta tudi grafa $\Gamma' \cup \{p_6\}$ in $\Gamma' \cup \{p_7\}$ povezana. Torej ima graf Γ' dve komponenti s po tremi točkami in dvema povezavama. Privzamemo lahko, da so v eni komponenti točke A, C in E , v drugi pa B, D in F . V komponenti grafa Γ' , ki vsebuje točke A, C in E , dve nista povezani (npr. X in Y). Na koncu 7. pogovora tako obrekljivka X ne bo izvedla tistega, kar ve le oseba Y . Res: v prvih štirih pogovorih tega ne izve, graf s povezavami p_5, p_6 in p_7 pa ne vsebuje poti od X do Y .

II/2. Označimo z G presečišče premic AD in BC . Dokažimo najprej, da so točke E, F in G kolinearne. Označimo z F' pravokotno projekcijo točke G na premico p . Potem sta ADO in $AF'G$ ter BCO in $BF'G$ dva para podobnih pravokotnih trikotnikov. Zato velja $\frac{|AD|}{|DO|} = \frac{|AF'|}{|F'G|}$ in $\frac{|BC|}{|CO|} = \frac{|BF'|}{|F'G|}$. Sledi $\frac{|AF'|}{|BF'|} \cdot \frac{|BC|}{|AD|} = 1$,



saj je $|DO| = |CO|$. Ker je $|CG| = |DG|$, od tod (z upoštevanjem pravih predznakov pri prehodu na algebraina delilna razmerja) sledi

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BC}{CG} \cdot \frac{GD}{DA} = 1.$$

Po Cevovem izreku se tako premice AC , BD in $F'G$ sekajo v eni točki. Po definiciji je to točka E , zato točki F in F' sovpadata.

Ker je $\sphericalangle ODG = \sphericalangle GCO = \frac{\pi}{2}$, je štirikotnik $OCGD$ tetiven. Kot $\sphericalangle GCD$ med tetivo DC in tangento BG je enak obodnemu kotu (oz. polovici središčnega kota) nad tetivo DC ; torej je $\sphericalangle GCD = \frac{1}{2} \sphericalangle COD$. Ker sta trikotnika OCG in ODG skladna, od tod sledi $\sphericalangle GCD = \sphericalangle GOD$. Petkotnik $OFCGD$ je torej tetiven, zato je $\sphericalangle CFG = \sphericalangle COG = \sphericalangle GOD = \sphericalangle GFD$.

II/3. (a) Zapišimo $x_k = sb + r$, $0 \leq r < b$. Potem je $x_{k+1} - x_k = (s+r) - (sb+r) = s(1-b) \leq 0$. Torej je zaporedje x_n padajoče. Ker so vsi členi zaporedja celi in nenegativni, postane zaporedje po končno korakih stacionarno.

(b) Trditev dokažemo z indukcijo, in sicer tako, da dokažemo $x_n \equiv a \pmod{b-1}$ za vsako naravno število n . Ker je $x_1 = a$, je za $n = 1$ trditev očitna. Denimo, da velja $x_k \equiv a \pmod{b-1}$. Ker smo v točki (a) videli, da je $x_{k+1} - x_k = s(1-b)$, je $x_{k+1} \equiv x_k \pmod{b-1}$. Torej je $x_{k+1} \equiv a \pmod{b-1}$ in zato $c \equiv a \pmod{b-1}$.

(c) Najprej dokažimo, da velja ocena $1 \leq c \leq b-1$. Ker je $x_1 = a$ pozitiven in ker iz $x_k > 0$ sledi $x_{k+1} > 0$ (saj iz $x_{k+1} = s+r = 0$ sledi $s=r=0$ in zato $x_k = sb+r=0$), je $c \geq 1$. Denimo, da je $c \geq b$. Potem obstaja naravno število n , tako da za vsak $m \geq n$ velja $x_m = x_n = c \geq b$. Zapišemo $x_n = sb + r$, $0 \leq r < b$. Potem je $x_{n+1} - x_n = s(1-b)$, kar je strogo negativno, saj je $b > 1$ in $s \geq 1$ zaradi $x_n \geq b$. To pa je v nasprotju s predpostavko, da je $x_m = x_n$ za vsak $m \geq n$.

Če je število a deljivo z $b-1$, velja po točki (b) $c \equiv a \equiv 0 \pmod{b-1}$, torej je c večkratnik števila $b-1$. Zaradi ocene $1 \leq c \leq b-1$ je $c = b-1$. Če pa število a ni deljivo z $b-1$, zapišemo $a = s(b-1) + r$, kjer je s celo število in $1 \leq r \leq b-2$. Neenačbi $2-b \leq -r \leq -1$ in $1 \leq c \leq b-1$ seštejemo in dobimo $1-b < 3-b \leq c-r \leq b-2 < b-1$. Ker je $c \equiv a \equiv r \pmod{b-1}$, je $c-r$ večkratnik števila $b-1$, ki je večji od $1-b$ in manjši od $b-1$. Torej je $c-r=0$ oz. $c=r$, kar smo želeli dokazati.

Matjaž Željko

21. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST

Na 20. matematičnem tekmovanju mest so naslednji naši tekmovalci prejeli pohvale: Jure Kališnik, Matjaž Urlep (oba ŠC Celje – Gimnazija Lava), Irena Majcen, Ajda Skarlovnik (obe Gimnazija Bežigrad), Mojca Miklavc (Škofijska klasična gimnazija Ljubljana) in Katja Prnaver (II. gimnazija Maribor).

