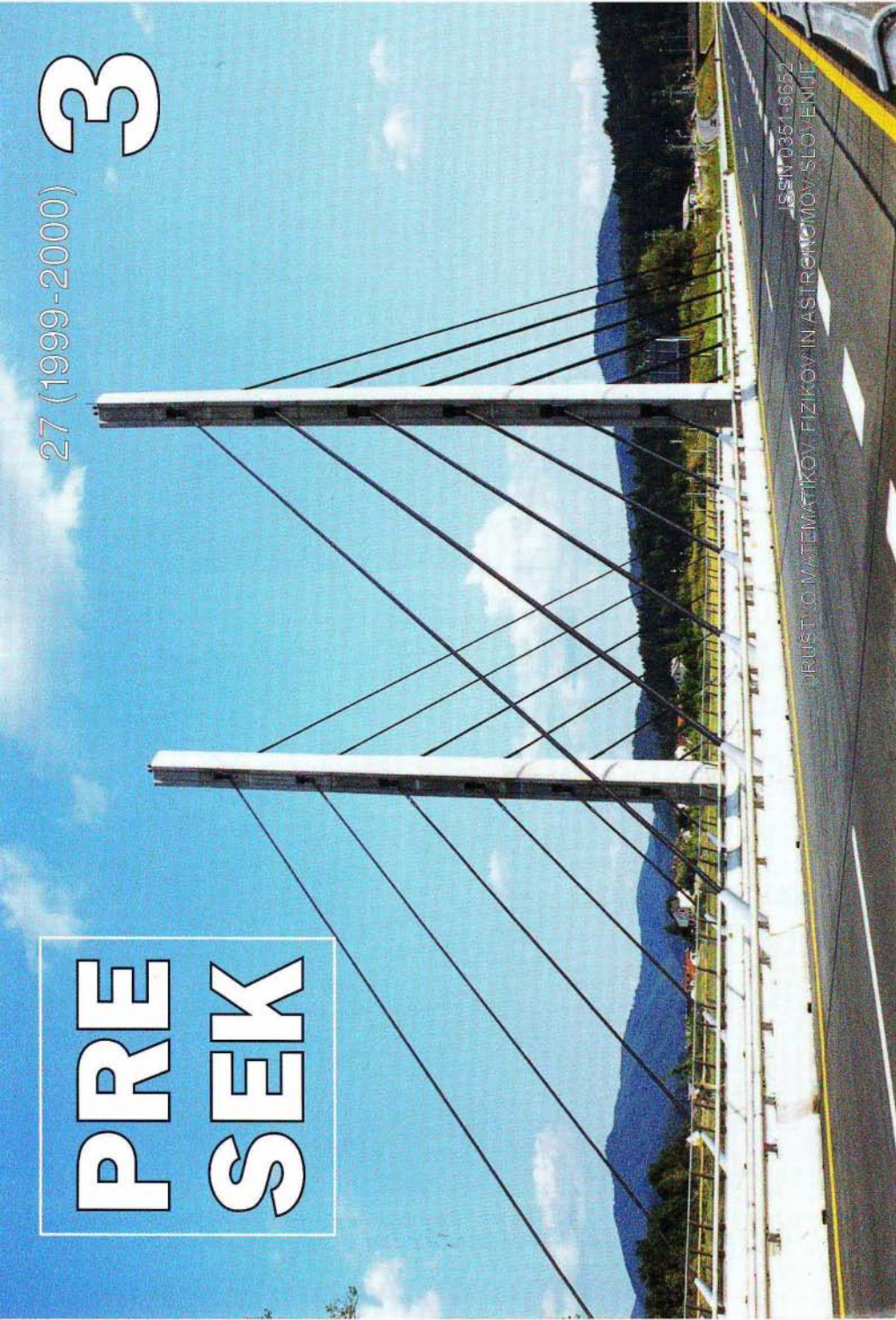


3

27 (1999-2000)

# PRE SEK

ISSN 0351-8652  
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE





Ekipa Slovenije na 30. mednarodni fizikalni olimpiadi v Padovi. Z leve proti desni: Ciril Dominko (vodja), Gregor Jerše, Miran Bürmen, Matej Kanduč, Urban Simončič, Mihael Kadunc, Primož Ziherl (vodja).



Ekipa Slovenije na MMO v Romuniji. Od leve proti desni: Mojca Miklavec, Matjaž Željko (vodja ekipe), Jure Kališnik, Matjaž Urlep (bronasta medalja), Ajda Skarlovnik, Dušan Jan, Irena Majcen (bronasta medalja) in Darjo Felda (član mednarodne tekmovalne komisije).

# PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
27. letnik, leto 1999/2000, številka 3, strani 129–192

## MATEMATIKA

### VSEBINA

Leonardo da Vinci kot matematik (Marija Vencelj) ..... 134-135  
Naloge o elipsah iz japonskih templjev

(Karmela Milutinović) ..... 146-151

## FIZIKA

Brv in most (Andrej Likar) ..... 132-133

Kako hitro so se gibali dinosavri? (Janez Strnad) ..... 142-145

## ASTRONOMIJA

## RAČUNALNIŠTVO

## NOVICE

Premikanje Lune glede na zvezde (Marijan Prosén) ..... 136-137

Rekonstrukcija dreves, 2. del (Martin Juvan) ..... 138-141

40. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko) ... 158-159

30. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko) ..... 159

30. fizikalna olimpiada: P kot Padova ali kot

pasji dnevi (Urban Simončič) ..... 162-163

## NALOGE

2000 (Martin Juvan) ..... 130

Britje (Andrej Likar) ..... 130

Enakostranična trikotnika (Marija Vencelj) ..... 131

Dopolni račun (Marija Vencelj) ..... 131

Poravnani kazalci (Martin Juvan) ..... 131

Izlušči in dokaži pravilo (Marija Vencelj) ..... 145

Dva faktorja brez ničel (Marija Vencelj) ..... 159

## ZANIMIVOSTI,

## RAZVEDRILO

## REŠITVE NALOG

Poslušajmo praštevila (Mojca in Matija Lokar) ..... 152-154

Križanka "Odkritja tisočletja" (Marko Bokalič) ..... 160-161

Kako sta sklepala Nina in Žiga? – s str. 98 (Silva Kmetič) .... 141

Stalimo sneg! – s str. 66 (Andrej Likar) ..... 154

ABCCC – s str. 67 (Martin Juvan) ..... 155-156

Koliko manjših? – s str. 89 (Martin Juvan) ..... 156-157

Premoženje – s str. 82 (Marija Vencelj) ..... 163-164

Križanka "Popolni Sončev mrk" – s str. 96 (Marko Bokalič) .... 164

Lažnivi Kljukec – Odgovor na vprašanje iz zadnje

lanske številke Preseka (Andrej Likar) ..... 165

Koliko iger? – Rešitev (po dvojiško) s str. 67

(Marija Vencelj) ..... 165-166

Enobarvna kocka – s str. 67 (Marija Vencelj) ..... 166-167

## TEKMOVANJA

Urniki tekmovanj v letu 2000 (Darjo Felda) ..... 168-170

34. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo

priznanje – rešitve s str. 109 (Aleksander Potočnik) .... 170-172

19. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce –

rešitve s str. 114 (Mojca Čepič) ..... 172-178

Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce –

rešitve s str. 119 (Matjaž Željko) ..... 178-182

Rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike

v šolskem letu 1998/99 – s str. 121 (Bojan Golli) ..... 182-188

20. mednarodno matematično tekmovanje mest –

pomladanski krog – rešitve s str. 125 (Aleš Vavpetič) ... 189-192

## NA OVITKU

Brvi in mostovi (foto Andrej Likar). Glej tudi članek

na str. 132. .... I, III, IV

Slovenski olimpijski ekipi na 30. fizikalni in 40. matematični medna-

rodni olimpiadi. Poročila so na straneh 158, 159 in 162. .... II

## 2000

Za vsako števko  $x \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$  lahko s stikanjem števk in s štirimi osnovnimi računskimi operacijami (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje) zapišemo število 2000 kot

$$2000 = (xxxx - xxx) \cdot (x + x) / (x \cdot x).$$

Za gornji zapis potrebujemo 11 enakih števk. Včasih lahko število uporabljenih števk zmanjšamo. Na primer:

$$2000 = (1111 - 111) \cdot (1 + 1) \quad (9 \text{ enic})$$

$$2000 = 2222 - 222 \quad (7 \text{ dvojek})$$

Z nekaj spretnosti lahko poiščemo še krajše zapise:

$$2000 = 44 \cdot 44 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \quad (7 \text{ štiric})$$

$$2000 = (5 - 5/5) \cdot (555 - 55) \quad (8 \text{ petic})$$

$$2000 = 999 \cdot (9 + 9)/9 + (9 + 9)/9 \quad (9 \text{ devetic})$$

Sprašujem vas, koliko enic, koliko dvojek, koliko trojk, ..., koliko devetic potrebujemo pri najkrajših zapisih števila 2000 s samimi enakimi števki. Naj ponovim: Pri sestavljanju zapisov so dovoljene le štiri osnovne računske operacije in stikanje števk. Odgovore lahko pošljete na uredništvo Preseka. **Najkrajše, pa tudi najbolj zvite rešitve bomo objavili.** Seveda pa nas zanimajo tudi spretni dokazi, da zapisi, krajši od tistih, ki jih boste našli, ne obstajajo.

*Martin Juvan*

## BRITJE

Opazujem znanca pri britju v kampu. Brije se klasično, s peno in britvico. Vem, da doma uporablja električni brivnik, in vprašam ga, čemu sprememba, saj je v kampu tudi elektrika. Slutim, da je v naglici pozabil vzeti s seboj električni brivnik. Odgovor je kratek: "Ker tako porabim manj energije." Takoj podvomim, saj se je bril kakih 10 minut in ves čas je med tem tekla iz pipe voda, curek bi v kaki minuti napolnil litrsko posodo. Ali je imel znanec prav? Pobrskajte po podatkih o moči električnih brivnikov in tlakih v vodovodnih napeljavah, časih britja z električnimi brivniki in preverite izjavo.

*Andrej Likar*

## ENAKOSTRANIČNA TRIKOTNIKA

Enakostranični trikotnik včrtamo v večji enakostranični trikotnik tako, da so stranice manjšega trikotnika pravokotne na stranice večjega.

Kolikšen del ploščine večjega trikotnika predstavlja ploščina malega trikotnika?

*Marija Vencelj*

## DOPOLNI RAČUN

Namesto zvezdic napiši take številke, da bo dobljeni račun množenja pravi.

$$\begin{array}{r}
 4 * * \times * 2 * \\
 \hline
 * 3 * * \\
 * 1 2 \\
 * * 4 * \\
 \hline
 * * * * 6 *
 \end{array}$$

*Marija Vencelj*

## PORAVNANI KAZALCI

Večkrat sem že naletel na naloge, povezane s položajem urnih kazalcev. Med klasične naloge te vrste sodi tudi naslednja. Vsi vemo, da so ob polnoči urni, minutni in sekundni kazalec na običajni stenski uri poravnani.

- Sprašujem vas, ali obstaja še kak drug trenutek, ob katerem so vsi trije kazalci poravnani?
- Do stotinke sekunde natančno izračunajte vse čase, ob katerih sta urni in minutni kazalec poravnana. Takih časov je v prvi polovici dneva enajst: ob polnoči, malo čez eno, nekaj čez drugo, dobrih četrtn čez tretjo in tako naprej do malo pred enajsto.

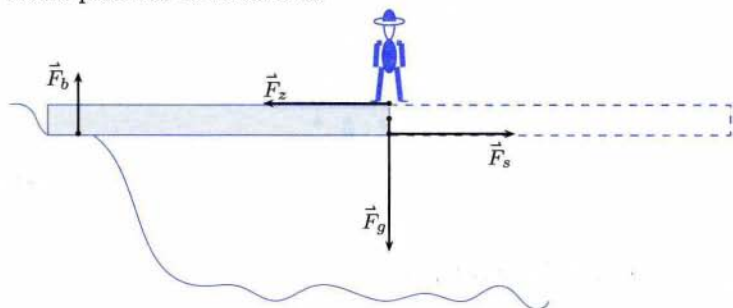
Pri iskanju odgovorov (predvsem pri drugem vprašanju) si seveda lahko pomagata z računalom ali pa z računalnikom.

*Martin Juvan*

## BRV IN MOST

Za premostitev ozkega potoka ali jarka uporabimo brv. To je deska ali bruno, ki je na koncih oprto na bregova potoka. Iz izkušenj vemo, da se dolga in tanka brv precej upogne, ko hodimo po njej, pri večji obremenitvi pa se rada prelomi. Oglejmo si, kaj pravi izrek o ravnovesju navorov v primeru, ko na sredi brvi stoji mož.

Brv se pod težo moža sicer nekoliko upogne, a bomo na upogib za hip pozabili. Sile na celotno brv hitro ugotovimo. Najprej je tu skupna teža brvi in moža, na koncih pa delujeta na brv bregova potoka navpično navzgor. Sili bregov sta enaki. Ker je vsota vseh sil na brv enaka nič, je sila enega brega na brv enaka polovični skupni teži. Sedaj si oglejmo napore na brv. Opazujemo le levo polovico brvi, težo brvi pa zanemarimo. Osišče si izberemo v točki, kjer stoji mož (glej sliko 1). Navor njegove teže je tako enak nič. Prav tako je enak nič navor navpične komponente sile desne polovice brvi na levo.

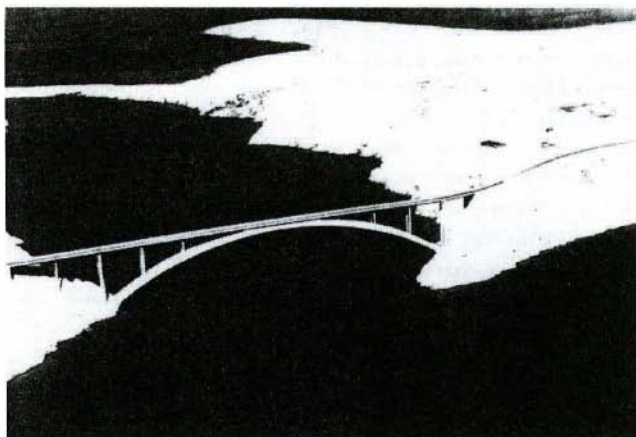


Slika 1. Navor na levo polovico brvi glede na os v njenem težišču prispevata le sila levega brega ter dvojica sil  $F_z$  in  $F_s$ .

Navor sile levega brega  $\frac{F_g l}{4}$  skuša zavrteti brv v smeri urinega kazalca. Z  $F_g$  smo označili težo moža, z  $l$  pa dolžino celotne brvi. Temu navoru se mora upreti navor vodoravnih komponent sil, s katerimi deluje desna polovica deske na levo. Da bo računanje preprostejše, privzemimo, da deluje desna polovica deske na levo s silama, ki ležita v zgornji in spodnji ploskvi deske (glej skico). Zgornja sila  $F_z$  kaže proti levemu bregu, sila v spodnji ploskvi  $F_s$  pa v nasprotni smeri. Ti sili se pojavita prav zaradi upogiba brvi in sta po velikosti enaki  $|F_z| = |F_s| = F_d$ . Sili tvorita dvojico, katere navor je  $F_d h$ , kjer je  $h$  debelina brvi. Ta navor bi zavrtel brv v smeri, ki je nasprotna smeri gibanja urinih kazalcev. Ker brv miruje, morata biti navora enaka:  $F_d h = \frac{F_g l}{4}$  in zato  $F_d = F_g \frac{l}{4h}$ . Iz zadnje enačbe vidimo, da je sila  $F_d$  lahko mnogo večja od teže  $F_g$ , saj je razmerje  $\frac{l}{4h}$

mnogo večje od ena. Pri debelini brvi 5 cm in njeni dolžini 4 m je razmerje 20. Sila  $F_d$  ne sme biti prevelika, saj se pri preveliki sili brv lahko zlomi.

Pri načrtovanju mostov sledi iz zahteve po ravnovesju navorov pomembno spoznanje: mostu preko široke reke ne moremo zgraditi tako, da brv poljubno podaljšamo. Razmerje  $\frac{l}{4h}$  bo pri široki reki veliko in zato sila  $F_d$  tolikšna, da se brv podre, tudi če je jeklena. Če želimo zgraditi most, moramo npr. odebeliti brv, da ostane razmerje  $\frac{l}{4h}$  ustrezno majhno. Pri kratkih mostovih to dosežemo s sestavljanjem jeklenih palic, da ni most pretežak. Včasih postavijo brv v obliki strehe (zgornja slika na III. strani ovitka). V tem primeru pomaga navor vodoravne komponente sile leve polovice brvi na desno. Osišča pri tem ne premaknemo, sedaj pač leži na sredi vodoravne daljice, ki veže krajišči brvi.



Slika 2. Pri mostu na otok Pag so podpore naslonjene na lok, ki se pne med bregovima.

Najpogostejše pa navor dvojice  $F_z$ ,  $F_s$  nadomestijo z navorom sil podpor (spodnja slika na III. strani ovitka). Če je gradnja podpornih stebrov zaradi globine vode predraga, zgradijo lok, preko katerega napeljejo brv, podpore pa na spodnjem koncu oprejo na lok (slika 2). Namesto podpor pogosto uporabijo jeklene vrvi – zatege, ki jih pripnejo na eni strani na brv, na drugi pa na posebej zato zgrajeno oporo. Slednja je pogosto v obliki oboka, ki se pne nad brvjo. Spet druge pripnejo vrvi na visoke stebre ali na verigo, ki jo napnejo med stebri. Arhitekti mostov se trudijo zatege postaviti čim bolj slikovito. Nekateri mostovi so postali prave znamenitosti. Zanimiv je tudi most preko Ljubljane na vzhodni ljubljanski obvoznici (slika na naslovnici) ali most v Seville preko reke Guadalquivir (slika na zadnji strani ovitka).

Andrej Likar

## LEONARDO DA VINCI KOT MATEMATIK

Narodni muzej v Ljubljani gosti od 3. novembra do 5. marca svetovno znano razstavo z naslovom Leonardo da Vinci – znanstvenik, izumitelj, umetnik. O sami razstavi, ki naredi na obiskovalca izjemen vtis, čeprav ne predstavlja da Vincija kot umetnika, ampak poudarja predvsem tehniško stran njegovega dela, pripravljamo daljši zapis za naslednjo številko Preseka.

Za čas evropske renesanse je značilna velika vsestranost tedanjih umetnikov. Številni med njimi so bili hkrati slikarji, kiparji, stavbeniki, pesniki, pa tudi tehniki in naravoslovci. Najbolj izrazito vsestranski pa je bil gotovo Leonardo da Vinci (1452–1519), ki se je proti koncu svojega življenja veliko ukvarjal tudi z matematiko. Žal ni ničesar 'objavil'. Njegovo zapuščino predstavlja veliko število skic, namenjenih njegovemu lastnemu razumevanju problemov. Le redke med njimi so opremljene s skopimi raztrganimi opombami v zrcalni pisavi. Sprva so tudi raznesli da Vincijevo zapuščino na vse vetrove sveta in šele v zadnjem stoletju so jo poskusili spet zbrati, da bi bila dostopna raziskovalcem. Zato je težko govoriti o konkretnih matematičnih dosežkih Leonarda da Vincija. Ostaja vtis, da je prodrl v bistvo številnih matematičnih problemov, imel veliko idej, da pa nečesa, kar bi lahko imenovali 'Leonardov izrek', ni ustvaril.

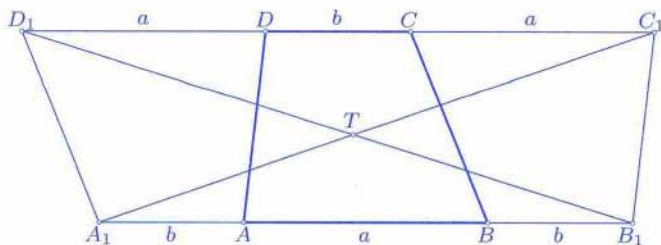
Za ilustracijo da Vincijevega odnosa do matematike si oglejmo njegovo rešitev problema konstrukcije težišča trapeza.

Določanje težišč ravninskih likov pa tudi teles je Leonarda da Vincija še posebej zanimalo. Na osnovi enega od Arhimedovih zapisov je ugotovil, da lahko konstruiramo težišče poljubnega premočrtno omejenega ravninskega lika v principu z uporabo naslednjih dveh pravil:

1. Težišče trikotnika je presečišče daljic, ki povezujejo oglišča trikotnika z razpolovišči nasprotnih stranic.
2. Lika  $L_1$  in  $L_2$  brez skupnih točk s težiščema  $T_1$  in  $T_2$  ter ploščinama  $p_1$  in  $p_2$  naj ležita v isti ravnini. Potem leži težišče  $T$  skupnega lika na daljici  $T_1T_2$  in sicer tako, da velja  $p_1 \cdot \overline{TT_1} = p_2 \cdot \overline{TT_2}$ .

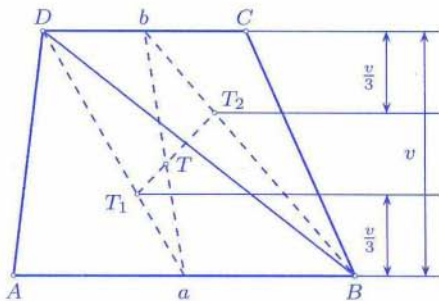
Z uporabo obeh pravil dobimo preprosto konstrukcijo težišča poljubnega trapeza  $ABCD$ , ki jo prikazuje slika 1.

Za dokaz razdelimo trapez na dva trikotnika  $ABD$  in  $DCB$  (slika 2) z osnovnicama  $a$  oziroma  $b$ , skupno višino  $v$  in s težiščema  $T_1$  oziroma  $T_2$  (ki ju konstruiramo po prvem pravilu).



Slika 1.

