PRESEK

27 (1999-2000) 4

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, leto 1999/2000, številka 4, strani 193–256

VSEBINA

PIRANSKO SONCE

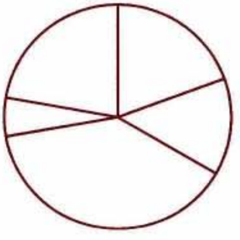
Pirančani so ponosni na slavnega rojaka, violinista in skladatelja Giuseppa Tartinija. Na tamkajšnjem osrednjem trgu že od nekdaj stoji spomenik z njegovim kipom. Ko so trg prenovili, so osrednjo ploščad uredili v obliki elipse, v njeno notranjost pa so postavili spomenik (glej sliko na naslovnici). Ali je točka, kamor so postavili središče spomenika, žarišče elipse? Morda bi bralci na podlagi slike znali odgovoriti na to vprašanje? Izmerili smo, da je razmerje med veliko in malo polosjo elipse 5:3.

Andrej Likar

KROŽNI DIAGRAM

Računalnike pogosto uporabljamo za slikovno predstavitev podatkov. Tako programi za izdelavo predstavitev in delo s preglednicami vsebujejo kopico že pripravljenih oblik diagramov. Ena od osnovnih oblik je *krožni diagram* (angl. pie chart). Na krožnem diagramu z velikostjo krožnega izseka ponazorimo, kolikšen del celote predstavlja posamezni del. Različne oblike krožnih diagramov pogosto vidimo tudi v časopisih in revijah, kjer z njimi predstavljajo rezultate volitev, strukturo prebivalstva, deleže podjetij na trgu itd.

Vabim vas, da v programskem jeziku logo poskusite napisati ukaz `krozni`, ki bo narisal preprost krožni diagram. Ukaz naj ima dva parametra: seznam vrednosti, ki jih bomo predstavili z diagramom, in polmer krožnega diagrama.



Klic `diagram [7 5 14 2 8] 150` naj npr. nariše diagram z zgornje slike. Višina in širina slike je 300 enot. Ker je vsota elementov seznama enaka 36, prvemu izseku pripada $\frac{7}{36}$ polnega kroga (notranji kot izseka je 70°), drugemu $\frac{5}{36}$, tretjemu $\frac{14}{36}$, četrtemu $\frac{2}{36}$, zadnjemu pa $\frac{8}{36}$ polnega kroga. Izseki si sledijo v smeri urnega kazalca, z začetkom "ob dvanajstih".

Martin Juvan

ŠTEVILSKA KRIŽANKA

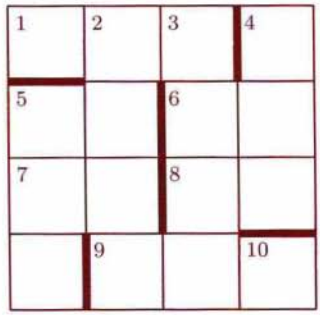
Številske križanke rešujemo podobno kot besedne. Edina razlika je, da v vodoravne in navpične vrstice vpisujemo števila namesto besed. Odebeljene črte (namesto črnih kvadratkov) nakazujejo presledek med dvema številoma.

Vodoravno:

1. Deveta potenca nekega naravnega števila.
5. Najmanjše dvomestno naravno število.
6. Praštevilo.
7. Koren števila 9 vodoravno.
8. Večkratnik števila 7 vodoravno.
9. Zrcalno število (število, ki se naprej in nazaj enako 'bere').

Navpično:

2. Potenca števila 4.
3. Naraščajoče zaporedne sode števke.
4. Prva števka je produkt drugih dveh.
5. Delitelj števila 9 vodoravno.
10. Kvadrat celega števila.



Urška Demšar

VIŠINE TRIKOTNIKA

1. Konstruiraj trikotnik, katerega višine merijo 4, 7 in 10 enot. Koliko neskladnih rešitev ima naloga?

2. Enaka naloga za trikotnik, katerega višine merijo 3, 4 in 5 enot.

Marija Vencelj

NAJVEČJE PRAŠTEVILO

Poišči največje praštevilo z lastnostjo, da po opustitvi poljubnega števila števk vedno dobimo praštevilo.

Marija Vencelj

LEONARDO DA VINCI, ZNANSTVENIK, IZUMITELJ, UMETNIK

V Narodnem muzeju v Ljubljani se je ustavila razstava o Leonardu da Vinciju, ki je obšla že vrsto mest. Odprli so jo 3. novembra 1999, ogledate pa si jo lahko do 5. marca 2000. Razstavi kaže posvetiti vso pozornost, bralcem Preseka pa naj jo približamo z nekaj "slikami z razstave".

Delo Leonarda da Vincija, ki bi ga danes povezali s fiziko, je opisano v posebnem prispevku na strani 216.

Pred vstopom v hodnik preberemo na zidu osnovne podatke o da Vincijevem življenju in delu ter o tedanjih dogodkih po svetu in pri nas. Na hodniku so na ogled umetniške risbe pokrajin, študije konj, ljudi in detajlov ter dva kipca. To obiskovalcu pomaga, da se laže prestavi v drug čas. V veliki dvorani naredijo najmočnejši vtis modeli, ki so jih zadnje čase izdelali po da Vincijevih načrtih. Z zanimanjem si ogledamo letalski stroj, ki spominja na današnjega letalskega zmaja, "helikopter", padali, hidravlični vijak, naprave za merjenje razdalj, kroglični ležaj, stroj za kovanje denarja, stroj za natezni poskus z žico, tiskarsko stiskalnico, stroj za rezanje navojev, most čez Zlati rog, premični most, preseka ladijskega trupa in dvojnega ladijskega trupa, dvonadstropni most, čoln na pedala, pontonski most. Risbe na steni kažejo načrte za raznovrstne stavbe, mostove in kanale, utrdbe in trdnjave, za bager, dvigalo in vrtljivi žerjav, predilni in hidravlični stroj.

V nadstropju, na poti v prvo dvorano, opazimo na stenah številne anatomske študije človeškega telesa in njegovih organov. Sledijo geometrijske risbe, med njimi risbe večkotnikov, včrtanih krogu, in Hipokratovih lunic. Pozornost zopet pritegnejo modeli: tehtnica z vato na eni posodici za merjenje vlažnosti zraka, merilnik nagiba ladje, merilnik hitrosti vetra. V naslednji dvorani, kamor nas pospremijo risbe optičnih naprav, npr. naprave za brušenje leč in svetilke z odbojnim zrcalom, so modeli "avtomobila", prestav z zobatimi kolesi, "tanka", parnega topa, oblegovalne lestve in "strojnice". Na stenah visijo risbe lokov, katapultov, bojnih strojev in oblegovalnih naprav. Naslednja dvorana je posvečena merjenju časa. Risbe podrobno kažejo urne mehanizme, razstavljenih pa je tudi nekaj modelov. Potem pridemo do oljnih slik in kopij, ki so jih naslikali da Vincijevi posnemovalci. Pot vodi skozi dvorano, v kateri so poleg da Vincijeve risbe "helikopterja" razstavljeni model airbusa in sodobna letalska turbina, poleg modela "avtomobila" model Benzovega avtomobila iz leta 1886 ter poleg risb mehanizmov za merjenje časa modeli sodobnih ur. Pridemo do razstavljenih starih knjig in faksimilov da Vincijevih zvezkov z risbami. Na stenah so risbe cvetic in druge risbe, povezane z opazovanjem narave, ki preidejo v risbe skalnih skladov, vodnih tokov in slapov, vrtincev in vetrov, neviht, viharjev, povodnji in podobnih nesreč.

Zunaj si obiskovalec razstave oddahne in zbere misli. Najprej razmišlja o možu, ki je zmogel vse to in še veliko drugega. Leonardo da Vinci je bil rojen leta 1452 v toskanski vasici Vinci kot nezakonski sin notarja in kmetice. Živel je pri očetu in se z njim okoli leta 1460 preselil v bližnje Firence. Leta 1466 je postal vajenec v delavnici vodilnega firenskega slikarja in kiparja. Leta 1472 so da Vincija sprejeli v slikarski ceh v Firencah in leta 1478 se je osamosvojil. Narisal je prvo veliko sliko Poklon svetih treh kraljev. Leta 1482 se je potegoval za službo pri milanskem vojvodi Ludovicu Sforzi in postal glavni inženir za vojaške zadeve ter arhitekt. Leta 1482 je za sodelavce v Milanu Leonardo ustanovil akademijo in naslednjega leta narisal dve inačici Device Marije v skalni votlini, 1490 Razmerja človeškega telesa ter med 1495 in 1497 Zadnjo večerjo. Leta 1500 je obiskal Rim, se vrnil v Firence in 1502 sprejel službo pri Cesaru Borgii. V leto 1503 segajo osnutki Mone Lize. Leta 1506 je Leonarda da Vincija francoski guverner povabil v Milano, kjer je naslednjega leta postal slikar na tamkajšnjem dvoru. Od leta 1514 je živel v Rimu pod okriljem papeža in 1516 stopil v službo francoskega kralja. Leonardo da Vinci je umrl leta 1519 na gradu Cloux blizu Amboisa. Ob njegovem rojstvu je bila natisnjena ena od Gutenbergovih biblij, ob njegovi štiridesetletnici pa je Kolumb odkril Ameriko.

Misli preskočijo na razstavo. Pripravljena je premišljeno ter temeljito in je prijetna za ogled. Z dvestopetdesetimi razstavljenimi predmeti terja kar precej pozornosti in časa. Kaže, da so sestavljalci razstave sodili, da Leonarda da Vincija kot umetnika dovolj dobro poznamo, saj so njegove slavne slike omenjene samo v življenjepisu. Močno je poudarjena tehniška stran da Vincijevega dela. Pozornost pritegnejo predvsem modeli.

Da Vinci pa se je ukvarjal tudi z matematiko. Razmišljal je o kvadraturi kroga in jo rešil nekoliko po svoje. Zakotalil je krog, izmeril obseg in izračunal ploščino trikotnika, ki ima obseg za osnovnico in polmer za višino. Tuj mu ni bil niti pojem infinitezimalnega. Z njim si je pomagal, ko je določil težišče polkroga in piramide. Matematiko je zelo cenil. Menil je namreč, da nobenega človeškega raziskovanja ne moremo imenovati prava znanost, če ga ne moremo podpreti matematično.

Da Vincijevi prispevki k zametkom naravoslovja so na razstavi le nakazani. Čeprav tedaj naravoslovja in fizike v današnjem pomenu še ni bilo, je umetnik zastopal sveže poglede.

Nazadnje se misli vrnejo k tehniškim risbam in načrtom, po katerih so izdelali modele. Sodobni graditelji modelov so v nekaterih primerih v risbah videli več kot sam da Vinci. Tega modelom na razstavi sicer ni mogoče očitati, razen trem pretiranim povezavam s sodobnim letalom, avtomobilom in uro. Osnutki načrtov "helikopterja", padala, "strojnice", "tanka" in podobnih naprav pa so v resnici z današnjimi napravami le v zelo daljnjem sorodstvu. "Strojnica" je npr. skupina več cevi, "avtomobil" naj bi poganjal urni mehanizem, ki bi ga bilo treba prej naviti. Morda bi obiskovalca razstave kazalo na to posebej opozoriti.

V današnjem času specializacij zbuja občudovanje izjemno vsestranski posameznik, ki mu je uspelo seči na številna področja človeškega delovanja. Leonardo da Vinci kot "ustvarjalec v vseh vejah umetnosti, odkritelj v večini vej naravoslovja in izumitelj v vseh vejah tehnike" morda bolj kot kdor koli drug zasluži naslov 'univerzalni človek'. Ne samo to. V Leonardu je mogoče videti enega od mož, ki so pripravili prehod od antičnega pogleda na naravo do Galilejeve fizike.

Janez Strnad

BRITJE – Rešitev s str. 130

Po odgovor o energijski zahtevnosti britja smo se odpravili k staremu znancu brivcu Barberosu. Gospod Barberos je zvest bralec Preseka in vedno pri volji za dobro brivsko debato. Kot ponavadi nas je pričakal pred vrati s širokim nasmehom in z britvijo v rokah. Takoj je bil za to, da skupaj premislimo rešitev zastavljene naloge.

Moč njegovega električnega brivnika je dobrih pet vatov, torej porabi pri petminutnem britju okrog $300\,\mathrm{s} \cdot 5\,\mathrm{W} = 1{,}5\,\mathrm{kJ}$ električne energije.

Kaj pa ročno britje? Mehanska moč, ki je potrebna, da voda pod pritiskom teče iz pipe, je enaka produktu prostorninskega pretoka vode in nadtlaka v vodovodnem sistemu, torej $P = \phi_V \Delta p$. Kadar je pipa odprta toliko, da bi se v minuti nateklo liter vode, potiska nadtlak 3 barov v vodovodni napeljavi vodo z močjo

$$10^{-3}\,\mathrm{m}^3/60\,\mathrm{s} \cdot 300\,\mathrm{kPa} = 5\,\mathrm{W}\,.$$

S prijateljem Barberosom si delimo začudenje: Z zmernim curkom vode iz pipe zapravljamo toliko moči, kot je rabi električni brivnik! Torej tudi s klasičnim britjem v petih minutah porabimo približno kilojoule in pol energije.

"Koliko pa je pravzaprav 1500 joulov energije?" je zanimalo gospoda Barberosa. Spomnili smo ga, kaj so ga učili njega dni na brivski akademiji. Če dvignemo breme z maso m za višino h v smeri nasproti težnemu pospešku g, opravimo delo $A = mgh$. Brivec takoj najde malce neverjetno primerjavo: "To je torej toliko, kot če bi nesel petindvajsetkilogramsko plinsko jeklenko šest metrov visoko, recimo dve nadstropji po stopnicah!" Kdo bi si mislil! Kar malce zadihani postanemo ob tej oceni.

"Zanimivo," modruje Barberos dalje. "Mokro britje traja ponavadi celo nekaj dlje kot s strojčkom, recimo deset minut, kar pomeni tri kilojoule energije. Uf, kot bi plinsko jeklenko nesel v četrto nadstropje! Najbrž bi kazalo med britjem kar pridno zapirati vodo. Sicer porabimo več energije, kot bi je porabil električni brivnik."

Preden odidemo, nam gospod Barberos postreže s skodelico čaja. A žilica mu še ne da miru: "Bi lahko s tremi kilojouli energije skuhali tale čaj? Kako je s tem?"

Skupaj premišljujemo: "Pol litra čaja smo segreli približno od sobne temperature do vrelišča. Specifična toplota vode je 4200 J/kg K, zato je šlo za kuho

$$mc\Delta T = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4200\,\mathrm{J/kg\,K} \cdot 80\,\mathrm{K}\,,$$

kar je okoli 170 kilojoulov energije."

No, to je pa skoraj šestdesetkrat več energije, kot je porabimo pri britju. Gospod Barberos se smeji: "Tale čaj me je pa drago stal! Kar dva meseca britja za enega gospoda!"

Poslovili smo se in mu obljubili en izvod Preseka, ko bo članek izšel.

Zanimivo, koliko energije zapravimo vsak dan. Že samo s toploto, ki uide pri kuhi mimo lonca, bi lahko prenašali težke kovčke med nadstropji v hiši. In kako razkošno bi se lahko brili! Pri britju očitno ni treba skrbeti za izgubljeno energijo. Pač pa po nemarnem iztočimo kar precej pitne vode, če pipe ne zapiramo sproti.

Matjaž Vencelj

O ŠTEVILIH, KI JIH LAHKO ZAPIŠEMO S SAMIMI ENAKIMI ŠTEVKAMI

Če bi naleteli na enakost

$$55^2 = 4444\,, \tag{1}$$

bi bila prva misel ta, da ni pravilna, ker je leva stran kvadrat lihega števila 55, se pravi liho število, desna stran pa je sodo število. Kaj pa, če števila niso zapisana v običajnem desetiškem številskem sestavu in se nam zdi račun zato napačen? Vsak bralec bo zlahka odkril, da enakost (1) velja v sestavu z osnovo 7. V tem sestavu pomeni 55 število $5 \cdot 7 + 5 = 40$, desna stran 4444 pa število

$$4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 4 = 1600\,.$$

Res je $40^2 = 1600$.

Število 40 ima, zapisano v sestavu z osnovo 7, enaki števki. Njegov kvadrat 1600 pa se v istem sestavu spet izraža s samimi enakimi števkami, in sicer štirimi. Ali obstaja morda še kakšno drugo naravno število, ki se da v primerno izbranem sestavu zapisati z dvema enakima števkama, njegov kvadrat pa s štirimi enakimi števkami? Odgovor na to vprašanje dajejo rešitve enačbe

$$aa^2_{(r)} = bbbb_{(r)}\,. \tag{2}$$

Indeks (r) pove, da velja ta račun v številskem sestavu z osnovo r. Iskano število smo zapisali v tem sestavu z enakima števkama a, njegov kvadrat pa s štirimi enakimi števkami b. Na koliko načinov lahko izberemo osnovo r ter števki a in b, da velja enačba (2)? Ugotovili bomo, da je rešitev nešteto, toda v nekem smislu je rešitev ena sama, namreč tista, podana z enakostjo (1).

Osnova številskega sestava je lahko katerokoli naravno število $r > 1$, števke pa so znaki za števila od 0 do $r-1$. V enačbi (2) ne sme biti $a = 0$, saj aa pri $a = 0$ ni dvomestno število (temveč $= 0$). Prav tako ni $b = 0$. Zato veljajo ocene

$$r > 1\,, \quad 1 \le a \le r-1 \quad \text{in} \quad 1 \le b \le r-1\,. \tag{3}$$

Ker pomeni aa v sestavu z osnovo r število $ar + a = a(r+1)$, $bbbb$ pa število

$$br^3 + br^2 + br + b = b(r^3 + r^2 + r + 1) = b(r+1)(r^2+1)\,,$$

lahko zapišemo enačbo (2) v obliki

$$a^2(r+1)^2 = b(r+1)(r^2+1)\,. \tag{4}$$

Iščemo tiste rešitve te enačbe v naravnih številih a, b, r, ki zadoščajo pogojem (3).

Pripomba. V enačbi (2) pomenita a in b števki, v (4) pa pripadajoči naravni števili.

Iz (4) izračunamo

$$b = \frac{a^2(r+1)}{r^2+1}\,. \tag{4*}$$

Ker je b naravno število, mora biti produkt $a^2(r+1)$ v števcu ulomka na desni deljiv z imenovalcem r^2+1. Enakost

$$r^2 + 1 = (r+1)^2 - 2r$$

pove, da imata $r+1$ in r^2+1 kvečjemu skupni faktor 2 (števili r in $r+1$ sta si namreč tuji). Zato sta samo dve možnosti:

a) Največji skupni delitelj števil $r+1$ in r^2+1 je 1. Iz enačbe (4*) izhaja, da je v tem primeru a^2 deljiv z r^2+1, torej $a^2 = k(r^2+1)$, kjer je k celo število. Potem je $b = k(r+1)$ in velja, ker je $k \geq 1$, ocena $b \geq r+1 > r$, tako da tretji pogoj (3) ni izpolnjen. Rešitve potemtakem ni.

b) $r+1$ in r^2+1 imata največji skupni delitelj 2 (to je očitno tedaj, kadar je r lih). Ker je zdaj faktor $r+1$ v števcu na desni strani enačbe (4*) deljiv z 2, toda z nobenim drugim faktorjem imenovalca r^2+1, mora biti faktor a^2 deljiv z $(r^2+1)/2$, tako da je kvocient med a^2 in $(r^2+1)/2$ (le-ta je enak ulomku $2a^2/(r^2+1)$) celo število, ki ga zaznamujmo s h. Zdaj dobimo $b = h\frac{r+1}{2}$. Če bi bil $h \geq 2$, bi veljala ocena $b \geq r+1 > r$, ki je v nasprotju s tretjim pogojem (3). Zato mora biti $h = 1$, se pravi

$$b = \frac{r+1}{2} < r\,.$$

Ker je $h = 1$, imamo enakost $2a^2/(r^2+1) = 1$, ki jo zapišimo v obliki

$$2a^2 - r^2 = 1\,. \tag{5}$$

Zanimajo nas rešitve te enačbe v naravnih številih a in r. Najpreprostejša $a = 1$, $r = 1$ ne pride v poštev, ker ni izpolnjen pogoj $r > 1$. Če pa je a, r

taka rešitev v naravnih številih, pri katerih je $r > 1$, izračunamo iz (5), da je v tem primeru

$$a = \sqrt{\frac{r^2+1}{2}} < r\,.$$

Torej so vsi pogoji (3) izpolnjeni. Tako smo ugotovili:

Enakost (2) velja natanko tedaj, kadar sta naravni števili a in $r > 1$ rešitvi enačbe (5). Pripadajoči b pa je enak $(r+1)/2$.