Na jesenskem krogu letošnjega 21. matematičnega tekmovanja mest so tekmovalci reševali naloge v dveh delih, lažje naloge v prvem delu in težje naloge v drugem delu.

Prva skupina (prvi del)

- (a) Pravokotni trikotnik, narejen iz papirja, prepognemo vzdolž ravne črte tako, da se oglišče ob pravem kotu prekrije z enim izmed ostalih dveh oglišč. V kakšnem razmerju se tedaj delita diagonali nastalega štirikotnika? (2 točki)

(b) Pravokotni trikotnik, narejen iz papirja, ima ploščino 1. Vzdolž ravne črte ga prepognemo tako, da se oglišče ob pravem kotu prekrije z enim izmed ostalih dveh oglišč. Dobljeni štirikotnik prerežemo vzdolž diagonale iz preostalega oglišča. Papir razpade na nekaj kosov, ki jih zravnamo. Določi ploščino najmanjšega od kosov, ki jih dobimo. (2 točki)
- Za vsako trojico celih števil a, b in c , ki zadoščajo enačbi $a + b + c = 0$, izračunamo število

$$d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}.$$

- (a) Ali je lahko $d = 2$? (2 točki)

(b) Ali je lahko d praštevilo? (2 točki)
- V ravnini leži n premic tako, da vsaka izmed njih seka natančno 1999 ostalih. Določi število n . (Poišči vse možnosti.) (4 točke)
- V Italiji proizvajajo ure, katerih urni kazalec naredi en obhod v 24 urah, minutni kazalec pa naredi en obhod vsako uro. Minutni kazalec je daljši od urnega. Pri običajnih urah urni kazalec v 24 urah naredi dva obhoda, medtem ko minutni naredi obhod vsako uro. Koliko položajev kazalcev na italijanski uri je možno videti (tj. so smiselni) tudi na običajni uri? (4 točke)

5. Na pravokotnih kartah velikosti 2×1 je narisana ena izmed diagonal. To pomeni, da imamo dve različici kart (glede na izbiro ene izmed dveh diagonal). Denimo, da imamo na voljo neomejeno število obeh tipov kart. Ali je možno iz 18 kart sestaviti tak kvadrat velikosti 6×6 , da nobeni dve krajišči diagonal na kartah ne sovpadata? (4 točke)

Druga skupina (prvi del)

1. Presečišče simetral kotov danega trikotnika ABC povežemo z njegovimi oglišči. Tako dobimo tri nove trikotnike, od katerih je eden podoben trikotniku ABC . Določi kote trikotnika ABC . (4 točke)
2. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo lihih naravnih števil n , za katera je $2^n + n$ sestavljeno število. (Naravno število m je sestavljeno, če ga lahko zapišemo kot produkt števil, različnih od m in 1.) (4 točke)
3. V prostoru leži n ravnin tako, da vsaka izmed njih seka natančno 1999 ostalih ravnin. Določi število n . (Poišči vse možnosti.) (4 točke)
4. Ali je možno na številski premici izbrati 50 intervalov (lahko se medsebojno sekajo), ki zadoščajo naslednjima zahtevama:
(a) dolžine intervalov so vsa števila $1, 2, 3, \dots, 50$;
(b) krajišča intervalov so vsa števila $1, 2, 3, \dots, 100$? (4 točke)
5. Na pravokotnih kartah velikosti 2×1 je narisana ena izmed diagonal. To pomeni, da imamo dve različici kart (glede na izbiro ene izmed dveh diagonal). Denimo, da imamo na voljo neomejeno število obeh tipov kart. Ali je možno iz 32 kart sestaviti tak kvadrat velikosti 8×8 , da nobeni dve krajišči diagonal na kartah ne sovpadata? (4 točke)

Oglejmo si še nekaj zanimivejših nalog iz drugega dela.

Prva skupina

1. (a) Dana je šahovnica velikosti 8×8 . Na vsakem izmed polj gornje vodoravne vrste stoji črna šahovska figura, na vsakem izmed polj spodnje vodoravne vrste pa stoji bela šahovska figura. V eni potezi se lahko poljubna figura premakne na sosednje prosto polje v navpični ali vodoravni smeri. Določi najmanjše število potez, po katerih črne figure stojijo v spodnji vrsti in bele figure v gornji vrsti šahovnice. (3 točke)
(b) Isti problem na šahovnici velikosti 7×7 . (4 točke)

2. Neumorna Tomaž in Peter sestavljata zaporedje števil. Začneta z naravnim številom, nato Tomaž prejšnjemu številu prišteje eno izmed njegovih števk in dobi naslednje število v zaporedju, za njim pa je na vrsti Peter, ki zadnjemu številu zaporedja odšteje eno izmed njegovih števk ter dobljeno število vpiše na konec zaporedja. Tako izmenično podaljšujeta svoje zaporedje. Dokaži, da se neko naravno število v njunem zaporedju ponovi vsaj stokrat. (8 točk)
3. Iz pravokotnega lista papirja izrežemo N pravokotnih lukenj, pri čemer so stranice lukenj vzporedne robovom lista. Preostanek papirja razrežemo na pravokotne kose. Kakšno je najmanjše možno število n teh kosov? (Pokaži, da je v vsakem primeru ostanek možno razrezati na n pravokotnikov in da v nekaterih primerih ostanka ne moremo razrezati na manj kot n pravokotnikov.) (9 točk)