Po drugem pravilu leži težišče  $T$  trapeza na daljici  $T_1T_2$ , tako da velja  $\overline{TT_1} : \overline{TT_2} = b : a$ . Če izrazimo oddaljenost težišča  $T$  od osnovnice  $AB$  v obliki  $(1+x) \cdot \frac{v}{3}$ , je oddaljenost težišča  $T$  od  $CD$  enaka  $(2-x) \cdot \frac{v}{3}$ , kjer je  $x : (1-x) = b : a$ . Sledi



Slika 2.

$$1+x = \frac{a+2b}{a+b} \quad \text{in} \quad 2-x = \frac{2a+b}{a+b},$$

torej sta oddaljenosti težišča  $T$  od osnovnic trapeza v razmerju  $(a+2b) : (b+2a)$ .

To pa že pomeni, da sta oddaljenosti na sliki 1 konstruirane točke  $T$  od osnovnic  $AB$  in  $CD$  pravi (to sta višini v podobnih trikotnikih  $A_1B_1T$  in  $C_1D_1T$ ). Po drugi strani pa leži težišče na daljici, ki veže razpolovišči obeh osnovnic trapeza. Ker ta daljica povezuje tudi razpolovišči daljic  $A_1B_1$  in  $C_1D_1$ , leži (zaradi  $A_1B_1T \sim C_1D_1T$ ) na njej tudi na sliki 1 konstruirana točka  $T$ .

Opisanega dokaza ne moremo šteti za da Vincijevo 'odkritje'. Pravzaprav ga je le izvedel, kakor tudi številne druge, na osnovi znanih trditev.

Opazimo pa dvoje. Po eni strani je imel izrazit smisel za uporabnost. Princip, vsebovan v pravilih 1 in 2, je v konkretnem primeru uporabil za izpeljavo uporabne in enostavne konstrukcije, ki si jo je moč tudi zlahka zapomniti. Po drugi strani je izbrana pot do rešitve zelo lepa. Tudi matematika je bila za Leonarda da Vincija po svoje umetnost.

Marija Vencelj

## PREMIKANJE LUNE GLEDE NA ZVEZDE

Veliko ljudi ne razume, zakaj se Luna premika glede na zvezde. Pri pogledu nanje se navidezno premika v levo, oziroma od zahoda proti vzhodu, če smo obrnjeni proti jugu. Naj to pojasnim. Začnimo od začetka.

Opazili ste že, da Luna vzhaja na vzhodnem delu obzorja, se nato dviga na nebo, je najvišje nad obzorjem na jugu, potem se spušča in zahaja na zahodni strani obzorja. To je *navidezno dnevno gibanje Lune*. Ima ga zaradi vrtenja Zemlje in poteka (kakor pri Soncu) od vzhoda proti zahodu, torej v desno.

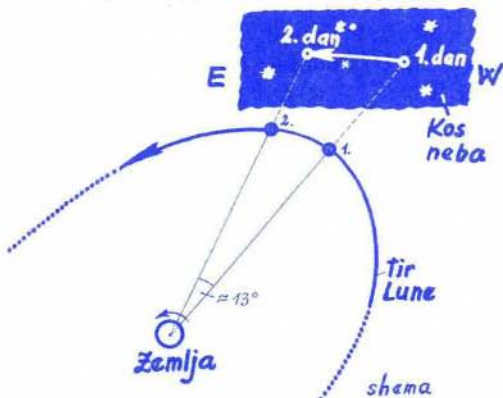
Če natančneje opazujemo Luno, že v kratkem času zasledimo, da se počasi premika glede na zvezde. Premikanje opazimo s prostim očesom, z daljnogledom pa seveda še bolje. Kmalu ugotovimo, da se Luna navidezno odmika od zvezd, vidnih na njeni desni (zahodni) strani, in se navidezno bliža k zvezdam, vidnim na njeni levi (vzhodni) strani. To gibanje Lune na nebu proti vzhodu imenujemo *navidezno mesečno gibanje Lune*. Nastane zaradi kroženja Lune okrog Zemlje v napredni, pozitivni smeri (od zahoda proti vzhodu).

Recimo, da nas zanima, koliko se Luna premakne glede na zvezde v enem dnevu, to je v 24 urah. To izračunamo takole:

Ker Luna obkroži Zemljo v 27,3 dneva, preteče dnevno  $\frac{1}{27,3}$  svoje poti okrog Zemlje, in sicer tako, da se dnevno na nebu premakne za  $\frac{1}{27,3}$  polnega kota, torej  $\frac{1}{27,3} \cdot 360^\circ$  na dan  $\approx 13^\circ$  na dan (vrednost niha med  $11,8^\circ$  in  $14,7^\circ$  na dan) proti vzhodu.

Če se kakega dne ob določeni uri postavimo obrnjeni z obrazom proti jugu, pogledamo Luno in si zapomnimo njeno lego glede na kakšno drevo, bomo z istega opazovališča naslednjega večera ob enakem času videli Luno približno  $13^\circ$  bolj levo (vzhodnejše).

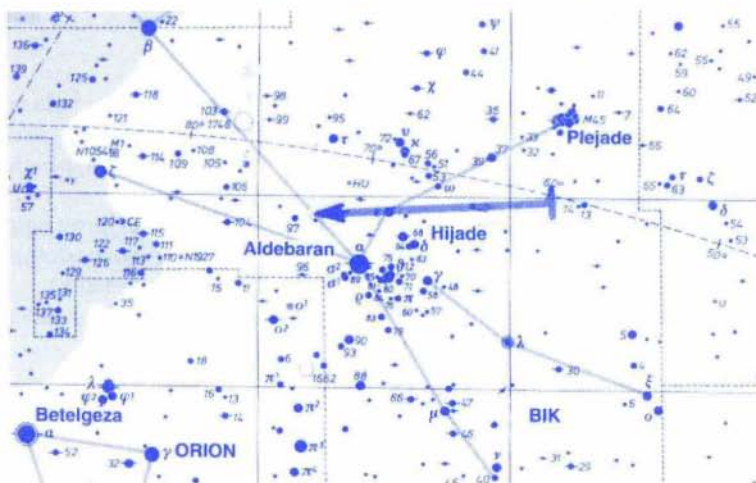
O tem se lahko pričate. Luno opazujte, kot je opisano. Moram pa vas opozoriti, da je Luna zelo nepredvidljiva, včasih nesramno muhasta in se ne pokorava vedno pravilu, ki smo ga pravkar povedali. Toda brez



Slika 1. Dnevni premik Lune na tiru okrog Zemlje in na nebu. Zaradi kroženja se v 24 urah Luna navidezno premakne približno za  $13^\circ$  (malo manj kot pod iztegnjene roke) proti vzhodu. Zato Luna iz dneva v dan pozneje vzhaja (zahaja).



Slika 2. Premik Lune na nebu v 24 urah – fotografija.



Slika 3. Glede na sliko 2 v zvezdni karti vrisan ustrezni premik Lune – skica.

bojazni. Kljub muhavosti boste z lahkoto opazili njeno premikanje glede na zvezde. Le nekoliko potruditi se bo treba.

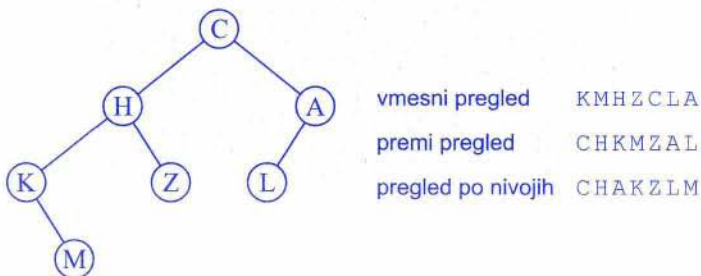
Luna zaradi omenjenega navideznega premikanja vsak dan vzhaja (in seveda tudi zahaja) nekoliko pozneje, in sicer za toliko, kolikor potrebuje Zemlja, da se zavrti za  $\frac{1}{27,3}$  svojega obrata okrog svoje vrtilne osi, to je za  $\frac{1}{27,3} \cdot 24 \text{ ur} \approx 53 \text{ minut}$ .

Od prvega do drugega Luninega vzida (zaida) torej preteče približno 24 ur 50 min. No, to pokaže račun. Kaj pa Luna?

*Marijan Prosén*

## REKONSTRUKCIJA DREVES, 2. DEL

V prejšnji številki Preseka smo v prvem delu prispevka spoznali tri preglede dvojiških dreves: vmesni in preni pregled ter pregled po nivojih. Za osvežitev spomina si lahko na spodnji sliki ogledate dvojiško drevo in pripadajoče preglede.



Spoznali smo tudi, kako lahko iz vmesnega in premega pregleda rekonstruiramo drevo. Tokrat si bomo ogledali, kako je z rekonstrukcijo drevesa, če poznamo pregled po nivojih in enega od preostalih dveh pregledov, vmesnega ali premega.

Programsko kodo bomo pisali v jeziku C, zato si najprej oglejmo, kako v tem jeziku opišemo dvojiško drevo. Deklaracije so podobne kot v pascalu. Vozlišče predstavimo s strukturo (besedica **struct**) – to je C-jevsko poimenovanje sestavljenih tipov, drevo pa zopet s kazalcem na koren:

```

typedef struct vozlisce *Drevo;
typedef struct vozlisce {
    char x;
    Drevo levo, desno;
} Vozlisce;

```

Nekaj osnovnih funkcij za delo z drevesi (in kodo v C-ju) najdete v zbirki nalog *M. Juvan, M. Zaveršnik: C naj bo* (zadnji del 7. poglavja).

**Vmesni pregled in pregled po nivojih.** Tudi kadar poznamo pregled po nivojih namesto premega pregleda, se lahko rekonstrukcije drevesa lotimo na enak način. Dodatne težave nam povzroča dejstvo, da v pregledu po nivojih vozlišča levega in vozlišča desnega poddrevesa ne tvorijo več strnjenih podnizov (to dejstvo smo s pridom izkoristili pri rekonstrukciji iz premega pregleda).

Zato bo treba prilagoditi parametre rekurzivne funkcije in dopolniti iskanje korena. Funkcija bo imela tri parametre: kazalca *zacV* in *konV* tipa *char \**, ki bosta označevala prvi oziroma zadnji znak vmesnega pregleda, in niz *nivoji*, ki bo vseboval pregled po nivojih, med znake pregleda pa bodo lahko vrinjeni še drugi znaki. Koren poddrevesa, ki ga gradimo na rekurzivnem koraku, bo potem prvi znak iz *nivoji*, ki se pojavi tudi v vmesnem pregledu.

Na kratko pogledjmo še korake opisanega postopka na primeru z začetka prispevka. Začnemo z vmesnim pregledom *KMHZCLA* in pregledom po nivojih *CHAKZLM*. Vzamemo prvi znak iz pregleda po nivojih, to je *C*, in pogledamo, ali se pojavi v vmesnem pregledu. Tam ga najdemo in tako določimo vmesna pregleda za levo in desno poddrevo. Sledi rekurzivni klic za levo poddrevo: vmesni pregled je *KMHZ* (del začetnega pregleda do znaka *C*), pregled po nivojih pa je vsebovan v nizu *HAKZLM* ("odvečna" znaka sta *A* in *L*). Ponovno poiščemo koren. Poskušanje začnemo z znakom *H* in takoj uspemo. Sledi nov rekurzivni klic: vmesni pregled levega poddrevesa je *KM*, pregled po nivojih pa je vsebovan v nizu *AKZLM* (tokrat so "odvečni" znaki *A*, *Z* in *L*). Tokrat prvi kandidat za koren, znak *A*, ni pravi (ne pojavi se v vmesnem pregledu). Zato poskusimo z naslednjim znakom *K*. Ta nastopi v vmesnem pregledu in je torej koren poddrevesa na nivoju 2. Zopet sledita rekurzivna klica. Prvi klic za levo poddrevo se takoj konča, saj gre za prazno poddrevo. Sledi drugi rekurzivni klic, ki zgradi drevo z vozliščem *M*. S tem je poddrevo, katerega koren je *K*, v celoti zgrajeno. Vrnemo se nivo nazaj. Tam sledi rekurzivni klic za desno poddrevo v drevesu, katerega koren je *H*. Ta zgradi drevo z vozliščem *Z*. Sledi vračanje do začetnega nivoja in klic, ki rekurzivno zgradi še desno poddrevo iskanega drevesa.

```
/* Zgradi dvojiško drevo iz vmesnega pregleda in pregleda
   po nivojih. Ne preverja pravilnosti vhodnih podatkov. */
Drevo zgradi(char *zacV, char *konV, char *nivoji)
{
    char *pomV; /* mesto korena v vmesnem pregledu */
    Drevo kaz; /* pomožni kazalec za novo vozlišče */

    if (zacV > konV) return NULL; /* prazno drevo */
    /* Iščemo koren: prvi znak iz nivoji, ki je v vmesnem pregledu. */
    while (*nivoji != '\0') {
        pomV = zacV;
        while (*pomV != *nivoji && pomV <= konV) pomV++;
        if (*pomV == *nivoji++) break;
    }
}
```

```

/* Če so podatki pravilni, smo koren gotovo našli. */
kaz = malloc(sizeof(Vozlisce)); /* Naredimo novo vozlišče. */
kaz->x = *pomV;
/* Rekurzivna klica - zgradimo levo in desno poddrevo. */
kaz->levo = zgradi(zacV, pomV - 1, nivoji);
kaz->desno = zgradi(pomV + 1, konV, nivoji);
return kaz;
} /*zgradi*/

```

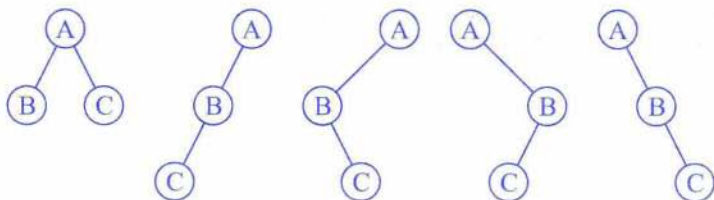
Če je sta pregleda drevesa shranjena v nizih opis1 in opis2 ter je d spremenljivka tipa Drevo, potem funkcijo pokličemo z

```
d = zgradi(opis1, opis1 + strlen(opis1) - 1, opis2);
```

Tu je `strlen` funkcija iz knjižnice `<string.h>`, ki vrne dolžino niza.

Poglejmo še, kako je s časovno in prostorsko zahtevnostjo funkcije. O prostorski zahtevnosti ne moremo povedati nič novega. Glede uporabe pomnilnika se funkcija obnaša praktično enako kot funkcija za rekonstrukcijo dreves iz vmesnih in premih pregledov iz prvega dela prispevka. Pri časovni zahtevnosti pa se funkciji na prvi pogled razlikujeta. Tokrat smo namreč uporabili še dodatno zanko za iskanje korena (poleg zanke, v kateri poiščemo mesto korena v vmesnem pregledu, ki jo imamo v obeh funkcijah). Vendar pa natančnejša analiza pokaže, da je število operacij še vedno omejeno s kvadratno funkcijo števila vozlišč drevesa (je pa vodenjski koeficient te funkcije nekoliko večji kot pri prejšnjem primeru). Ključna je ugotovitev, da nobenega znaka iz vmesnega pregleda ne primerjamo dvakrat z istim znakom iz pregleda po nivojih (natančna utemeljitev te ugotovitve zahteva nekoliko daljši razmislek, ki presega okvir tega prispevka).

**Premi pregled in pregled po nivojih.** Premi pregled in pregled po nivojih sta si precej podobna, zato ni presenetljivo, da drevesa z njima niso enolično določena. Premi pregled ABC in pregled po nivojih ABC ima npr. naslednjih pet dreves:



Enolična rekonstrukcija drevesa iz premega pregleda in pregleda po nivojih tako v splošnem ni mogoča. To ugotovitev lahko še nekoliko poostriamo. Za konec vas bom poskušal prepričati, da velja naslednja trditev: Za vsako dvojiško drevo  $\mathcal{D}$  z vsaj dvema vozliščema obstaja vsaj še eno dvojiško drevo  $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$ , ki ima enak premi pregled in enak pregled po nivojih kot drevo  $\mathcal{D}$ . Takole razmišljajmo. Naj bo  $x$  najbolj desno vozlišče na zadnjem nivoju (pri drevesu iz zgleda je to vozlišče  $M$ ). Mimogrede opazimo, da je  $x$  zadnje obiskano vozlišče pri premem pregledu in pri pregledu po nivojih. Ker ima drevo  $\mathcal{D}$  po predpostavki vsaj dve vozlišči,  $x$  ni koren drevesa. Naj bo  $y$  njegov oče (v zgledu je to vozlišče  $K$ ). Ločimo dve možnosti. Če je  $x$  edini sin vozlišča  $y$  (tako je v zgledu), potem je  $x$  lahko levi ali pa desni sin. Če je levi, ga lahko prestavimo na desno, če je desni, pa na levo, v obeh primerih pa ima novo drevo enak premi pregled in enak pregled po nivojih kot drevo  $\mathcal{D}$ . Kadar pa ima  $y$  dva sinova, lahko poddrevo s tremi vozlišči, katerega koren je, zamenjamo s katerimkoli od petih dreves z zadnje slike, pa še vedno dobimo drevo z enakima pregledoma.

Martin Juvan

## KAKO STA SKLEPALA NINA IN ŽIGA? – Rešitev s str. 98

Napačno sta sklepala na osnovi slike. Privzeta lega srednjice na sliki v zastavljeni nalogi ni mogoča. S pravilne slike lahko razberemo:

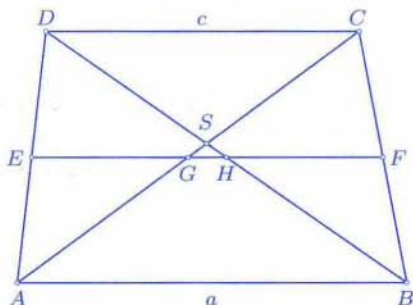
$$|EH| = \frac{a}{2},$$

$$|EG| = \frac{c}{2},$$

$$|EH| = |EG| + |GH| \quad \text{in zato}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{c}{2} + |GH|.$$

Torej je  $|GH| = (a - c)/2$ .



Tokrat nam da preizkus znani rezultat

$$s = |EG| + |GH| + |HF| = \frac{c}{2} + \frac{a-c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}.$$

Silva Kmetič

## KAKO HITRO SO SE GIBALI DINOZAVRI?

V filmu Jurski park, ki je pred leti zbudil precej pozornosti, je bilo mogoče videti razne vrste plazilcev v gibanju, čeprav so že zdavnaj izumrli. Paleontologi so izkopali njihove kosti in jih sestavili v okostja ter skupaj z zoologi rekonstruirali živali vse do zunanje podobe. Kako hitro so se živali gibale, pa so jim pomagali ugotoviti fiziki.

Začnimo s kar se da preprostim zgledom, z nihalom, pri katerem je na zelo lahek drog z dolžino  $l_1$  obešena drobna utež. Drog je vrtljiv okoli vodoravne osi skozi krajišče. Nihalo sinusno zaniha, ko ga za majhen kot  $\varphi_{01}$  izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo. Drugo nihalo z dolžino  $l_2$ , ki naj bo enako sestavljeno, izmaknimo za kot  $\varphi_{02}$  iz ravnovesne lege in spustimo. Ali lahko dosežemo, da se nihali *gibljeta podobno*? Ali lahko v vsakem trenutku po odklonu prvega nihala sklepamo na odklon drugega? Najprej je jasno, da moramo čas prvega nihala  $t_1$  in čas drugega nihala  $t_2$  začeti meriti v ustreznih trenutkih, npr., ko prvo in drugo nihalo spustimo iz začetne lege. Poleg tega morata biti oba začetna odklona enaka:  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ . Časa  $t_2$  in  $t_1$  sta v razmerju nihajnih časov  $t_2/t_1 = (g_1 l_2 / g_2 l_1)^{1/2}$ . Pri tem smo upoštevali možnost, da prvo nihalo niha na Zemlji s pospeškom prostega pada  $g_1$  in drugo na Luni s pospeškom prostega pada  $g_2$ . Hitrosti obeh uteži sta v razmerju največjih hitrosti  $v_2/v_1 = (g_2 l_2 / g_1 l_1)^{1/2}$ . Iz zveze razberemo, da je pri primerjanju pomembna količina  $v^2/gl$ . Količino z enoto 1 imenujejo *Froudovo število*. Gibanji nihal sta v navedenem smislu podobni, če sta njuni Froudovi števili enaki. Iz zveze  $v_2^2/g_2 l_2 = v_1^2/g_1 l_1$  sledi za nihali na Zemlji  $v_2^2/v_1^2 = l_2/l_1$ . Za enako dolgi nihali na Luni in Zemlji pa velja  $v_2^2/v_1^2 = g_2/g_1$ .

Poskusimo na hitro z enačbami izpolniti vrzeli v prejšnjem razmišljanju. Nihanje nihala opišemo z enačbo  $\varphi = \varphi_0 \cos(g/l)^{1/2}t$ , če začnemo meriti čas v trenutku, ko nihalo doseže največji odklon. Razmerje odklonov dveh nihal je

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_{02} \cos(g_2/l_2)^{1/2}t_2}{\varphi_{01} \cos(g_1/l_1)^{1/2}t_1}.$$

Iz enačbe razberemo, da velja  $\varphi_2 = \varphi_1$ , če velja  $(g_2/l_2)^{1/2}t_2 = (g_1/l_1)^{1/2}t_1$  in  $\varphi_{02} = \varphi_{01}$ . Hitrost krajišča nihala dobimo tako, da hitrost spreminjanja kota pomnožimo z dolžino nihala, npr.  $v_2 = -(g_2 l_2)^{1/2} \varphi_{02} \sin(g_2/l_2)^{1/2}t_2$ .

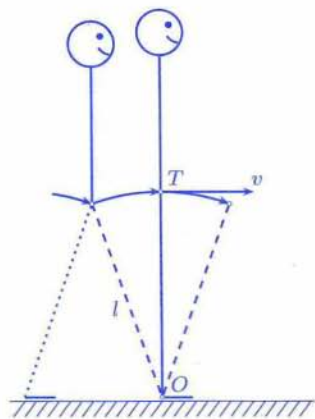
Ne pozabimo, da smo se omejili na nihanje z majhnim odklonom, pri katerem nihajni čas ni odvisen od največjega odklona. Tu moramo odnehati, če ne želimo zadeve preveč zaplesti.