Koliko rešitev ima enačba (5) v naravnih številih a in r? Če ustrezata a in r tej enačbi, velja isto za števili

$$a' = 3a + 2r \quad \text{in} \quad r' = 4a + 3r\,. \tag{6}$$

S preprostim računom namreč ugotovimo, da je

$$2a'^2 - r'^2 = 2(3a+2r)^2 - (4a+3r)^2 = 2a^2 - r^2 = 1\,.$$

Očitno sta a' in r' naravni števili, če sta taki a in r. Veljata tudi oceni $a' > a$ in $r' > r$. Rešitev $a = 1$, $r = 1$ nam da $a' = 5$, $r' = 7$ in $b' = 4$. Če zdaj vstavimo $a = 5$ in $r = 7$ v (6), izračunamo $a' = 29$, $r' = 41$ in $b' = 21$. Tako lahko nadaljujemo. Dobimo neskončno naraščajoče zaporedje rešitev enačbe (5). Brez dokaza povejmo, da so v tem zaporedju zajete prav vse njene rešitve v naravnih številih a in r.

Torej obstaja neskončno naravnih števil, ki jih lahko zapišemo v primerno izbrani osnovi z dvema enakima števkama, njihov kvadrat pa s štirimi enakimi števkami. Rešitvi $a = 5$, $r = 7$, $b = 4$ pripada najmanjše tako število, namreč $ar + a = 5 \cdot 7 + 5 = 40$, ki nam da enakost (1). Naslednja rešitev $a = 29$, $r = 41$, $b = 21$ določa število $ar + a = 29 \cdot 41 + 29 = 1218$. V sestavu z osnovo $r = 41$ potrebujemo 41 znakov (števk) za označitev števil od 0 do 40. Za prvih deset naravnih števil lahko obdržimo običajne števke $0, 1, \ldots, 9$, za nadaljnja, med njimi za $a = 29$ in $b = 21$, pa potrebujemo nove znake. Izberimo npr. znak $\triangle$ za 29 in znak $\square$ za 21. Število 1218 zapišemo potem v sestavu z osnovo $r = 41$ v obliki $\triangle\triangle$. Enakost (2), ki pripada drugi rešitvi enačbe (5), pa se glasi

$$\triangle\triangle^2 = \square\square\square\square\,.$$

Te enakosti pa seveda ne bi mogli zamenjati za račun v desetiškem sestavu. Pri nadaljnjih rešitvah je $a > 29$ in $b > 21$, tako da vselej potrebujemo novi števki za a in b. Zato je enakost (1) edina rešitev enačbe (2), ki jo lahko zapišemo samo s števkami desetiškega sestava.

— — —

Enačba (2) je poseben primer splošnejše enačbe

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n}{}^2_{(r)} = \underbrace{bb\ldots b}_{m}{}_{(r)}\,, \tag{7}$$

ki naj velja v sestavu z osnovo (r). Število, ki ga kvadriramo, se v njem zapiše z n enakimi števkami a, njegov kvadrat pa z m enakimi števkami b.

Primer $n = 1$ ni zanimiv, rešitev je tedaj nešteto in jih zlahka najdemo: Za a vzamemo poljubno naravno število, postavimo $b = a^2$, za osnovo r pa izberemo katerokoli naravno število, ki je večje od b. Zato bomo odslej privzeli, da je $n > 1$.

Ker je

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n}{}_{(r)} = ar^{n-1} + ar^{n-2}\cdots + a \quad \text{in} \quad \underbrace{bb\ldots b}_{m}{}_{(r)} = br^{m-1} + br^{m-2}\cdots + b\,,$$

lahko zapišemo enačbo (7) v obliki

$$a^2(r^{n-1} + r^{n-2}\cdots + 1)^2 = b(r^{m-1} + r^{m-2}\cdots + 1)\,. \tag{8}$$

Naravna števila a, b in r morajo ustrezati tej enačbi, hkrati pa tudi pogojem (3).

Iz ocen $1 \le a$ in $b \le r - 1$ izpeljemo najprej tole zaporedje neenačb

$$\begin{aligned} r^{2n-2} &< (r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2 \le a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2 = \\ &= b(r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + 1) \le (r-1)(r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + 1) = r^m - 1 < r^m. \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali enačbo (8) in identiteto

$$(r-1)(r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + 1) = r^m - 1\,.$$

Ker je osnova $r > 1$, vidimo, da mora biti eksponent $2n - 2$ pri potenci števila r na začetku teh neenačb manjši od eksponenta m pri r na koncu, se pravi $2n - 2 < m$.

Podobno nam dasta pogoja $r - 1 \ge a$ in $b \ge 1$ zaporedje neenačb

$$\begin{aligned} r^{2n} &> (r^n - 1)^2 = (r-1)^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2 \ge \\ &\ge a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2 = b(r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + 1) \ge \\ &\ge r^{m-1} + r^{m-2} + \cdots + 1 > r^{m-1}\,. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je $2n > m - 1$. Potemtakem leži m v tehle mejah

$$2n - 2 < m < 2n + 1\,.$$

Ker sta m in n naravni števili, imamo samo dve možnosti: ali je $m = 2n-1$ ali pa $m = 2n$. Oglejmo si obe po vrsti.

a) Če je $m = 2n - 1$, dobimo iz enačbe (8)

$$b = \frac{a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2}{r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1}\,. \tag{8*}$$

Ker je b celo število, je števec v ulomku na desni deljiv z imenovalcem. Identiteta

$$r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1 = (r^{n-1} + 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1) - r^{n-1}$$

pove, da števili $r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1$ in $r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1$ nimata od 1 različnega skupnega delitelja (s skupnim deliteljem bi moral biti deljiv tudi r^{n-1}, toda števili r^{n-1} in $r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1$ sta si očitno tuji). Od tod sklepamo, da je a^2 deljiv z imenovalcem $r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1$, torej kvocient $a^2/(r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1)$ je neko celo število $k \geq 1$. Potem je

$$b = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2 > r^{2n-2}\,.$$

Ker je $n > 1$, sledi od tod, da je $b > r$. Potemtakem tretji pogoj (3) ni izpolnjen in zato ne more biti m enak $2n - 1$.

b) Naj bo zdaj $m = 2n$. Ker je

$$r^{2n-1} + r^{2n-2} + \cdots + 1 = (r^n + 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)\,,$$

dobimo iz (8)

$$b = \frac{a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)}{r^n + 1}\,. \tag{8**}$$

Ker smo primer, ko je $n = 2$ in $m = 2n = 4$, obravnavali že na začetku, naj bo odslej $n > 2$. Iz identitete

$$r^n + 1 = r^n - 1 + 2 = (r - 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1) + 2$$

razberemo, da imata števili $r^n + 1$ in $r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1$ kvečjemu skupni delitelj 2. Če je največji skupni delitelj 1, sta si tuji in je zato kvocient $a^2/(r^n + 1)$ neko celo število k. Če pa je največji skupni delitelj enak 2, je kvocient $2a^2/(r^n+1)$ celo število, ki ga imenujmo h. V prvem primeru dobimo iz (8^{**})

$$b = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1) \geq r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1 > r\,,$$

v drugem pa

$$b = h\frac{r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1}{2} \geq \frac{r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1}{2} > \frac{r^{n-1}}{2} \geq r\,.$$

(Upoštevali smo, da je $k \geq 1$, $h \geq 1$, $n > 2$ in $r \geq 2$.) Spet ni izpolnjen tretji pogoj (3), tako da enačba (7) tudi pri $m = 2n$ nima nobene rešitve v naravnih številih, če je $n > 2$.

Povzemimo, kar smo dognali:

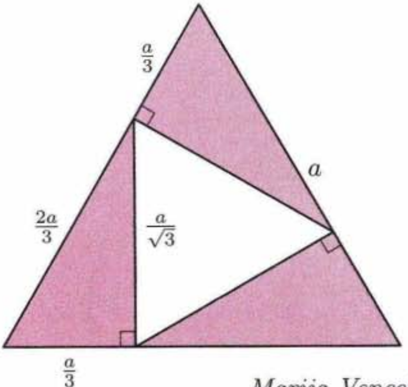
Enačba (7) je rešljiva z naravnimi števili a, b in r pri $n > 1$ le tedaj, kadar je $n = 2$ in $m = 4$. V tem primeru preide v enačbo (2), ki premore, kakor smo videli, nešteto rešitev.

Še tole naj omenimo: Enačba (5) nima rešitve v celih številih, pri kateri bi bil $r = 10$ (r je vselej lih). Zato v desetiškem sestavu nikoli ne velja enakost oblike (7), če je $n \geq 2$. Pri $n = 1$ pa so tele rešitve: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ in $3^2 = 9$.

Ivan Vidav

ENAKOSTRANIČNA TRIKOTNIKA – Rešitev s str. 131

Naloga je bila namenjena najmlajšim bralcem. Pot do rešitve je razvidna z desne slike, kjer smo z a označili stranico večjega enakostraničnega trikotnika. Obarvani pravokotni trikotniki so med seboj skladni in so polovice enakostraničnih trikotnikov. Preprost račun pokaže, da je ploščina manjšega enakostraničnega trikotnika (neobarvani del) enaka tretjini ploščine večjega trikotnika.



Marija Vencelj

OSMICA

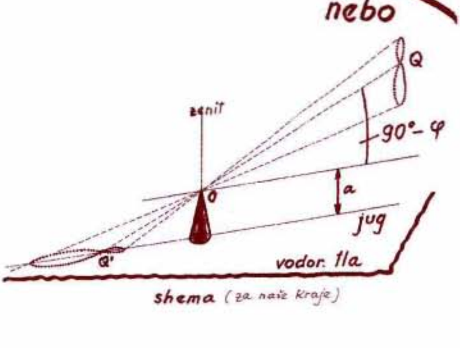
Zadajmo si nalogo, da vsakega jasnega dne opazujemo opoldansko senco, ki jo na vodoravna tla meče ravna, od Sonca osvetljena navpična palica. Recimo, da nas zanima, ali opoldanska senca vedno kaže natančno proti severu in, če ne, ali konec te sence, katere dolžina se spreminja, morda med letom na vodoravni ravnini popiše kakšno krivuljo. Naloga je zanimiva. Oglejmo si jo nekoliko pobliže.

Vzemimo, da bi vsak dan fotografirali lege Sonca na nebu natančno ob določenem času, npr. opoldne. Če bi povezali vse lege, bi dobili krivuljo, ki ima obliko zelo ozke osmice z različno velikima ovaloma. Krivulja ima ime *analema*. Rekli bi ji lahko letna osmica.

Navpična razpotegnjenost analeme nastane zaradi nagnjenosti Zemljine vrtilne osi proti ravnini Zemeljinega gibanja okrog Sonca, vodoravna razpotegnjenost pa zaradi gibanja Zemlje okrog Sonca po elipsi, zaradi česar pride do razlike med trajanjem pravega in srednjega Sončevega dne oziroma časa (slika 1).

Če analemo na nebu preslikamo preko vrha O navpične palice na vodoravno ravnino, dobimo *vodoravno analemo*. Takšno analemo lahko z opazovanjem sence palice ugotovimo sami. Vsak jasen dan opoldne po krajevnem (pasovnem), za nas *srednjeevropskem času*, senca navpične palice v splošnem ne pade natančno proti severu, ampak nekoliko vstran.

Na vodoravnih tleh označimo konec opoldanske sence palice (zabijemo količek), ki je ves čas na istem mestu. Tega seveda ne delamo vsak dan, ampak približno vsak deseti dan (okoli Sončevih obratov, 21. 6. in 21. 12., pogosteje), odvisno tudi od lepega vremena. Po letu dni opazovanj vse točke koncev opoldanske sence (količke) povežemo in pred nami na tleh "leži" vodoravna analema.



Slika 1. Analema je krivulja, ki se izpiše kot osmica na nebu glede na točko Q (presečišče nebesnega poldnevnika in nebesnega ekvatorja). Točka Q leži natančno nad jugom, njen višinski kot je $(90° - \varphi)$, če je φ zemljepisna širina kraja. S preslikavo preko vrha O navpične palice dobimo na vodoravnih tleh vodoravno analemo, ki jo lahko raziskujemo – preprosto opazujemo opoldansko dolžino sence na vodoravnih tleh; a – višina stožca oziroma palice.

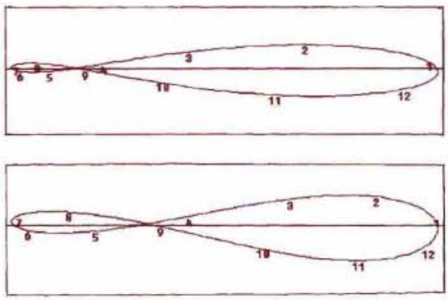
Opazovanja sence so preprosta, vendar dolgotrajna in včasih kar nekoliko nadležna, ker človeka prisilijo, da mora biti v sončnih dneh doma. Toda treba je vztrajati, najmanj eno leto. Le tako pridemo do uspeha.

Sam sem opazoval od sredine januarja 1998 do začetka februarja 1999. Število količkov pove, koliko lepih dni sem najmanj žrtvoval za analemo. Občutek, ko vidiš, da je opazovanje uspelo, pa je enkraten. Rezultat opazovanj prikazujeta sliki na II. strani ovitka. Na levi sliki vidimo del vodoravne analeme, dobljene iz opazovanja opoldanske sence navpičnega kola na domačem dvorišču (slikano oktobra 1998). Na desni sliki pa je cela vodoravna analema (slikano februarja 1999 ob koncu opazovanja).

Iz oblike vodoravne analeme hitro ugotovimo, da:

- opoldanska senca navpične palice ne pade vedno natančno proti severu, ampak le ob določenih datumih,
- pri orientaciji po opoldanski senci lahko v določitvi natančne smeri proti severu naredimo napako tudi do $\pm 5°$,
- se dolžina opoldanske sence najmanj spreminja ob Sončevih obratih (zato je treba okoli teh datumov pogosteje in natančneje opazovati opoldansko senco – da bi dobili čim lepše zaokrožen oval).

Analema je različna v različnih krajih. Za določen kraj jo lahko najdemo tudi v kakem računalniškem programu o astronomiji (slika 2).



Slika 2. Analema za naše kraje (zgoraj) in analema za kraje na ekvatorju (spodaj) – računalniški izpis (program ASTRO). Številke označujejo začetke mesecev. V drugih krajih ima analema nekoliko drugačna ovala, za kraje preko $\pm 60°$ zemljepisne širine pa nima več pomena. Poskusite razmisliti, zakaj.

Na podoben način lahko ugotovite tudi vašo analemo. Ni treba opazovati ravno opoldne in na vodoravnih tleh. Vendar, če že boste opazovali senco ob 10. uri, jo morate opazovati vedno ob 10. uri. Tla so lahko poševna in razgibana, npr. pobočje hriba (slika na III. strani ovitka). Namesto palice lahko uporabite električni drog, lahko pa tudi pokončen stožec na polici okna, ki je obrnjeno proti jugu (glej članek *Sencomer*, Presek **25** (1997/98), 16). Skratka, znajdite se. Bodite potrpežljivi in vztrajni. Če pa boste ugotovili, da pri dolgotrajnih opazovanjih sence trpite, se analemi takoj odpovejte.

Marijan Prosén

PRVO TEKMOVANJE IZ UNIXA

V okviru 23. tekmovanja srednješolcev iz računalništva in 5. festivala računalništva je bilo 24. aprila 1999 na Fakulteti za računalništvo in informatiko tudi prvo tekmovanje v kategoriji Unix, ki ga je organiziralo Slovensko društvo uporabnikov Linuxa. Glede na dolgo in uveljavljeno tradicijo računalniških tekmovanj za srednješolce, na katerih je velika teža dana problemom, ki so enostavno rešljivi s postopkovnimi programskimi jeziki, skuša to tekmovanje dati večji pomen rešitvam z alternativnimi orodji, znanimi iz programskega okolja sistemov Unix.

Pri pripravi nalog za tekmovanje smo se člani organizacijskega odbora ozirali naokoli v upanju, da bomo našli kakšen zgled podobnih tekmovanj po svetu. Našli nismo nič. Zato bi želeli vsaj svoje izkušnje posredovati drugim v upanju, da spodbudimo sodelovanje na tem področju. Tako zdaj predstavljamo naloge, zastavljene na lanskem tekmovanju. Njihove rešitve in komentarji bodo objavljeni v naslednji številki Preseka.

1. naloga: Frekvenčna analiza besedila Naredi preprosto frekvenčno analizo besedila. Preberi datoteko in na standardni izhod izpiši seznam vseh besed v datoteki in njihovih frekvenc. Seznam naj bo urejen po vrsti od najmanj frekventnih besed do najbolj frekventnih. Frekvenca je število, ki pove, kolikokrat se beseda pojavi v datoteki. V datoteki ni drugih znakov razen presledkov in črk.

2. naloga: Vi Na sistemu z veliko uporabniki se želiš izogniti temu, da bi isto datoteko z urejevalnikom `vi` odprl več kot en uporabnik hkrati. Predlagaj rešitev! Rešitev zapiši kot skript. Komentiraj, kaj so po tvojem mnenju prednosti in slabosti tvojega predloga. Predpostaviti smeš, da vsi uporabniki kličejo urejevalnik tako: `vi` *datoteka*. Urejevalnik `vi` sam po sebi ne opozori, ali je neko datoteko že odprl kdo drug.

3. naloga: Premešaj V neki datoteki so vrstice urejene po določenem kriteriju. Ta urejenost te moti, zato želiš vrstice psevdonaključno premešati. Napiši kodo, ki bo to storila. Bodi pozoren na učinkovitost svojega predloga. "Psevdonaključno" pomeni, da smeš uporabiti generator naključnih števil, ki ti je v tvojem orodju na voljo.

4. naloga: Številke IP V tekstovni datoteki so na več mestih zapisani številski naslovi IP, ki jih želiš spremeniti v polnovredno ime računalnika (FQDN, angl. fully qualified domain name).

V bazi `/etc/hosts` so po vrsticah navedeni številski naslov in njegovo polnovredno ime:

```
193.2.1.72 nanos.arnes.si
```

V datoteki razen takih zapisov ni nič drugega.

Številski naslov IP je lahko oblike: `0.0.0.0–255.255.255.255`. Brez škode za splošnost lahko predpostaviš, da v tvoji datoteki vsak zapis oblike `0.0.0.0–999.999.999.999` predstavlja številski naslov IP in da imajo vsi v datoteki zapisani številski naslovi pripadajoča polnovredna imena v bazi. Upoštevaj še, da se naslovi IP razen s presledki ne stikajo z drugimi znaki.