Druga skupina

1. (a) Uteži z masami 1g, 2g, 3g, ..., 100g razdelimo v posodi primerjalne tehtnice tako, da je tehtnica v ravnovesju. Dokaži, da lahko iz vsake izmed posod odvezamo po dve uteži tako, da se ravnovesje ohrani. (4 točke)
 (b) Naj bo n naravno število večje od 3, za katerega je možno n uteži z masami 1g, 2g, 3g, ..., ng razdeliti v posodi tehtnice tako, da je tehtnica v ravnovesju. Ali je možno za vsako tako število iz vsake izmed posod odvzeti po dve uteži tako, da se ravnovesje ohrani? (4 točke)
2. Na veliki šahovnici je označeno $2n$ polj, ki jih lahko doseže trdnjava, ne da bi pri takem premiku preskočila kakšno neoznačeno polje. Dokaži, da je lik, ki ga tvorijo označena polja, možno razrezati na n pravokotnikov. (8 točk)
3. Dokaži, da ima konveksni polieder z $10n$ stranskimi ploskvami vsaj n ploskev z enakim številom stranic. (8 točk)

Gregor Cigler

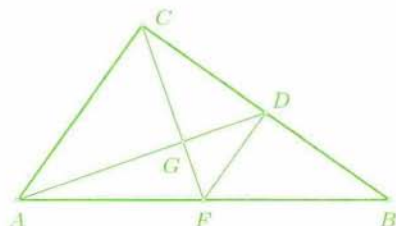
21. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Rešitve nalog s str. 370

Rešitve nalog prvega dela

Prva skupina

1. Naj bo ABC papirnati pravokotni trikotnik s pravim kotom v oglišču C . Naj bo DF daljica, vzdolž katere prepognemo trikotnik, pri čemer

točka F leži na stranici AB , točka D pa na stranici BC . Očitno je točka D razpolovišče stranice BC in daljica DF pravokotna na BC . Daljici DF in AC sta vzporedni in točka F razpolovišče stranice AB . Označimo z G presečišče daljic AD in CF .



- (a) Točka G je težišče trikotnika ABC , zato je $AG : DG = CG : FG = 2 : 1$.
- (b) Ko štirikotnik prerežemo, je najmanjši košček trikotnik GCD . Ker je ploščina trikotnika ABC enaka 1 in je D razpolovišče stranice BC , je ploščina trikotnika ACD enaka $\frac{1}{2}$. Ker je $AD : DG = 3 : 1$, je ploščina trikotnika GCD enaka $\frac{1}{6}$.
2. Če je katero izmed števil a, b, c enako 0, je tudi $d = 0$. Privzemimo, da so a, b, c neničelna števila in da sta števili b in c enako predznačeni. Definirajmo $e = -b$ in $f = -c$. Tedaj je $a = e + f$ in velja

$$d = (e + f)^{1999} - e^{1999} - f^{1999} = \sum_{k=1}^{1998} \binom{1999}{k} e^{1999-k} f^k.$$

Če naj bo d pozitivno število, je $e, f > 0$. Ker je 1999 praštevilo, je vsak binomski koeficient deljiv s 1999, zato je tudi število d deljivo s 1999.

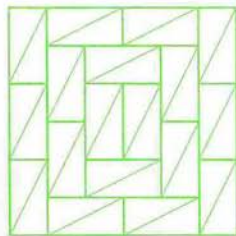
- (a) d ne more biti enako 2.
- (b) Če je d praštevilo, je enako 1999. Iz gornje enačbe pa vidimo, da je $d > 1999$, torej d ne more biti praštevilo.
3. Denimo, da imamo k družin medsebojno vzporednih premic (vse premice ene družine so paroma vzporedne, premici iz različnih družin pa sta nevzporedni). Iz pogoja dobimo, da je skupno število premic v poljubnih $k - 1$ poddružinah enako 1999. Od tod sledi, da vsaka družina vsebuje $n - 1999$ premic, zato vse družine vsebujejo enako število premic. Sledi, da $k - 1$ deli 1999, zato je bodisi $k = 2$ in $n = 3998$ (dva nevzporedna snopa premic) bodisi $k = 1998$ in $n = 2000$ (šop premic).

4. Naj bo kot, ki ga minutni kazalec na obeh urah oklepa s svojo začetno lego, enak 24θ , $0 \leq \theta < 15^\circ$. Tedaj je kot, ki ga z izhodiščnim položajem oklepa urni kazalec običajne ure, enak $2\theta + m \cdot 30^\circ$ ($m \in \mathbb{Z}$), kot, ki ga z izhodiščnim položajem oklepa urni kazalec italijanske ure, pa $\theta + n \cdot 15^\circ$ ($n \in \mathbb{Z}$). Dobimo enačbo

$$\theta = (n - 2m)15^\circ,$$

od koder zaradi omejitev za kot θ dobimo $\theta = 0$. Od tod dobimo 12 možnih položajev za $n = 0, 2, \dots, 22$.

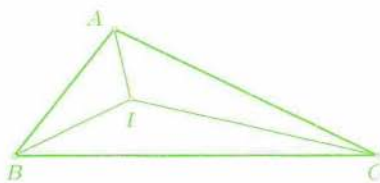
5. Da, to je možno. Eno izmed možnosti prikazuje skica.