Tako smo razkrili začetek zanimivega dela mehanike, *dinamično podobnost*, ki jo imamo lahko za razširitev *geometrijske podobnosti*. Lika sta geometrijsko podobna, če enega prevedemo v drugega, ko dolžino vsake od vsebovanih daljic pomnožimo z določenim številom. Med seboj podobna lika imata paroma enake ustrezne kote. Gibanji dveh geometrijsko podobnih sistemov sta dinamično podobni, če lahko eno prevedemo v drugo tako, da pomnožimo razsežnosti enega sistema z določenim številom, čase z drugim številom in sile s tretjim številom. Silo smo preračunali na maso, kar je dalo pospešek, in se omejili na težo.

Dinamična podobnost je pomembna v primeru, da delamo načrt za kako napravo, pa smo negotovi o tem, kako bo delovala. Tedaj izdelamo veliko cenejši pomanjšani model naprave in ga preskusimo. Razmere, v katerih bi delovala velika naprava, morajo ustrezati razmeram, v katerih deluje model. Tu pride na pomoč dinamična podobnost. Zagotovimo, npr., da je Froudovo število za model enako Froudovemu številu za napravo, in primerjamo čase, hitrosti, sile, kakor smo nakazali.

Dinamično podobnost je vpeljal angleški inženir William Froude (izgovori frud), ki je živel v letih od 1810 do 1879. Zanimal se je za gibanje ladij in izumil več merilnih naprav. Število, ki so ga pozneje imenovali po njem, je enako razmerju med dvojno kinetično energijo in spremembo potencialne energije  $2 \cdot \frac{1}{2}mv^2/mgl$  ter je povezano z razmerjem med silo zaradi pospeševanja in težo.

V naslednjem koraku skrajno poenostavljeno obdelamo hojo človeka. (Podrobneje jo je obravnaval P. Gosar v članku *Mehanika hoje in teka*, Presek **13** (1985/86) 81.) Težišče človeka z dolžino nog  $l$  se spusti po krogu s polmerom  $l$  s središčem v stopalu na tleh, ko doseže najvišjo točko (slika 1). Hitrost je povezana z radialnim pospeškom  $v^2/l$ , ki je značilen za gibanje po krogu. Pospešek ne more preseči težnega pospeška  $g$ ,



Slika 1. Skrajno poenostavljen model hoje. Težišče  $T$  postavimo v vrh nog,  $O$  je os v stopalu na tleh.

če stopalo miruje na tleh. Tedaj velja

$$\frac{v^2}{l} \leq g \quad \text{ali} \quad \frac{v^2}{lg} \leq 1.$$

Tudi za hojo je pomembno Froudovo število.

Po zapisani neenačbi človek ne more hoditi s hitrostjo, večjo od  $(gl)^{1/2}$ . Pri dolžini nog  $l = 0,9$  m je to 3 m/s. Večjo hitrost doseže v teku. Tu na kratko omenimo merjenja porabe kisika pri hoji in pri teku. Človek dobiva energijo, potrebno za dvigovanje težišča pri hoji in teku s kemijskimi reakcijami v mišicah. Pri tem se razgrajujejo ogljikovi hidrati, beljakovine in maščobe, za kar je potreben kisik. Poraba kisika na časovno enoto zato določa moč človeka. (Nekaj povesta o tem članka A. Likar, *Tek in moč*, Presek **25** (1997/98) 226 in J. Strnad, *Človeška moč*, Presek **26** (1998/99) 2.) Merjenja so pokazala, da je poraba kisika pri hitrosti do 2 m/s pri hoji manjša kot pri teku, pri večji hitrosti pa manjša pri teku kot pri hoji. Pod hitrostjo 2 m/s je potemtakem energijsko ugodnejša hoja, nad njo pa tek.

V svojem razglabljanju smo se omejili na gibanje težišča po krogu s središčem v stopalu na tleh. Tekmovalci v hitri hoji dvigajo in spuščajo boke ter dosežejo pri hoji večjo hitrost, npr. 4,4 m/s pri svetovnem rekordu v hoji na 10 km.

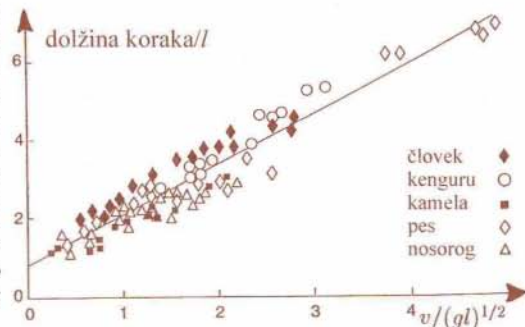
Mejna hitrost je pri otrocih s krajšimi nogami manjša, na primer 2 m/s pri dolžini nog 0,4 m. Zato lahko otrok hodi le ob odraslem, ki namenoma upočasni korak. Na Luni je težni pospešek  $1,6 \text{ m/s}^2$  in je mejna hitrost samo 1,2 m/s. Vesoljci so zato na Luni poskakovali.

Vretenčarji natančno vzeto drug drugemu niso geometrijsko podobni. Konj, npr., ni povečan pes. Vendar njihovo gibanje kaže dovolj skupnih značilnosti, da vse vretenčarje poskusimo obravnavati kot približno geometrijsko podobne in njihova gibanja kot približno dinamično podobna. Opazovanja to približno podpirajo. Pri Froudovem številu okoli  $\frac{1}{2}$  pri vseh vretenčarjih hoja preide v tek. To velja za vretenčarje z enim ali z dvema paroma nog. Pri hoji in teku se drugi par nog giblje podobno kot prvi z določeno zakasnitvijo. Gibanje obeh parov preneha biti podobno ob prehodu v galop pri Froudovem številu okoli 2,5.

Pri enakem Froudovem številu vzamemo gibanje vretenčarjev za dinamično podobno. Konj, ki ima štirikrat daljše noge kot pes, ima pri enakem Froudovem številu štirikrat daljši korak kot pes. To naj bi veljalo za vse vretenčarje, tako da bi bilo razmerje med dolžino koraka in dolžino nog za vse vretenčarje, z enim ali z dvema paroma nog, enako odvisno od Froudovega števila. Merjenja to približno potrjujejo, natančne odvisnosti pa ne moremo pričakovati.

Po merjenjih je razmerje med dolžino koraka in dolžino nog približno linearno odvisno od kvadratnega korena iz Froudovega števila (slika 2). S to zvezo je mogoče oceniti hitrost dinozavrov. Po okamenilih sledovih stopinj so ugotovili dolžino koraka, po velikosti sledi ocenili maso in velikost živali ter s tem dolžino nog. Iz teh podatkov so izračunali razmerje med dolžino koraka in dolžino nog, ki mu v linearni zvezi ustreza določen koren iz Froudovega števila. Iz tega je bilo mogoče z dolžino nog dobiti hitrost. Po tej poti so za brontozavre z maso 30 ton dobili hitrost 1 m/s, za mesojedce, podobne tiranozavrom, z maso 5 ton hitrost 2 m/s in za dvonoge zavra z maso  $\frac{1}{2}$  tone hitrost 12 m/s. Zavri z veliko maso so hodili zelo počasi, zavri z majhno maso pa so tekli hitreje kot človek z maso 70 kg, ki je pri svetovnem rekordu na sto metrov dosegel hitrost 11 m/s, a počasneje kot dirkalni konj z maso okoli 400 kg, ki doseže hitrost 16 m/s.

Slika 2. Izmerjeno razmerje med dolžino koraka in dolžino nog v odvisnosti od kvadratnega korena iz Froudovega števila za nekaj vrst vretenčarjev. Slika je iz članka R. McNeill Alexander, *Walking and running*, The Mathematical Gazette **80** (1996) 262. Isti pisec je leta 1989 pri založbi Columbia University Press v New Yorku objavil knjigo *Dynamics of dinosaurs and other extinct giants*.



Računov, enako kot rekonstruirane podobe dinozavrov, ni mogoče preskusiti z neposrednim opazovanjem. Upamo pa, da so podobo in hitrost dobro zadeli.

Janez Strnad

## IZLUŠČI IN DOKAŽI PRAVILO

Naslednje vsote namigujejo na neko splošno pravilo. Poišči ga, ga zapiši s formulo in dokaži.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 \cdot 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 \cdot 3 & - & 2 \cdot 2 & + & 3 \cdot 1 & & \\
 & 1 \cdot 5 & - & 2 \cdot 4 & + & 3 \cdot 3 & - & 4 \cdot 2 & + & 5 \cdot 1 & \\
 1 \cdot 7 & - & 2 \cdot 6 & + & 3 \cdot 5 & - & 4 \cdot 4 & + & 5 \cdot 3 & - & 6 \cdot 2 & + & 7 \cdot 1
 \end{array}$$

Marija Vencelj

## NALOGE O ELIPSAH IZ JAPONSKIH TEMPLJEV

Sangaku je izjemno zanimiv pojav v zgodovini matematike. Pomeni ploščice, ki prikazujejo matematične probleme in so jih na Japonskem v obdobju Edo (1603–1867) izobešali v šintoističnih templjih. V tem obdobju je bila Japonska praktično popolnoma izolirana od zahodnih vplivov, tako da se je tam razvijala povsem samosvoja matematika. Tako so japonski matematiki na različnih področjih dobili mnogo originalnih rezultatov oziroma originalnih dokazov rezultatov, ki so jih med tem odkrili tudi na zahodu. Na sangaku ploščicah najdemo predvsem geometrijske rezultate pogosto brez dokazov, saj so bile ploščice posvečene bogovom. Ker so se avtorji pri tem trudili napraviti tudi estetski izdelek, je bil rezultat zanimiva zmes matematike, umetnosti in religije.

Sangaku problemi so na zahodu znani že dalj časa. Tako R. Honsberger v knjigi *Mathematical Gems III* (1985) podrobno prikazuje eno od sangaku nalog in njeno rešitev ter navaja, da jo povzema po knjigi R. Johnsona *Advanced Euclidean Geometry*, ki je prvič izšla leta 1929. Vendar so šele po izidu knjige Fukagawe in Peda *Japanese Temple Geometry Problems* sangaku problemi postali zares znani. V revijah, kot so *Crux Mathematicorum* ali *Quantum/Kvant*, so jih začeli objavljati praktično v vsaki številki.

Ohranjenih je približno 900 sangaku ploščic, mnoge druge, ki so bile uničene, pa najdemo v starih japonskih knjigah. Fukagawa je v svoji knjigi predstavil 250 nalog, ki jih je našel na originalnih ploščicah in v knjigah. Podrobne rešitve so podane samo za manjše število nalog, vendar so večinoma sodobne. Originalne rešitve so znane samo za manjše število nalog (in še te so iz starih knjig in ne s ploščic).

Večina nalog v Fukagawovi knjigi se nanaša na "dotikajoče se figure". To so naloge o dotikajočih se krožnicah, vrtanih v druge krožnice, trikotnike, kvadrate, pravokotnike, naloge o elipsah, ki se dotikajo med sabo ali s krožnicami, ter naloge o dotikajočih se sferah (in tudi elipsoidih).

Kaže, da so celo naloge o elipsah originalno reševali s sredstvi prostorske geometrije (elipsa je presek valja z ravnino, krožnice pa preseki sfer z ravnino). Na ta način so japonski matematiki lahko naloge o elipsah in krožnicah obravnavali kot naloge o valjih in sferah.

Na tem mestu se bomo omejili le na nekaj nalog o elipsah. Pri tem bomo izbrali take, ki jih lahko rešimo z uporabo transformacije ravnine, ki elipso preslika v krožnico (preslikave, ki bi jo v ustreznem koordinatnem sistemu zapisali kot  $(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$  za neki fiksni  $\lambda$ ).

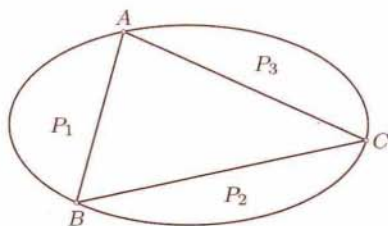
To preslikavo Fukagawa in Pedoe imenujeta preprosto "afina transformacija".

Za nas bo pomembno, da preslika elipso v krožnico (če sta ustrezno izbrana premica negibnih točk in koeficient  $\lambda$ ), da preslika premice v premice in da pri tem ohranja incidentnost, tangente in vzporednost. V eni nalogi bo potrebno uporabiti tudi informacijo o tem, da ploščino transformiranega lika iz ploščine originala izračunamo z množenjem z  $|\lambda|$ .

**1. naloga.** Na elipsi  $O(a, b)$  so izbrane tri točke  $A, B$  in  $C$  tako, da so ploščine  $P_1, P_2, P_3$  označenih odsekov elipse enake.

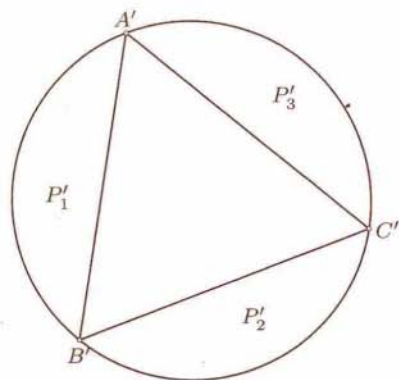
Pokaži, da je ploščina trikotnika  $ABC$  enaka

$$\frac{3}{4}\sqrt{3}ab.$$



**Rešitev.** Za premico negibnih točk afine transformacije izberemo nosilko velike osi elipse, za koeficient raztega v smeri, pravokotni na to premico, pa  $a/b$ . Transformacija preslika elipso in trikotnik v krožnico in njej včrtani trikotnik.

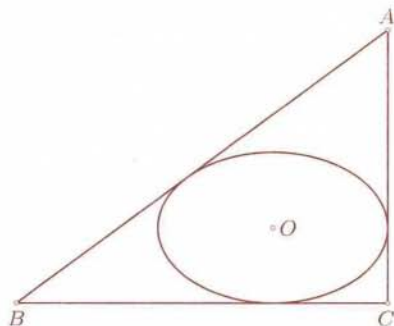
Ploščine tako dobljenih krožnih odsekov  $P'_1, P'_2, P'_3$  so med seboj enake, saj so dobljene z množenjem z  $a/b$  iz enakih ploščin odsekov elipse  $P_1, P_2, P_3$ . Od tod sledi, da je trikotnik  $A'B'C'$  enakostraničen, saj različnim tetivam očitno ustrezajo različne ploščine krožnih odsekov.



Ker je polmer krožnice enak  $a$ , meri stranica tega trikotnika  $a\sqrt{3}$ . Zato je njegova ploščina enaka  $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ , izračunamo pa jo iz ploščine trikotnika  $ABC$  z množenjem s koeficientom  $a/b$ . Zato je ploščina trikotnika  $ABC$  enaka

$$\frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

**2. naloga.** Trikotnik  $ABC$  ima pravi kot v oglišču  $C$ . Elipsa  $O(a, b)$  je včrtana v ta trikotnik tako, da je njena velika os vzporedna z  $BC$ . Izrazite veliko polos  $a$  z  $AC$ ,  $BC$  in  $b$ .

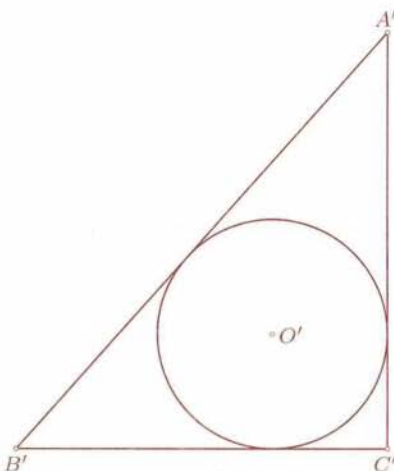


**Rešitev.** Elipso na enak način kot v rešitvi prejšnje naloge transformiramo v krožnico s polmerom  $a$ . Slika trikotnika  $ABC$  je pravokotni trikotnik  $A'B'C'$ , s pravim kotom pri  $C'$ , očrtan tej krožnici. Dvakratno ploščino tega trikotnika izrazimo na dva načina:

$$B'C' \cdot A'C' = a(B'C' + A'C' + A'B').$$

Upoštevamo, da je  $B'C' = BC$  in  $A'C' = \frac{a}{b}AC$  ter uporabimo Pitagorov izrek:

$$A'B' = \sqrt{BC^2 + \frac{a^2}{b^2}AC^2}.$$



Tako dobimo

$$BC \cdot \frac{a}{b}AC = a \left( BC + \frac{a}{b}AC + \sqrt{BC^2 + \frac{a^2}{b^2}AC^2} \right).$$

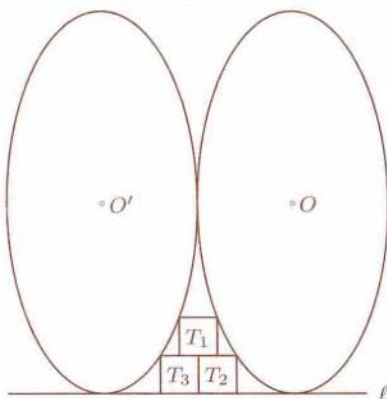
Od tod sledi

$$BC \cdot AC - b \cdot BC - a \cdot AC = \sqrt{a^2 \cdot AC^2 + b^2 \cdot BC^2}.$$

Po kvadriranju in preureditvi tega izraza dobimo

$$a = \frac{BC(AC - 2b)}{2(AC - b)}.$$

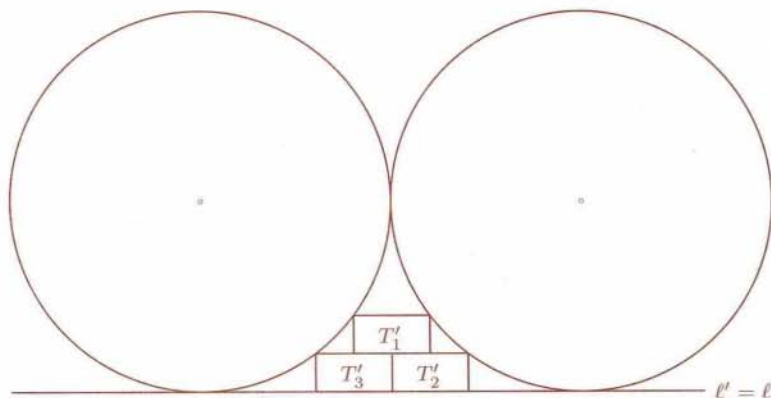
**3. naloga.** Skladni elipsi,  $O(a, b)$  in  $O'(a, b)$ , se dotikata druga druga tako, da potekata mali osi obeh skozi dotikališče. Z  $\ell$  je označena ena od skupnih zunanji tangent (vzporedna malima osema). Trije skladni kvadrati  $T_1, T_2, T_3$ , s stranico  $t$ , so postavljeni tako, da imata dva skupno stranico, po eno stranico na  $\ell$  in po eno oglišče na elipsah. Tretji ima po eno oglišče na vsaki elipsi in stranico, ki leži na dveh stranicah prvih dveh kvadratov (glej sliko).



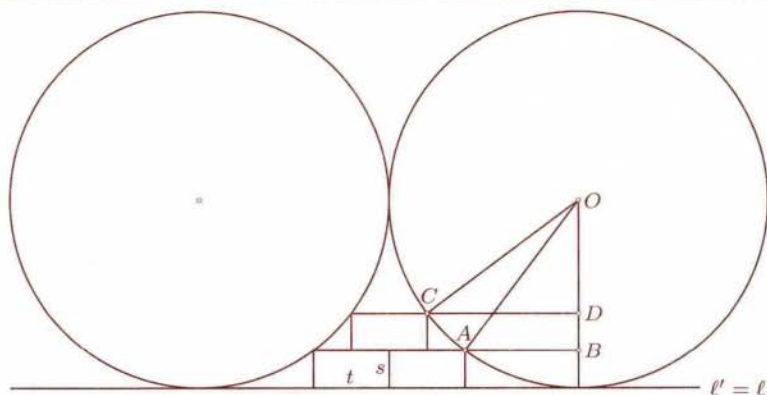
Pokaži, da je

$$a = 2b, \quad t = \frac{a}{5}.$$

**Rešitev.** Za premico negibnih točk afine transformacije izberemo  $\ell$ , za koeficient raztega v smeri, pravokotni na to premico, pa  $b/a$ . Tako dobimo krožnici, tri pravokotnike in premico v naslednjem medsebojnem položaju:



Označimo krajšo stranico pravokotnika z  $s$  (daljša je že označena s  $t$ ; pri tem je seveda  $s = \frac{b}{a}t$ ) in upoštevamo, da je polmer krožnic enak  $b$ .



Dvakrat uporabimo Pitagorov izrek (za trikotnika  $OAB$  in  $OCD$ ) in dobimo

$$(b-t)^2 + (b-s)^2 = b^2, \quad (b-\frac{t}{2})^2 + (b-2s)^2 = b^2.$$

Enačba

$$(b-t)^2 + (b-s)^2 = (b-\frac{t}{2})^2 + (b-2s)^2$$

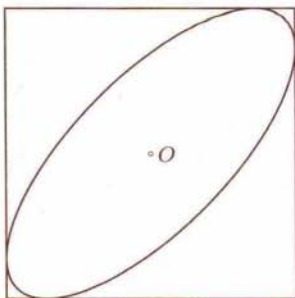
nam da  $s = \frac{t}{2}$  ali  $s = \frac{4b-3t}{6}$ .

Če v enačbo  $(b-t)^2 + (b-s)^2 = b^2$  vstavimo  $s = \frac{t}{2}$ , dobimo kvadratno enačbo  $5t^2 - 12bt + 4b^2 = 0$ , ki ima dve rešitvi,  $t = \frac{2b}{5}$  (ta da povežavo med  $a$ ,  $b$  in  $t$ : iz  $\frac{t}{s} = \frac{a}{b}$  in  $s = \frac{t}{2}$  sledi  $a = 2b$  in potem iz  $t = \frac{2b}{5}$  dobimo še  $t = \frac{a}{5}$ ) in  $t = 2b$ , ki odpade zaradi pogoja  $t < b$ , ki mora veljati, če želimo, da so kvadrati vrtani v lik, omejen z elipsama in premico na opisani način (sicer tudi ta rešitev da geometrijsko smiselni odgovor, vendar se tako dobljeni kvadrati prekrivajo z elipsama).