Pri vseh nalogah je bila dovoljena uporaba ukazov ukaznih lupin (`csh`, `sh`, `bash`, `ksh`, ...), skriptnih jezikov (Sed, Awk, Perl, ...) in običajnih programov, ki sestavljajo sistem UNIX skladno s priporočilom POSIX.1. Višjih programskih jezikov (C, pascal, fortran, ...) ni bilo dovoljeno uporabiti. Če so bili tekmovalci v dvomu, ali so uporabljena sredstva dovoljena, so lahko kadarkoli za nasvet povprašali nadzorno komisijo. Odločitev nadzorne komisije je bila dokončna.

Tekmovanja se je udeležilo 13 tekmovalcev. Za reševanje nalog so imeli 90 minut časa, smeli so uporabljati literaturo, niso pa imeli dostopa do računalnika, kjer bi lahko svoje ideje preverili. Komisija je zato navzlic morebitnim napakam v skladnji ugodno obravnavala tudi rešitve, ki so vsebovale pravilne zamisli, ter po pregledu oddanih nalog sklenila podeliti tri nagrade:

1. Andraž Tori, ZRI Ljubljana, 3. letnik
2. Mitja Bezget, SERŠ Maribor, 2. letnik
3. Gašper Fele-Žorž, Gimnazija Kranj, 4. letnik

Vsi tekmovalci, ne le nagrajenci, so prejeli tudi praktične nagrade, ki so jih prispevali sponzorji.

Organizatorji menimo, da je bila prvo leto nekoliko slabša udeležba predvsem zaradi pomanjkljive obveščenosti. To nameravamo letos, ko bo v okviru 6. festivala računalništva v začetku aprila drugo tovrstno tekmovanje, popraviti.

Za konec še kratek komentar o imenu samega tekmovanja. Unix (ali Linux) v ožjem pomenu besede pomeni le jedro operacijskega sistema. Naloge na ravni jedra niso bile del tekmovanja in – glede na omejen čas in sredstva tekmovalcev – ta hip niti ne bi bile smiselne. Pošteno pa se nam zdi priznati, da smo se v iskanju kompromisa med kratkimi in privlačnimi imeni ter natančnimi in dolgimi odločili nekoliko v prid prvih. Kaj se ve – morda pa nam nekaj ohlapnejša definicija morda kdaj še prav pride?

Primož Peterlin in Aleš Košir

MERJENJE GOSTOTE Z URO

Na urniku za naslednji dan, ki ga je dobil Miš, so bile spet eksperimentalne vaje iz fizike. Fiziko je imel rad, bila je edini predmet, kjer so občasno odšli iz šole v naravo in tam opazovali vse mogoče pojave, brez motečega zraka, trenja, teže in kar je še takih stvari, ki so nekdaj grenile življenje srednješolcem pri fiziki. Vremenska napoved je bila ugodna: sončna aktivnost bo na minimumu, ni se bilo bati zahrbtnega sevanja, ki je včasih prekinilo vaje na prostem in primoralo njihovega profesorja, da je godrnjaje ukazal povratek v šolo.

To pot je vaja imela preprost naslov: Merjenje gostote. Nenavadno je bilo, da so za to vajo šli v naravo, saj so gostoto brez težav že merili v laboratoriju v šoli. Dobili so kocko iz neznane snovi ter ji najprej natančno izmerili stranico a in nato izračunali njeno prostornino $V = a^3$. Potem so kocko še stehtali, da so določili njeno maso in izračunali gostoto po enačbi $\varrho = \frac{m}{V}$. Kar se da preprosta vaja, nekoliko si moral biti pazljiv, da si dobil rezultat, ki je smel biti le za tisočinko različen od pravega.

Preden so se odpravili v naravo, so vedno natančno pregledali seznam naprav, s katerimi bodo delali poskuse. Ni se bilo prijetno vračati, saj je pot kljub hitrim raketnim čolnom včasih trajala več ur. A nikakršnih naprav ni bilo v seznamu. "Saj imate ure na roki?" je vprašal profesor začudene dijake. "No, potem imate vse, kar potrebujete," je dejal profesor. "Komur je potekla naročnina na VSEVED, naj vzame s sabo še kak predpotopni kalkulator." VSEVED je bila družba, ki je skrbela za povezavo z globalno zakladnico podatkov GLODAT in globalnim računskim vozlom GLORAČ, ki je skrbel za računanje. Dijaki navadno niso plačevali naročnine, saj so računali doma ali v šoli, v naravi pa so le merili in zbirali podatke.

Mišev raketni čoln je bil zadnje čudo tehnike, dobil ga je za rojstni dan. Iz baze na Zemlji je dosegel geostacionarno orbito v pičle pol ure, od tu pa je lahko dosegel katerikoli planet Osončja prej kot v enem mesecu. Koordinate mesta, kjer naj bi se zbrali naslednji dan, je profesor že vpisal v Vsevedov sistem. Miš je zvedel, da je to blizu planetoida, krogle s polmerom kakega kilometra, drugih podatkov pa iz Vseveda ni mogel izbrskati. Očitno je profesor podrobne podatke o planetoidu dijakom zastrl. Odhod Miševega čolna je bil predviden pozno popoldne, v petnajsturnem poletu je Miš obvezno moral devet ur preživeti v povsem zatemnjeni notranjosti, da se je do cilja povsem spočil. Preostali čas je prebil v vesolju in se poganjal z raketnikom od čolna in nazaj. Lebdenje v tej veliki praznini ga je vedno navduševalo, nekatere njegove sošolce pa je navdajalo z nepopisno grozo. Ti so potovali v veliki ladji, ki jo je profesor najel za dijake brez lastnih raketnih čolnov. Na prvi pogled zelo tvegano dejanje je bilo v resnici povsem varno, saj je čoln s svojo pametjo in biosenzorjem vedno vedel, kje je Miš in bi ga šel iskat, če bi razdalja med njima postala prevelika. O vsem pa je bil seznanjen tudi Vseved, ki je v skrajni sili posredoval s svojo reševalno ekipo.

Na površini planetoida so se ob dogovorjenem času zbrali dijaki in se s profesorjem pogovarjali o nalogi, kako izmeriti gostoto tega telesa. Nekdo je predlagal, da bi kos s površine odnesli na Zemljo in tam izmerili gostoto po že znani metodi. To bi se skladalo s pičlo opremo, ki so jo dijaki prinesli s seboj. Seveda to ni bila rešitev naloge, saj so morali izmeriti povprečno gostoto planetoida, ki je znotraj lahko povsem drugačen kot na površini. Merjenje teže kake znane uteži tudi ni prišlo v poštev, saj niso imeli vzmetnih tehtnic, še posebno pa ne kake zelo občutljive. Dijaki so videli, da je težni pospešek zelo majhen, saj so vseskozi uporabljali raketnike, da so se obdržali na površini. Vsak še tako rahel poskok je zadoščal, da so se odlepili od tal in se začeli dvigati v vesolje. Pospešek bi lahko izmerili z merjenjem časa, ki ga porabi kamen, da pade na tla, ali še bolje, z merjenjem časa, ki ga porabi kamen, ki ga vržemo s površine navzgor, da pade nazaj na tla. Hitro pa so ugotovili, da, tudi če bi poznali pospešek prostega pada na planetoidu, vodi pot do poznavanja gostote še preko meritve njegovega polmera, za to pa niso imeli nikakršne opreme. Velja namreč, da je teža uteži z maso m enaka gravitacijski sili

$$mg = \kappa \frac{mM}{r^2} ,$$

torej imamo za gostoto

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3g}{4\pi\kappa r} .$$

Janez je razmišljal takole: če izmerim višino h, do katere pride kamen, s koraki in izmerim obseg planetoida s prav tako dolgimi koraki, mi njihove dolžine ni potrebno poznati, saj velja

$$\frac{gt^2}{2} = h$$

in zato

$$\varrho = \frac{6h}{4\pi\kappa r t^2} ,$$

kjer je t polovični čas, ki ga potrebuje kamen, da se dvigne s tal in spet pade nanje. Poznati moramo torej le razmerje $\frac{h}{r}$, pri tem pa se dolžina korakov pokrajša. Profesor je pohvalil Janeza, a meritev višine s korakanjem ni bila kar tako izvedljiva. Poskušali so vse mogoče, poskušali so celo postaviti živo piramido z izdatno pomočjo raketnikov, a meritev se nikakor ni posrečila.

Nak, samo z uro pa že ne bo šlo, so sklenili dijaki. Miš se je začel zabavati s skokom v daljino. Vsak skok je bil zelo dolg, kljub komaj zaznavnemu odrivu od tal. Nenadoma se je domislil rešitve naloge. Kaj pa, če bi se kot satelit vtiril v orbito, ki je tik nad površino planetoida? Na krožeče telo mora delovati centripetalna sila $m\omega^2 r$, njeno vlogo prevzame gravitacijska sila $\kappa\frac{mM}{r^2}$, torej velja

$$m\omega^2 r = \kappa\frac{mM}{r^2} = \kappa\frac{m\varrho 4\pi r^3}{3r^2} .$$

Iz tega pa takoj sledi

$$\omega^2 = \frac{4\pi}{3}\kappa\varrho .$$

Poznati moramo le $\omega = \frac{2\pi}{t_0}$, to pa gre le z meritvijo časa obhoda takega satelita t_0, kar se da opraviti le z uro. Profesor je prikimal, Petru pa nekaj ni bilo všeč. "To pomeni", je ugovarjal, "da je obhodna doba takih satelitov neodvisna od polmera telesa. Tudi če bi imeli frnukulo, bi jo droben prašek obkrožil v enakem času kot to veliko kroglo. To je pa čudno!" Profesor je še dodal: "Morda se sliši nenavadno, a je le res. Krogli morata seveda imeti enaki gostoti."

Pripravili so tekmovanje. Vsakdo naj bi se pazljivo odrinil od startne črte in zaplaval okrog planetoida. Zmagovalec bo tisti, ki bo prišel prvi okrog planetoida. Vsem je bilo jasno, da bo zmagal tisti, ki se bo ravno prav odrinil in to tako, da bo plaval ves čas tik nad površino. Prehitre bo preveč odneslo od planetoida, prepočasni pa se bodo morali dotaknili tal in se od njih rahlo odriniti, kar podaljša čas obhoda. Uporaba raketnika je bila med dirko seveda prepovedana. Dijaki so začeli mrzlično ocenjevati primerno hitrost. Gostote niso poznali, prav tako ne polmera planetoida. Miš je privzel za gostoto $\varrho = 3000\ \mathrm{kg/m^3}$ in za polmer $r = 1$ km ter izračunal čas $t_0 = 6900$ s. Nato je izračunal začetno hitrost iz enačbe

$$v = \frac{2\pi r}{t_0} .$$

Za hitrost v je dobil oceno 1 m/s, kar je hitrost sprehajalca na Zemlji. Startali so z vzpetinice vsi hkrati. Miševa ocena kročilne hitrosti je bila prenizka, saj se je kmalu moral dotakniti tal. Zmagal je Lovro, ki je prispel na cilj po 4335 sekundah, to je nekaj manj kot po eni uri in četrt. Nekaj dijakov se je toliko oddaljilo od tal, da so za povratek morali uporabiti raketnik. Iz Lovrovega časa so izračunali gostoto planetoida iz enačbe

$$\varrho = \frac{3\pi}{\kappa t_0^2}$$

in dobili rezultat $\varrho = 7515$ kg/m^3. Ker se tudi Lovro pri obkrožanju nekoliko oddaljil od površine, je bil njegov sicer zmagoviti čas daljši od časa t_0. Izračunana gostota je bila tako nekoliko manjša od prave. Dijaki so sklepali, da je planetoid zgrajen pretežno iz železa.

Andrej Likar

DRUGO SREDOZEMSKO MATEMATIČNO TEKMOVANJE

Prof. Francisco Bellot Rosado iz Španije, eden od dveh predstavnikov za Evropo v *Svetovni zvezi nacionalnih matematičnih tekmovanj*, je na *mednarodni matematični olimpiadi* v Mar del Plati v Argentini julija 1997 dal pobudo za uvedbo *matematičnega tekmovanja sredozemskih držav*. Predstavnikom sredozemskih držav je predstavil tudi predlog pravil, podoben pravilom tekmovanja, v katerem sodelujejo Španija, Portugalska in države Latinske Amerike. Po prejetih pripombah in usklajevanjih je bilo vse pripravljeno za preskusno tekmovanje v aprilu leta 1998. Tedaj so od naših tekmovalcev prejeli bronasto odličje Matija Mazi z Gimnazije Bežigrad, Tomaž Kosem in Jure Kališnik s ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava ter Martin Milanič z Gimnazije Koper, pohvalo pa Matjaž Titan z Gimnazije Murska Sobota in Dušan Jan z Gimnazije Tolmin.

Od leta 1999 dalje lahko na tekmovanju poleg sredozemskih držav sodelujejo tudi sredozemskim sosednje države. V ekipi posamezne države sme uradno sodelovati največ 10 tekmovalcev, drugi rešujejo naloge izven konkurence. Poročilo o tekmovanju se skupaj z rezultati ter izdelki in prevodi prvo, tretje in sedmouvrščenega tekmovalca pošlje posebni skupini, ki jo trenutno vodi prof. Bellot. Ta nato predlaga seznam tekmovalcev, ki naj bi prejeli priznanja, predlog pa je sprejet, če se z njim strinja večina članov komisije, v kateri je po en predstavnik vsake sodelujoče države. Podoben postopek je pri izboru nalog: vsaka država lahko pošlje omenjeni skupini predloge tekmovalnih nalog, ta jih pregleda in izbere ter pošlje članom komisije v potrditev. Zanimivo je, da so lahko izbrane tri ali štiri naloge, čas reševanja pa je predpisan (4 ure in pol).

Kriteriji za podeljevanje priznanj so precej natančno izdelani. Nekoliko preseneča določilo, da ni delitve mest. Ko sestavlja poročilo o tekmovanju v svoji državi, se mora član komisije s pomočjo svojih sodelavcev pri morebitni delitvi mest odločiti o doseženem mestu tekmovalca glede na elegantnost, izvirnost, jasnost ali "čednost" posamezne rešitve oziroma izdelka. Zlato odličje lahko prejme kvečjemu en dijak posamezne države, srebrno največ dva in bronasto največ štirje. Tekmovalec, ki ni prejel odličja, je pa vsaj eno od nalog pravilno rešil, prejme pohvalo.

Ker so naloge relativno težke, včasih kar "olimpijskega tipa", povabimo na to tekmovanje le dijake, ki so v postopku izbora olimpijske ekipe na prvih desetih do petnajstih mestih. Na drugem sredozemskem tekmovanju, ki je bilo aprila 1999, so dijaki reševali naslednje naloge:

1. Ali obstaja krožnica in neskončna množica točk na njej tako, da je razdalja med poljubnima dvema točkama množice racionalna?

2. Na ravnini, na kateri je narisan običajni pravokotni koordinatni sistem, leži lik s ploščino A. Dokaži: če je $A > n$ (kjer je n naravno število), lahko lik postavimo na ravnino tako, da pokrije vsaj $n+1$ točk s celoštevilskima koordinatama.

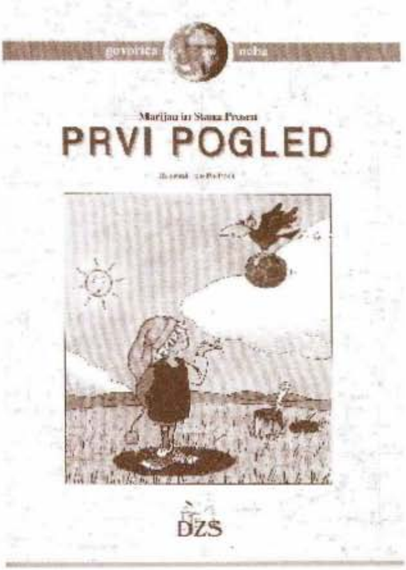
3. Naj bodo a, b in c neničelna realna števila, x, y in z pa pozitivna realna števila, za katera velja $x+y+z=3$. Dokaži, da velja
$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} \geq \frac{x}{1+a^2}+\frac{y}{1+b^2}+\frac{z}{1+c^2}\,.$$

4. Označimo stranice trikotnika ABC, v katerem je notranji kot pri B štirikrat večji od notranjega kota pri A, na običajni način: $BC=a$, $CA=b$ in $AB=c$. Dokaži, da velja
$$ab^2c^3 = \left(b^2-a^2+ac\right)\left(a^2-b^2+ac\right)^2.$$

Na drugem sredozemskem matematičnem tekmovanju je od naših dijakov odličje sicer prejel le Jure Kališnik s ŠC Celje – Splošna in strokovna gimnazija Lava, ima pa zlat sijaj. Pohvalo je prejela Irena Majcen z Gimnazije Bežigrad.

Darjo Felda

Marijan in Stana Prosén: PRVI POGLED



V zbirki *Govorica neba*, ki naj bi na zanimiv in prijeten, a kolikor se da enostaven in nevsiljiv način posredovala znanje astronomije v vseh razredih bodoče devetletke, je izpod peresa avtorjev Marijana in Stane Prosén nastala prva knjižica *Prvi pogled*. Vsebuje snov, ki je predvidena za prvo triletje bodoče osnovne šole. Avtorja, ki sta se že večkrat izkazala z velikim posluhom, kako astronomske vsebine približati najmlajšim, sta se zavedala starosti bralcev oziroma bolje opazovalcev, zato sta si učbenik zamislila kot pobarvanko in hkrati tudi kot priročnik za učitelje in starše.

Kot učbenik je knjižica dobro zasnovana. Snov je razdeljena na posamezna poglavja, vsako obsega dve strani in je zaključena celota. Predstavljena je s prisrčnimi ilustracijami Eda Podreke, v katerih nastopajo deček, deklica, bik in ptič. Kadar nastopajo skupaj, otroka izvajata vse vaje pravilno, bik pa vedno narobe. Ptič igra vlogo opazovalca, pa tudi ocenjevalca dejavnosti obeh otrok in bika. Ilustracije, ki so samo delno pobarvane, igrajo dvojno vlogo. Preprosto in nazorno nam približajo astronomske vsebine, s svojo hudomušnostjo pa pritegnejo otroke k opazovanju, barvanju in aktivnemu sodelovanju. Posebnost učbenika je tudi v tem, da želi otroke vzpodbuditi in pritegniti k opazovanju narave. Otroci naj ne bi bili le poslušalci v razredu, temveč naj bi si določene pojave ogledali na prostem in ob tem tudi pridno telovadili.

Kot priročnik za učitelje in starše pa učbenik prinaša metodične napotke. Prikaže nam cilje in namene določenega poglavja in nam ponudi nasvete, kako posamezne dejavnosti izpeljati bodisi v razredu bodisi na prostem.

Ob koncu nam učbenik ponudi tudi tri preskuse znanja na treh težavnostnih stopnjah. Razveselili se jih bodo tako učitelji kot starši, najverjetneje pa tudi otroci, saj zelo radi preverijo, koliko so se naučili.

Darja Delač Felda

LEONARDO DA VINCI IN FIZIKA

Leonardo da Vinci ni bil fizik, če upoštevamo, da se je fizika v današnjem pomenu besede začela s 17. stoletjem. Bil pa je med tistimi zaslužnimi možmi, ki so fiziki utrli pot.

Gibanje za oživitev antičnih misli – *humanizem in renesansa* – se je začelo v 14. stoletju v Italiji in je v poltretjem stoletju Evropi prineslo velike spremembe. Razvilo se je meščanstvo, razrasla obrt, odkrili so nove dežele in izumili tisk. Pogled na naravo pa se ni spremenil tako silovito. Še je prevladovala Aristotelova slika iz četrtega stoletja pred našim štetjem. V njej je bil svet ločen na nespremenljivi del za Luno ter na spremenljivi del pod njo. Središče vesolja je bilo središče okrogle Zemlje, okoli katerega so bili razvrščeni elementi zemlja, voda, zrak in ogenj. V svetu pod Luno je obstajalo poleg gibanja živih bitij naravno in prisilno gibanje. Pri naravnem gibanju so se telesa sama od sebe vračala v naravni red elementov. Za vzdrževanje prisilnega gibanja pa je bilo potrebno nenehno delovanje "sile".

