

PRE SEK

27 (1999-2000)

5



ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

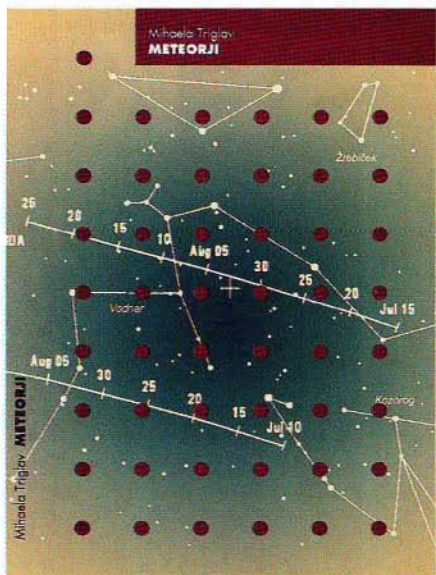
Mihaela Triglav: METEORJI Ob izidu nove "Sigue"

Zbirka *Knjižnica Sigma*, ki objavlja poljudne tekste iz matematike, fizike in astronomije, je v letu 1999 praznovala zavidljiv jubilej. Minilo je namreč 40 let od tistih davnih časov, ko je izšla v tej zbirki prva drobna knjižica z naslovom *Rešeni in nerešeni problemi matematike*. Napisal jo je profesor Ivan Vidav, ki je bil dolga leta sam tudi urednik zbirke. Od takrat pa vse do danes so generacije in generacije mladih posegale po delih zbirke in se ob njih navduševale za naravoslovne vede. Mnogim je najbrž tako kot meni še živo v spominu čas, ko smo gulili šolske klopi in ob Sigmii odkrivali prve skrivnosti teh ved.

Prav veseli smo, da lahko Sigmin jubilej praznujemo delovno, z izidom dveh del letnika 1999. Eno bomo predstavili v eni prihodnjih številkih Preseka, danes pa se posvetimo knjižici *Meteorji* Mihaele Triglav. Opazovanje meteorjev je ena pomembnejših dejavnosti vse številnejših ljubiteljskih opazovalcev neba. Tega dela pa se ni mogoče resno lotiti brez primerne priročnika. Pričujoča knjiga bo ljubiteljem po vsebini, stilu in celovitosti predstavitve omenjene teme odlično služila. Delo bo zanimivo tudi za tiste bralce, ki se ne branijo spoznati matematične in fizikalne podlage astronomskih pojavov, in za tiste, ki si želijo nadaljnega širjenja znanja, saj navaja mnoge dodatne vire. V knjigi so zbrani številni podatki, ki so sicer težje dostopni, bralcu z določenim znanjem fizike pa omogočajo oceno tistih lastnosti meteorjev, ki v knjigi niso posebej obdelane. Knjiga vključuje tudi rezultate najnovejših opazovanj, recimo tekoče dogajanje v meteorskem roju Leonidov. Pri opisovanju opazovanj avtorica uporablja uveljavljeni standard na tem področju, to so poročila Mednarodne meteorske zveze.

Upam, da bodo po delu posegli ne samo ljubiteljski opazovalci neba, temveč tudi mnogi drugi mladi, ki se bodo za opazovanje "zvezd" ob branju tega dela šele navdušili. Vsem skupaj želim obilo zabave pri prebiranju knjige in – jasno nebo.

Matjaž Omladič,
urednik Knjižnice Sigma



list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, leto 1999/2000, številka 5, strani 257–320

VSEBINA

MATEMATIKA	Ob neki nalogi (Jože Grasselli)	259-264
FIZIKA	Elektroni in vrzeli v polprevodniku s primesjo (Janez Strnad)	276-282
ASTRONOMIJA	Bližnje Venerino navidezno prečkanje Sonca (Marijan Prosén)	266-269
RAČUNALNIŠTVO	Analogno digitalna pretvorba (Jože Pahor)	270-274
NOVE KNJIGE	Mihaela Triglav: Meteorji – Ob izidu nove "Sigme" (Matjaž Omladič)	II
NALOGE	Svetlost Lune ob mrku (Mitja Rosina)	258
	Dve nalogi (Marko Razpet)	258
	Številska piramida (Marija Vencelj)	258
	Premisli in nariši (Marija Vencelj)	269
ZANIMIVOSTI,	Križanka "Jubilejno leto našega največjega poeta" (Marko Bokalič)	288-289
RAZVEDRILO	Številski uganki – s str. 226 (Marija Vencelj)	264
REŠITVE NALOG	Piransko sonce – s str. 194 (Marija Vencelj)	265
	Višine trikotnika – s str. 195 (Marija Vencelj)	275
	Trikotnika – s str. 222 (Dragoljub M. Milošević)	283
	Krožni diagram – s str. 194 (Martin Juvan)	283-284
	Križanka o velikem znanstveniku, izumitelju in umetniku – s str. 224 (Marko Bokalič)	284
	Satovje – s str. 223 (Martin Juvan)	285-287
	Številska križanka – s str. 195 (Urška Demšar)	287
	Največje praštevilo – s str. 195 (Marija Vencelj)	III
TEKMOVANJA	35. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – rešitve s str. 235 (Aleksander Potočnik)	290-291
	19. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve nalog s str. 237 (Mojca Čepič)	291-300
	43. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – rešitve nalog s str. 244 (Matjaž Željko)	300-304
	Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz fizike v šolskem letu 1998/99 – s str. 246 (Bojan Golli) ..	304-313
	Rešitve nalog s prvega tekmovanja iz Unixa – s str. 208 (Primož Peterlin in Aleš Košir)	313-319
	Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado (Matjaž Željko)	319-320
NA OVITKU	Popolni Lunin mrk 21. januarja letos. Slika prikazuje fazo popolnega mrka, kot jo je bilo videti za kapelico Malega gradu v Kamniku (foto Lojze Vrankar). Glej tudi nalogo na str. 258	I
	Štiri različne faze Luninega mrka (foto Lojze Vrankar) ..	IV

SVETLOST LUNE OB MRKU

Avtor fotografije na naslovni strani je sliko posnel v fazi popolnega mrka, ko je bila vsa Luna v Zemljini senci. Vendar Luno vidimo. Zakaj?

Iz slike oceni, kolikšna je bila svetlost Lune v sredini in kolikšna na spodnjem robu. Privzemi, da je bila osvetljenost grajske kapele 10 lx in da je albedo zidu 0,6 ter strehe 0,04.

Kot merilo za svetlost navedi gostoto odbitega svetlobnega toka, ki je enaka osvetljenosti, pomnoženi z albedom.

Mitja Rosina

DVE NALOGI

1. Dokaži, da je naravno število

$$x = \underbrace{111 \dots 1}_n \underbrace{222 \dots 2}_{n+1} 5,$$

zapisano v desetiškem številskem sestavu, popolni kvadrat in izračunaj $\sqrt{x}$ (Avstrijska matematična olimpiada 1970).

2. Reši enačbo

$$9x^2 - 137 = \underbrace{111 \dots 1}_n \underbrace{888 \dots 8}_{n+2},$$

v kateri so vsi koeficienti zapisani v desetiškem številskem sestavu.

Marko Razpet

ŠTEVILSKA PIRAMIDA

Na vsak prazen zidak piramide na desni napiši po eno naravno število tako, da bo vrednost števila na posameznem zidaku enaka vsoti števil, napisanih na zidakih, na katera je položen.

37

9

Marija Vencelj

1

4

2

OB NEKI NALOGI

V neki zbirki matematičnih nalog beremo: Naravno število se končuje na 2; ko postaviš števk 2 z zadnjega mesta na začetek, dobiš dvakrat večje število; poišči najmanjše takšno naravno število.

Rešimo nalogo. Ker se iskano število končuje na 2, ga lahko zapišemo

$$10x + 2. \quad (1)$$

Tu je x naravno število, ki ga še ne poznamo; vzamemo, da ima n mest. Ko prenesemo 2 na začetek, stoji 2 na mestu $n + 1$ z desne in dobimo število

$$2 \cdot 10^n + x. \quad (2)$$

To število je po pogojih naloge dvakrat večje od prvotnega; torej je

$$2 \cdot 10^n + x = 2(10x + 2)$$

in od tod

$$19x = 2(10^n - 2). \quad (3)$$

Tej enačbi mora ustrezati neznano število x ; ko smo ga našli, po (1) pridemo do iskanega števila.

Ker naj bo x naravno število, iz (3) vidimo, da 19 deli $2(10^n - 2)$; toda število 19 je tuje 2, zato mora deliti $10^n - 2$. Treba je torej najti najmanjši n , pri katerem 19 deli $10^n - 2$.

Ravnamo lahko tako, da po vrsti jemljemo $n = 1, 2, 3, \dots$ in gledamo, katero izmed števil $10 - 2, 10^2 - 2, 10^3 - 2, \dots$ je prvo deljivo z 19. (Če naj bo naloga rešljiva, se mora to prej ali slej zgoditi.) Ko smo naleteli na takšno število, iz (3) izračunamo x in naredimo število (1). S preizkusom preverimo, ali tako dobljeno število izpolnjuje zahteve naloge.

Iskanje najmanjšega n , pri katerem 19 deli $10^n - 2$, si moremo olajšati. Če namreč 19 deli $10^n - 2$, velja

$$\frac{10^n - 2}{19} = s$$

pri naravnem številu s in je potem

$$10^n = 19s + 2.$$

Dobljena enakost pove, da pušča 10^n pri delitvi z 19 ostanek 2.

Sedaj se naslonimo na preprosto opazko. Pri vsakem celem številu c obstajata celi števili k in r tako, da je

$$c = 19k + r \quad \text{in} \quad |r| \leq 9. \quad (4)$$

Npr.

$$\begin{aligned} 10 &= 19 \cdot 1 - 9 & \text{in} & \quad |-9| = 9 \\ -90 &= 19(-5) + 5 & \text{in} & \quad 5 < 9 \end{aligned}$$

Število k in ostanek r v (4) dobimo, ko delimo c z 19; delitev izvršimo tako, da je r po absolutni vrednosti najmanjši možni ostanek.

Če je j naravno število, za 10^j iz (4) izhaja

$$10^j = 19k + r \quad \text{in} \quad |r| \leq 9. \quad (5)$$

Po množenju z 10 od tod sledi

$$10^{j+1} = 190k + 10r \quad \text{in} \quad |10r| \leq 90. \quad (6)$$

Prvi sumand na desni je deljiv z 19; zato daje 10^{j+1} pri delitvi z 19 enak najmanjši absolutni ostanek kot $10r$; ker pa je število $10r$ v primerjavi z 10^{j+1} majhno, njegov ostanek pri delitvi z 19 hitreje najdemo.

Vpeljimo namesto (5) okrajšani zapis

$$10^j \equiv r \pmod{19}; \quad |r| \leq 9, \quad (7)$$

ki pomeni, da daje 10^j pri delitvi z 19 ostanek r . Enako imamo potem iz (6)

$$10^{j+1} \equiv 10r \pmod{19}; \quad |r| \leq 9. \quad (8)$$

Ko smo pri kakšnem j izračunali r v (7), je po (8) ostanek za $10r$ pri delitvi z 19 isti kot ostanek za 10^{j+1} . Začnši z $j = 1$ večamo j po naravnih številih, dokler ne pridemo do ostanka 2. Račun poteka takole:

$$\begin{array}{ll} 10 \equiv -9 \pmod{19} & 10^6 \equiv 30 \equiv -8 \pmod{19} \\ 10^2 \equiv -90 \equiv 5 \pmod{19} & 10^7 \equiv -80 \equiv -4 \pmod{19} \\ 10^3 \equiv 50 \equiv -7 \pmod{19} & 10^8 \equiv -40 \equiv -2 \pmod{19} \\ 10^4 \equiv -70 \equiv 6 \pmod{19} & 10^9 \equiv -20 \equiv -1 \pmod{19} \\ 10^5 \equiv 60 \equiv 3 \pmod{19} & \end{array} \quad (9)$$

Nadaljnjih potenc ne bomo računali. Iz zadnjih dveh relacij je namreč

$$10^8 = 19k - 2 \quad \text{in} \quad 10^9 = 19k_1 - 1$$

pri celih številih k, k_1 . Po zmnožitvi je zato

$$10^{17} = 19k_2 + 2$$

pri celem številu k_2 in zato

$$10^{17} \equiv 2 \pmod{19}. \quad (10)$$

Na isti način vidimo, da smemo zadnjo relacijo v (9) množiti s prvo, drugo, in tako naprej do sedme in pri tem ne dobimo ostanka 2. Zato je 17 res najmanjši naravni eksponent, ko drži (10).

Vrnemo se k (3) in izračunamo kvocient

$$\frac{10^{17} - 2}{19} = 5\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Po množitvi z 2 dobimo

$$x = 10\,526\,315\,789\,473\,684$$

in po (2) imamo

$$10x + 2 = 105\,263\,157\,894\,736\,842. \quad (11)$$

Ko prenesemo 2 na začetek, je res

$$210\,526\,315\,789\,473\,684 = 105\,263\,157\,894\,736\,842 \cdot 2.$$

Število, ki smo ga iskali, je osemnajstmestno in je podano v (11).

Še pripomba. Naredimo 36-mestno število m tako, da za številom (11) njegove številke še enkrat zapišemo v istem redu. Ko številko 2 s konca postavimo na začetek, ima dobljeno število vrednost $2m$. (Preveri!) Če številke iz (11) ponovimo trikrat, štirikrat in tako naprej, dobimo neskončno naravnih števil, ki se končujejo na 2 in dajo dvakratnik izhodnega števila, ko postavimo 2 na začetek. Kakšnih drugih naravnih števil s to lastnostjo ni.

Ko smo nalogo rešili, se zastavljajo razna vprašanja.

Kaj je, če namesto 2 vzamemo katero od števk $a = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$? Ali tudi sedaj obstaja takšno najmanjše naravno število, da ob premestitvi številke a s konca na začetek dobimo a -krat večje število?

Iskano število ima sedaj obliko

$$10x + a. \quad (12)$$

Namesto števila (2) nastopa število

$$a \cdot 10^n + x \quad (13)$$

in namesto enačbe (3) enačba

$$(10a - 1)x = a(10^n - a). \quad (14)$$

Tej enačbi mora x ustrezati, če naj število x zahtevano lastnostjo sploh obstaja. Ker sta števili $10a - 1$ in a tuji, mora $10a - 1$ deliti $10^n - a$. Treba je torej najti najmanjši n z lastnostjo

$$10^n \equiv a \pmod{(10a - 1)}. \quad (15)$$

Za zgled obravnavajmo $a = 4$. Iz (14) dobimo

$$39x = 4(10^n - 4) \quad (16)$$

in (15) preide v

$$10^n \equiv 4 \pmod{39}. \quad (17)$$

Za potence števila 10 računamo najmanjše absolutne ostanke pri delitvi z 39; podobno kot v (9) najdemo

$$10 \equiv 10 \pmod{39}$$

$$10^2 \equiv 100 \equiv -17 \pmod{39}$$

$$10^3 \equiv -170 \equiv -14 \pmod{39}$$

$$10^4 \equiv -140 \equiv 16 \pmod{39}$$

$$10^5 \equiv 160 \equiv 4 \pmod{39}$$

Najmanjši n v (16) in (17) je torej $n = 5$. Iz (16) je

$$x = \frac{4(10^5 - 4)}{39} = 4 \cdot 2\,564 = 10\,256$$

in zaradi (12) dalje

$$10x + 4 = 102\,564. \quad (18)$$

To število res izpolni zahtevo, saj je

$$410\,256 = 102\,564 \cdot 4.$$

Če ponovimo števke števila (18) dvakrat, trikrat in tako naprej, pridemo do vseh naravnih števil, ki pri prenosu števke 4 na začetek dajejo štirikratnik prvotne vrednosti.

Ko vzamemo $a = 8$, najdemo iz (14) in (15) najmanjše naravno število

$$1\,012\,658\,227\,848, \quad (19)$$

ki pri prestavitvi števke 8 na prvo mesto daje osemkrat večje število; saj je

$$8\,101\,265\,822\,784 = 1\,012\,658\,227\,848 \cdot 8.$$

S ponavljanjem skupine števk iz (19) dobimo vsa naravna števila, ki se tako obnašajo.

Tudi za $a = 3, 5, 6, 7, 9$ rešitev obstaja. Do nje pridemo iz (15) in (14) na isti način kot v zgornjih primerih. Za vsako od teh števk pa so najmanjša števila, ustrezajoča naši zahtevi, že precej velika. Navedimo jih po vrsti

$$\begin{aligned} t &= 1\,034\,482\,758\,620\,689\,655\,172\,413\,793 \\ u &= 102\,040\,816\,326\,530\,612\,244\,897\,959\,183\,673\,469\,387\,755 \\ v &= 1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966 \\ y &= 1\,014\,492\,753\,623\,188\,405\,797 \\ z &= 10\,112\,359\,550\,561\,797\,752\,808\,988\,764\,044\,943\,820\,224\,719 \end{aligned} \quad (20)$$

Po premestitvi zadnje števke na prvo mesto dobimo vsakič tolikokrat večje število, kot pove prenesena števka; torej $3t$, $5u$, $6v$, $7y$, $9z$. Res je npr.

$$7\,101\,449\,275\,362\,318\,840\,579 = 7y.$$

Poleg števil t , u , v , y , z obstaja še neskončno od njih večjih števil, ki se pri prenosu zadnje števke na začetek obnašajo tako kot t , u , v , y , z . Do njih pridemo, ko v posameznem od števil (20) ves sklop števk ponavljamo.

Ugotovili smo, da zmeraj obstajajo števila, ki s prestavitvijo zadnje števke $a = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ na začetek preidejo v a -kratnik prvotne vrednosti. Kaj pa je, če prenesemo več kot eno števko s konca števila na začetek števila?

Če se število končuje z 10, ima obliko $100x + 10$, kjer je x naravno število z n mesti; število $100x + 10$ ima tako $n + 2$ mest. Ko postavimo 10 na začetek, smo pri številu $10^{n+1} + x$, ki ima seveda še zmeraj $n + 2$ mest. Toda z 10 pomnoženo število $100x + 10$ je $10(100x + 10)$; ker ima $n + 3$ mest, ne more biti enako $10^{n+1} + x$. Podobno velja v drugih primerih. Kotorej predstavimo sklop dveh ali več števk s konca števila na njegov začetek, nikoli ne dobimo števila, ki bi bilo enako prvotnemu številu pomnoženem s številom, ki ga določajo prestavljene števke.

Jože Grasselli

ŠTEVILSKI UGANKI – Rešitev s str. 226

S prvo nalogo hitro opravimo, pri drugi je nekaj več dela z iskanjem števil v zadnjih dveh vrsticah. Obe nalogi sta rešljivi enolično. Za enoličnost rešitve druge naloge je odločilen trimestni rezultat računa v tretji vodoravni vrstici. Če bi bil ta rezultat dvomesten, bi dobili kar devet različnih rešitev.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 1 \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 9 & 9 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & 8 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 7 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 9 & 9 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 4 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 9 \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 9 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 8 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 9 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 9 & 9 \\ \hline \end{array}$$

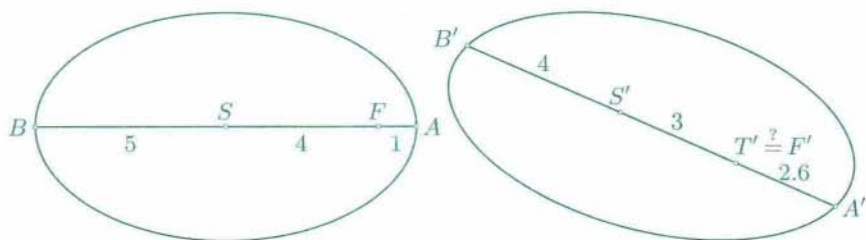
Marija Vencelj

PIRANSKO SONCE – Rešitev s str. 194

Da bi na vprašanje, zastavljeno ob fotografiji z naslovnice prejšnje številke Preseka lahko odgovorili, moramo najprej poiskati lego gorišča elipse na osrednjem trgu v Piranu. Po izmerjenih podatkih je velika polos elipse enaka 5 primernih enot in mala polos 3 take enote. Zato je gorišče elipse oddaljeno od njenega središča za $e = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ enote.

Leva elipsa na spodnji skici ima enako razmerje velike in male polos, kot elipsa na Tartinijevem trgu. Z A in B smo označili krajišča velike osi, z S središče elipse in z F njeno gorišče.