Če v enačbo  $(b-t)^2 + (b-s)^2 = b^2$  vstavimo  $s = \frac{4b-3t}{6}$ , dobimo kvadratno enačbo  $45t^2 - 60bt + 4b^2 = 0$ . Rešitev  $t = \frac{2(5+2\sqrt{5})}{15}$ ,  $s = \frac{5-2\sqrt{5}}{15}$  odpade iz enakega razloga kot prej, rešitev  $t = \frac{2(5-2\sqrt{5})}{15}$ ,  $s = \frac{5+2\sqrt{5}}{15}$  pa odpade, ker je v tem primeru  $b > a$ . Ta rešitev nam sicer da kvadrato, vrtane na pravi način, vendar se elipsi dotikata v krajišjih velikih polosi.

Sami se spoprimate še z naslednjimi nalogami. Njihove rešitve bomo objavili v naslednji številki Preseka.

1. Elipsa  $O(a, b)$  je včrtana v kvadrat s stranico  $t$ . Določi  $t$ , če veš, da so vsa števila  $a, b, t$  cela.

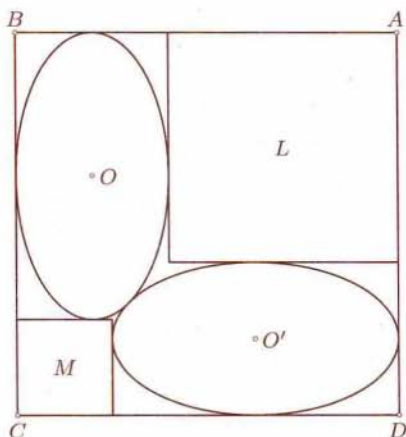


2. V kvadrat  $ABCD$  sta včrtana kvadrata  $L$  (s stranico  $l$ ) in  $M$  (s stranico  $m$ ) tako, da se nahajata v nasprotnih vogalih kvadrata  $ABCD$  in da po dve njuni stranici ležita na stranicah kvadrata  $ABCD$ .

Dve skladni elipsi,  $O(b, a)$  in  $O'(a, b)$ , se dotikata druga druge in kvadratov  $L$  in  $M$ . Poleg tega se elipsi dotikata vsaka dveh stranic kvadrata  $ABCD$  (glej sliko).

Pokaži, da je ploščina posamezne elipse enaka

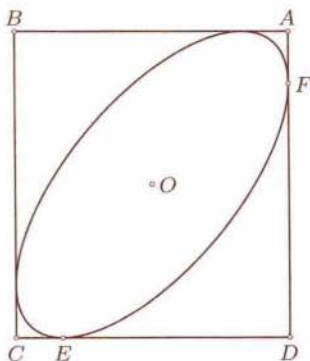
$$\frac{1}{2}\pi lm.$$



3. Elipsa  $O(a, b)$  je včrtana v pravokotnik  $ABCD$  in se dotika stranice  $CD$  v točki  $E$  ter stranice  $AD$  v točki  $F$ .

Pokaži, da je

$$AF \cdot ED = FD \cdot CE.$$



Karmela Milutinović

## POSLUŠAJMO PRAŠTEVILA

Človeško uho ima čudovite sposobnosti. Te so tako velike, da kot dano jemljemo dejstva, da znamo razločevati glasove, slišati posamezno besedo sredi vsesplošnega govorjenja na zabavi, razločiti zvok flavte sredi igranja ostalega orkestra. Pravzaprav bi lahko rekli, da ima naše uho velike sposobnosti prepoznavanja vzorcev. Zato bi svoje slušne sposobnosti lahko uporabili tudi zato, da bi npr. zaslišali določene vzorce v ogromnih količinah podatkov, predstavljenih z zvoki.

Ameriški matematik Caldwell je uporabil posebno shemo za poslušanje zaporedij praštevil, da bi s pomočjo zvoka ugotovil, kakšne lastnosti imajo. Končno, saj pogosto uporabljamo uho, da ugotovimo, kaj bi utegnilo biti narobe v delovanju motorja, oziroma stresemo škatlo, da bi po zvoku ugotovili njeno vsebino.

Za predstavitev zvokov v računalništvu pogosto uporabljamo specifikacijo MIDI (Musical Instrument Digital Interface). Z njo posameznemu tonu priredimo številko. Tako je npr. C predstavljen kot 60, Cis kot 61, D je 62 in tako naprej za skupno 128 tonov. Tako predstavitev je Caldwell uporabil za poslušanje praštevil. Ker je praštevil neskončno, na voljo pa le 128 tonov, je uporabil le ostanke pri deljenju, tako imenovano modularno aritmetiko. Če je kot delitelj uporabil npr. 7, bi za zaporedje praštevil 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... zaigrali 2, 3, 5, 0, 4, 6, 3, 5, 2, ... Ker pa imajo ti toni v skali MIDI prenizko frekvenco, da bi jih dobro slišali, je Caldwell dodal še konstanto 55 in se tako postavil na sredino lestvice. Tako je prvo praštevilo, 2, zaigralo kot ton A (57 po standardu MIDI). Ker je pri deljenju s 7 možnih le 7 ostankov, imamo seveda na voljo le 7 tonov. Na sliki vidimo skladbi Praštevila po modulu 7 in Praštevila po modulu 6.

The primes modulo seven (Chris Caldwell, 1997)



The primes modulo six (Chris Caldwell, 1997)



Dosedaj smo določali le višino tona. Trajanje tonov je bilo enako. Z razmikom med praštevili pa lahko predstavimo tudi dolžino tona. Med prvima dvema prašteviloma 2 in 3 ni razmika, razmik 1 je med 3 in 5 ter 5 in 7, razmik 3 pa med 7 in 11. Velja, da je povprečna dolžina razmika med praštevili, manjšimi ali enakimi  $n$ , enaka naravnemu logaritmu iz  $n$ . Ostajajo pa odprta vprašanja, kako so ti razmiki porazdeljeni, kako veliki so in podobno. Ne glede na to razmik lahko uporabimo za določitev dolžine tona. Caldwell se je odločil, da naj ton traja sorazmerno dolžini razmika do naslednjega praštevila v zaporedju, deljeno z naravnim logaritmom iz tega praštevila. Na ta način je nastalo nekaj skladb, katerih notne zapise vidimo na slikah.

The primes modulo 41 with prime gap tempo (Chris Caldwell, 1997)



The primes modulo 41 with prime gap tempo (Chris Caldwell, 1997)  
(Starting with the prime 1,000,003)



Več o poslušanju praštevil in drugih števil lahko preberemo na Internetu na straneh

<http://www.sciencenews.org/sn.arc98/6.20.98/mathland.htm>

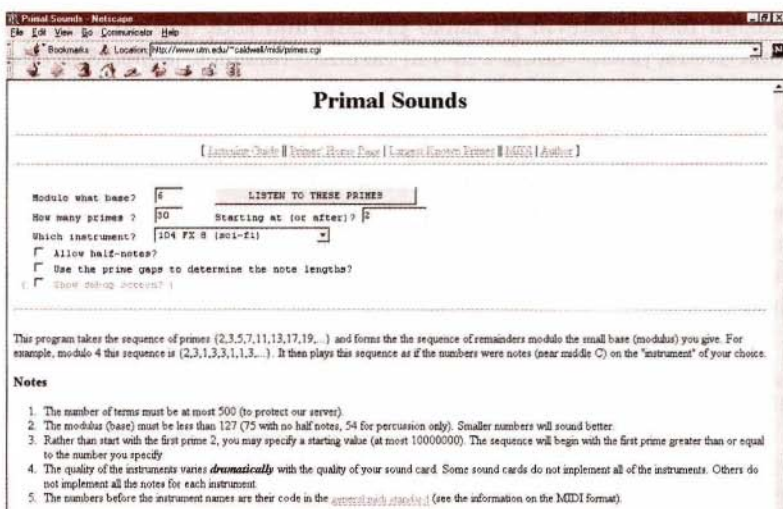
in

<http://www.utm.edu/research/primes/programs/music/listen/>.

Mimogrede bomo lahko prebrali še marsikatero zanimivost o praštevilih. Na strani

<http://www.utm.edu/caldwell/midi/primes.cgi>

pa je Caldwell pripravil program, s katerim si sami zaigramo skladbo, nastalo po zgoraj opisanem vzorcu.



Mojca in Matija Lokar

## STALIMO SNEG! – Rešitev s str. 66

V prejšnji številki Preseka smo predlagali udoben način odstranjevanja snega, in sicer tako, da zapadli sneg stali kar elekrika. Spraševali smo se po moči grelne naprave, ki bi v desetih urah stalila pol metra debelo snežno oddejo svežega snega na dvorišču z dolžino 10 m in širino 4 m. Če računamo, da ima sveže zapadli sneg gostoto  $100 \text{ kg/m}^3$ , pade na dvorišče s površino  $40 \text{ m}^2$  2000 kg snega. Ker moramo kilogramu snega dovesti 334 kJ toplote, da ga stalimo, potrebujemo 668 MJ ali 186 kWh električne energije. Potrebujemo torej grelec z močjo najmanj 18,6 kW, saj moramo greti trdna tla. To je za gospodinjstvo zelo velika moč, saj premorejo gospodinjstvi stroji le nekaj kilovatov.

Stroška za elektriko za vso zimo pri takem gretju ni težko izračunati, če vemo, da stane 1 kWh 10 tolarjev in pade na dvorišče 8000 kg snega (v Sloveniji pade na kvadratni meter nekaj več kot 1000 litrov vode, v zimskem času torej približno 200 kg). Za taljenje porabimo torej  $8000 \text{ kg} \cdot 334 \text{ kJ/kg} = 2672 \text{ MJ} = 742 \text{ kWh}$ , kar stane okrog 7420 tolarjev. Račun bo nekaj večji, saj za taljenje porabimo nekaj več energije, pa tudi cena kWh je preko dneva skoraj dvakrat višja od privzete.

Andrej Likar

## ABBCCC – Rešitev s str. 67

V programskem jeziku pascal bomo sestavili logično funkcijo, ki bo ugotovila, ali je dani niz dobljen kot stik enega ali več nizov oblike  $a^i b^j c^k$ , kjer je  $1 \leq i \leq j \leq k$ . Telo funkcije bo sestavljeno iz zanke, v vsaki ponovitvi zanke pa bomo preverili po en niz oblike  $a^i b^j c^k$ ,  $1 \leq i \leq j \leq k$ . Ker naloga zahteva vsaj en tak niz, bomo uporabili zanko **repeat**. V zanki najprej preštejemo, koliko a-jev je na začetku (števec i). Če ni nobenega, niz ni prave oblike. Nato pogledamo, koliko b-jev jim sledi (števec j). Veljati mora  $j \geq i$ , sicer niz zopet ni prave oblike. Nazadnje preštejemo še c-je. Teh mora biti vsaj j. Zanko ponavljamo, dokler so izpolnjeni gornji pogoji za števila a-jev, b-jev in c-jev oziroma dokler ne pridemo do konca vhodnega niza.

```
function Prepoznaj(var s: string): boolean;
{ Ali je niz s oblike (aibjck)+, kjer je 1<=i<=j<=k. }
var
    t: integer;
    i,j: integer;
    b: boolean;

function Zacetek(znak: char): integer;
{ Uporablja niz s in spreminja indeks t iz Prepoznaj. }
var i: integer;
begin
    i := t;
    while (t<=length(s)) and (s[t]=znak) do t := t+1;
    Zacetek := t-i;
end; {Zacetek}

begin
    t := 1;
    repeat
        b := false;
        i := Zacetek('a');
        if i>0 then begin
            j := Zacetek('b');
            if j>=i then b := Zacetek('c')>=j;
        end;
    until (not b) or (t>length(s));
    Prepoznaj := b;
end; {Prepoznaj}
```

Štetje a-jev, b-jev in c-jev smo opravili s pomožno celoštevilsko funkcijo *Zacetek*. Ta kot parameter dobi znak in prešteje, koliko teh znakov je na začetku podniza niza *s*, ki se začne pri *t*-tem znaku. Poučna je tudi uporaba pomožne logične spremenljivke *b*, s katero si pomagamo pri preverjanju odnosov med števili a-jev, b-jev in c-jev.

Na podoben način lahko razpoznamo tudi stike nizov  $a^i b^j c^k$ , kjer odnose med *i*, *j* in *k* nekoliko spremenimo, na primer  $i < j < k$  ali pa  $i \leq j + k$  itd. Poleg znakov *a*, *b* in *c* bi v nizih lahko dovolili še kakšne druge znake. Tako bi lahko funkcijo *Prepoznav* razširili z dodatnim parametrom: nizom, ki bi vseboval tiste znake, ki so dovoljeni pri sestavljanju nizov. Za našo nalogo bi bil to niz 'abc'. Nalog za vajo torej ne manjka.

Martin Juvan

## KOLIKO MANJŠIH? – Rešitev s str. 89

V Preseku smo pred časom že pisali o rešitvi podobne naloge (glej prispevek *Iščemo besedo*, Presek 26, 1998/1999, št. 6, str. 355 in 365–367). Za dano število *k* je bilo treba poiskati tisto iz dane skupine različnih črk sestavljeno besedo, ki je med vsemi besedami, ki jih lahko sestavimo iz danih črk, po abecedi na *k*-tem mestu. Tokrat rešujemo nasprotno nalogo (pa še namesto črk imamo števila), ideje, ki jih bomo uporabili, pa bodo zelo podobne.

Poglejmo primer. Vzemimo permutacijo  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  množice  $\mathbb{N}_5$ . Premislimo, katere permutacije so pri leksikografski ureditvi pred njo. Najprej so to permutacije, ki število 1 preslikajo v 1 ali 2; teh je  $2 \cdot 4! = 48$ . Potem pa so tu še permutacije, ki število 1 preslikajo enako kot  $\pi$  v 3, prvo število, v katerem se ločijo od  $\pi$ , pa preslikajo v manjše število. Če se ločijo od  $\pi$  pri številu 2, morajo 2 preslikati v 1, 2 ali 3. Možnost 3 odpade, saj se že število 1 preslika v 3. Ostaneta le 1 in 2. Takih permutacij je potem  $2 \cdot 3! = 12$ . Pri številu 3 se permutacija ne more razlikovati od  $\pi$ , saj je  $\pi(3) = 1$  najmanjša možna vrednost. Možnosti pri številu 4 so 1, 2, 3 in 4. Števila 1, 3 in 4 so že uporabljena, tako da ostane le število 2; torej  $1 \cdot 1! = 1$  manjša permutacija. Permutacije, ki se s  $\pi$  ujemajo na številih 1, 2, 3 in 4, se morajo ujemati tudi v sliki števila 5, saj je spodnja vrstica pri vseh permutacijah množice  $\mathbb{N}_5$  sestavljena natanko iz števil 1, 2, 3, 4, 5. Če seštejemo, dobimo  $48 + 12 + 1 = 61$  permutacij. Permutacija  $\pi$  je torej pri leksikografski ureditvi permutacij množice  $\mathbb{N}_5$  na 62. mestu.

Povzemimo, kaj smo se naučili. Dana naj bo permutacija  $\pi$  množice  $\mathbb{N}_n$ . Ugotovili smo, da je permutacij, ki se s  $\pi$  ujemajo v številih  $1, 2, \dots, i-1$ , število  $i$  pa preslikajo v število, ki je manjše od  $\pi(i)$ , ravno  $k_i \cdot (n-i)!$ , kjer je  $k_i$  moč množice  $\{1, \dots, \pi(i)-1\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(i-1)\}$  (toliko je števil, ki so manjša od  $\pi(i)$ , a jih permutacija  $\pi$  še ni "porabila" na številih od 1 do  $i-1$ ). Mesto permutacije  $\pi$  pri leksikografski ureditvi je enako

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} k_i(n-i)! = 1 + \left( \dots (k_1 \cdot (n-1) + k_2) \cdot (n-2) + \dots + k_{n-1} \right) \cdot 1.$$

Zapišimo zgornji razmislek kot funkcijo v programskem jeziku pascal:

```
const
  maxN = 12;
type
  permutacija = array [1..maxN] of integer;

function Prestej(perm: permutacija; n: integer): longint;
{ Prešteje, katera po vrsti je permutacija n števil perm. }
var
  i, j: integer;
  stevec: longint; { števec leksikografsko manjših permutacij }
  manjsih: integer;
begin
  stevec := 0;
  for i:=1 to n-1 do begin { Zanka po elementih permutacije. }
    manjsih := 1; { Določimo, koliko prejšnjih je manjsih. }
    for j:=1 to i-1 do
      if perm[j]<perm[i] then manjsih := manjsih+1;
    stevec := (stevec+(perm[i]-manjsih))*(n-i);
  end; {for i}
  Prestej := stevec+1;
end; {Prestej}
```

Funkcija je tipa `longint`, največja vrednost, ki jo lahko v turbo pascalu shranimo v spremenljivko tega tipa, pa je  $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$ . Vrednost konstante `maxN` smo izbrali tako, da je

$$\text{maxN!} < 2^{31} - 1 < (\text{maxN} + 1)!.$$

Če bi izbrali večjo vrednost, bi pri računanju za nekatere permutacije prišlo do prekoračitve ( $13! \approx 6.23 \cdot 10^9$ ).

Martin Juvan

## 40. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Gostiteljica jubilejne 40. matematične olimpiade je bila Romunija – država, ki je organizirala prvo matematično olimpiado leta 1959 in gostila mlade olimpijce tudi v letih 1960, 1969 in 1978. V slovenski ekipi so bili tekmovalci: Dušan Jan iz Gimnazije Tolmin, Jure Kališnik in Matjaž Urlep iz Šolskega centra Celje – Splošne in strokovne gimnazije Lava, Irena Majcen in Ajda Skarlovnik iz Gimnazije Bežigrad ter Mojca Miklavc iz Škofijske klasične gimnazije Ljubljana, član mednarodne tekmovalne komisije Darjo Felda s Fakultete za elektrotehniko ter vodja ekipe Matjaž Željko s Fakultete za matematiko in fiziko.

Ekipa je prispela v Bukarešto nekaj dni pred tekmovanjem, zato smo se lahko posvetili tudi spoznavanju kraljestva živali (ščurki). Najbolj pestro je bilo 16. in 17. julija, ko so se tekmovalci spoprijeli z nalogami, med katerimi sta bili tudi naslednji dve:

1. Določi vse končne ravninske množice  $S$  z vsaj tremi točkami, ki zadoščajo pogoju:

*za poljubni točki  $A$  in  $B$  iz množice  $S$  je simetrala daljice  $AB$  hkrati tudi os simetrije množice  $S$ .*

2. Določi vse take pare  $(n, p)$  pozitivnih celih števil, da je  $p$  praštevilo,  $n \leq 2p$  in število  $(p-1)^n + 1$  deljivo s številom  $n^{p-1}$ .

Po napornih tekmovalnih dnevih so si tekmovalci ogledali še nekaj lokalnih znamenitosti in se z avtobusi podali na celodnevni izlet na obrobje Transilvanije, kjer v mestu Bran stoji grad grofa Drakule. Na poti so se ustavili še v mestu Sinai, ki je gostilo matematično olimpiado leta 1960.

Logotip matematične olimpiade je običajno povezan z matematiko oziroma državo gostiteljico. Letos se v logotipu skrivajo štiri krožnice, ki jih srečamo v zanimivi in precej stari nalogi romunskega izvora.



*V ravnini ležijo tri krožnice enakih polmerov, ki se sekajo v eni točki. Dokaži, da ostala tri presečišča po dveh krožnic tvorijo trikotnik, katerega polmer očrtane krožnice je enak polmerom danih treh krožnic.*

Ekipa Slovenije je tudi tokrat na olimpiadi uspešno sodelovala, saj sta Irena Majcen in Matjaž Urlep osvojila bronasti medalji. Poudariti velja, da je Irena Majcen prva dijakinja iz Slovenije, ki je na MMO prejela kakšno medaljo.

Zahvala za uspehe naših olimpijcev in tekmovalcev na drugih tekmovalnih greh predvsem učiteljem-mentorjem, ki mladim nadbudnežem pomagajo pri spoznavanju matematike. Nastop na olimpiadi so v veliki meri omogočili Ministrstvo za šolstvo in šport, Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter sponzorji Hermes SoftLab iz Ljubljane ter Mura in Modna kravata Gjergjek iz Murske Sobote.

Matjaž Željko

### 30. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Olimpiada je potekala med 18. in 27. julijem 1999 v zgodovinskem univerzitetnem italijanskem mestu Padovi, kjer sta v svojem pomembnem znanstvenem življenjskem obdobju delovala tudi Kopernik in Galilei.

Na olimpiadi je sodelovalo 291 tekmovalcev iz 62 držav, tri države pa so bile prisotne na olimpiadi kot opazovalke.

Udeleženci iz Slovenije so bili: Miran Bürmen iz Gimnazije Murska Sobota, Urban Simončič iz Šolskega centra Novo mesto, Matej Kanduč iz Srednje vzgojiteljske šole in gimnazije Ljubljana, Gregor Jerše iz Gimnazije Kranj in Mihael Kadunc iz Škofijske klasične gimnazije Ljubljana. Spremljevalca in člana mednarodne komisije sva bila Primož Ziherl, Inštitut Jožef Stefan, in Ciril Dominko, DMFA Slovenije. Udeležbo na olimpiadi nam je v pretežni meri finančno omogočilo Ministrstvo za šolstvo in šport, potne stroške pa je pokrtil Kemijski inštitut.

V naši ekipi je bil najuspešnejši Urban Simončič, ki je osvojil bronasto medaljo. Pohvali sta prejela Matej Kanduč in Mihael Kadunc. Sicer pa je bilo potrebno letos doseči za zlato medaljo najmanj 43 točk od 50 možnih, za srebrno 37 točk, za bronasto 31 točk in za pohvalo 24 točk. Največ uspeha so imeli ruski in iranski tekmovalci. Prvi zato, ker so imeli absolutnega zmagovalca olimpiade in še drugouvrščenega, drugi pa zato, ker je vseh pet tekmovalcev osvojilo zlato medaljo.

Naslednja, 31. mednarodna fizikalna olimpiada, bo od 8. do 16. julija 2000 v mestu Leicester v Veliki Britaniji.