Druga skupina

1. Naj bo I središče trikotniku ABC vrtane krožnice.

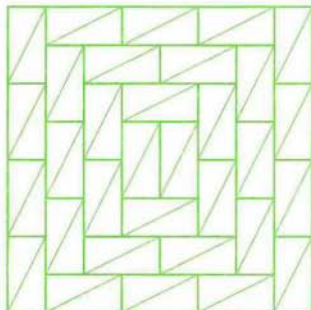
Označimo $\sphericalangle BAI = \sphericalangle CAI = \alpha$, $\sphericalangle ABI = \sphericalangle CBI = \beta$ in $\sphericalangle BCI = \sphericalangle ACI = \gamma$, ter privzemimo, da je $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Vsak izmed trikotnikov IBC in ICA ima vsaj en kot manjši od vseh kotov trikotnika ABC , zato je trikotnik IAB podoben trikotniku ABC . Od tod dobimo $\alpha = 2\beta = 4\gamma$, torej velja $14\gamma = \pi$, zato so koti trikotnika ABC enaki $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$ ter $\frac{\pi}{7}$.



2. Ker je $2^1 \equiv 2 \pmod{3}$ in $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$, je $2^n \equiv 2 \pmod{3}$, za vsako liho število n . Naj bo $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Tedaj je $2^n \equiv 2 \pmod{3}$ in $n \equiv 1 \pmod{3}$. Od tod sledi, da je $m = 2^n + n$ večkratnik števila 3. Očitno je $m > 3$, zato je m sestavljeno število.
3. Denimo, da imamo k družin medsebojno vzporednih ravnin (vse ravnine ene družine so paroma vzporedne, ravnini iz različnih družin pa sta nevzporedni). Iz pogoja dobimo, da je skupno število ravnin v pojubnih $k - 1$ poddružinah enako 1999. Od tod sledi, da vsaka družina vsebuje $n - 1999$ ravnin, zato vse družine vsebujejo enako ravnin. Sledi, da $k - 1$ deli 1999, zato je bodisi $k = 2$ in $n = 3998$ (dve

nevzporedni družini ravnin) bodisi $k = 1998$ in $n = 2000$ (ravnine s skupno premico).

4. Označimo z a vsoto števil v levih krajiščih intervalov in z b vsoto števil v desnih krajiščih intervalov. Tedaj velja $a + b = 1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ in $b - a = 1 + 2 + \dots + 50 = 1275$. Od tod dobimo $2b = 6325$, kar ni možno, zato takih intervalov ne moremo izbrati.
5. Da, to je možno. Eno izmed možnosti prikazuje skica.



Rešitve nalog drugega dela

Prva skupina

2. (a) Postavimo figure v začetni položaj in opazujemo poljubni stolpec dane šahovnice. Vsaj ena figura iz izbranega stolpca je morala med premikanjem do končnega položaja narediti vsaj en vodoravni pomik (sicer se figuri 'zaletita'). Od tod vidimo, da moramo narediti najmanj $7 \cdot 8 \cdot 2 + 8 = 120$ potez. Konstruirajmo sedaj zaporedje natanko 120 potez, ki nas pripelje do končne postavitve. V prvem in drugem stolpcu napravimo naslednje poteze: Belo figuro v prvem stolpcu pomaknemo tri polja navzgor. Črno figuro v drugem stolpcu pomaknemo šest polj navzdol, zatem enkrat levo (v prvi stolpec) in še enkrat navzdol. Tako je ta črna figura na koncu svoje poti. Belo figuro iz drugega stolpca pomaknemo sedemkrat navzgor na njeno končno mesto. Črno figuro iz prvega stolpca pomaknemo enkrat navzdol, enkrat desno (v drugi stolpec) in nato le še navzdol do končnega položaja. Nazadnje pomaknemo navzgor do prve vrste še belo figuro iz prvega stolpca. Na opisani način smo le dvakrat vodoravno premaknili figure. Postopek ponovimo še v preostalih parih sosednjih stolpcev.

(b) Podobno kot v primeru (a) ugotovimo, da bo potrebnih najmanj 91 potez. Kot zgoraj lahko v prvih šestih stolpcih zamenjamo figure, pri čemer naredimo le eno vodoravno potezo na stolpec. V sedmem stolpcu tedaj pomaknemo belo figuro za tri polja navzgor, črno za dve polji navzdol, eno polje v levo, dve polji navzdol, eno polje v desno in nato do konca navzdol. Nazadnje pomaknemo do konca navzgor še belo figuro. Tako smo za sedmi stolpec porabili dve vodoravni potezi, kar skupaj znaša 92 potez. Denimo, da lahko figure preuredimo v 91 potezah. To pomeni, da v vsakem stolpcu natanko z eno figuro naredimo en vodoravni pomik. Opazujmo skrajno levi (prvi stolpec) šahovnice in privzemimo, da z belo figuro tega stolpca naredimo en vodoravni pomik (sicer prezrcalimo šahovnico čez njeno vodoravno simetralo). Jasno je, da se ta figura pomakne v desno. Ker bo na koncu zaseden vrh drugega stolpca, moramo vodoravno premakniti tudi belo figuro v drugem stolpcu. Če bi jo pomaknili v tretji stolpec, bi morali vsaj eno izmed preostalih belih figur pomakniti v prvi stolpec, pri čemer bi naredili vsaj dve vodoravni potezi. Ker črnih figur v prvih dveh stolpcih ne premikamo vodoravno, ostaneta v istih stolpcih. Sedaj ponovimo enako sklepanje za tretji in četrti stolpec ter nazadnje še za peti in šesti stolpec. Tudi ta dva para stolpcev na koncu vsebujeta enake figure kot na začetku, zato morata figuri iz sedmega stolpca ostati v tem stolpcu. Jasno je, da z enim samim vodoravnim pomikom ena izmed figur zamenja stolpec, kar ni mogoče. S tem smo pokazali, da je najmanjše možno število potez enako 92.