Desna slika je shematsko povzeta po fotografiji, ki jo je avtor posnel z vrha zvonika cerkve v Piranu. Z A' , B' , S' , F' smo označili slike ustreznih točk s trga in s T' sliko sredine podstavka Tartinijevega spomenika. Vpisane so tudi razdalje, izmerjene na fotografiji (v cm).



Že groba ocena zadošča za spoznanje, da spomenik ne stoji v gorišču elipse. Res:

Na sliki so dejanske razdalje s trga močno pomanjšane. Pri tem za daljice, ki leže na isti premici, velja, da je razmerje med sliko in originalom tem manjše, čimbolj je daljica oddaljena od podnožjišča kraja, s katerega je bila fotografija posneta. S fotografije razberemo, da se oddaljenosti posameznih daljic večajo v naslednjem zaporedju: AF , AS , FS , FB , SB . Če označimo $A'F' = k_1 AF$, $A'S' = k_2 AS$, $F'S' = k_3 FS$, $F'B' = k_4 FB$ in $S'B' = k_5 SB$, mora zato veljati $k_1 > k_2 > k_3 > k_4 > k_5$.

Pa naj Tartinijev spomenik stoji v gorišču elipse. Potem velja $T' = F'$ in za koeficiente dobimo vrednosti $k_1 = 2.6$, $k_2 = 1.12$, $k_3 = 0.75$, $k_4 = 0.78$, $k_5 = 0.8$. To zaporedje koeficientov pa ni padajoče. Torej Tartinijev spomenik ne stoji v gorišču elipse.

Gorišče leži nekje med Tartinijevim spomenikom in točko A .

Marija Vencelj

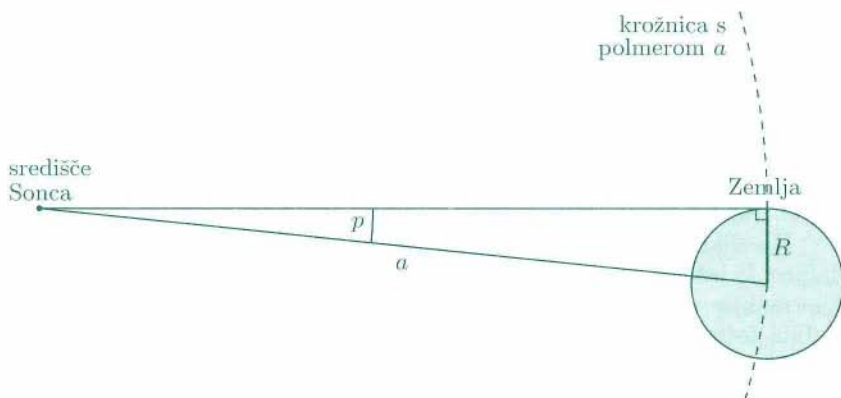
BLIŽNJE VENERINO NAVIDEZNO PREČKANJE SONCA

Okrog Sonca kroži devet planetov. Od teh krožita Merkur in Venera znotraj Zemljinega tira, zato jima pogosto rečemo notranja planeta. Značilno zanj je, da lahko pri določenih pogojih prideta med Zemljo in Sonce. Tedaj sta z Zemlje projicirana na Sonce in lahko opazujemo, kako navidezno prečkata Sončevo okroglo ploščico oziroma disk, kot se nam Sonce prikazuje na nebu. Tako opazovalec na Zemlji opazuje *navidezno prečkanje* (prehod) *planeta čez Sonce*. Z opazovanjem navideznih prečkanj notranjih planetov, predvsem Venere, pa je mogoče določiti paralakso Sonca, iz nje pa vrednost astronomske enote, to je razdalje Zemlja–Sonce.

Sončeva paralaksa je kot, v katerem bi iz Sonca, oziroma natančneje iz njegovega središča, videli Zemljin polmer $R = 6400$ km pravokotno na zorno smer (slika 1). Sončevo paralakso p in astronomsko enoto a povezuje tale enačba:

$$\frac{p}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi a}.$$

Če p izmerimo, lahko pri znanem R izračunamo a .



Slika 1. Zveza med Sončevo paralakso p in astronomsko enoto a . Enačbo lahko zapišemo tako zato, ker je R dosti manjši od a in tetivo R obravnavamo kar kot lok, ki pripada središčnemu kotu p v krožnici s polmerom a .

Ravnina Venerinega tira je rahlo (okoli $3,5^\circ$) naklonjena proti ravnini Zemljinega tira. Zato v notranji konjukciji s Soncem Venera ne leži vedno v ravnini Zemljinega tira. Včasih pa ob notranji konjukciji na svoji

poti okrog Sonca le pride v tako lego, da ležijo Sonce, Venera in Zemlja na isti premici. Takrat opazovalec na Zemlji projicira Venero na Sonce. Opazuje, kako Venera navidezno prečka Sončevo krožno ploskvico v smeri od vzhoda proti zahodu (v desno). Pri tem pojavu je Venera vidna kot majčkена okrogla temna pega, ki počasi potuje po tetivi čez svetlo Sončevo ploskvico.

Zaradi določenih značilnosti Venerinega gibanja so Venerina prečkanja mogoča le v juniju in decembru, in sicer vsakih 243 let dvakrat po dva prehoda. Med prehodoma prvega para je osem let presledka, potem pa preide več kot sto let, ko si sledita spet dva prehoda v presledku osem let. Zadnja navidezna prečkanja Venere preko Sonca sta bila 8. 12. 1874 in 6. 12. 1882, naslednja pa bosta 7. 6. 2004 in 5. 6. 2012.

Poglejmo, kako iz Venerinega navideznega prečkanja Sonca določimo njegovo paralakso.

Prečkanje Venere čez Sončev krožec opazujeta z Zemlje dva opazovalca v krajih A in B v medsebojni razdalji $|AB|$, ki je v splošnem manjša od R (slika 2). Zaradi lažjega razumevanja vzemimo, da je medsebojna razdalja kar R . Za opazovalca v kraju A Venera prečka Sončevo ploskvico po tetivi $|KL|$, za opazovalca v kraju B pa po tetivi $|MN|$, ki je vzporedna s $|KL|$. Razmik tetiv $d = |A'B'|$ vidimo iz B pod kotom δ . Isto dolžino d bi opazovalec na Veneri videl pod enakim kotom p' , pod katerim vidi dolžino $R = |AB|$. Torej je kot p' paralaksa Venere. Paralaksa Sonca je kot p pri A' , pod katerim bi opazovalec s Sonca videl polmer Zemlje R .

Kota p in δ sta zelo majhna, zato v trikotniku $A'BV$ lahko vzamemo

$$\frac{p}{\delta} = \frac{|BV|}{|A'V|} = \frac{\text{oddaljenost(Venera - Zemlja)}}{\text{oddaljenost(Venera - Sonce)}}.$$

Ker je $|A'V| = 0,723a$, je $|BV| = a - 0,723a = 0,277a$. Sledi $p = \frac{277 \cdot \delta}{723}$. Če kot δ izmerimo, lahko izračunamo p .

Kota δ ni mogoče neposredno izmeriti, saj vsak opazovalec opazuje prečkanje planeta po drugi tetivi. Kot δ pa je mogoče izračunati, če izmerimo čas prečkanja Venere po prvi in po drugi tetivi.

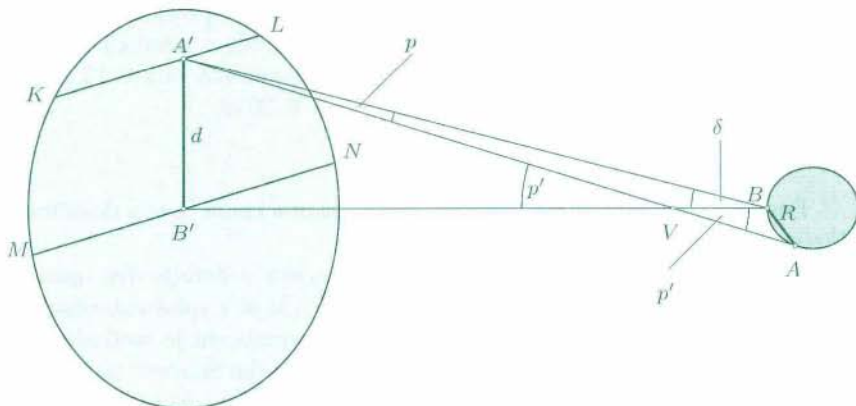
Opazovalca v A in B morata torej čim natančneje izmeriti čas, ko se temna pega Venere dotakne svetlega Sončevega diska pri K oziroma pri M , in čas, ko pri L oziroma N pega zapušča krožec. Pri $|AB| = R$ meri kot δ okoli $23''$.

Izračunamo $p = \frac{277 \cdot 23''}{723} = 8,8''$. (Če $|AB|$ ni enak R , kar običajno ni, izračunamo δ tako, da $|AB|$ izrazimo v delih polmera R .)

Tako astronomska enota meri:

$$a = \frac{R \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot p} = \frac{6400 \text{ km} \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60''}{2\pi \cdot 8,8''} = 150 \text{ milijonov km}$$

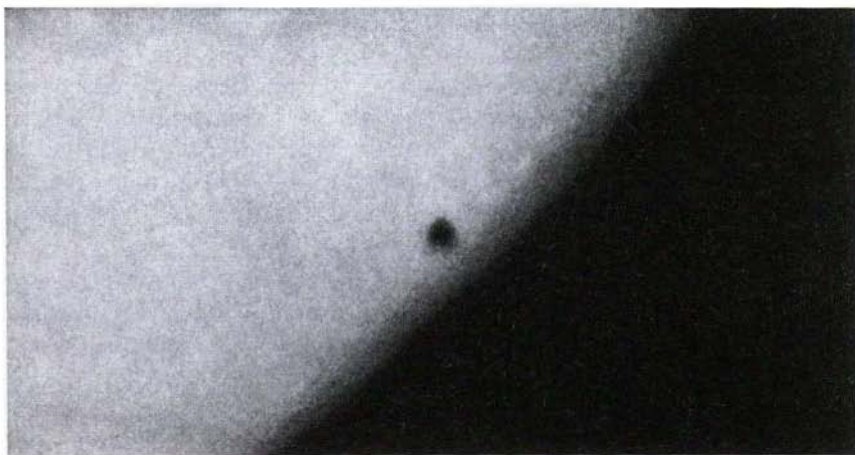
ali $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.



Slika 2. Opazovanje navideznega prečkanja Venere (V) čez Sonce iz dveh krajev A in B na Zemlji. Opazovali so prečkanja v letih 1761 in 1769 ter 1874 in 1882, naslednji prečkanji pa bosta 2004 in 2012.

Na opazovanje Venerinih prečkanj čez Sonce so se odpravile številne znanstvene ekspedicije v različne, med seboj zelo oddaljene kraje na Zemlji, da bi od tam zabeležile pojav. Prečkanje namreč lahko traja več kot štiri ure, medtem ko je razlika v izmerjenih časih prečkanja tudi pol ure. Pri opazovanju pa so se pojavile velike težave. Stiki temnega Venerinega krožca s svetlim Sončevim diskom so neostri, kar zelo otežuje natančno merjenje časa navideznega prečkanja.

Posebno slabe rezultate dobijo pri opazovanju Merkurjevih prečkanj. Zato navideznih prečkanj notranjih planetov čez Sonce *danes ne uporabljajo več za določitev astronomske enote*, čeprav je bil v preteklosti ta način zelo moden in je dal celo zadovoljivo natančnost. Vendar se tehnika astronomskih meritev razvija, napreduje. Človek si hitro izmisli kakšno izboljšavo.



Slika 3. Planet Merkur (črna pega) ob navideznem prečkanju čez Sončev disk dne 14. 11. 1954. Približno tako bo pri prečkanju vidna tudi Venera, le nekoliko "večja" bo kot črna pega na sliki. Pojav bo viden s prostim očesom. Seveda bo treba paziti na oči.

Morda nas bodo astronomi že v kratkem presenetili s kakšnim boljšim načinom opazovanja navideznih prečkanj notranjih planetov čez Sonce, saj je Venerino prečkanje dne 7. 6. 2004 pred durmi. In astronomi se na ta pojav mrzlično pripravljajo. Vsekakor bo to v zgodovini astronomije najbolj množično opazovanje prehoda Venere čez Sonce, in to ne samo z Zemlje, ampak tudi iz vesolja.

Marijan Prosén

PREMISLI IN NARIŠI

Nariši trikotnik, če poznaš dolžino stranice c , dolžino težiščnice t_a na stranico a in velikost polmera r trikotniku očrtane krožnice.

Koliko neskladnih rešitev ima naloga? Od česa je odvisen odgovor na to vprašanje?

Marija Vencelj

ANALOGNO DIGITALNA PRETVORBA

Računalniki delajo z digitalnimi podatki. Pogovarjajo se z besedami, kot so 10010000 ali 11001100. Tega jezika ne razumemo, zato imamo tipkovnico, ki, denimo, pritisk na tipko A spremeni v vzorec ali besedo 01000001, številko 1 pa v vzorec 00110001. Kar se v računalniku dogaja pomembnega za nas, pove računalnik prek zaslona. Tudi tja pošilja računalnik sporočila v svojem jeziku.

Tipkovnico in zaslon smo si oblikovali po meri, da bi nam bilo komuniciranje čim lažje. Tipkovnica prevaja naše znake v sporočila, ki jih razume računalnik, monitor pa napravi računalnikova sporočila razumljiva nam.

Marsikdaj pa si želimo, da bi bil računalnik bolj vsestranski. Namesto da bi se pogovarjal le z nami, bi se morda sam ozrl naokoli. Zakaj bi mu vtipkovali, da je temperatura v sobi 18°C ? Če zna danes vsak računalnik sam pogledati na koledar in na uro, zakaj ne bi gledal še na termometer? Ura in koledar sta v računalnik že vgrajena; morda termometra, barometra ali kakšnega drugačnega merilnika res ne gre vgrajevati v prav vsak računalnik, marsikdaj pa bi nam prišlo prav, da bi znal računalnik tudi meriti. Naučimo ga!

Potrebujemo torej merilnik temperature. Običajni termometer ne bo dober, saj računalnik ne zna prebrati, do kje se je v cevki povzpelo živo srebro. Bolj pripraven bo termometer z električnim izhodom. Termometer LM335, kapsula s tremi žicami, ki ga lahko poceni kupimo, daje npr. na izhodu po 10 mV za vsako stopinjo nad absolutno ničlo. Pri sobni temperaturi 20°C , kar je 293 K, bo na izhodu napetost 2930 mV ali 2,93 V. Pravimo, da je naša meritev analogna. Napetost, ki jo daje čutilo, oponaša merjeno količino. V našem primeru je to temperatura.

S takim podatkom računalnik nima kaj početi, zato potrebujemo enoto, ki prevede napetost v ustrezni vzorec enic in ničel. Enoti pravimo analognodigitalni pretvornik, postopku pa analognodigitalna pretvorba. Tak pretvornik kaže slika 1. Vhodni signal je v našem primeru 2,93 V, vzorec



Slika 1. Električni termometer LM335 daje napetost 2,93V kot odgovor na temperaturo 293K. Analogno digitalni pretvornik odgovori z vzorcem 010.

010, kar po dogovoru s slike 2 ustreza napetosti od 2 do 3 V, pa se pojavi na treh izhodnih žicah.¹ Vzorec, ki ga sestavljajo le trije zaporedni dvojiški podatki, je kratek. S tremi biti, kar pomeni največ trimestna dvojiška števila, seveda temperature ne moremo posebno natančno izraziti. Imamo le osem možnosti, s katerimi povemo številke od 0 do 7. Za večjo natančnost bomo potrebovali več bitov: osem, deset, morda celo štirinajst.

Kaj je v škatlici z napisom analogno-digitalni pretvornik? Čeprav ne obvladamo elektronike, nas vseeno zanima, kako pretvarjamo analogne signale v digitalne.

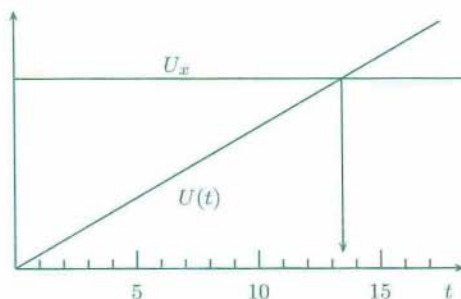
Rešitev je cela kopica. Oglejmo si prvo!

Imamo neznano napetost U_x ; ob začetku meritve pa ustvarimo enakomerno rastočo napetost $U(t)$, kot kaže slika 3. Sprožimo uro štoparico in čakamo, da sta obe napetosti enaki. Čim večja je neznana napetost U_x , tem dlje traja, da rastoča napetost doseže napetost U_x , in tem več naštejemo do trenutka, ko se izenačita. Rezultat štetja, ki ga dobimo v digitalni obliki, recimo 7 ali 12, je kar digitalni zapis napetosti U_x . Ker pa moramo rezultat povedati računalniku, štejemo dvojiško: 0000, 0001, 0010, 0011 itd.

Imamo torej idejo za prvi pretvornik, ne vemo pa še, kako bi ga urešili s pomočjo elektronike. Škatla, ki je analogno-digitalni pretvornik, bo najbrž vsebovala več povezanih manjših škatel, od katerih bo vsaka opravljala razmeroma preprosto nalogo. Potrebujemo generator sunkov, ki se ponavljajo v enakomernih presledkih. Takemu generatorju pravimo običajno ura (slika 4). Sunke prešteva dvojiški števec, kadar mu to velimo. V ta namen ima števec poleg števnega vhoda tudi kontrolni vhod.

U_x [V]	
7	111
6	110
5	101
4	100
3	011
2	010
1	001
0	000

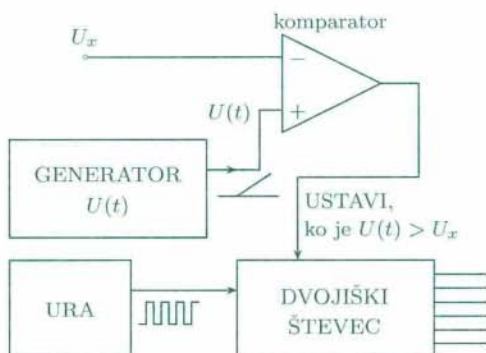
Slika 2. Odzivi pretvornika na različne vhodne napetosti.



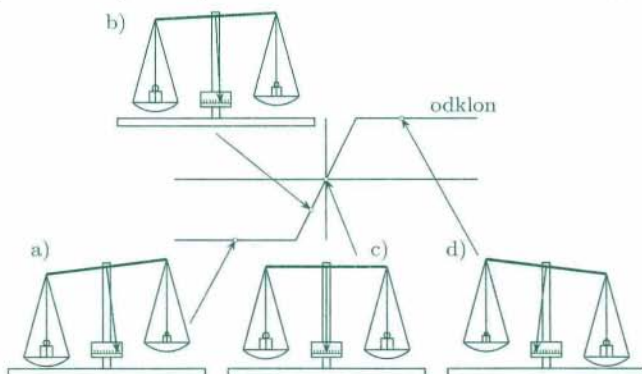
Slika 3. Preštelimo do 13, preden je napetost $U(t)$ dosegla U_x .

¹ 0 in 1 so le simbolični zapisi električnih signalov. Na žici, kjer je signal 0, bi lahko izmerili napetosti od 0 do 0,3 V; na žici, kjer je signal 1, pa bi bile napetosti od 3 do 5 V.

Kadar je, vzemimo, kontrolni vhod pri napetosti nič, števec šteje, kadar pa je na kontrolnem vhodu napetost, ki pomeni logično 1, števec miruje. Kdaj naj števec šteje, oz. kdaj naj počiva, odloča vezje, ki mu pravimo *komparator*. To je neke vrste tehtnica, ki primerja napetosti U_x in $U(t)$ in pove, katera od njiju je večja. Komparator se torej obnaša kot zelo občutljiva lekarniška tehtnica: če je ena stran le malo težja od druge, se skodelica na težji strani prevesi do tal, kjer obsedi (slika 5).



Slika 4. Analogno digitalni pretvornik sestavlja več preprostejših enot.



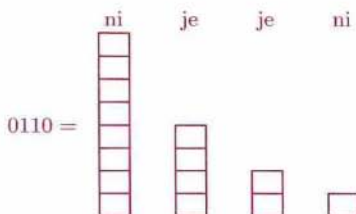
Slika 5. Komparator primerja $U(t)$ in U_x : a) $U(t)$ več kot U_x , b) $U(t)$ le malo več kot U_x , c) $U(t)$ enako U_x , d) $U(t)$ manj kot U_x .