Ciril Dominko

### DVA FAKTORJA BREZ NIČEL

Ali lahko število 1 000 000 000, ki ima devet ničel, zapišemo kot produkt dveh takih naravnih števil, ki v svojih desetiških zapisih nimata ničel?

Na koliko bistveno različnih načinov lahko nalogo rešimo, če je rešljiva?

Marija Vencelj

## KRIŽANKA “ODKRITJA TISOČLETJA”

|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------|--------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
|  GALILEI<br>(1592)<br>GEORGE EASTMAN<br>(1888)<br> |                              | ALPINIST<br>HUMAR     | OGLJIKO-<br>VODIK<br>$C_2H_6$  | PRIPADNIK<br>RAZSELIJE-<br>NEGA<br>LJUDSTVA | MAGNEZIJ                                | GORSKA<br>NIMFA                | MICHAEL<br>FARADAY<br>(1845)          | UČINEK                                   | KRIVULJA<br>TELESA<br>PRI<br>GIBANJU     | EVA<br>JELER                       | GUGLIE<br>MARCI<br>(1861)        |
| JOSEPH<br>NIEPCE<br>(1822)                                                                                                                                                                                           |                              |                       |                                |                                             |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
| ISLAMSKI<br>VERSKI<br>VODJA                                                                                                                                                                                          |                              |                       |                                |                                             | LJ. TISKAR<br>V 18. STOL.               |                                |                                       |                                          |                                          | FARADAY<br>(1831)                  |                                  |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             | REKA V<br>ČRNI GORI                     |                                |                                       |                                          |                                          | ZARO<br>TUSAR                      |                                  |
| STARA<br>KULTURNA<br>RASTLINA                                                                                                                                                                                        |                              |                       |                                | VOJAŠKI<br>OKLEPNIK                         |                                         |                                |                                       |                                          | KRAJ S<br>TOVARNO<br>OBUTVE<br>ALPINA    |                                    |                                  |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                | GALOP<br>(NAREČNO)                          |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
| MIHA<br>ŽIBRAT                                                                                                                                                                                                       |                              |                       | GOJENEC<br>POLJCUSKE<br>SOLE   |                                             |                                         |                                |                                       |                                          | VRH NAD<br>VELIM<br>POLJEM<br>(2275 M)   |                                    |                                  |
|                                                                                                                                     | MICHAEL<br>FARADAY<br>(1831) | SOL BOROVE<br>KISLINE |                                |                                             |                                         |                                |                                       | ČLAN<br>SKUPINE<br>OBVEZNA<br>SMER (IVO) | 3. OSEBA<br>EDNINE                       | INTERESNO<br>POSLOVNO<br>ZDRUŽENJE | AM. ČR<br>POLI<br>(MAR<br>LUTHI) |
| AVTOMOB.<br>DIRKALISČE<br>PRI<br>BOLOGNI                                                                                                                                                                             |                              | JANSSEN<br>(1590)     |                                |                                             |                                         | PRIMORSKA<br>DIŠAVA,<br>OŽEPEK |                                       |                                          |                                          |                                    | MUSL.<br>BOX                     |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    | KOTI<br>ENO                      |
| PESNIK<br>GRAFE-<br>NAUER                                                                                                                                                                                            |                              |                       |                                |                                             | NEKDANJI<br>SLOV.<br>JUDOIST<br>(FRANC) | POLET,<br>VNEMA                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             |                                         | NEZGODA                        |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
| DANSKA                                                                                                                                                                                                               |                              |                       | POSODA ZA<br>PEČENJE           |                                             |                                         |                                |                                       |                                          | OLIVER<br>TWIST                          |                                    |                                  |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       | NEMŠKI<br>FILOZOF<br>(THEODOR) |                                             |                                         |                                |                                       |                                          | SREBRO                                   |                                    |                                  |
| OKOLI<br>LETA<br>1300                                                                                                                                                                                                |                              |                       |                                | GLASBILO<br>S TIPKAMI                       |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                | SLIKARKA<br>VOGELNIK                        |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
| SISTEM<br>NAČEL ALI<br>PREDPISOV                                                                                                                                                                                     |                              |                       |                                |                                             |                                         |                                | OBČINSKO<br>SREDIŠČE<br>POD<br>KRIMOM |                                          |                                          | VAN DREBBEL<br>(1620)              |                                  |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             |                                         |                                |                                       |                                          |                                          | MAJHNO<br>PLOVILO                  |                                  |
| A/STRUJ.<br>PISATELJ<br>(FRANZ)                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             |                                         |                                | DIREKTOR<br>DELA<br>DOBRSEK           | SPRINTER<br>BOLDON                       | JUŽNOAM.<br>DRŽAVA<br>ZMRZNIJENA<br>VODA |                                    |                                  |
| RIBE<br>JAJČECE                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             | NATANČEN<br>VZOREC<br>MERE              |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
|                                                                                                                                                                                                                      |                              |                       |                                |                                             | UČENJE                                  |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
| PEVEC<br>BON JOVI                                                                                                                                                                                                    |                              |                       |                                | ŠOLSKA<br>DELAJKA                           |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |
| NAJVIŠJI<br>VRH<br>FILIPINOV                                                                                                                                                                                         |                              |                       |                                | FERDINAND<br>BRAUN<br>(1897)                |                                         |                                |                                       |                                          |                                          |                                    |                                  |

| IMO<br>ZNAČ<br>(1)          | AUTOR<br>MARKO<br>BOKALIČ   | ALEXANDER<br>FLEMING<br>(1928)       | IZRAEL<br>ŠAHISTKA<br>KUŠNIR                 | NEODLOČEN<br>IZID PRI<br>SAHU                                                       | ZIMBAB-<br>VEJSKI<br>POLITIK<br>(JOSHUA) | IGOR<br>TORKAR                            | BISTVO,<br>JEDRO          | OSNOVNI<br>GEOM.<br>ELEMENTI | RADON                      | NAJVEČJI<br>OTOK<br>OTOCJA<br>RYUKJU     | MEJNA<br>REKA MED<br>KOREJO IN<br>KITAJSKO |  |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------|------------------------------|----------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                             | JAMES<br>WATT<br>(1765)     |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             | JOHN<br>FLEMING<br>(1904)   |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             | BRITANSKA<br>SOSEDA         |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          | ČRKJ S<br>STREŠICO                        |                           |                              | ILOVICA                    |                                          |                                            | ▼                                                                                 |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          | PISATELJICA<br>PEROCI                     |                           |                              | TKIVO,<br>KI KAJ<br>OBDAJA |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      | NAZIV                                        |                                                                                     |                                          |                                           | STOŽEC                    |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           | ALPSKI<br>LJUDSKI<br>PLES |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      | LAHKO<br>VNETLJIVA<br>ZMES                   | GORA S<br>POTOČKO<br>ZUJALKO<br>GEORGE<br>HARRISON                                  |                                          |                                           |                           |                              |                            |                                          | STEVENSON<br>(1830)                        |                                                                                   |
| NSKI<br>TIK<br>(TIN-<br>ER) |                             |                                      |                                              |                                                                                     | ASTAT                                    |                                           |                           | OTO<br>VRHOVNIK              |                            |                                          |                                            |  |
| IM.<br>S                    |                             |                                      |                                              |                                                                                     | RUSKI<br>PISATELJ<br>(EVGENIJ)           | TELOVADEC<br>PEGAN                        |                           |                              |                            |                                          |                                            | TESLA<br>MORSE,<br>POPOV<br>(1837)                                                |
| IA<br>TA                    |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          | OVCJI<br>SAMEC                            |                           |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             | IGOR<br>PRETNAR             |                                      |                                              | GONJENJE,<br>POJANJE<br>JOHN<br>FLEMING<br>(1905)                                   |                                          |                                           |                           |                              | SRBSKO<br>MOSKO<br>IME     | LATINSKI<br>VEZNIK<br>100 m <sup>2</sup> |                                            |                                                                                   |
|                             | NALOŽEK                     |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           |                              | ANG. PIVO                  |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           |                              | MONGOL-<br>FIER<br>(1783)  |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             | STARO-<br>SLOVANSKO<br>PIVO | ENOTA ZA<br>VOLUMEN<br>MAJHNO<br>DNO |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           | FR. PEVEC<br>(JACQUES)       |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           | LISASTI<br>FIŽOL             |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           |                              |                            | ZENICA                                   |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           |                           |                              |                            | PRIPADNIK<br>ST. EVROP.<br>LJUDSTVA      |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      | 1. SOLMIZA-<br>CJSKI ZLOG<br>TOYOTIN<br>DŽIP |                                                                                     |                                          | AVSTRIJ.<br>DENARNA<br>ENOTA<br>HRV. OTOK |                           |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             | NAVADE<br>(STAR.)           |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           | DELOVODJA                 |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             | IVAN<br>CANKAR              |                                      |                                              |                                                                                     |                                          |                                           | ANTON<br>FOERSTER         |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              | EDISON (1879)                                                                       |                                          |                                           |                           |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |  |                                          |                                           |                           |                              |                            |                                          |                                            |                                                                                   |
|                             |                             |                                      |                                              |                                                                                     |                                          | ITAL<br>DRAMATIK<br>(DARIO)               |                           |                              | ITAL<br>IGRALEC<br>VALLONE |                                          |                                            |                                                                                   |

### 30. FIZIKALNA OLIMPIADA: P KOT PADOVA ALI KOT PASJI DNEVI

Naše popotovanje v Padovo se je začelo 18. julija 1999 v Ljubljani, pred Kompasovo poslovalnico. Voznik kombija, s katerim smo potovali, je prispel z vespo s polurno zamudo in tehtnim razlogom zanj (ustavili so ga policisti). Kmalu se je izkazalo, da ima kombi prazen akumulator, zato smo ga skušali spraviti v pogon s potiskanjem, vendar zaman. Nazadnje nam ga je uspelo zagnati s pomočjo kablov in akumulatorja drugega avta. Končno je prišel čas odhoda, zato smo se poslovili od staršev in se vkrcali v kombi. Potovanje je minilo zelo hitro, saj je za razliko od prejšnjih let olimpiada potekala skoraj doma.

V Padovi smo ob železniški postaji čakali organizatorje in opazovali tamkajšnji divji cestni promet, po dolgem času pa nas je prišla iskat prijateljica našega vodiča Luisa. Sporazumeli smo se v angleškem jeziku in naivno upali, da bo naš pravi vodič govoril slovensko. Z mestnim avtobusom smo se peljali do študentskega doma, v katerega so nas nastanili, spremljevalca pa sta se odpeljala naprej, saj so ju nastanili ločeno od nas, kot zahtevajo pravila. Naš dom je bil dobro opremljen in življenje v njem je bilo prijetno, v pasjih dneh pa bi se zelo prilegla klimatska naprava. Hranili smo se v sosednji restavraciji ali pa v študentski menzi. Prehranjevalnih navad nam ni bilo potrebno spreminjati, saj organizator ni varčeval s hrano, še manj pa s pijačo (brezalkoholno), ki je bila vedno na voljo in je vsaj delno nadomestila klimatsko napravo. V Padovi je bilo vseh devet dni zelo vroče podnevi in ponoči.

Prvo jutro v našem novem stanovanju smo se odpravili na slovesno odprtje 30. mednarodne fizikalne olimpiade. Tam nas je prevzel naš vodič Francesco, ki pa na naše začudenje ni znal slovensko, pa tudi z angleškim jezikom je občasno imel težave. Po uradnem odprtju smo kosili, si na kratko ogledali Padovo, potem pa smo odšli v kletne prostore doma, kjer smo skupaj z ostalimi ekipami igrali namizni tenis in namizni nogomet ali pa se pogovarjali z ostalimi udeleženci. Spat smo šli vedno v poznih nočnih urah, ko se je vsaj malo ohladilo.

Naslednji dan nas je čakal praktični del tekmovanja, ki je vseboval eno nalogo, kar je v navadi že nekaj let. Raziskovali smo sučno nihanje togega telesa s spremenljivim vztrajnostnim momentom, pritrjenega na napeto žico, ki se je pri nihanju sučno deformirala. Sledil je dan počitka po napornem praktičnem delu. Ta dan smo se udeležili krajšega izleta,

na katerem smo slučajno spoznali šestega slovenskega tekmovalca, ki pa je bil član argentinske ekipe. Dan potem nas je čakal še teoretični del tekmovanja, ki ravno tako traja pet ur, sestavljen pa je iz treh daljših nalog. Prva naloga je obravnavala absorpcijo svetlobe v plinu, druga magnetno polje okrog zanke v obliki črke V, tretja pa gibanje sonde v Jupitrovem gravitacijskem polju. Jupiter v tretji nalogi verjetno ni bil izbran naključno, saj njegova sonda nosi ime znanega italijanskega fizika Galilea. Nanj so Italijani tako ponosni, da so skupinam, v katere smo bili tekmovalci razdeljeni, dali imena Jupitrovih lun, ki jih je ta učenjak poimenoval. Po tekmovanju smo si ogledali razstavo eksperimentov, ki so jo pripravile italijanske šole.

V naslednjih dneh, ko so se mučili ocenjevalci, smo se udeležili nekaj izletov, na katerih smo se vsi počutili bolj sproščeno kot pred tekmovanjem. Najprej smo obiskali nacionalne laboratorije, kjer so nam predstavili svoje raziskovalno delo in pokazali nekatere naprave, s katerimi razpolagajo. Ogledali smo si še znano smučarsko središče Cortino d'Ampezzo, z nedeljskim izletom v Benetke pa so se naša popotovanja zaključila.

Predzadnji dan je bila organizirana zaključna prireditev z govori organizatorjev in podelitvijo medalj in pohval. Podeljeval jih je tudi italijanski fizik, nobelovec Carlo Rubbia. Z zlatimi medaljami tokrat niso skoparili, saj so jih poleg najboljših tekmovalcev prejeli tudi vsi organizatorji, kljub dejstvu, da se pregovorno slabi italijanski organizaciji niso izneverili. Zvečer je bil organiziran še banket, ki pa se ni zavlekel v nočne ure. Naslednji dan nas je prišel iskat kombi in po nekaj urah smo srečno prispeli v Ljubljano, kjer so nas že čakali starši.

*Urban Simončič*

## PREMOŽENJE – Rešitev s str. 82

Privzamemo, da se deleži izražajo s celimi ari.

Naj bo  $a$  delež najmlajšega otroka. Potem so deleži ostalih otrok po naraščajoči starosti enaki  $ab$ ,  $abc$ ,  $abcd$  itd., kjer so  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... naravna števila. Iz

$$a + ab + abc + abcd + abcde + abcdef + abcdefg = 2879$$

sledi

$$a(1 + b + bc + bcd + bcde + bcdef + bcdefg) = 2879.$$



## LAŽNIVI KLJUKEC – Odgovor na vprašanje iz zadnje lanske številke Preseka

V zgodbi, ki jo je pripovedoval lažnivi Kljukec prijateljem, je precej napačnih trditev. Pojdimo po vrsti. Oriona poleti ni mogoče videti, Sirius pa tudi skozi najmočnejši teleskop ni videti kot majhna Luna, saj je zvezda. Skozi zelo močan teleskop so na njem opazili pege, podobne pegam na Soncu. Venera skozi močan daljnogled res izgleda kot majhna Luna, nikakor pa je ne moremo videti opolnoči, saj se giblje blizu Sonca in zaide nekaj ur za njim. Merkur je še bližje Soncu in vziide ali zaide skupaj s Soncem, tako da ga ni lahko opazovati. Čeprav se giblje okrog Sonca hitreje kot Zemlja, pa nikakor ne moramo zaznati tega gibanja v eni sami noči. Planeti se glede na zvezde res gibljejo, a prepočasi, da bi lahko to v tako kratkem času opazili. Za opazovalca se planeti gibljejo skupaj z zvezdami in nikoli ne mirujejo na nebu. Polna Luna vziide vedno takoj po Sončevem zahodu, opazovanje podrobnosti na njej, ki so velike kak meter ali še manj, pa je povsem nemogoče. Tudi vetra na Luni ni, saj nima zraka. Severnica seveda nikoli ne zaide, je edina zvezda, ki je na nebu skoraj negibna. Danica in Večernica sta imeni za Venero, pač glede na to, ali sije zjutraj ali zvečer. Pluton je planet, ki ga lahko opazimo le z največjimi teleskopi. Umetni sateliti ne morejo obkrožiti Zemlje v desetih minutah, za to potrebujejo več kot eno uro. Vzhajajoče Sonce ni nikoli modro.

*Andrej Likar*

## KOLIKO IGER? – Rešitev (po dvojiško) s str. 67

Nalogo lahko spretno rešimo, če uporabimo dvojiški zapis števil.

Za uvod si oglejmo primer obratne naloge. Denimo, da je Matic izgubil 1., 2., 3., 7. in 10. igro. Vsota zneskov, ki jih je moral plačati za izgubljene igre, je enaka

$$m = 1 + 2 + 4 + 64 + 512,$$

kar lahko zapišemo tudi takole:

$$m = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^9.$$

To pa je razčlenitev števila  $m$  po potencah števila 2, od koder sledi zapis števila  $m$  v dvojiškem sistemu

$$m = 1001000111_{(2)}.$$

Ker je v tem primeru Brane izgubil 4., 5., 6., 8. in 9. igro, je vsota njegovih vplačil enaka

$$b = 110111000_{(2)}.$$

Vsakemu celemu številu pripada natanko en dvojiški zapis, zato lahko iz dvojiškega zapisa vsote vplačanih zneskov tudi razberemo, katere igre po vrsti je igralec dobil (oziroma izgubil). Če stoji na  $k$ -tem mestu, gledano z desne, številka 0, je igralec  $k$ -to igro dobil, številka 1 pomeni, da je to igro izgubil.

Povrnimo se k zastavljeni nalogi. Označimo z  $M$  vsoto zneskov, ki jih je moral za izgubljene igre plačati Matic, in z  $B$  vsoto zneskov, ki jih je vplačal Brane. Po dogovoru nista igrala več kakor 10 iger. Ker pa je

$$1 + 2 + \dots + 2^8 = 511 < 731,$$

Matic po devetih igrah še ni mogel bankrotirati, torej sta igrala natanko 10 iger.

V desetih igrah sta skupaj plačala  $1 + 2 + \dots + 2^9 = 1023$  tolarjev, Matic 731 tolarjev več kakor Brane. Zato je

$$M + B = 1023,$$

$$M - B = 731.$$

Sledi  $M = 877$  in  $B = 146$ .

Zapis števila  $M$  v dvojiškem sistemu

$$M = 1101101101_{(2)}$$

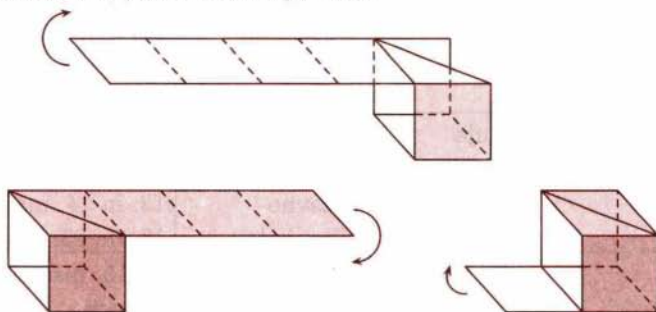
pove, da je Matic izgubil 1., 3., 4., 6., 7., 9. in 10. igro.

*Marija Vencelj*

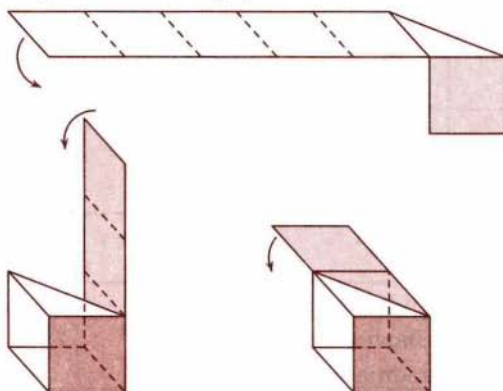
## ENOBARVNA KOCKA – Rešitev s str. 67

Šest kvadratov v enem samem nizu ne pomeni mreže kocke, zato 18 cm dolg trak papirja (to je 6 zaporednih kvadratov s stranico 3 cm) ne bo zadostoval niti za rešitev prve niti druge naloge. Da bomo s trakom pokrili vso kocko, ga bo treba enkrat ali večkrat obrniti, sodo mnogokrat (torej vsaj dvakrat), če naj bodo vse mejne ploskve kocke modre. Vsak smiselni obrat traku pa pomeni dodatni porabljeni kvadrat.

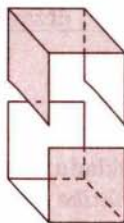
Za rešitev prve naloge, to je, za enobarvno kocko, potrebujemo osem kvadratov oziroma 24 cm dolg trak papirja, ki ima različno obarvani strani. Kako trak zložimo, kaže naslednja slika.



Če so mejne ploskve lahko različno obarvane, potrebujemo trak, dolg sedem kvadratov. Spet si rešitev ogledimo kar na sliki.



Pri tretji nalogi smemo trak prerezati, zato zadošča dolžina šestih kvadratov. Trak razdelimo na dva kosa, dolga po tri kvadrate, in ju takole zložimo:



## URNIK TEKMOVANJ V LETU 2000

| področje                    | šola                  | tekmovanje                                  | datum                                                       |
|-----------------------------|-----------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| matematika                  | osnovna               | šolsko<br>področno<br>državno               | 16. marec<br>15. april<br>20. maj                           |
|                             | srednja               | šolsko<br>izbirno<br>državno<br>olimpiada   | 16. marec<br>8. april<br>13. in 14. maj<br>13. do 25. julij |
| fizika                      | osnovna               | šolsko<br>področno<br>državno               | do 15. marca<br>1. april<br>6. maj                          |
|                             | srednja               | področno<br>državno<br>izbirno<br>olimpiada | 25. marec<br>15. april<br>5. maj<br>8. do 16. julij         |
| logika                      | osnovna               | šolsko<br>izbirno<br>državno                | 30. september<br>21. oktober<br>11. november                |
|                             | srednja               | izbirno<br>državno                          | 21. oktober<br>11. november                                 |
|                             | študentje             | državno                                     | 11. november                                                |
| matematika<br>za razvedrilo | osnovna in<br>srednja | državno                                     | 7. oktober                                                  |
| računalništvo               | osnovna               | šolsko<br>področno<br>državno               | 15. februar<br>14. marec<br>31. marec in 1. april           |
|                             | srednja               | državno                                     | 31. marec in 1. april                                       |

## Nekaj informacij o tekmovanjih

## Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Podatke najdete na Internetu (<http://www.dmfa.si/>). Pojasnila lahko dobite pri g. Aleksandru Potočniku na OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10,

Ljubljana, telefon (041)-420-618 oziroma na elektronskem naslovu "aleksander.potocnik@guest.arnes.si".