- Denimo, da njuno zaporedje ni navzgor omejeno. Naj bo x število v zaporedju, ki ga je dobil Tomaž, in y prvo naslednje število, ki ga je dobil Tomaž. Velja $|y - x| < 10$ (vmes je Peter odštel števk, zatem pa Tomaž prištel neko števk). Če v zaporedju števil, ki jih tvori Tomaž, izpustimo pravilno izbrane člene, dobimo naraščajoče zaporedje števil, ki naraščajo s korakom, manjšim od 10. Tako dobimo v zaporedju neko število x , katerega vse številke, razen morda enic, so enake 9. Ni se težko prepričati, da nobeno število, ki ga dobita v zaporedju za številom x , ne presega $x + 10$, zato je zaporedje omejeno, kar je v protislovju s predpostavko. Ker je zaporedje navzgor omejeno in so vsi členi očitno nenegativna cela števila, se kako število v zaporedju gotovo pojavi vsaj stokrat.
- Pokažimo, da je $n = 3N + 1$. Naj bodo luknje pravokotniki $A_i B_i C_i D_i$, $i = 1, \dots, N$. Izberimo luknje tako, da njihova središča ležijo na isti premici, vzporedni stranicam $A_i D_i$, in je dolžina stranice $A_i B_i$ enaka $\frac{x}{3^i}$, pri čemer je x dolžina krajše od stranic kosa papirja. Denimo, da

smo tak kos papirja razrezali na pravokotnike. Izberimo dve daljici izmed $3N + 1$ daljic A_iB_i , B_iC_i , A_iD_i in C_nD_n ter po eno točko iz notranjosti izbranih daljic. Ko papir razrežemo, nobeni dve tako izbrani točki ne moreta ležati v skupnem pravokotniku, saj njuna zveznica seka vsaj kako izmed lukenj. Kosov je zato vsaj $3N + 1$.

Naj bo sedaj iz kosa papirja izrezanih N pravokotnih lukenj. Podaljšajmo navpične stranice lukenj na obe strani do prve luknje ali pa do roba papirja, če 'podaljšek' ne seka nobene luknje. Vzdolž 'podaljškov' razrežemo papir. Če k vsaki luknji pridružimo tri pravokotne kose, ki vsebujejo oglišči A_i in D_i , in nazadnje dodamo še pravokotni kos ob desni stranici skrajno desne luknje (lahko je več takih lukenj), smo na ta način prešteli vse pravokotne kose, zato jih je očitno kvečjemu $3N + 1$.

Druga skupina

1. (a) Uteži z masami od $1g$ do ng razdelimo v dve posodi tehtnice. Pobarvajmo uteži na desni strani tehtnice z rdečo in uteži na levi strani z modro barvo. Maksimalno podmnožico uteži iste barve, katerih mase so zaporedna števila, imenujmo sprimek. Denimo, da imamo vsaj tri rdeče sprimke. Odstranimo najtežjo utež s maso xg iz rdečega sprimka z najlažjimi utežmi in najlažjo utež s maso yg iz rdečega sprimka z najtežjimi utežmi. Ker imamo vsaj tri rdeče sprimke, lahko najdemo različni modri uteži s masama $(x + 1)g$ ter $(y - 1)g$. V opisani situaciji torej lahko iz posod vzamemo po dve uteži, ne da bi se podrlo ravnovesje. Privzemimo sedaj, da imamo kvečjemu po dva sprimka iste barve. Če imamo en sprimek z vsaj dvema utežema, ki ne vsebuje uteži z masama $1g$ in ng , lahko iz njega vzamemo najlažjo in najtežjo utež, ki imata masi ag in bg , hkrati pa na drugi strani najdemo uteži s masama $(a - 1)g$ in $(b + 1)g$. Denimo, da imamo en rdeč in dva modra sprimka. Potem rdeči sprimek ne vsebuje uteži s masama $1g$ in ng , zato lahko privzamemo, da vsebuje le eno utež. Tedaj bi morala ta utež tehtati $n(n + 1)/4$, kar pa v primeru $n > 4$ ni mogoče. Imejmo sedaj po dva sprimka iste barve. Lahko privzamemo, da obstaja rdeči sprimek, ki ne vsebuje uteži s masama $1g$ in ng , ter modri sprimek z enako lastnostjo. Naj bo utež z maso $1g$ pobarvana rdeče. Tedaj je vsota mas rdečih uteži enaka $((1 + 2 + \dots + k - 1) + (k + 1))g$ in vsota mas modrih uteži enaka $(k + ((k + 2) + \dots + n))g$. Od tod dobimo

$$\frac{k(k - 1)}{2 + (k + 1)} = \frac{n(n + 1)}{4},$$

ki za $n = 100$ nima cele rešitve. V edinem preostalem primeru imamo en rdeč in en moder sprimek. Dobimo enačbo

$$k(k+1) = \frac{n(n+1)}{2},$$

ki v primeru $n = 100$ tudi nima celih rešitev, s čimer je trditev točke (a) dokazana.

(b) Vzemimo, $n = 20$ in $k = 14$. Tedaj velja $2k(k+1) = n(n+1)$. Na levo damo uteži z masami od 1g do 14g, na desno preostale. Jasno je vsota mas poljubnih dveh uteži z leve manjša od vsote mas pojubnih dveh uteži z desne strani, zato je odgovor na vprašanje (b) nikalen.