Velike težave so imeli s prisilnim gibanjem puščic in drugih izstrelkov. Za vzdrževanje takega gibanja naj bi bilo potrebno nenehno delovanje "sile". To naj bi povzročal zrak, ki ga je v gibanje najprej spravila puščica. Potem je puščico v gibanje spravljal zrak, ko je vdrl v prostor, ki ga je puščica pravkar zapustila. Vendar je pojasnilo nasprotovalo izkušnjam pri metu kopja in pri potovanju, ko je zrak deloval v nasprotni smeri gibanja. V 6. stoletju so zaradi tega uvedli dodatno "gibalno silo", ki jo tetiva da puščici in ki jo ta potem počasi izgublja. Tako se je razvil pojem *impetusa*, ki je bil z današnjega gledišča precej meglen. Vseeno v njem lahko vidimo zasnovo poznejše gibalne količine, produkta mase in hitrosti telesa.

Dodatek impetusa je Aristotelovi sliki pomagal iz opisane težave, toda v 14. stoletju so se začele kazati druge pomanjkljivosti. Tedaj so začeli delati prve poskuse in so si prizadevali njihove izide zajeti s števili. V 15. stoletju so počasi uvajali merjenje. Precej zaslug za to je imel Nikolai Cusanus ali Nikolai Krebs (1401 do 1461) iz Küsa, poznejši brižinski škof in kardinal. Trdil je, da se snov vesoljskih teles ne razlikuje od snovi Zemlje. Zemlja se giblje in v vesolju nima posebnega položaja. Zvezde so oddaljena sonca in vesolje nima meje. Stavil je na impetus. Zagotavljal je, da mora raziskovanje temeljiti na merjenju. Merjenje ali mera – mensura – je po njegovem mnenju izhajala iz besede mens (razum, mišljenje). Posebno pomembno se je Cusanusu zdelo merjenje teže in tehtnica mu je bila vzor za merilno napravo. Stehtal je zrak, s tehtanjem platna določil vlažnost zraka in s tehtanjem vode, ki je iztekla iz posodice, meril čas gibanja.

Da Vinci se je naslonil na Cusanusa. Tudi on je zagovarjal enotnost snovnega sveta in mislil, da so na Luni morja in kopno ter da so tam razvrščeni elementi tako kot na Zemlji. Vedel je, da Luna odbija sončno svetlobo in je med prvimi trdil, da ob prvem in zadnjem krajcu del Lune v senci osvetljuje sončna svetloba, ki se odbije na Zemlji. Leonardo je ugotovil, da se pri mirujočih telesih vpliv teže na krajišču vzvoda zmanjša, ko vzvod nagnemo proti pravokotnici. Pri tehtnici z ukrivljenim vzvodom zato ni pomembna dolžina vzvodov, ampak *potencialna dolžina*. Zanimal se je za klanec. Telesi je povezal z vrvjo in ju postavil na nasprotna klanca. Ugotovil je, da sta v ravnovesju, če sta teži obratno sorazmerni s "poševnostma", ki pa ju ni podrobno opredelil. Pri tem je spoznal paralelogram sil. Delovanje škripcev, vzvodov in tehtnic je Leonardo pojasnil z izrekom o vzvodu. Podobno kot Cusanus je imel vzvod in tehtnico za zgled vseh mehaničnih naprav.

Raziskovanje gibanja teles je bilo tedaj še v povojih. Da Vinci je prispeval več tehtnih misli, ki so prekašale misli njegovih sodobnikov, ne da bi naredil odločilen korak. Sprejel je Cusanusov nauk o impetusu. Čeprav impetus lahko nastane na različne načine, vedno sila povzroči na gibajočem se telesu drugo silo, podobno sebi. Po tedanji navadi je da Vinci razpravljal o vlogi impetusa in teže pri metu navpično navzgor. Telo naj bi se gibalo navzgor, ko impetus preseže težo, s hitrostjo, sorazmerno z razliko impetusa in teže. Dviganje naj bi postajalo vse počasnejše zaradi zmanjšanja impetusa. Pridružil se je mnenju, da je pri poševnem metu treba ločiti tri dele. V prvem je gibanje prisilno in se izstrelek giblje po ravni črti. V drugem delu je gibanje sestavljeno, delno prisilno in delno naravno, in se telo giblje po loku. V tretjem delu je gibanje naravno in izstrelek pada navpično navzdol.

Kot sodobniki tudi da Vinci ni bil dosleden. Dopustil je čisto ukrivljeno gibanje vodnih curkov, a se v nekem drugem primeru ni držal osnovne zamisli, da je vsiljeno gibanje vedno premo. Mislil je, da se telo giblje po krogu, ko ga spustite, če ste ga prej prisilili v gibanje po krogu. Vendar se je približal misli, da je vsa pot izstrelka ukrivljena in je gibanje na vsej poti sestavljeno iz "prisilnega" in "naravnega".

Nekatere da Vincijeve trditve se danes zdijo dokaj nenavadne. Zraku je pri padanju kamna pripisal dvojno vlogo. V njem naj bi pred padajočim kamnom in za njim nastal val. Prvi val naj bi gibanje kamna zaviral, drugi pa spodbujal. Poleg tega naj bi se zrak upiral gibanju kamna, a upor naj bi zaradi obeh valov ne bil enakomeren. Zato je mislil, da se pri padanju po zraku telo ne giblje ne enakomerno pospešeno ne enakomerno. Čeprav so tedaj že ločili hitrost in pospešek, ni nihče poskusil padanja povezati s pospešenim gibanjem.

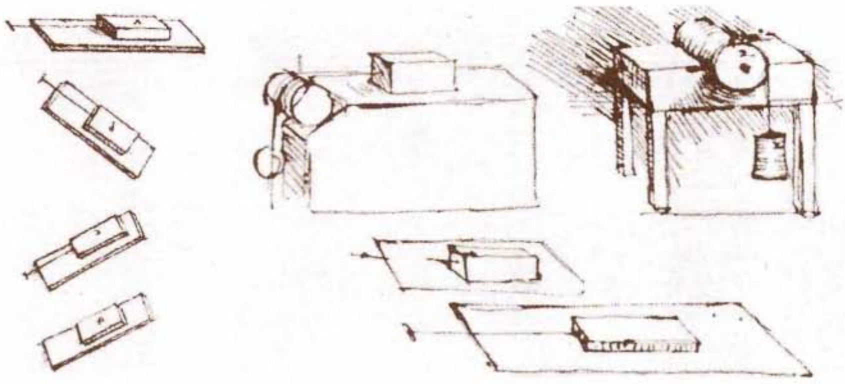
Ujet v stare predstave, je Leonardo da Vinci imel nekaj posrečenih zamisli. Raziskal je trk, ki mu je bil zgled za prisilno gibanje. Trdil je, da se telo na vodoravni ravnini odbije z enako silo in z enakim kotom. Gibanje telesa pred odbojem naj bi povzročal impetus, gibanje po odboju pa "sila" trka. Za tem je mogoče zaslutiti misel o ohranitvi impetusa. Da Vinci je trdil, da se impetus pri trku ne izgubi, a je privzel, da je sestavljeno gibanje omejeno samo na majhno razdaljo po trku. Trk naj ne bi pripeljal samo do enake nasprotne "sile", ampak do polnega ali delnega prenosa "sile" od telesa na telo. V naslednjih sto letih ni nihče prekosil tega razmišljanja, v katerem se skriva daljnja slutnja poznejšega zakona o vzajemnem učinku.

Da Vinci se je zanimal za gibanje po zraku, še posebej za let. Narisal je, kako pada kocka, ki se prevrača, in dostavil, da težišče ostane na navpični premici. Trdil je, da je let stabilen, če je težišče pred prijemališčem upora. Kot kaže, je prvi uporabil težišče pri obravnavanju gibanja.

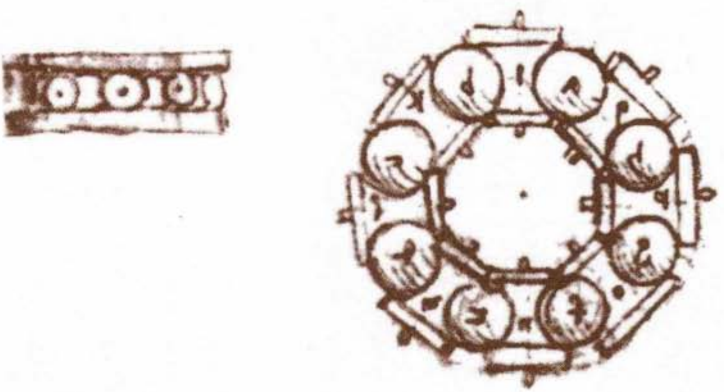
Leonardo da Vinci je raziskoval lok in samostrel ter gibanje puščice. Trdil je, da bi puščica dosegla veliko hitrost, če bi jo izstrelili z dirjajočega konja in bi v tistem trenutku še vrgli lok naprej. Razmišljal je o seštevanju hitrosti in o tem, ali obstaja pri tem kaka zgornja meja. Zamislil si je velikanski lok, ki bi ga napeli z vitlom, in uvidel, da se zaradi povečanja pojavijo težave. Na vodoravno tetivo je obešal uteži in ugotovil, da se pritrdišče ni znižalo sorazmerno s povečanjem teže. Opazil je, da se pri napenjanju loka del ogrodja nategne, drugi del stisne in da je med deloma plast, ki ni ne napeta ne stisnjena.

Da bi razumel delovanje strojev, je da Vinci raziskal trenje. Pri tem je uporabil silomer, kakršnega so uvedli šele v 18. stoletju. Narisal je podobno mizo, kot jo je za raziskovanje trenja v 18. stoletju uporabil Charles de Coulomb. Raziskal je trenje pri drsenju in pri kotaljenju ter pri slednjem opazoval odvisnost od polmera. Ugotovil je, da je trenje pri drsenju odvisno od obdelave ploskev in sorazmerno z bremenom, a neodvisno od površine dotikalne ploskve. Lenoardo je vpeljal koeficient trenja kot razmerje med silo, ki je potrebna za premikanje po vodoravni podlagi, in bremenom. Pri zglajenih površinah je dobil zanj $\frac{1}{4}$, kar je dober približek pri trenju trdega lesa po trdem lesu, brona po jeklu in nekaterih drugih snoveh, s katerimi je delal poskuse.

Pozneje je Leonardo da Vinci raziskal trenje v strojih, ki je bilo tedaj zelo nadležno, ker so se zaradi njega vrteči se deli hitro obrabili. Ugotovil je, da se kovina okoli vodoravne osi ni vedno najbolj obrabila v navpični smeri, ampak je bila smer obrabe odvisna od smeri bremena. Ker se je obrabila tudi os, je postajala odprtina vse večja. Poskusil je os mazati



Slika 2. Naprave, s katerimi je da Vinci raziskal trenje.



Slika 1. Kroglični ležaj z vencem na da Vincijevi risbi.

z oljem, ki je iztekalo iz posodice, a ugotovil, da nastali drobci kovine zamašijo dovod olja. Iskal je možnosti za zmanjšanje obrabe. Tako je opisal ležaj s "kovino za zrcala iz treh delov bakra in sedem delov kositra". Pri tem je bilo mogoče s čeljustmi zmanjšati odprtino, ko se je os obrabila. Take ležaje z mehko *ležajno kovino* so predlagali skoraj dvesto let pozneje. Leonardo je prišel tudi na misel o krogličnih in valjčnih ležajih. Krogle in valje so že prej uporabljali za zmanjšanje trenja, a v stroje so ležaje uvedli šele okoli leta 1900. Z valjčnimi ležaji je da Vinci izboljšal delovanje vitlov. Trdil je, da se krogle ali valji v ležaju ne smejo dotikati med seboj, in je na risbi kroglični ležaj opremil z vencem. Posebno posrečen je bil predlog za navpično os s stožčastim krajiščem in s tremi kroglicami ali stožci. Pred osemdesetimi leti so podoben ležaj uporabili v vrtavki.

Slika 3. Najboljša oblika zob zobatih koles.

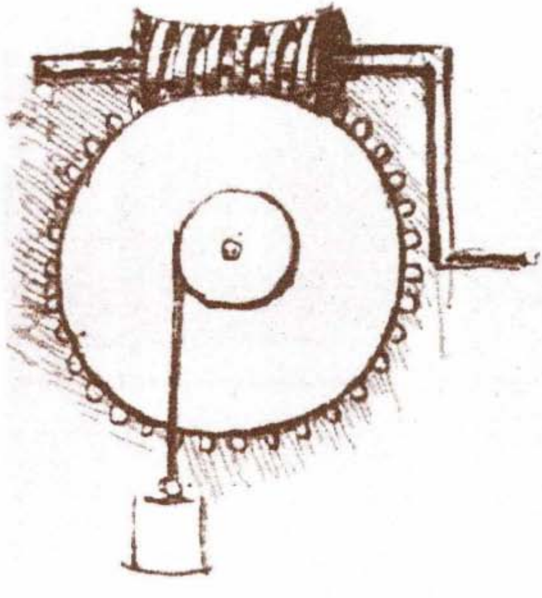
Leonardo da Vinci je razmišljal o zobeh zobatih koles in ugotovil, da so glede trenja najboljši cikloidni zobje, kar so ponovno odkrili dvesto let pozneje. Narisal je več naprav z Arhimedovim "neskončnim vijakom", omenil njegove prednosti pri gradnji ur in predlagal novo vrsto zob, kakršne so vpeljali v 18. stoletju. Izumil je tračno zavoro, s katero je povečal trenje. Raziskoval je pogon z vrvmi in ugotovil, da je mnogo manj hrupen kot gibanje koles in vreten. Na nekaterih risbah je vrvi zamenjal z jermeni in nakazal možnost za nekaj novih naprav. Med njimi je bil tudi blažilec sunkov, ki naj bi zavrl človeka pri padcu z višine. Prepleteni klini naj bi s trenjem zmanjšali hitrost, na dnu pa naj bi bala volne dokončno ublažila padec. Raziskovanje trenja je da Vincija prepričalo, da ni mogoč perpetuum mobile in vzkliknil: "O, tisti, ki razmišljate o večnem gibanju, koliko utvar ste zaman ustvarili v tem prizadevanju?"

V optiki je da Vinci omenil steklo, s katerim je opazoval povečano Luno. Zapisal je, da je potrebno za opazovanje narave planetov odpreti streho in speljati sliko planeta na konkavno zrcalo. Slika planeta, ki se odbije na zrcalu, pokaže zelo povečano površje planeta. Upoštevajte, da je prvi nebo opazoval z daljnogledom Galileo Galilei leta 1609, prvi daljnogled z ukrivljenim zrcalom pa je okoli leta 1671 izdelal Isaac Newton. Da Vinci je tudi pojasnil nastanek slike v cameri obscuri in je raziskoval delovanje človeškega očesa.

Da Vincija je zanimala tudi hidravlika, izumil je merilnik višine gladine in narisal številne načrte za kanale. Razmišljal je o vplivu Lune na plimo. Mislil je, da so pojavi kot zvok, svetloba, toplota, magnetizem, vonj osnovani na "nihajočem gibanju". Dotaknil se je dolgotrajnih sprememb na površju Zemlje, npr. nastanka kontinentov. Domneval je, da okamenele školjke daleč od morja pričajo o premikanju zemeljskih skladov.

Leonardo da Vinci je nastopal proti praznoverju in se zavzemal za poskuse: "Poskus je bil učitelj tistih, ki so dobro pisali, v vsakem primeru je moj učitelj." Poskusu je namenil temeljno vlogo, saj je imel modrost za hči poskusa. Razmišljal je o poti od poskusa do znanstvene posplošitve in se zavedal možnosti, da nas čuti lahko prevarajo. Zato je treba poskus ponoviti v spremenjenih okoliščinah: "Preden izpelješ iz posameznega primera splošni zakon, ponovi poskus dvakrat ali trikrat, [da ugotoviš], ali povzročijo eni in isti poskusi ene in iste učinke." Zagotovil je, da je poskus veliko boljši kot razmišljanje in učenje iz knjig, a hkrati opozoril: "To imenujemo praksa, toda upoštevaj, da naj bo pred tem teorija." Vseeno v Leonardovi zapuščini ni najti teorij.

Omeniti moramo še druge da Vincijevih dejavnosti. Imel je zelo natančno oko in osupljive risarske spretnosti. Boljše slike valov na vodni gladini in zračnih mehurčkov v vodi, kot jih je narisal, so dobili šele s hitrimi filmskimi kamerami. Na vprašanja, ki si jih je postavil, je pogosto odgovarjal z risbami. Pri tem so ga pritegnila nova vprašanja, na katera je naletel. Posvetil se jim je, preden je prejšnja do kraja rešil. Na eni strani je tako širil krog zanimanja, a mu je na drugi zmanjkovalo časa.



Slika 4. Prenos s polžem.

Za današnje pojme je bil Leonardo da Vinci presentljivo vsestranski. Ukvarjal se je tudi z umetnostjo in tehniko, ki ji gre v njegovem delu pomembno mesto. Zanimalo ga je delovanje strojev. Med prvimi, če ne prvi, je spoznal, da stroje sestavljajo preprosti deli. Narisal je veliko naprav in strojev, povezanih z naravoslovnimi spoznanji. Njegovi načrti pa so bili dokaj odmaknjeni od tedanjega zanimanja in možnosti. Poleg tega je načrte skrival. Bil je levičar in je pisal v zrcalni pisavi, ki jo je težko brati. Danes poznamo več tisoč Leonardovih tehniških in naravoslovnih risb, le nekaj desetin umetniških slik in nekaj sto umetniških risb.

V da Vincijevem času med matematiko, naravoslovjem, tehniko in umetnostjo še ni bilo tako izrazitih meja kot danes. Vendar se je ločevanje že začelo in ni jih bilo veliko, ki bi obvladali več dejavnosti hkrati. Da Vinci je bil gotovo eden slednjih.

Pomena bežnih ali nejasnih predlogov ni lahko oceniti. Zato se sodbe o pomenu da Vincijevih tehniških risb precej razlikujejo. Eni zagotavljajo, da njegovi naravoslovni rokopisi niso bili znani do konca 18. stoletja. Vrhu tega naj bi bili načrti v njih zgolj sad domišljije. Drugi zatrjujejo, da je odkril skoraj vse sodobne naprave od oklepnega vozila do strojnice, od letala do helikopterja, od vodne turbine do parnega stroja in od daljnogleda do računalnika. Najbrž je pravi odgovor med obema skrajnostma.

Večina današnjih naravoslovcev in precej tehnikov sprejema stališča, da gre pretežni del zasluge tistemu, ki zamisel izpelje ali nalogo dokončno reši, in le manjši del tistemu, ki rešitev nakaže. Da Vincijeva risba, ki je na glasu kot zasnova helikopterja, se od pravega helikopterja bistveno razlikuje, in to velja tudi za večino drugih risb. Kljub takim pomislekom pa izstopa da Vincijeva vsestranskost in zbujata občudovanje število in raznovrstnost njegovih predlogov. Posebno imenitna je ugotovitev "to so naredili stoletje ali dve pozneje", ki smo jo tudi mi velikokrat ponovili. Zaradi vsega tega Leonarda da Vincija upravičeno štejemo za enega od ljudi, ki so odločilno sooblikovali iztekajoče se tisočletje.