### **Matematika – srednja šola**

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Naj še posebej poudarimo, da tudi v šolskem letu 1999/2000 že potekajo celoletne priprave na mednarodno matematično olimpiado, ki bo julija v Južni Koreji. Teh se udeležujejo dijaki, ki so jih predlagali bodisi člani *Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli* bodisi učitelji-mentorji ali pa so se prijavili sami. Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Prvi izbirni test bo 21. januarja, drugi pa 21. aprila 2000. Podrobnejše informacije dajeta g. Darjo Felda, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-17-68-233 ali (061)-17-68-234 in g. Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061)-17-66-500, dobite pa jih tudi po elektronski pošti na naslovu "math.comp@fmf.uni-lj.si". Koledar aktivnosti najdete na spletni strani DMFA Slovenije (<http://www.dmfa.si/>).

### **Fizika – osnovna šola**

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. Dodatne informacije dobite na spletni strani DMFA Slovenije (<http://www.dmfa.si/>) in pri ge. Jelki Sakelšek, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (061)-444-401.

### **Fizika – srednja šola**

Razpis za tekmovanja v znanju fizike je objavljen na spletni strani DMFA Slovenije (<http://www.dmfa.si/>). Informacije dobite pri g. Cirilu Dominku na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (061)-3000-400.

### **Matematika za razvedrilo**

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrilna matematika*.

### **Logika**

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj na predmetni stopnji osnovne šole, dijaki srednjih šol in študentje. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, Ljubljana. Druge informacije daje ga. Mija Kordež na ZOTKS, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

### Računalništvo – osnovna šola

Razpis tekmovanja je bil skupaj z obvestilom in prijavnico že poslan na šole. Informacije najdete na Internetu (<http://www2.arnes.si/~ljzotks2>), dobite jih tudi pri ge. Miji Kordež, ZOTKS – Svet za politehnično in delovno vzgojo ter izobraževanje, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487, elektronska pošta "mija.kordez@guest.arnes.si".

### Računalništvo – srednja šola

#### I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **10. aprila** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali. Podrobnejša pojasnila daje g. Brane Sotošek na istem naslovu.

#### II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskim seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 dijakov za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Informacije dobite pri ZOTKS – Komisija za računalništvo, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

*Darjo Felda*

## 34. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 109

### 6. razred

#### Sklop A

|                  |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| naloga           | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
| pravilni odgovor | Č  | D  | C  | B  | Č  | A  | C  | D  |

#### Sklop B

**B1** Vrednost izraza je 1.

**B2** Zaradi  $363 = 3 \cdot 11 \cdot 11$  in  $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$  je  $D(363, 231) = 3 \cdot 11 = 33$ . Stranica kvadrata bo dolga 33 cm. Pravokotno ploščo bomo razrezali na 77 skladnih kvadratov.



## Sklop B

- B1 a) Površina telesa na sliki je  $30a^2$ , prostornina pa  $7a^3$ .  
 b) Dodati moramo 20 kock z robom  $a$ .  
 c) Površina kocke z robom  $3a$  je  $54a^2$ .  $30a^2 : 54a^2 = 5 : 9$ .  
 B2 Naj bo  $a = 5x$  in  $b = 2x$ . Dobimo enačbo  $\frac{5x+2x}{5x-2x} = 2 + \frac{8}{5x-2x}$ , ki ima rešitev  $x = 8$ . Iskani števili sta 40 in 16.  
 B3  $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ,  $B\left(\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}\right)$ ,  $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right)$ ,  $D\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Aleksander Potočnik

## 19. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 114<sup>†</sup>

## 7. razred

1. Teža telesa na zraku  $F_1$  znaša 20 N. Teža istega telesa, zmanjšana za vzgon  $F_2$ , znaša 5 N. Ker je vzgon enak teži izpodrinjene vode,  $F_1 = F_2 + F_{vzg}$ , je vzgon enak 15 N, kolikor tehta liter in pol oziroma  $1,5 \text{ dm}^3$  vode. To je hkrati prostornina  $V_1$  potopljenega telesa. Teža telesa iz enakega materiala, vendar s prostornino  $V_2 = 2,5 \text{ dm}^3$ , je sorazmerna razmerju obeh prostornin

$$F_3 = \frac{V_2}{V_1} F_1 = \frac{2,5 \text{ dm}^3}{1,5 \text{ dm}^3} \cdot 20 \text{ N} = 33,3 \text{ N}.$$

2. Prevesna gugalnica je navaden, na sredini podprt vzvod. Matej je sedel na zunanji sedež in je bil od podpornika gugalnice oddaljen  $r_M = 1,5 \text{ m}$ . Peter je sedel na notranji sedež in je bil od podpornika oddaljen le  $r_P = 0,5 \text{ m}$ . Ker sta bila kraka vzvoda v ravnovesju, je veljalo

$$r_M F_M = r_P F_P,$$

pri čemer sta  $F_M$  in  $F_P$  teži Mateja in Petra. Razmerje njunih tež je torej

$$\frac{F_P}{F_M} = \frac{r_M}{r_P} = \frac{1,5 \text{ m}}{0,5 \text{ m}} = 3.$$

Peter je 3-krat težji od Mateja.

<sup>†</sup> Naloge in rešitve lahko najdete tudi na internetu <http://pef.pef.uni-lj.si/bojang/>

3. Ko položimo kocko na vzmet, se le-ta pod vplivom teže kocke skrči sorazmerno z razteznostnim (oz. skrčitvenim) koeficientom vzmeti

$$F_1 = k \Delta x_1,$$

kjer je  $F_1$  teža kocke 1 N,  $\Delta x_1$  pa skrček vzmeti 2 cm. Če s silo 1 N stisnemo vzmet za 2 cm, potrebujemo za skrček 1 cm le 0,5 N. Koeficient je enak 0,5 N/cm.

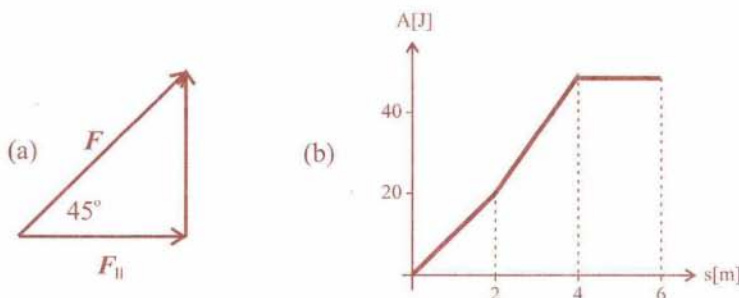
Dodatna utež še dodatno stisne vzmet. Ker je skrček sorazmeren s silo, ki vzmet stiska, velja:

$$F_2 = F_1 \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 1 \text{ N} \cdot \frac{5 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 2,5 \text{ N}.$$

K sili, ki stiska utež, že prispeva teža kocke (1 N), zato mora biti teža uteži 1,5 N.

4. Na prvih dveh metrih poti je sila  $F = 10 \text{ N}$  in je ves čas vzporedna s podlago. Opravi torej delo  $A_1 = Fs = 10 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 20 \text{ J}$ . Naslednja 2 metra poti (od oddaljenosti 2 m do oddaljenosti 4 m od izhodišča), oklepa smer sile s smerjo premika kot  $45^\circ$ . Delo opravlja le komponenta sile, ki je vzporedna s smerjo premikanja, torej  $F_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{2}}F$ . Delo je  $A_2 = F_{\parallel}s = 1/\sqrt{2} \cdot F \cdot s = 1/\sqrt{2} \cdot 20 \text{ N} \cdot 2 \text{ m} = 28 \text{ J}$ . Naslednja 2 m je sila pravokotna na premik in ne opravlja dela,  $A_3 = 0$ . Z rezultati gornjih računov izpolnimo preglednico.

| področje      | opravljeno delo v tem področju |
|---------------|--------------------------------|
| od 0 m do 2 m | $A_1 = 20 \text{ J}$           |
| od 2 m do 4 m | $A_2 = 28 \text{ J}$           |
| od 4 m do 6 m | $A_3 = 0 \text{ J}$            |



Slika 1. Delo v odvisnosti od oddaljenosti od izhodišča.

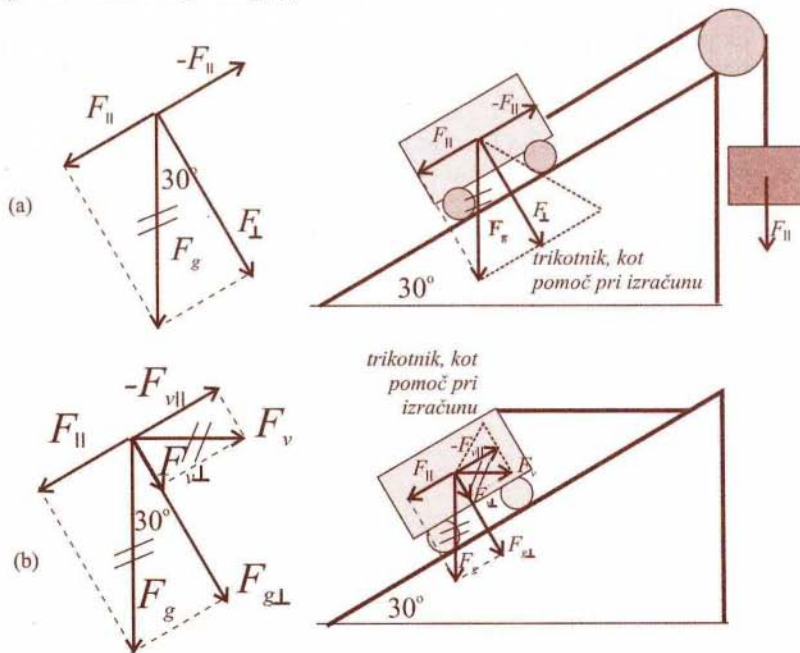
Komponento sile, ki je vzporedna s premikom, lahko izračunamo, in sicer predstavlja sila  $F$  diagonalo kvadrata s stranico  $F_{\parallel}$  (slika 1a). Torej

$$F = F_{\parallel}\sqrt{2} \quad \text{oziroma} \quad F_{\parallel} = F/\sqrt{2}.$$

Lahko pa določimo silo tudi z načrtovanjem.

Na vsakem od odsekov je delo sorazmerno s premikom, opravljenim na tem odseku. Delo, ki ga je že prejelo telo na nekem mestu, je enako vsoti opravljenega dela do tega mesta - diagram (slika 1b). Iz diagrama (slika 1b) lahko razberemo, da je v celoti telo prejelo 48 J dela.

5. Na sliki 2a vidimo diagram sil, ki delujejo na voziček. Vsota vseh sil mora biti enaka 0, saj voziček miruje. Sila podlage uravnovesi komponento sile teže, ki je pravokotna na podlago. Sila vrvice uravnoteži komponento sile teže, ki je s podlago vzporedna. Iz načrtanega lahko odmerimo, da je sila vrvice enaka 10 N, kar je enako teži uteži. Sila, pravokotno na podlago, je 17 N.



Slika 2. (a) Voziček zadržuje na klancu utež, (b) voziček zadržuje na klancu vodoravna vrstica.

To silo lahko tudi izračunamo. Ker je naklon klanca enak  $30^\circ$ , lahko iz teže in njene komponente, vzporedne s podlago, sestavimo enakostranični trikotnik, katerega stranica je dolga  $F_g$  (slika 2a). Vidimo, da je dolžina vzporedne komponente enaka  $F_g/2$ . Dolžina komponente, pravokotne na podlago, predstavlja višino enakostraničnega trikotnika in je torej  $F_\perp = \sqrt{3}/2 F_g = 17 \text{ N}$ .

Za voziček, ki ga zadržuje vrstica, velja enak razmislek. Vsota vseh komponent sil, ki so s podlago vzporedne, mora biti enaka 0, saj se voziček ne premika. Na diagramu sil (slika 2b) vidimo, da sedaj silo 10 N, ki zadržuje voziček, prispeva napeta vrstica. Komponenta te sile, ki je vzporedna s podlago, mora biti enaka  $F_\parallel$ . Pravokotna komponenta poveča pritisk vozička ob tla. Ponovno si lahko pomagamo s konstrukcijo enakostraničnega trikotnika, kjer predstavlja eno stranico sila vrvice  $F_v$ , višino trikotnika pa sila vzporedna s podlago  $F_\parallel = 10 \text{ N}$ :

$$F_\parallel = \frac{\sqrt{3}}{2} F_v \quad \text{oziroma} \quad F_v = \frac{2}{\sqrt{3}} 10 \text{ N} = 11,5 \text{ N}.$$

Hkrati vrstica dodatno pritisne ob podlago tudi voziček. Sila, ki pritiska pravokotno na podlago, se zato poveča. Iz slike izmerimo ali iz zvez, ki veljajo v enakostraničnih trikotnikih, razberemo

$$F_{g,\perp} + F_{v,\perp} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_g + \frac{1}{2} F_v = 23 \text{ N}.$$

## 8. razred

1. Na vrhu tobogana smrti ima voziček potencialno energijo. Na vrhu vzpona ima potencialno in kinetično energijo, njuna vsota pa je zaradi upora zraka in energijskih izgub pri trenju le 70% začetne energije:

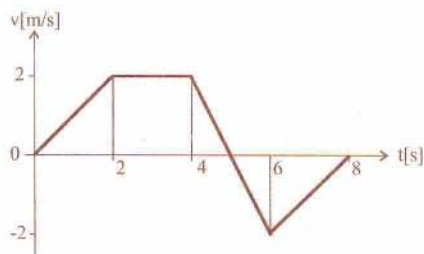
$$0,7 mgh_1 = \frac{1}{2} mv^2 + mgh_2,$$

kjer je  $h_1$  začetna višina vagončka,  $v$  hitrost vagončka v najvišji točki vzpona in  $h_2$  višina v najvišji točki. Izrazimo višino  $h_2$ :

$$h_2 = \frac{0,7 mgh_1 - \frac{1}{2} mv^2}{mg} = \frac{0,7 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} - \frac{1}{2} (5 \text{ m/s})^2}{9,81 \text{ m/s}^2} =$$

$$= 5,7 \text{ m}.$$

2. Telo se odsekoma giblje enakomerno pospešeno, enakomerno ali enakomerno pojemajoče. V prvih dveh sekundah se mu hitrost enakomerno poveča iz 0 na 2 m/s. V naslednjih dveh sekundah je hitrost ves čas enaka. Med 4. in 6. sekundo je smer pospeška nasprotna smeri pospeška iz prvih dveh sekund. Zato se hitrost v dveh sekundah spremeni za  $-4$  m/s, in sicer z 2 m/s na  $-2$  m/s. V zadnjih dveh sekundah se hitrost ponovno spremeni za 2 m/s, tako, da na koncu telo miruje.



Slika 1. Diagram hitrosti v odvisnosti od časa.

Iz diagrama (slika 1) odčitamo vrednosti:

| čas [s] | hitrost [m/s] |
|---------|---------------|
| 1       | 1             |
| 3       | 2             |
| 5       | 0             |
| 7       | -1            |

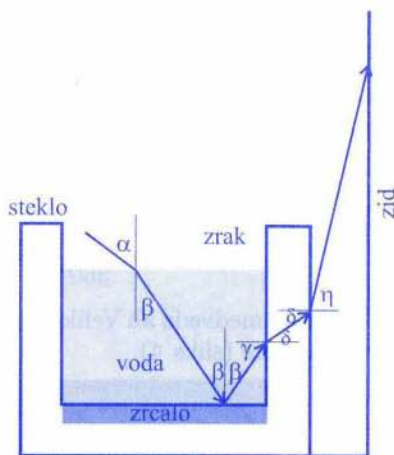
Iz diagrama hitrosti lahko izračunamo tudi opravljeno pot v posameznih časovnih obdobjih. V vsakem časovnem intervalu odčitamo povprečno hitrost, ki je v tem primeru kar enaka hitrostim iz preglednice 1. Povprečno hitrost na posameznem intervalu pomnožimo z dolžino časovnega intervala in dobimo v tem časovnem intervalu opravljeno pot. Celoten odmik sestavljajo odmiki v posameznih časovnih obdobjih.

| časovni interval | premik v intervalu [m] | čas [s] | odmik od izhodišča [m] |
|------------------|------------------------|---------|------------------------|
| od 0 s do 2 s    | 2                      | 2       | 2                      |
| od 2 s do 4 s    | 4                      | 4       | 6                      |
| od 4 s do 6 s    | 0                      | 6       | 6                      |
| od 6 s do 8 s    | -2                     | 8       | 4                      |

3. Slika 2 predstavlja laserski žarek in njegovo pot skozi različna sredstva.

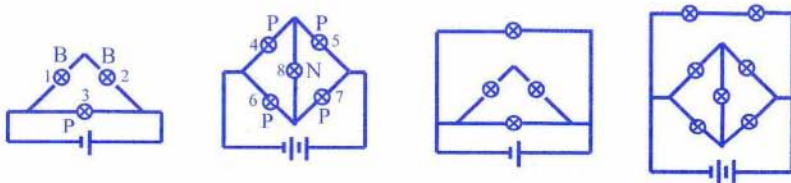
Svetloba vpada na vodno gladino pod vpadnim kotom  $\alpha$ , se lomi pod lomnim kotom  $\beta$ , ki je manjši od vpadnega kota, ker je voda optično gostejša od zraka. Na zrcalu se odbije pod enakim kotom  $\beta$  (do 4 točke), vpadni kot na površino stekla  $\gamma$  pa je zaradi drugačne vpadne pravokotnice enak  $\pi/2 - \gamma = \delta$  (do 4 točke). Pri prehodu v steklo se svetloba lomi pod kotom  $\eta$ , ki je manjši od  $\delta$  (do 4 točke), ker je steklo optično gostejše

od vode. Na nasprotni strani steklene stene izstopa žarek iz stekla pod kotom  $\mu$ , ki je večji od vpadnega kot  $\eta$  (do 4 točke) in tudi od vpadnega kota  $\delta$  (do 4 točke). Pri popolni sliki naj bodo označene vpadne pravokotnice.



Slika 2. Pot žarka skozi vodo, steklo in zrak.

4. Žarnici 1 in 2 v gornji veji sta vezani na baterijo zaporedno, zato svetita šibkeje. Žarnica 3 na spodnji veji je vezana na baterijo samostojno in sveti polno (slika 3). Žarnici 4 in 5 sta sicer vezani zaporedno, vendar sta vezani na dve zaporedno vezani bateriji, zato obe svetita polno. Enako velja za žarnici 6 in 7. Ker so žarnice enake, med točkama A in B ni napetosti. Zato žarnica 8 ne sveti.



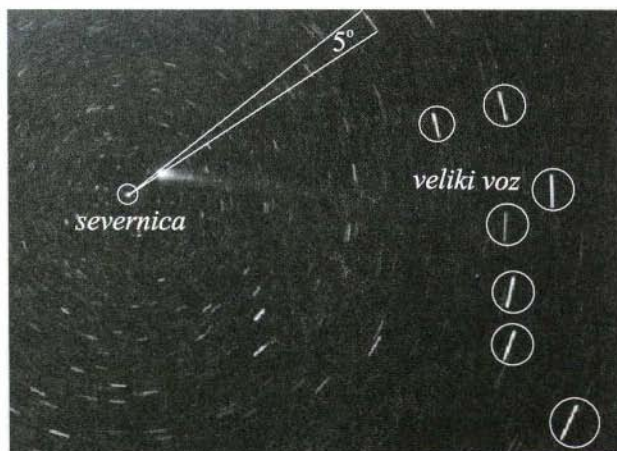
Slika 3. Žarenje žarnic in vezja z dodanimi žarnicami.

V prvo vezje vežemo žarnico vzporedno s celotnim vezjem. V drugo vezje vežemo dve zaporedno vezani žarnici vzporedno s celotnim vezjem.

5. Zvezda, okoli katere se "vrti" nebo, je Severnica. V resnici se seveda vrti Zemlja. Na fotografiji "bi se celotno nebo zavrtelo" za polni kot v 24 urah. V času, ko je bila odprta zaslonka, se je nebo "zavrtelo" za  $5^\circ$ . Kot zasuka izmerimo s kotomerom tako, da potegnemo črte od Severnice do obeh koncev "zmazkov" ene izbrane zvezde, pri kateri je meritev najlažja. Na sliki nočnega neba je označeno, kako to naredimo. Račun:

$$t = \frac{5^\circ}{360^\circ} \cdot 24 \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min}.$$

Velikega medveda ali Veliki voz sestavlja 7 svetlih zvezd, ki so nekoliko razmazane (slika 4).



Slika 4. Fotografija nočnega neba z označeno Severnico, Velikim medvedom in kotom zasuka neba.

Mojca Čepič

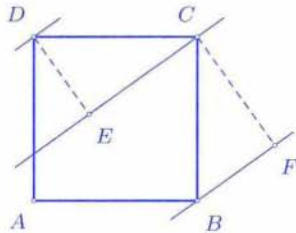
## IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE – Rešitve s str. 119

I/1. Naj bo  $n = 154k + 9 = p + q$ , kjer sta  $p$  in  $q$  praštevili. Ker je  $154k + 9$  liho število, je eno izmed praštevil liho, drugo pa sodo, torej enako 2. Naj bo npr.  $q = 2$ . Tedaj je  $p = 154k + 7 = 7(22k + 1)$ . To je možno le, ko je  $k = 0$ , torej je  $p = 7$  in zato  $n = 9$ .

Naj bo  $154k + 9 = p - q$ . Podobno kot zgoraj sklepamo, da je eno izmed praštevil liho, drugo sodo, torej je  $q = 2$ . Tedaj je  $p = 154k + 11 = 11(14k + 1)$ . Tudi to je možno le za  $k = 0$ , torej je  $p = 11$  in enako kot prej  $n = 9$ .