2. Dokazali bomo, da lahko lik razrežemo na kvečjemu n kosov. Središča označenih polj naj bodo vozlišča grafa G , v katerem so povezana središča polj, ki imajo skupno stranico. Tedaj je G povezan graf, v katerem ima vsako vozlišče največ štiri sosede. Za poljubno vozlišče v grafa G lahko konstruiramo podgraf F , v katerem ima v isto valenco (število sosedov), graf F pa je drevo, ki vsebuje vsa vozlišča grafa G . Recimo, da v grafu G obstaja vozlišče v s sodo valenco. Tedaj je vozlišče v v grafu F povezano s sodim številom dreves. Ker je število vozlišč sodo, ima vsaj eno od teh poddreves sodo vozlišče, zato lahko F razbijemo na dve poddrevesi s sodo vozlišči in uporabimo indukcijo. Privzemimo sedaj, da imajo vsa vozlišča grafa G liho valenco in v grafu G najdemo cikel dolžine 4 (skupek štirih polj s skupnim ogliščem). Tvorimo podgraf H , ki vsebuje vsa vozlišča grafa G , cikel dolžine 4, vsako vozlišče tega cikla pa je povezano z enim drevesom. Če ima za kako od vozlišč cikla graf, ki sestoji iz tega vozlišča in z njim povezanega drevesa, sodo število vozlišč, lahko uporabimo indukcijo. V nasprotnem primeru opazujemo dve sosednji vozlišči cikla skupaj z njima povezanima drevesoma in nato uporabimo indukcijo. Privzemimo nazadnje, da je G brez ciklov dolžine 4 (lik na šahovnici ne vsebuje štirih polj s skupnim ogliščem), v katerem imajo vsa vozlišča liho valenco (enako 1 ali 3). Postavimo šahovnico v koordinatni sistem, tako da imajo središča polj celoštevilske koordinate. Naj ima polje $(0,0)$ valenco 1 in soseda $(0,1)$ z valenco 3. Privzamemo lahko, da ima polje $(0,1)$ soseda $(-1,1)$ in $(1,1)$ (sicer lik primerno zasukamo). Če imata polji $(-1,1)$ in $(1,1)$ valenco 1, je $n = 2$ in lik lahko očitno razrežemo na 2 kosa. V nasprotnem primeru lahko privzamemo, da ima polje $(1,1)$ valenco 3. Ker polje $(1,0)$ ni označeno, sta označeni polji $(1,2)$ in $(2,1)$. Polje $(1,2)$ ne more imeti

valence 3, sicer bi bilo označeno vsaj eno izmed polj $(0, 2)$ ali $(2, 2)$, v obeh primerih pa bi dobili 4 označena polja s skupnim ogliščem. Od tod vidimo, da je ima lahko le polje $(2, 1)$ valenco 3. Induktivno ugotovimo, da središča polj z valenco 3 ležijo na premici $y = 2$, kar pomeni, da imamo $n + 1$ polj na premici $y = 1$ in $n - 1$ preostalih polj, ki ležijo izmenoma nad in pod to premico. Ta lik sestoji iz pravokotnika velikosti $(n + 1) \times 1$ in $n - 1$ kvadratkov, skupno torej iz n pravokotnikov. S tem je dokaz končan.

3. Naj bo v število oglišč in e število robov danega poliedra. Iz Eulerjeve formule dobimo $v - e + 10n = 2$. Ker iz vsakega vozlišča izhajajo vsaj trije robovi in je rob skupen dvema ogliščema, velja $3v \leq 2e$. Od tod dobimo $10n \geq \frac{e}{3} + 2$. Naj bo a_i število ploskev s k_i stranicami, $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Potem je

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_m k_m = 2e$$

in

$$10n \geq \frac{a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_m k_m}{6} + 2.$$

Denimo, da je $m > 10$ in $a_1, \dots, a_m < n$. Potem velja

$$\begin{aligned} 10n &\geq \frac{a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_m k_m}{6} + 2 \geq \\ &\geq \frac{(n-1)k_1 + (n-1)k_2 + \dots + (n-1)k_{10} + 10k_{11}}{6} + 2 \geq \\ &\geq \frac{(n-1)3 + (n-1)4 + \dots + (n-1)12 + 130}{6} + 2 = \frac{75n}{2}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je

$$10n \geq \frac{75n + 67}{6},$$

kar seveda ni možno. Torej je $m \leq 10$, od koder dobimo vsaj en indeks i , za katerega velja $a_i \geq n$.

Gregor Cigler

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje — 27. letnik, leto 1999/2000, številke 1–6, strani 1–384

MATEMATIKA

Fotografija in matematika IV – Fresnelova leča (Peter Legiša).....	4-9
Zlati pravokotnik (Marko Razpet)	34-43
Katera praštevila so vsote dveh kvadratov naravnih števil? (Ivan Vidav).....	68-71
Leonardo da Vinci kot matematik (Marija Vencelj).....	134-135
Naloge o elipsah iz japonskih templjev – reš. str. 228 (Karmela Milutinović).....	146-151
O številih, ki jih lahko zapišemo s samimi enakimi števki (Ivan Vidav)	200-205
Ob neki nalogi (Jože Grasselli)	259-264
Fotografija in matematika V – Leče, stekla, očala (Peter Legiša).....	324-329
Kriterij deljivosti s praštevili (Anton Suhadolc)	342-343
Koliko pijače lahko natočimo v kozarec? (Nada Razpet).....	348-351