Janez Strnad

TRIKOTNIKA

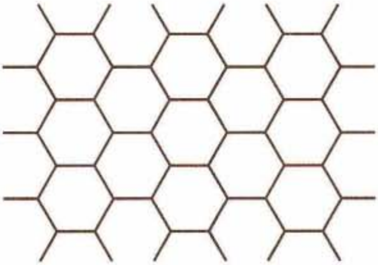
Dana sta dva trikotnika. Stranice prvega merijo 10, 13 in 13 enot, stranice drugega pa 24, 13 in 13 enot.

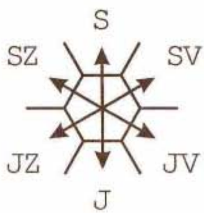
Premisli, kateri od trikotnikov ima večjo ploščino, ne da bi ploščini tudi izračunal.

Dragoljub M. Milošević

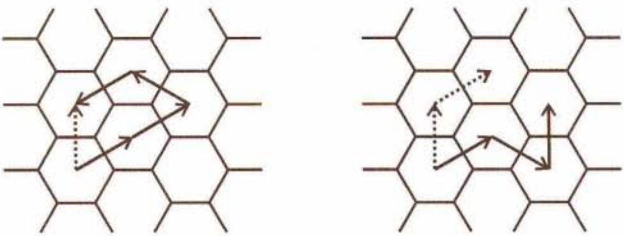
SATOVJE

Če se sprehajamo po (neskončni) kvadratni mreži v ravnini, ni težko ugotoviti, kdaj nas dva sprehoda pripeljeta do istega polja mreže. Če z S (sever) označimo premik navzgor, z J (jug) premik navzdol, z V (vzhod) premik v desno in z Z (zahod) premik v levo, lahko vsak sprehod predstavimo kot zaporedje črk S, J, V in Z. Sprehoda s skupnim začetkom nas pripeljeta do istega polja mreže natanko tedaj, ko je razlika med številom S-ov in J-jev v prvem zaporedju enaka tej razliki v drugem zaporedju (enak premik v navpični smeri), hkrati pa je tudi razlika med številom V-jev in Z-jev v obeh zaporedjih enaka (enak premik v vodoravni smeri).





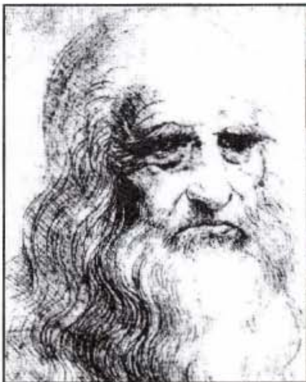
Še zanimivejši so sprehodi po šestkotni ravninski mreži (glej sliko). Z vsakega polja take mreže gremo lahko v šest smeri: S (sever), J (jug), SV (severovzhod), SZ (severozahod), JV (jugovzhod) in JZ (jugozahod). Sprehod lahko zopet opišemo z zaporedjem črk S, J, V in Z (pri čemer mora pred vsakim V-jem in Z-jem stati črka S ali J).



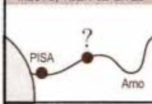
Vaša naloga je, da v enem od priljubljenih programskih jezikov napišete funkcijo, ki bo ugotovila, ali nas dva sprehoda po šestkotni mreži, ki se začneta na istem polju mreže, podana pa sta z zaporedjem črk S, J, V in Z, pripeljeta na isto polje mreže. Sprehoda SVSVSZJZ in S nas npr. pripeljeta do istega polja, sprehoda SVJVS in SSV pa ne (glej sliko).

Martin Juvan

KRIŽANKA O VELIKEM ZNANSTVENIKU, IZUMITEI



MESTO, KJER JE ŽIVEL



STROČNICA

FLAVTISTKA GRAFENAUER

VELIKA FRANC. REKA

REŽISER KUSTURICA

SL. FIZIK IN IZUMITELJ (JULIJ)

CIRI ŠKERJA

POŽREŠNICA

BEDA, REVŠČINA

TRDA, ZBITA PRST

VELIK USTNI

RIMS HAD

DEŠČICA ZA POKRIVANJE STREH

HITER AMER. PLES (ORIG.)

TORINO

SULTANOV RAZGLAS

BIL JE TUDI.....

KOŠČIČAST SADEŽ, ČEŠPLJA

STRIC PO MATERINI STRANI

IZDELAL JE NAČRT ZA.....

24 UR

FANT, KI NE PRIZNAVA DRUŽBENIH NORM

USAD

ESKIMSKO BIVALIŠČE

IZRAEL. PISATELJ (AMOS)

SL. PISA (VITAN

JURČIČ JUNA

DREVO Z BELIMI CVETOVI, ROBINIJA

SLOV. BIOLOG IN POTAPLJAČ (ARNE)

DROGA ZOPER KAŠELJ, IRSKI MAH

PLASTNICE

PREDNJI DEL TRUPA

ERBIJ

PISATELJ ZOLA

LEONARD COHEN

SL. REŽISER (MILE)

PLATINA

TALNA OBLOGA

SOCIOLOGINJA JOGAN

RUDNIŠKI JAŠEK

AVTOR MARKO BOKALIČ

PENEČE SE VINO

DENAR V EU

ZAVIRALNA SILA

NAJVEČJI SL. PESNIK

OJDIPOVO MESTO

JAPONSKA OBLIKA ROKOBORBE

NJEGOVA RODNA POKRAJINA

POKRAJINA V ZAHODNI GRČIJI

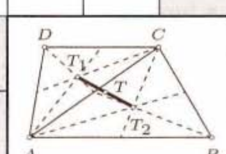
PEVKA PIAF

MIRAN JARC

TRESAV

LATINS VEZNI

NJEGOV SODOBNIK, ODKRITELJ AMERIKE



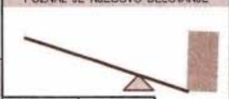
OBRAVNAVAL JE TUDI.....

PROPADLA MARIBORSKA TOVARNA

...LJU IN UMETNIKU

ZAHTEVNA SKLADBA ZA VAJO

POZNAL JE NJEGOVO DELOVANJE



VEČJI ČRN PTIČ

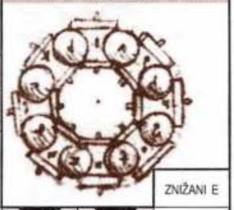
SOSEDI ČRKE V

POGLED, GLEDIŠČE

STVAR, KI JE NE IMENUJEMO

OPIS

NJEGOV IZUM



STROJILNA JAMA

DIVJA RACA

RUŠEVINE

NIKELJ

ZNIŽANI E

KRAJ OB SOČI

TEŽKA KOVINA (Zn)

VELIK PRAZNIČNI OGENJ

IVAN KUŠČER

DROBEN ZAJEDALEC, KI ŽIVI V DLAKAH

DOLINA NA KOROŠKEM

IT. PISEC COLLODI

NATRIJ

NEKDANJI INDIJSKI VLADAR

DEKLICA IZ ČUDEŽNE DEŽELE

PLEMENITA SLADKO-VODNA RIBA

UNITED NATIONS

ROM

NEKD. SOVJ. PREMIER (NIKOLAJ)

ŽLEBIČ V KRAŠ. TLEH

ŠUMNIK IN SIČNIK

STOIŠKI FILOZOF IZ HIERAPOLISA

PREBIVALCI EVROP. OTOŠKE DRŽAVE

TURŠKO LJUDSTVO V SREDNJI AZIJI

ANGLEŠKA PLOŠČIN. MERA

MAJHNA ŽLICA

PRITOK VOLGE

ŽE SKORAJ 500 LET JE....

BALETNIK OTRIN

URIN

MESTO V SEV. FRANC.

POZNAL JE TUDI....

MESTO, KJER JE ŽIVEL V STAROSTI

TABORNIK

GORAZD ŠTANGELJ

NAJVIŠJI VRH FILIPINOV (VULKAN)

GRČIJA

HLAČNI PRIŠITEK

NERESNICE

2. OSEBA EDNINE

RAJKO PIRNAT

VRHUNSKI ŠPORTNIK

KONEC ŠAHOVSKE PARTIJE

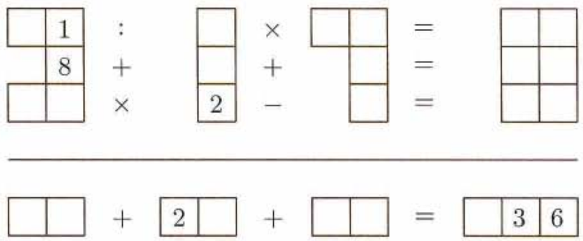
NA STROJ NAPISANO BESEDILO

ŠTEVILSKI UGANKI

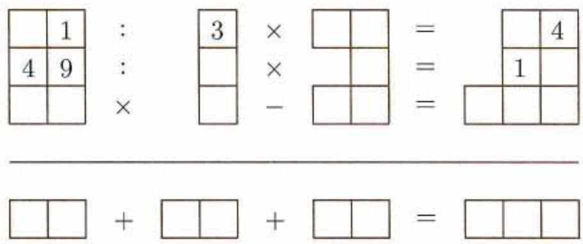
V prazna okenca posamezne sheme vpiši po eno desetiško števko tako, da bo za nastala števila veljalo:

1. Nobeno večmestno število se ne začenja s števko 0.
2. Pravilni morajo biti vsi računi, nakazani v vodoravnih vrsticah; operacije izvajamo vedno od leve proti desni.
3. Števila pod vodoravno črto so vsote števil v stolpcu nad njimi.

a)



b)



Marija Vencelj

IZLUŠČI IN DOKAŽI PRAVILO – Rešitev s str. 145

Če izračunamo vrednosti izrazov v posameznih vrsticah, dobimo zapored vsote 1, 2, 3 in 4.

Rezultati porode domnevo, da splošneje velja

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} k(2n-k) = n\,.$$

Trditev je pravilna, kar potrdimo s popolno indukcijo:

1. Za nekaj začetnih vrednosti n smo pravilnost trditve uvideli ob postavljanju domneve.

2. Naj trditev velja za naravno število n. Ob tej predpostavki izračunajmo vrednost leve strani zgornje enačbe, kjer namesto n vstavimo $n+1$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k(2n+2-k) = \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k(2n+2-k) + \sum_{k=2n}^{2n+1}(-1)^{k+1}k(2n+2-k) = \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k(2n-k) + 2\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}k + \\
&+ \sum_{k=2n}^{2n+1}(-1)^{k+1}k(2n+2-k) = A+B+C\,.
\end{aligned}$$

Z A, B, C smo zapored označili posamezne delne vsote med zadnjima enačajema.

Po indukcijski predpostavki je $A = n$. Nadalje je $B = 2(1-2+3-4+\ldots\pm(2n-1)) = 2(1+(n-1)) = 2n$ in $C = -2n(2n+2-2n) + (2n+1)(2n+2-2n-1) = -2n+1$.

Zato je $A+B+C = n+1$, kar potrjuje pravilnost naše domneve.

Marija Vencelj

DOPOLNI RAČUN – Rešitev s str. 131

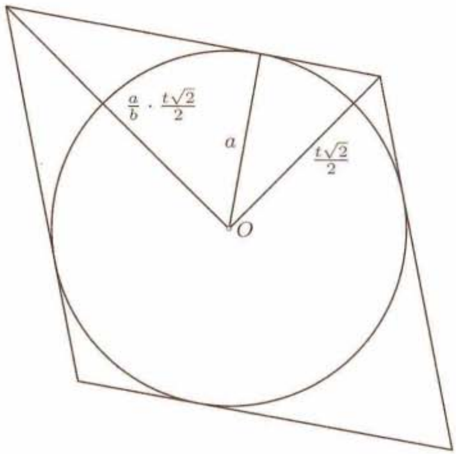
Srednji od delnih produktov se končuje z 12, zato je zadnja števka prvega faktorja enaka 6 in druga 0 ali 5. Ker je druga števka prvega delnega produkta enaka 3, sledi, da je prva števka drugega faktorja enaka 3 in druga števka prvega faktorja 5. Nadaljevanje je preprosto in rešitev ena sama:

$$\begin{array}{cccccc}
4 & 5 & 6 & \times & 3 & 2 & 8 \\
\hline
1 & 3 & 6 & 8 & & & \\
 & & 9 & 1 & 2 & & \\
 & & 3 & 6 & 4 & 8 & \\
\hline
1 & 4 & 9 & 5 & 6 & 8 &
\end{array}$$

Marija Vencelj

NALOGE O ELIPSAH IZ JAPONSKIH TEMPLJEV – Rešitve s str. 146

1. Z afino transformacijo s koeficientom a/b in nosilko velike polosi elipse kot premico negibnih točk, prevedemo podani problem na problem o rombu, očrtanem krožnici. Njegove dimenzije so označene na sliki na desni.



Če dvakratno ploščino največjega narisanega pravokotnega trikotnika izrazimo na dva načina, dobimo

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{t\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{t\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

Od tod sledi naslednja zveza med a, b in t:

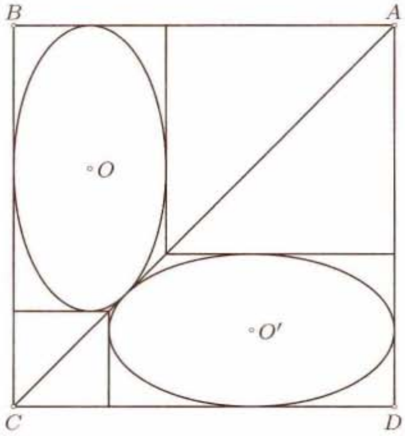
$$t^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Naloga zahteva iskanje celoštevilskih rešitev te enačbe. Enačbo torej obravnavamo kot diofantsko enačbo. Posredno so torej sangaku problemi povezani tudi z drugimi področji matematike, v tem primeru s teorijo števil.

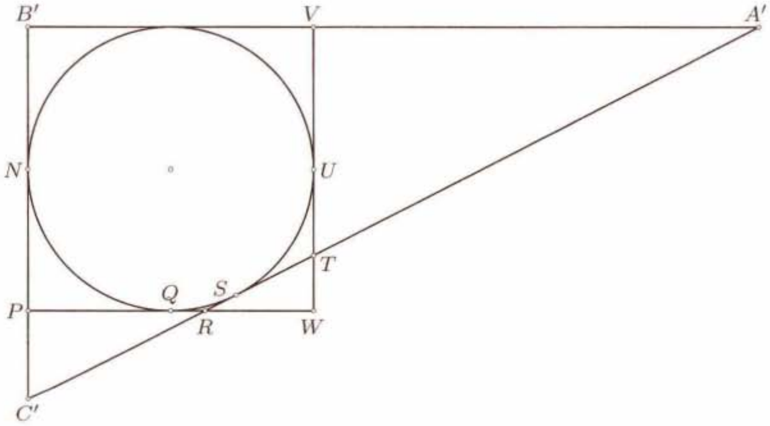
Zgornjo diofantsko enačbo rešimo takole: opazimo, da mora biti t sodo število, in ga lahko izrazimo kot $t = 2w$, kjer je w celo število. Dobimo enačbo $a^2 + b^2 = 2w^2$, ki jo prevedemo z zamenjavo $a = u - v$, $b = u + v$ v enačbo $u^2 + v^2 = w^2$. Števila u, v, w torej sestavljajo pitagorejsko trojico.

Zgornjo zamenjavo smemo uporabiti, saj je ekvivalentna trditvi, da sta $u = \frac{a+b}{2}$, $v = \frac{b-a}{2}$ celi števili, če sta a, b celoštevilčni rešitvi enačbe $a^2 + b^2 = 2w^2$. To pa je res, saj sta v tem primeru obe števili a, b bodisi sodi bodisi lihi.

2. Sprva kaže, da je ta naloga zahtevnejša, in da je ne bo moč rešiti na že omenjeni način, saj z afino transformacijo ne moremo obeh elips hkrati pretvoriti v krožnici – ko ena postane krožnica, druga postane še bolj ekscentrična elipsa. Vendar vtis vara. Za rešitev naloge sploh ne potrebujemo obeh elips. To spoznamo takoj, ko narišemo diagonalo kvadrata, ki poteka med elipsama (in se obeh dotika):



Očitno zadošča, če transformiramo samo zgornjo polovico kvadrata. Spodnjo dobimo z zrcaljenjem glede na diagonalo. Uporabimo transformacijo s koeficientom a/b in nosilko velike polosi zgornje elipse kot premico negibnih točk.



Na sliki smo dodali trikotnik RWT, saj bo zelo koristen.

Vpeljimo oznaki $RS = x$, $ST = y$. Velja $TV = a + y = l$, $PR = = a + x = \frac{a}{b}m$, torej je $x = \frac{a}{b}m - a$, $y = l - a$. Sedaj lahko trikotniku RWT izračunamo stranice: $RW = a - x = 2a - \frac{a}{b}m$, $WT = a - y = 2a - l$,

$RT = x + y = \frac{a}{b}m + l - 2a$. Pitagorov izrek nam da

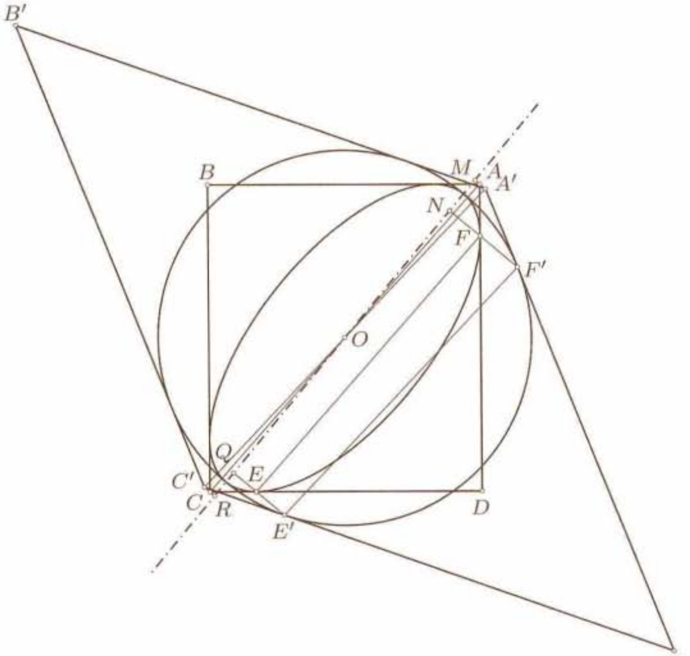
$$\left(\frac{a}{b}m + l - 2a\right)^2 = \left(2a - \frac{a}{b}m\right)^2 + (2a - l)^2.$$

Ko ta izraz uredimo, dobimo $ab = \frac{1}{2}ml$, in od tod

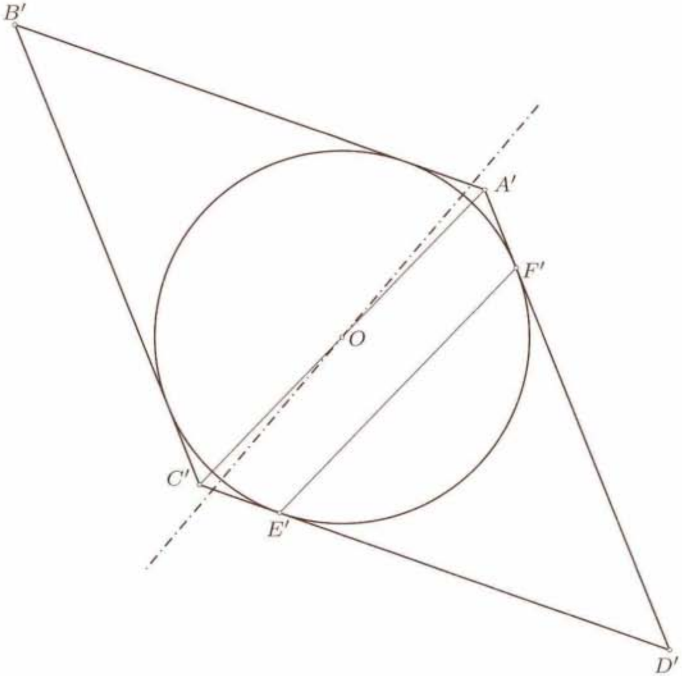
$$ab\pi = \frac{1}{2}\pi ml\,.$$

To dokazuje začetno trditev, saj je $ab\pi$ ploščina elipse.