**I/2.** Taki števili ne obstajata. Iz  $x + y = 1$  sledi  $x^2 + 2xy + y^2 = 1$  oziroma  $xy = -\frac{1}{2}$ . Zato je  $1 = (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = \frac{3}{2}$ , kar pa ni možno.

**I/3.** Denimo, da je premica skozi  $C$  oddaljena 5 enot od njej vzporedne premice skozi  $D$  in 7 enot od premice skozi  $B$ . Naj bo  $E$  nožišče pravokotnice iz oglišča  $D$  na premico skozi  $C$ ,  $F$  pa nožišče pravokotnice iz oglišča  $C$  na premico skozi  $B$ . Trikotnika  $CDE$  in  $CBF$  sta skladna, saj sta oba pravokotna z enako dolgima hipotenuzama, poleg tega pa sta kota  $\sphericalangle DCE$  in  $\sphericalangle BCF$  skladna (pravokotni kraki). Zato je  $|CF| = |CE| = 7$  in  $|DE| = |BF| = 5$ . Ploščina kvadrata je  $|BC|^2 = |BF|^2 + |CF|^2 = 25 + 49 = 74$ .



**I/4.** Naj bo  $f$  število fantov in  $d$  število deklet. Ker so 4 pice premalo, je  $6f + 2d > 48$ . Ker pa je 5 pic preveč, je  $7f + 3d < 60$ . Iz neenačb  $6f + 2d \geq 49$  in  $7f + 3d \leq 59$  dobimo  $f + d \leq 10$ . Torej je  $d \leq 10 - f$  in zato  $49 \leq 6f + 2d \leq 6f + 2(10 - f) = 4f + 20$ . Sledi  $f \geq 8$ .

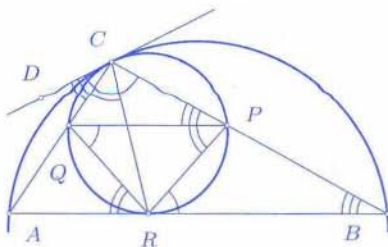
Če je  $f \geq 9$ , imamo  $7f + 3d \geq 63$ , kar je preveč. Za  $f = 8$  pa preverimo, da je  $d = 1$  edina rešitev. (Pri  $d = 0$  namreč štiri pice zadoščajo, pri  $d \geq 2$  pa je  $7f + 3d \geq 62$ .)

**II/1.** Če sta  $k$  in  $l$  naravni števili, potem mora biti  $k \leq 1000$  in  $l \leq 100$ , če naj bo  $k^2 + l^3 \leq 1\,000\,000$ . Takšnih parov  $(k, l)$  pa je kvečjemu 100 000. Torej je več števil, ki jih ne moremo zapisati kot vsoto popolnega kvadrata in popolnega kuba.

**II/2. 1. način.** Enačbo preoblikujemo:  $\overrightarrow{AX} \cdot (\overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CB}) = 0$  oziroma  $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BX} = 0$ . Po Talesovem izreku dobimo krožnico s premerom  $AB$  in po istem izreku sklepamo, da vse točke krožnici ustrezajo.

**2. način.** Nalogo lahko rešimo tudi analitično. Če imajo točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $X$  krajevne vektorje  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2)$  in  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ , nam pogoj naloge da  $(x_1 - a_1, x_2 - a_2) \cdot (x_1 - b_1, x_2 - b_2) = 0$ . Enakost še preoblikujemo:  $(x_1 - \frac{a_1+b_1}{2})^2 + (x_2 - \frac{a_2+b_2}{2})^2 = (\frac{a_1-b_1}{2})^2 + (\frac{a_2-b_2}{2})^2$ . Iskana množica točk je torej krožnica s središčem v razpolovišču daljice  $AB$  in polmerom  $\frac{1}{2}|AB|$ .

**II/3.** Potegnimo tangento na trikotniku  $ABC$  očišrtano krožnico  $\mathcal{K}_O$  v točki  $C$  in na njej izberimo poljubno točko  $D$ . Premica  $DC$  je tako tangenta tudi na krožnico  $\mathcal{K}$ . Presečišči premic  $AC$  in  $BC$  s krožnico  $\mathcal{K}$  označimo s  $Q$  in  $P$ , kot kaže skica.



Kot med tetivo  $AC$  in tangento  $CD$  je enak nepriležnemu kotu nad to tangento, zato je  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC$  in podobno še  $\sphericalangle QCD = \sphericalangle QPC$ . (Premici  $QP$  in  $AB$  sta tako vzporedni.) Po istem izreku je tudi  $\sphericalangle BRP = \sphericalangle RCP$ .

Zaradi tetivnosti  $RPCQ$  je  $\sphericalangle QCR = \sphericalangle QPR$  in  $\sphericalangle RQP = \sphericalangle RCP$ . Ker sta premici  $PQ$  in  $AB$  vzporedni, je  $\sphericalangle BRP = \sphericalangle RPQ$ , od koder sledi  $\sphericalangle RCP = \sphericalangle QCR$ .

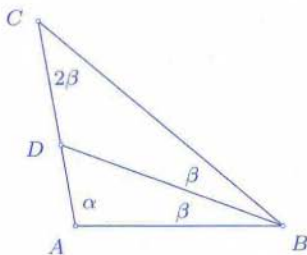
**II/4.** Naj bodo  $n_1, n_2, \dots, n_{10}$  naravna števila, ki jih je Janezek napisal na listke, in naj bo  $S = n_1 + n_2 + \dots + n_{10}$  njihova vsota. Ker je devet različnih vsot, sta dve izmed števil  $n_1, n_2, \dots, n_{10}$  med seboj enaki in sta seveda tudi dve izmed vsot po devetih števil  $S - n_1, S - n_2, \dots, S - n_{10}$  med seboj enaki. Recimo, da se ponovi vsota  $x$ . Tedaj je  $(S - n_1) + (S - n_2) + \dots + (S - n_{10}) = 82 + 83 + 84 + 85 + 87 + 89 + 90 + 91 + 92 + x = 783 + x$ . Od tod je  $10 \cdot S - (n_1 + n_2 + \dots + n_{10}) = 783 + x$  oziroma  $9 \cdot S = 783 + x$ , torej lahko izrazimo  $x = 9(S - 87)$ , zato mora biti  $x$  deljiv z 9 in je enak 90. Računamo do  $S = 97$  in po vrsti odštevamo po eno od devetih vsot (vsoto 90 upoštevamo dvakrat), da dobimo še števila, ki so napisana na listkih: 5, 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15.

**III/1.** Izraz damo na skupni imenovalac in dobimo

$$\frac{3 + \alpha + \beta + \gamma - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma}{1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma}.$$

Ker pa je po Vietovih formulah  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ,  $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1$  in  $\alpha\beta\gamma = 1$ , je izraz enak 1.

**III/2.** Naj bo  $\alpha$  kot pri oglišču  $A$  in naj bo  $\beta = \frac{\pi - \alpha}{4}$ . Potem je po sinusnem izreku  $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\beta}$ ,  $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\beta}$  in  $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\sin \beta}{\sin 3\beta}$ . Iščemo torej rešitev enačbe  $\sin(\pi - 4\beta) \sin 3\beta = (\sin(\pi - 4\beta) + \sin \beta) \sin 2\beta$ . Sledi  $\cos \beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta + \cos \beta - \cos 3\beta$  oziroma



$\cos 3\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta$ . Torej je  $\sin 2\beta \sin 5\beta = \sin 2\beta \sin 4\beta$  in zato  $\sin 5\beta = \sin 4\beta$ . Ta enačba ima le rešitev:  $5\beta = \pi - 4\beta$ , možnost  $5\beta = 4\beta$  namreč odpade. Torej je  $\beta = \frac{\pi}{9}$  in  $\alpha = \frac{5\pi}{9}$ .

**III/3.** Naj bo  $\alpha = \sphericalangle A$ ,  $\beta = \sphericalangle B$  in  $\gamma = \sphericalangle C$ . Trikotnik  $ABC$  je ostrokoten natanko tedaj, ko velja  $\cos \alpha > 0$ ,  $\cos \beta > 0$  in  $\cos \gamma > 0$ . Po kosinusnem izreku je  $\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0$ . Sledi  $b^2 + c^2 - a^2 = = vw + vu - v^2 + wu + wv - w^2 - (uv + uw - u^2) = (u + v - w)(u - v + w) > 0$ , kjer smo na koncu upoštevali trikotniško neenakost za stranice trikotnika  $UVW$ . Torej je  $\alpha$  ostri kot. Analogno pokažemo, da sta ostra tudi kota  $\beta$  in  $\gamma$ .

**III/4. 1. način.** Naj ima rdeči kvadrateg vrednost 1, modri pa 0. Ker je število rdečih (in seveda tudi modrih) kvadratkov na obeh listih enako, mora biti vsota vrednosti obeh listov soda. Ko lista staknemo, bodo imeli pobarvani kvadrati naslednje vrednosti: modri 0, rdeči 2 in vijolični 1. Ker je skupna vsota soda, mora biti vijoličnih kvadratkov sodo mnogo.

**2. način.** Na vsakem listu naj bo  $m$  modrih polj in  $r$  rdečih ( $m + r = = n^2$ ). Ko lista staknemo, naj  $k$  modrih polj prvega lista postane vijoličastih (s pomočjo ustreznih  $k$  rdečih polj drugega lista). Torej ostane  $m - k$  polj modrih, kar pomeni, da je moralo tudi  $k$  modrih polj drugega lista postati vijoličastih (s pomočjo  $k$  rdečih polj prvega lista). Skupaj smo torej dobili  $2k$  vijoličastih polj.

**IV/1.** V funkcijsko enačbo vstavimo  $m = 1$  in imamo  $f(n+1) \geq f(n) + f(1) - 1 > f(n)$ , saj je  $f(1) > 1$ . Torej je funkcija strogo rastoča. Z indukcijo lahko sedaj pokažemo  $f(n) \geq n + 1$ . Za  $n = 1$  je to očitno. Pa denimo, da za neki  $n \in \mathbb{N}$  velja  $f(n) \geq n + 1$ . Sledi  $f(n+1) > f(n) \geq n + 1 \Rightarrow f(n+1) \geq n + 2$ , torej je res  $f(n) \geq n + 1$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Če sedaj obstaja tak  $n < 3001$ , da je  $f(n) > n + 1$ , mora za vsak  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq m < 3001$  veljati  $f(m) > m + 1$ , kar pokažemo z indukcijo. Naj za neki  $n < 3001$  to velja. Če je  $n + 1 < 3001$ , dobimo  $f(n+1) > f(n) > n + 1 \Rightarrow f(n+1) \geq n + 2$ . Če torej za neki  $n < 3001$  velja  $f(n) > n + 1$ , velja to tudi za  $n = 3000$  ( $f(3000) > 3001$ ). To pa je v protislovju s predpostavko naloge  $f(3000) < 3002$ . Zato ne obstaja  $n < 3001$ , da bi bilo  $f(n) > n + 1 \Rightarrow f(n) = n + 1$  za  $0 < n < 3001$  in  $f(1999) = 2000$ .

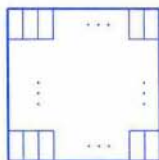
**IV/2.** Računajmo:  $\overbrace{666 \dots 6}^{k \text{ šestic}} = 6 \cdot \overbrace{111 \dots 1}^{k \text{ enic}} = 6 \cdot \sum_{l=0}^{k-1} 10^l = 6 \cdot \frac{10^k - 1}{9}$ . Sledi  $\sum_{k=1}^{1999} 6 \cdot \frac{10^k - 1}{9} = \frac{6}{9} (10 \cdot \frac{10^{1999} - 1}{9} - 1999) = \frac{6}{81} (10^{2000} - 18001)$ .

**IV/3.** Označimo dolžino stranice trikotnika  $ABC$  z  $a$  in  $\varphi = \sphericalangle MAC$ . Po sinusnem izreku je

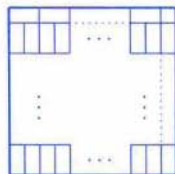
$$\frac{|AM|}{\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)} = \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{|BM|}{\sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)} = \frac{|CM|}{\sin \varphi}.$$

Upoštevamo, da je  $\sin(\frac{\pi}{3} \pm \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \pm \frac{1}{2} \sin \varphi$  in vstavimo v vsoto četrtil potenc. Dobimo, da je ta vsota enaka  $2a^4$ , torej neodvisna od  $\varphi$ .

**IV/4.** Ločimo dva primera. Če je  $n$  sodo število, razdelimo šahovnico na  $\frac{n^2}{2}$  domin velikosti  $1 \times 2$ . V igri zmaga drugi igralec, in sicer tako, da na vsako potezo prvega odgovori s premikom žetona na drugo, do tedaj še neobiskano polje te  $1 \times 2$  domine v razdelitvi, ki je na sliki za primer sodega števila  $n$ .



$n$  sodo število



$n$  liho število

Če je  $n$  je liho število, razdelimo šahovnico na  $\frac{n^2-1}{2}$  domin velikosti  $1 \times 2$  in kvadratega  $1 \times 1$ . Tokrat zmaga prvi igralec, in sicer tako, da najprej postavi žeton na "osamljeni" kvadratega, nato pa ravna kot drugi igralec v prejšnjem primeru.

Matjaž Željko

## REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1998/99 – s str. 121

Objavljamo rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 17. aprila 1999. Besedila nalog smo objavili v letošnji drugi številki Preseka.

### Skupina A

1. Podatki:  $\Delta l = 10$  cm,  $\varphi = 45^\circ$ .

Trikotnik, ki ga tvorijo obesišče vzmeti, središče globusa in dotikališče telesa, je enakokrak; ker je eden od skladnih kotov  $45^\circ$ , sta druga dva kota  $45^\circ$  in  $90^\circ$ . (Trikotnik je torej polovica kvadrata.) Trikotnik je podoben trikotniku sil, ki ga tvorijo podlaga, teža telesa  $F_g$  in sila na vzmet  $F_v$ , zato lahko zapišemo  $F_v = F_g \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ker je raztezek sorazmeren sili, velja  $\Delta x / \Delta l = F_v / F_g = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Dobimo  $\Delta x = \Delta l \frac{\sqrt{2}}{2} = 7$  cm.

2. Podatki:  $\sigma_v = 9,80 \text{ N/dm}^3$ ,  $F_1 = 4,32 \text{ N}$ ,  $F_2 = 15,10 \text{ N}$ ,  $F_3 = 16,08 \text{ N}$ ,  $F_4 = 22,42 \text{ N}$ ,  $\sigma_p = 23,8 \text{ N/dm}^3$ .

Gostoto peska lahko izmerimo, če stehamo prazno posodo, posodo s peskom, posodo, napolnjeno z vodo in posodo, napolnjeno s peskom in vodo. Iz prvih dveh meritev določimo težo peska, iz preostalih meritev pa težo izpodrinjene vode in od tod volumen peska. Pri prvi meritvi je sošolka očitno tehtala prazno posodo, pri zadnji pa pesek in vodo. Pri drugi in tretji je tehtala posodo z vodo in posodo s peskom, ni pa jasno, kateri izmerek ustreza tehtanju peska in kateri tehtanju vode. Preveriti moramo obe možnosti.

- i. Če je pri drugi tehtala pesek, je volumen peska  $V_p = (F_2 - F_1)/\sigma_p = 0,453 \text{ dm}^3$ , volumen posode pa  $V_0 = (F_3 - F_1)/\sigma_v = 1,20 \text{ dm}^3$ . Od tod lahko ugotovimo, da dobimo pri tehtanju posode s peskom in vodo  $F'_4 = F_1 + V_p\sigma_p + (V_0 - V_p)\sigma_v = 22,42 \text{ N}$ , kar je v skladu z izmerjeno vrednostjo.
- ii. Če bi pri drugi meritvi tehtala vodo in pri tretji pesek, bi dobila  $V_p = 0,494 \text{ dm}^3$  in  $V_0 = 1,10 \text{ dm}^3$ , kar bi za težo posode s peskom in vodo dalo  $22,02 \text{ N}$ . Ker je to v nasprotju s četrtilim izmerkom, je pravilni vrstni red tehtanj: prazna posoda ( $F_1$ ), posoda s peskom ( $F_2$ ), posoda z vodo ( $F_3$ ) ter posoda s peskom in vodo ( $F_4$ ).

- 3.a Podatki:  $l = 15 \text{ mm}$ ,  $h = 7 \text{ mm}$ .

V trenutku tik pred zdrsom deluje na iglico sila mravljinca z vodoravno komponento  $F\frac{\sqrt{2}}{2}$  in navpično komponento  $F\frac{\sqrt{2}}{2}$ , teža  $T$ , vodoravna komponenta podlage (lepenje)  $F_l$  in njena navpična komponenta  $F_p$ . V tem trenutku so v ravnovesju navpične in vodoravne komponente sil ter navori (os izberemo v dotikališču iglice s tlemi):

$$F_p + F\frac{\sqrt{2}}{2} - T = 0, \quad F_l - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad Fh\sqrt{2} = T \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Iz zadnje enačbe izrazimo  $F$  in vstavimo v prvo in drugo. Koeficient lepenja mora biti vsaj

$$k_l = \frac{F_l}{F_p} = \frac{\frac{Tl}{h} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}}{T - \frac{Tl}{h} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8}} = \frac{l\sqrt{2}}{8h - l\sqrt{2}} = 0,6.$$

3.b Podatki:  $l = 30$  m,  $\Delta v = 3$  m/s,  $v_0 = 10$  m/s,  $a' = 0,1$  m/s<sup>2</sup>.

- i. Če opravi kavboj pot  $s = v_0 t$ , opravi v enakem času vlak pot  $l + s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ , torej velja  $l = \frac{1}{2} a t^2$ . Vlak mora v tem času povečati hitrost za  $\Delta v = a t$ . Izločimo  $t$  in dobimo

$$a = (\Delta v)^2 / 2l = 0,15 \text{ m/s}^2.$$

- ii. Če z  $v_1$  označimo hitrost kavboja v drugo, velja  $s = v_1 t$ ,  $l + s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ , torej  $l = (v_0 - v_1) t + \frac{1}{2} a t^2$ . Vlak mora v tem času povečati hitrost za  $\Delta v = v_0 - v_1 + a t$ . Izločimo  $t$  in dobimo  $(v_0 - v_1)^2 = (\Delta v)^2 - 2a'l$  oziroma

$$v_1 = v_0 - \sqrt{(\Delta v)^2 - 2a'l} = 8,3 \text{ m/s}.$$

### Skupina B

1. Podatki:  $v_1 = 2$  m/s,  $v_2 = 3$  m/s,  $h = 2$  m,  $h_0 = 4$  m,  $s_0 = 3$  m.

V vodoravni smeri mora Bond v času  $t$  preleteti razdaljo  $s_0 = v_0 t$ . V tem času v navpični smeri pade za  $v_1 t + \frac{1}{2} g t^2$ . Druga plošča se medtem spusti za  $h + h_0 - v_2 t$ . Če naj jo Bond ravno še ujame, mora veljati  $v_1 t + \frac{1}{2} g t^2 = h + h_0 - v_2 t$ . Za čas torej dobimo kvadratno enačbo  $\frac{1}{2} g t^2 + (v_1 + v_2) t - (h + h_0) = 0$  s smiselno rešitvijo

$$t = \frac{-(v_1 + v_2) + \sqrt{(v_1 + v_2)^2 + 2g(h + h_0)}}{g} = 0,71 \text{ s}.$$

Potem je  $v_0 = s_0/t = 4,2$  m/s. (Če takoj izločimo čas  $t$ , dobimo za  $v_0$  kvadratno enačbo  $(h + h_0)v_0^2 - (v_1 + v_2)s_0 v_0 - \frac{1}{2} g s_0^2 = 0$  z rešitvijo

$$v_0 = \frac{(v_1 + v_2)s_0 + \sqrt{(v_1 + v_2)^2 s_0^2 + 2g(h + h_0)s_0^2}}{2(h + h_0)} = 4,2 \text{ m/s}.)$$

2. Podatki:  $v = 30$  m/s,  $v_0 = 5$  m/s,  $k = 0,05$ ,  $\rho = 1,3$  kg/m<sup>3</sup>,  $l = 5$  cm,  $m = 300$  g,  $t_0 = 8$  s. ( $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>).

Če na kocko ne pihamo, se kocka giblje enakomerno pojemajoče s pojemkom  $a_0 = kg = 0,5$  m/s<sup>2</sup>. Pri pihanju je sila curka ves čas pravokotna na smer gibanja, zato se poveča le pravokotna sila podlage  $F_p = mg + \Phi_m v = mg + \rho l^2 v^2$ . Pojemek je potem enak

$$a = \frac{kF_p}{m} = a_0 + \frac{k\rho l^2 v^2}{m} = 1,0 \text{ m/s}^2.$$

Kocka se najprej do časa  $t$  ustavlja s pojemkom  $a$ , ko sušilec izključimo, pa se giblje s pojemkom  $a_0$ , dokler ob času  $t_0$  njena hitrost ne pade na 0:  $v_0 - at - a_0(t_0 - t) = 0$ . Od tod dobimo

$$t = (v_0 - a_0 t_0) / (a - a_0) = 2,0 \text{ s}.$$

3. Pri gibanju točkastega telesa se ohranja vsota kinetične in potencialne energije, saj je sila vrvice pravokotna na tir in ne opravlja dela. Če potencialno energijo štejemo od zgornje lege, velja

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \varphi.$$

Od tod izrazimo  $v^2 = 2lg \cos \varphi$ .