FIZIKA

Vrzeli kot nosilci naboja v kristalih (Janez Strnad)	10-15
Kdo potrebuje debele noge? (Vida Kariž Merhar)	44-45
Elektroni in vrzeli v polprevodniku brez primesi (Janez Strnad)	72-77
Prepovedani pas (Andrej Likar)	90-93
Brv in most (Andrej Likar)	132-133
Kako hitro so se gibali dinosavri? (Janez Strnad)	142-145
Merjenje gostote z uro (Andrej Likar)	210-213
Leonardo da Vinci in fizika (Janez Strnad)	216-222
Elektroni in vrzeli v polprevodniku s primesjo (Janez Strnad)	276-282
O tranzistorjih (Janez Strnad)	330-337

RAČUNALNIŠTVO

Kraljice napadajo – reš. str. 108 (Boštjan Brešar)	16-21
Rekonstrukcija dreves, 1. del (Martin Juvan)	78-82
Rekonstrukcija dreves, 2. del (Martin Juvan)	138-141
Prvo tekmovalje iz Unixa (Primož Peterlin, Aleš Košir)	208-209
Analogno digitalna pretvorba (Jože Pahor)	270-274
Lokalne volitve – reš. str. 356 (Martin Juvan)	340-341

ASTRONOMIJA

Deklinacija Sonca (Marijan Prosén)	22-24
Ozvezdja (Marijan Prosén)	84-89
Premikanje Lune glede na zvezde (Marijan Prosén)	136-137
Osmica (Marijan Prosén)	206-207
Bližnje Venerino navidezno prečkanje Sonca (Marijan Prosén)	266-269
Trije načini določitve težnega pospeška (Marijan Prosén)	344-347

NOVICE

David Hilbert (1862–1943) – Ob stoletnici Osnov geometrije in skorajšnji stoletnici Hilbertovih problemov (Marija Vencelj)	26-31
Uspehi naših dijakov na olimpiadah se nadaljujejo (Iz uredništva)	83
40. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko)	158-159
30. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	159
30. fizikalna olimpiada: P kot Padova ali kot pasji dnevi (Urban Simončič)	162-163
Leonardo da Vinci, znanstvenik, izumitelj, umetnik (Janez Strnad) ...	196-198
Drugo sredozemsko matematično tekmovanje (Darjo Felda)	213-214
Mladinski astronomski raziskovalni tabor 2000 (Igor Grom)	341

NOVE KNJIGE

Marijan in Stana Prosén: Prvi pogled (Darja Delač Felda)	215
Mihaela Triglav: Meteorji – Ob izidu nove "Sigue" (Matjaž Omladič)	XVIII
Zgodovina matematike – zgodbe o problemih (Petar Pavešić)	XXII

REŠITVE NALOG

Zapletena sončna ura – Odgovor na vprašanje iz zadnje lanske številke Preseka (Andrej Likar)	52-55
Deklinacija Sonca – Odgovor na vprašanja s str. 22 (Marijan Prosén)	95
Prepisovanje knjig – s str. 25 (Martin Juvan)	104-107
Lažnivi Kljukec – Odgovor na vprašanje iz zadnje lanske številke Preseka (Andrej Likar)	165

NALOGE

Da se ti zmeša – reš. str. 108 (Marija Vencelj)	2
Štiri točke – dve razdalji – reš. str. 94 (Marija Vencelj)	2
Kvadratne rože – reš. str. 99 (Martin Juvan)	3
Tri zanimive – reš. str. 83 (Dragoljub M. Milošević, prev. Barbara Japelj)	3
Naloga s problemom – reš. str. 102 (Marija Vencelj)	24
Prepisovanje knjig – (Matija Lokar)	25
Lahek kriptaritem – reš. str. 101 (Marija Vencelj)	43
Zloženki – reš. str. 107 (Dragoljub M. Milošević)	45
Stalimo sneg! – reš. str. 154 (Andrej Likar)	66
Koliko iger? – Rešitev (po dvojisko) str. 165 (Marija Vencelj)	67
ABBCCC – reš. str. 155 (Martin Juvan)	67
Enobarvna kocka – reš. str. 166 (Marija Vencelj)	67
Premoženje – reš. str. 163 (Marija Vencelj)	82
Koliko manjših? – reš. str. 156 (Martin Juvan)	89
Kako sta sklepala Nina in Žiga? – reš. str. 141 (Silva Kmetič)	98
2000 – reš. str. 362 (Martin Juvan)	130
Britje – reš. str. 198 (Andrej Likar)	130
Enakostranična trikotnika – reš. str. 205 (Marija Vencelj)	131
Dopolni račun – reš. str. 227 (Marija Vencelj)	131
Poravnani kazalci – reš. str. 232 (Martin Juvan)	131
Izlušči in dokaži pravilo – reš. str. 226 (Marija Vencelj)	145
Dva faktorja brez ničel – reš. str. 231 (Marija Vencelj)	159
Piransko sonce – reš. str. 265 (Andrej Likar)	194
Krožni diagram – reš. str. 283 (Martin Juvan)	194
Številska križanka – reš. str. 287 (Urška Demšar)	195
Višine trikotnika – reš. str. 275 (Marija Vencelj)	195
Največje praštevilo – reš. str. XIX (Marija Vencelj)	195
Trikotnika – reš. str. 283 (Dragoljub M. Milošević)	222
Satovje – reš. str. 285 (Martin Juvan)	223
Številski uganki – reš. str. 264 (Marija Vencelj)	226
Svetlost Lune ob mrku – reš. str. 359 (Mitja Rosina)	258
Dve nalogi – reš. str. 361 (Marko Razpet)	258
Številska piramida – reš. str. 339 (Marija Vencelj)	258
Premisli in nariši – reš. str. 337 (Marija Vencelj)	269
Številska izpolnjevanke s simetrijo (Marija Vencelj)	322
Trinajst deliteljev (Marija Vencelj)	322
Elipsa, parabola in pravokotni tangenti (Marko Razpet)	322