3. Tokrat smo dani pravokotnik in elipso ter romb in krožnico, ki ju dobimo iz njiju z afino preslikavo s koeficientom a/b, ki ohranja veliko polos elipse, narisali na isto sliko.



Če zapišemo $AF \cdot ED = FD \cdot CE$ v obliki $AF : FD = CE : ED$, vidimo, da zadošča dokazati vzporednost premic AC in EF. Ker transformacija, ki smo jo uporabili, ohranja incidentnost in vzporednost, je zadosti dokazati, da je $A'C'$ vzporedno $E'F'$. Ta trditev pa očitno drži, saj velja $A'F' = C'E'$ in $F'D' = E'D'$:



Karmela Milutinović

DVA FAKTORJA BREZ NIČEL – Rešitev s str. 159

Pot do rešitve je presenetljivo preprosta. Iz praštevilskega razcepa danega števila

$$1\,000\,000\,000 = 10^9 = 2^9 \cdot 5^9$$

sledi, da je poljubni delitelj tega števila oblike $2^i 5^j$, kjer sta i in j bodisi 0 bodisi naravni števili od 1 do 9. Kakor hitro je $i \neq 0$ in $j \neq 0$, je delitelj deljiv z 10 in ima v svojem desetiškem zapisu vsaj eno ničlo. Edina možnost za iskani razcep je torej $10^9 = a \cdot b$, kjer je $a = 2^9$ in $b = 5^9$. Ker nobeno od števil $2^9 = 512$ in $5^9 = 1\,953\,125$ v svojem desetiškem zapisu nima ničle, ta razcep tudi reši našo nalogo:

$$1\,000\,000\,000 = 512 \cdot 1\,953\,125\,.$$

Opomba. Posebej zanimiva je splošnejša naloga: Katere potence števila 10 lahko zapišemo kot produkt dveh takih naravnih števil, ki se po desetiško zapišeta brez ničel?

Pot do odgovora lahko uberemo takole: Najprej poiščemo take eksponente n, da potence 2^n v desetiškem zapisu nimajo števke 0, nato pa med pripadajočimi potencami 5^n poiščemo tiste, ki se tudi zapišejo brez ničel. Med eksponenti, manjšimi od 100, ustrezajo pogojem naloge le nekateri, in sicer:

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 18 \text{ in } 33\,.$$

Po podatkih, ki so mi bili pri pisanju tegale sestavka na voljo, doslej še niso našli takega eksponenta $n > 86$, da bi bil desetiški zapis potence 2^n brez števke 0. Če ima kdo od bralcev (računalnikarji!) bolj svež podatek z drugačnim rezultatom, prosimo, da nam ga posreduje. Seveda pa je verjetnost, da bi tudi pripadajoča potenca števila 5 ne imela ničle v zapisu, izredno majhna.

Marija Vencelj

PORAVNANI KAZALCI – Rešitev s str. 131

Položaj kazalca na uri je določen s kotom (recimo, da ga merimo v radianih, čeprav to pri nadaljnjih računih ne bo bistveno), ki ga kazalec oklepa z navpičnim poltrakom iz središča ure: ob enih je ta kot $\frac{\pi}{6}$, ob dveh $\frac{\pi}{3}$ itn.

Izračunajmo, pri katerih kotih se urni in minutni kazalec ujameta. Upoštevati moramo, da se minutni kazalec premika dvanajstkrat hitreje od urnega: urni se premakne za kot $\frac{\pi}{6}$, minutni pa medtem naredi polni krog, torej se zasuče za kot 2π. Naj bo k število polnih krogov, ki jih pred poravnanjem naredi minutni kazalec, in $\varphi \in [0, 2\pi)$ kot, ob katerem se kazalca ujameta. Potem je

$$12\varphi = k \cdot 2\pi + \varphi\,.$$

Torej

$$\varphi = \frac{k}{11} \cdot 2\pi\,.$$

Različne kote dobimo za vrednosti $k = 0, 1, \ldots, 10$. Pri $k = 11$ imamo $\varphi = 2\pi$, torej urni kazalec naredi cel krog, minutni pa enajst krogov in še enega, tako da sta oba kazalca ponovno poravnana v navpični legi (kot pri $k = 0$).

Ker je sekundni kazalec šestdesetkrat hitrejši od minutnega, na enak način izračunamo, da sta sekundni in minutni kazalec poravnana za kote

$$\frac{\ell}{59} \cdot 2\pi, \qquad \ell = 0, 1, \ldots, 58\,.$$

Sedaj lahko hitro odgovorimo na vprašanje (a). Ker sta števili 11 in 59 tuji, so vsi trije kazalci poravnani le za $k = \ell = 0$, torej le ob polnoči (in še opoldne).

Odgovor na vprašanje (b) zahteva nekaj računanja. Za kote $\frac{2k\pi}{11}$, $k = 0, 1, \ldots, 10$, moramo izračunati, katere čase predstavljajo. Najprej kot pretvorimo v sekunde. Polovici dneva ustreza kot 2π, hkrati pa ima to obdobje $12 \cdot 60 \cdot 60 = 43200$ sekund. Izraženi v sekundah nas torej zanimajo časi $\frac{43200k}{11}$. Pretvoriti jih moramo v ure, minute in sekunde, ostanek pa zaokrožiti na najbližjo stotinko. Tule je program v C-ju, ki opravi opisane izračune:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int main(void)
{
  double cas;       /* celotni čas v sekundah */
  int ure, minute; /* ure in minute */
  double sekunde;  /* sekunde s stotinkami */
  int k;

  for (k = 0; k < 11; k++) {
    cas = 43200.0 * k / 11;  /* čas, ki pripada kotu 2k pi/11 */
    ure = cas / 3600.0;      /* pri prirejanju odrežemo decimalke */
    cas = fmod(cas, 3600.0); /* celotni čas z odštetimi urami */
    minute = cas / 60.0;
    sekunde = fmod(cas, 60.0);
    printf(
      "%2d. ujemanje: %2d:%02d:%05.2f\n",
      k + 1, ure, minute, sekunde
    );
  }
  return 0;
}
```

Pri računanju smo si pomagali s funkcijo `fmod` iz knjižnice `math.h`. Funkcija vzame dve realni števili in vrne ostanek pri deljenju prvega števila z drugim (kvocient izračuna v celih števil, in sicer tako, da ima ostanek enak predznak kot prvo število). Program naredi naslednji izpis, ki predstavlja odgovor na vprašanje (b):