Navpična komponenta hitrosti najprej narašča, nato pa se prične zmanjševati in doseže 0 v mirovni legi. V trenutku, ko doseže največjo vrednost, spremeni navpična komponenta pospeška predznak, torej je v tistem hipu enaka 0. Tedaj je vsota navpičnih komponent sil, ki delujejo na telo, enaka 0:

$$-mg + F_v \cos \varphi = 0,$$

če je  $\varphi$  kot med navpičnico in vrvice. Iz Newtonovega zakona za kroženje

$$m \frac{v^2}{l} = F_v - mg \cos \varphi$$

izrazimo silo vrvice

$$F_v = m \frac{v^2}{l} + mg \cos \varphi = 3mg \cos \varphi.$$

Vstavimo jo v pogoj za ravnovesje navpičnih komponent sil in dobimo

$$mg = 3mg \cos^2 \varphi, \quad \text{torej} \quad \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = 55^\circ.$$

### Skupina C

1. Podatki:  $U_g = 1,50 \text{ V}$ ,  $R_n = 2,50 \Omega$ ,  $R = 1,00 \Omega$ .

Tok, ki teče v vezju, je enak  $I = U_g / (R_n + R')$ , če z  $R'$  označimo nadomestni upor vezja, ki ga sestavljajo zunanji uporniki. Moč, ki se

troši na vezju, je potem enaka

$$P = I^2 R' = \frac{U_g^2 R'}{(R_n + R')^2}.$$

Največjo moč poiščemo tako, da pregledamo vse možne kombinacije položajev stikal in za vsako izračunamo nadomestni upor in moč:

| stikalo S <sub>1</sub> | stikalo S <sub>2</sub> | stikalo S <sub>3</sub> | R' [Ω] | P [W] |
|------------------------|------------------------|------------------------|--------|-------|
| sklenjeno              | nesklenjeno            | –                      | 1,00   | 0,184 |
| sklenjeno              | sklenjeno              | nesklenjeno            | 0,75   | 0,160 |
| sklenjeno              | sklenjeno              | sklenjeno              | 0,71   | 0,156 |
| nesklenjeno            | sklenjeno              | nesklenjeno            | 3,00   | 0,223 |
| nesklenjeno            | sklenjeno              | sklenjeno              | 2,50   | 0,225 |

Največja moč je torej pri zadnjem položaju stikal. (Da dobimo pravilni položaj stikal, največje moči pravzaprav niti ni potrebno računati.)

2. Podatki:  $s = 20$  m,  $2r = 0,5$  m,  $l = 1$  cm,  $m = 10$  g,  $I = 1$  MA,  $I' = \frac{1}{10} I$ .

Privzamemo, da je v reži med vodnikoma homogeno magnetno polje. K magnetnemu polju med vodnikoma prispevata oba vodnika,  $B \approx 2\mu_0 I / 2\pi r$ . Sila, ki deluje na izstrelek, je  $F = I'lB = IlB/10 \approx \mu_0 I^2 l / 10\pi r$ . Pospešek je potem  $a = F/m$  in hitrost na koncu

$$v = \sqrt{2as} \approx \sqrt{\frac{2\mu_0 I I' l s}{\pi r m}} \approx \sqrt{\frac{\mu_0 I^2 l s}{5\pi r m}} \approx 2,5 \text{ km/s}.$$

3. Podatki:  $r = 5$  cm,  $d = 0,1$  mm,  $D = 2$  cm,  $m = 1$  g,  $U = 20$  V,  $\zeta = 1 \cdot 10^{-3}$  Ωm,  $\lambda = 2$  W/mK,  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $p_0 = 10^5$  N/m<sup>2</sup>,  $M = 29$  kg/kmol,  $R = 8300$  J/kmolK.

- a) Začetno višino bata izračunamo iz splošne plinske enačbe  $p_0 V_0 = mRT_0/M$ ,  $V_0 = \pi r^2 h_0$ . Dobimo  $h_0 = mRT_0 / M p_0 \pi r^2 = 10,6$  cm. Tok teče skozi vodnik z dolžino  $h_0$  in prečnim presekom  $S = 2\pi r d$ :  $I = U/R = 2\pi r d U / \zeta h_0 = 5,9$  A.
- b) Zaradi segrevanja plašča se segreva plin. Temperatura narašča toliko časa, dokler ni električna moč enaka toplotnemu toku, ki se prevaja skozi zgornjo in spodnjo ploskev

$$2\pi r^2 \lambda \frac{T - T_0}{D} = \frac{U^2}{R} = 2\pi r d U^2 / \zeta h,$$

če je  $h$  nova ravnovesna lega in velja  $V/T = V_0/T_0$ ,  $V = \pi r^2 h$ ,  $T = hT_0/h_0$ . Izraz za  $T$  vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo kvadratno enačbo za ravnovesno višino  $h$ :

$$h^2 - h_0 h = \frac{U^2 D d h_0}{\zeta \lambda T_0 r},$$

s smiselno rešitvijo  $h = 13$  cm.

## Skupina D

1. Podatki:  $m = 75$  kg,  $F = 600$  kN,  $S = 200$  cm<sup>2</sup>,  $h_0 = 7,5$  cm,  $\kappa = 1,4$ ,  $p_0 = 10^5$  N/m<sup>2</sup>.

Pri adiabatnem stiskanju velja  $pV^\kappa = p_0V_0^\kappa$ , če je  $p$  končni tlak,  $V$  končna prostornina amortizerja in  $V_0 = Sh_0$ . Končni tlak je povezan z največjo dopustno silo:  $p = F/S$ . Pri doskoku se potencialna energija Bonda spremeni v notranjo energijo plina  $mgh = \Delta W_n = 2m'c_v(T - T_0) = 2m'[R/M(\kappa - 1)](T - T_0)$ , pri čemer je  $m'$  masa zraka v enem amortizerju,  $T$  končna in  $T_0$  začetna temperatura zraka v amortizerju; 2 gre na račun dveh amortizerjev. Temperaturi izrazimo iz splošne plinske enačbe in dobimo  $mgh = 2(pV - p_0V_0)/(\kappa - 1) = 2p_0Sh_0((p/p_0)(V/V_0) - 1)/(\kappa - 1)$ . Razmerje prostornin nadomestimo z razmerjem tlakov iz enačbe za adiabatno, vstavimo  $p = F/S$  in dobimo

$$h = \frac{2p_0Sh_0}{mg(\kappa - 1)} \left[ \left( \frac{F}{Sp_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = 4,2 \text{ m}.$$

2. Podatki:  $a = 1,2$  m,  $m = 20$  kg,  $t = 6$  s,  $m' = 0,3$  kg,  $l = 70$  cm,  $\varphi = \pi$ ,  $\vartheta = 2^\circ$ .

a) Navor teže na vrata izračunamo iz Newtonovega zakona za vrtenje:  $M = J\alpha$ . Kotni pospešek dobimo iz časa, potrebnega, da se vrata zasučejo za kot  $\varphi$ :  $\alpha = 2\varphi/t^2$ , vztrajnostni moment vrat pa je tolikšen kot pri vrtenju palice okoli krajišča  $J = \frac{1}{3}ma^2$ . Navor, s katerim utež deluje na vrata, uravnovesi navor teže  $k_l m' gl = M = 2ma^2\varphi/3t^2$ , torej mora biti najmanjši koeficient lepenja enak

$$k_l = \frac{2ma^2\varphi}{3m'gl t^2} = 0,4.$$

- b) Težišče vrat se giblje po krožnici z radijem  $a/2$ , ki leži v ravnini, ki je za kot  $\vartheta$  nagnjena glede na vodoravno ravnino. Ko se vrata zasučejo za kot  $\varphi$  iz mirovne lege, se težišče dvigne za  $\Delta h = \frac{1}{2}a(1 - \cos \varphi) \sin \vartheta$ <sup>1</sup>. Potencialna energija se pri tem poveča za  $W_p = mg\Delta h \approx \frac{1}{4}mga\varphi^2 \sin \vartheta$ , če je  $\varphi$  dovolj majhen<sup>2</sup>. Kinetično energijo v trenutku, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego, zapišemo kot  $\frac{1}{2}J\omega^2$ , če je  $\omega$  kotna hitrost v tem trenutku. Kotno hitrost izrazimo s krožno frekvenco nihanja  $\omega_0$  kot  $\omega = \omega_0\varphi$ . Pri sinusnem nihanju velja, da je največja potencialna energija enaka največji kinetični energiji:  $\frac{1}{4}mga\varphi^2 \sin \vartheta = \frac{1}{2}J\omega_0^2\varphi^2$ . Vstavimo izraz za vztrajnostni moment vrat in za nihajni čas končno dobimo

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g \sin \vartheta}} = 9,6 \text{ s}.$$

3. Podatki:  $v_0 = 6 \text{ m/s}$ ,  $\nu = 52,1 \text{ kHz}$ ,  $c_z = 340 \text{ m/s}$ ,  $c_v = 1450 \text{ m/s}$ ,  $\beta = 12^\circ$ .

Zvok, ki ga oddaja delfin, se pri prehodu iz vode v zrak lomi in velja  $\sin \beta / \sin \alpha = c_z / c_v$ , če je  $\alpha$  kot med smerjo zvoka v vodi in pravokotnico na morsko gladino. Frekvenca zvoka ( $\nu_0$ ), ki ga oddaja delfin, se zaradi Dopplerjevega pojava poveča  $\nu = \nu_0 / (1 - v' / c_v)$ , kjer je  $v'$  projekcija hitrosti delfina na smer oddajanja zvoka  $v' = v_0 \cos \vartheta$ . Tu je  $\vartheta$  kot proti vodoravnici in zato komplementaren kotu  $\alpha$ . Dobimo

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \nu \left( 1 - \frac{v_0 \cos(\pi - \alpha)}{c_v} \right) = \nu \left( 1 - \frac{v_0 \sin \alpha}{c_v} \right) = \\ &= \nu \left( 1 - \frac{v_0 \sin \beta}{c_z} \right) = 51,9 \text{ kHz}. \end{aligned}$$

Bojan Golli

<sup>1</sup> To najlažje vidimo, če narišemo krožnico v tlorisu in stranskem risu. Potegnemo zveznico iz ravnovesne lege do središča kroga. Na stranskem risu v ravnini, ki jo tvorita os vrtenja in zveznica, se težišče giblje po daljici, ki je za kot  $\vartheta$  nagnjena proti vodoravnici. Iz tlorisa vidimo, da je projekcija odmika iz ravnovesne lege na zveznico enaka  $d = \frac{1}{2}a(1 - \cos \varphi)$ , iz stranskega risa pa ugotovimo, da se pri tem točka dvigne za  $d \sin \vartheta$ .

<sup>2</sup> Velja namreč  $1 - \cos \varphi = 2 \sin(\varphi/2)^2 \approx 2(\varphi/2)^2$ .

## 20. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – pomladanski krog – Rešitve s str. 125

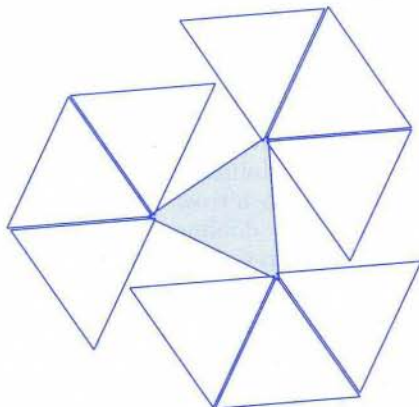
### Prva skupina

- Označimo očetovo hitrost z  $u$  in sinovo z  $v$  ( $u > v$ ). Ko drsata v isti smeri, je relativna očetova hitrost glede na sina enaka  $u - v$ , torej je interval med dvema zaporednima srečanjema  $\frac{1}{u-v}$ . Ko pa drsata v nasprotni smeri, je relativna hitrost  $u + v$  in dolžina tega intervala  $\frac{1}{u+v}$ . Iz enakosti  $\frac{5}{u+v} = \frac{1}{u-v}$  dobimo  $\frac{u}{v} = \frac{3}{2}$ .
- Simetrala notranjega kota pri  $C$  naj seka daljico  $DE$  v točki  $F$ , daljico  $CF$  in  $AB$  pa naj se sekata v točki  $G$ . Torej je  $\frac{|AG|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{3}$ . Označimo središče kvadrata  $ABDE$  z  $O$ . Štirikotnik  $AOBC$  je tetivni, saj je  $\angle ACB = \angle BOA = \frac{\pi}{2}$ . Ker simetrala notranjega kota pri  $C$  trikotnika  $ABC$  seka njegovo očrtano krožnico v razpolovišču tistega loka  $\widehat{AB}$ , ki ne vsebuje točke  $C$ , in je  $|AO| = |BO|$ , leži točka  $O$  na notranji simetrali kota  $\angle ACB$ . Zaradi simetrije v kvadratu  $ABDE$  nazadnje sklepamo  $\frac{|DF|}{|BF|} = \frac{|AG|}{|BG|} = \frac{1}{3}$ .
- V  $i$ -ti stolpec narišemo  $a_i$  pik. Tako imamo v prvi vrstici  $b_0$  pik, v drugi  $b_1, \dots$ . Če zavrtimo diagram za  $90^\circ$ , dobimo diagram, ki pripada številom  $b_0, b_1, \dots$ . Če zavrtimo novi diagram za  $90^\circ$ , dobimo diagram, ki pripada številom  $c_0, c_1, \dots$  in je ekvivalenten prvotnemu diagramu. Torej so števila na prvi in tretji tabli enaka.
- Ker je površina sira  $600\text{cm}^2$ , se folije nikjer ne smejo prekrivati. Ker folije niso enako velike, je vsaj ena večja od  $100\text{cm}^2$ . Te folije ne moremo postaviti na sir, ne da bi se dela folije prekrivala. Torej lahko z gotovostjo trdimo, da sira ne moremo pokriti s folijami.
- Naj bo ena od stranic kvadrata razdeljena na daljice dolžin  $a_1, \dots, a_{10}$  in druga na daljice dolžin  $b_1, \dots, b_{10}$ . Predpostavimo, da nobena dva med 9-imi kvadrati nista skladna. Torej so stranice teh 9-ih kvadratov 9 različnih števil izmed  $a_1, \dots, a_{10}$  in prav tako 9 različnih števil izmed  $b_1, \dots, b_{10}$ . Torej mora biti tisti del ene stranice, ki ne pripada nobenemu kvadratu, enak tistemu delu druge stranice, ki ne pripada nobenemu kvadratu. Slednje pa ni možno, saj bi tako imeli v mreži tako vsaj 10 kvadratkov.

### Druga skupina

- Označimo  $i$ -to število z  $a_i$ . Iz enakosti  $a_2 = a_1 + a_3$  in  $a_3 = a_2 + a_4$  sledi  $a_1 + a_4 = 0$ . Podobno dobimo enakost  $a_4 + a_7 = 0$ , torej je  $a_1 = a_7$ . Sledi  $a_{1999} = a_{1993} = \dots = a_1 = 1$ .
- Glej rešitev 2. naloge za prvo skupino.

3. Glej rešitev 3. naloge za prvo skupino.
4. Devet trikotnikov lahko položimo, kot kaže spodnja slika.



5. Tabelo pokrijemo s 40 dominami (eno polje ostane nepokrito), kot kaže slika. Prvi igralec najprej vriše znak na nepokrito polje. V nadaljevanju pa za vsako nasprotnikovo potezo dopolni domino. S tem bo prvi igralec imel več svojih znakov v prvem stolpcu in natanko v enem od vsakega nadaljnega para stolpcev, prav tako kot v prvi vrstici in natanko v eni od vsakega nadaljnega para vrstic. Tako si zagotovi, da je vrednost  $B$  vsaj 2.

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Drugi igralec igra tako, da vsakič dopolni začeto domino prvega igralca. Če to ni možno, igra na celo domino. S tem si zagotovi, da ima na vsaki domini natanko en znak, torej, da vrednost  $B$  ne presega 2. Tako smo pokazali, da je vrednost  $B$  enaka 2.

### Rešitve drugega dela pomladanskega kroga.

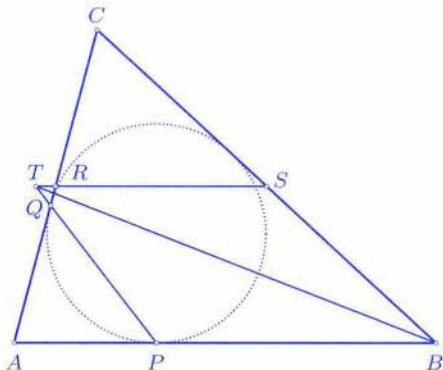
#### Prva skupina

1. Ko naredi prvi igralec  $(1000 + i)$ -to potezo, si drugi igralec ogleda  $(1000 + i)$ -to ter  $(1000 - i)$ -to številko. Če sta enaki, ju zamenja. Če ne, zamenja 1000-o številko z eno izmed zgoraj omenjenih, ki se razlikuje od nje. S tem zagotovi, da sta  $(1000 + i)$ -ta in  $(1000 - i)$ -ta številka enaki. Tako bo po zadnji potezi število na papirju simetrično.

2. Če je  $ABC$  enakokraki trikotnik z vrhom  $B$ , točki  $Q$  in  $R$  sovpadata, zato je tudi  $T = R = Q$ . V nadaljevanju bomo dokazali trditev naloge, če je  $|BC| > |AB|$ . Primer  $|BC| < |AB|$  dokažemo podobno in ga prepustimo bralcu v razmislek.

Računajmo  $|QR| = |AR| - |AQ| = \frac{|AC|}{2} - \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = \frac{|BC| - |AB|}{2}$ .

Trikotnik  $APQ$  je enakokrak z vrhom  $A$ , zato je  $\sphericalangle QPA = \sphericalangle AQP = \sphericalangle RQT$ . Ker pa je  $RS \parallel AB$ , je tudi  $\sphericalangle QTR = \sphericalangle QPA$ . Torej je  $|TR| = |QR|$  in  $|TS| = |TR| + |RS| = \frac{|BC| - |AB|}{2} + \frac{|AB|}{2} = \frac{|BC|}{2} = |BS|$ . Trikotnik  $BST$  je torej enakokrak s kotom  $\frac{1}{2}\sphericalangle TSC = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$  ob osnovnici  $BT$ , kar pomeni, da je  $BT$  res simetrala kota  $\sphericalangle ABC$ .



### Druga skupina

1. Ker sta števili  $x^3 + y$  ter  $y^3 + x$  deljivi s številom  $x^2 + y^2$ , sta si števili  $x$  in  $y$  tuji, zato sta si tuji tudi števili  $x^2 + y^2$  in  $xy$ . Število  $x(x^3 + y) + y(y^3 + x) = x^4 + y^4 + 2xy$  je deljivo z  $x^2 + y^2$ , zato je tudi število  $(x^2 + y^2)^2 - x^4 - y^4 - 2xy = 2xy(xy - 1)$  deljivo z  $x^2 + y^2$ . Torej je  $2(xy - 1)$  deljivo z  $x^2 + y^2$ .

Naj bo  $xy > 0$ . Ker število  $x^2 + y^2$  deli  $2(xy - 1)$ , sledi  $2(xy - 1) \geq x^2 + y^2$  ali pa  $xy - 1 = 0$ . Iz neenakosti  $2(xy - 1) \geq x^2 + y^2$  sledi  $0 \geq (x - y)^2 + 2$ , kar ni možno. Zato je  $xy = 1$ , kar nam da dve rešitvi  $x = y = 1$  in  $x = y = -1$ .

Naj bo  $xy < 0$ . Sedaj velja  $-2(xy - 1) \geq x^2 + y^2$ , torej  $(x + y)^2 \leq 2$ . Zato je  $x + y$  enako 0, 1 ali -1. Če je  $x + y = 0$ , je  $x = 1$  in  $y = -1$  ali pa  $x = -1$  in  $y = 1$ . Če je  $x + y = 1$ , je število  $2(xy - 1) = 2x^2 - 2x + 2$  deljivo z  $x^2 + y^2 = 2x^2 - 2x + 1$ . To velja le v primeru, ko je  $2x^2 - 2x + 2 = \pm 1$ . Od tod sledi, da je  $x = 0$  ali  $x = 1$ . To ni možno, saj smo predpostavili  $xy < 0$ . Če pa je  $x + y = -1$ , je število  $2(xy - 1) = 2x^2 + 2x + 2$  deljivo z  $x^2 + y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ , kar podobno kot v prejšnjem primeru pripelje do protislovja.

Naj bo  $xy = 0$ . Tedaj je  $x = 0$  in  $y = \pm 1$  ali pa  $y = 0$  in  $x = \pm 1$ .

Vse rešitve so torej  $(\pm 1, \pm 1)$ ,  $(0, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0)$ .

2.a) Če sta zadnji dve števki binarnega zapisa števila  $i$  enaki 01, je  $M(i) = M(i+1)$ . Torej obstaja vsaj  $\left[\frac{1000}{4}\right] = 250$  števil, za katera je  $M(i) = M(i+1)$ . Podobno velja za števila, ki imajo v binarnem zapisu zadnje štiri števke 0111. Takih števil je  $\left[\frac{1000}{16}\right] = 62$  in so različna od zgoraj omenjenih. Podobno najdemo še  $\left[\frac{1000}{64}\right] = 15$  števil z zahtevano lastnostjo, katerih binarni zapis se konča z 011111. Torej je v zaporedju obstaja vsaj  $250 + 62 + 15 = 327$  členov, ki so enaki svojemu nasledniku.

b) Če so zadnje štiri števke binarnega zapisa števila  $i$  enake 0001, 0011, 0100, 0101 ali 0111, je  $M(i) = M(i+7)$ . Če je zadnjih pet števk binarnega zapisa števila  $i$  enakih 01010 ali 01110, je  $M(i) = M(i+7)$ . Če je zadnjih šest števk 011001, 011011, 011100, 011101 ali 011111 ali pa zadnjih sedem 0111010 ali 0111110, je  $M(i) = M(i+7)$ . Podobno nadaljujemo in dobimo za zadnjih 8 števk pet možnosti, za zadnjih devet dve, ... Torej obstaja vsaj

$$5\left[\frac{10^6}{16}\right] + 2\left[\frac{10^6}{32}\right] + 5\left[\frac{10^6}{64}\right] + 2\left[\frac{10^6}{128}\right] + \dots + 5\left[\frac{10^6}{2^{18}}\right] + 2\left[\frac{10^6}{2^{19}}\right] = 499976$$

členov, za katere je  $M(i) = M(i+7)$ .

*Aleš Vavpetič*

### PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
27. letnik, šolsko leto 1999/2000, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1999/2000 je za posamezne naročnike **2.000 SIT**, za skupinska naročila šol **1.650 SIT**, posamezna številka **400 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 2000 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1395

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Brv v obliki strehe v Portorožu je trdnjša in manj ovira plovbo po kanalu.



Železniški most čez Ljubljanico v Zalogu pri Ljubljani.