TEKMOVANJA

35. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	56-57
19. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Mojca Čepič)	57-59
37. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko)	59-62
43. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko)	62-64
34. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje – reš. str. 170 (Aleksander Potočnik)	109-114
19. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 172 (Mojca Čepič)	114-119
Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce – reš. str. 178 (Matjaž Željko)	119-121
Naloge s fizikalnega predtekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 1998/99 (Ciril Dominko)	121-125
20. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog – reš. str. 189 (Aleš Vavpetič)	125-128
Urniki tekmovanj v letu 2000 (Darjo Felda)	168-170
Rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1998/99 – s str. 121 (Bojan Golli)	182-188
35. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – reš. str. 290 (Aleksander Potočnik)	235-236
19. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 291 (Mojca Čepič)	237-243
43. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – reš. str. 300 (Matjaž Željko)	244-246
Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 1998/99 (Ciril Dominko)	246-254
40. mednarodna matematična olimpiada – Rešitve izbranih nalog s str. 158 (Matjaž Željko)	254-256
Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz fizike v šolskem letu 1998/99 – s str. 246 (Bojan Golli)	304-313
Rešitve nalog s prvega tekmovanja iz Unixa – s str. 208 (Primož Peterlin in Aleš Košir)	313-319
Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado – reš. str. 366 (Matjaž Željko)	319-320
21. mednarodno matematično tekmovanje mest – reš. str. 372 (Gregor Cigler)	370-372

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

Zakaj je 7 oznaka za število sedem? (Matija Lokar)	15
Iskrica (Tatjana Hernaus)	21
Križanka "Merjenje časa" – reš. str. 103 (Marko Bokalič)	32-33
Verižni ulomki in astronomija (Marino Pavletič)	46-51
Ozvezdja nekoliko drugače (Marijan Prosén)	66
Križanka "Popolni Sončev mrk" – reš. str. 164 (Marko Bokalič)	96-97
Poslušajmo praštevila (Mojca in Matija Lokar)	152-154
Križanka "Odkritja tisočletja" – reš. str. 234 (Marko Bokalič)	160-161
Križanka o velikem znanstveniku, izumitelju in umetniku – reš. str. 284 (Marko Bokalič)	224-225
Križanka "Jubilejno leto našega največjega poeta" – reš. str. 355 (Marko Bokalič)	288-289
Avala, Beograd, Cetinje... in fizikalna antifonetična abeceda (Primož Peterlin in Janja Majhenc)	323
Križanka "Poplava mobilnih telefonov" – reš. str. 365 (Marko Bokalič)	352-353
Obdobje zanimivih datumov (Mark Pisanski in Tomaž Pisanski)	354-355

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, šolsko leto 1999/2000, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1999/2000 je za posamezne naročnike **2.000 SIT**, za skupinska naročila šol **1.650 SIT**, posamezna številka **400 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

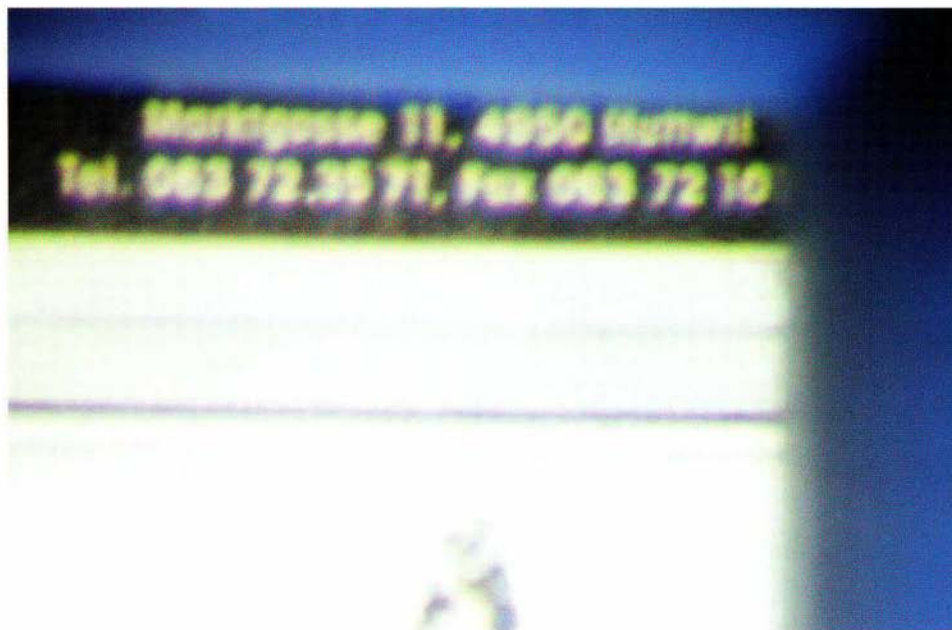
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1423

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Akromatična predleča je precej debelejša in težja od enako močne enostavne predleče, naredi pa seveda tudi precej boljšo sliko.



Močno povečan vogal slike, narejene s 400 milimetrskim objektivom, kaže t.i. sekundarno ali preostalo barvno napako. Čeprav je goriščnica enaka za modro in rdečo svetlobo, so "iz kontrole ušle" nekatere druge barve: robovi črk so na eni strani obarvani vijolično, na drugi zeleno.