```
 1. ujemanje:  0:00:00.00
 2. ujemanje:  1:05:27.27
 3. ujemanje:  2:10:54.55
 4. ujemanje:  3:16:21.82
 5. ujemanje:  4:21:49.09
 6. ujemanje:  5:27:16.36
 7. ujemanje:  6:32:43.64
 8. ujemanje:  7:38:10.91
 9. ujemanje:  8:43:38.18
10. ujemanje:  9:49:05.45
11. ujemanje: 10:54:32.73
```

Upam, da ste opazili, da sem se pri izpisu časov malce potrudil. Če ima čas manj kot deset minut, sta za izpis minut vseeno porabljeni dve mesti, pri čemer na prvem mestu ni izpisan presledek, pač pa ničla. Torej `1:05:27.27` in ne `1:5:27.27` ali `1: 5:27.27`. Podobno je pri izpisu sekund.

Martin Juvan

KRIŽANKA "ODKRITJA TISOČLETJA" – Rešitev s str. 160

35. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

V soboto, 15. maja 1999, se je 207 sedmošolcev in 330 osmošolcev, ki so se na področnem tekmovanju najbolje odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Novi Gorici in Novem mestu na državnem tekmovanju slovenskih osnovnošolcev v znanju matematike.

Zlato Vegovo priznanje je osvojilo 69 sedmošolcev in 111 osmošolcev, prejeli pa so ga sedmošolci, ki so osvojili vsaj 16 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 19 od 25 možnih točk.

Državna tekmovalna komisija, ki jo je vodila prof. Terezija Uran, je pripravila naloge, pregledala rešitve in določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj. Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

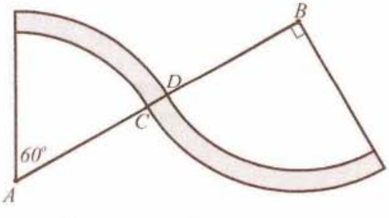
7. razred

1. Vrednost izraza
$$\left(\frac{(-0,4)^3}{(-0,8)^3}-\frac{(-0,8)^3}{(-0,4)^3}\right):\left(\frac{3}{4}-3\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)^2:\left(-\frac{4}{10}\right)^2+(-3)^2$$
je $12,5\ \%$ nekega števila. Katerega?

2. Mojca je nakupovala v štirih različnih trgovinah. V vsaki trgovini je zapravila 1000 tolarjev več kot polovico zneska, ki ga je imela pri sebi, ko je vstopila vanjo.
Koliko denarja je imela na začetku, če je za nakupe porabila ves denar?

3. Ulomek $\frac{101}{110}$ zapiši kot vsoto dveh ulomkov, katerih imenovalca bosta 5 in 22, števca pa naravni števili.

4. Na sliki je prikazan cestni ovinek. Koliko kvadratnih metrov asfaltne prevleke je na ovinku, če je cesta široka 10 m ($\overline{AC}=\overline{BD}=$ $=55$ m)?



5. Enakokrakemu trapezu s ploščino 12 cm^2 včrtamo krog s premerom 3 cm.
Izračunaj obseg tega trapeza.

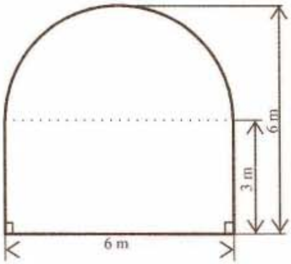
8. razred

1. Graf linearne funkcije $y = \frac{4}{3}x - 4$ seka abscisno os v točki M, graf funkcije $y = -\frac{1}{3}x + 6$ pa ordinatno os v točki N. Grafa se sekata v točki P.
   a) Nariši grafa funkcij in določi koordinate točk M, N in P.
   b) Izračunaj ploščino štirikotnika $OMPN$ (O je koordinatno izhodišče).
   c) Izračunaj dolžino daljice MP.

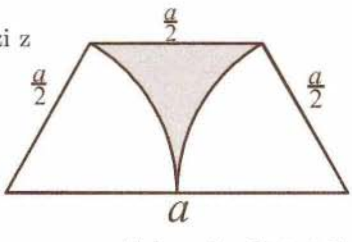
2. Kolikšna je vsota vseh lihih števil med 56 in 364?

3. Miha je sodeloval na matematičnem tekmovanju. Rešiti je moral 20 nalog, ki so bile razdeljene v dve skupini. V prvi skupini je bilo 10 nalog, za vsak pravilni odgovor je dobil 4 točke, za nepravilnega je izgubil 2 točki. V drugi skupini je vsak pravilni odgovor prinesel 6 točk, za nepravilnega pa je izgubil 3 točke. Miha je reševal vseh 20 nalog. Iz prve skupine je pravilno rešil dvakrat toliko nalog kot iz druge in skupaj dosegel 34 točk.
   Koliko nalog je Miha pravilno rešil?

4. Skica prikazuje vhod v predor. V predoru je 128,52 miligramov žveplovega dioksida, v vsakem kubičnem metru zraka ga je 0,04 miligrama.
   Izračunaj dolžino predora.



5. Ploščino in obseg osenčenega lika izrazi z a. Dobljena izraza poenostavi.



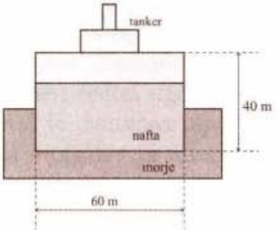
Aleksander Potočnik

19. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE[1]

Teoretične naloge za 7. razred

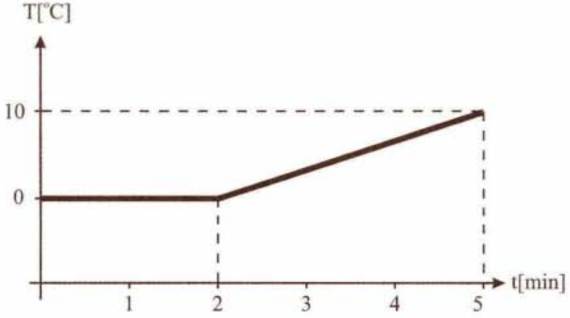
1. Supertanker z imenom Globtic London tehta 220 tisoč ton, kadar je prazen, in lahko prepelje 440 tisoč ton nafte, kadar je poln. Predpostavi, da je njegova oblika kvader z dolžino 380 m, širino 60 m in višino 40 m (slika 1).

   a) Kako globoko pod morsko gladino je dno tankerja (gostota morske vode je 1,02 kg/dm^3), kadar je tanker prazen?
   b) Kako globoko pod morsko gladino je dno tankerja , kadar je le-ta poln?
   c) Za koliko se spusti ali dvigne dno polnega tankerja, ko le-ta zapluje v reko?



Slika 1. Shematska slika tankerja Globtic London.

2. V toplotno izolirano posodo, v kateri se nahaja mešanica ledu in vode, potopimo grelec z močjo 1000 W. Grelec vključimo ob času $t = 0$ (glej diagram). Vodo v posodi ves čas počasi mešamo, da je temperatura povsod enaka. Vsako minuto odčitamo temperaturo v posodi in jo vnesemo v diagram.
   a) Koliko je bilo v posodi ledu, preden smo vklopili grelec?
   b) Izračunaj maso vode v posodi ob koncu opazovanja?



Slika 2. Odvisnost temperature vode v posodi od časa.

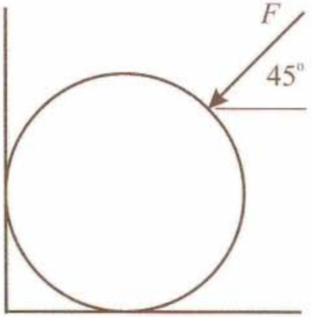
[1] Naloge in rešitve lahko najdete tudi na internetu `http://pef.pef.uni-lj.si/bojang/`

3. Gladko kroglo postavimo v vogal, kot kaže slika. Pravokotno na njeno površino pritisnemo s silo F, ki oklepa z vodoravnico kot 45°.

   a) Sila, s katero pritisnemo kroglo, je enako velika kot teža krogle. Kolikšno je razmerje med silo na steno in silo na tla?

   b) Kolikšno je to razmerje, če je sila na steno enaka teži krogle?

   Kadar je površina gladka, so sile, ki se pojavljajo ob stikih z drugimi ravnimi površinami, vedno pravokotne nanje. Nalogo lahko rešiš z načrtovanjem. Če raje računaš, si lahko pomagaš z zvezami, ki veljajo v kvadratu.



Slika 3. Na kroglo v vogalu pritiska sila F.

Eksperimentalni nalogi

4. Eksperimentalno ugotovi in grafično predstavi, kako na gibanje pločevinke v kartonasti dolini vpliva količina riža v pločevinki. Odvisnost razloži z energijskim zakonom.

   Potrebščine: kartonasta dolina z merilom, pločevinka z zamaškom, posoda z rižem, papirnati lijak, plastična žlica.

   Navodilo

   Na mizi je karton, ki je na obeh krajiščih podložen z lesenima kladama tako, da nastane kartonasta dolina. Na kartonski trak je prilepljeno merilo. Pločevinko položi na pobočje doline na začetek merila in jo izpusti. Kotali se iz enega na drugo pobočje, dokler se ne ustavi na dnu doline.
   Vsuj v pločevinko merico riža in poskus ponovi. Poskus poteka drugače kot s prazno pločevinko.

   a) Nariši graf: na abscisno os nanašaj količino riža, merjeno v žlicah; na ordinatno os nanašaj oddaljenost od sredine doline, na kateri se pločevinka po prvem spustu ustavi (preden se začne vračati v dolino). Začni s prazno pločevinko. V pločevinko dodaj vsakič po dve žlici riža in si pri tem pomagaj s papirnatim lijakom. Zadnjo meritev izvedi s polno pločevinko.

b) Ugotovi, pri kolikšni količini riža (merjeno v žlicah) se pločevinka kotali najbolje in pri kolikšni najslabše.

c) Razloži energijske spremembe od trenutka, ko spustimo pločevinko z rižem iz najvišje lege, do trenutka, ko se po prvem spustu ustavi (preden se začne vračati v dolino). Razloži izmerjeno odvisnost.

5. Umeri tekočinski termometer. Ugotovi, kolikšno temperaturo predstavlja rdeča oznaka na cevki.

Potrebščine: grelna plošča, erlenmajerica s cevko, štoparica, alkoholni flomaster, merilo.

Navodilo

Najprej na list, ki ga boš oddal, vpiši oznako termometra (črke A–K).

Ko se tekočina segreva, se razpenja. Povečanje prostornine lahko izkoristimo za merjenje temperature. Erlenmajerico, z vstavljeno stekleno cevko in napolnjeno s tekočino, uporabimo kot tekočinski termometer.

Tekočinski termometer postavi na segreto ploščo grelnika in spremljaj dvigovanje višine gladine 10 minut. Termometer dobi od grelnika vsako sekundo 100 J toplote. Izgube so že upoštevane. Specifična toplota termometra je 3500 J/kgK, njegova masa pa je izpisana na termometru. Termometra ne odpiraj! Delaj pazljivo, da se ne opečeš ali popariš!

a) Nariši graf, kako se s časom spreminja višina gladine v cevki.

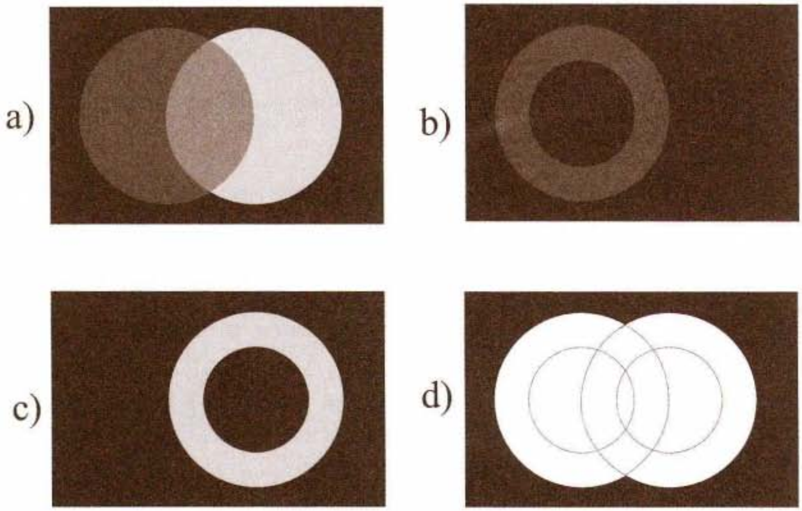
b) Nariši graf, kako se s časom spreminja temperatura tekočine v erlenmajerici, če je bila na začetku temperatura tekočine enaka 22°C.

c) Ugotovi, kolikšno temperaturo predstavlja rdeča oznaka na skali termometra.

Teoretične naloge za 8. razred

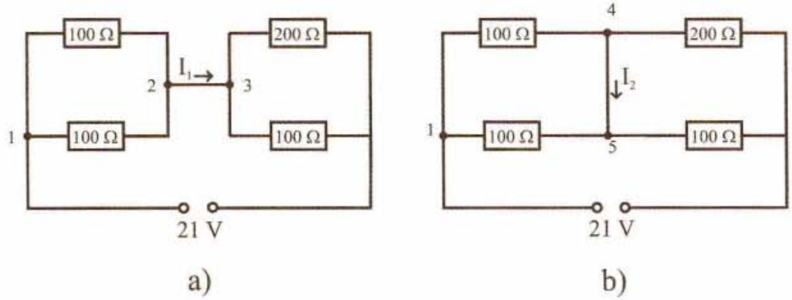
1. Na zaslon posvetimo z rdečim in rumenim reflektorjem. Na zaslonu vidimo sliko 1a. Nato postavimo pred reflektorja neprozorno kroglo. Če je prižgan samo rdeči reflektor, vidimo na zaslonu sliko 1b. Če je prižgan samo rumeni reflektor, vidimo na zaslonu sliko 1c.

Na sliko 1d na priloženem listu s priloženimi barvicami (rdečo, rumeno, oranžno in črno) nariši, kakšen je videti zaslon, če sta prižgana oba reflektorja. List oddaj skupaj z ostalimi nalogami.



Slika 1. Zaslon, na katerega svetita a) rumeni in rdeči reflektor, b) sveti samo zasenčen rdeči, c) sveti samo zasenčen rumeni in d) svetita oba zasenčena reflektorja z označenimi polji.

2. Vezje, ki je sestavljeno iz treh enakih upornikov po 100 Ω in enega upornika za 200 Ω, priključimo na baterijo za 21 V (slika 2a). Upori žic so zanemarljivi, prav tako notranji upor baterije.



Slika 2. Vezji štirih upornikov in baterije.

a) Kolikšna je napetost med točkama 1 in 2 oziroma 1 in 3?

b) Kolikšen je tok I_1?

Nato vezje nekoliko spremenimo (slika 2b).

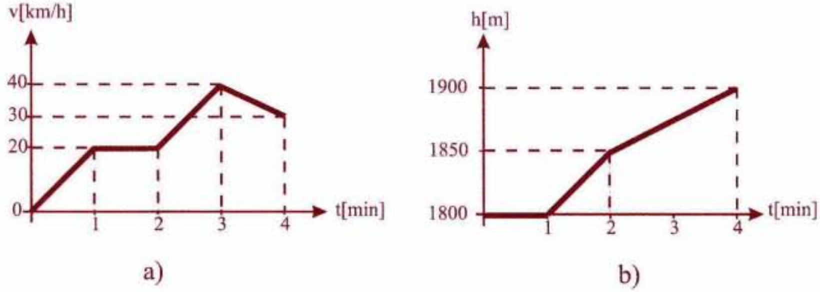
c) Kolikšna je napetost med točkama 1 in 4 oziroma 1 in 5?

d) Kolikšen je tok I_2?

3. Avto, ki tehta 1000 kg, pelje po gorski cesti. Na prvem diagramu je prikazana hitrost avtomobila, v odvisnosti od časa. Na drugem diagramu je prikazana nadmorska višina avtomobila, v odvisnosti od časa.

   a) Izračunaj, kolikšno delo bi moral opraviti motor tega avtomobila vsako minuto, če ne bi bilo drugih izgub. Izpolni spodnjo tabelo.

   b) Koliko bencina bi na tej poti porabil motor, če za opravljeno delo 1 MJ, porabi približno 0,5 l bencina?



Slika 3. a) Odvisnost hitrosti avtomobila od časa. b) Odvisnost nadmorske višine avtomobila od časa.

obdobje	delo	delo [kJ]
v 1. minuti	A_1	
v 2. minuti	A_2	
v 3. minuti	A_3	
v 4. minuti	A_4	

Eksperimentalni nalogi

4. Na papirnem traku, ki ga je voziček vlekel skozi brnač pri gibanju po klancu navzdol, so odtisi ob začetku gibanja vozička in nato vsakih 0,1 sekunde taki, da so pike v časovnih presledkih po 0,1 sekunde. Rezultate ugotovitev vnesi v tabelo.

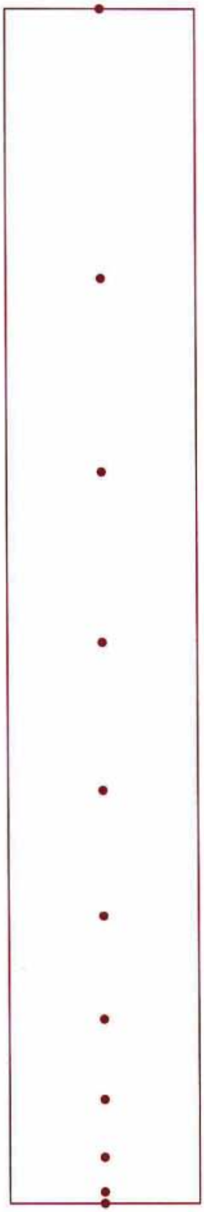
   a) Na traku (v okviru) najprej označi položaj vozička v času $t_1 = 0{,}5$ s in v času $t_2 = 0{,}7$ s. Okrog izbranih časov časih t_1 in t_2 označi dva časovna presledka $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0{,}2$ s (Δt_1 traja od 0,4 s do 0,6 s in Δt_2 pa od 0,6 s do 0,8 s).

   b) Izmeri časovnima presledkoma ustrezna intervala poti Δs_1 in Δs_2 in ju vpiši v trak. Iz tako dobljenih podatkov izračunaj povprečni hitrosti v_1 in v_2 v obeh časovnih presledkih.

   c) Vnesi izračunani hitrosti v graf, s čimer prikažeš odvisnost hitrosti vozička od časa. Kaj dobljeni graf pove?

   d) Izračunaj pospešek gibajočega vozička v trenutku $t = 0{,}6$ s (označi ta trenutek na traku) na dva načina, iz znane spremembe hitrosti in iz izmerjene opravljene poti v času 0,6 s. Vpiši potrebne podatke za izračun pospeška.

   e) Izračunaj hitrost vozička v trenutku, ko se je ta zaletel v oviro in obstal, brnač pa se je hkrati izključil. Vpiši potrebne podatke za izračun te hitrosti.



$t_1 =$ ________ $\Delta t_1 =$ ________ $\Delta s_1 =$ ________

$t_2 =$ ________ $\Delta t_2 =$ ________ $\Delta s_2 =$ ________

$v_1 =$ ________ $v_2 =$ ________

$\Delta t =$ ________ $\Delta v =$ ________ $a =$ ________

$t =$ ________ $s =$ ________ $a =$ ________

$v =$ ________

Graf pove: ______________________________________

____

5. Na bakrovo (+) in aluminijevo (−) elektrodo, ki sta potopljeni v modri galici, priključi enosmerno napetost tako, da je bakrova elektroda na pozitivnem, aluminijeva elektroda pa na negativnem priključku istosmernega napetostnega vira. Tok v električnem krogu meri z ampermetrom, napetost med elektrodama pa z voltmetrom. Obseg voltmetra je 3 V, obseg ampermetra pa 600 mA in ju med meritvijo ne spreminjaj.

   a) Najprej nariši celotno električno shemo, po kateri boš sestavil vezje. Če uničiš varovalko ampermetra zaradi napačne vezave, naloge ne moreš nadaljevati. Elektrodi potisni kar se da globoko v elektrolit, vijak na vertikalnem stojalu ustrezno pritrdi. Elektrod ne snemaj s stojal!

   b) Spreminjaj napetost po 0,5 V od 0,5 V do 3 V in odčitavaj tok. Meritve vnesi v tabelo in izračunaj upor za vse navedene vrednosti napetosti. Napravi graf odvisnosti toka od napetosti. Kaj lahko ugotoviš na podlagi dobljenega grafa in izračunanih vrednosti upora elektrolita? Kako se upor elektrolita spreminja z napetostjo? Odgovor zapiši.

   c) Obe elektrodi dvigni tako, da sta v elektrolit potopljeni le do polovice. Z meritvijo ugotovi, kako se je pri tem spremenil upor elektrolita? Ugotovi torej, kako je upor elektrolita odvisen od velikosti v elektrolit potopljenih elektrod. Odgovor zapiši.

U	I	R
V	A	Ω
0,5		
1,0		
1,5		
2,0		
2,5		
3,0		

Mojca Čepič

43. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Poročilo s tekmovanja smo objavili v prvi letošnji številki Preseka, sedaj objavljamo še naloge:

Prvi letnik

1. Dani sta trimestni števili. Stotice prvega so enake enicam drugega, stotice drugega pa enicam prvega. Razlika teh dveh števil je 297, vsota števk manjšega števila pa 23. Kateri števili sta to?
2. Poišči vsa cela števila x in y, za katera je $2x+3y=185$ in $xy > x+y$.
3. Pravokotnemu trikotniku ABC včrtana krožnica se dotika hipotenuze AB v točki D. Pokaži, da je ploščina pravokotnika s stranicama dolžin $|AD|$ in $|DB|$ enaka ploščini trikotnika ABC.
4. Trije pastirji na planini izmenoma strižejo isto čredo ovc, in sicer prvi dan striže čredo prvi pastir, drugi dan drugi pastir, tretji dan tretji pastir, četrti dan zopet prvi pastir in tako ciklično dalje. Pastirji so se dogovorili, da bodo strigli ovce na naslednji način:
   a) Vsako ovco lahko v enem dnevu ostrižejo samo po eni strani.
   b) Vsak dan je treba striči vsaj eno ovco.
   c) Nobena dva dneva ne smejo striči iste skupine ovc.

   Tisti pastir, ki bo prvi prekršil dogovor, bo moral jeseni gnati čredo v dolino. Ali lahko kateri od pastirjev striže ovce tako, da mu v nobenem primeru ne bo treba gnati ovc v dolino?

Drugi letnik

1. Dokaži, da produkt nobenih treh zaporednih naravnih števil ni popolni kvadrat.
2. V ravnini ležijo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ z dolžino 1. Dokaži, da lahko v vsoti

   $$\vec{x} = \pm\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c}$$

   izberemo predznake tako, da bo dolžina vektorja $\vec{x}$ največ $\sqrt{2}$.
3. Dana je polkrožnica s premerom AB. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, različnih polmerov, ki se od znotraj dotikata polkrožnice zaporedoma v točkah C in D, se dotikata tudi premera AB in se medsebojno ne sekata. Naj bo t skupna tangenta na obe krožnici, ki ne gre skozi A in B, in razdeli ravnino na polravnini tako, da ležita krožnici na isti polravnini. Premica t naj se dotika krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ zaporedoma v točkah E in F. Dokaži, da se premici CE in DF sekata na polkrožnici.

4. Na tabli so zapisana tri cela števila. Na vsakem koraku zbrišemo eno izmed njih in na njegovo mesto zapišemo za 1 zmanjšano vsoto drugih dveh števil. Po nekaj korakih so na tabli zapisana števila 17, 75 in 91. Ali so lahko bile na začetku na tabli napisane
   a) tri dvojke,
   b) tri trojke?

Tretji letnik

1. Kolikšna je najmanjša vrednost, ki jo lahko doseže izraz

$$|12^m - 5^n| ,$$

kjer sta m in n naravni števili? Odgovor utemelji.

2. Dan je polinom

$$p(x) = x^{1999} + 2\,x^{1998} + 3\,x^{1997} + \cdots + 2000 .$$

Poišči katerega od neničelnih polinomov, katerega ničle so enake obratnim vrednostim ničel polinoma p.

3. Naj bo O središče trikotniku ABC očrtane krožnice. Označimo razpolovišči daljic AO in BC zaporedoma s P in Q. Izračunaj kot $\sphericalangle OPQ$, če veš, da je $\sphericalangle CBA = 4\sphericalangle OPQ$ in $\sphericalangle ACB = 6\sphericalangle OPQ$.

4. Naj bo $n > 1$ naravno število. Na tabelo velikosti $n \times n$ položimo na poljubnih $2n$ polj po en žeton. Dokaži, da lahko izberemo štiri izmed zasedenih polj tako, da njihova središča tvorijo oglišča paralelograma.

Četrti letnik

1. Naj bo m naravno število, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ pa taka pozitivna racionalna števila, da je $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = 1$. Definirajmo funkcijo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ s predpisom

$$f(n) = n - [r_1 n] - [r_2 n] - \cdots - [r_m n] .$$

Določi minimum in maksimum funkcije f.
(Z $[x]$ označimo največje celo število, ki ne presega danega realnega števila x, npr. $[3.7] = 3$ in $[-3.7] = -4$.)

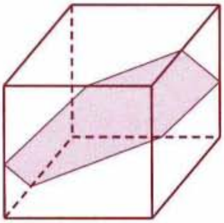
2. Na tabli imamo na začetku zapisana števila

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots,\ \tfrac{1}{1998},\ \tfrac{1}{1999}\,.$$

Na vsakem koraku izberemo poljubni dve izmed njih (označimo ju z a in b) in namesto njiju na tablo zapišemo število $a+b+ab$. Postopek ponavljamo, dokler nam na tabli ne ostane le še eno število. Ali je lahko to število 2000? Odgovor utemelji.

3. Dan je tak kvader, katerega presek z neko ravnino je pravilni šestkotnik. Dokaži, da je ta kvader kocka.

(Ravnina lahko seka kvader na več različnih načinov, vendar so vsi podobni tistemu, ki ga prikazuje slika na desni. **Tega ni treba dokazovati.**)



4. Množica X ima šest elementov. Naj bodo A_1, A_2, …, A_6 njene podmnožice s po tremi elementi. Dokaži, da lahko pobarvamo elemente množice X z dvema barvama tako, da nobena od podmnožic A_1, A_2, …, A_6 ne bo imela vseh elementov enake barve.

Matjaž Željko

NALOGE Z DRŽAVNEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 1998/99

Naloge je 8. maja 1999 v Tehniškem šolskem centru Nova Gorica reševalo 125 tekmovalcev, ki so se na tekmovanje uvrstili z regijskih predtekmovanj. Eksperimentalno nalogo so reševali tekmovalci v skupini D.

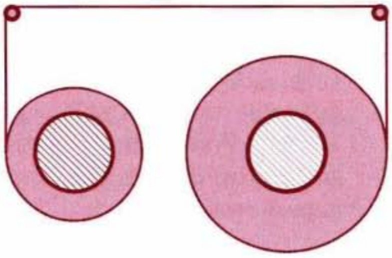
Opozorilo: Zapisano število mest pri podatkih ne določa natančnosti rezultata. Smiselno število mest, s katerim boš zapisal(a) rezultat, oceni po lastnem preudarku.