Naša analogno-digitalna pretvorba traja precej manj kot pa opis. Kljub temu je fizikom marsikdaj predolga. Čas pretvorbe je odvisen od tega, kako hitro zmoredemo šteti. Če je perioda ure tisočinko sekunde in če bi radi svoje analogne rezultate prevedli v trimestno decimalno število (kar ustreza deset bitnemu dvojiškemu številu), potem traja pretvorba celo sekundo. Seveda je lahko ura dosti hitrejša, saj so elektronski števeci hitrejši od nas. Najhitrejši pretvornik, ki je deloval na opisani način, je uporabljal uro s frekvenco 450 MHz. Pretvorba, ki je dajala do štirinajst bitne rezultate, pa je trajala okoli 40 milijonin sekunde. Marsikdaj je to predolgo. Kako skrajšati čas pretvorbe?

Poglejmo še enkrat svojo metodo. Pri iskanju neznanega števila x smo odgovarjali na zaporedna vprašanja: je x manjši od ena, je x manjši od dve, je x manjši od tri... Pri velikih x je bilo iskanje odgovora dolgotrajno.

Hitrejša pot do neznanega števila x (ki naj bo tu kvečjemu 15) je naslednja. Najprej si osvežimo, kaj pomeni binarni zapis 0110. Naše število 0110 ne premore osmice, sestavljata ga pa štirica in dvojka, ravno tako ne vsebuje nobene enice (slika 6):

$$0110 = 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1.$$



Slika 6. Vzorec 0110 je navodilo, kako sestavimo število 6 iz gradnikov, vrednih 1, 2, 4 in 8.

Spet bomo skušali sestavo neznanega števila dognati tako, da postavljamo vprašanja. Začeli bomo z osmico. Je x večji ali enak 8? Če je odgovor pritrdilen, si zapomnimo, da neznano število vsebuje osmico. Naše neznano število je ne vsebuje. Na vprašanje, ali je x večji ali enak 4, je odgovor pritrdilen. Število x torej vsebuje 4. Zdaj dodamo štirici dvojko in se vprašamo, ali je x večji ali enak 6. Ob pritrdilnem odgovoru si zapomnimo, da število x vsebuje tudi 2. Dodamo 1 in vprašamo, ali je x večji ali enak 7. Če ni, ne vsebuje 1. Nizu pritrdilnih in nikalnih odgovorov priredimo niz enic in ničel. Rezultat je binarni zapis neznanega števila x .

Če na opisani način raziskujemo sestavo majhnih števil, ne občutimo prednosti. A pri številu do 1023 opravimo že z desetimi vprašanji, medtem ko jih je treba pri prvi metodi v povprečju 512.

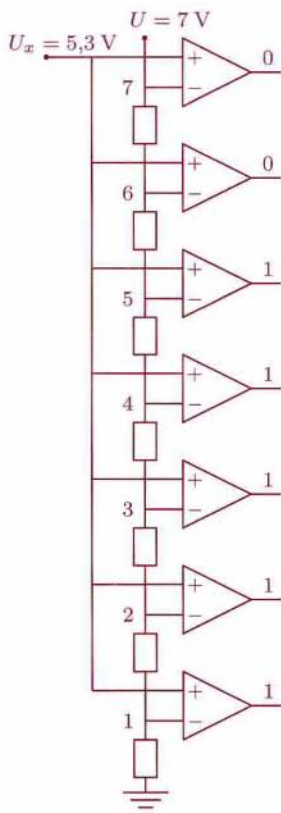
Kako elektronik porabi opisani recept za pretvorbo, si bomo ogledali morda kdaj drugič. Štirinajst bitni pretvorniki, ki delajo po novem receptu, opravijo pretvorbo v štirih do šestih mikrosekundah. Ti pretvorniki pa še zdaleč niso najhitrejši. Pri obeh dosedanjih pretvornikih smo reševali nalogo z vrsto zaporednih vprašanj eni enoti. Morda pa lahko skrajšamo pretvorbo tako, da naslovimo vsa vprašanja hkrati množici enot? Če neznano napetost U_x pokažemo sedmim komparatorjem, ki so nastavljeni na zaporedne nivoje od 1 do 7 voltov (slika 7), dobimo vseh sedem odgovorov istočasno. V našem primeru, ko je vrednost neznane napetosti 5,3 V, spodnjih pet komparatorjev pove, da je neznana napetost večja, zgornja dva pa, da ni večja. Ko pripišemo potrdilnim odgovorom vrednost 1, nikalnim pa vrednost 0, je skupek odgovorov 1111100.

Novo število pa ni posebno prikladno – predolgo je. Tega se zavemo dosti bolj, če si predstavljamo osem bitni pretvornik, kjer bi se v odgovoru zvrstile najprej enice, ki jim sledijo ničle; vseh skupaj 255. Do mnogo krajšega dvojiškega zapisa bi prišli, če bi prešteli vse enice. Vendar bi tako spet izgubili čas, ki smo ga pridobili. Do sem je trajala pretvorba namreč le 5 do 10 nanosekund ($5 \cdot 10^{-9}$ s). Poiskati bo treba drugačno rešitev. Potrebujemo prevajalnik, ki bo prevajal sedem bitne vzorce v tri bite:

0000000 naj da 000
 1000000 naj da 001
 ⋮
 in
 1111111 naj da 111.

Prevajalnik bo škatla, v katero bo vodilo sedem žic, iz nje pa tri (slika 8). Seveda pa s tremi biti ne bomo zadovoljni, osmih bi bili bolj veseli. Kaj pa nam ponuja tržišče? Trudimo se, da spravimo čim več v eno samo integrirano vezje. Tako je naš novi analogno-digitalni pretvornik drobceno vezje, ki vsebuje vse naštetje elemente, to je 255 komparatorjev, uporovno verigo in prevajalnik. Celotno osem bitno pretvorbo opravi v 20 do 30 ns (20 do $30 \cdot 10^{-9}$ s).

Smo s tem prišli do konca? Ne! Spoznali smo le načela, po katerih delajo nekateri analogno-digitalni pretvorniki. Kako napraviti števec, kako napraviti komparator, kako sestaviti prevajalnik, ki prevaja dolge vzorce v binarna števila – o tem pa morda kdaj drugič.



Slika 7. Vezje v eni sapi pove, da je neznana napetost večja od 5 V, pa manjša od 6 V.



Slika 8. Prevajalnik, ki prevaja dolge vzorce v binarna števila.

ELEKTRONI IN VRZELI V POLPREVODNIKU S PRIMESJO

Sestavek v 2. številki Preseka je govoril o polprevodniku, ko je električni tok, ki teče po njem, odvisen samo od lastnosti polprevodnika in nič od tujih atomov v polprevodniku. V kristalu polprevodnika je med prevodnim in valenčnim pasom energijska špranja z razmeroma majhno širino, npr. $\frac{2}{3}$ elektronvolta pri germaniju. Pri zelo nizki temperaturi je valenčni pas zaseden in prevodni pas nezaseden. Ni nosilcev, ki bi lahko potovali po kristalu, in ni toka, ko na kristal pritismo napetost. Pri zelo nizki temperaturi se polprevodnik vede kot izolator. Pri sobni temperaturi pa maloštevilni elektroni od atomov, ki nihajo v kristalu okoli ravnovesnih leg, dobijo dovolj energije, da preidejo iz valenčnega pasu preko špranje v prevodni pas. V valenčnem pasu ti elektroni zapustijo nezasedena enoelektronska stanja, ki jih opišemo kot vrzeli. Prevodniški elektroni in vrzeli prispevajo k toku, če na kristal pritismo napetost. Pri sobni temperaturi polprevodnik prevaja veliko slabše kot kovina, a veliko bolje kot izolator. Gostota prevodniških elektronov je v takem polprevodniku enaka gostoti vrzeli. Toda polprevodniki ne zmorejo samo tega, kar smo opisali kot lastno prevajanje.

Zdaj je čas, da opišemo druge posebnosti polprevodnikov. Mislimo si, da talini zelo čistega germanija dodamo kot *primes* malo arzena, desnega sosedu v periodni preglednici elementov. S tujo besedo rečemo, da germanij *dopiramo* z arzenom (dope v angleščini pomeni lak ali mamilo). Pripravniki slovenski besedi "začimba" in "začiniti", ki ju je predlagal profesor Ivan Kuščer, se še nista prijeli.

Atom germanija ima štiri valenčne elektrone, ki so na jedro šibkeje vezani kot preostalih 28 elektronov v krogelno simetrični sredici. Elektroni v sredici skupaj z jedrom atoma sestavljajo ion germanija s štirimi pozitivnimi osnovnimi naboji Ge^{IV} . V kristalu germanija so ti ioni urejeni v prostorsko mrežo, v kateri vsak ion obdajajo štirje sosednji ioni, kot oglišča tetraedra obdajajo njegovo središče. Po dva in dva valenčna elektrona, lahko si mislimo, da po eden od vsakega sosedu, se gibljeta v bližini zveznice sosedov in prispevata k vezi atomov v kristalu. Od nihajočega iona Ge^{IV} dobi kateri od valenčnih elektronov dovolj energije, da zapusti vez in odtava po kristalu. V vezi zapusti vrzel, ki jo po vrsti zasedejo drugi elektroni, in tako vrzel tudi odtava po kristalu. Ta ponazoritev dopolni prejšnjo ponazoritev z enoelektronskimi stanji.

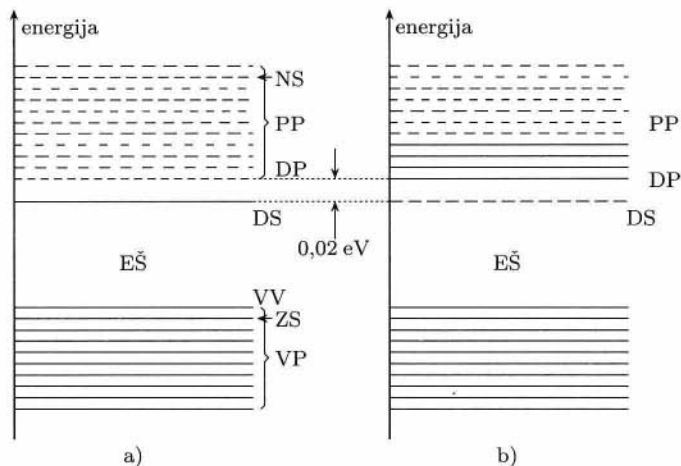
Atomi arzena, ki ga dodamo talini germanija, se navzven le malo razlikujejo od atomov germanija in ob strjevanju v kristalu zasedejo mesta, ki bi jih v čistem germaniju zasedli atomi germanija. Atomov arzena je v

kristalu veliko manj kot atomov germanija in mesta med atomi germanija zasedejo po naključju. Tu jih je več, tam manj, tako da niso urejeno razporejeni po prostoru. Elektroni v njih imajo, podobno kot v atomih v plinu, enoelektronska stanja z ostro določeno energijo.

Atom arzena ima pet valenčnih elektronov. V kristalu germanija se štirje od njih vgradijo v vezi s štirimi sosednjimi ioni Ge^{IV} . Peti valenčni elektron je nekakšno "peto kolo". Okoli arzenovega iona in štirih valenčnih elektronov se giblje podobno kot elektron okoli jedra v vodikovem atomu. Razlika je v tem, da se giblje elektron v vodikovem atomu po praznem prostoru, peti valenčni elektron v atomu arzena pa po kristalu germanija. To približno opišemo tako, da upoštevamo manjšo silo med naelektrenima delcema v kristalu (v kristalu $e_0^2/4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$ namesto $e_0^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ v vakuumu, če je e_0 osnovni naboj, ϵ_0 influenčna konstanta, r razdalja med delcema in $\epsilon = 16$ dielektričnost germanija). Poleg tega elektronu priredimo efektivno maso, ki je manjša od mase prostega elektrona. Zaradi tega je peti valenčni elektron v kristalu germanija veliko šibkeje vezan na atom arzena kot elektron na atom vodika. Elektronu v vodikovem atomu moramo dovesti vsaj ionizacijsko energijo 13,6 elektronvolta, da ga odtrgamo od atoma, za peti valenčni elektron v atomu arzena v kristalu germanija pa zadostujeta 0,02 elektronvolta.

Pri zelo nizki temperaturi so peti valenčni elektroni v kristalu germanija vezani vsak na svoj atom arzena in ne prispevajo k prevajanju (slika 1a). Pri sobni temperaturi pa se odtrgajo od atomov in preostanejo pozitivni ioni As^+ , ki ostanejo vezani na svoja mesta v kristalu. Peti valenčni elektroni pa zasedejo enoelektronska stanja ob dnu prevodnega pasu in kot prevodniški elektroni sodelujejo pri prevajanju (slika 4a). Pri sobni temperaturi so ti prevodniški elektroni v prevodni pas prešli iz enoelektronskih stanj v atomih arzena, tako imenovanih *primesnih stanj*. V valenčnem pasu niso zapustili nezasedenih enoelektronskih stanj, zato v tem primeru v kristalu ni vrzeli (slika 1b). Gostota prevodniških elektronov ni enaka gostoti vrzeli kot pri lastnem prevajanju. Prevodniški elektroni so *večinski nosilci naboja* in kristal je *polprevodnik n*, ker so večinski nosilci negativni. Stanja primesi imenujemo *donorska stanja*, ker "darujejo" elektrone v prevodni pas. Ta stanja imajo ostro določeno energijo, kar priča, da zadevajo posamične atome na njihovih mestih v kristalu.

Ne bi bilo prav, ko bi zamolčali, da se kot pri lastnem prevajanju tudi v polprevodniku *n* pojavijo vrzeli in prevodniški elektroni. Toda gostota vrzeli in njej enaka gostota dodatnih prevodniških elektronov je veliko manjša kot gostota prevodniških elektronov iz stanj primesi. Vrzeli so v tem primeru *manjšinski nosilci naboja*.



Slika 1. Enoelektronska stanja v polprevodniku n pri zelo nizki temperaturi (a) in pri sobni temperaturi (b). DP dno prevodnega pasu PP, VV vrh valenčnega pasu VP, EŠ energijska špranja. Pri zelo nizki temperaturi so v valenčnem pasu vsa enoelektronska stanja zasedena (ZS) in v prevodnem pasu nezasedena (NS). Enoelektronska stanja primesi, v tem primeru donorska stanja DS 0,02 elektronvolta pod dnom prevodnega pasu, so pri zelo nizki temperaturi zasedena, pri sobni temperaturi pa nezasedena. Donorskih stanj je toliko kot atomov donorja, njihova energija pa je ostro določena.

Ni težko izračunati prevodnosti polprevodnika n. V približku smemo vzeti, da pri sobni temperaturi vsak atom arzena v kristalu germanija prispeva svoj peti valenčni elektron v prevodni pas, in zanemariti prispevek manjšinskih nosilcev. Po zgledu kovin je

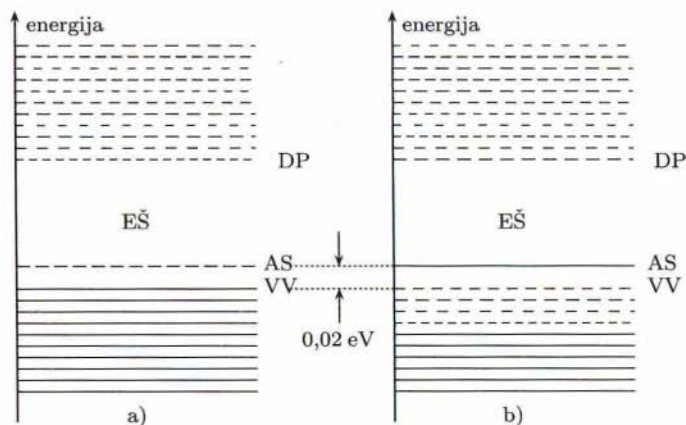
$$\frac{1}{\zeta_n} = e_0 \beta \frac{N_d}{V},$$

pri čemer je N_d/V gostota atomov arzena v kristalu germanija, enaka gostoti prevodniških elektronov N/V , β je gibljivost prevodniških elektronov. Prevodnost polprevodnika n lahko spreminjamo na širokem območju s tem, da spreminjamo gostoto primesi. Prevodnost se bolj ali manj poveča, če germaniju ali siliciju dodamo več ali manj arzena oz. kakega kemijsko sorodnega petvalentnega elementa, npr. fosfora ali antimona.

Navedimo zgled. V kubičnem decimetru germanija z maso 5,5 kg naj bo $1,6 \cdot 10^{18}$ atomov arzena s skupno maso 0,2 miligrama. Po enačbi je prevodnost tega polprevodnika n približno $100 (\Omega \text{ m})^{-1}$. Kilogramu germanija moramo v tem primeru dodati samo 0,037 miligrama arzena. To je malo v primeri z masami, s katerimi imajo opraviti v lekarni.

Na začetku smo nekatere pojave pri prevajanju kovin opisali s pozitivno trdnino in negativno tekočino. Tak opis lahko uporabimo tudi za polprevodnik n pri sobni temperaturi. Pozitivno trdnino tvorijo pozitivni ioni petvalentne primesi v kristalu polprevodnika, negativno tekočino pa elektroni v prevodnem pasu.

To je prvi del zgodbe. V drugem delu nastopi namesto desnega sosedu v periodni preglednici elementov levi sosed. Germaniju v talini dodamo majhno primes galija. Atom galija se navzven le malo razlikuje od atoma germanija. Kar smo prej ugotovili za atome arzena v kristalu germanija, velja tudi za atome galija. Za razliko od atoma arzena pa ima atom galija tri valenčne elektrone, ki se v kristalu germanija vgradijo v vezi s sosednjimi ioni Ge^{IV} . V treh vezeh sta po dva elektrona, v četrti vezi pa je namesto dveh elektronov en sam. Nepopolni vezi ustreza enoelektronsko stanje primesi z ostro določeno energijo 0,02 elektronvolta nad vrhom valenčnega pasu. Pri zelo nizki temperaturi to stanje primesi ni zasedeno. Tedaj so vsa enoelektronska stanja valenčnega pasu zasedena, vsa enoelektronska stanja prevodnega pasu in stanja primesi pa nezasedena (slika 2a). V tem primeru polprevodnik ne prevaja. Pri sobni temperaturi pa elektroni v enoelektronskih stanjih pod vrhom valenčnega pasu dobijo dovolj energije, da zasedejo enoelektronska stanja primesi (slika 2b). Pri tem enoelektronska stanja pod vrhom valenčnega pasu, ki jih izprazniijo, opišemo z vrzelmi.



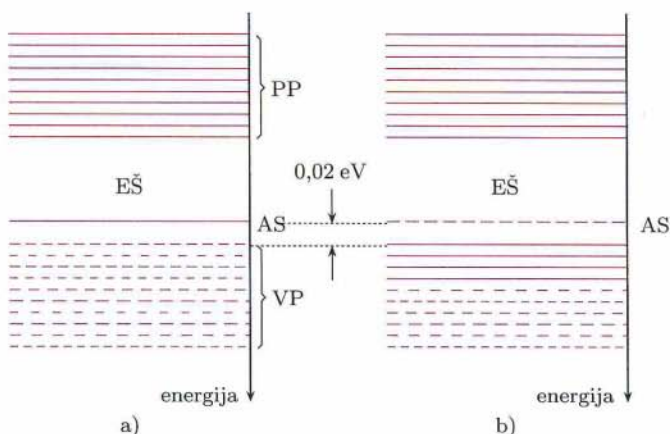
Slika 2. Enoelektronska stanja v polprevodniku p pri zelo nizki temperaturi (a) in pri sobni temperaturi (b). Znaki imajo enak pomen kot enaki znaki na sliki 1. Enoelektronska stanja primesi, v tem primeru akceptorska stanja AS 0,02 elektronvolta nad vrhom valenčnega pasu, so pri zelo nizki temperaturi nezasedena, pri sobni temperaturi pa zasedena. Akceptorskih stanj je toliko kot atomov akceptorjev, njihova energija pa je ostro določena.

Poglejmo zdaj to še s stališča vrzeli. Pri zelo nizki temperaturi je na atom galija vezana vrzel, ki se giblje okoli njega podobno kot peti valenčni elektron v atomu arzena (slika 3a). Vezana vrzel ne more sodelovati pri prevajanju. Pri sobni temperaturi pa vrzel preide pod dno valenčnega pasu, postane prosta in iz atoma galija nastane ion Ga' z enim negativnim osnovnim nabojem. Za prehod potrebna energija meri okoli 0,02 elektronvolta (slika 3b). Pri sobni temperaturi so vrzeli pri atomih galija zasedene. Atomi galija so spremenjeni v ione Ga' in ne zapustijo svojega mesta v kristalu (slika 4b).

V prejšnjem zapisu smo poudarili, da so prevodniški elektroni in vrzeli kvazi delci. V prejšnjem odstavku pa smo spoznali, da velikokrat izhajamo od opisa z elektroni in vrzeli zapostavimo ter jih poskušamo obravnavati zgolj kot primanjkljaj elektronov. Vrzeli bi morali v vseh pogledih opisati na enaki podlagi kot elektrone. Morali bi vpeljati *enovrzelna stanja*, ki so zaradi Paulijeve prepovedi nezasedena ali zasedena z eno vrzeljo. Enovrzelna stanja so razporejena na energijske pasove in na prepovedane pasove. V vseh pogledih bi morali vrzeli obravnavati podobno, kot obravnavamo elektrone, le da energijo vrzeli vzamemo za pozitivno v drugi smeri kot energijo elektronov. Kar je prevodniškim elektronom dno prevodnega pasu, je vrzelim vrh valenčnega pasu. Ta prijem, ki ni v navadi, si v Preseku z drugo barvo lahko privoščimo.

Vrzeli pod vrhom valenčnega pasu nastanejo, ne da bi elektroni prešli v prevodni pas, zato v tem primeru v kristalu ni prevodniških elektronov. Gostota vrzeli ni enaka gostoti prevodniških elektronov kot pri lastnem prevajanju. Vrzeli so večinski nosilci naboja in kristal je *polprevodnik p*, ker so večinski nosilci pozitivni. Enoelektronska stanja primesi imenujemo *akceptorska stanja*, ker "sprejmejo" elektrone iz valenčnega pasu. Ta stanja imajo ostro določeno energijo, kar priča da zadevajo posamične atome na njihovih mestih v kristalu.

Ne bi bilo prav, ko bi zamolčali, da se tudi v polprevodniku p pojavijo prevodniški elektroni in vrzeli kot pri lastnem prevajanju. Toda gostota prevodniških elektronov in njej enaka gostota dodatnih vrzeli je veliko manjša kot gostota vrzeli iz stanj primesi. V tem primeru so prevodniški elektroni manjšinski nosilci naboja.



Slika 3. Enovrzelna stanja v polprevodniku p pri zelo nizki temperaturi (a) in pri sobni temperaturi (b). Ta slika je samo v opis z vrzeli prevedena slika 2. Pri zelo nizki temperaturi so v prevodnem pasu vsa enovrzelna stanja zasedena (ZS') in v valenčnem pasu vsa enovrzelna stanja nezasedena (NS'). Enovrzelna stanja so narisana v barvi za razliko od enoelektronskih stanj, ki so narisana črno. Enovrzelna stanja smo vpeljali samo v opozorilo, da prevladujoči opis zapostavlja vrzeli, ki so enako kot prevodniški elektroni kvazi delci.

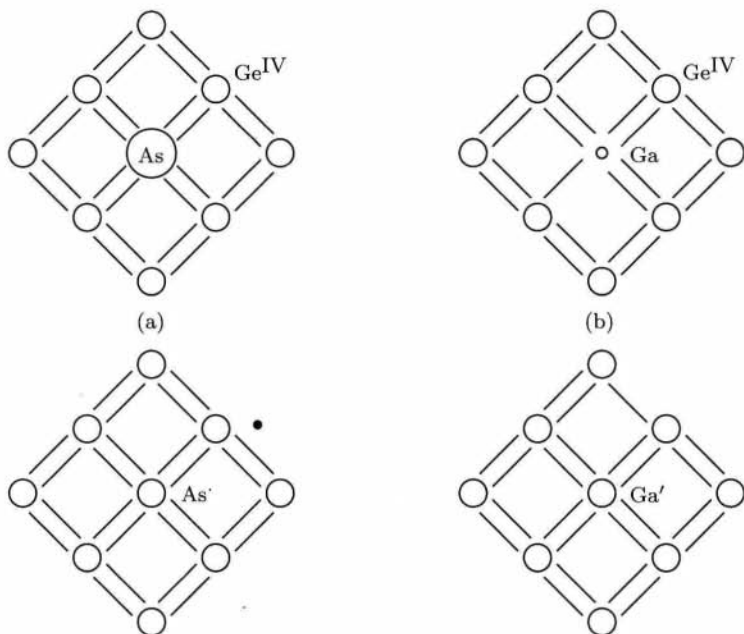
Prevodnost polprevodnika p je pri sobni temperaturi v približku, v katerem vsak atom galija v kristalu germanija sprejme en elektron in če zanemarimo prispevek manjšinskih nosilcev:

$$\frac{1}{\zeta_p} = e_0 \beta_v \frac{N_a}{V},$$

pri čemer je N_a/V gostota atomov galija v kristalu germanija, enaka gostoti vrzeli N/V , β_v je gibljivost vrzeli.

Tudi pri polprevodniku p lahko prevodnost spreminjamo na širokem območju s tem, da spreminjamo gostoto primesi. Prevodnost se poveča bolj ali manj, če germaniju ali siliciju dodamo več ali manj galija oz. kakega drugega podobnega trivalentnega elementa, npr. bora ali indija.

Tudi tu navedimo zgled. V kubičnem decimetru germanija z maso 5,5 kg naj bo $1,6 \cdot 10^{18}$ atomov galija s skupno maso 0,19 miligrama. Po enačbi je prevodnost tega polprevodnika p $46 (\Omega \text{ m})^{-1}$. Kilogramu germanija je treba v tem primeru dodati samo 0,034 miligrama galija. Za bralce Preseka, ki bi želeli račun ponoviti, navedimo po vrsti relativne atomske mase galija, germanija in arzena: 69,7; 72,6; 74,9. V germaniju meri gibljivost elektronov $0,38 \text{ m}^2/\text{Vs}$ in gibljivost vrzeli $0,18 \text{ m}^2/\text{Vs}$.



Slika 4. Nazorna slika polprevodnika n (a) in polprevodnika p (b) pri zelo nizki temperaturi (zgoraj) in pri sobni temperaturi (spodaj). Pri zelo nizki temperaturi so v kristal polprevodnika vezani atomi petvalentnega elementa (As) ali atomi trivalentnega elementa (Ga). Pri sobni temperaturi atomi petvalentnega elementa oddajo elektrone v prevodni pas in kot pozitivni ioni (As^+) ostanejo vezani na svoja mesta v kristalu polprevodnika, atomi trivalentnega elementa pa sprejmejo elektrone in kot negativni ioni (Ga^-) ostanejo vezani na svoja mesta v kristalu polprevodnika. Prevodniški elektroni v polprevodniku n in vrzeli v polprevodniku p se gibljejo po kristalu in sodelujejo pri prevajanju.

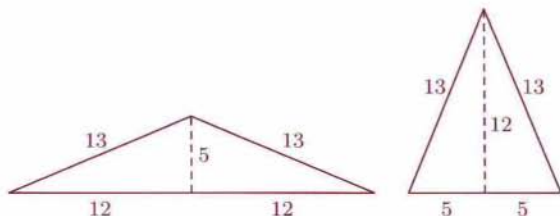
Nekatere pojave pri polprevodniku p pri sobni temperaturi lahko za silo opišemo z negativno trdnino in pozitivno tekočino. Negativno trdnino tvorijo negativni ioni trivalentne primesi v kristalu polprevodnika, pozitivno tekočino pa vrzeli.

V naslednjem prispevku bomo govorili o najpreprostejših *polprevodniških elementih*, v katerih je del kristala polprevodnik n in drugi del polprevodnik p. Taki polprevodniški elementi so korenito vplivali na naše življenje. Dandanes bi si ga namreč težko zamislili brez računalnikov, mobilnih telefonov, radijskih in televizijskih sprejemnikov, kasetofonov in podobnih naprav.

Janez Strnad

TRIKOTNIKA – Rešitev s str. 222

Trikotnika imata enaki ploščini, kar je neposredno razvidno s skice. Velikosti obeh višin izračunamo s Pitagorovim izrekom.



Dragoljub M. Milošević

KROŽNI DIAGRAM – Rešitev s str. 194

Da določimo deleže, ki pripadajo posameznim elementom seznama, moramo poznati vsoto elementov seznama. Izračunamo jo z naslednjim rekurzivnim ukazom:

```
TO vsota :s
; Vrne vsoto elementov seznama s. Prazen seznam ima vsoto 0.
  IF EMPTY? :s [OUTPUT 0]
  OUTPUT (FIRST :s) + (vsota BF :s)
END
```

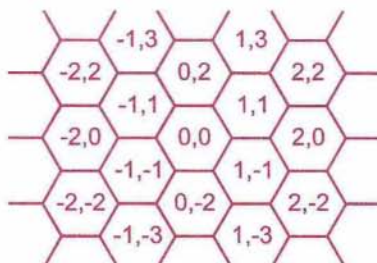
Diagram narišemo tako, da se v zanki sprehodimo skozi seznam vrednosti in vsakič narišemo prvo stranico izseka, ki pripada tekočemu elementu, nato pa se še zasučemo za kot, ki tudi pripada temu elementu. Ta kot je enak $360^\circ \cdot \frac{x}{s}$, kjer je x tekoči element, s pa vsota elementov seznama.

```
TO diagram :s :r
; Predstavi elemente seznama s s krožnim diagramom polmera r.
  (LOCAL "dolzina "vsota)
  MAKE "dolzina COUNT :s ; Izračunamo dolžino seznama.
  MAKE "vsota vsota :s ; Izračunamo vsoto elementov seznama.
  CIRCLE :r ; Narišemo krog.
  REPEAT :dolzina [ ; Sprehod skozi seznam.
    FD :r PU BK :r PD ; Črta iz središča do oboda in vrnitev.
    RT 360 * (FIRST :s) / :vsota ; Zasuk za pripadajoči kot.
    MAKE "s BF :s ; Skrajšamo seznam.
  ]
END
```

Središče diagrama je na mestu, kjer se pred klicem ukaza nahaja želva. Diagram tudi zlahka zavrtimo, pred klicem je treba le zasukati želvo.

SATOVJE – Rešitev s str. 223

V šestkotno ravninsko mrežo vpeljemo koordinatni sistem, ki nam enolično opisuje šestkotnike. To lahko storimo na več načinov. Izberemo tistega, ki je prikazan na spodnji sliki.



Mimogrede opazimo, da smo izbrali tako oštevilčenje šestkotnikov, pri katerem obstaja šestkotnik s koordinatama x in y natanko tedaj, ko je vsota $x + y$ soda.

V izbranem koordinatnem sistemu premik v vsaki od šestih smeri spremeni eno ali celo obe koordinati. Spremembe so podane v spodnji razpredelnici:

smer	S	SV	JV	J	JZ	SZ
sprememba pri koordinati x	0	1	1	0	-1	-1
sprememba pri koordinati y	2	1	-1	-2	-1	1

Ali nas sprehoda pripeljeta do istega polja mreže, ugotovimo tako, da za vsak sprehod izračunamo koordinati šestkotnika, na katerem se sprehod konča. (Pri tem privzamemo, da sprehod začnemo "na sredini" mreže, torej na šestkotniku, ki ima obe koordinati enaki 0.) Če se izračunani koordinati za oba sprehoda ujemata, potem nas oba sprehoda pripeljeta do istega polja mreže, sicer pa ne.

Pri programiranju si bomo pomagali s pomožno funkcijo *konec*. Ta bo kot vhod dobila niz, ki opisuje sprehod, in vrnila koordinati polja, na katerega nas sprehod pripelje. Postopek poteka takole: Trenutni položaj hranimo v spremenljivkah x in y . Na začetku imata obe vrednost 0. V zanki po vrsti pregledamo vse znake niza. Če naletimo na S, povečamo y za 2; če naletimo na J, zmanjšamo y za 2. Če srečamo V ali Z, spremenimo

x za 1 (pri V povečamo, pri Z zmanjšamo), glede na prejšnji znak pa za 1 popravimo tudi y (pri J povečamo, pri S zmanjšamo). Tako, npr. zaporedje SV najprej poveča y za 2, nato pa poveča x za 1 in zmanjša y za 1. V celoti se torej x in y povečata za 1.

Zapišimo rešitev v programskem jeziku C. Ker funkcija kot rezultat lahko vrne le posamezno vrednost (s strukturami pa ne želimo delati), bomo v funkciji *konec* naračunani vrednosti x in y vrnili prek parametrov. Ker C ne pozna prenosa po naslovu (referenci), parametra najjavimo kot kazalca (naslova) celoštevilskih spremenljivk: `int *x` in `int *y`. Seveda v telesu funkcije potem spreminjamo `*x` in `*y`, pri klicu funkcije pa pred dejanska parametra postavimo `&`.

```
/* Na katero polje nas pripelje sprehod? */
void konec(char sprehod[], int *x, int *y)
{
    int i;
    char prejsnji;

    i = *x = *y = 0;
    prejsnji = ' ';
    while (sprehod[i] != '\0') {
        switch (sprehod[i]) {
            case 'S': *y += 2; break;
            case 'J': *y -= 2; break;
            case 'V': case 'Z':
                *x += (sprehod[i] == 'V') ? 1 : -1;
                *y += (prejsnji == 'S') ? -1 : 1;
        } /*switch*/
        prejsnji = sprehod[i++];
    } /*while*/
}

/* Ali nas sprehoda spr1 in spr2 pripeljeta do istega polja? */
int enaka(char spr1[], char spr2[])
{
    int x1, y1, x2, y2;

    konec(spr1, &x1, &y1);
    konec(spr2, &x2, &y2);
    return (x1 == x2) && (y1 == y2);
}
```

Isti postopek zapišimo še v programskem jeziku logo. Funkcija *konec* bo tokrat imela le en parameter (niz, ki opisuje sprehod), izračunani vrednosti x in y pa bo vrnila kot par (seznam z dvema elementoma).

Pozorni bodite tudi na uporabo ukaza IFELSE, s katerim smo nadomestili pogojni izraz iz C-ja (operator ? :).

```

TO konec :sprehod
; Na katero polje nas pripelje sprehod?
  (LOCAL "x" "y" "dolzina" "prejsnji")
  MAKE "x 0
  MAKE "y 0
  MAKE "prejsnji "| |
  MAKE "dolzina COUNT :sprehod
  REPEAT :dolzina [
    IF (FIRST :sprehod) = "S [MAKE "y :y + 2]
    IF (FIRST :sprehod) = "J [MAKE "y :y - 2]
    IF OR ((FIRST :sprehod) = "V) ((FIRST :sprehod) = "Z) [
      MAKE "x :x + IFELSE (FIRST :sprehod) = "V [1] [-1]
      MAKE "y :y + IFELSE :prejsnji = "S [-1] [1]
    ]
    MAKE "prejsnji FIRST :sprehod
    MAKE "sprehod BF :sprehod
  ]
  OUTPUT (LIST :x :y)
END

TO enaka :spr1 :spr2
; Ali nas sprehoda spr1 in spr2 pripeljeta do istega polja?
  OUTPUT EQUALP (konec :spr1) (konec :spr2)
END

```

Obe rešitvi imata nekaj pomanjkljivosti. Tako ne preverjamo pravilnosti obeh vhodnih nizov (ali sta res sestavljena le iz črk S, J, V in Z in ali je pred vsako črko V in Z res črka S ali J). Funkcija *enaka* npr. trdi, da nas sprehoda JVZ in JS pripeljeta na isto polje. Prav tako v opisih sprehodov ne upoštevamo malih črk. Zanimivo bi bilo tudi napisati ukaz v logu, ki bi narisal ravno prav veliko šestkotno mrežo in sprehod po njej, kot ga določa niz.

Martin Juvan

ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 195

Vodoravno: 1. 512, 5. 10, 6. 41, 7. 22, 8. 66, 9. 484

Navpično: 4. 616, 5. 121

Urška Demšar

KRIŽANKA “JUBILEJNO LETO NAŠEGA NAJVEČJE

	AVTOR MARKO BOKALČIČ	RUBIDUJ	PROSOJINA, TRDA BOMBAŽNA TKANINA	PESNIK SLOV. MODERNE (JOSIP)	STARO MOŠKO IME	PRINCIP	TLA V SREDNJEM SPOLJU (REDKO)	ZI Zr N
	LITER. OBDOBJE, V KATEREGA SODI							
	MOČAN KRAŠKI IZVIR, OBRH							
	NEKD. RUSKI OBRAMBNI MINISTER (PAVEL)							
	GRŠKA CRKA	KEKČEV TOVARIS						
							RUONIŠKI EKSPLOZIV	
							ZUNANJE POLJE	
* 1800 † 1849	NJEGOVA IZVIRNA BALADA	NAJLAŽJI MEZON			ION Z NEGATIVNIM NABOJEM	SKLADATELJICA VRHUNC		
		ŠAHOVSKA OTVORITEV				NAPUŠČ		
POJEDINA, GOSTUJA (KNIŽIŽNO)			NEKD. SOVJ. POLITIK (ANDREJ)					LUI TOI
			KUTINA					SL. JL (FR)
BULA, NABREK-LINA						OSNOVNI TON		
						LATINSKI VEZNIK		
AVTORICA ROMANA O NJEM (ILKA)				SREDINA RIMSKEGA MESECA			PREBIVALKA ČESKE	
				VIŠLICE			KRAJ NA PRIMOR.	
NORVEŠKI SMUČAR FURUSETH			RUSKA RAZISKOVALNA POSTAJA NA ANTARKTIKI					
			KRAJ POD KRIMOM	POGONSKO SREDSTVO				
VODJA GLASBEN. ORKESTRA							NJEGOVA PESNIŠKA OBLIKA	
							VOLČJAK	
ČRNOGOR. PESNIK IN VLADAR					NASILNA TATVINA			ANT MAH
					POSREDNI VEZNIK			
AVSTRAL. PLJVALEC THORPE			KRSTA					MESTO, KJER JE DOŠTUDIRAL PRAV
			RDEČA CVETICA MED ŽITOM				GLINA, ILOVICA	VOHA/ ORG
MANGAN		PRISPEVEK BERAČU, VBOGAJME						
		TURČLIJA						
KITICA PESMI SLOVO OD MLADOSTI						NEPLOD-NOST		
SATIRIK PETAN						GRŠKI BOG LJUBEZNI		

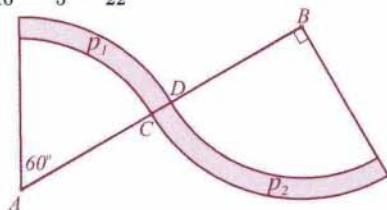
GA POETA”

ITINA ELEZA IN KLJA	OZIRALNI ZAIEMK	POSVETILO V SONET. VENCU	PRIMICOVI JULJI	NJEGOVA SATIRIČNA LEGENDA	TLA POD VODNO GLADINO	ŽILA DOVODNICA	NOVINAR BABAIČ	TOMAŽ TERČEK	NIETZCHE- JEV PRISTAŠ	ALPINISTKA BOŽIČ SKOK	POKRIVALO GLAVE
			NJGOV POKLIC								
			POSILANKA OKRETIČ								
			NJGOVA HČI								
			MATI NJGOVIH OTROK								
	A/ST. MESTO OB MURI							ZAMAŠEK			
	ANG. PISATELJ (A. A.)							MESTO NA SEVERU SICILJE			
					NASLOV						
					PRISUŠENA BLATNA KEPIKA						
			ANTON ASKERC			ANDRO OCVIRK	ALJANA JOCIF			NJGOVA PESEM, IZBRANA ZA HIMNO SLOVENJE	
			POLITIK GOŠNIK								
JVIK LAK			NJGOVA ROJ. IAS				STEZA V SNEGU				ALBERT EINSTEIN
IDOIST ANC)			ŠKOT. MOŠ- KO KRILO				JOSIP BROZ				
				OKROGLA STRA/BA S KUPOLO							
				OVČKA							
						VEČJA FRANCOSKA ALPSKA REKA					
	ARA, AVANS	ANG. REŽIS. (DAVID)				ŽIVALSKA NOGA					STARO MESTO V SREDNJI ITALII
		A/STRALSKI NOJ				NOVINAR LIPICER					
			REVNA ČETRT					MESTO, KJER JE NJGOV GROB	VESO STOJANOV		
			FIN. ARHIT. (ALVAR)					GENERAL GUTMAN			
ON NIC			TENISAČICA HUBER				ŽENA BOGA SIVE				
			ANG. SLIKAR (PAUL)				IZBOKLINA NA HRBTU				
IO					PREDEL OB GRU						
LNJ AN					RIBJA KOŠČICA						
		FR. MESTO POD SEVENI				UBITI IZR. POLITIK (JICAK)					
		4. IN 5. VOKAL				IRIDIJ					
				SLOVENSKO MESTO, KJER SE JE SOLAL							
	NJGOVE PESMI GREDO DOBRO V			SKODRANA ŽENSKA FRIZURA							

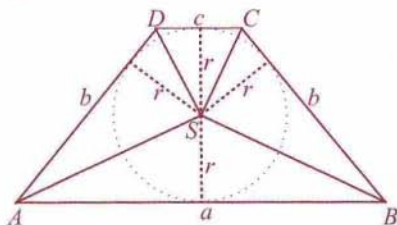
35. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 235

7. razred

1. Vrednost izraza je $8\frac{1}{2}$, iskano število pa 68.
2. Iz pogojev naloge dobimo enačbo $(\frac{x}{2} + 1000) + (\frac{x}{4} + 500) + (\frac{x}{8} + 250) + (\frac{x}{16} + 125) = x$, ki ima rešitev $x = 30000$. Mojca je na začetku imela 30000 tolarjev.
3. Označimo števca iskanih ulomkov z a in b . Tedaj je $\frac{101}{110} = \frac{22a+5b}{110}$ in $22a + 5b = 101$. Ker morata biti a in b naravni števili, je edina možnost $a = 3$ in $b = 7$; tedaj je $\frac{101}{110} = \frac{3}{5} + \frac{7}{22}$.
4. $p = p_1 + p_2 = \frac{\pi}{6}(65^2 - 55^2) + \frac{\pi}{4}(65^2 - 55^2) \doteq 1570 \text{ m}^2$.
Na cestnem ovinku je približno 1570 m^2 asfaltne prevleke.

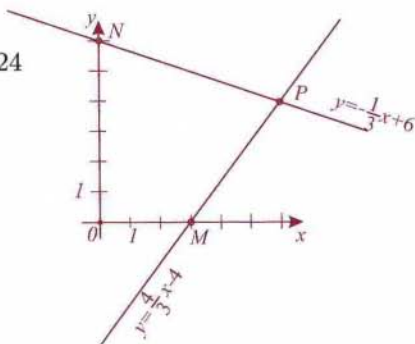


5. Če središče kroga S povežemo z oglišči trapeza $ABCD$, dobimo štiri trikotnike $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ in $\triangle DAS$, ki imajo višino r , za osnovnice pa stranice trapeza. Njihove ploščine so $p_{ABS} = \frac{ar}{2}$, $p_{BCS} = \frac{br}{2}$, $p_{CDS} = \frac{cr}{2}$ in $p_{DAS} = \frac{br}{2}$, ploščina trapeza pa zato $p_{ABCD} = \frac{r}{2}(a + 2b + c)$. Za $2r = 3 \text{ cm}$ in $p = 12 \text{ cm}^2$ velja $0 = a + 2b + c = 16 \text{ cm}$.



8. razred

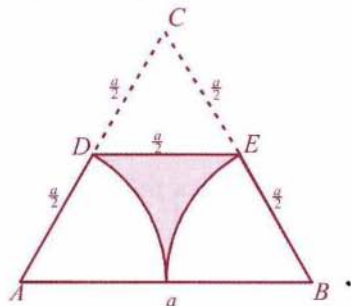
1. a) $M(3, 0)$, $N(0, 6)$, $P(6, 4)$
b) $p_{OMPN} = 6^2 - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 6}{2} = 24$
c) $\overline{MP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$



2. $S = 57 + 59 + 61 + \dots + 359 + 361 + 363 = (57 + 363) + (59 + 361) + \dots + (139 + 281) + \dots$ Delna vsota je 420. Takih vsot je 77, zato $S = 420 \cdot 77 = 32340$. Vsota vseh lihih števil med 56 in 364 je 32340.
3. Označimo z x število pravilno rešenih nalog iz druge skupine. Dobimo enačbo $2x \cdot 4 + (10 - 2x)(-2) + x \cdot 6 + (10 - x)(-3) = 34$, ki ima rešitev $x = 4$. Miha je pravilno rešil 8 nalog iz prve skupine in 4 naloge iz druge skupine, skupaj torej 12.
4. $V_{\text{predora}} = \frac{128,52}{0,04} \text{ m}^3 = 3213 \text{ m}^3$. $O = (18 + \frac{9\pi}{2}) \text{ m}^2 \doteq 32,13 \text{ m}^2$. Dolžina predora je torej približno $3213 : 32,13 = 100 \text{ m}$.
5.
$$o = \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a(3+2\pi)}{6},$$

$$p = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2(9\sqrt{3}-4\pi)}{48}$$



Aleksander Potočnik

19. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve nalog s str. 237¹

Teoretične naloge za 7. razred

1. Tanker se vedno potopi toliko, da je teža izpodrinjene morske ali sladke vode enaka teži tankerja. Označimo z $F_1 = 220 \cdot 10^7 \text{ N}$ težo praznega tankerja, z $F_2 = 440 \cdot 10^7 \text{ N}$ težo nafte. Dolžino tankerja označimo z $a = 380 \text{ m}$, njegovo širino z $b = 60 \text{ m}$ in globino potopljenega dela s h . Specifična teža morske vode je $\sigma_m = 10,2 \text{ N/dm}^3$ in navadne vode (podatek iz učbenika) $\sigma_v = 10 \text{ N/dm}^3$.
- a) Teža praznega tankerja je enaka teži izpodrinjene morske vode, po kateri tanker plava,

$$F_1 = \sigma_m a b h_a,$$

¹ Naloge in rešitve lahko najdete tudi na internetu
<http://pef.pef.uni-lj.si/bojang/>

kjer je h_a globina potopljenega dela praznega tankerja v morski vodi. Sledi

$$h_a = \frac{F_1}{\sigma_m a b} = \frac{220 \cdot 10^7 \text{ N}}{1,02 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot 380 \text{ m} \cdot 60 \text{ m}} = 9,46 \text{ m}.$$

- b) Teža polnega tankerja je enaka teži izpodrinjene morske vode

$$F_1 + F_2 = \sigma_m a b h_b,$$

kjer je h_b globina potopljenega dela polnega tankerja v morski vodi. Od tod izračunamo

$$h_b = \frac{F_1 + F_2}{\sigma_m a b} = \frac{(220 \cdot 10^7 \text{ N} + 440 \cdot 10^7 \text{ N})}{1,02 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot 380 \text{ m} \cdot 60 \text{ m}} = 28,4 \text{ m}.$$

- c) Teža polnega tankerja je enaka teži izpodrinjene sladke (rečne) vode

$$F_1 + F_2 = \sigma_v a b h_c,$$

kjer je h_c globina potopljenega dela polnega tankerja v sladki vodi. Zato je

$$h_c = \frac{F_1 + F_2}{\sigma_v a b} = \frac{(220 \cdot 10^7 \text{ N} + 440 \cdot 10^7 \text{ N})}{10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \cdot 380 \text{ m} \cdot 60 \text{ m}} = 29 \text{ m}.$$

Globina h_c je približno za 0,5 m večja kot globina h_b . Torej se tanker, ko zapluje v reko, potopi še za dodatnega pol metra.

2. Iz diagrama odčitamo, da smo vodi dovajali toploto z vključenim električnim grelcem 5 minut.

- a) Od tega je bila prvi dve minuti temperatura vode stalna in enaka 0°C . V tem času se je zaradi dovedene toplote Q_1 led stalil. Velja

$$Q_1 = P t_1 = m_l q_t,$$

kjer je P moč grelca, t_1 čas, ko se temperatura vode ne spreminja, m_l masa ledu, ki je na začetku plaval v vodi, in q_t talilna toplota ledu, ki jo najdemo v učbeniku in znaša 336 kJ/kg . Sledi

$$m_l = \frac{P t_1}{q_t} = \frac{1 \text{ kW} \cdot (2 \cdot 60 \text{ s})}{336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 0,36 \text{ kg}.$$

- b) Preostale tri minute je bila v posodi samo še voda, ki se je zaradi dovedene toplote Q_2 segrela. Velja

$$Q_2 = P t_2 = m_v c_p (T_k - T_z),$$

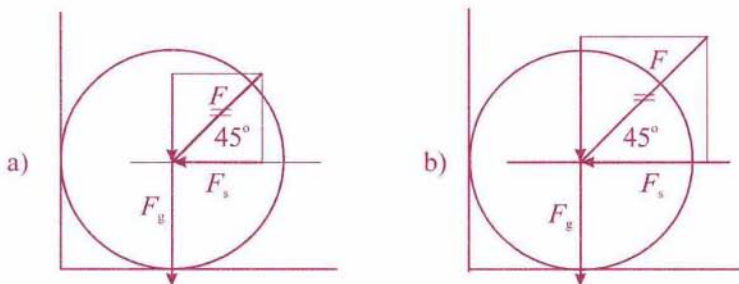
kjer je t_2 čas segrevanja vode, m_v je masa vode, ki je v posodi, c_p je specifična toplota vode, ki jo najdemo v učbeniku in znaša $4,2 \text{ kJ/kg}^\circ\text{C}$, T_k je temperatura ob koncu opazovanja, T_z pa temperatura na začetku segrevanja. Od tod dobimo

$$m_v = \frac{P t_2}{c_p (T_k - T_z)} = \frac{1 \text{ kW} \cdot (3 \cdot 60 \text{ s})}{4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot 10^\circ\text{C}} = 4,3 \text{ kg}.$$

3. Nalogi najlažje rešimo z načrtovanjem. Lahko pa ju rešimo tudi računsko, s pomočjo relacij v kvadratu. Pri načrtovanju in računanju si pomagamo z naslednjim razmislekom. Ker je sila tal navpična, lahko uravnoteži samo navpično komponento rezultante sile F in teže. Ker je teža sama navpična, je sila, pravokotno na tla, za navpično komponento sile F povečana teža. Sila stene pa lahko uravnoteži samo silo, ki deluje pravokotno na steno, oziroma vodoravno komponento sile F . Vodoravna in navpična komponenta sile F sta enaki in predstavljata stranici kvadrata, katerega diagonalna je F (slika 1). Torej

$$F_s = \frac{F}{\sqrt{2}},$$

kjer je F_s vodoravna komponenta sile F in je nasprotno enaka sili stene. Po velikosti je enaka navpični komponenti sile F , ki jo označimo z F_n .



Slika 1. Sile, pri katerih je doseženo ravnesje.

- a) Razmerje sile, ki pritiska na steno, in sile, ki pritiska na tla, je torej

$$\frac{F_s}{F_n + F_g} = \frac{\frac{F}{\sqrt{2}}}{\frac{F}{\sqrt{2}} + F} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = 0,4.$$

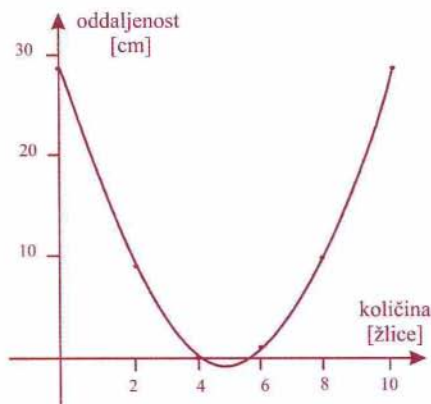
- b) V drugem primeru je sila stene kar enaka teži. Enako velja torej tudi za navpično komponento sile, ki na kroglo pritiska. Razmerje sile, ki pritiska na steno, in sile, ki pritiska na tla, je torej

$$\frac{F_s}{F_n + F_g} = \frac{F_g}{F_g + F_g} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Eksperimentalni nalogi

4. a) Količina riža v pločevinki vpliva na kotaljenje pločevinke.

število žlic riža	oddaljenost od sredine [cm]
0	28
2	9
4	0
6	1
8	10
10	27



Slika 2. Odvisnost oddaljenosti od količine riža v pločevinki.

- b) Najbolje se kotalita polna in prazna pločevinka, najslabše se kotali pločevinka, v kateri je približno 5 žlic riža.
- c) Pločevinka ima potencialno energijo. Če je prazna, ima na dnu doline kinetično energijo, ki se ponovno pretvori v potencialno na drugi strani doline.

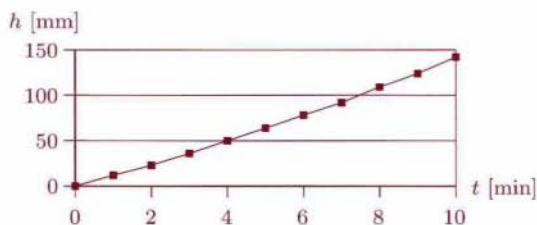
Če je v pločevinki riž, se del začetne potencialne energije porabi pri trenju med zrni riža v posodi. Kadar je riža veliko in ima ta dovolj prostora, da se presipava, so tovrstne izgube največje. V polni pločevinki se riž ne presiplje več, ker nima prostora. Zato se izgube ponovno zmanjšajo in se pločevinka živahno kotali.

5. Tekočinski termometer postavimo na segreto ploščo kuhalnika in vsako minuto odčitamo višino gladine tekočine v cevki (h). Rezultati za termometer z maso 440 g so predstavljeni v tabeli.

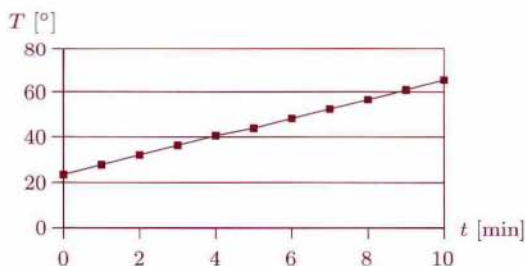
t [min]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h [mm]	0	12	23	36	50	64	78	92	109	124	142
T [°C]	22	26	30	34	38	41	45	49	53	57	61

Rezultate meritev predstavimo še grafično. Na sliki 3 je prikazano spreminjanje višine gladine tekočine v cevki, na sliki 4 pa spreminjanje temperature termometra v odvisnosti od časa. S primerjavo obeh grafov lahko ugotovimo, kolikšno temperaturo predstavlja rdeča oznaka na cevki termometra. Na vseh termometrih višina oznake ustreza temperaturi 40°C.

Slika 3. Spreminjanje višine gladine v cevki v odvisnosti od časa.

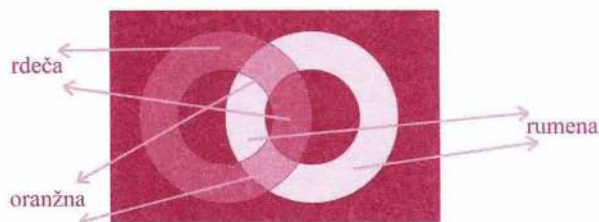


Slika 4. Spreminjanje temperature termometra v odvisnosti od časa.



Teoretične naloge za 8. razred

1. Na mestih, kamor pada samo svetloba iz rumenega reflektorja, je zaslon rumen. Na mestih, kamor pada svetloba samo iz rdečega reflektorja, je zaslon rdeč. Kamor pada svetloba iz obeh reflektorjev, je zaslon oranžen, kamor ne pada svetloba, pa je črn.



Slika 1. Zaslon, ko ga osvetljujeata zasenčena reflektorja.

2. a) V vezju sta po dva in dva vzporedno vezana upornika. Nadomestni upor prvih dveh upornikov je kar $R' = R/2$, ker sta enaka. Nadomestni upor drugih dveh upornikov je

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R}$$

oziroma

$$R'' = \frac{2}{3}R.$$

Napetost med točkama 1 in 2 (U_{12}) ter med točkama 1 in 3 (U_{13}) je enaka, saj lahko upor žic zanemarimo. Napetost se deli v razmerju nadomestnih uporov:

$$U_1 : U_2 = R' : R'' = \frac{R}{2} : \frac{2R}{3} = 3 : 4 = 9 \text{ V} : 12 \text{ V}.$$

Napetost U_{12} oziroma U_{13} je enaka 9 V.

- b) Tok I_1 je enak toku skozi celotno vezje:

$$I_1 = \frac{U}{R' + R''} = \frac{21 \text{ V}}{\frac{100 \Omega}{2} + \frac{2 \cdot 100 \Omega}{3}} = 0,18 \text{ A}.$$

- c) Ker sta napetosti U_{14} in U_{15} enaki, sta po dva upornika še vedno vezana vzporedno in sta napetosti U_{14} in U_{15} (kot prej) enaki 9 V. Tudi upor celotnega vezja je enak kot prej in skozi celotno vezje teče enak tok, tj. I_1 oziroma 0,18 A.
- d) V vzporedni vezavi se tokovi delijo v obratnem sorazmerju z upori. Ko sta oba vzporedno vezana upora enaka, teče skozi vsakega tok $I_1/2$. V delu vezja, kjer sta vzporedno vezana upora $2R$ in R , pa je tok skozi upor $2R$ enak $I_1/3$, skozi upor R pa $2I_1/3$. Iz gornje v spodnjo vejo vezja teče torej tok

$$I_2 = \frac{2I_1}{3} - \frac{I_1}{2} = \frac{I_1}{6} = \frac{0,18 \text{ A}}{6} = 30 \text{ mA}.$$

3. Avtomobilski motor opravlja delo, s katerim pospešuje in dviga avto.

- a) 1. minuta:

Avto se je pospešil z 0 na $v_1 = 20 \text{ km/h} = 5,55 \text{ m/s}$. Zato se mu je povečala kinetična energija. Potrebno delo je enako

$$A_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (5,55 \text{ m/s})^2 = 15,4 \text{ kJ},$$

kjer je m masa vozila in v_1 njegova hitrost po prvi minuti.

2. minuta:

Avto ima stalno hitrost, le da se dvigne za 50 m. Zato se poveča le njegova potencialna energija, za kar je potrebno delo

$$\begin{aligned} A_2 &= mg(h_k - h_z) = 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1850 \text{ m} - 1800 \text{ m}) = \\ &= 490 \text{ kJ}, \end{aligned}$$

kjer je g težni pospešek, h_k je nadmorska višina avtomobila po koncu druge minute in h_z nadmorska višina na njenem začetku. V nadaljevanju bosta začetna h_z in končna h_k nadmorska višina vedno predstavljali začetno in končno višino v obravnavani minuti.

3. minuta:

Avto se je v tej minuti pospešil z $v_1 = 20 \text{ km/h} = 5,55 \text{ m/s}$ na $v_2 = 40 \text{ km/h} = 11,1 \text{ m/s}$. Zato se mu je povečala kinetična energija. Hkrati se je povzpел še za 25 m in se mu je povečala

tudi potencialna energija. Sledi

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mg(h_k - h_z) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (11,1 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (5,55 \text{ m/s})^2 + \\
 &\quad + 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1875 \text{ m} - 1850 \text{ m}) = \\
 &= 46 \text{ kJ} + 245 \text{ kJ} = 291 \text{ kJ},
 \end{aligned}$$

kjer je hitrost v_2 hitrost na koncu 3. minute.

4. minuta:

Avto je v tej minuti zmanjšal hitrost z $v_2 = 40 \text{ km/h} = 11,1 \text{ m/s}$ na $v_3 = 30 \text{ km/h} = 8,33 \text{ m/s}$. Zato se mu je zmanjšala kinetična energija. Hkrati se je povzpел za 25 m in se mu je povečala še potencialna energija.

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(h_k - h_z) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (8,33 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot (11,1 \text{ m/s})^2 + \\
 &\quad + 1000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1900 \text{ m} - 1875 \text{ m}) = \\
 &= -27 \text{ kJ} + 245 \text{ kJ} = 218 \text{ kJ},
 \end{aligned}$$

kjer je hitrost v_3 hitrost na koncu četrte minute.

Z rezultati izpolnimo še spodnjo tabelo:

čas [s]	delo	delo [kJ]
1. minuta	A_1	15,4
2. minuta	A_2	490
3. minuta	A_3	291
4. minuta	A_4	218

- b) Avto je porabljal bencin na celotni poti. Ker je motor v celoti opravil

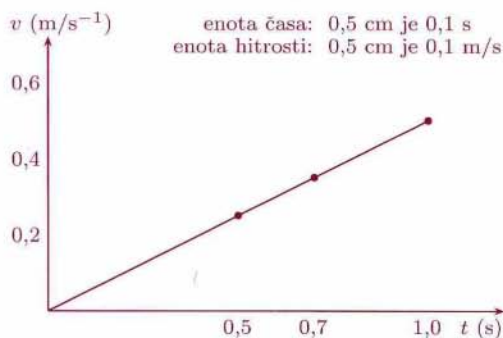
$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 15,4 \text{ kJ} + 490 \text{ kJ} + 291 \text{ kJ} + 218 \text{ kJ} \approx 1 \text{ MJ}$$

dela, je avto za pot in vzpon porabil približno pol litra bencina.

Eksperimentalni nalogi

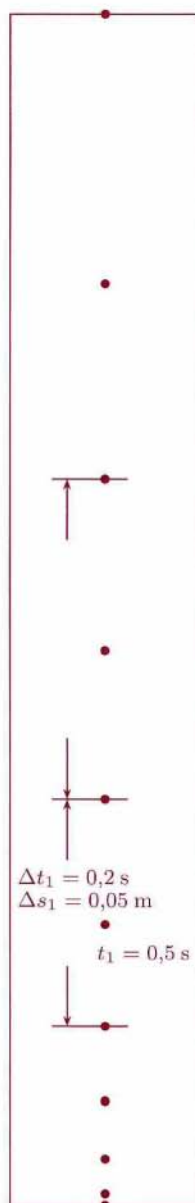
4. $t_1 = 0,5 \text{ s}$ $\Delta t_1 = 0,2 \text{ s}$ $\Delta s_1 = 0,05 \text{ m}$
 $t_2 = 0,7 \text{ s}$ $\Delta t_2 = 0,2 \text{ s}$ $\Delta s_2 = 0,07 \text{ m}$
 $v_1 = 0,25 \text{ m/s}$ $v_2 = 0,35 \text{ m/s}$
 $\Delta t = 0,2 \text{ s}$ $\Delta v = 0,10 \text{ m/s}$ $a = 0,5 \text{ m/s}^2$
 $t = 0,6 \text{ s}$ $s = 0,09 \text{ m}$ $a = 2s/t^2 =$
 $= 0,5 \text{ m/s}^2$
 $v = a t = 0,5 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ s} = 0,5 \text{ m/s}$

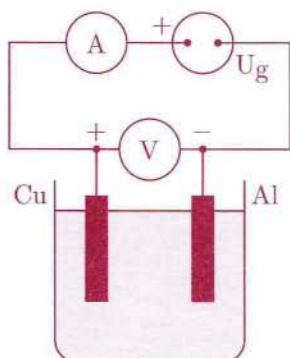
Graf pove: Hitrost je premo sorazmerna s časom.
 Gibanje je enakomerno pospešeno.



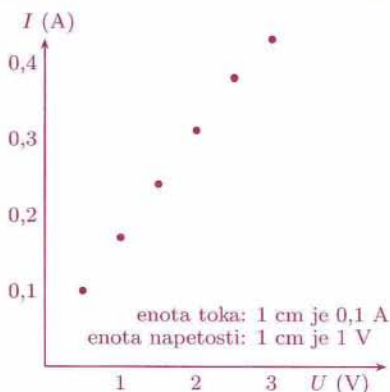
5. a)

U	I	R
V	A	Ω
0,5	0,10	5,0
1,0	0,17	5,8
1,5	0,24	6,2
2,0	0,31	6,4
2,5	0,38	6,6
3,0	0,43	7,0





Slika 1. Vezava pri elektrolizi.



Slika 2. Graf odvisnosti toka od napetosti.

- b) Tok ni premo sorazmeren z napetostjo.
 Upor elektrolita z napetostjo nekoliko narašča.
 c) Upor elektrolita je večji, ko se velikost elektrode zmanjša.

Mojca Čepič

43. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE –

Rešitve nalog s str. 244

I/1. Iz podatkov naloge zapišemo $a = \overline{xyz}$ in $b = \overline{zwx}$. Potem je $100x + 10y + z - 100z - 10w - x = 297$ oz. $99(x - z) + 10(y - w) = 297$. Torej je $x - z \leq 3$. Ker je $y - w \leq 9$, je $10(y - w) \leq 90$ in $99(x - z) \geq 207$. Ker je $x - z \leq 3$, je tako $x - z = 3$ in $y = w$.

Število b je manjše od števila a , zato je $23 = z + w + x$ oz. $2z + w = 20$. Ker je $w \leq 9$, je $2z \geq 11$ in zato $z \geq 6$, $x \geq 9$. Torej mora biti $x = 9$, $z = 6$ in $y = w = 8$. Števili sta tako 689 in 986.

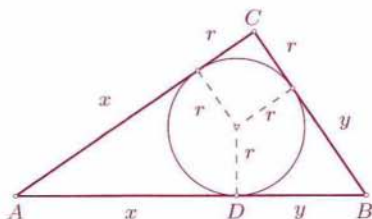
I/2. Opazimo, da je ena rešitev enačbe $2x + 3y = 185$ par $(91, 1)$. Torej so ostale rešitve oblike $x = 91 + 3k$, $y = 1 - 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Upoštevajmo še drugo predpostavko naloge, da je produkt večji od vsote: $xy > x + y \iff (91 + 3k)(1 - 2k) > (91 + 3k) + (1 - 2k) \iff -6k^2 - 180k > 1 \iff k^2 + 30k < -\frac{1}{6}$. Ker je k celo število, zadošča opazovati $k^2 + 30k = k(30 + k) < 0$, kar pa velja za $0 > k > -30$. Iskani pari so torej $(91 + 3k, 1 - 2k)$; $0 > k > -30$.

I/3. Označimo $a = |BC|$ in $b = |AC|$. Iz $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$ dobimo

$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Ker je $r = b - x = a - y$, je $y - x = a - b$ in zato

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (2)$$



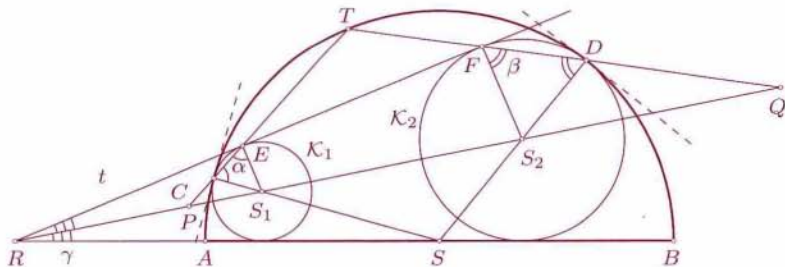
Ko odštejemo enakosti (1) in (2), dobimo $4xy = 2ab$ oz. $xy = \frac{1}{2}ab$, kar je bilo potrebno dokazati.

I/4. Tretjemu pastirju v nobenem primeru ne bo treba gnati ovc v dolino. Vsakič namreč ostriže do konca vse tiste ovce, ki so ostrižene napol. Vedno je vsaj ena ovca taka zaradi tretjega pogoja.

II/1. Recimo, da bi veljalo $(n-1)n(n+1) = m^2$, kjer je $n > 1$. Števili $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ in n sta si tuji, saj si v nasprotnem primeru števili $n^2 - 1$ in n^2 ne bi bili tuji. Ker pa je produkt dveh tujih si števil popolni kvadrat, morata biti obe števili popolna kvadrata, kar pa ni res.

II/2. Vsaj dva izmed vektorjev $\pm \vec{a}$, $\pm \vec{b}$, $\pm \vec{c}$ oklepata kot največ $\frac{\pi}{3}$, zato ima njuna razlika dolžino največ 1. Ostaneta nam torej dva vektorja (označimo ju s $\vec{p}$ in $\vec{q}$) z dolžino največ 1. Izmed vektorjev $\pm \vec{p}$ in $\pm \vec{q}$ vsaj dva oklepata kot največ $\frac{\pi}{2}$, zato ima njuna razlika dolžino največ $\sqrt{2}$.

II/3. Označimo središča polkrožnice in krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ zaporedoma z S , S_1 in S_2 , presečišče premic CE in DF s T , presečišče premic S_1S_2 in EF z R , presečišče premic S_1S_2 s premicama CE in DF pa zaporedoma s P in Q . Zaradi lažjega računanja naj bo še $\angle S_1CE = \angle CES_1 = \alpha$, $\angle S_2FD = \angle FDS_2 = \beta$ ter $\angle S_1RE = \angle S_2RF = \gamma$.



Dovolj bo pokazati, da je $\sphericalangle CSD = 2\sphericalangle CTD$ (obodni in središnji kot). Pa poskusimo izraziti kote z α, β, γ : Trikotnika RS_1E in RS_2F sta pravokotna (t je tangenta), zato je $\sphericalangle QS_2F = \gamma + \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ES_1R = \frac{\pi}{2} - \gamma$. V trikotniku PS_1E je tako $\sphericalangle S_1PE = \pi - \alpha - (\frac{\pi}{2} - \gamma) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma$, v trikotniku S_2QF pa $\sphericalangle S_2QF = \pi - \beta - (\frac{\pi}{2} + \gamma) = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma$. Znana sta dva kota v trikotniku PQT in zato je tretji $\sphericalangle PTQ = \pi - \sphericalangle QPT - \sphericalangle TQP = \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma) - (\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma) = \alpha + \beta$. V trikotniku PS_1C imamo $\sphericalangle S_1PC = \frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma$, $\sphericalangle PCS_1 = \pi - \alpha \Rightarrow \sphericalangle CS_1P = \pi - (\pi - \alpha) - (\frac{\pi}{2} - \alpha + \gamma) = 2\alpha - \gamma - \frac{\pi}{2}$, kar je enako kotu $\sphericalangle SS_1S_2$ (sovršna kota). V trikotniku S_2QD pa je $\sphericalangle S_2DQ = \pi - \beta$, $\sphericalangle DQS_2 = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma \Rightarrow \sphericalangle QS_2D = \pi - (\pi - \beta) - (\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma) = 2\beta - \frac{\pi}{2} + \gamma = \sphericalangle S_1S_2S$. Končno lahko izrazimo še $\sphericalangle DSC = \sphericalangle S_2SS_1 = \pi - (2\beta - \frac{\pi}{2} + \gamma) - (2\alpha - \gamma - \frac{\pi}{2}) = 2\pi - 2\beta - 2\alpha \Rightarrow \sphericalangle CSD = 2\pi - (2\pi - 2\beta - 2\alpha) = 2\alpha + 2\beta$. Torej je res $\sphericalangle CSD = 2\beta + 2\alpha = 2\sphericalangle CTD$.

II/4. (a) Na začetku so na tabli napisana tri soda števila. Ko izbrisemo eno od njih, na njegovo mesto napišemo liho število (ker je vsota drugih dveh soda), torej so na tabli napisana eno liho in dve sodi števili. Če izbrisemo liho, na njegovo mesto napišemo spet liho, če pa sodo, na njegovo mesto spet napišemo sodo število. Torej imamo po poljubno mnogo korakov na tabli napisana eno liho in dve sodi števili. Torej na koncu ne morejo biti napisana števila 17 75 91, ki so liha.

(b) Tako zaporedje korakov je npr. $3\ 3\ 3 \rightarrow 5\ 3\ 3 \rightarrow 5\ 3\ 7 \rightarrow 5\ 11\ 7 \rightarrow 17\ 11\ 7 \rightarrow 17\ 11\ 27 \rightarrow 17\ 43\ 27 \rightarrow 17\ 43\ 59 \rightarrow 17\ 75\ 59 \rightarrow 17\ 75\ 91$.

III/1. Če je $m = n = 1$, ima izraz vrednost 7. Pokažimo, da je to iskana najmanjša vrednost. Ker je 12^m sodo, 5^n pa liho število, naš izraz ne more doseči 0, 2, 4, 6; podobno ne more doseči 5 in 3. Lahko pa bi dosegel 1. Pa pogledajmo: veljati mora $12^m \equiv \pm 1 \pmod{5}$. Ker je $12^1 \equiv 2$, $12^2 \equiv 4$, $12^3 \equiv 3$, $12^4 \equiv 1$, mora biti $m = 4k$ za neko naravno število k . Podobno mora biti $5^n \equiv \pm 1 \pmod{12}$. Ker pa $5^1 \equiv 5$, $5^2 \equiv 1$, je $n = 2l$. Sedaj pa $|12^{4k} - 5^{2l}| = |12^{2k} + 5^l| \cdot |12^{2k} - 5^l| \neq 1$.

III/2. Naj ima polinom p ničle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{1999}$. Potem je $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_{1999})$. Očitno nobena ničla ni enaka 0, zato je

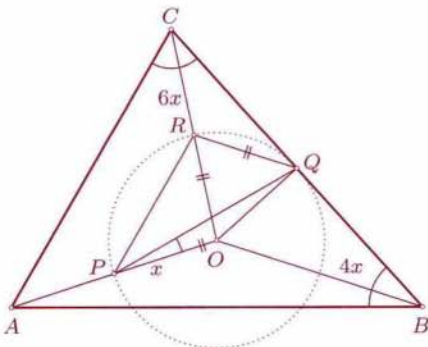
$$p(x) = x^{1999} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{1999} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{x}\right) \cdots \left(\frac{1}{\alpha_{1999}} - \frac{1}{x}\right).$$

Iskani polinom je tako

$$\begin{aligned} q(x) &= x^{1999} p\left(\frac{1}{x}\right) = 2000 \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right) \left(x - \frac{1}{\alpha_2}\right) \cdots \left(x - \frac{1}{\alpha_{1999}}\right) = \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 2000x^{1999}. \end{aligned}$$

III/3. Naj bo R razpolovišče daljice OC . Potem je $PR \parallel AC$ in točka R je središče pravokotnemu trikotniku OQC očrtane krožnice. V štirikotniku $POQR$ zato velja $|PO| = |OR| = |RQ|$.

Označimo $\sphericalangle OPQ = x$. Potem je $\sphericalangle POR = 2 \cdot \sphericalangle ABC = 8x$ in $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BCA = 12x$. Ker je OQ simetrala kota $\sphericalangle BOC$, je $\sphericalangle ROQ = \frac{1}{2}(2\pi - \sphericalangle POR - \sphericalangle BOA) = \pi - 10x$. Sledi $\sphericalangle PQO = \pi - \sphericalangle OPQ - \sphericalangle QOP = \pi - x - (8x + \pi - 10x) = x$ in je zato $|PO| = |OQ|$. Trikotnik OQR je zato enakostraničen, od koder sledi $\sphericalangle ROQ = \pi - 10x = \pi/3$ oz. $x = \frac{\pi}{15}$.



III/4. Naj bo m število vrst z vsaj dvema žetonoma. Za vsako od teh vrst si ogledamo razdalje od najbolj levo postavljenega žetona do ostalih žetonov v tej vrsti. Možne razdalje so $1, 2, \dots, n-1$. Število žetonov v teh m vrstah je vsaj $2n - (n-m) = n+m$. Torej bomo dobili po zgornji metodi vsaj $(m+n) - m = n$ razdalj za m vrst. Po Dirichletovem principu obstajata dve vrsti, kjer smo dobili enaki razdalji. Ti štirje žetoni so oglišča iskanega paralelograma.

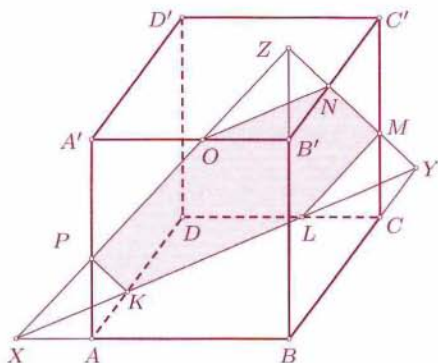
IV/1. Za vsak r_i , $i = 1, \dots, m$, in $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \leq r_i n - [r_i n] < 1$. Naj bo v najmanjši skupni večkratnik imenovalcev racionalnih števil r_i , $i = 1, \dots, m$. Ker je $f(n) = \sum_{i=1}^m (r_i n - [r_i n]) \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in je $f(v) = 0$, je minimum preslikave f enak 0. Ker pa je $f(n) = \sum_{i=1}^m (r_i n - [r_i n]) < m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in je

$$f(v-1) = v-1 - \sum_{i=1}^m [r_i v - r_i] = v-1 - \sum_{i=1}^m (r_i v - 1) = v-1 - v + m = m-1,$$

je maksimum funkcije enak $m-1$.

IV/2. Označimo $a \oplus b = a + b + ab$. Potem je očitno $a \oplus b = b \oplus a$ in $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$, zato je vseeno, v kakšnem vrstnem redu izbiramo števila. Po vrsti izračunamo $1 \oplus \frac{1}{2} = 2$, $2 \oplus \frac{1}{3} = 3$, $\dots$, $1998 \oplus \frac{1}{1999} = 1999$. Torej vedno dobimo število 1999.

IV/3. Dopolnimo pravilni šestkotnik $KLMNOP$ do enakostraničnega trikotnika XYZ . Točke X , Y in Z ležijo na nosilkah ustreznih robov, saj se vzdolž teh robov sekajo ravnine stranskih ploskev.



Pravokotna trikotnika XBZ in YBZ sta skladna, saj imata skupno kateto BZ in enako dolgi hipotenuzi. Torej je $|BX| = |BY|$ in podobno še $|BX| = |BZ|$. Ker sta si piramidi $XPYZ$ in $OB'NZ$ podobni in je $|ON| = \frac{1}{3}|XY|$, sledi $|B'Z| = \frac{1}{3}|BZ|$. Torej je $|BB'| = \frac{2}{3}|BZ|$ in podobno izračunamo še $|AB| = \frac{2}{3}|XB|$ in $|CB| = \frac{2}{3}|YB|$. Kvader je torej res kocka, saj je $|AB| = |BC| = |BB'|$.

IV/4. Vseh različnih podmnožic množice X s tremi elementi je $\binom{6}{3} = 20$. Ker je $20 > 12$, obstaja podmnožica Y množice X , ki ni enaka nobeni od množic $A_1, \dots, A_6, A_1^c, \dots, A_6^c$. Elemente množice Y potem pobarvamo z eno barvo, elemente Y^c pa z drugo barvo. (Z A^c označimo komplement množice A glede na množico X – torej $A^c = X \setminus A$.)

Matjaž Željko

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1998/99 – s str. 246

Objavljamo rešitve nalog s tekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 8. maja 1999 v Tehniškem šolskem centru v Novi Gorici.

Besedila nalog smo objavili v letošnji četrti številki Preseka.

Skupina A

- Podatki: $T = 5 \text{ N}$, $d = 8 \text{ mm}$, $R = 4,8 \text{ cm}$, $V = 1 \text{ l}$, $\eta = 60 \%$, $\sigma_e = 7,9 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$, $\sigma_v = 10 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$.

Volumen mešanice zapišemo $V_m = \pi(R - d)^2(h - d)$, če je h višina potopljenega dela steklenice. Arhimedov zakon pove, da je vzgon vode enak teži prazne posode in teži mešanice:

$$\sigma_v \pi R^2 h = T + V_m(\sigma_e \eta + \sigma_v(1 - \eta)).$$

Višino izrazimo z volumnom mešanice in dobimo

$$V_m = \frac{T - \sigma_v \pi R^2 d}{\sigma_v \left[\left(\frac{R}{R-d} \right)^2 - 1 + \eta \right] - \sigma_e \eta} = 0,78 \text{ l.}$$

Odtočiti moramo 0,22 l ali 220 cm³ mešanice.

2. Podatki: $T_1 = 54 \text{ N}$, $\varphi = 30^\circ$, $a = 30 \text{ cm}$, $h = 8,6 \text{ cm}$, $k_0 = 0,70$.

- i. Podatki: $k = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ N}^{-1}$.

Če s T označimo skupno težo klad, zapišemo pogoj za ravnovesje klad kot

$$T \sin \varphi = k_l T \cos \varphi = (k_0 - kT \cos \varphi) T \cos \varphi.$$

Dobimo $\tan \varphi = k_0 - kT \cos \varphi$ in od tod največjo možno težo $T = 141 \text{ N}$. Torej lahko na klanec postavimo dve kladi s težo po 54 N.

- ii. Podatki: $k = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ N}^{-1}$.

Sedaj dobimo $T = 472 \text{ N}$, torej 8 klad. Preveriti pa moramo, če težišče klad ne sega prek spodnjega roba spodnje klade. Težišče, središče spodnje ploskve spodnje klade in navpična projekcija težišča na klanec tvorijo pravokotni trikotnik s kotom na vrhu 30° . Stranica, vzporedna s klancem, je dolga $x = 4h/\sqrt{3} = 19,9 \text{ cm}$, kar je več kot polovica stranice osnovne ploskve klade ($\frac{1}{2}a = 15 \text{ cm}$), torej se klade prevrnejo. Pri 6 kladah pa dobimo $x = 14,9 \text{ cm}$, torej se 6 klad ravno še ne prevrne.

3. Podatki: $r_0 = 10 \text{ mm}$, $r_1 = 20 \text{ mm}$, $r_2 = 25 \text{ mm}$, $t = 45 \text{ min}$, $v = 4,75 \text{ cm/s}$.

Dolžina traku je $l = vt = 128 \text{ m}$. Volumen traku zapišemo na dva načina (h je širina traku):

$$(\pi(r_1^2 - r_0^2) + \pi(r_2^2 - r_0^2))h = ldh$$

in za debelino traku dobimo

$$d = \frac{\pi(r_1^2 + r_2^2 - 2r_0^2)}{l} = 20 \text{ } \mu\text{m}.$$

- 4.a) Podatki: $T = 20 \text{ N}$.

Zapišimo ravnovesni pogoj za (levi) zidak v drugi vrsti. Nanj pritiska vrhnji zidak s polovično težo, na spodnji ploskvi pa spodnji levi zidak s silo F_1 in srednji s silo F_2 . Prijemališče vsake sile postavimo v središče ploskve, s katero se zidaka dotikata.

Ravnovesje sil zahteva

$$\frac{1}{2}T + T = F_1 + F_2,$$

ravnovesje navorov za os v težišču zidaka pa

$$\frac{1}{2}T \frac{1}{4}l = F_2 \frac{1}{4}l - F_1 \frac{1}{4}l.$$

Od tod izluščimo $F_1 = \frac{1}{2}T$ in $F_2 = T$. Na srednji zidak torej pritiskata sili zgornjih zidakov z velikostma po T . Če vsoti prištejemo še težo samega zidaka, dobimo za silo, s katero zidak pritiska na tla, $2F_2 + T = 3T = 60$ N. Podobno dobimo za silo levega (desnega) zidaka na tla izraz $F_1 + T = \frac{3}{2}T = 30$ N.

- b) Podatki: $T = 9,0$ N, $h_1 = 5$ cm, $S = 200$ cm², $p = 10^6$ N/m².

Tlak je očitno največji pod srednjim zidakom v spodnji vrsti. Če posplošimo rezultat pri a), ugotovimo, da nanj deluje enaka sila, kot če bi bili nanj naloženi drug vrh drugega zidaki do višine zidu (N je število zidakov):

$$p = \frac{NT}{S}, \quad h = Nh_1 = \frac{pSh_1}{T} = 110 \text{ m}.$$

Torej zid ne more biti višji od Keopsove piramide.

Skupina B

1. Podatki: $r = 50$ cm, $g = 9,8$ m/s², $\varphi = 30^\circ$.

Ker se kroglica odbija le med dvema točkama, potuje sem ter tja po istem tiru, kar pomeni, da pade vedno pravokotno na obod žleba. Hitrost takoj po odboju – njeno velikost označimo z v_0 – tvori z vodoravnico kot $\alpha = 90^\circ - \varphi = 60^\circ$, vodoravna komponenta je $v_0 \cos 60^\circ$ in je pri gibanju konstantna, navpična pa $v_0 \sin 60^\circ$. Med dvema odbojema napravi kroglica pot $r = v_0 \cos 60^\circ t$, v navpični smeri pa se vrne na enako višino: $0 = v_0 \sin 60^\circ t - \frac{1}{2}gt^2$. Iz prve enačbe izrazimo v_0 , vstavimo v drugo in dobimo

$$t = \sqrt{\frac{2r \operatorname{tg} 60^\circ}{g}} = 0,42 \text{ s}.$$

2. Podatki: $v_0 = 1,5 \text{ m/s}$, $k = 0,05$, $l = 10 \text{ cm}$, $a = 1,5 \text{ cm}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
 a) Najprej obravnavajmo prožni trk med dvema kockama z enako maso m ! Končni hitrosti kock naj bosta v_1 in v_2 . Pri trku se ohranjata kinetična energija in gibalna količina:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2, \quad \text{in} \quad mv = mv_1 + mv_2.$$

Sledi $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ in $v = v_1 + v_2$. Iz druge enačbe izrazimo v_1 , vstavimo v prvo in dobimo $v_2 = v$ in $v_1 = 0$. Po trku prva kocka torej obmiruje, druga pa se giblje naprej z enako hitrostjo, kot jo je imela prva pred trkom.

- b) Gibanje zaporednih kock med trki lahko obravnavamo kot gibanje ene same kocke. Med dvema trkoma prepotuje posamezna kocka pot $l - a = 8,5 \text{ cm}$, kjer je l razdalja med središči sosednjih kock in a stranica kocke. Kocke se ustavljajo zaradi trenja. Celotno delo trenja ravno zmanjša začetno kinetično energijo na nič, torej

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = k_t mg(N(l - a) + \Delta s),$$

kjer je $N + 1$ število kock, ki se premaknejo med poskusom, Δs pa premik zadnje kocke. Dobimo $N = 27$, torej se skupaj s prvo premakne 28 kock.

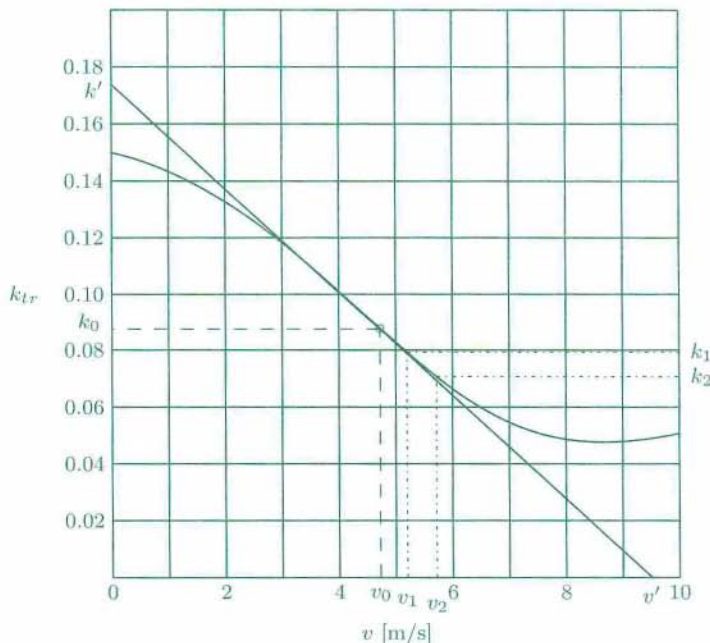
3. Podatki: $m = 1 \text{ g}$, $h = 10 \text{ cm}$, $\Delta t = 0,2 \text{ ms}$, $t = 0,21 \text{ s}$.
 Tik pred prvim odskokom ima kroglica hitrost $v = \sqrt{2gh}$; hitrost po odskoku pa je enaka začetni hitrosti pri navpičnem metu, $v' = g\frac{1}{2}t$, saj potrebuje čas $\frac{1}{2}t$, da doseže najvišjo lego, ko obmiruje. Izrek o gibalni količini pove

$$F\Delta t = m(v - (-v')) = m(\sqrt{2gh} + \frac{1}{2}gt),$$

od tod izrazimo silo

$$F = \frac{m(\sqrt{2gh} + \frac{1}{2}gt)}{\Delta t} = 12 \text{ N}.$$

4. Podatki: $\varphi = 5^\circ$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
 a) Pogoji za enakomerno gibanje na klancu je $a = g(\sin \varphi - k_l \cos \varphi) = 0$. Od tod dobimo $k_l \equiv k_0 = \arctg \varphi = 0,0875$. Iz grafa razberemo, da tolikšen k ustreza hitrosti $v_0 = (4,73 \pm 0,03) \text{ m/s}$.



Slika 1. Slika k nalogi B4.

- b) Koeficient pri 10 % večji hitrosti $v_1 = 1,1v_0$ označimo s k_1 in s k_2 tistega pri hitrosti $v_2 = 1,1v_1 = 1,21v_0$. Obe vrednosti odčitamo iz grafa. Za izračun pospeška vzamemo povprečno vrednost $\bar{k} = (k_1 + k_2) = 0,0745$. Za iskani čas dobimo

$$t = \frac{v_2 - v_1}{\bar{a}} = \frac{0,11v_0}{g(\sin \varphi - \bar{k} \cos \varphi)} = 4,25 \text{ s} \pm 0,25 \text{ s}.$$

- c) Pri majhnih odmikih hitrosti od enakomerne hitrosti je sprememba koeficienta lepenja kar sorazmerna s spremembo hitrosti: $(k - k_0) = K(v - v_0)$, kjer je K naklonski koeficient premice, ki ga odčitamo iz grafa

$$K = \frac{k'}{v} = -0,018 \text{ m/s}.$$

Dobimo: $k_1 = k_0 + K(v_1 - v_0)$ in $k_2 = k_0 + K(v_2 - v_0) \approx k_0 + 2K(v_1 - v_0)$. Vzamemo $\bar{k} = (k_1 + k_2) = k_0 + \frac{3}{2} K (v_1 - v_0)$

in končno dobimo

$$t = \frac{v_2 - v_1}{g(\sin \varphi - \bar{k} \cos \varphi)} = \frac{v_1 - v_0}{g \frac{3}{2} K (v_0 - v_1) \cos \varphi} = 3,75 \text{ s} \pm 0,25 \text{ s}.$$

Skupina C

1. Podatki: $m = 1 \text{ kg}$, $T_0 = 290 \text{ K}$, $M = 29 \text{ kg}$, $R = 8300 \text{ J/kgK}$, $\kappa = 1,4$.

Začetno stanje obeh delov zraka označimo s p_0 , V_0 in T_0 , končno stanje pa z indeksoma 1 (levi) in 2 (desni). V desnem delu se prostornina dvakrat zmanjša, torej je $p_2 = 2p_0$, saj je sprememba izotermna. Ker se bat med spremembo premika enakomerno, sta tlaka v obeh delih posode ves čas enaka. Torej je $p_1 = 2p_0$, poleg tega pa $V_1 = 3V_0/2$. Po splošni plinski enačbi je

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow T_1 = 3T_0.$$

Zraku v desnem delu se notranja energija ne spremeni, za zrak v levem delu pa je

$$\Delta W_1 = c_V m (3T_0 - T_0) = \frac{2}{\kappa - 1} \cdot \frac{m}{M} R T_0 = 420 \text{ kJ}.$$

2. Podatki: $R = 100 \Omega$, $R = 12,5 \Omega$, $U = 10 \text{ V}$.

Zaradi simetrije je napetost v središču leve stranice vezja enaka napetosti v središču spodnje stranice in upornika v levem spodnjem kotu lahko črtamo. Nadomestni upor preostalega vezja je

$$R_c = R + R_n + \frac{1}{2}R', \quad R' = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} = \frac{7R}{4}$$

in moč, ki se troši na žarnici, je

$$P = \frac{R U^2}{(R_n + \frac{15}{8}R)^2} = 250 \text{ mW}.$$

3. Podatki: $S = 400 \text{ cm}^2$, $d = 2 \text{ mm}$, $m = 0,296 \text{ kg}$, $V = 1,60 \text{ l}$, $k = 95 \text{ N/m}$, $e = 11 \mu\text{As}$, $h = 2,6 \text{ cm}$.

a) Vzmet se raztegne za $\Delta h = h_0 - h = V/S - h = 1,4 \text{ cm}$. Ker teža uravnovesi začetni raztezek, je sila med ploščama nasprotno

enaka sili vzmeti na račun dodatnega raztezka Δh in vzgonu:

$$F = k\Delta h + \rho_v S d g = 2,1 \text{ N}.$$

b) Sila je nasprotno enaka električni privlačni sili med ploščama:

$$F = e \frac{U}{2h} = \frac{e^2}{2Ch} = \frac{e^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}, \quad \varepsilon = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 S F} = 80.$$

4. Podatki: $l = 10 \text{ cm}$, $N = 100$, $a = 30 \text{ cm}$, $N' = 2000$, $R = 3 \text{ cm}$, $B = 10^{-4} \text{ T}$.

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v središče male tuljave. Velja

$$\begin{aligned} B_n(0) + 2B_z(z=a) &= \frac{\mu_0 N I}{l} + 2 \frac{\mu_0 N' I' R^2}{2a^3} = B \\ B_n\left(\frac{1}{2}l\right) + B_z\left(z=a - \frac{1}{2}l\right) + B_z\left(z=a + \frac{1}{2}l\right) &= \\ &= \frac{\mu_0 N I}{2l} + \frac{\mu_0 N' I' R^2}{2} \left[\frac{1}{\left(a + \frac{1}{2}l\right)^3} + \frac{1}{\left(a - \frac{1}{2}l\right)^3} \right] = B \end{aligned}$$

Drugo enačbo pomnožimo z dve in odštejemo prvo. Za tok v večjih tuljavah dobimo

$$I' = \frac{Ba^3}{\mu_0 N' R^2} \left[\left(1 + \frac{l}{2a}\right)^{-3} + \left(1 - \frac{l}{2a}\right)^{-3} - 1 \right]^{-1} = 0,88 \text{ A}.$$

V mali pa

$$I = \frac{\left(1 + \frac{l}{2a}\right)^{-3} + \left(1 - \frac{l}{2a}\right)^{-3} - 2}{\left(1 + \frac{l}{2a}\right)^{-3} + \left(1 - \frac{l}{2a}\right)^{-3} - 1} \cdot \frac{lB}{\mu_0 N} = 0,021 \text{ A}.$$

Skupina D

1. Podatki:

- i. $m = 30 \text{ mg}$, $R = 5,0 \text{ cm}$, $T = 250^\circ\text{C}$, $P_0 = 5,0 \text{ kW}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $q_i = 2,26 \text{ MJ/kg}$, $\lambda = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ W/mK}$.

Gostota toplotnega toka, ki ga oddaja plošča, je $j = P_0/\pi R^2 = 640 \text{ kW/m}^2$, kjer je P_0 toplotni tok s plošče, R pa njen

polmer. Nato je

$$j = \lambda \frac{\Delta T}{d}, \quad d = \frac{\lambda \Delta T}{j} = 4,7 \text{ } \mu\text{m}.$$

Z $\Delta T = 150 \text{ K}$ smo označili temperaturno razliko med površino plošče in spodnjo površino kapljice (ki je na temperaturi vrelišča vode). Ker je ta temperaturna razlika med izparevanjem kapljice konstantna, ima plast vodne pare ves čas enako debelino.

- ii. Prvi možni pristop je, da izračunamo povprečni toplotni tok, ki teče iz plošče v kapljico. Privzamemo, da je gostota toka konstantna, zmanjšuje pa se stična površina kapljice; v povprečju je enaka polovici začetne $\bar{P} = \frac{1}{2}j\pi r^2$. V času t izpari vsa kapljica in velja

$$\bar{P}t = mq_i \quad \text{ali} \quad \frac{j\pi r^2}{2} t = \rho\pi r^3 q_i,$$

torej

$$t = \frac{2\rho q_i}{j} r = \frac{2\rho q_i}{j} \sqrt[3]{\frac{m}{\pi\rho}} = 15 \text{ s}.$$

Pri drugem načinu zapišemo energijsko bilanco za kratek čas Δt , ko se debelina površja kapljice zmanjša za Δr :

$$j\pi r^2 \Delta t = \rho 4\pi r^2 \Delta r q_i$$

in dobimo

$$\Delta t = \frac{4\rho q_i}{j} \Delta r.$$

Debelina se torej zmanjšuje premo sorazmerno s časom. Kapljice ni več, ko je $\Delta r = \frac{1}{2}r$, in za čas izparevanja dobimo enak rezultat kot zgoraj.

2. Podatki: $r_1 = 30 \text{ cm}$, $r_2 = 45 \text{ cm}$, $l = 100 \text{ cm}$, $I_1 = 20 \text{ cd}$.
Izenačimo osvetljenosti papirja in mastne lise pri prvi meritvi:

$$\frac{I_1}{r_1^2} a_p + \frac{I_2}{(l-r_1)^2} t_p = \frac{I_1}{r_1^2} a_m + \frac{I_2}{(l-r_1)^2} t_m$$

ali

$$\frac{I_1}{r_1^2} (a_p - a_m) = \frac{I_2}{(l-r_1)^2} (t_m - t_p),$$

pri čemer smo z a_p in a_m označili odbojnost, s t_p in t_m pa prepustnost papirja oziroma mastne lise. Pri drugi meritvi dobimo

$$\frac{I_2}{r_2^2} a_p + \frac{I_1}{(l - r_2)^2} t_p = \frac{I_2}{r_2^2} a_m + \frac{I_1}{(l - r_2)^2} t_m$$

ali

$$\frac{I_2}{r_2^2} (a_p - a_m) = \frac{I_1}{(l - r_2)^2} (t_m - t_p).$$

Enačbi delimo in dobimo

$$I_2 = I_1 \frac{r_2(l - r_1)}{r_1(l - r_2)} = 38 \text{ cd}.$$

3. Podatki: $r = 300 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $h = 10 \text{ m}$, $t = 2,5 \text{ s}$.

- Iz pogoja $\omega^2 r = g$ dobimo $\omega = \sqrt{g/r} = 0,181 \text{ s}^{-1}$.
- Ko telo spustimo, nanj ne deluje več nobena sila, zato se za mirujočega opazovalca giblje premo enakomerno s hitrostjo, ki je enaka začetni. Za opazovalca, ki se vrti skupaj s postajo, pa je gibanje navidezno krivo: telo pada, hkrati pa se odklanja v nasprotni smeri gibanja.
- Za mirujočega opazovalca je začetna hitrost telesa enaka obodni hitrosti na razdalji $r - h$: $v = \omega(r - h)$. Telo se giblje po polovici tetive, ki ji ustreza radij r in višina h . Pri tem napravi pot $s = \sqrt{r^2 - (r - h)^2} = \sqrt{h(2r - h)}$. Za pot porabi čas $t = s/v = \sqrt{h(2r - h)}/\omega(r - h) = 1,46 \text{ s}$. (Približno tolikšen rezultat (1,43 s) dobimo z naivnim sklepanjem, da gre za prosti pad s pospeškom g , vendar takšen račun ni upravičen.)
Začetni in končni točki ustreza krožni lok (s središčem v središču postaje) $\varphi = \arccos((r - h)/r)$, vznožje stolpa pa pri tem opiše kot $\varphi_0 = \omega t$. Telo se dotakne tal na razdalji $s = r(\varphi - \varphi_0) = r(\arccos((r - h)/r) - \omega t) = -1,8 \text{ m}$, torej za vznožjem stolpa, gledano v smeri vrtenja.
- Telo za mirujočega opazovalca opiše tetivo. Polovični kot krožnega izseka nad tetivo označimo s φ . Točka na tleh, iz katere smo vrgli telo, opiše enak krožni lok $2\varphi = \omega t$, torej $\varphi = \omega t$. Ker telo v tem času opravi pot $s = 2r \sin \varphi$, dobimo za njegovo hitrost $v = 2r \sin \varphi / t = 2r \sin(\omega t) / t$. Kot, ki ga tvori vektor hitrosti z vodoravnico, je enak kar φ .

Dobljena hitrost in kot sta merjena za mirujočega opazovalca in sta različna za opazovalca na tleh postaje. Navpični (radialni) komponenti hitrosti sta enaki, torej $v_{\perp} = v \sin \varphi$, vodoravni (tangentialni) pa se razlikujeta za obodno hitrost tal, $v_0 = r\omega$: $v_{\parallel} = v \cos \varphi - r\omega$, če z $v_{\perp}$ in $v_{\parallel}$ označimo komponenti za opazovalca na tleh. Za kot proti vodoravnici dobimo

$$\beta = \arctg \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \arctg \left(\frac{\sin^2(\omega t)}{\cos(\omega t) \sin(\omega t) - \omega t} \right) = -81,4^{\circ}$$

in za velikost hitrosti

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \\ &= \frac{2r}{t} \sqrt{\sin^2(\omega t) + (\omega t)^2 - \omega t \sin(\omega t) \cos(\omega t)} = \\ &= 12,2 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Bojan Golli

REŠITVE NALOG S PRVEGA TEKMOVANJA IZ UNIXA – s str. 208

V prejšnji številki smo predstavili naloge, ki so bile aprila lani zastavljene na prvem republiškem tekmovanju iz Unixa. Tisti bralci in bralke, ki so naloge medtem morda poskusili rešiti sami, lahko svoje rešitve primerjajo z “uradnimi”, predstavljenimi v tem prispevku.

Rešitev 1. naloge: Frekvenčna analiza besedila. Naloga je preprosto rešljiva z uporabo ukazov `sort` in `uniq` ter nekaj spretnosti v rokovanju s cevmi. Cevi so pripomočki v ukazni lupini, s katerimi lahko povežemo izhod enega programa z vhodom drugega. Rešitev lahko zapišemo v eni vrstici:

```
cat datoteka | tr " " "\n" | sort | uniq -c | sort -n
```

Kratka razlaga: z ukazom `tr` razsekamo datoteko z besedilom tako, da je vsaka beseda v svoji vrstici. Sestavljenec naloge nam jo je olajšal s tem, da nam ni treba paziti na vejice, pike in druge nečrke. Izhod iz `tr` uredimo tako, da ga po cevi (`|`) napeljemo na standardni vhod programa `sort`. Na izhodu `sort` dobimo po abecednem redu urejen seznam vseh

besed v besedilu. Napeljemo ga na vhod programa `uniq`. Ta iz vhodnega toka podatkov odstrani ponovljene zaporedne vrstice, zaradi izbire `-c` pa izpiše v prvem stolpcu tudi število ponovitev posamične vrstice. Vse, kar potrebujemo, je le še, da tak seznam uredimo, tokrat po številu ponovitev v prvem stolpcu. Spet uporabimo ukaz `sort`, ki mu tokrat podamo izbiro `-n`, da zapise uredi po številčni vrednosti polja namesto po abecednem redu. Opisana rešitev loči besede, ki so različno zapisane z malimi in velikimi črkami. Zaporedni presledki se preslikajo v prazne vrstice, ki jih zadnje urejanje tudi prešteje.

Za ilustracijo podajmo deset najpogostejših besednih oblik v Levstikovi povesti *Martin Krpan* skupaj z njihovimi frekvencami:

```
61 v
65 Krpan
74 bi
74 na
107 da
121 in
127 ne
142 se
161 pa
207 je
```

Rešitev 2. naloge: Vi. Sestavljalci smo od tekmovalcev pričakovali, da poznajo ali "izumijo" pojem zaklepanja datoteke. Dani program (v našem primeru `vi`) preimenujemo ali prestavimo v imenik, ki ga uporabniki nimajo na seznamu imenikov, kjer iščejo izvedljive datoteke (spremenljivka `PATH`). Na njegovo mesto postavimo lupinski program, ki, ko ga poženemo, ustvari zaklepno datoteko, požene urejevalnik in ob izhodu za seboj pobriše zaklepno datoteko. Zaklepno datoteko ustvarimo v istem imeniku, kjer je tudi datoteka, ki jo urejamo, in ne denimo v imeniku `/tmp`. S tem se izognemo zmedu, ki bi nastala, če imamo v različnih imenikih datoteke z enakim imenom.

Dobra rešitev se mora tudi izogniti situaciji, ko začneta dva uporabnika hkrati urejati datoteko: uporabnik A požene lupinski program, ki ugotovi, da zaklepna datoteka še ne obstaja, in se jo nameni ustvariti. Vmes vskoči – ne pozabimo, Unix je večopravilni sistem! – uporabnik B, in ker zaklepna datoteka v tistem trenutku še ni ustvarjena, poskuša storiti enako.

Da se nastali tekmi (ang. race condition) izognemo, postopek obrnemo: najprej ustvarimo zaklepno datoteko in šele potem preverimo, ali smo jo sploh uspeli ustvariti. Se sliši čudno? Predstavljena rešitev z

ukazom `touch` počenja natančno to. Ukaz `touch`, ki kot argument sprejme ime datoteke, postavi datum zadnjega dostopa do datoteke na trenutni čas, če datoteka že obstaja; če pa še ne, ustvari datoteko s podanim imenom in trenutnim časom dostopa.

V rešitvi vedno poskusimo ustvariti zaklepno datoteko, ki je drugi uporabniki ne smejo spremeniti, nato pa se ravnamo po izhodnem statusu ukaza `touch`. Ta je ob uspešno izvedeni akciji enak nič (kar v stavku `if` ustreza "pravilno"), sicer pa ne ("napačno"). Situacij, v katerih `touch` ni uspešen, je več, tu pa nas zanima predvsem ena: `touch` javi napako, kadar se z njim lotimo datoteke, ki je v lasti drugega uporabnika in za katero nimamo pravice do pisanja. Zato z ukazom `umask` poskrbimo, da bo tako, preden izvedemo `touch`: zaklepno datoteko lahko bere in piše (`rw`) le njen lastnik (`u`, user), uporabniki iz iste skupine (`g`, group) in vsi ostali uporabniki (`o`, other) pa ne. Ukaz `umask` vsem na novo ustvarjenim datotekam določi privzeto obnašanje, ne samo programu `touch`. Da se to ne bi razvleklo predaleč, smo ukaza `umask` in `touch` z okroglimi oklepaji omejili na podlupino. Latovščina `> /dev/null 2>&1` pomeni, da izhod ukaza `touch` zavrzemo (pošljemo na ponikalnico, `/dev/null`), obenem pa preusmerimo standardni izhod za napake (2. kanal) na običajen (1. kanal) izhod (`2>&1`). Tega pa smo tako ali tako zavrgli, tako da je `touch` povsem nem.

```
#!/bin/ksh
```

```
if ( umask u=rw,g=o ; touch .$1.lock > /dev/null 2>&1 )
then
    vi $1
    rm -f .$1.lock
else
    echo "Datoteka $1 je trenutno zaklenjena."
fi
```

Še nekaj opomb. Predlagana rešitev ne prepreči istemu uporabniku, da bi sam večkrat odprl datoteko. Kar v tem primeru ni napaka, saj naloga tega tudi ne zahteva od nas. Nič tudi ne preprečuje sistemskemu oskrbniku (`root`), da bi z `vi` odprl katerokoli datoteko. Rešitev z ovojnim lupinskim programom tudi ne prepreči, da uporabnik iz `vi` ne začne z ukazom `:e` urejati nove datoteke. Omenimo še, da za razliko od izvirnega `vi` z AT&T nekatere kasnejše izvedbe že same po sebi izdelujejo zaklepne datoteke. `vim` (Vi Improved), ki je standardna oprema Linuxa, je ena od njih.

Rešitev 3. naloge: Premešaj. Naloge z naključno permutacijo se lahko lotimo z grobo silo: vsaki vrstici prilepimo na začetek naključno število, zaporedje vrstic uredimo po teh številih, na koncu pa v urejeni datoteki dodana števila spet porežemo. Rešitev lahko zapišemo v eni sami vrstici:

```
awk '{ print rand(), $0 }' urejena | sort -n | cut -d " " -f 2-
```

Kratka razlaga verjetno ni odveč. Prvi ukaz na datoteki *urejena* izvede naslednji ukaz v skriptnem jeziku *awk*: `{ print rand(), $0 }`. Za vse, ki s tem skriptnim jezikom niso posebej domači – stavki v *awk* imajo obliko

```
pogoj { stavek }
```

Za vsak zapis (privzeto je to vrstica) se preveri, ali je pogoj izpolnjen, in če je, se izvede pripadajoči stavek. Pogoja v našem primeru nismo navedli, kar pomeni, da je vedno izpolnjen. Stavek, ki ga izvedemo, pravi: izpiši naključno število, zatem pa še dejansko vsebino vrstice. Takšen izhod napeljemo v program *sort*, ki z izbiro *-n* uredi zapise po njihovi številčni vrednosti. V zadnjem koraku zapise obdelamo z ukazom *cut*. Izbiri, ki smo mu ju podali, pomenita: prvič, polja v zapisu so ločena s presledkom (*-d " "*), in drugič, izpišemo polja od drugega polja do konca (*-f 2-*). Prvo polje je bilo naključno število, ki smo ga dodali v prvem koraku.

Pa še posladek. Zahtevnost ravnokar opisanega algoritma je v povprečju $O(n \log n)$. Sredi šestdesetih let je Richard Durstenfeld opisal hitrejši algoritem za gradnjo naključne permutacije z linearno časovno odvisnostjo $O(n)$. Tu ga zapišimo izvedenega v jeziku *Perl*:

```
#!/usr/bin/perl

@vrstice =<>;

for ($i = $#vrstice; $i >= 0; $i--) {
    $rnd = rand ( $i );
    print $vrstice [$rnd];
    $vrstice [$rnd] = $vrstice [$i];
}
```

Natančnejša razlaga Durstenfeldovega algoritma za gradnjo naključne permutacije je podana pri nalogi 4.2 v zbirki nalog *C naj bo* avtorjev Martina Juvana in Matjaža Zaveršnika, ki je izšla pri DMFA.

Rešitev 4. naloge: Številke IP. Naloga zahteva od nas, da v besedilu prepoznamo naslednji vzorec: presledek, ena, dve ali tri števke, stična pika, ponovno ena, dve ali tri števke, stična pika, spet ena, dve ali tri števke, stična pika, končno spet ena, dve ali tri števke ter zaključni presledek. Vzorec lahko elegantno opišemo kot *regularni izraz* v Perlu:

```
\b\d{1,3}\.\d{1,3}\.\d{1,3}\.\d{1,3}\b
```

Pri tem `\b` pomeni rob besede, `\.` je eksplicitna pika (pika brez uvodne nagibnice v skladnji regularnih izrazov pomeni katerikoli znak), `\d{1,3}` pa seveda pomeni od ene do treh zaporednih števk.

Celotna rešitev razpade na dva dela. V prvem delu preberemo datoteko `/etc/hosts` in pripravimo tabelo preslikav. V drugem pa prečesamo besedilo in vse vzorce, ki jih najdemo, zamenjamo z odgovarjajočo vrednostjo iz tabele. Spet rešitev v Perlu:

```
#!/usr/bin/perl

open (HOSTS_FILE, "/etc/hosts");
while ($line = <HOSTS_FILE>) {
    chomp $line;
    ($ip, $fqdn) = split(/ +/, $line);
    $hostbyip {$ip} = $fqdn;
}
close(HOSTS_FILE);

while (<>) {
    s/\b(\d{1,3}\.\d{1,3}\.\d{1,3}\.\d{1,3})\b/$hostbyip{$1}/g;
    print;
}
```

Skladnja Perla je morda bližje vsem, ki so količjak domači z jezikom C. Prva zanka `while` sestavi tabelo preslikav med številkami IP in imeni. Funkcija `chomp` ne napravi nič drugega kot to, da vrstici odstrani zadnji znak (znak za skok v novo vrstico), s funkcijo `split` pa prerežemo vrstico na enem ali več presledkih, ki v datoteki `/etc/hosts` ločijo številko IP od imena. Pri izgradnji tabele `$hostbyip` smo uporabili lepo lastnost Perla, da lahko element v tabeli naslavljamo s čimerkoli, ne le s celim številom. Uporabili smo kar niz znakov, številko IP (spremenljivka `$ip`).

Drugi del naloge je zanka `while`, ki teče, dokler je kaj na standardnem vhodu. Zamenjavo številke z imenom izvedemo z ukazom `s/kaj/s čim/g`. Končni `g` pomeni, da se ne zadovoljimo že s prvim vzorcem v vrstici, ki ga najdemo, ampak iščemo naprej do konca vrstice.

Analiza uspeha. Naj sklenemo še z analizo uspeha. Uspeh pri posameznih nalogah je zbran v razpredelnici:

naloga	povprečen uspeh	tekmovalci z nič točkami
1	11%	8
2	29%	0
3	31%	5
4	11%	5

Prva in četrta naloga sta se izkazali za znatno težji od druge in tretje. Od teh dveh je bila druga naloga kljub približno enakemu uspehu po svoje lažja, saj je vsak od tekmovalcev imel vsaj kakšno idejo, kako se je lotiti. Pri četrti nalogi ni noben tekmovalec prišel blizu rešitve, medtem ko se prve naloge ni resno lotila več kot polovica tekmovalcev.

Ob analizi uspeha je potrebno pripomniti, da je bila zamisel o tekmovanju sprejeta pozno in je obvestilo o tekmovanju prišlo na šole šele zadnji hip. Kakovost oddanih rešitev pa nas vseeno navdaja z mislijo, da navzlic publiciteti, ki je je bil v zadnjem letu ali dveh deležen Linux, srednješolska mladina z uporabo orodij iz programskega okolja sistema Unix ni posebej domača. To je škoda, saj verjamemo, da so prav močni skriptni jeziki in modularna orodja ena od prednosti okolja Unix/Linux pred drugimi okolji.

Tudi anonimna anketa, ki so jo izpolnjevali tekmovalci, v kateri so navedli nekaj podatkov o programskih orodjih, ki jih uporabljajo, ocenili težavnost nalog in podali svoje pripombe in predloge, je dala zanimive rezultate. Kot preveč restriktivna je bila na primer ocenjena odločitev komisije, da ne sprejema rešitev v prevedenih programskih jezikih (v poštev prideta predvsem pascal in C). Nekaj tekmovalcev je tako ocenilo naloge kot lahke, a pod pogojem, da bi bilo dovoljeno uporabljati programski jezik C.

Mnenje zahteva komentar. Vsaka naloga je najlažje rešljiva v jeziku, ki ga poznamo. Vse zastavljene naloge so res preverjeno rešljive tudi v programskem jeziku C, po drugi strani pa so takšne rešitve ne le daljše od predstavljenih, ampak tudi znatno manj tolerantne do napak programerja. Prednost orodij, ki jih ponuja programsko okolje sistema Unix, je možnost hitre izdelave prototipnih rešitev, ki jih hitro in enostavno sestavimo iz gradnikov, ki so že na voljo. To ni zamenjava za prevedene jezike, ampak njihovo dopolnilo. Če časovna zahtevnost določene naloge to upraviči, prototipni rešitvi sledi tudi izvedba v prevedenem programskem jeziku, ki je pri izvajanju praviloma znatno hitrejša. V praksi zato oba

pristopa sobivata, v šolah pa je očitno eden od njiju v popolni prevladi. Tak razkorak je redkokdaj dober, komisijo za izvedbo tekmovanja pa potrjuje v prepričanju, da je kljub skromnemu začetnemu odzivu z idejo vredno nadaljevati in na ta način prispevati k bolj uravnoteženi obravnavi različnih pristopov.

Primož Peterlin in Aleš Košir

IZBIRNI TESTI ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO

Za uvrstitev v ekipo, ki je zastopala Slovenijo na 40. mednarodni matematični olimpiadi v Romuniji, so se kandidati pomerili tudi na dveh izbirnih testih. Prvi test je bil 22. januarja, drugi pa 23. aprila 1999.

Prvi izbirni test

1. Poišči vsa cela števila x in y , ki zadoščajo enačbi

$$x^3 + 9xy + 127 = y^3.$$

2. Naj bodo D , E in F nožišča višin iz oglišč A , B in C ostrokotnega trikotnika ABC . Premica EF naj seka premico BC v točki P , premica skozi točko D , ki je vzporedna premici EF , pa seka premici AB in AC v točkah Q in R .

Dokaži, da leži razpolovišče stranice BC na trikotnikoma DEF in PQR očrtanih krožnicah.

3. Dano je praštevilo p . Naj bo f tak polinom stopnje d s celimi koeficienti, za katerega je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Za vsako naravno število n je ostanek števila $f(n)$ pri deljenju s p enak 0 ali 1.

Dokaži, da je $d \geq p - 1$.

Drugi izbirni test

1. V vasi živi 6 obrekljivk in vsaka izmed njih ve nekaj, česar druge ne vedo. Z enim telefonskim pogovorom si poljubni dve gospe izmenjata vse svoje čenče. (Telefonsko omrežje v vasi ne dopušča več sočasnih pogovorov.)

(a) Opiši, kako so lahko vse obrekljivke po 8 telefonskih pogovorih seznanjene z vsemi čenčami.

(b) Dokaži, da tega ni možno storiti s 7 pogovori.

2. Dana je polkrožnica, katere premer leži na premici p . Na loku polkrožnice ležita takšni točki C in D , da leži središče polkrožnice znotraj daljice AB , kjer z A in B označimo presečišči tangente na krožni lok v točkah D in C s premico p . Premici AC in BD se sekata v točki E , z F pa označimo pravokotno projekcijo točke E na premico p . Dokaži, da je FE simetrala kota $\sphericalangle CFD$.
3. Dani sta naravni števili a in b , $b \geq 2$. Označimo $x_1 = a$. Za $k \geq 2$ pa število x_{k-1} najprej zapišemo v obliki $x_{k-1} = sb + r$, $0 \leq r < b$, kjer sta s in r nenegativni celi števili, nato pa postavimo $x_k = s + r$.
- (a) Dokaži, da so od nekega indeksa dalje vsi členi zaporedja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ enaki neki vrednosti c .
- (b) Dokaži, da je $c \equiv a \pmod{b-1}$.
- (c) Dokaži, da je število c enako $b-1$, če je število a deljivo z $b-1$, sicer pa je enako ostanku števila a pri deljenju z $b-1$.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, šolsko leto 1999/2000, številka 5, strani 257 – 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (glavni urednik, računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1999/2000 je za posamezne naročnike **2.000 SIT**, za skupinska naročila šol **1.650 SIT**, posamezna številka **400 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1416

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAJVEČJE PRAŠTEVILO – Rešitev s str. 195

Naloga je zahtevala najti največje praštevilo z naslednjo lastnostjo:

Lastnost A.

Po opustitvi poljubnega števila števk vedno dobimo praštevilo.

Do iskanega števila nas pripeljejo naslednji premisleki:

1. Število ima same praštevilske števke. Če namreč opustimo vse števke razen (katerekoli) ene, moramo dobiti praštevilo.
2. Torej so možne le števke 2, 3, 5 in 7. Pri tem smeta števki 2 in 5 stati kvečjemu na prvem mestu zapisa števila. Sicer bi po opustitvi natanko vseh števk, ki stoje za njima, dobili vsaj dvomestno število, ki se končuje na 2 ali 5. Taka števila pa niso praštevila.
3. Število mora imeti same različne števke. Sicer bi na nekem koraku dobili dvomestno število, zapisano z enakima števka, torej deljivo z 11 in zato sestavljeno število.
4. Iz prvih treh premislekov sledi, da nobeno praštevilo z lastnostjo *A* ne bo več kakor trimestno (števki 2 in 5 ne moreta biti hkrati na prvem mestu). Torej ima naloga rešitev - največje tako praštevilo obstaja.
5. V poštev pridejo po zgornjem le trimestna števila 237, 273, 537 in 573. Nobeno od teh števil pa ni praštevilo, saj so vsa deljiva s 3.
6. Največje praštevilo z lastnostjo *A* torej ne bo več kakor dvomestno. Iz zgornjih premislekov sledi, da so dvomestna števila z lastnostjo *A* tista izmed števil 23, 27, 37, 53, 57, 73, ki so praštevila. To so

23, 37, 53 in 73.

7. Največje praštevilo z lastnostjo *A* je torej število 73.

Marija Vencelj



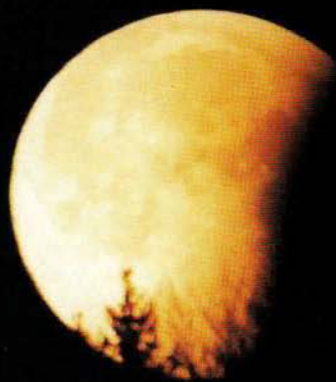
Delna faza ob 4.30 (21.1.2000). Slikano s teleskopom Meade LX 200 – 20 cm; $f/5,6$. Osvetlitev $1/8$ s; film FUJI 400.



Tik pred nastopom popolne faze ob 5.03 (21.1.2000). Slikano s teleskopom Meade LX 200 – 20 cm; $f/5,6$. Osvetlitev 2 s; film FUJI 400.



Popolna faza mrka ob 5.15 (21.1.2000). Slikano s teleskopom Meade LX 200 – 20 cm; $f/5,6$. Osvetlitev 5 s; film FUJI 400.



Pred koncem delne faze ob 7.05 (21.1.2000). Slikano s teleskopom Meade LX 200 – 20 cm; $f/5,6$. Osvetlitev 1 s; film FUJI 400.