Skupina A

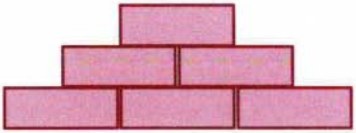
1. V prazno steklenico s težo 5 N, debelino sten 8 mm in zunanjim polmerom 4,8 cm nalijemo 1 l mešanice etanola, s specifično težo 7,9 kN/m^3, in vode, s specifično težo 10 kN/m^3 (glej sliko). Etanola je 60 volumskih odstotkov. Steklenico postavimo navpično v bazen z vodo. Koliko cm^3 mešanice moramo odliti, da bo gladina mešanice v steklenici na enaki višini kot gladina vode v bazenu?

2. Koeficient lepenja k_l med dvema lesenima površjema je odvisen od pravokotne komponente sile, s katero deluje eno površje na drugo. Odvisnost podamo z enačbo $k_l = k_0 - kF$, kjer sta $k_0 = 0{,}70$ in k znani konstanti ter F pravokotna komponenta sile. (Zveza ne velja pri velikih silah, ko bi bil koeficient negativen.)
   Na klanec z leseno podlago in naklonskim kotom 30° položimo leseno klado s težo 54 N in dimenzijami 30 cm × 30 cm × 8,6 cm, tako da se površja klanca dotika največja ploskev klade. Na klado položimo enako klado tako, da se spodnja ploskev te klade, ki je hkrati njena največja ploskev, popolnoma prekrije z vrhnjo ploskvijo spodnje klade. Postopek nadaljujemo z novimi kladami. Kolikšno je največje število klad, ki jih lahko na opisani način zložimo drugo vrh druge, če je
   i) $k = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}^{-1}$,
   ii) $k = 3{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}^{-1}$?

3. Avdio kaseta je narejena iz dveh kolutov. Trak se odvija s prvega koluta in navija na drugega. Prazna koluta imata polmer 1 cm. V nekem trenutku je polmer prvega koluta 20 mm, drugega pa 25 mm. Izračunaj debelino traku, če je kaseta na eni strani "dolga" 45 min in je hitrost traku pri predvajanju 4,75 cm/s. Pri izračunu zanemari del traku, ki ni na kolutih.



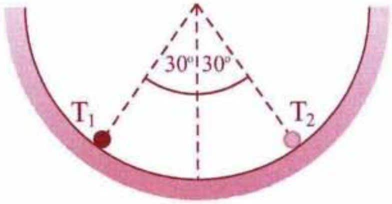
4.a) Šest zidakov s težo po 20 N zložimo, kot kaže slika. Stranske ploskve se pri tem ravno še ne dotikajo. S kolikšno silo pritiska na tla srednji zidak in s kolikšno stranska zidaka v spodnji vrsti?



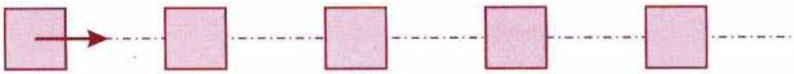
b) Eskimi postavljajo zid iz ledenih zidakov z višino 5 cm, ploščino osnovne ploskve 200 cm^2 in s težo 9,0 N. Zidake postavljajo drugega poleg drugega v vodoravne vrste. V vsaki naslednji vrsti je en zidak manj kot v spodnji vrsti in središče vsake naslednje vrste je natančno nad središčem spodnje vrste, tako kot pri vprašanju a). Zid zaključijo z enim zidakom na vrhu. Ali je zid lahko višji od Keopsove piramide v Egiptu, ki je visoka 150 m? Odgovor utemelji z računom!
Največji tlak, ki ga prenese led, predno se zdrobi, je pri temperaturah malo pod 0°C enak $1{,}0 \cdot 10^6$ N/m^2.

Skupina B

1. Vodoravni žleb s polkrožnim profilom z notranjim polmerom 50 cm je obrnjen tako, da je odprti del zgoraj. Drobna kroglica se zaporedoma *prožno* odbija od točk T_1 in T_2 na notranjem obodu žleba. Točki sta pod kotom 30° proti navpičnici, ki gre skozi os žleba (glej sliko). Koliko časa mine med zaporednima odbojema kroglice? ($g = 9{,}8$ m/s^2)



2. Na vodoravno ledeno površino postavimo ravno vrsto enakih igralnih kock za igro Človek, ne jezi se. Kocke postavimo v vrsto tako, kot prikazuje tloris na sliki. Razdalja med središči sosednjih kock je 10 cm. Prvo kocko v vrsti frcnemo z začetno hitrostjo 1,5 m/s v smeri proti drugi kocki. Kocki prožno trčita in druga kocka se giblje naprej proti tretji itd.



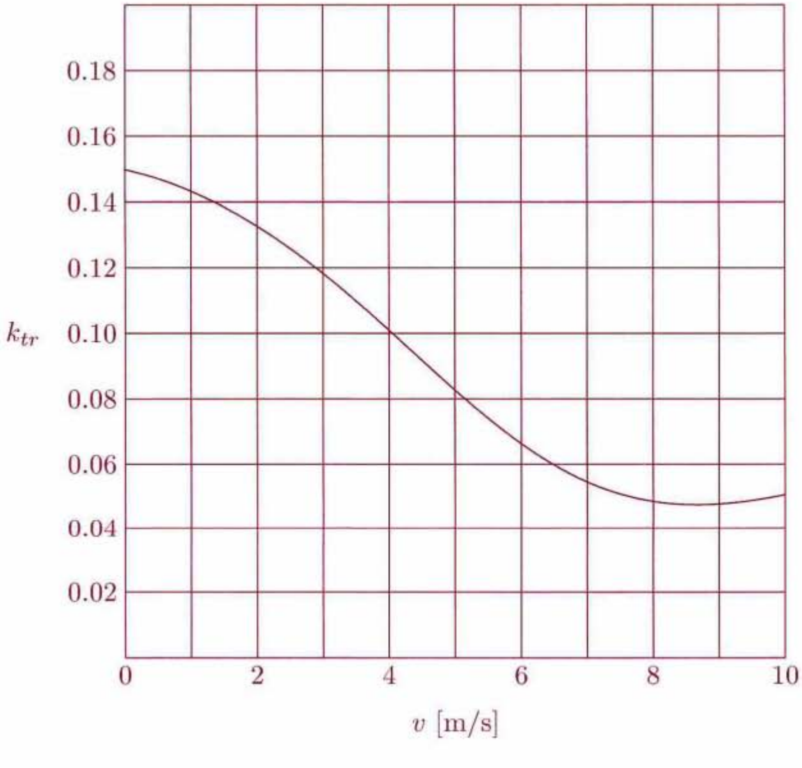
a) Najprej razmisli, kako se gibljeta kocki, če kocka s hitrostjo v prožno trči v mirujočo kocko enake mase. Orientaciji kock sta taki kot pri opisani postavitvi.

b) Koliko kock se premakne v zgornjem poskusu?

Stranica igralne kocke meri 1,5 cm, koeficient trenja med kocko in ledom je 0,050, $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

3. Jekleno kroglico z maso 1 g spustimo z višine 10 cm, da odskakuje s površja piezoelektričnega mikrofona. Zabeležimo 0,2 ms dolg signal, ki ustreza prvemu odboju, in po 0,21 s še drugega. Oceni povprečno silo, s katero kroglica deluje na podlago med prvim odskokom.

4. Koeficient trenja ni povsem neodvisen od hitrosti. Za drsenje nekega telesa po klancu velja odvisnost, ki je grafično podana na sliki. Naklon klanca je $5{,}0^\circ$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.



a) S kolikšno hitrostjo moramo pognati telo navzdol po klancu, da se bo gibalo enakomerno?

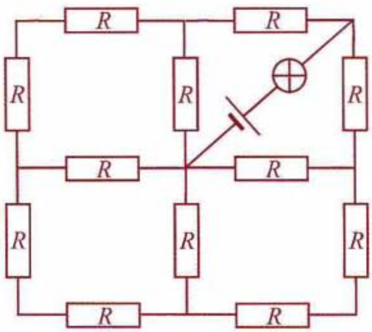
b) Takšno gibanje ni stabilno, saj že majhna sprememba hitrosti povzroči, da začne hitrost bodisi naraščati bodisi pojemati. V kolikšnem času se hitrost spremeni za 10 odstotkov, če je bila na začetku za prav toliko odstotkov večja od ravnovesne hitrosti, izračunane pri a)?

c) V kolikšnem času pa se hitrost spremeni za 1 promil (tisočinko), če je bila na začetku le za 1 promil večja od ravnovesne?

Skupina C

1. Zaprta posoda, v obliki vodoravno ležečega valja, je predeljena na enaka dela z lahkim izolatorskim batom, ki se lahko prosto premika vzdolž posode. V vsakem delu posode je na začetku po 1 kg zraka pri temperaturi 290 K. Plašč posode je toplotno izoliran, desna osnovna ploskev pa je v stiku s toplotnim rezervoarjem s temperaturo 290 K, ki poskrbi, da je temperatura zraka v desnem delu posode ves čas konstantna. Zrak v levem delu posode segrevamo, tako da se bat zelo počasi pomika proti desni. Toploto nehamo dovajati, ko bat doseže takšno lego, da je prostornina levega dela posode trikrat večja od prostornine desnega dela. Kolikšni sta spremembi notranje energije zraka v obeh delih posode pri opisani spremembi?
   Kilomolska masa zraka je 29 kg, razmerje specifičnih toplot 1,4, splošna plinska konstanta znaša 8300 J/kmolK, specifična toplota plina pri konstantnem volumnu je $c_v = \frac{R}{M(\kappa-1)}$.

2. Izračunaj moč, ki se troši na žarnici z uporom 100 Ω. Vsi uporniki v vezju so enaki in imajo upor R = 100 Ω, galvanski člen z gonilno napetostjo 10 V pa ima notranji upor 12,5 Ω.



3. Na dnu steklene posode s kvadratnim presekom 400 cm^2 je kovinska plošča z debelino 2 mm, maso 296 g in enako ploščino, kot je presek posode. V posodo nalijemo 1,60 litra destilirane vode. Drugo ploščo, ki je enaka prvi, obesimo na vzmet s konstanto 95 N/m tako, da se ravno dotika vodnega površja. Ploščina druge plošče je praktično enaka preseku posode, vendar je med robom plošče in steno dovolj velika reža, da se skoznjo lahko pretaka voda. Med plošči za kratek čas priključimo napetost, tako da se na ploščah nabereta naboja po 11 μAs. Zgornja plošča se pri tem potopi v vodo. Ravnovesna razdalja med ploščama je 2,6 cm. (Gostota vode je 1000 $\mathrm{kg/m^3}$, $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.)

   a) Izračunaj električno silo med ploščama v ravnovesju.

   b) Izračunaj dielektričnost vode.

   Pri nalogi predpostavimo, da destilirana voda ne prevaja električnega toka.

4. Izraz za magnetno polje tuljave $B = \mu_0 NI/l$ dovolj dobro velja le za točko v središču tuljave; ko gremo proti krajišču pa polje pada in v središču osnovne ploskve pade na (praktično) polovico vrednosti v središču.

   V osi znotraj manjše tuljave želimo ustvariti magnetno polje, ki bi se z razdaljo čim manj spreminjalo. Zato postavimo manjšo tuljavo na sredo med dve večji tuljavi, tako da imajo tuljave skupno os. Bližnji krajišči večjih tuljav sta razmaknjeni za 60 cm. Manjša tuljava je dolga 10 cm in ima 100 ovojev, večji imata po 2000 ovojev in premer 6 cm.

   Zunaj tuljave na večji oddaljenosti od njenega krajišča pojema polje na osi kot $B(z) = \mu_0 NIR^2/2z^3$. Pri tem je R polmer tuljave in z razdalja od krajišča, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

   Kolikšni tokovi morajo teči po tuljavah, da bo v osi manjše tuljave polje 0,1 mT? Ker pogoja ne moremo izpolniti za vsako točko na osi, zahtevamo le, da je polje enako predpisani vrednosti v središču tuljave in na obeh krajiščih.

Skupina D

1. Na segreto ploščo električnega štedilnika kanemo kapljico vode z maso 30 mg. Na stiku kapljice in plošče se takoj ustvari tanka enakomerna plast vodne pare, ki deluje kot izolator in upočasni nadaljnje izparevanje vode iz kapljice. Oceni

   a) debelino plasti vodne pare in

   b) čas, v katerem izpari celotna kapljica.

Ker gre za oceno, lahko predpostaviš čimbolj enostavno obliko kapljice, npr. obliko diska z višino enako polmeru.

Plošča štedilnika ima obliko kroga s polmerom 5,0 cm in je enakomerno segreta na temperaturo 250°C, tako da oddaja toplotni tok 5,0 kW, ki je enakomerno razporejen po površini plošče. Gostota vode je 1000 kg/m^3, specifična izparilna toplota vode 2,26 MJ/kg, toplotna prevodnost vodne pare pa $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ W/mK.

2. Svetilnost točkastega svetila merimo s primerjalnim fotometrom na mastno liso. Na optični klopi imamo v medsebojni razdalji 1 m dve točkasti svetili: svetilo 1 z znano svetilnostjo I_1 in svetilo 2 z neznano svetilnostjo I_2. Med njima se nahaja list belega papirja, ki je pravokoten na zveznico med svetiloma. Papir ima na sredini (skozi katero poteka zveznica) majhno mastno liso. Mastna lisa prepušča več svetlobnega toka kot nemasten del papirja in odbija manj kot nemasten del papirja.

   Pri meritvi opazujemo list papirja s strani svetila 1. Ko premikamo list po optični klopi, opazimo, da pri razdalji 30 cm od svetila 1 ne vidimo več mastne lise. Ko na podoben način gledamo list papirja s strani svetila 2, ugotovimo, da v tem primeru ne vidimo več lise pri razdalji papirja 45 cm od svetila 2. Kolikšen je I_2, če vemo, da je $I_1 = 20$ cd?

   Osvetljenost je sorazmerna s svetilnostjo svetila in pojema s kvadratom razdalje od svetila.

3. Vesoljska postaja ima obliko votlega valja, z notranjim radijem 300 m, in se nahaja v vesolju, daleč proč od drugih nebesnih teles. Postaja se vrti okoli geometrijske osi s stalno kotno hitrostjo.

   a) Kolikšna naj bo ta kotna hitrost, da bo težni pospešek na "tleh", to je na notranji strani plašča valja, enak zemeljskemu težnemu pospešku 9,8 m/s^2?

   b) Telo spustimo z 10 m visokega navpičnega stolpa, ki je pritrjen na tla postaje. Kako opiše gibanje telesa opazovalec, ki se vrti skupaj s postajo, in kako mirujoči opazovalec?

   c) Določi čas padanja telesa pri b) in lego točke, kjer se dotakne tal.

   d) V kateri smeri in s kolikšno hitrostjo moramo zalučati telo s tal, da se po 2,5 s znova vrne v začetno točko?

Eksperimentalna naloga

Če dva kosa grafita stiskamo, opazimo, da se električni upor spoja zmanjšuje z naraščajočo silo. Na tej ideji je zasnovano tipalo sile, ki je pred teboj. V sendviču med dvema pobakrenima ploščicama sta dva para, med seboj pravokotnih grafitnih min. Na spodnji pobakreni plošči je prispajkan še upornik (470 Ω), ki zagotavlja konstanten tok skozi tipalo. Tipalo in upornik sta vezana zaporedno. Priključi ju na izvir konstantne enosmerne napetosti 12 V z žicami iste barve (izvir naj bo pri tem izključen). Preostali dve žici sta prispajkani na tipalo in služita za merjenje padca napetosti na tipalu. Padec napetosti je velikostnega reda nekaj mV. Meri ga s priloženim voltmetrom.

Naloga

1. Privzemimo, da je upor obremenjenega tipala povezan s silo z zvezo

   $$R = AF^p ,$$

   kjer je R upor tipala, F sila na tipalo ter A in p konstanti. Silo spreminjaš tako, da polagaš na tipalo priložene umerjene uteži. Iz meritev določi neznano potenco p in oceni napako.
2. Določi še prožnostni koeficient vzmeti v priloženem kemičnem svinčniku. Pri tem si pomagaj s tipalom. Oceni tudi napako.

Opozorilo!

Preden vključiš izvir napetosti, položi na tipalo eno utež. Ta utež naj bo vselej na tipalu - ne poskušaj izmeriti odziva pri neobremenjenem tipalu (lahko uničiš voltmeter).

- Tipalo je občutljivo na udarce (grafitne mine so krhke). Kot boš opazil, je tipalo tudi malce muhasto. Uteži polagaj na tipalo tako, da je obremenitev dotikališč med grafitnimi minami čim bolj enakomerna. Vsakič, ko spremeniš obremenitev, počakaj nekaj časa, da se vrednost na voltmetru ustali. Poskrbi, da se med meritvijo zgornja plošča, na katero polagaš uteži, ne premika. Meri odziv tipala pri obremenjevanju in pri razbremenjevanju.
- Ko določaš koeficient vzmeti, premisli, kako uporabiti tipalo, da bo odčitek najbolj natančen. (Nasvet: najprej razstavi kemični svinčnik in si oglej, kako je vzmet vložena.)
- Natančno opiši potek meritev. Pojasni, kako si določil napako rezultata. Opiši, kako si izločil morebitne moteče vplive pri meritvi.

Potrebščine

- tipalo s štirimi priključnimi žicami
- devet umerjenih uteži (mase so podane v gramih)
- kemični svinčnik z vzmetnim prožilom
- univerzalni merilnik
- izvir enosmerne napetosti
- ravnilo z milimetrskim merilom
- milimetrski papir

Na razpolago imaš samo eno eksperimentalno napravo, zato ravnaj z njo premišljeno in pazljivo!

Ciril Dominko

40. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA – Rešitve izbranih nalog s str. 158

1. naloga. Očitno je lahko množica S množica oglišč poljubnega pravilnega večkotnika. Dokazati je torej potrebno, da ni drugih možnosti.

1. način. Za poljubni točki $A, B \in S$ označimo z σ_{AB} zrcaljenje čez simetralo daljice AB. Naj bo T težišče množice S. Potem je $\sigma_{AB}(S) = S$ za vsaki dve točki $A, B \in S$ in zato $\sigma_{AB}(T) = T$. Vse točke množice S so tako enako oddaljene od T. Če bi ne bile, bi simetrala daljice med dvema, od točke T različno oddaljenima točkama ne vsebovala točke T.

Označimo s $\mathcal{K}$ tisto krožnico s središčem v T, ki vsebuje vse točke množice $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. (Točke množice S smo zapisali v krožnem vrstnem redu.) Premica S_1S_3 razdeli ravnino na dve polravnini. Na eni izmed njiju leži točka S_2 in je edina izmed točk množice S, ki leži na tej polravnini. Torej je $\sigma_{S_1S_3}(S_2) = S_2$. Ker je $\sigma_{S_1S_3}(S_1) = S_3$ in $\sigma_{S_1S_3}(S_3) = S_1$, od tod sledi $|S_1S_2| = |S_2S_3|$. Podobno sklepamo še za ostale točke množice S. Točke množice S so torej res oglišča pravilnega mnogokotnika.

2. način [Irena Majcen]. Opazujmo množico $\mathcal{S}$ vseh simetral daljic, katerih oglišči ležita v S. Očitno je množica S simetrična na vsako simetralo $\sigma \in \mathcal{S}$. Nobeni dve simetrali iz $\mathcal{S}$ si nista vzporedni, saj bi v vsaki množici paroma vzporednih simetral najbolj zunanja med njimi ne bila več os simetrije množice S.

Dokažimo, da se vse simetrale sekajo v eni točki. Če bi temu ne bilo tako, bi obstajale tri simetrale (npr. σ_1, σ_2 in σ_3), katerih presečišča bi bila oglišča nekega trikotnika. Na ravnino lahko postavimo tak koordinatni sistem, katerega obscisna os ni vzporedna nobeni simetrali iz $\mathcal{S}$. Simetrale σ_1, σ_2 in σ_3 naj bodo izbrane tako, da ima točka $\sigma_1 \cap \sigma_2$ najmanjšo ordinato med vsemi točkami, ki so presečišča dveh simetral iz $\mathcal{S}$. Ker je $\sigma_1(\sigma_3), \sigma_2(\sigma_3) \in \mathcal{S}$, ima vsaj eno izmed presečišč $\sigma_1(\sigma_3) \cap \sigma_2$ in $\sigma_2(\sigma_3) \cap \sigma_1$ manjšo ordinato. Slednje pa ni možno. Torej se vse simetrale sekajo v eni točki, ki jo označimo z O. Vse točke množice S tako ležijo na nekaj koncentričnih krožnicah s središčem v O. Krožnica je tu pravzaprav ena sama, saj simetrala daljice, katere krajišči sta različno oddaljeni od točke O, ne vsebuje točke O. Dokaz lahko sedaj sklenemo podobno kot pri prvem načinu.

2. naloga. Pri $n = 1$ ustreza pogojem vsako praštevilo p. Če je $p = 2$, je edina rešitev $n = 2$. Torej smemo v nadaljevanju privzeti, da je $p \geq 3$ in $n \geq 2$.

Ker je število $(p-1)^n + 1$ liho, mora biti tudi število n liho. To pomeni, da je $n < 2p$. Označimo s q najmanjši praštevilski delitelj števila n. Števili n in $q-1$ sta si tako tuji (če q ni najmanjši praštevilski delitelj števila n, si števili n in $q-1$ nista nujno tuji, npr. $n = 6$, $q = 3$) in zato obstajata taki (celi) števili a in b, da je $an + b(q-1) = 1$. (Število a mora biti liho, eno izmed števil a ali b pa je negativno.) Ker $q \mid (p-1)^n + 1$, je $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$ in od tod $(q, p-1) = 1$. Po Eulerjevem izreku je tako $(p-1)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Če je $a < 0$, je $b(q-1) = 1 - an$ in lahko zapišemo $(p-1)^{b(q-1)} = (p-1) \cdot (p-1)^{-an}$, od koder sledi $1 \equiv (p-1)(-1)^{-a} \pmod{q}$ oz. $p - 1 \equiv -1 \pmod{q}$. Če pa je $b < 0$, zapišemo $an = 1 - b(q-1)$ in podobno kot zgoraj sklepamo $p - 1 \equiv -1 \pmod{q}$. (Zaradi $an + b(q-1) = 1$ bi lahko enostavno zapisali

$$p - 1 = (p-1)^{an} \cdot (p-1)^{b(q-1)} \equiv (-1)^a \cdot 1^b \equiv -1 \pmod{q},$$

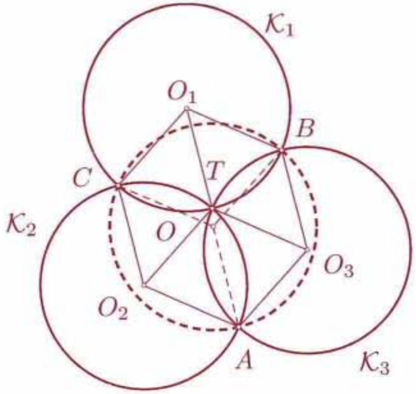
kar pa ni pravilno, saj je eden izmed eksponentov negativen.) Iz $p - 1 \equiv -1 \pmod{q}$ sledi $q \mid p$ oz. $q = p$, saj je p praštevilo. Zaradi ocene $n < 2p$ je tako $n = p$.

V nadaljevanju moramo torej analizirati le še primer, ko je število $(p-1)^p + 1$ deljivo s številom p^{p-1}. Po binomski formuli je

$$(p-1)^p + 1 = p^2 \left(p^{p-2} - \tbinom{p}{1} p^{p-3} + \cdots + \tbinom{p}{p-3} p - \tbinom{p}{p-2} + 1 \right).$$

Izraz v oklepaju ni deljiv s p, zato je število $(p-1)^p+1$ deljivo s p^2 in ni deljivo s p^3. Torej je $p-1 \leq 2$ oz. $p \leq 3$ in ima enačba še rešitev $p=3$, $n=3$.

Naloga o logotipu. Potegnimo vzporednico daljici AO_3 skozi točko B in vzporednico daljici BO_3 skozi točko A. Presečišče teh dveh premic označimo z O. Po konstrukciji je AO_3BO paralelogram, velja pa tudi $|AO_3| = |BO_3|$. Torej je AO_3BO romb in zato $|AO| = |BO|$. Vzporednica daljici AO_2 skozi C naj seka premico AO v točki O' in podobno kot zgoraj sklepamo, da je $AO'CO_2$ romb. Sledi $|AO'| = |AO_2| = |AO_3| = |AO|$, zato točki O in O' sovpadata. Točka O je torej res središče trikotniku ABC očrtane krožnice.



Opomba. S podobnim razmislekom lahko dokažemo, da je točka T pravzaprav višinska točka trikotnika ABC.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

27. letnik, šolsko leto 1999/2000, številka 4, strani 193 – 256

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1999/2000 je za posamezne naročnike **2.000 SIT**, za skupinska naročila šol **1.650 SIT**, posamezna številka **400 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana