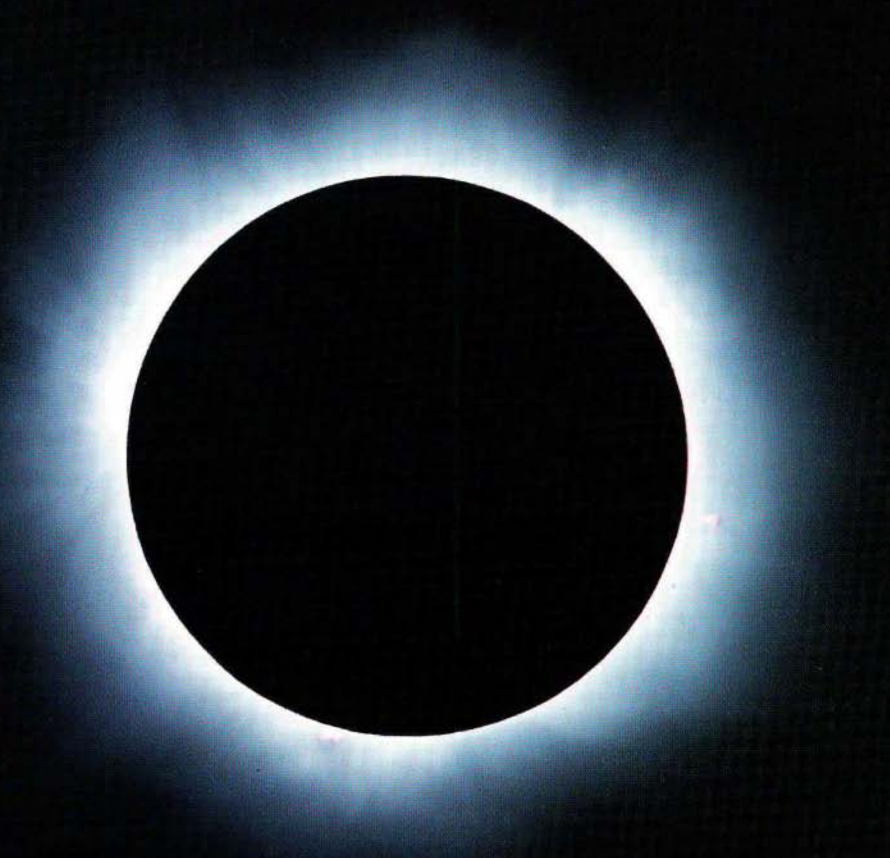
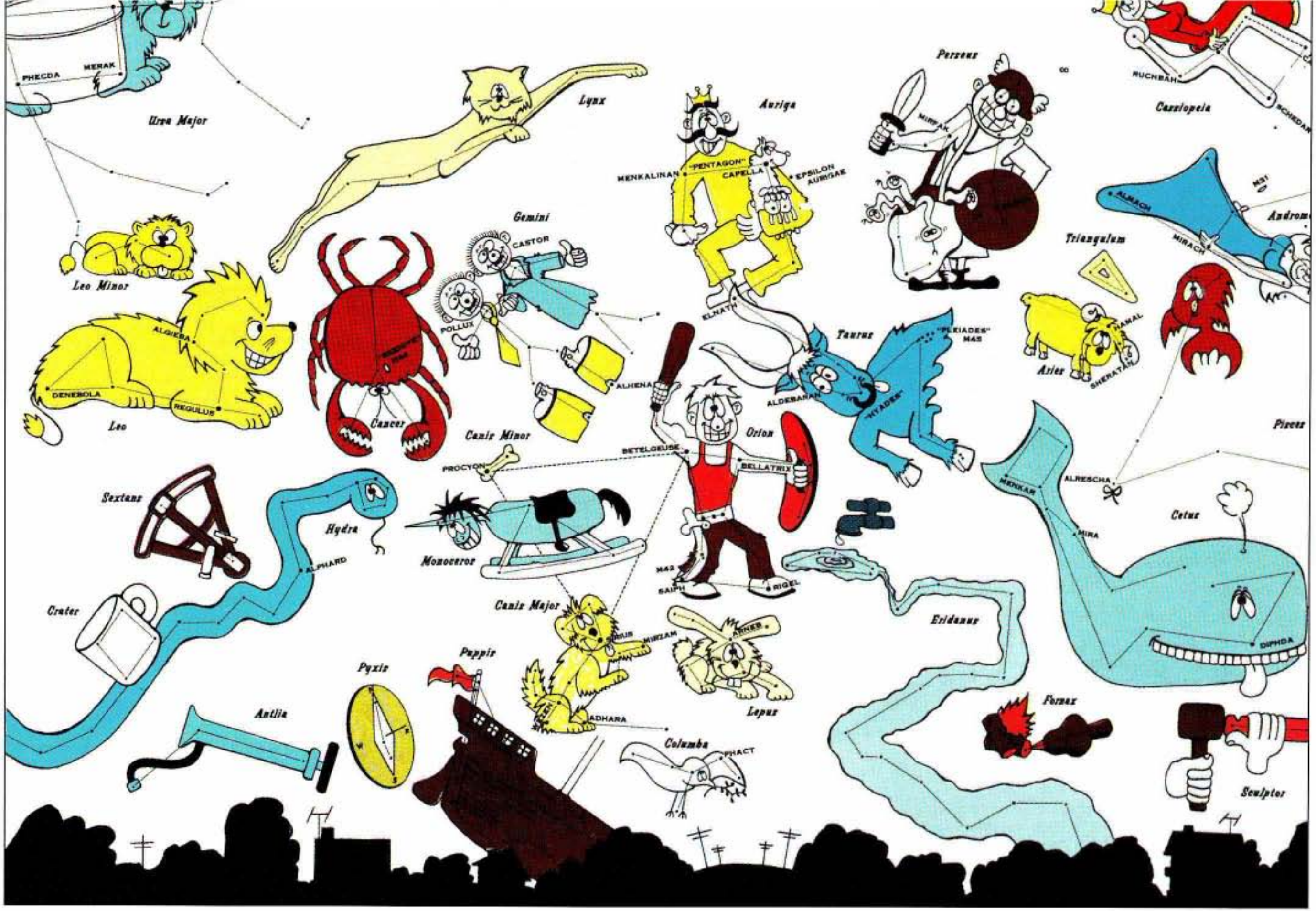
PRESEK

27 (1999-2000) 2



ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



SPOMLADANSKO NEBO

ZIMSKO NEBO

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, leto 1999/2000, številka 2, strani 65–128

VSEBINA

OZVEZDJA NEKOLIKO DRUGAČE

Z malo domišljije lahko svetlejše zvezde povežemo v različne podobe ali skupine, ki jim rečemo *ozvezdja*. Ozvezdja gleda človek že tisočletja. Često so nastala kot spomin na mitološka bitja, znamenite ljudi, razne živali in predmete. Ozvezdja so skoraj vedno prve stvari, s katerimi se začetnik spoznava na nebu.

V želji, da bi ozvezdja čim bolj približal mladim, se je Georg Reed, profesor astronomije iz Pensilvanije (ZDA) pred leti odločil, da na svojevrsten način prikaže ozvezdja. Narisal je "nebesno risanko", ki jo objavljamo na notranjih straneh ovitka. Kako mu je uspela, pa presodite sami.

Tolmač za zimsko in spomladansko nebo (II. stran ovitka)

Ursa Mayor – Veliki medved; Cassiopeia – Kasiopeja; Auriga – Voznik; Perseus – Perzej; Leo minor – Mali lev; Leo – Lev; Cancer – Rak; Gemini – Dvojčka; Taurus – Bik; Aries – Oven; Sextans – Sekstant; Triangulum – Trikotnik; Hydra – Vodna kača; Monoceros – Samorog; Canis Minor – Mali pes; Canis Major – Veliki pes; Lepus – Zajec; Eridanus – Eridan; Pisces – Ribi; Cetus – Kit; Crater – Čaša; Antila – Zračna črpalka; Pyxis – Kompas; Puppis – Krma; Columba – Golob; Fornax – Peč; Sculptor – Kipar.

Tolmač za poletno in jesensko nebo (III. stran ovitka)

Lacerta – Kuščarica; Cepheus – Kefej; Draco – Zmaj; Ursa Major – Veliki medved; Cygnus – Labod; Lyra – Lira; Hercules – Herkul; Corona Borealis – Severna krona; Canes Venatici – Lovski psi; Pegasus – Pegaz; Delphinus – Delfin; Vulpecula – Lisička; Coma Berenices – Berenikini kodri; Bootes – Volar; Equuleus – Žrebiček; Sagitta – Puščica; Serpens Cauda – Kačji rep; Serpens Caput – Kačja glava; Ophiuchus – Kačenosec; Virgo – Devica; Aquarius – Vodnar; Aquila – Orel; Scutum – Ščit; Libra – Tehtnica; Corvus – Krokar; Capricornus – Kozorog; Piscis Austrinus – Južna riba; Microscopium – Mikroskop; Sagittarius – Strelec; Scorpius – Škorpijon; Hydra – Vodna kača; Corona Australis – Južna krona.

Marijan Prosén

STAŁIMO SNEG!

Znancu v Ljubljani je začelo presedati kidanje snega pred hišo. Domislil se je sijajne ideje: čemu bi kidal, naj elektrika stali sneg. Napeljal je grelni kabel v tla in res so mu sosedje zavidali, saj je imel vedno suho in čisto pot, tudi če je vso noč snežilo. Poskusite izračunati moč take grelne naprave, če želimo staliti v 10 urah 0.5 m debelo snežno odejo, ki vsebuje 50 l vode na kvadratni meter. Upoštevajte, da je dolžina 4 m široke dovozne poti 10 m. Koliko znaša račun za električno energijo vso zimo za taljenje snega, če zapade pozimi v obliki snega 20 % vseh letnih padavin?

Andrej Likar

KOLIKO IGER?

Matic in Brane rada igrata damo. Da je bolj napeto, včasih pred igro vložita vsak majhen znesek; vloženo po igri pripade zmagovalcu.

Ob pogledu na šahovnico je zadnjič prišla Branetu na misel legenda o izumitelju šaha (in zahtevani žitni nagradi), pa je predlagal Maticu: "Kaj, ko bi danes igrala drugače? Tisti, ki izgubi prvo igro, da zmagovalcu 1 tolar, kdor izgubi drugo igro, plača 2 tolarja, zmagovalec tretje igre dobi 4 tolarje itd. Pri vsaki naslednji igri se plačilo za izgubljeno igro podvoji."

"Prav", je pristal Matic. "Vidim, da imaš ti kar nekaj denarja, sam pa premorem le 731 tolarjev, torej utegnem bankrotirati pred tabo. Vendar v nobenem primeru ne bom igral več kakor deset iger."

Začela sta igrati, igrala igro za igro, si plačevala, kot sta se domenila, in čez čas je Matic res bankrotiral. Po zadnji igri je moral Branetu plačati do tolarja natanko toliko, kolikor je imel denarja.

Koliko iger sta igrala in katere igre je Matic dobil, če sploh je kakšno?

Marija Vencelj

ABBCCC

Razpoznavanje nizov izbranih oblik je programerska naloga, ki jo v taki ali drugačni preobleki pogosto srečamo. Tokrat si bomo za vajo ogledali preprost šolski primer takega problema.

Vaša naloga je, da napišete podprogram za prepoznavanje nizov, ki jih dobimo kot stik enega ali več nizov oblike $\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k$, kjer je $1 \leq i \leq j \leq k$. Pri tem x^n pomeni n zaporednih znakov x ($x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$). Nizi, ki jih želimo razpoznati, so torej sestavljeni le iz znakov `a`, `b` in `c`. Podnizi, ki jih stikamo skupaj, pa so zgrajeni iz enega ali več `a`-jev, ki jim sledi vsaj toliko `b`-jev, tem pa vsaj toliko `c`-jev. Na primer, nizi `abc`, `abbccc` in `abccabbcc` so pravilne oblike, niza `abcbc` in `aabbc` pa ne.

Martin Juvan

ENOBARVNA KOCKA

Koliko najmanj mora biti dolg 3 cm širok trak papirja, ki je na eni strani bel in na drugi moder, da bomo lahko samo s prepogibanjem iz njega oblikovali kocko z robom 3 cm, ki bo imela vse mejne ploskve modre?

S koliko najmanj dolgim trakom lahko rešimo nalogo, če so mejne ploskve lahko različnih barv?

Najmanj kolikokrat moramo trak prerezati, da bo za enobarvno kocko zadoščala dolžina šestih robov kocke?

Marija Vencelj

KATERA PRAŠTEVILA SO VSOTE DVEH KVADRATOV NARAVNIH ŠTEVIL?

Odgovor na to vprašanje je že dolgo znan. Glasi se takole:

Liho praštevilo p delimo s 4. Če dobimo pri tej delitvi ostanek 1, je p vsota dveh kvadratov, če dobimo ostanek 3, p ni vsota dveh kvadratov.

Edino sodo število 2 je vsota dveh kvadratov: $2 = 1^2 + 1^2$.

Za zgled vzemimo praštevila $13, 23, 29$ in 73. Ker je

$$13 = 4 \cdot 3 + 1, \quad 23 = 4 \cdot 5 + 3, \quad 29 = 4 \cdot 7 + 1 \quad \text{in} \quad 73 = 4 \cdot 18 + 1,$$

dajo števila $13, 29$ in 73 pri delitvi s 4 ostanek 1, število 23 pa ostanek 3. Zato 23 ni vsota dveh kvadratov, $13, 29$ in 73 pa so:

$$13 = 2^2 + 3^2, \quad 28 = 2^2 + 5^2, \quad 73 = 3^2 + 8^2.$$

Dokaz navedene trditve najde bralec v vsaki knjigi, ki obravnava teorijo števil, v našem jeziku v knjigi *Teorija števil*, ki jo je napisal prof. Jože Grasselli.

Pred nekaj leti pa je Don Zagier objavil nov zanimiv dokaz, ki ne zahteva nobenega znanja iz teorije števil, zadostuje srednješolska matematika. Namen tega članka je prikazati njegov dokaz.

Naj bo liho praštevilo p vsota dveh kvadratov, torej

$$p = a^2 + b^2.$$

Tu sta a in b naravni števili. Ker je p lih, je eno izmed njiju liho, drugo sodo. Denimo, da je a liho in b sodo število. Potem lahko pišemo $a = 2k + 1$ in $b = 2l$, kjer sta k in l naravni števili. Enakost

$$p = (2k + 1)^2 + 4l^2 = 4(k^2 + k + l^2) + 1$$

pove, da dobimo ostanek 1, če delimo p s 4. Zato p ni vsota dveh kvadratov, kadar je ta ostanek enak 3.

Naravno število, ki da ostanek 1, če ga delimo s 4, lahko zapišemo v obliki $4n + 1$, kjer je n spet naravno število (n je kvocient pri delitvi s 4).

Naj bo zdaj praštevilo p oblike $p = 4n + 1$. Dokazati moramo, da je vsota dveh kvadratov. V ta namen si oglejmo enačbo

$$x^2 + 4yz = p\,. \tag{1}$$

Zanimajo nas njene rešitve v naravnih številih x, y, z. Ali obstajajo? Obstajajo. Ena je kar $x = 1$, $y = n$, $z = 1$. V splošnem premore enačba (1) več rešitev, toda vselej samo končno mnogo. Naravna števila x, y, z, ki ji zadoščajo, so namreč očitno vsa manjša od p.

Zaznamujmo z M množico vseh trojk (x, y, z) naravnih števil, ki ustrezajo enačbi (1). Množica M je, kakor rečeno, končna. Pri $p = 17$ so na primer v njej tele trojke

$$p = 17: \quad M = \{(1,1,4), (1,2,2), (1,4,1), (3,1,2), (3,2,1)\}\,.$$

Pripomba. Hkrati s trojko (x, y, z) je tudi trojka (x, z, y) v množici M, saj je $p = x^2 + 4yz = x^2 + 4zy$. Če $y \neq z$, štejemo trojko (x, y, z) in (x, z, y) za različni rešitvi enačbe (1), torej različna elementa množice M.

Še tole omenimo: Denimo, da cela števila x, y, z ustrezajo enačbi (1). Nobeno izmed njih ni enako nič. Res. Če bi bil $x = 0$, bi bilo $p = 4yz$; praštevilo p pa ni deljivo s 4. Če pa bi bilo $y = 0$ ali $z = 0$, bi bil $p = x^2$, toda praštevilo p ni kvadrat.

Denimo, da smo na neki način ugotovili, da je število trojk v množici M liho. Povežimo trojke iz M v pare takole: Trojki (x, y, z) priredimo trojko (x, z, y), se pravi trojko, v kateri smo zamenjali zadnji števili. Torej

$$(x, y, z) \rightleftarrows (x, y, z)\,.$$

Ker ima množica M liho število trojk, morata biti vsaj v enem od teh parov trojki med seboj enaki. Toda trojki (x, y, z) in (x, z, y) sta enaki samo tedaj, kadar je $z = y$. Zato je v M vsaj ena trojka oblike (x, y, y). Ker trojke zadoščajo enačbi (1), imamo

$$x^2 + (2y)^2 = p\,.$$

Vidimo, da je p vsota dveh kvadratov (namreč vsota kvadratov naravnih števil x in $2y$), če ima množica M liho število elementov.

Kako bi ugotovili, da je število trojk v množici M vselej liho? Don Zagier je imel tole zamisel: Povežimo trojke iz M v pare na kak drug način, in sicer tako, da bosta trojki v enem in samo enem paru enaki. Če smo tako povezavo našli, je v M liho število trojk.

Zapišimo enačbo (1) v eni izmed naslednjih oblik

$$p = x^2 + 4yz = (x + 2z)^2 + 4z(y - x - z)\,, \tag{2a}$$

$$p = x^2 + 4yz = (x - 2y)^2 + 4(x + z - y)y\,, \tag{2b}$$

$$p = x^2 + 4yz = (2y - x)^2 + 4y(x + z - y)\,. \tag{2c}$$

Enačba (2a) pove, da je hkrati s trojko (x, y, z) tudi trojka celih števil $(x+2z, z, y-x-z)$ rešitev enačbe (1). V trojkah množice M so samo naravna števila, tretje število $y-x-z$ nove trojke pa je negativno, če je $y < x+z$ (kakor vemo, ne more biti enako nič). Zato je trojka $(x+2z, z, y-x-z)$ v množici M le tedaj, kadar je $y > x+z$.

Enačbi (2b) in (2c) pa dasta trojki celih števil $(x-2y, x+z-y, y)$ in $(2y-x, y, x+z-y)$, ki sta rešitvi enačbe (1). Da bosta ti trojki v M, mora biti $y < x+z$. V prvi trojki mora biti tudi $x > 2y$, v drugi $x < 2y$.

Razdelimo zdaj M na tri podmnožice takole

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y, z) \in M\,, \quad x+z < y\}\,, \\ M_2 &= \{(x, y, z) \in M\,, \quad x+z > y \text{ in } x > 2y\}\,, \\ M_3 &= \{(x, y, z) \in M\,, \quad x+z > y \text{ in } x < 2y\}\,. \end{aligned}$$

Očitno je vsaka trojka množice M v eni in le eni izmed navedenih množic. To se pravi, da je M unija treh disjunktnih množic M_1, M_2, M_3, torej $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

Če je trojka (x, y, z) v M_1, je trojka $(x+2z, z, y-x-z)$ v množici M, ker je $y-x-z > 0$. Kateri izmed množic M_1, M_2, M_3 pripada? Pišimo

$$x+2z = x', \quad z = y', \quad y-x-z = z'.$$

Preprost račun pokaže, da je

$$x'-2y' = x > 0, \quad x'+z'-y' = y > 0 \quad \text{in} \quad y' = z > 0\,. \qquad (*)$$

Od tod dobimo $x' > 2y'$ in $y' < x'+z'$. Zato je trojka (x', y', z') v M_2.

S podobnim računom ugotovimo, da je trojka $(x-2y, x+z-y, y)$ v M_1, če je trojka (x, y, z) v M_2.

Videli smo, da je trojka $x' = x+2z$, $y' = z$, $z' = y-x-z$ v M_2, kadar je (x, y, z) v M_1. Zato je trojki (x', y', z') pripadajoča trojka $(x'-2y', x'+z'-y', y')$ v M_1. Enačbe $(*)$ povedo, da je ta trojka enaka začetni trojki (x, y, z). Podobno se prepričamo, da pridemo nazaj na prvotno trojko, če poljubni trojki (x, y, z) iz množice M_2 priredimo najprej trojko $(z-2y, x+z-y, y)$ v M_1, nsto pa le-tej poiščemo ustrezno trojko v M_2.

Naj bo zdaj trojka (x, y, z) v množici M_3. Potem je trojka $(2y-x, y, x+z-y)$ v množici M. Preprost račun pokaže, da je ta trojka spet v M_3. Pišimo $x' = 2y-x$, $y' = y$, $z' = x+z-y$. Takoj ugotovimo, da je trojki (x', y', z') pripadajoča trojka $(2y'-x', y', x'+z'-y')$ kar enaka prvotni trojki (x, y, z).

Povežimo zdaj trojke iz množice M v pare takole:

trojki $(x, y, z) \in M_1$ priredimo trojko $(x + 2z, z, y - x - z)$ v M_2,
trojki $(x, y, z) \in M_2$ priredimo trojko $(x - 2y, x + z - y, y)$ v M_1,
trojki $(x, y, z) \in M_3$ priredimo trojko $(2y - x, y, x + z - y)$ v M_3.

Iz zgoraj povedanega izhaja tole: Če smo priredili trojki (x, y, z) trojko (x', y', z'), pripada vselej trojki (x', y', z') prvotna trojka (x, y, z). S tem predpisom so torej trojke množice M res povezane v pare.

Ali sta lahko v kakšnem paru trojki enaki? Trojke iz M_1 so povezane s trojkami iz M_2, trojke iz M_2 pa s trojkami iz M_1. Ker M_1 in M_2 nimata skupnih trojk, sta tu v vsakem paru povezani trojki različni. Naj bo zdaj trojka (x, y, z) v M_3. Če se ujema s pripadajočo trojko $(2y-x, y, x+z-y)$, ki je tudi v M_3, mora biti $2y - x = x$, $y = y$ in $x + z - y = z$. Te enačbe so izpolnjene natanko tedaj, kadar je $y = x$, to je pri trojki (x, x, z). Ker je trojka (x, x, z) rešitev enačbe (1), velja

$$x(x + 4z) = p\,. \tag{3}$$

Toda p je praštevilo, x in z pa sta naravni števili in je zato $x + 4z > x$. Edina možnost, da ustrežemo enačbi (3), je ta, da postavimo $x = 1$ in $x + 4z = p$. Od tod imamo $z = (p - 1)/4$. Ker je p oblike $4n + 1$, je kvocient $(p - 1)/4$ enak n, se pravi naravno število. Tako smo ugotovili: Edino trojka $(1, 1, \frac{p-1}{4}) \in M$ se ujema s pripadajočo trojko v paru, v vseh drugih parih sta trojki različni. To pa pomeni, da je v množici M liho število trojk. Ker je bilo p poljubno praštevilo oblike $4n+1$, smo dokazali:

Vsako praštevilo oblike $4n + 1$ je vsota dveh kvadratov.

Na koliko načinov je praštevilo $p = 4n + 1$ izrazljivo z vsoto dveh kvadratov? Če je $p = a^2 + b^2$, kjer sta a in b naravni števili, je tudi $p = b^2 + a^2$. V teh dveh zapisih sta samo sumanda zamenjana. Velja tole:

Če se ne oziramo na vrstni red sumandov, se da praštevilo $p = 4n + 1$ zapisati kot vsota dveh kvadratov samo na en način.

Naravno število je namreč sestavljeno (ni praštevilo), če je na dva različna načina izrazljivo z vsoto dveh kvadratov. Dokaz tega dejstva najde bralec v članku *Kako ugotovimo, da je naravno število sestavljeno, preden ga razstavimo?* Članek je izšel v Preseku, letnik 25 (1997/98), str. 130–136.

Ivan Vidav

ELEKTRONI IN VRZELI V POLPREVODNIKU BREZ PRIMESI

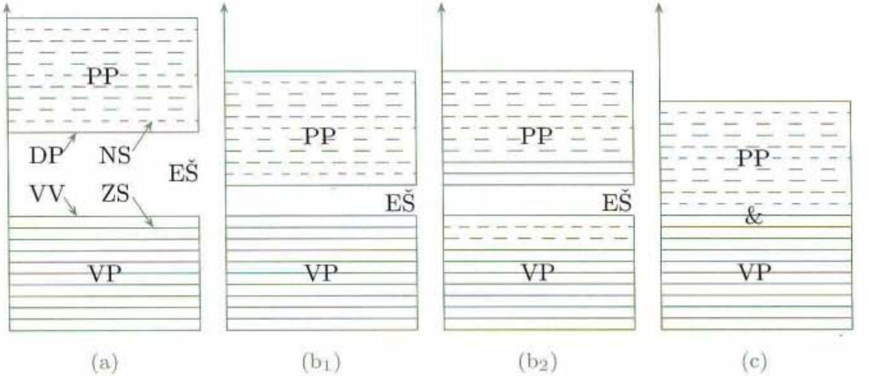
V prvi številki tega letnika smo pojasnili pozitivni Hallov koeficient nekaterih kovin. V ta namen smo se morali precej potruditi in vključiti v razpravo spoznanje, da gibanja elektronov ne moremo opisati, kot opišemo gibanje žog in drugih teles, vidnih s prostim očesom. V okviru kvantne mehanike smo elektronu v kristalu priredili enoelektronsko stanje z določeno energijo. Tako stanje je po Paulijevi prepovedi nezasedeno ali ga zasede kvečjemu en elektron. Enoelektronska stanja sestavljajo energijske pasove. Med energijskimi pasovi so prepovedani pasovi, na katerih ni enoelektronskih stanj. Privzeti smemo, da se v energijskem pasu energija elektrona spreminja v poljubno majhnih korakih, ker so tam enoelektronska stanja gosta. Elektron v kristalu ima lahko, podobno kot elektron v katodni cevi, poljubno energijo, če le ni nižja kot *dno pasu* in ne višja kot *vrh pasu*. V kristalu pa moramo upoštevati, da je na voljo le določeno število enoelektronskih stanj. V energijskem pasu, v katerem so vsa enoelektronska stanja zasedena, elektroni nimajo nobene svobode. Ni namreč nezasedenih enoelektronskih stanj, ki bi jih lahko dosegli z majhno spremembo energije. Vsa enoelektronska stanja v nižjih pasovih so zasedena, za prehod v nezasedena enoelektronska stanja v višjem energijskem pasu pa elektron nima od kod dobiti potrebne energije. V kristalu z zasedenimi energijskimi pasovi ni nosilcev naboja, ki bi lahko potovali in prenašali naboj. Četudi priključimo na kristal elektrodi pod napetostjo, po kristalu ni toka.

Opis zadeva kristal *izolatorja*. Najvišji energijski pas, v katerem so zasedena enoelektronska stanja, *valenčni pas*, je do vrha zaseden. Ime je pas dobil po valenčnih elektronih, ki so v atomu najšibkeje vezani in ki sodelujejo pri kemijskih reakcijah. V naslednjem višjem energijskem pasu, *prevodnem pasu*, pa so vsa enoelektronska stanja nezasedena. Med prevodnim in valenčnim pasom je prepovedani pas, ki mu v tem primeru pravimo *energijska špranja*. Izolator, na primer diamant, ne prevaja elektrike, ker je njegova energijska špranja široka več kot $8 \cdot 10^{-19}$ joula ali 5 elektronvoltov.[1] Elektron v valenčnem pasu v kristalu nima od kod dobiti energije, da bi prešel špranjo. Energijo atomov, ki v kristalu nihajo okoli ravnovesne lege, cenimo pri sobni temperaturi v povprečju na

[1] Elektronvolt, eV, je enota za merjenje energije v svetu atomov in delcev. Delcu z osnovnim nabojem e_0 se v praznem prostoru kinetična energija spremeni za $e_0 \cdot 1\ \mathrm{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As} \cdot 1\ \mathrm{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ joula, ko preleti napetost 1 V.

$4 \cdot 10^{-21}$ joula ali 0,03 elektronvolta. Dno prevodnega pasu je pri 170-krat večji energiji (slika 1a).[2]

Polprevodnik se od izolatorja razlikuje po širini energijske špranje. Silicij ima špranjo s širino približno 1 elektronvolt, germanij pa $\frac{2}{3}$ elektronvolta. Pri zelo nizki temperaturi polprevodnik, na katerega priključimo električno napetost, enako kot izolator ne prevaja (slika 1b).

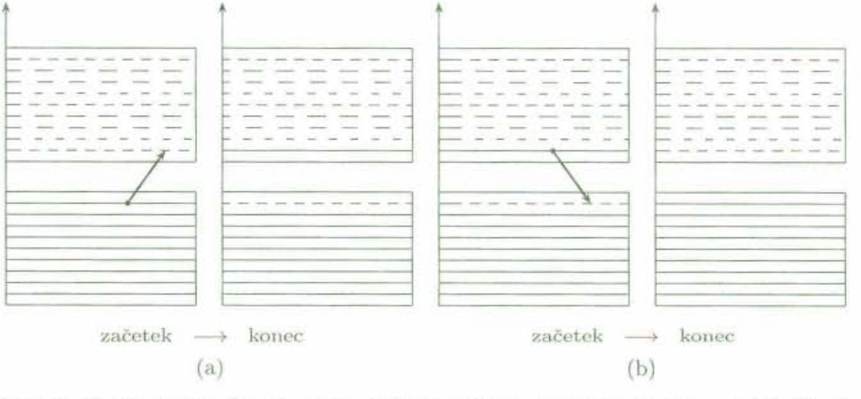


Slika 1. Za izolator je značilna široka energijska špranja (EŠ) med dnom (DP) prevodnega pasu (PP) in vrhom (VV) valenčnega pasu (VP). Na navpično os je nanesena energija elektrona. V valenčnem pasu so vsa enoelektronska stanja zasedena (ZS), v prevodnem pasu pa so vsa enoelektronska stanja nezasedena (NS). Izolator ne prevaja elektrike ne glede na temperaturo. Le pri zelo visoki napetosti lahko v izolatorju pride do *preboja*, podobno kot, na primer, v zraku, ko preskoči iskra (a). Za polprevodnik je značilna precej ožja energijska špranja. Pri zelo nizki temperaturi je tako kot pri izolatorju prevodni pas nezaseden in valenčni pas do vrha zaseden. V tem primeru polprevodnik ne prevaja (b_1). Pri sobni temperaturi majhno število elektronov z vrha valenčnega pasu preide v prevodni pas in zasede enoelektronska stanja ob njegovem dnu. Pod vrhom sicer zasedenega valenčnega pasu preostanejo nezasedena enoelektronska stanja, ki jih opišemo kot vrzeli. Kar je dno prevodnega pasu za prevodniške elektrone, je vrh valenčnega pasu za vrzeli. Pri lastnem prevajanju je v polprevodniku pri sobni temperaturi prav toliko vrzeli kot prevodniših elektronov (b_2). V kovini, ki je dober prevodnik, se prevodni pas pokriva z valenčnim pasom: pas je delno zaseden, na primer do polovice, tako da je v neposredni bližini zasedenih enoelektronskih stanj dovolj nezasedenih enoelektronskih stanj (c).

[2] Elektrone z vrha valenčnega pasu lahko spravimo do dna prevodnega pasu in v višja enoelektronska stanja čez 5 elektronvoltov široko energijsko špranjo, če kristal obsevamo z ultravijolično svetlobo z valovno dolžino, manjšo od 240 nanometrov. Izolator, na katerega je priključena napetost, začne ne glede na temperaturo šibko prevajati, če ga obsevamo z dovolj kratkovalovno svetlobo.

Pri sobni temperaturi pa šibko prevaja. Pri siliciju je širina špranje sicer 33-krat in pri germaniju 22-krat večja kot energija, ki smo jo priredili termičnemu gibanju atomov. A to je povprečna energija in nihajoči atomi ob redkih priložnostih lahko oddajo večjo energijo. Na njen račun zelo redki elektroni z vrha valenčnega pasu preidejo v prevodni pas. Tam lahko kot prevodniški elektroni potujejo po kristalu in prispevajo k toku. Ob dnu prevodnega pasu je namreč veliko nezasedenih enoelektronskih stanj, v katera elektron iz stanja na dnu prevodnega pasu lahko preide zaradi električne sile, če je na kristal priključena napetost.

Za elektroni, ki preidejo v prevodni pas, na vrhu valenčnega pasu ostanejo nezasedna enoelektronska stanja. Posamična nezasedena stanja, v sicer do vrha zasedenem energijskem pasu, smo opisali z vrzelmi. Vrzel smo uvedli kot namišljeni delec v nezasedenem valenčnem pasu in mu priredili pozitivni naboj. Vsak elektron, ki preide v prevodni pas, zapusti v valenčnem pasu vrzel. Zato je število vrzeli enako številu prevodniških elektronov. Vselej nastaneta skupaj prevodniški elektron in vrzel, in to imenujemo *nastanek para* (slika 2a). Par preneha obstajati, ko elektron iz enoelektronskega stanja prevodnega pasu zasede nezasedeno enoelektronsko stanje pod vrhom valenčnega pasu, pri čemer se sprosti energija, ki jo je prej terjal nastanek para. Ta pojav imenujemo *rekombinacija* (slika 2b). V toplotnem ravnovesju v polprevodniku nastane v določenem času toliko parov, kolikor se jih v tem času rekombinira.

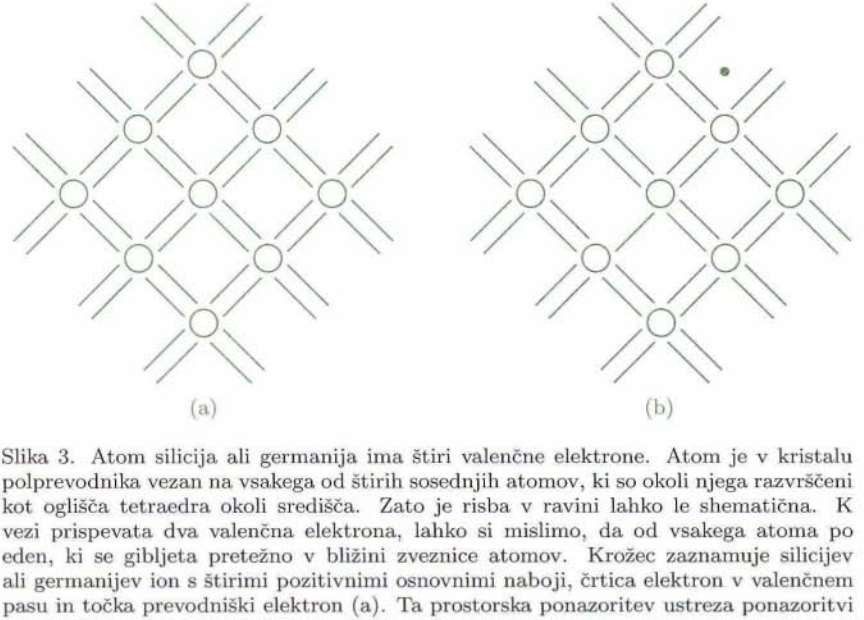


Slika 2. Vrzel nastane skupaj s prevodniškim elektronom ob nastanku para (a). Vrzel preneha obstajati skupaj s prevodniškim elektronom ob rekombinaciji (b).

Vrzeli enako kot prevodniški elektroni prispevajo k toku. V kristalu, na katerega priključimo napetost, prenašajo pozitivni naboj v nasprotni smeri kot prevodniški elektroni prenašajo negativnega. Podobno v kapljevini naboj prenašajo pozitivni in negativni ioni. Za polprevodnik uporabimo malo predelano enačbo, ki smo jo srečali pri toku v kapljevini. Prevodnost $1/\zeta$ sestavimo iz prispevka prevodniških elektronov in vrzeli:

$$\frac{1}{\zeta} = e_0(\beta + \beta_v)\frac{N}{V}\,.$$

Elektron nosi naboj $-e_0$ in vrzel naboj e_0. Gibljivost negativnih ionov smo nadomestili z gibljivostjo prevodniških elektronov β, gibljivost pozitivnih ionov z gibljivostjo vrzeli β_v ter upoštevali, da se gostota vrzeli ujema z gostoto prevodniških elektronov N/V.



Slika 3. Atom silicija ali germanija ima štiri valenčne elektrone. Atom je v kristalu polprevodnika vezan na vsakega od štirih sosednjih atomov, ki so okoli njega razvrščeni kot oglišča tetraedra okoli središča. Zato je risba v ravini lahko le shematična. K vezi prispevata dva valenčna elektrona, lahko si mislimo, da od vsakega atoma po eden, ki se gibljeta pretežno v bližini zveznice atomov. Krožec zaznamuje silicijev ali germanijev ion s štirimi pozitivnimi osnovnimi naboji, črtica elektron v valenčnem pasu in točka prevodniški elektron (a). Ta prostorska ponazoritev ustreza ponazoritvi z enoelektronskimi stanji (b_1) na sliki 1. – Pri sobni temperaturi se pri maloštevilnih atomih eden od valenčnih elektronov sprosti iz vezi in zapusti v njej vrzel. Prej smo rekli, da preide iz valenčnega pasu v prevodni pas. Postane prevodniški elektron, ki potuje po kristalu proti pozitivni elektrodi. Vrzel potuje proti negativni elektrodi tako, da jo po vrsti izpolnjujejo elektroni iz drugih vezi (b). Ta prostorska ponazoritev ustreza ponazoritvi z enoelektronskimi stanji (b_2) na sliki 1.

Gostota nosilcev naboja, to je gostota prevodniških elektronov ali gostota vrzeli N/V, je v germaniju pri sobni temperaturi kakih 10^{10}-krat manjša od gostote prevodniških elektronov v bakru, skupna gibljivost nosilcev naboja v germaniju $\beta_v + \beta$ pa kakih stokrat večja kot gibljivost prevodniških elektronov v bakru. Zato je prevodnost germanija pri sobni temperaturi 0,5 $(\Omega\mathrm{m})^{-1}$ približno stomilijonkrat manjša kot prevodnost bakra $5,9 \cdot 10^7$ $(\Omega\mathrm{m})^{-1}$. Z naraščajočo temperaturo elektroni vse uspešneje prehajajo preko energijske špranje, zato v polprevodniku z naraščajočo temperaturo izrazito naraščata gostota nosilcev naboja in prevodnost. Tudi po tem se polprevodnik razlikuje od kovine, v kateri z naraščajočo temperaturo prevodnost pojema.

Dodajmo še nekaj pripomb. Prva zadeva vprašanje o čistoči polprevodnika. Ne pri kovinah ne pri plinih in ne pri kapljevinah to vprašanje ni bilo tako pomembno. Pri polprevodnikih pa so nečistoče zelo pomembne. S posebnim prijemom so sicer uspeli dobiti zelo čist germanij, vseeno je bila v njem gostota tujih atomov 10^{18} m^{-3}, ob tem ko je velikostna stopnja gostote atomov germanija 10^{28} m^{-3}. V najčistejšem germaniju pride tedaj tuj atom na približno 10^{10} atomov germanija. V takem kristalu v določeni smeri v povprečju na poti $(10^{10})^{1/3} \approx 2000$ razdalj med sosednjima atomoma germanija naletimo na tuj atom. Razmislek nam vzame voljo, da bi govorili o "čistem" polprevodniku. Raje govorimo o *lastnem* ali *notranjem prevajanju*. S tem mislimo na prevajanje, ki ga določajo samo lastnosti polprevodnika in ni odvisno od tujih atomov. Zapisana enačba zadeva samo lastno prevajanje polprevodnika. Podatek za lastno prevodnost smo navedli le za germanij. Silicija za zdaj ni mogoče dobiti tako čistega, da bi lahko pri njem pri sobni temperaturi opazovali lastno prevajanje.

Ustavimo se tudi ob trditvi, da je vrzel namišljen delec. Na elektron v katodni cevi delujeta elektrodi s silo, ki povzroči pospešek. Električno silo poveže s pospeškom masa elektrona $9,1 \cdot 10^{-31}$ kilograma. Na elektron, ki se giblje po kristalu, deluje poleg električne sile zaradi napetosti v prostoru med elektrodama še električna sila po kristalu periodično razporejenih atomov. Slednji se v kristalu ni mogoče izogniti. Zato elektrona v kristalu ne moremo opisati tako, kot opišemo elektron v katodni cevi. Vseeno električno silo zaradi napetosti povežemo s pospeškom elektrona, ne da bi se ozirali na periodično silo atomov. Potezo moramo plačati s tem, da elektronu priredimo *efektivno maso*, ki se razlikuje od mase prostega elektrona v katodni cevi in ki upošteva periodično silo atomov. V tem primeru ni vseeno, v kateri smeri se elektron giblje po kristalu, zato je efektivna masa elektrona v kristalu odvisna od smeri. Efektivna masa prevodniškega elektrona v siliciju je petkrat manjša od mase prostega elektrona in v germaniju desetkrat manjša, če se zadovoljimo z okvirno oceno. Poleg tega je za prevodniški elektron treba uporabiti drugačno enačbo za gibalno količino in za kinetično energijo kot za prost elektron. Do enakega sklepa pridemo tudi pri vrzeli. Vrzeli priredimo efektivno maso, za katero navadno privzamemo, da se približno ujema z efektivno maso prevodniškega elektrona v istem kristalu. Zaradi vsega tega na kratko rečemo, da sta elektron in vrzel *kvazi delca*.

Efektivno maso elektrona v kristalu ponazorimo s kroglico, ki jo potiskamo po vodi. Kroglica deluje na vodo in del vode vleče za seboj. Zato moramo kroglici prirediti "efektivno" maso, če bi njeno gibanje v vodi radi opisali podobno kot gibanje proste kroglice. "Efektivna" masa se razlikuje od mase proste kroglice in zajame tudi maso gibajočega se dela vode. Nekateri namesto kroglice v vodi pomislijo na krta, ki rije po zemlji in jo odriva. Prispodoba je manj posrečena, saj elektron v kristalu nič ne "dela".

Na začetku (v 5. številki 25. letnika Preseka) se pri toku po kovini še nismo ozirali na zgradbo snovi ter smo kovino opisali z negativno tekočino in pozitivno trdnino. Ali je mogoče v tem duhu opisati lastno prevajanje v polprevodniku? Vzemimo, da tudi polprevodnik sestavlja pozitivna trdnina. Proti pozitivni elektrodi se giblje negativna tekočina, katere naboj v vsakem delu polprevodnika izravna naboj trdnine. A kaj potuje proti negativni elektrodi? Pozitivni naboji ne morejo potovati. Ugotovili smo tudi, da vrzeli ne moremo imeti za primanjkljaj elektronov in da jih ne gre primerjati z mehurčki. Po tem sklepamo, da lastnega prevajanja v polprevodniku ne moremo dosledno opisati s starimi predstavami, ki so se spočetka obnesle pri toku po kovini.

Polprevodniki niso postali nenadomestljivi zaradi lastnega prevajanja. Veliko pomembnejše je *primesno prevajanje*, to je prevajanje polprevodnika, ki mu dodamo želeni delež želene *primesi*. O tem pa drugič.

polprevodnik	β	β_v	$\beta + \beta_v$
silicij	0,19 m^2/Vs	0,05 m^2/Vs	0,24 m^2/Vs
germanij	0,38 m^2/Vs	0,18 m^2/Vs	0,56 m^2/Vs

Gibljivost elektronov β, gibljivost vrzeli β_v in skupna gibljivost $\beta + \beta_v$ v siliciju in germaniju.

Janez Strnad

REKONSTRUKCIJA DREVES, 1. DEL

Dvojiška drevesa (angl. *binary trees*) so ena od podatkovnih struktur, s katero se pri programiranju zelo pogosto srečamo. Najlažje jih opišemo rekurzivno: dvojiško drevo je bodisi prazno ali pa je sestavljeno iz odlikovanega vozlišča (pravimo mu *koren*) in dveh poddreves (*levo* in *desno* poddrevo), ki sta zopet dvojiški drevesi. S sliko to običajno prikažemo takole:

Smisel uporabe dvojiških dreves je, da v vozliščih hranimo podatke. Ti so lahko števila, znaki, nizi znakov, kazalci itn. Poleg podatkov potrebujemo še informacijo o tem, kako so vozlišča med seboj povezana v dvojiško drevo (običajno sta to kazalca na korena obeh poddreves).

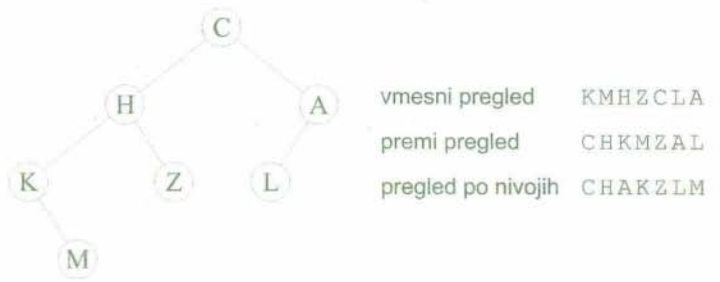
Poglejmo, kakšna je običajna predstavitev dvojiških dreves s kazalci v programskem jeziku pascal. Podatek, ki ga bomo hranili v posameznem vozlišču, bo en znak (pri resnih uporabah so podatki v vozliščih seveda bolj obsežni in zapleteni). V pascalu vozlišče predstavimo s sestavljenim tipom – zapisom (besedica `record`), drevo pa s kazalcem na njegov koren:

```
type
  Drevo = ^Vozlisce;
  Vozlisce = record
    x: char;
    levo,desno: Drevo;
  end;
```

Eno od pogostih opravil z dvojiškimi drevesi (pa tudi z drugimi podatkovnimi strukturami) je sprehod skozi vsa vozlišča drevesa. Smisel sprehoda je, da pri tem pogledamo (*obiščemo*) podatke v vseh vozliščih in v vsakem vozlišču primerno ukrepamo (izpišemo podatek, ga spremenimo, morda izračunamo vsoto ali kako drugo statistično informacijo o podatkih v vozliščih, včasih pa pri pregledu tudi spremenimo samo "obliko" drevesa). Vozlišča drevesa lahko pregledamo v različnih vrstnih redih. Zelo pogosto srečamo naslednje tri preglede (vrstne rede obiska vozlišč):

- *Vmesni pregled.* Pri njem najprej obiščemo levo poddrevo, nato koren drevesa, nazadnje pa še desno poddrevo. Seveda obe poddrevesi spet pregledamo v vmesnem vrstnem redu. Za to vrsto pregleda večkrat uporabljamo kratico LKD.
- *Premi pregled.* Pri njem najprej obiščemo koren drevesa, nato pa levo in nazadnje še desno poddrevo. Obe poddrevesi seveda pregledamo v premem vrstnem redu. Za to vrsto pregleda uporabljamo kratico KLD.
- *Pregled po nivojih.* Vozlišča v drevesu lahko razdelimo glede na oddaljenost od korena. Za vozlišča drevesa, ki so enako oddaljena od korena, pravimo, da sestavljajo *nivo* drevesa. Tako je nivo 0 sestavljen le iz korena drevesa, nivo 1 iz sinov korena itn. Pri pregledu po nivojih najprej pregledamo nivo 0 (torej koren), nato nivo 1 (sinove korena), potem nivo 2 (sinove sinov korena) itn. Vozlišča, ki so na istem nivoju, pregledamo "od leve proti desni", torej v enakem vrstnem redu, kot jih srečamo tudi pri vmesnem in premem pregledu.

Primere pregledov si lahko ogledate na spodnji sliki:



Več o delu z drevesi (in kodo v pascalu) si lahko preberete v poglavju o dinamičnih podatkovnih strukturah v knjigi *N. Wirth: Računalniško programiranje, 1. del.*

V nadaljevanju prispevka nas bo zanimalo, kako iz gornjih pregledov rekonstruirati (torej ponovno zgraditi) drevo. Kot pregled drevesa razumemo zaporedje podatkov iz vozlišč drevesa v takem vrstnem redu, kot do njih pride izbrani pregled drevesa. V našem primeru bomo torej poznali zaporedja znakov, iz njih pa bomo poskušali zgraditi drevo, katerega pregledi bodo ravno začetna zaporedja znakov.

Seveda, če poznamo le en pregled, drevo z njim (razen če je prazno oziroma ima le eno vozlišče) ni enolično določeno. Pri premem pregledu in pregledu po nivojih sicer lahko določimo koren (to je kar prvo obiskano vozlišče), ali je drugo obiskano vozlišče koren levega ali desnega poddrevesa, pa se ne moremo več odločiti. Iz vmesnega pregleda pa ne moremo razbrati niti korena; katerokoli vozlišče iz pregleda bi lahko bilo koren.

Zato bomo privzeli, da poznamo dva od gornjih treh pregledov drevesa. Pri rekonstrukciji naletimo še na eno težavo. Zgodi se lahko, da se podatki v vozliščih ponavljajo (v skrajnem primeru je lahko v vseh vozliščih isti znak). V takem primeru za pojavitve znakov v prvem pregledu ne moremo enolično določiti pripadajočih pojavitev v drugem pregledu. Na primer, če vsa vozlišča drevesa vsebujejo neki znak x, potem vsi pregledi takega drevesa vrnejo zaporedje x-ov, in sicer ne glede na to, kakšno je v resnici drevo (važno je le, koliko vozlišč ima). Ker bomo poskušali rekonstruirati le drevesa, ki so s pregledi enolično določena, bomo predpostavili, da vsak znak nastopi kvečjemu v enem vozlišču (vozlišča vsebujejo različne znake).

Vmesni in premi pregled: Prvi znak v premem pregledu pripada korenu drevesa. Poiščemo ga v vmesnem pregledu. Znaki, ki v vmesnem pregledu nastopajo pred njim, pripadajo vozliščem levega poddrevesa, znaki, ki so za njim, pa vozliščem desnega poddrevesa. Hkrati še izvemo, koliko vozlišč ima levo in koliko desno poddrevo. Ker tudi pri premem pregledu pregledamo levo poddrevo v celoti pred desnim poddrevesom, lahko premi pregled (brez prvega znaka – korena) razdelimo na del, ki pripada levemu poddrevesu, in del, ki pripada desnemu poddrevesu:

$$\overbrace{\underbrace{K\,M\,H\,Z}_{\text{levo poddrevo}}\quad\underbrace{C}_{\text{koren}}\quad\underbrace{L\,A}_{\text{desno poddrevo}}}^{\text{vmesni pregled}}\qquad\overbrace{\underbrace{C}_{\text{koren}}\quad\underbrace{H\,K\,M\,Z}_{\text{levo poddrevo}}\quad\underbrace{A\,L}_{\text{desno poddrevo}}}^{\text{premi pregled}}$$

Obe poddrevesi zgradimo rekurzivno na enak način.

```
function Zgradi(vmesni,premi: string; var napaka: boolean): Drevo;
{ Iz vmesnega in premega pregleda rekonstruira dvojiško drevo. }

 function Zgradi_R(zacV,zacP,vel: integer): Drevo;
 { Vmesni pregled se začne pri zacV, premi pa pri zacP. Drevo ima }
 { vel vozlišč. Funkcija uporablja spremenljivke vmesni, premi in }
 { napaka iz funkcije Zgradi.                                     }
   var
     kor: integer; { indeks korena v vmesnem pregledu }
     kaz: Drevo; { pomožni kazalec za novo vozlišče }
```

```
begin
  Zgradi_R := nil;
  if vel>0 then begin { Drevo ni prazno. }
    kor := zacV; { Poiščemo koren v vmesnem pregledu. }
    while (vmesni[kor]<>premi[zacP]) and (kor<zacV+vel) do
      kor := kor+1;
    if kor>=zacV+vel then
      napaka := true { Napačni vhodni podatki. }
    else begin
      new(kaz);
      kaz^.x := premi[zacP];
      kaz^.levo := Zgradi_R(zacV,zacP+1,kor-zacV);
      kaz^.desno := Zgradi_R(kor+1,zacP+kor-zacV+1,zacV+vel-kor-1);
      Zgradi_R := kaz;
    end;
  end;
end; {Zgradi_R}

begin {Zgradi}
  napaka := length(vmesni)<>length(premi);
  if napaka then
    Zgradi := nil
  else
    Zgradi := Zgradi_R(1,1,length(vmesni));
end; {Zgradi}
```

Funkciji `Zgradi` smo poleg obeh pregledov dodali še en parameter: logično spremenljivko `napaka`. Prek nje klicatelju funkcije sporočimo, ali je bila rekonstrukcija drevesa uspešna. Pri gradnji drevesa zaznamo dve vrsti napak. Že takoj na začetku sta pregleda lahko različne dolžine. Tedaj drevesa sploh ne poskušamo zgraditi, saj je s pregledoma očitno nekaj narobe. Če sta niza z opisoma pregledov enako dolga, pri rekurzivnih klicih funkcije `Zgradi_R` poskrbimo, da ostaneta enako dolga tudi pri nadaljnjih rekurzivnih klicih. Drugo mesto, kjer tudi lahko odkrijemo napako, pa je pri iskanju položaja korena v vmesnem pregledu. Lahko se zgodi, da korena ne najdemo. Tedaj postavimo indikator `napaka` na `true` in vrnemo prazno drevo (vrednost `nil`) kot rezultat tekočega klica funkcije `Zgradi_R`. Za celotno funkcijo `Zgradi` to pomeni, da kljub napačnim podatkom vseeno zgradi del drevesa, za katerega domneva, da je z danima pregledoma opisan pravilno. Koristilo vam bo, če funkcijo preskusite še z nekaj napačnimi podatki in si pozorno ogledate zgrajena drevesa. Če se klic funkcije `Zgradi` konča brez napake, potem sta vmesni in premi pregled zgrajenega drevesa vedno enaka vhodnima pregledoma, ni pa nujno, da je to edino drevo s to lastnostjo. Funkcija namreč ne preverja enoličnosti rešitve (vedno vzame, da prva pojavitev znaka v premem pregledu ustreza njegovi prvi pojavitvi v vmesnem pregledu; pri predpostavki o različnih znakih v posameznih vozliščih je to povsem smiselno obnašanje).

Pokomentirajmo še časovno in prostorsko zahtevnost funkcije `Zgradi`. Naj ima iskano drevo n vozlišč. Število klicev funkcije `Zgradi_R` je enako $2n+1$ (n klicev, v katerih naredimo vozlišča, in $n+1$ klicev na praznih poddrevesih); če pride do napake, je klicev lahko tudi manj. Pri vsakem vozlišču poiščemo koren, torej pregledamo začetni del pripadajočega vmesnega pregleda. Število znakov, ki jih pogledamo, je omejeno z n. (Lahko se zgodi, da je koren vedno ravno zadnji pregledani znak; premislite, kakšno je potem drevo.) Celotno število operacij je torej omejeno s kvadratno funkcijo števila vozlišč, za nekatera drevesa pa je lahko tudi bistveno manjše. Ocenimo še količino pomnilnika, ki ga potrebuje funkcija. Zgrajeno drevo je sestavljeno iz n zapisov tipa `Vozlisce`, pri gradnji pa uporabljamo še pomožne spremenljivke. To so parametri in lokalne spremenljivke v funkciji `Zgradi_R`, nekaj pomnilnika pa zasedejo tudi nam "nevidne" spremenljivke, ki jih vpelje prevajalnik za "knjigovodstvo" o rekurzivnih klicih. Ker se po koncu klica funkcije pomnilnik, ki ga zasedajo parametri, lokalne spremenljivke in "spremenljivke za knjigovodstvo", sprosti, je največja hkrati zasedena količina pomnilnika sorazmerna z globino rekurzije. Največja globina rekurzije pa je odvisna od globine (števila nepraznih nivojev) drevesa, ki ga gradimo. Če je drevo "izrojeno" (vsako vozlišče ima le enega sina), je globina največja (enaka je n), najmanjša pa je pri "izravnanem" drevesu (vsi nivoji, razen morda zadnjega, so v celoti zapolnjeni). Tedaj je enaka $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ (zadnja trditev zahteva krajši razmislek in skico ali dve).

Pri koncu prvega dela prispevka smo. V naslednji številki Preseka si bomo ogledali, kaj lahko povemo o dvojiškem drevesu, če poleg vmesnega ali premega pregleda poznamo tudi njegov pregled po nivojih.

Martin Juvan

PREMOŽENJE

Umirajoči oče je svojim sedmim različno starim otrokom zapustil 2879 arov zamlje. Najstarejšemu sinu je naročil, naj zemljo med dediče razdeli po naslednjem ključu: Razmerje med velikostjo deleža posameznega dediča in velikostjo deleža vsakega od njega mlajšega dediča naj bo celo število.

Koliko zemlje je podedoval posamezni otrok?

Marija Vencelj

USPEHI NAŠIH DIJAKOV NA OLIMPIADAH SE NADALJUJEJO

Vsa leta samostojnega nastopanja Slovenije na mednarodnih matematičnih in fizikalnih oimpiadah dosegajo naši tekmovalci lepe uspehe.

Tako je bilo tudi letos. Na 30. mednarodni fizikalni olimpiadi v italijanski Padovi je Urban Simončič iz Šolskega centra Novo mesto prejel bronasto medaljo, fiziki so se vrnili s tekmovanja tudi z dvema pohvalama.

Na 40. mednarodni matematični olimpiadi v Romuniji pa sta Irena Majcen z Gimnazije Bežigrad iz Ljubljane in Matjaž Urlep iz Šolskega centra Celje – Gimnazija Lava dobila bronasti odličji. Oba sta šele v tem šolskem letu dijaka četrtega letnika, zato je njun uspeh toliko večji.

Več o obeh tekmovanjih boste lahko prebrali v naslednji številki Preseka.

ČESTITAMO!

Iz uredništva

TRI ZANIMIVE – Rešitev s str. 3

Produkt dvojk

Produkti dvojk se končujejo po vrsti s števkami 2, 4, 8, 6, 2 itd. Ker se prvi in za njim vsak četrti produkt konča s števko 2 ter je ostanek pri deljenju števila 999 s 4 enak 3, se naš produkt končuje s števko 8.

Tekma

Marija in Tanja ne bi pritekli v cilj istočasno. Ko bi Marija pretekla 60 metrov, bi jih Tanja pretekla 54 in bi bili v tistem trenutku enako oddaljeni od cilja. Zadnjih 6 metrov bi pretekla hitreje Marija in tako spet zmagala.

Zdenkini otroci

Zdenkina sinova dvojčka sta stara dve leti, hčerka pa 12 let. Navodilo: Število 48 razstavi na faktorje.

Dragoljub M. Milošević, prev. Barbara Japelj

OZVEZDJA

Zanimanje človeka za zvezde sega tisočletja nazaj. Danes, v času potovanj vesoljskih ladij na druge planete in presenetljivih odkritij na nebu, se to zanimanje še širi.

Za neuke ljudi davnine so bile zvezde neizčrpen vir številnih zgodb, ki so postale legende. Ko so strmeli v jasno nočno nebo, so tam videli ne le zvezde in skupine zvezd – ozvezdja, ampak kar podobe, v katerih so se jim prikazovali njihovi čaščeni bogovi in boginje, junaki in čudežna bitja. Ozračje takrat še ni bilo onesnaženo in umetne luči niso motile opazovalcev, zato so s prostim očesom videli marsikatero zvezdo, ki jo danes opazimo le z daljnogledom.

Najstarejši opis ozvezdij najdemo v poučnem epu *Nebesni pojavi* ($\Phi\alpha\iota\nu o\mu\varepsilon\nu\alpha$ – izg. fainómena, tj. fenomeni), ki ga je napisal grški pesnik Arat (okoli 270 pr. n. š.). V pesnitvi je zbral predhodne rezultate opazovanj zvezdnega neba in jih poživil z zanimivimi zgodbami iz grškega bajeslovja (mitologije). Večinoma se naslanja na delo matematika in astronoma Evdoksa iz Knida (410 do 365 pr. n. š.).

Za ozvezdja, ki jih je opisal Arat v 1154 heksametrih, pravi, da so jih "naredili" opazovalci neba že davno pred njim. Ustvarili so jih astronomi, ki so živeli na rodovitni zemlji med rekama Evfrat in Tigris v Mezopotamiji, kjer je mnogo stoletij cvetela stara civilizacija. Aratu in grškim astronomom tedanjega časa se imamo zahvaliti za imena in oblike večine nam znanih ozvezdij, tako kot tudi za večino zgodb o njih. Brez dvoma je bilo za grško mladino Aratovega časa zvezdno nebo edina slikanica. Ozvezdja so se učili preprosto spoznavati s poslušanjem mitoloških zgodb. Lahko rečem, da se na podoben način lege ozvezdij učimo in zapomnimo tudi danes.

Kaj je pravzaprav ozvezdje? To je del (kos) neba s pripadajočo skupino zvezd. Prvi so sistematično opisali ozvezdja stari Grki pred dva tisoč leti. Poznali so 48 ozvezdij, povezanih z imeni junakov (Orion, Perzej, Andromeda, Kefej, Klečalec – pozneje Herkul), z imeni živali (Veliki medved, Lev, Labod, Pegaz, Zmaj) in z drugimi stvarmi in rečmi (Krona, Lira, Tehtnica) iz njihovega bujnega bajeslovja. Danes poznamo 88 ozvezdij, katerih imena in natančne meje je sprejela in dokončno utrdila Mednarodna astronomska zveza leta 1922.

Opomba: Zvezde so različno oddaljene od nas. Mi jih projiciramo na nebo, kot npr. projiciramo pred seboj dvignjen prst na neko ozadje – steno sobe. Lege zvezd v ozvezdjih so zato navidezne.

Slika 1. Ozvezdje Herkul (Engonasi – Klečalec), prikazano v zvezdnem atlasu Uranometrija (1603) nemškega astronoma Johanna Bayerja. To je bil prvi resnično uporaben zvezdni atlas z 51 zvezdnimi kartami. V njem je Bayer zvezde v ozvezdjih prvič označil z grškimi črkami glede na jakost njihovega sija (magnitudo). Način je bil dober in je zdržal do danes. Zares svetle zvezde pa imajo poleg označe z grškimi črkami še lastna imena (večinoma grška in arabska), ki so se skupaj z imeni ozvezdij ohranila do danes.

To, da imajo zvezde navidezno dnevno vrtenje in da se vsako leto ob enakem času vračajo na isto mesto neba, je bilo najbrž najpomembnejše spoznanje davnih ljudi, ko so zapustili jame in nomadsko življenje ter začeli v skupnostih obdelovati zemljo in skrbeti za čredo. Iz opazovanj so ugotovili, da v posameznem letnem času prihajajo določene skupine zvezd na nebo pred vzidom Sonca. Tako so lahko sledili spremembam letnih časov. Vedeli so, kdaj pride pomlad in so začeli sejati. Čez nekej mesecev je nastopila jesen in morali so pospraviti pridelek. Tako je nastal koledar, ki je tudi opozarjal na deževna in nevihtna obdobja, ko je bilo nevarno pluti na odprto morje s slabo izdelanimi ladjami tistega časa.

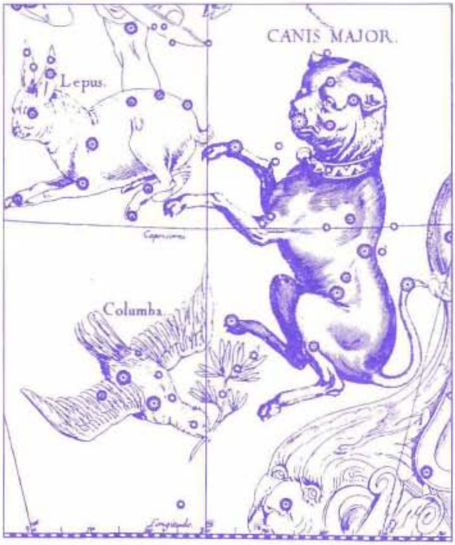
Ko so ljudje že uporabljali zvezde za koledar, se je izkazalo, da se je kar težko naučiti in zapomniti posamezne zvezde ter jih spremljati skozi vse leto. Zato so jih uredili v prepoznavne zvezdne skupine, vozove, križe in ovale, v geometrijske like (trikotnike ali večkotnike), razne slike (figure), ki naj bi z malo domišljije predstavljale znane domače živali ali pa tiste, proti katerim so morali zavarovati svoje črede ali se z njimi boriti, in tudi v podobe božanstev in junakov, katerih velika dejanja so slavili v pesmih in mitih.

V davnini so ljudje hodili zgodaj spat in so zgodaj vstajali. Ni bilo elektrike. Niso imeli televizije, da bi si krajšali včasih dolge večere. Ko je padla tema, so šli spat. Čim je bilo dovolj svetlo za gibanje in delo, so zjutraj vstali. Vstajali so, preden je Sonce zbrisalo zvezde z neba. Tako so lahko opazili, kdaj se prvič v letu pojavi kakšna svetla zvezda ali pa zanimiva skupina zvezd (ozvezdje) nizko nad vzhodno stranjo obzorja tik pred Sončevim vzidom.

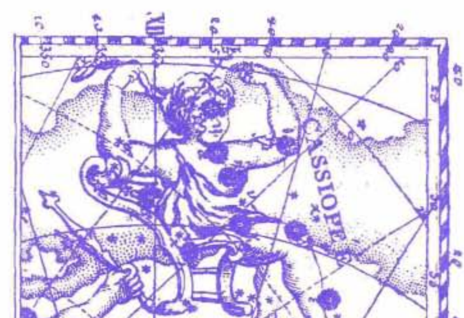
Od 4000 do 2000 pr. n. š. je prvo zgodnje jutranje prikazovanje slavne zvezdne skupinice z imenom Plejade v ozvezdju Bik napovedovalo začetek pomladi. Poletje se je pričelo s prikazovanjem ozvezdja Lev. Jesen so pričakovali s prihodom zvezd Škorpijona na jutranjem vzhodnem delu neba. Zimski mraz z nevihtami pa se je začel kmalu po jutranjem vzidu Vodnarja, ki iz ogromnega vedra zliva neskončen slap vode samega dežja v tem letnem času.

Imena ozvezdij so grškega izvora, uporabljajo pa se v latinščini. Tako je ozvezdje Veliki medved latinsko Ursa Maior, Lev je Leo, Vodnar pa Aquarius itn. Najbolje se je sicer tega držati, vendar pri poljudnem pisanju za ozvezdja raje uporabljamo kar lepa domača imena.

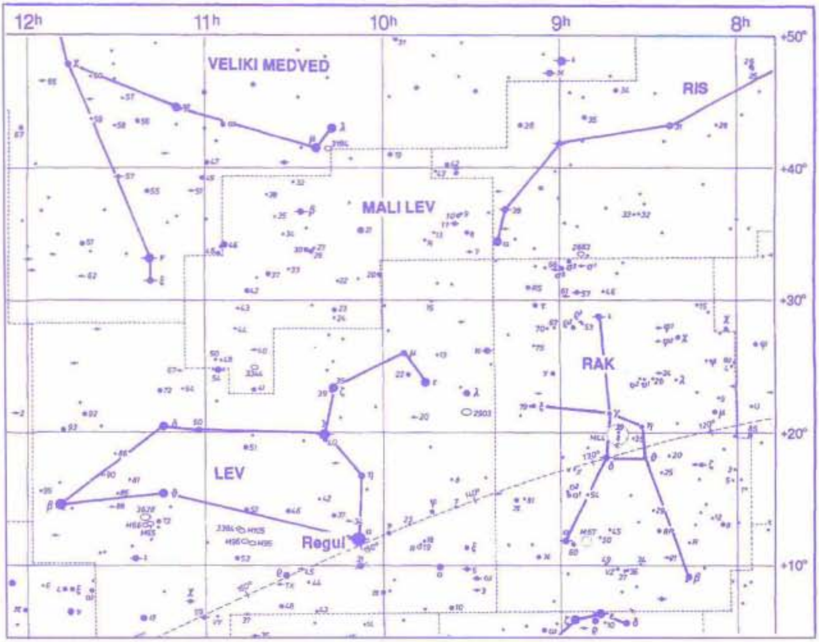
Ozvezdij se učimo iz zvezdnih kart (pri našem društvu sta izšli Presekova zvezdna karta in Karta severnega in južnega neba). Te so navadno zbrane v zvezdnih atlasih. V zvezdnih kartah so zvezde ozvezdja označene s črkami grške abecede. V ozvezdju so namreč različno svetle zvezde. Najsvetlejša zvezda v ozvezdju je označena s črko Alfa (α), druga s črko Beta (β), tretja s črko Gama (γ), četrta z Delta (δ) itn. Tako Sirij, najsvetlejša zvezda v ozvezdju Veliki pes,



Slika 2. Slika ozvezdja Veliki pes iz Jan Helijevega atlasa zvezdnega neba Uranografija (1690). Značilno za ta zvezdni atlas je, da ima izredno lepe (umetniško izdelane) slike, ki pa so narisane zrcalno simetrično glede na resnično podobo zvezdnega neba (desno je na levi). Zvezda Sirij leži v gobcu psa.



Slika 3. Ozvezdje Kasiopeja v Flamsteedovem atlasu zvezdnega neba (1725).

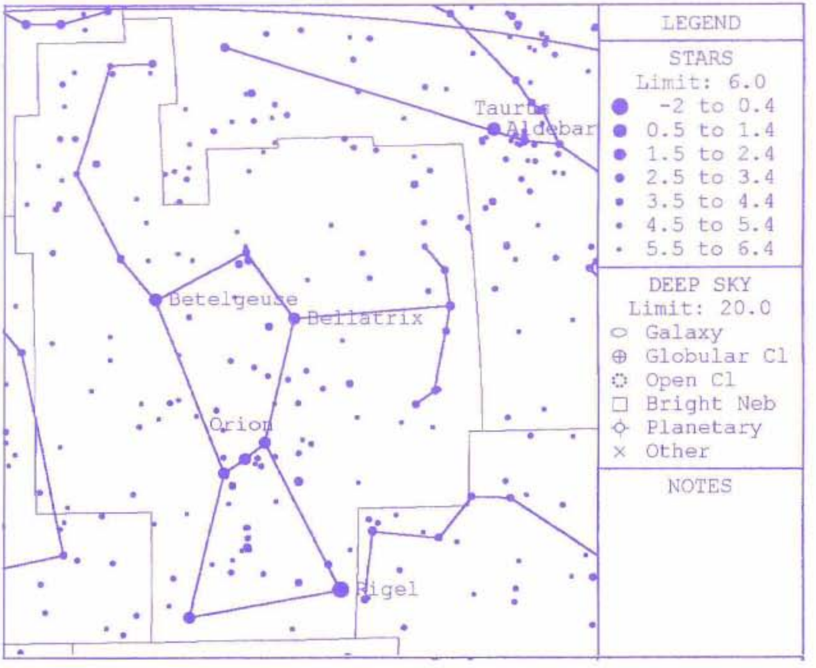


Slika 4. Ozvezdja Lev, Rak itn., prikazana v moderni zvezdni karti (iz naše astronomske revije Spika).

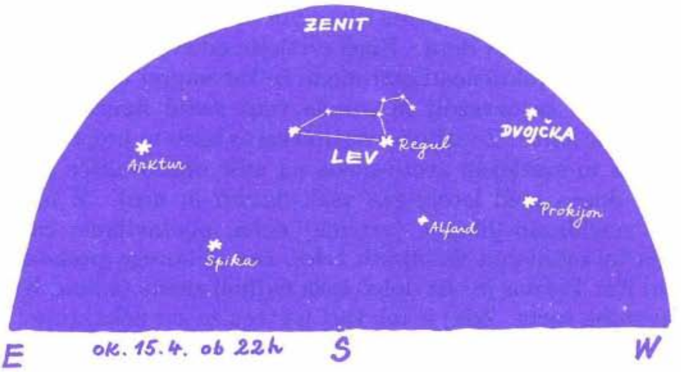
postane Alfa Velikega psa, zvezda Regul je Alfa Leva, zvezda Vega je Alfa Lire itn. V nekaterih redkih primerih to pravilo sicer ne drži (npr. v ozvezdju Orion, kjer je zvezda Beta – Rigel svetlejša od zvezde Alfa –Betelgeza), vendar ga zaradi praktičnosti astronomi še kar naprej uporabljajo.

Najbolje pa se ozvezdij in seveda tudi zvezd naučimo s pomočjo vrtljive zvezdne karte. Z vrtljivo zvezdno karto hitro in preprosto najdemo lego ozvezdja in svetlejših zvezd glede na naše opazovališče (obzorje) za izbrani čas dneva med letom (za vsak datum in uro). Z njo si lahko pojasnimo navidezno gibanje (vrtenje) neba, ugotavljamo čas in smer vzhajanja in zahajanja vesoljskih teles, čas njihovega prehoda čez jug (meridian) itn. Pri nas je bila dolgo časa najbolj znana (edina) Kunavrova vrtljiva zvezdna karta. Zdaj je teh kart na trgu že kar nekaj (npr. Spikina, Poudarkova). Za osnovno spoznavanje z zvezdnim nebom so vse dobre. Le uporabite jih.

Včasih pa se ozvezdij in zvezd učimo s pomočjo računalnika ali pa kar z doma na roko narejeno zvezdno skico. Sam take skice razmeroma pogosto uporabljam, celo pri poučevanju. Neverjetno pripravne so.



Slika 5. Del zvezdne karte iz računalniškega programa ASTRO.



Slika 6. Moja zelo shematična "zvezdna karta" – zvezdna skica. Za učenje zvezd je zelo pripravna. Pri opazovanju se obrnemo proti jugu. Skico damo nad glavo tako, da se smeri neba na skici in na zemljišču ujemajo. S preslikavo poskušamo najti na skici narisane zvezde tudi na nebu.

Na koncu predlagam tri vaje:

- Iz Spikine zvezdne karte (slika 4) si na primer izberi ozvezdje Lev in ugotovi, katera zvezda je v njem najsvetlejša, katera je druga najsvetlejša, katera je tretja itn. Pojdi ven. Potrudi se in poskusi to ozvezdje najti na nebu.
- Vrtljivo zvezdno karto nastavi za nocoj ob 22. uri. Karto z roko primi za "jug" in jo daj nad glavo tako, da se strani neba na karti ujemajo s stranmi neba na zemljišču. Tako si karto orientiral. S karte razberi, katera ozvezdja nocoj ob tej uri vzhajajo, katera zahajajo in katera so najvišje nad obzorjem (v južni smeri). Pojdi ven. Poišči jih na nebu in opazuj.
- Poskusi kakšno ozvezdje narisati po svoje, duhovito.

Marijan Prosén

KOLIKO MANJŠIH?

Matematično je permutacija množice $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ bijektivna preslikava iz $\mathbb{N}_n$ v $\mathbb{N}_n$. Eden od načinov za opis permutacije je, da podamo predpis, ki določa, kam se preslikajo posamezni elementi iz $\mathbb{N}_n$. Na primer:

$$\pi(i) = n + 1 - i \,.$$

Ker je permutacija preslikava med končnimi množicami, jo lahko opišemo tudi s tabelo. Na primer:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Kadar vemo, da bomo obravnavali le permutacije množice $\mathbb{N}_n$, pri zapisu s tabelo običajno izpustimo zgornjo vrstico, saj le-ta vsebuje informacijo, ki jo že poznamo. Zapis samo spodnje vrstice tabele je tudi običajen način predstavitve permutacije v računalniških programih.

Sedaj pa k nalogi. Množica $\mathbb{N}_n$ dopušča $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ permutacij. Te permutacije lahko uredimo na veliko načinov. Zelo pogosto srečamo *leksikografsko* ureditev. To je ureditev, ki jo uporabljamo tudi pri razvrščanju gesel v leksikonih (od tod tudi njeno ime). Naj bosta π_1 in π_2 različni permutaciji in $i \in \mathbb{N}_n$ najmanjše število, za katero je $\pi_1(i) \neq \pi_2(i)$. Potem je permutacija π_1 pri leksikografski ureditvi pred permutacijo π_2 natanko tedaj, ko je $\pi_1(i) < \pi_2(i)$. Vaša naloga je, da napišete računalniški program, ki bo za dano permutacijo množice $\mathbb{N}_n$ ugotovil, katera po vrsti je pri leksikografski ureditvi vseh $n!$ permutacij. Na primer, permutacija 3 4 1 5 2 množice $\mathbb{N}_5$ je pri leksikografski ureditvi na 62. mestu.

Martin Juvan

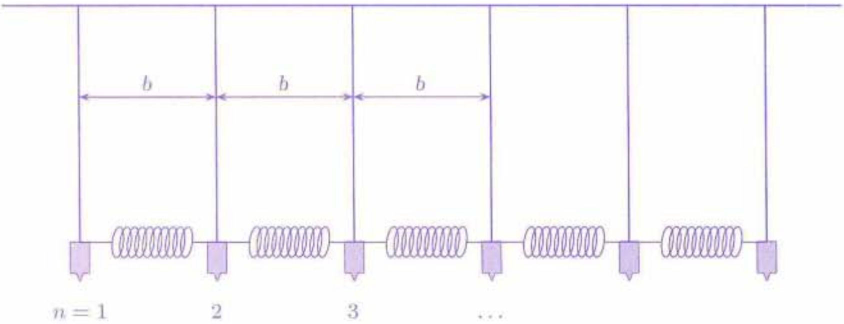
PREPOVEDANI PAS

Pri gibanju elektronov in vrzeli v polprevodnikih ne moremo mimo pojmov valenčnega, prevodnega in prepovedanega pasu. Nenavadno je, da se elektroni z energijo, ki leži v prepovedanem pasu, v kristalu ne morejo gibati. Na omejitve sicer naletimo tudi pri gibanju velikih teles. Pri gibanju planetov okrog Sonca, na primer, planet ne sme imeti prevelike energije, da ga ne odnese iz Osončja. Tudi krogla mora imeti dovolj veliko kinetično energijo, da prebije tarčo. Podobne omejitve veljajo tudi v mikrosvetu – elementarni delec mora imeti dovolj veliko kinetično energijo, da vzbudi atomsko jedro. Samo gibanje pa seveda ni nikoli prepovedano, ne glede na kinetično energijo delca. Danes se zavedamo, da za gibanje elektronov v kristalu ne veljajo vsakdanje predstave. To gibanje obravnavamo podobno kot valovanje. Frekvenca valovanja je povezana s kinetično energijo elektrona.

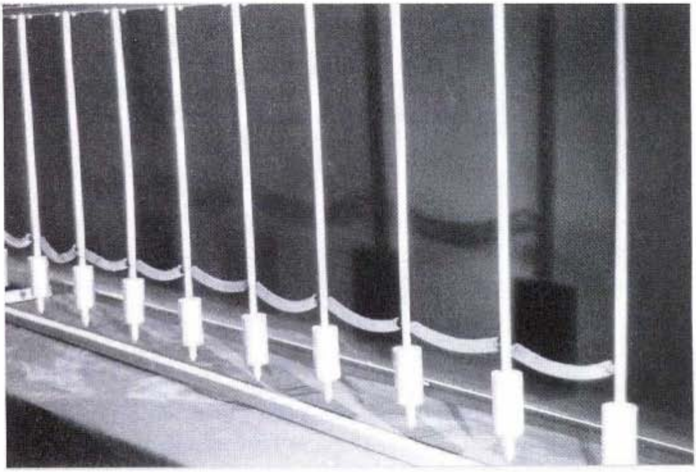
Pojavi, povezani z valovanjem, so v fiziki raznovrstni in zanimivi. V šoli spoznamo širjenje mehaničnih valov po napeti vrvi, elastičnih telesih in zraku ter tudi širjenje elektromagnetnih valov po praznem prostoru ali v prozornih snoveh. Pri nobenem od teh pa ne zasledimo prepovedanih frekvenčnih pasov. Valovna dolžina λ in frekvenca ν sta povezani z znano enačbo $\lambda\nu = c$, iz katere sledi, da sta frekvenca valovanja in valovna dolžina obratno sorazmerni. Valovanje se širi po sredstvu ali v praznem prostoru ne glede na frekvenco vzbujanja.

Pri širjenju zvoka v kristalih pa opazimo povsem nove pojave, ko je valovna dolžina zvoka primerljiva z razdaljami med sosednjimi atomi v kristalu. Ker so te frekvence izredno visoke, so tovrstni poskusi zahtevni. Zato si bomo v sestavku ogledali širjenje valovanja v verigi težnih nihal, kjer tudi naletimo na prepovedane frekvenčne pasove. Valovanje s frekvenco v prepovedanem pasu se po verigi ne more širiti.

Oglejmo si pobliže širjenje valovanja v taki verigi v upanju, da nam bo po razpravi pojem prepovedanega pasu za elektrone v polprevodniku bolj domač. Verigo nihal sestavlja niz težnih nihal, ki so v mirovni legi enakomerno vsaksebi (slika 1). Težno nihalo sestavlja utež z maso m na koncu zelo lahke, a toge palice z dolžino l. Na drugem koncu je nihalo vrtljivo pritrjeno na strop tako, da se utež lahko giblje le v levo ali v desno. V ravnovesni legi sta težišči sosednjih uteži oddaljeni za b. Sosednje uteži so med seboj povezane z lahko vzmetjo s koeficientom k. V mirovni legi so vzmeti ohlapne in ne delujejo na uteži. Verige ni težko izdelati (primer kaže slika 2).

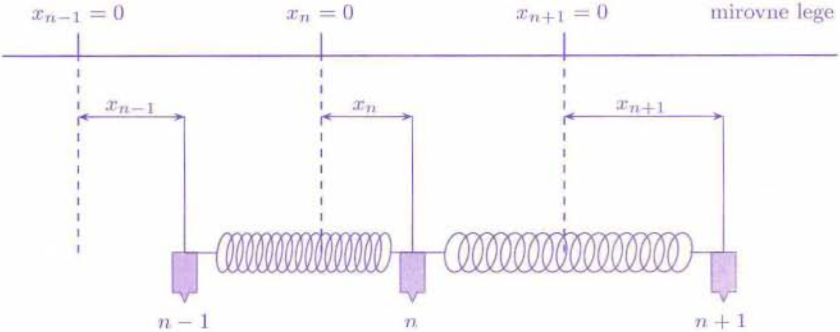


Slika 1. Veriga težnih nihal, ki so povezana z lahkimi vijačnimi vzmetmi. Veriga se začne s prvim nihalom ($n = 1$) in se nadaljuje brez konca.



Slika 2. Izdelana veriga iz povezanih nihal.

Nihala v verigi bomo sedaj vzbujali tako, da bomo začeli nihati prvo nihalo na začetku verige sinusno z izbrano frekvenco, in opazovali, kako nihajo druga nihala v verigi. Ker je izdelava take verige zamudna, saj za nazorno spremljanje dogajanja potrebujemo nekaj deset nihal, bomo širjenje valovanja spremljali na računalniškem zaslonu s sprotnim izračunavanjem leg nihal v verigi. V ta namen si oglejmo nihalo, ki je n-to po vrsti, če štejemo od začetka verige, in njegova soseda, torej nihali z oznakama $(n-1)$ in $(n+1)$ (slika 3). Gibanju n-tega nihala lahko sledimo, če poznamo vsoto vseh sil, ki delujejo na njegovo utež. Obravnavali bomo majhne odmike od ravnovesne lege, zato gibanje po krožnem loku



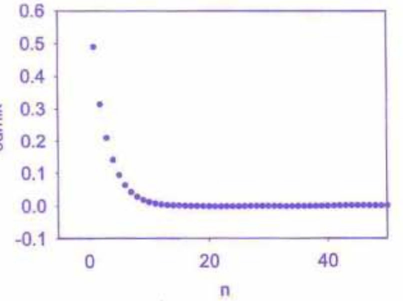
Slika 3. n-to nihalo in njegova soseda – k izpeljavi sil na nihalo v vodoravni smeri.

obravnavamo kot gibanje v vodoravni smeri. Sila palice na utež F_d je tedaj kar sorazmerna z odmikom x_n: $F_p = mg\frac{x_n}{l}$, sila desne vzmeti je $F_d = kx_{n+1} - kx_n$, leve pa $F_l = kx_n - kx_{n+1}$. Po Newtonovem zakonu, ki povezuje vsoto teh sil s pospeškom uteži v vodoravni smeri, zapišemo

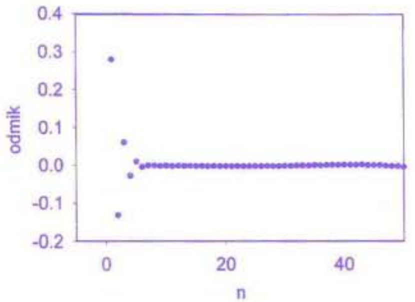
$$ma_n = F_l + F_p + F_d\,.$$

Iz znanega pospeška v času t bomo izračunali hitrost nihala v času $t + \Delta t$ iz enačbe $v_n(t + \Delta t) = v_n(t) + a_n\Delta t$. Odmik bomo izračunali iz enačbe $x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + v_n(t)\Delta t + \frac{1}{2}a_n(t)(\Delta t)^2$. Obe enačbi veljata le pri enakomerno pospešenem gibanju. Če pa je časovni korak Δt dovolj majhen, je natančnost računanja kljub temu, da se pospešek spreminja, zanesljiva. Računanje bomo seveda prepustili računalniku (vključimo čim več nihal v verigi), mi pa bomo opazovali odmike v zaporednih časih. Ker so računalniki izredno hitri, najlaže opazujemo rezultate tako, da za vsak časovni korak izrišemo lege posameznih nihal v verigi na zaslon.

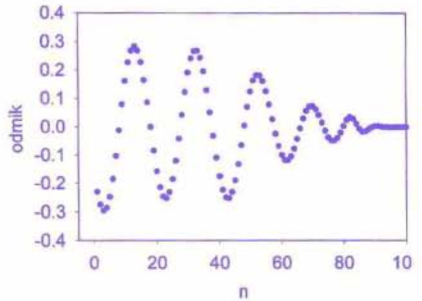
Sedaj se lotimo poskusov. Prvo nihalo naj niha sinusno z izbrano frekvenco in opazujmo gibanje ostalih nihal v verigi. S preskušanjem, še lažje pa z računom, ugotovimo, da valovanje v verigo ne prodre, če je njegova frekvenca nižja od mejne krožne frekvence $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Niha le nekaj nihal blizu prvega, ostala nihala pa se po daljšem času povsem umirijo, kljub nenehnemu vzbujanju. Na sliki 4 smo odmike nihal v izbranem trenutku risali pravokotno na verigo, da je slika preglednejša. Prav tako se nihala globlje v verigi ne zmenijo za vzbujanje, ki ima krožno frekvenco večjo od $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4k}{m}}$. Tudi tu niha le nekaj začetnih nihal (slika 5). Krožni frekvenci ω_0 in ω_1 sta meji dovoljenega pasu. Valovanje s krožno frekvenco, ki je med tema mejama, se širi po verigi. Širjenje pa je nekoliko nenavadno, če ga primerjamo s širjenjem valovanja po napeti vrvi (slika 6). Pas frekvenc nad ω_1 je zgornji prepovedani pas, pas pod ω_0 pa spodnji prepovedani pas.



Slika 4. Trenutna lega nihal, ko verigo dlje časa vzbujamo s frekvenco v spodnjem prepovedanem pasu. Zaradi preglednosti smo odmik nihal risali pravokotno na verigo, kot da bi bilo valovanje transverzalno. V resnici je longitudinalno.



Slika 5. Trenutna lega nihal, ko verigo dlje časa vzbujamo s frekvenco v zgornjem prepovedanem pasu. Slika je risana po predlogi slike 4.



Slika 6. Trenutna lega nihal, ko vzbujamo prvo nihalo s frekvenco v dovoljenem pasu. Širjenje tega valovanje nekoliko spominja na širjenje težnih valov na vodni gladini.

Pojav prepovedanih in dovoljenih pasov pri širjenju valovanja po verigi težnih nihal nekoliko osvetli pojav prepovedanih in dovoljenih energijskih pasov pri gibanju elektronov v kristalih. Razen teh pasov pa pojava nimata kake globlje stične točke, saj mehanično valovanje le v zelo grobih potezah spominja na valovanje, s katerim ponazorimo gibanje elektronov v kristalih. Včasih pa tudi oddaljene podobnosti kakega pojava z mehaničnim modelom pomagajo, da nenavadna dejstva iz fizike mikrosveta laže sprejmemo.

Andrej Likar

ŠTIRI TOČKE – DVE RAZDALJI – Rešitev s str. 2

Naloge se lahko lotimo s poskušanjem, lahko pa tudi bolj urejeno, tako da se spotoma prepričamo, da je res natanko šest bistveno različnih leg štirih točk, ki premorejo le dve različni medsebojni razdalji.

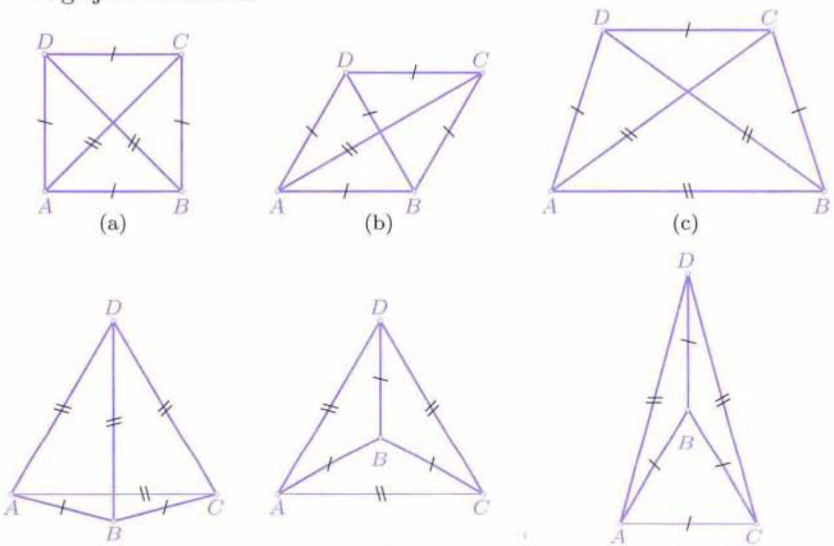
Poti je več:

Iz pogojev naloge sledi, da so poljubne tri, od iskanih štirih točk, oglišča bodisi enakostraničnega bodisi enakokrakega trikotnika. Poiščemo vse *primerne* zlepke parov takih trikotnikov vzdolž enako dolgih stranic. Primerni so taki pari, da je tudi razdalja, ki se pri tem pojavi na novo (med ogliščema, ki ne ležita na 'zlepljenih' stranicah) enaka eni od stranic zlepljenih trikotnikov.

Druga pot je npr. iskanje vseh štirikotnikov, katerih stranice in diagonale imajo le dve različni dolžini. Pri tem se seveda ne smemo omejiti le na konveksne štirikotnike. Za urejeno delo lahko poskrbimo tako, da manjšamo število enakih štirikotnikovih stranic.

Gotovo ste kakšno drugačno pot našli tudi sami.

Oglejmo si rešitve:



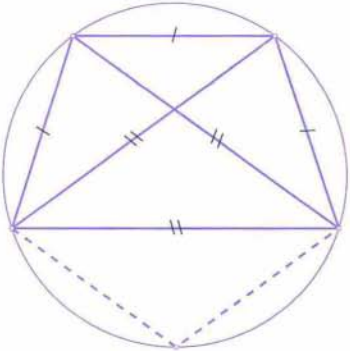
(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

V prvi vrsti so narisani (a) kvadrat, (b) romb, ki ima eno diagonalo enako stranici in je torej zlepek dveh enakostraničnih trikotnikov ter (c) enakokraki trapez, ki ima eno osnovnico enako kraku in drugo diagonali.

Liki v drugi vrsti so deltoidi: (d) je konveksen, (e) in (f) pa sta konkavna. V tem smislu smo točkam po abecednem redu tudi izbrali oznake.

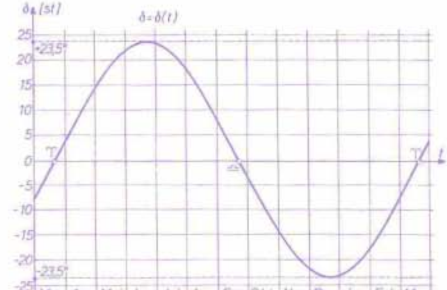
Opozorimo še na posebno zanimivost primera (c). Narisani enakokraki trapez je del pravilnega petkotnika, kot lahko razberemo z naslednje slike (pravilni petkotnik ima enako dolge diagonale!).



Marija Vencelj

DEKLINACIJA SONCA – Odgovor na vprašanja s str. 22

Potek funkcije $\delta = \delta_0 \cdot \sin((284 + t) \cdot 360°/365)$ prikazuje slika 1.



Slika 1. Spreminjanje deklinacije Sonca med letom.

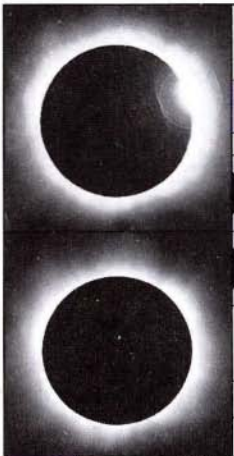
Odgovori:

Vse vprašano ste se učili pri geografiji v 6. razredu osnovne šole.

1. $\delta = 0$ okoli 21. 3. in okoli 23. 9.
2. $\delta > 0$ za okoli 21. 3. $< t <$ okoli 23. 9.
3. $\delta < 0$ za okoli 23. 9. $< t <$ okoli 21. 3.
4. δ raste za okoli 21. 12. $< t <$ okoli 21. 6.
5. To pa znaš.

Marijan Prosén

KRIŽANKA "POPOLNI SONČEV MRK"



MLADA ŠPORTNICA V KATEGORIJI DO 14 LET

MORSKI RAK

OVOJ, OVITEK

ANTIČNO MESTO V BEOCIJI

PRITOK SAVE NA HRVAŠKEM

BRUNO TRAVEN

ENO-SPOLNO BITJE

PRE N ITA

SVETLEČ OBLAK NAD SONCEM

DANSKA

BABICA

NAJVIŠJI ZASAVSKI HRIB

GLASBENI ZNAK, GLASKA

KARMEN STAVEC

KROŽIŠČE

PRE

IT IGR ARG

KRAJ POD KRIMOM

MATEMAT. STRUKTURA

"NEBEŠKI OČE"

UMETNIK ANT. DOBE

AVTOR MARKO BOKALIČ

CESTNO VOZILO

BROM

NAJVEČJA STOPNJA MRKA

TANKA PLINASTA PLAST NAD SONCEM

STANJE BLAZNOSTI PRI MALAJCIH

STARA KULTURNA RASTLINA

PRAVO

MESTO V BELGIJI

NEZNANKA V ENAČBI

SL. GRAF. OBLIKO-VALEC (UROŠ)

STARA ENOTICA ZA SILO

GR. ČRKA

TONE GOGALA

GR. HEROJ, KI JE DAL IME VISOKIM ŠOLAM

NEKD. TURŠKI BEGUNCI

SIVA BARVA

PE PE

C C

GRŠKI BOGATAŠ (ARISTOTEL)

HITER, NENADEN DVIG

AVTOR STRIPOV MUSTER

OZIRALNI ZAIMEK

STAR SLOVAN

POJAV ZADNJIH SONČNIH ŽARKOV TIK PRED POPOLNO FAZO MRKA

DRUGA GRŠKA ČRKA

ROMULOV BRAT

GL. MESTO JORDANIJE

TRAVA DRUGE KOŠNJE

OKUS VINA, KI SE KVARI

NAJBOLJŠI AZIJSKI SPRINTER (KOJI)

OPAZO-VALIŠČE MRKA NA GORIČKEM

REKA NA SZ NEMČIJE

ERBIJ

ISTO-VETNOST

RA URE (J

JUŽNO-AMERIŠKA ŽIVAL

MUSLI-MANSKO SVETO PISMO

Č.

STOL-ICA ...LIJE
POTEPUH, SLEPAR V PARIŠKEM OKOLJU
NORINA RADOVAN
AVSTRIJ. PESNIK IN DRAMATIK (FRANZ)
OČE

DROG, NA KATEREM SE VRTI KOLO
MADŽARSKI LJUDSKI PLES
TRDINOV JUNAK (... IN ŽMAN)
POMEMBNA ZMAGA
STROKOV-NJAK, KI PREUČUJE MRK

NAJMANJŠI HYUNDAI
REKA V ANGLIJI
PERIODA MRKOV
LEŽANJE NA PLAŽI

AM. IGRALEC (WARREN)
OPIS ZEMLJIŠČA
LAZ V GORENJ-SKEM OKOLJU

...TRES
...AL. ...ALKA ...ENTO
3. OSEBA SR. SPOLA
OBLIKA IM. LAZAR
KRALJEVO BIVALIŠČE
VRSTA HRASTA

PODROČJE VIDNOSTI DELN. MRKA
ŽELEZO
SIMBOL ZA GOSTOTO
IGRALEC BOGATAJ

OLJKOV LES
TRNAT GRM Z RDEČIMI JAGODAMI
UDAV

DIVJE EVR. GOVEDO
RAZPOKA V SKALOVJU
KOREOGRAF OTRIN
TURŠKA ČEPICA

GR. BOG SONCA
SLONOV ZOB
KRAJ JUŽNO OD MARIBORA
ČAKOVEC

...VEC ...TNER
...PIS, ...ČRT
MAJHNO JAJCE MOŠ. SPOLA
ŠOLAR
SESTAV TREH PEVCEV
NATOVA LETALSKA BAZA V ITALIJI

MALA SOVA
FOLIJA ZA OPAZOVANJE SONCA
TUJA RASTLINA
NOŽICA PRI ČIPU

SL. VESLAČ (IZTOK)
TEKOČA JED
GLAVNO MESTO AZERBAJ-DŽANA
PRITOK DRAVE PRI LIENZU V AVSTRIJI
VELIKA PTICA UJEDA Z BRKI
ELDA VILER
REKA ANIŽA (ORIG.)

PODROČJE POPOLNEGA SONČEVEGA MRKA
VINKOVCI

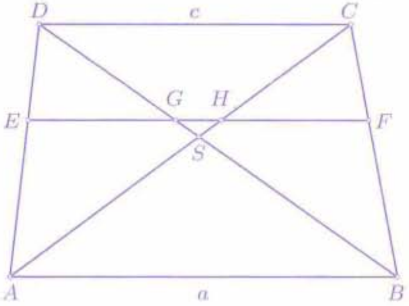
...IJSKA ...EDNICA ...LKA)
ŠVICARSKI SMUKAČ (BRUNO)

...AČKA
UROŠ LIPUŠČEK
ŠTEVILO MOŽ V CENTURIJI

KAKO STA SKLEPALA NINA IN ŽIGA?

Zanimalo ju je, koliko meri odsek na srednjici trapeza med diagonalama trapeza, za katerega poznamo dolžini osnovnic a in c, $a > c$. Narisala sta naslednjo sliko, poimenovala pomembne točke, sklepala in računala.

Ker je daljica EF srednjica trapeza, sta G in H razpolovišči diagonal BD in AC. Daljica EG je srednjica v trikotniku ABD, daljica HF je srednjica v trikotniku ABC in daljica GH je srednjica v trikotniku CDS. Zato je:



$$
\begin{aligned}
|EG| &= \frac{1}{2}|AB| = \frac{a}{2}\\
|HF| &= \frac{1}{2}|AB| = \frac{a}{2}\\
|GH| &= \frac{1}{2}|CD| = \frac{c}{2}
\end{aligned}
$$

Iskani odsek je dolg $c/2$. Nista verjela, zato sta naredila preizkus. Preizkus je pokazal naslednji rezultat: $|EF| = s = |EG| + |GH| + |HF| = a + c/2$. To pa ni enako znanemu rezultatu $s = 1/2(a + c)$.

Kje sta naredila napako?

— — —

Ugotovila sta, da daljica GH ni srednjica v trikotniku CDS. Poskusila sta znova. Tokrat sta opazovala trikotnika DAC in ABD. V prvem je srednjica daljica EH, v drugem pa daljica EG. Zato je

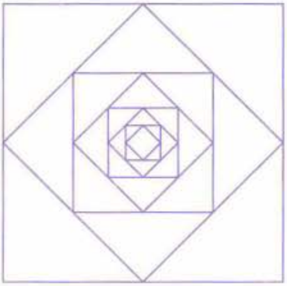
$$
\begin{aligned}
|EH| &= \frac{c}{2},\\
|EG| &= \frac{a}{2},\\
|EH| &= |EG| + |GH| \quad \text{in zato}\\
\frac{c}{2} &= \frac{a}{2} + |GH|.
\end{aligned}
$$

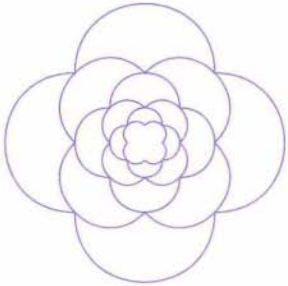
Torej $|GH| = (c - a)/2$.

To pa spet ne bo pravilno, saj je stranica a daljša od stranice c. Kje je skrita še ena napaka?

Silva Kmetič

KVADRATNE ROŽE – Rešitev s str. 3





Ukvarjali se bomo z risanjem (kvadratnih) rož. Na levem delu zgornje slike je prikazana taka roža reda 8. Sestavljena je iz osmih (zato je reda 8) koncentričnih kvadratov, pri čemer je vsak naslednji kvadrat "včrtan" v prejšnjega.

Kaj so podatki, ki nam opišejo kvadratno rožo? Gotovo red rože in velikost zunanjega kvadrata, poleg tega pa še mesto na zaslonu, kjer je roža narisana, in smer, v katero je obrnjena. Ukaz, ki ga bomo sestavili, bo imel dva parametra: red rože n in velikost zunanjega kvadrata a. Rožo bomo začeli risati na mestu, kjer se bo ob klicu ukaza nahajala želva, narisana pa bo naprej in v desno glede na smer, v katero je obrnjena želva. Če je želva obrnjena navzgor, to pomeni, da rožo začnemo risati v levem spodnjem vogalu.

Premislimo še, kako bomo zastavili rekurzijo. Roža reda n je sestavljena iz zunanjega kvadrata in primerno pomanjšane rože reda $n-1$, postavljene na pravo mesto in zasukane za 45°. Velikost manjše rože je ravno polovica diagonale zunanjega kvadrata, torej bo drugi parameter pri rekurzivnem klicu enak $a/\sqrt{2}$ (za izračun korena uporabimo logov ukaz `SQRT`). Pred klicem se moramo iz vogala pomakniti naprej za polovico stranice in se za 45° zasukati v desno. Med premikanjem bomo dvignili pero, da preprečimo morebitne "dvojne" črte zaradi nenatančnega risanja.

```
TO kvadratna_roza :n :a
; Nariše kvadratno rožo reda n z zunanjo stranico dolžine a.
  IF :n<1 [STOP]
  REPEAT 4 [FD :a RT 90]
  PU FD :a/2 PD RT 45
  kvadratna_roza :n-1 :a/SQRT 2
END
```

Omenimo še nekaj programerskih malenkosti. Pogoj v ukazu `IF`, s katerim končamo rekurzijo, je postavljen "varno": `:n<1`. Če bi napisali `:n=0`, bi se hitro našel radovedni risar, ki bi poskušal narisati kvadratno rožo negativnega reda. In že bi bili v "neskončni" zanki. Tako pa pri negativnem redu ne narišemo ničesar. Zavedati se tudi moramo, da se po koncu risanja rože želva nahaja drugje, kot je bila na začetku. Na začetku je v vogalu rože, na koncu pa nekje pri središču (čim večji je red, tem bližje središču je na koncu). Če želimo, da bo želva na koncu na istem mestu (in enako zasukana) kot na začetku, pred ukaz `END` vrinemo vrstico:

```
LT 45 PU BK :a/2 PD
```

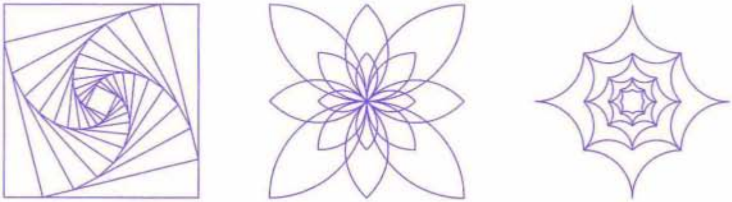
Poglejmo še, kako bi rožo narisali brez rekurzije, v zanki. Da bo slika bolj zanimiva, bomo namesto štirih daljic, zloženih v kvadrat, narisali štiri navzven obrnjene polovične krožnice. Tako dobimo *okroglo rožo*; taka roža reda 6 je prikazana na desnem delu uvodne slike. Še to, v MSWLogu krožne loke rišemo z ukazoma `ARC` in `ARC2`. Mi bomo uporabili drugi ukaz. Podamo mu dva parametra, kot in polmer. Ukaz nariše krožni lok, ki je del krožnice izbranega polmera in ustreza podanemu kotu, pri čemer središče krožnice leži v desno glede na usmeritev želve. Risanje se prične na mestu, kjer se nahaja želva, in v smeri, v katero le-ta gleda. Ukaz želvo premakne. Po ukazu se želva nahaja na koncu narisanega loka. Enako kot pri ukazih za premike in zasuke lahko tudi ukazu `ARC2` za kot podamo negativno vrednost. Risanje tedaj poteka v smeri, ki je nasprotna usmeritvi želve.

```
TO okrogla_roza :n :a
; Nariše okroglo rožo reda n s premerom zunanje polkrožnice a.
  IF :n<1 [STOP]
  REPEAT :n [
    REPEAT 4 [ARC2 -180 :a/2 RT 90]
    PU FD :a/2 PD RT 45
    MAKE "a :a/SQRT 2
  ]
END
```

Mimogrede, morda ste opazili, da smo v ukazu `kvadratna_roza` stranice kvadratov risali v smeri urnega kazalca, pri ukazu `okrogla_roza` pa krožne loke rišemo v nasprotni smeri. S samih slik te razlike seveda ne moremo razbrati.

Kako pa bi pri nerekurzivnem ukazu ohranili začetni položaj in usmeritev želve? Vpeljali bi pomožni lokalni spremenljivki (ukaz `LOCAL`), pred začetkov risanja v njiju shranili trenutni položaj in usmeritev želve (trenutni položaj želve izvemo z ukazom `POS`, usmeritev pa z ukazom `HEADING`), po koncu risanja pa bi želvo vrnili na začetni položaj in ji določili začetno usmeritev (uporabimo ukaza `SETPOS` in `SETHEADING`, za parametra pa vzamemo vrednosti pomožnih spremenljivk).

Končajmo z nekaj izzivi za nadaljnje delo.



Vse gornje like lahko narišemo z ukazi, ki se le malo razlikujejo od predstavljenih ukazov za risanje rož. Poskusite jih sestaviti!

Martin Juvan

LAHEK KRIPTARITEM – Rešitev s str. 43

1. $* = 2$, $\nabla = 1$, $? = 3$, $\oplus = 0$ in velja enakost

$$2130_{(4)} + 3121_{(4)} = 11311_{(4)}\,.$$

2. Osnova številskega sistema je lahko katerokoli naravno število a, ki je večje ali enako 4. Tedaj je

$$* = a - 2\,, \quad \nabla = 1\,, \quad ? = 3\,, \quad \oplus = 0\,.$$

Za $a = 10$ je naš račun videti takle:

$$8130 + 3181 = 11311.$$

Res je pravilen.

Marija Vencelj

NALOGA S PROBLEMOM – Rešitev s str. 24

Če izberemo oznake

$s =$ razdalja od Matevževega doma do gorskega cilja

$x =$ dolžina poti v hrib (ali z njega)

$t_1 =$ čas vožnje (v urah) po ravnini v eno smer

$t_2 =$ čas vožnje v hrib

$t_3 =$ čas vožnje s hriba

velja

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{s-x}{24} \\ t_2 &= \frac{x}{18} \\ t_3 &= \frac{x}{36} \\ 2t_1 + t_2 + t_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

- Dobili smo štiri enačbe za pet neznank, iz česar bi lahko na hitro sklepali, da je v nalogi podatkov premalo.

- Z vstavljanjem prvih treh zvez v četrto dobimo enačbo

$$2 \cdot \frac{s-x}{24} + \frac{x}{18} + \frac{x}{36} = 2$$

  in iz nje $s = 24$.
  V zgornji enačbi je namreč koeficient pri x enak 0; enačba je linearna z eno samo neznanko s.

- Razlog za to, da je koeficient pri x enak nič in s tem naloga rešljiva, je v tem, da je Matevž za vožnjo v hrib in s hriba skupaj porabil toliko časa, kot bi ga potreboval za enako dolgo pot po ravnini: $\frac{2x}{24} = \frac{x}{18} + \frac{x}{36}$. Zvezo med hitrostmi lahko zapišemo tudi takole:

$$24 = \frac{2}{\frac{1}{18} + \frac{1}{36}},$$

  kar pove, da je bila Matevževa hitrost po ravnini harmonična sredina njegovih hitrosti v hrib in z njega. Pri vsakem takem medsebojnem odnosu izbranih hitrosti je naloga rešljiva.

- Pri nalogah, ki govore o veslanju po mirni vodi in po reki s tokom ter proti toku, navadno vzamemo, da se pri veslanju s tokom lastni hitrosti v_v veslača (v mirni vodi) prišteje hitrost reke v_r, pri veslanju proti toku pa se lastna hitrost veslača zmanjša za hitrost toka reke. Torej je hitrost veslača v mirni vodi enaka

$$v_v = \frac{1}{2}[(v_v + v_r) + (v_v - v_r)],$$

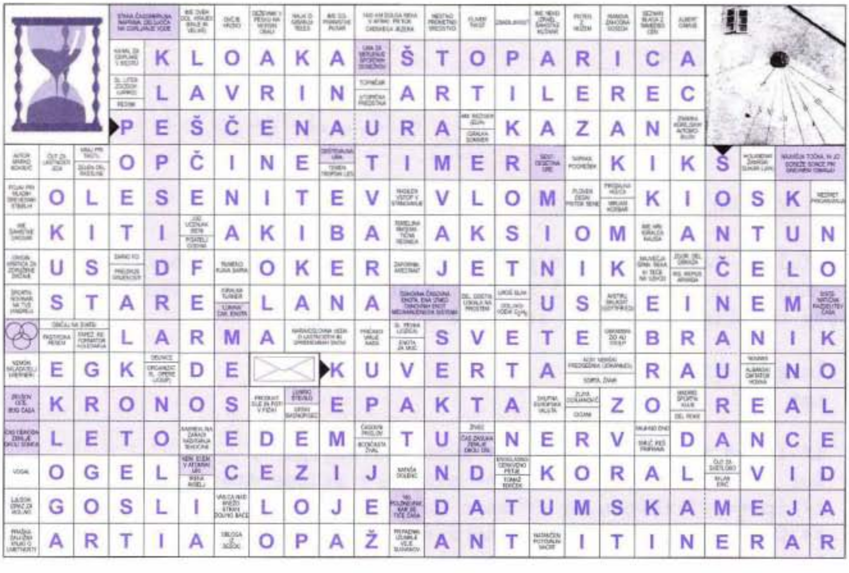
kar je aritmetična sredina hitrosti veslanja s tokom in proti njemu. Nalogo s kolesarjem bi torej lahko preoblikovali v veslaško le v primeru, ko je aritmetična sredina povečane in pomanjšane hitrosti enaka njuni harmonični sredini. Aritmetična sredina dveh pozitivnih števil pa je enaka njuni harmonični sredini le v primeru, kadar sta števili enaki. Od tod bi sledilo

$$v_v + v_r = v_v - v_r$$

oziroma, da je hitrost reke $v_r = 0$. Torej bi v nalogi reke sploh ne bilo!

Marija Vencelj

KRIŽANKA "MERJENJE ČASA" – Rešitev s str. 32



PREPISOVANJE KNJIG – Rešitev s str. 25

Ugotoviti moramo, koliko časa potrebuje P pisarjev, da prepiše K knjig. Vpeljimo nekaj oznak. S s_i bomo označili število strani, ki jih ima knjiga i, s $T_{p,k}$ pa čas, ki ga za prepis prvih k knjig potrebuje p pisarjev. Ker je čas, ki ga pisar porabi za prepis knjige, sorazmeren s številom strani, ki jih ima knjiga, lahko čas merimo kar s številom strani. Tako je

$$T_{1,k} = \sum_{i=1}^{k} s_i \qquad \text{in} \qquad T_{p,1} = s_1 \,,$$

saj mora edini pisar sam prepisati vse knjige, vsako knjigo pa mora v celoti prepisati en sam pisar.

Premislimo, kako poteka dodeljevanje knjig posameznim pisarjem. Zadnji pisar lahko ne prepiše nobene knjige, lahko prepiše samo zadnjo knjigo, samo zadnji dve knjigi,..., zadnjih i knjig ali pa kar vse knjige (no, če imamo vsaj dva pisarja, zadnja možnost gotovo ni najboljša). Knjige, ki jih ne vzame zadnji pisar, prepišejo drugi pisarji. Recimo, da zadnji pisar prepisuje zadnjih $K - i$ knjig. Čas, ki ga porabi za prepisovanje, je enak $\sum_{j=i+1}^{K} s_j$. Čas, ki ga porabi preostalih $P - 1$ pisarjev za prepis prvih i knjig, pa je enak $T_{P-1,i}$. Tako smo izpeljali naslednjo rekurzivno zvezo:

$$T_{p,k} = \min_{0<i\leq k} \max\{ \sum_{j=i+1}^{k} s_j, T_{p-1,i}\} \quad \text{za} \quad p \geq 2 \,.$$

Izračun zapišimo kot rekurzivno funkcijo v jeziku C:

```
/* Koliko časa potrebuje p>0 pisarjev za prepis k>0 knjig.
   Knjiga i ima s[i - 1] strani. Slaba rekurzivna varianta. */
long cas1(int p, int k, int s[])
{
  long t, t1, S = 0L;
  int i;

  if (k == 1) return s[0]; /* samo ena knjiga */
  for (i = 0; i < k; i++) S += s[i]; /* skupno število strani */
  if (p == 1) return S; /* samo en pisar */
  /* Uporabili bomo rekurzivno zvezo. */
  t = S; /* zgornja meja za čas prepisovanja */
```

```
  for (i = 1; i <= k; i++) {
    S -= s[i - 1]; /* Pripravimo prvo vsoto za max. */
    t1 = cas1(p - 1, i, s); /* Pripravimo drugi člen za max. */
    if (S > t1) t1 = S; /* max */
    if (t1 < t) t = t1; /* Računanje minimuma. */
  }
  return t;
} /*cas1*/
```

Najprej par programerskih opomb: Ne smemo pozabiti, da se tabele v C-ju vedno začno z indeksom 0. Za tip funkcije `cas1` in za nekatere pomožne spremenljivke smo uporabili tip `long`. Pri nekaj deset debelih knjigah bi se sicer lahko zgodilo, da bi pri seštevanju strani prišlo do prekoračitve obsega.

Zdi se, da funkcija deluje zadovoljivo. A le na prvi pogled. Domača knjižnica mora imeti vsaj nekaj deset knjig (no, ne bodimo skromni; nekaj deset knjig je knjižna polica, za domačo knjižnico jih rabimo nekaj sto). Ste poskusili funkcijo za 10 pisarjev in 50 knjig? Niste? (Veste, saj vam ni treba vtipkati števila strani vseh knjig. Lahko jih določite kar s programom.) Sam sem poskusil, a nisem dočakal odgovora. Funkcija je namreč zastavljena nekoliko nerodno, še posebej pa je občutljiva na povečevanje števila pisarjev. Če malce premislimo, kako računa, ugotovimo, da v bistvu preizkusi vse dopustne razdelitve knjig med pisarje. Za P pisarjev in K knjig pa je teh možnosti kar $\binom{K+P-1}{P-1}$. Na primer, pri $P = 10$ in $K = 50$ dobimo $\binom{59}{9} = 12\,565\,671\,261$, odločno preveč, da bi vse te možnosti lahko pregledali z računalnikom.

Vendar pa nam še ni treba obupati. V rekurzivni zvezi nastopa le $P \cdot K$ različnih vrednosti $T_{p,k}$, torej funkcija nekatere računa po večkrat. Seveda, če na primer zadnji pisar vzame eno knjigo, predzadnji pa dve, ali pa zadnji dve knjigi, predzadnji pa eno, v obeh primerih v nadaljevanju z rekurzijo izračunamo vrednost $T_{P-2,K-3}$. Predvsem s povečevanjem števila pisarjev se število ponovljenih računov hitro povečuje.

Sedaj, ko smo odkrili problem, je rešitev preprosta: že izračunane vrednosti si je treba zapomniti. Odločimo se za globalno dvorazsežno tabelo (matriko):

```
long T[MAXP][MAXK] = {{0}};
```

Pri tem sta `MAXP` in `MAXK` simbolični konstanti, ki določata največje število pisarjev oziroma knjig (na primer 25 pisarjev in 500 knjig). Poskrbeli smo tudi, da so začetne vrednosti v matriki nastavljene na 0. Ta vrednost pomeni, da element še ni bil izračunan. Prilagoditi moramo še telo funkcije.

Na začetek dodamo pogojni stavek, v katerem pogledamo, ali je iskana vrednost že izračunana v matriki T:

```
if (T[p - 1][k - 1] != 0) return T[p - 1][k -1];
```

Seveda ne smemo spregledati, da gresta oba indeksa od 0 naprej. Dodati moramo še shranjevanje novo izračunanih vrednosti v matriko T. To storimo tako, da dopolnimo vse tri vrstice s stavki return:

```
if (k == 1) return T[p - 1][k - 1] = s[0]; /* samo ena knjiga */
if (p == 1) return T[p - 1][k - 1] = S; /* samo en pisar */
return T[p - 1][k - 1] = t;
```

Če smo funkciji tudi spremenili ime, moramo paziti, da pri rekurzivnem klicu pokličemo novo funkcijo.

Dopolnjena funkcija je bistveno hitrejša in dovolj hitra, da z njo lahko izračunamo, koliko časa potrebuje nekaj deset pisarjev za prepis nekaj sto knjig. Še vedno pa jo je mogoče še nekoliko izpopolniti. Naredili bomo tri spremembe. Najprej bomo spremenili način računanja in se odpovedali rekurziji. Vrednosti iz matrike T bomo računali od prve proti zadnji vrstici. Vrednosti v prvi vrstici in v prvem stolpcu poznamo, druge pa bomo naračunali s pomočjo rekurzivne zveze. Opazimo tudi, da je treba velikokrat seštevati vrednosti iz tabele s. Temu se bomo izognili tako, da bomo S spremenili v tabelo in vanjo vnaprej naračunali delne vsote elementov iz s: $S_i = \sum_{j=1}^{i} s_j$. Tako nekoliko pospešimo delovanje funkcije. Zadnja sprememba bo prihranila precej pomnilnika. Opaziti moramo, da pri računanju elementa matrike T potrebujemo le elemente iz prejšnje vrstice. Zato med računanjem ne potrebujemo cele matrike, ampak le tabelo, v kateri hranimo del prejšnje (začetni del) in del trenutne vrstice (končni del). Pri tem elemente v trenutni vrstici računamo od konca proti začetku.

```
/* Koliko časa potrebuje p>0 pisarjev za prepis k>0 knjig.
   Knjiga i ima s[i - 1] strani. Nerekurzivna varianta.     */
long cas3(int p, int k, int s[])
{
  long S[MAXK]; /* delne vsote za število strani v prvih knjigah */
  long T[MAXK]; /* prejšnja/tekoča vrstica matrike */
  int i, j, x;
```

```
  T[0] = S[0] = s[0]; /* Izračun delnih vsot in prve vrstice. */
  for (i = 1; i < k; i++) T[i] = S[i] = S[i - 1] + s[i];
  /* Zanka po vrsticah matrike. */
  for (i = 1; i < p; i++) {
    /* Zanka po knjigah od konca proti začetku vrstice. */
    /* V T[0],...,T[j] so vrednosti iz prejšnje vrstice. */
    for (j = k - 1; j > 0; j--) { /* Opomba: T[0] ostaja enak. */
      /* Zanka za minimum. Začetni kandidat je kar T[j]. */
      for (x = j - 1; x >= 0; x--) {
        long t = S[j] - S[x];
        if (T[x] > t) t = T[x]; /* max */
        if (t < T[j]) T[j] = t; /* min */
      }
    }
  } /*for po vrsticah=pisarjih*/
  return T[k - 1];
} /*cas3*/
```

Tako, pri koncu prispevka smo, čeprav še nismo izkoristili prav vseh možnosti za izboljšave. Tako nismo nikjer upoštevali, da prvi izraz znotraj maksimuma v rekurzivni formuli z rastočim indeksom i pada, drugi izraz pa raste. Tako bi lahko i, pri katerem je večji od obeh izrazov najmanjši, poiskali z varianto bisekcije. A to je že druga zgodba. Pa tudi o tem, kako zares razdelimo delo med pisarje, nismo nič napisali. Naj samo omenim, da lahko optimalno razdelitev z nekaj dodatnega dela razberemo iz matrike vrednosti $T_{p,k}$, še lažje pa jo na "požrešni način" določimo iz rezultata $T_{P,K}$.

Martin Juvan

ZLOŽENKI – Rešitev s str. 45

1.

N	O	R	M	A
F	O	K	U	S
B	I	N	O	M
N	A	R	I	S
R	A	D	I	J

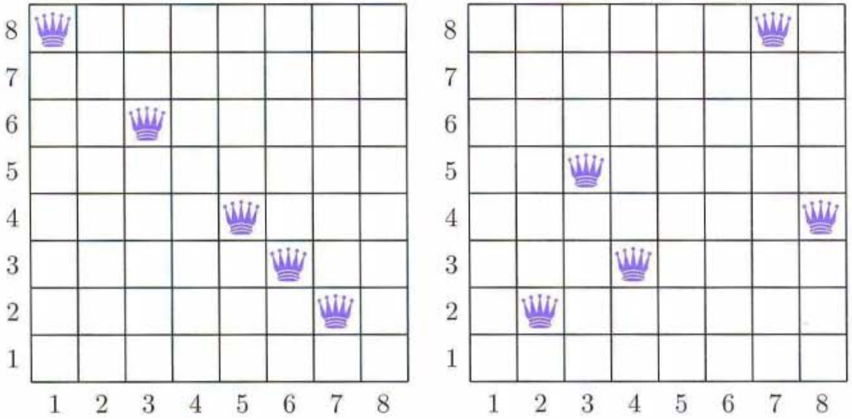
2.

T	R	E	N	D
D	O	K	A	Z
N	I	Č	L	A
K	O	C	K	A
V	S	O	T	A

Dragoljub M. Milošević

KRALJICE NAPADAJO – Rešitev s str. 21

1. Iskani postavitvi kraljic sta prikazani na spodnji sliki.



2. Postavitev z osmimi trdnjavami ni dobra (8 trdnjav ne napada vseh polj šahovnice) natanko tedaj, ko obstajata vrstica, v kateri sta vsaj dve trdnjavi, in stolpec, v katerem sta vsaj dve trdnjavi. Za šahovnico velikosti $n \times n$ potrebujemo n trdnjav, za postavitve, ki niso rešitve, pa lahko rečemo isto kot v primeru 8×8.

3. Splošna formula za najmanjše število kraljev, ki napadajo vsa polja šahovnice velikosti $n \times n$, je $\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor^2$. Za šahovnico 8×8 torej potrebujemo 9 kraljev.

Boštjan Brešar

DA SE TI ZMEŠA – Rešitev s str. 2

Starosti treh rodov sovaščanov prikazuje naslednja tabela:

	Anton	Blaž	Cene
starejši	72	80	85
mlajši	48	53	57
najmlajši	24	26	29

Marija Vencelj

34. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

Potem ko je 19. marca 1999 približno 40 000 učencev od 2. do 8. razreda na šolskem tekmovanju za bronasto Vegovo priznanje reševalo naloge Evropskega matematičnega kenguruja, se je 17. aprila 1653 šestošolcev, 1582 sedmošolcev in 1598 osmošolcev na področnem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 563 učencev 6. razreda, 471 učencev 7. razreda in 498 učencev 8. razreda. Tudi letos so učenci reševali naloge v dveh sklopih. Prvih osem nalog je bilo izbirnega tipa z obkrožanjem ustreznega odgovora, nato pa še tri "klasične" naloge. Predstavljamo vam naloge, ki jih je pod predsedstvom prof. Terezije Uran izbrala državna tekmovalna komisija.

6. razred

A1 Katero izmed naštetih števil je 15-krat večje kot $\frac{1}{25}$?

(A) 0,04 (B) 0,12 (C) 0,15 (Č) 0,6 (D) $\frac{5}{3}$

A2 Kolikšen del največjega trikotnika je osenčen?

(A) tretjina (B) četrtina (C) osmina

(Č) devetina (D) dvanajstina

A3 Peter je imel 105 kock. Nekaj jih je vzel zase, druge je razdelil petim prijateljem. Prvemu je dal eno kocko več kot sebi, vsakemu naslednjemu pa eno kocko več kot predhodnemu.
Koliko kock je vzel Peter?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (Č) 16 (D) 21

A4 Število ima obliko 312312 ... 312.
Koliko mest ima najmanjše število take oblike, ki je deljivo z 9?

(A) 12 (B) 9 (C) 6 (Č) 4 (D) 3

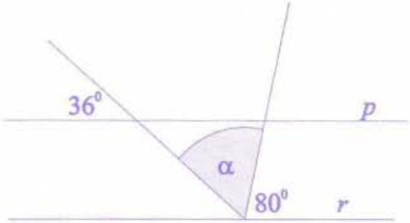
A5 Na ravni cesti je 9 avtobusnih postaj. Razporejene so v enakih medsebojnih razdaljah. Razdalja med prvo in tretjo je 600 m.
Kolikšna je razdalja med prvo in zadnjo postajo?

(A) 600 m (B) 1600 m (C) 1800 m (Č) 2400 m (D) 2700 m

A6 Koliko meri kot α $(p \parallel r)$?

(A) 64° (B) 60° (C) 45°

(Č) 44° (D) 36°



A7 V piceriji Matka ponujajo tri vrste testa za pice in osem različnih vrst oblog. Gost lahko izbira med štirimi velikostmi pic.
Koliko različnih pic lahko izbere?

(A) 15 (B) 24 (C) 96 (Č) 114 (D) 120

A8 Trikotnik $\triangle ABC$ ima stranice $a = 7$ cm, $b = 11$ cm in c.
Dolžina stranice c je:

(A) $c > 18$ cm (B) $1 \text{ cm} < c < 4$ cm (C) $c < 4$ cm

(Č) $18 \text{ cm} < c < 20$ cm (D) $4 \text{ cm} < c < 18$ cm

B1 Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \frac{2}{7} \cdot \left(0,4 + \frac{5}{6} - \frac{7}{30}\right)\right) \cdot \left(1 + 0,4\right)$$

B2 Pravokotno ploščo dolžine 363 cm in širine 231 cm želimo razrezati na čim večje enake dele kvadratne oblike. (Mersko število dolžine stranice kvadrata je naravno število.)

a) Kako dolga bo stranica kvadrata?

b) Na koliko skladnih kvadratov bomo razrezali pravokotno ploščo?

B3 Načrtaj in označi trikotnik $\triangle ABC$: $\overline{BC} = a = 5$ cm, velikost kota $\sphericalangle ACB$ je $\gamma = 60^\circ$, razdalja med stranico $b(AC)$ in središčem trikotniku očrtane krožnice je 2 cm. (Kot 60° načrtaj s šestilom in ravnilom.)

7. razred

A1 Ko delimo 3^{23} s 5, dobimo ostanek:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (Č) 3 (D) 4

A2 Trije učenci skupaj opravijo delo v 15 urah.
V kolikšnem času opravi enako delo pet učencev? (Vsi učenci so enako prizadevni.)

(A) v 5 urah (B) v 9 urah (C) v 15 urah

(Č) v 25 urah (D) v 45 urah

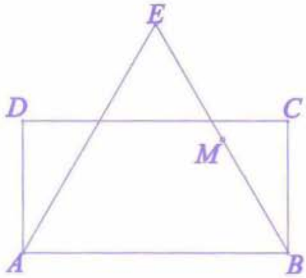
A3 Količnik števil a in b ($a \neq 0$, $b \neq 0$) pomnožimo s produktom teh dveh števil. Dobimo:

(A) 1 (B) a (C) a^2 (Č) $\frac{1}{b}$ (D) $\frac{1}{b^2}$

A4 V pravokotniku $ABCD$ je stranica $a = \overline{AB}$ dvakrat daljša od stranice $b = \overline{BC}$. Trikotnik $\triangle ABE$ je enakostraničen. Točka M je središče (razpolovišče) stranice BE. Kot $\sphericalangle CMB$ meri:

(A) 30° (B) 60° (C) 75°

(Č) 90° (D) 150°



A5 Vrednost izraza $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \cdots - 60$ je:

(A) -60 (B) -30 (C) 0 (Č) 36 (D) 60

A6 Imam pet zajčkov. Njihova povprečna starost je 28 tednov. Najmlajši šteje 19 tednov, naslednji trije 23, 28 in 41 tednov. Peti zajček ima:

(A) 39 tednov (B) 37 tednov (C) 31 tednov

(Č) 29 tednov (D) 18 tednov

A7 Ploščina trapeza meri 96 cm^2, višina pa 6 cm. Osnovnici se razlikujeta za 4 cm in merita:

(A) 16 cm in 20 cm (B) 14 cm in 18 cm (C) 12 cm in 16 cm

(Č) 10 cm in 14 cm (D) 8 cm in 12 cm

A8 Vrednost izraza $\sqrt{17^2 - 15^2} - (\sqrt{17^2} - \sqrt{15^2})$ je:

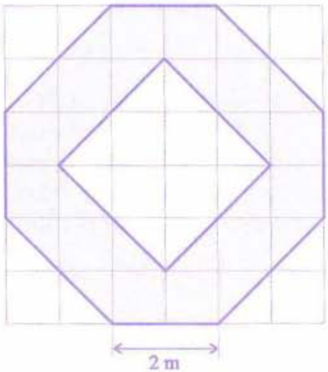
(A) 0 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (Č) 4 (D) 6

B1 Izračunaj vrednost izraza:

$$\sqrt{\left(8,5-\frac{12}{11}:\frac{16}{33}\right):\frac{25}{16}}+\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{5}{18}\right)^3:\frac{1}{8}}+$$
$$+\sqrt{10\cdot\frac{1}{2}\cdot 0,8}$$

B2 a) Koliko odstotkov ploščine osenčenega lika je ploščina kvadrata?

b) Za koliko je obseg osemkotnika večji od obsega kvadrata?



B3 Posoda, napolnjena z vodo, tehta 2 kg. Če odlijemo 20 % vode, se skupna masa posode in vode zmanjša na 88 % prvotne.

Koliko tehta prazna posoda?

8. razred

A1 Če je $\sqrt{x+5}=8$, potem je x:

(A) 3 (B) 9 (C) 11 (Č) 59 (D) 69

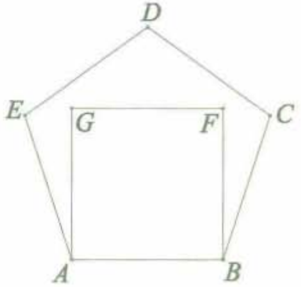
A2 Vrednost katere potence je največja:

(A) 1^{200} (B) 2^{300} (C) 3^{200} (Č) 4^{100} (D) 5^{100}

A3 V marmeladi je 37,5 % sladkorja, ostalo je sadje. Sadje in sladkor sta v razmerju:

(A) $8:3$ (B) $8:25$ (C) $25:8$ (Č) $3:5$ (D) $5:3$

A4 Pravilni petkotnik $ABCDE$ in kvadrat $ABFG$ na sliki imata enako dolgi stranici. Velikost kota $\sphericalangle FCD$ je:



(A) 18° (B) 27° (C) 30°

(Č) 33° (D) 81°

A5 Če je $a \cdot a = a$, potem je $a + a$:

(A) 0 ali 3 (B) 0 ali 1 (C) 0 ali 2 (Č) 1 ali 2 (D) -1 ali 1

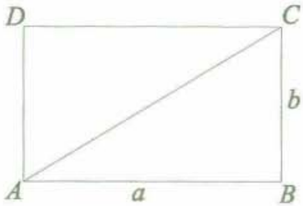
A6 Polmer krogle in diagonala kocke, ki je krogli včrtana, sta v razmerju:

(A) $1 : \sqrt{2}$ (B) $1 : \sqrt[3]{\pi}$ (C) $1 : \sqrt{3}$ (Č) $1 : 2$ (D) drugo

A7 Vsota obratnih vrednosti pozitivnih deliteljev števila 12 je:

(A) $\frac{7}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{4}{3}$ (Č) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{1}{28}$

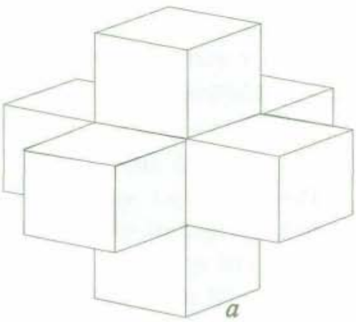
A8 V pravokotniku $ABCD$ meri krajša stranica 5 cm, daljša stranica in diagonala pa oklepata kot 30°. Diagonala pravokotnika je dolga:



(A) $5\sqrt{2}$ cm (B) $5\sqrt{3}$ cm

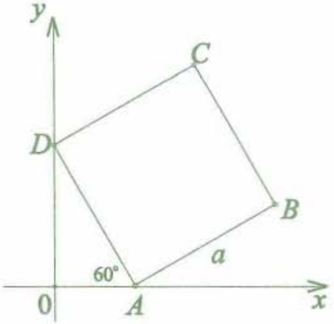
(C) $7\sqrt{2}$ cm (Č) 8 cm (D) 10 cm

B1
a) Izračunaj površino in prostornino telesa na sliki.
b) Koliko kock z robom a moraš dodati danemu telesu, da dobiš kocko z robom $3a$?
c) V kolikšnem razmerju sta površina telesa na sliki in površina kocke z robom $3a$?



B2 Dve števili sta v razmerju $5 : 2$. Če delimo vsoto teh dveh števil z njuno razliko, dobimo količnik 2 in ostanek 8.
Kateri števili sta to?

B3 V koordinatni ravnini je narisan kvadrat $ABCD$ s stranico a.
Koordinate oglišč A, B, C, D zapiši z a.



Aleksander Potočnik

19. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE[1]

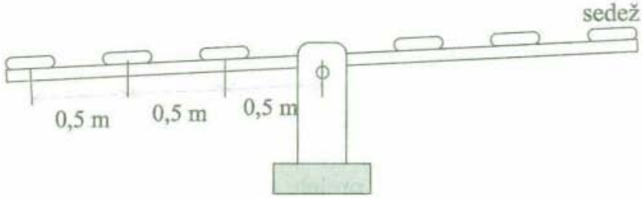
Tekmovalne naloge za 7. razred

Splošna navodila za reševanje nalog

Vsako nalogo rešuj na svoj list! Jasno označi odgovore na posamezna vprašanja iz nalog! Pri vsaki nalogi mora biti razvidno, kako si prišel do rešitve! Piši čitljivo in urejeno!

1. Predmet iz neznanega materiala stehtamo z vzmetno tehtnico. Teža predmeta znaša 20 N. Potem predmet potopimo v vodo in ga stehtamo v vodi. Vzmetna tehtnica pokaže le 5 N.
   a) Kolikšna je prostornina tega predmeta?
   b) Kolikšna je teža predmeta iz enakega materiala, ki ima prostornino 2,5 dm^3?
2. Peter je peljal mlajšega bratca Mateja v park na igrišče. Matej se je hotel gugati na prevesni gugalnici. Gugalnica je imela na vsaki strani tri sedeže (slika 1). Peter je sedel na notranji sedež, Mateja pa je posadil na zunanji sedež. Kolikokrat je Peter težji od Mateja, če sta brata gugalnico lahko obdržala v ravnovesju?

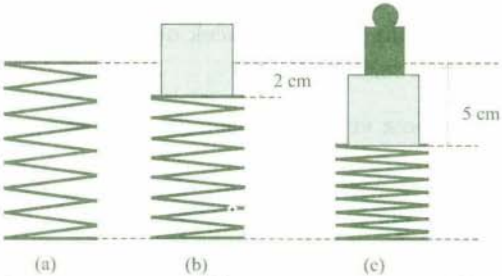
[1] Naloge in rešitve lahko najdete tudi na internetu `http://pef.pef.uni-lj.si/bojang/`



Slika 1. Gugalnica.

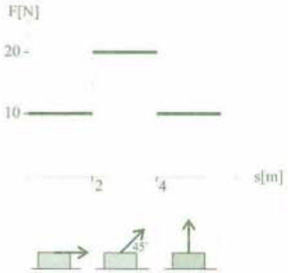
3. Vijačno vzmet postavimo na mizo (slika 2a). Nanjo položimo kocko s težo 1 N. Vzmet se skrči za 2 cm (slika 2b).
   a) Kolikšen je koeficient vzmeti?

   Na kocko položimo še utež (slika 2c).
   b) Kolikšna mora biti utež, da bo vzmet stisnjena za 5 cm?



Slika 2. (a) neobremenjena vzmet, (b) obremenjena vzmet, (c) dodatno obremenjena vzmet.

4. Spodnji diagram prikazuje velikost sile, s katero vlečemo klado po podlagi, v odvisnosti od oddaljenosti od izhodišča. Pod diagramom je označena smer sile v posameznem področju (slika 3). Tako je npr. prva dva metra sila vzporedna s podlago, med četrtim in šestim metrom pa je usmerjena navpično navzgor.



področje	opravljeno delo v tem področju
od 0 do 2 m	
od 2 do 4 m	
od 4 do 6 m	

Slika 3. Velikost in smer sile, ki deluje na klado.

a) Kolikšno delo je prejelo telo na posameznih odsekih poti, kjer sta bili velikost in smer sile stalni? Preglednico prepiši na list in vanjo vpiši rezultate!
b) Nariši diagram dela, ki ga je prejelo telo, v odvisnosti od oddaljenosti od izhodišča!
c) Kolikšno delo je telo prejelo v celoti?

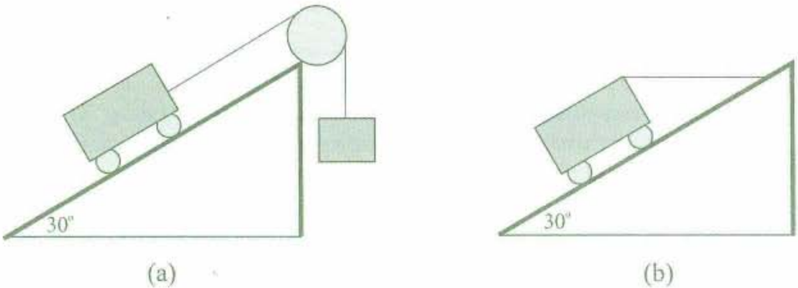
Pri nalogi si lahko pomagaš z načrtovanjem, kjer je mogoče. Če raje računaš, si lahko pomagaš z zvezami, ki veljajo v kvadratu.

5. Na klancu z naklonom 30° miruje voziček s težo 20 N (slika 4a). V mirovanju ga zadržuje viseča utež.

a) S kolikšno silo pritiska voziček ob podlago?
b) Kolikšna je teža uteži?

Utež zamenjamo z vrvico, pritrjeno na klanec v vodoravni smeri (slika 4b).

c) S kolikšno silo je napeta vrvica?
d) S kolikšno silo pritiska voziček na podlago?



Slika 4. (a) Voziček zadržuje na klancu utež. (b) Voziček zadržuje na klancu vodoravna vrvica.

Pomoč k c) in d): Tudi silo vrvice razstavi na komponento, ki je pravokotna na klanec, in na komponento, ki je vzporedna s klancem.

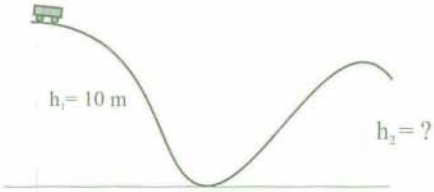
Sile lahko najdeš z računom ali načrtovanjem! Če raje računaš, si lahko pomagaš z zvezami, ki veljajo v enakostraničnem trikotniku.

Tekmovalne naloge za 8. razred

Splošna navodila za reševanje nalog

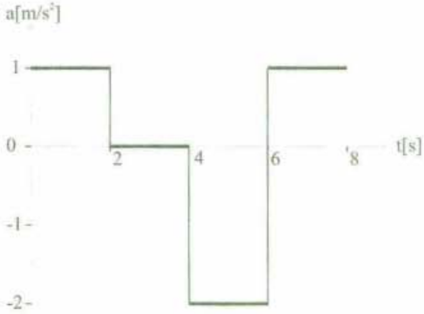
Vsako nalogo rešuj na svoj list! Jasno označi odgovore na posamezna vprašanja iz nalog! Pri vsaki nalogi mora biti razvidno, kako si prišel do rešitve! Piši čitljivo in urejeno!

1. Po toboganu smrti se spusti vagonček z višine 10 m. Kako visok je lahko vzpon, če zaradi trenja in upora zraka izgubi 30% začetne energije? Na vrhu vzpona mora imeti hitrost še vsaj 5 m/s.



Slika 1. Tobogan smrti.

2. Diagram na desni predstavlja pospešek nekega telesa v odvisnosti od časa. Prepiši obe preglednici na poseben list.
   a) Nariši diagram hitrosti v odvisnosti od časa! Telo na začetku miruje.
   b) V preglednico 1 vpiši, kolikšna je hitrost telesa po 1 s, 3 s, 5 s oziroma 7 s?
   c) V preglednico 2 vpiši premik telesa v označenih časovnih obdobjih!
   d) V preglednico 2 vpiši, kje se nahaja telo po 2 s, 4 s, 6 s oziroma 8 s?



Slika 2. Odvisnost pospeška telesa od časa.

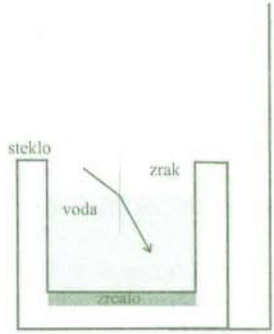
čas [s]	hitrost [m/s]
1	
3	
5	
7	

Preglednica 1.

časovni interval	premik v intervalu [m]	čas [s]	odmik od izhodišča [m]
od 0 s do 2 s		2	
od 2 s do 4 s		4	
od 4 s do 6 s		6	
od 6 s do 8 s		8	

Preglednica 2.

3. Z laserskim kazalnikom posvetimo na vodo v posodi, kot kaže slika 3. Na dnu posode je ogledalo. Nariši pot žarka do navpične stene! Voda je optično gostejša kot zrak in optično redkejša kot steklo. Pri vsakem lomu ali odboju nariši vpadno pravokotnico in označi kot. Enake kote označi z enakimi črkami. Na posebnem listu je povečana slika posode, kamor nariši rešitev.

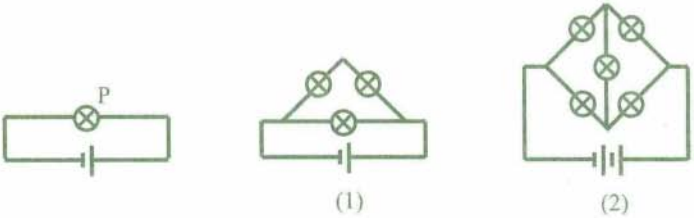


Slika 3. Žarek in posoda z vodo.

Opomba: Pri prehodu iz optično redkejšega sredstva v optično gostejše, je lomni kot manjši od vpadnega. Pri prehodu iz optično gostejšega v optično redkejše pa je obratno.

4. Če priključiš na eno baterijo eno baterijsko žarnico, le-ta sveti polno. Žarnico, ki sveti polno, označi s črko P (slika 4). Iz enakih baterijskih žarnic in enakih baterij sestavimo vezji 1 in 2.

   a) Označi, kako svetijo posamezne žarnice! Tiste, ki svetijo polno, označi s črko P, brleče s črko B. Žarnice, ki ne svetijo, označi s črko N.

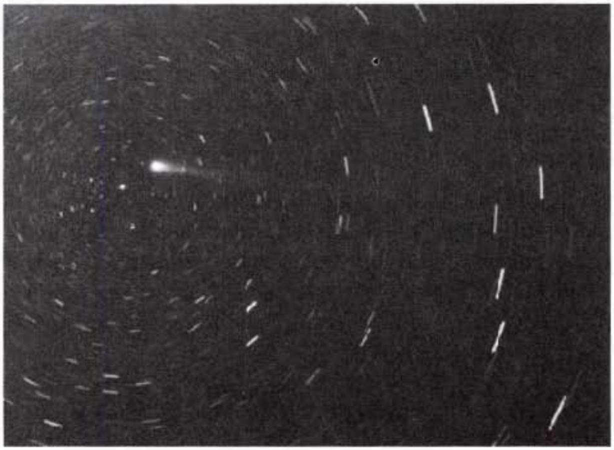


Slika 4. Ena žarnica vezana na eno baterijo sveti polno. Vezje z baterijo in tremi žarnicami (1) in vezje z dvema baterijama in petimi žarnicami (2).

   b) V vezje 1 zveži še eno enako žarnico, v vezje 2 pa dve enaki žarnici. Poveži jih tako, da bodo dodane žarnice svetile polno. Obe vezji nariši.

5. Na spodnji sliki je fotografski posnetek nočnega neba. Na dodatnem listu je fotografija tudi povečana. Rešitve vriši na dodatni list.

a) Na sliki označi Severnico!
b) Kako dolgo je bila odprta zaslonka fotoaparata? Pomagaj si s kotomerom! Razloži, kako si izračunal čas!
c) Na sliki obkroži zvezde, ki pripadajo ozvezdju Velikega medveda (Veliki voz)!



Mojca Čepič

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Izbirno tekmovanje iz matematike je potekalo v soboto, 10. aprila 1999. Tekmovalci so se spoprijeli z naslednjimi nalogami:

Prvi letnik

1. Poišči vsa naravna števila, ki dajo pri deljenju s 154 ostanek 9 in jih je moč zapisati kot vsoto ali razliko dveh praštevil.
2. Ali obstajata realni števili x in y, za kateri velja $x+y=1$, $x^2+y^2=2$ in $x^3+y^3=3$?
3. Dan je kvadrat $ABCD$. Skozi vsako izmed oglišč B, C in D postavimo po eno premico tako, da so vse tri premice med seboj vzporedne. Premica, ki leži med drugima dvema, je od ene oddaljena 5 enot, od druge pa 7 enot. Kolikšna je ploščina kvadrata?
4. Vesela druščina je zavila v picerijo, kjer strežejo samo velike pice, razrezane na 12 kosov. Vsak fant bi pojedel 6 ali 7 kosov pice, vsako dekle pa 2 ali 3 kose. Izkaže se, da bi bile 4 pice premalo, 5 pic pa preveč. Koliko je v druščini fantov in koliko deklet?

Drugi letnik

1. Ali je med naravnimi števili od 1 do 1 000 000 več takšnih, ki jih je moč zapisati kot vsoto popolnega kvadrata in popolnega kuba, ali takšnih, ki jih ni moč zapisati v tej obliki?
2. Naj bodo A, B in C različne točke v ravnini. Določi množico takih točk X v ravnini, za katere velja $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AX}$.
3. Dan je tak trikotnik ABC in točka R na stranici AB, da obstaja krožnica, ki se dotika stranice AB v točki R, trikotniku ABC očrtane krožnice pa v točki C. Dokaži, da leži točka R na simetrali kota $\sphericalangle BCA$.
4. Janezek je na vsakega od desetih listkov napisal po eno naravno število (ni nujno, da je zapisal deset različnih števil). Ko je na vse možne načine jemal po devet izmed desetih listkov in števila s teh listkov seštel, je dobil naslednje med seboj različne vsote: 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 92. Katera števila so bila napisana na listkih?

Tretji letnik

1. Naj bodo α, β in γ rešitve enačbe $x^3 - x - 1 = 0$. Izračunaj vrednost izraza $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$.
2. Notranja simetrala kota $\sphericalangle ABC$ enakokrakega trikotnika ABC z vrhom A seka stranico AC v točki D. Koliko meri kot $\sphericalangle BAC$, če je $|BC| = |BD| + |AD|$?
3. Med dolžinami stranic a, b in c trikotnika ABC ter dolžinami stranic u, v in w trikotnika UVW veljajo zveze: $a^2 = u(v + w - u)$, $b^2 = v(w + u - v)$ in $c^2 = w(u + v - w)$. Dokaži, da je trikotnik ABC ostrokoten.
4. Imamo dva karirasta lista velikosti $n \times n$, kjer je n naravno število. Na obeh pobarvamo enako število enotskih kvadratkov modro, ostale pa pobarvamo rdeče. Dokler je barva še sveža, lista staknemo s pobarvanima stranema skupaj tako, da se prekrijeta in se barve pomešajo. Dokaži, da je število nastalih vijoličnih kvadratkov sodo. (Vijolične kvadratke dobimo, ko se pomešata rdeča in modra barva.)

Četrti letnik

1. Dana je funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katero velja $f(m+n) \geq f(m) + f(n) - 1$ pri poljubnem paru $m, n \in \mathbb{N}$ in $f(1) > 1$ ter $f(3000) < 3002$. Določi vrednost $f(1999)$.
2. Izračunaj vsoto $6 + 66 + 666 + \cdots + \overbrace{666\ldots66}^{1999 \text{ šestic}}$.

3. Izberimo poljubno točko M na enakostraničnemu trikotniku ABC očrtani krožnici. Dokaži, da je vrednost izraza $|MA|^4 + |MB|^4 + |MC|^4$ neodvisna od izbire točke M.

4. Oglejmo si naslednjo igro za dva igralca. Na začetku prvi igralec postavi žeton na poljubno polje šahovnice velikosti $n \times n$. Igralec, ki je na potezi, v nadaljevanju premakne žeton na poljubno sosednje polje, če to polje do tedaj še ni bilo obiskano. (Polji sta sosednji, če imata skupen rob ali skupno oglišče.) Igralec, ki ne more napraviti poteze, izgubi.
   Kateri igralec zmaga, če oba igrata preudarno?

Matjaž Željko

NALOGE S FIZIKALNEGA PREDTEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 1998/99

Naloge je 17. aprila 1999 reševalo več kot 1000 dijakov iz 56 srednjih šol. V skupini A sta bili dve verziji nalog, ki pa sta se razlikovali samo v tretji nalogi. Tekmovalec je tako reševal samo eno izmed nalog 3a in 3b.

Skupina A

1. Ko na lahko vzmet, pripeto na stropu, obesimo točkasto telo, se vzmet raztegne za 10 cm. Pod obešeno telo damo globus z gladkim površjem tako, da je središče globusa pod obesiščem vzmeti (glej sliko). Opazimo, da se telo v ravnovesju dotika globusa na geografski širini 45° in da je dolžina vzmeti enaka polmeru globusa. Za koliko je sedaj raztegnjena vzmet?

2. Sošolka je pri vajah merila specifično težo peska. Poskus je delala z določeno količino peska, stekleno čašo, tehtnico in vodo (z znano specifično težo 9,80 N/dm^3). Izvedla je štiri tehtanja in odčitala 4,32 N, 15,10 N, 16,08 N in 22,42 N ter izračunala specifično težo peska 23,8 N/dm^3. Ali lahko od tod sklepaš, kaj je sošolka imela v posodi pri posameznih tehtanjih? Kolikšna je prostornina čaše? (Če je v čašo natočila vodo, je voda vedno segala do roba posode.)

3.a Mravljinec poskuša postaviti pokonci smrekovo iglico, dolžine 15 mm. Iglico prime s prednjimi nožicami za eno krajišče in ga dvigne nad svojo glavo, drugo krajišče pa je na tleh. Potem se mravljinec začne pomikati proti krajišču iglice, ki miruje na tleh. Pri tem iglico preprijema, tako da se sam ves čas drži navpično pokonci, z navzgor iztegnjenimi prednjimi nožicami, v katerih drži iglico tako, da deluje nanjo s silo, pravokotno na iglico. Ko dvigne krajišče iglico za toliko, da oklepa s tlemi kot 45°, krajišče iglice, ki se dotika tal, zdrsne. Kolikšen je koeficient lepenja med iglico in tlemi? Z iztegnjenimi prednjimi nožicami meri mravljinec v višino 7,0 mm.

3.b i. Kavboj, ki hoče oropati vlak, zajaha konja in čaka ob progi. Vlak se približuje s hitrostjo 10 m/s. Ko se vlak približa na razdaljo 30 m, kavboj požene konja v smeri gibanja vlaka, vzporedno s progo. V zanemarljivo kratkem času pospeši konj do hitrosti 10 m/s, s katero potem enakomerno teče.

Strojevodja vlaka ve, da kavboj ne more preskočiti s konja na vlak, če se hitrosti konja in vlaka razlikujeta za več kot 3,0 m/s. Zato začne v trenutku, ko kavboj požene konja, enakomerno pospeševati. Najmanj kolikšen mora biti pospešek, da strojevodja onemogoči rop?

ii. Naslednjega dne kavboj ponovi napad na enak način, vendar z drugim konjem. Strojevodja spet užene kavboja, tako da začne pospeševati s konstantnim pospeškom 0,10 m/s^2, in mu ravno še uide. Kolikšna je največja hitrost drugega konja, če le-ta ne more biti večja od začetne hitrosti vlaka? Ostali podatki so enaki kot v nalogi 3.b i.

Skupina B

1. Tajni agent James Bond mora skočiti z ene plošče, ki se enakomerno spušča s hitrostjo 2,0 m/s, na drugo ploščo, ki se enakomerno dviga s hitrostjo 3,0 m/s. S kolikšno hitrostjo mora steči po prvi plošči in odskočiti, da se z rokami ravno še ujame za drugo ploščo?

   V trenutku odskoka je prva plošča 4,0 m nad drugo ploščo. Vodoravna razdalja med ploščama je 3,0 m, Bond pa ima v iztegnjenem položaju prste roke 2,0 m nad stopali.

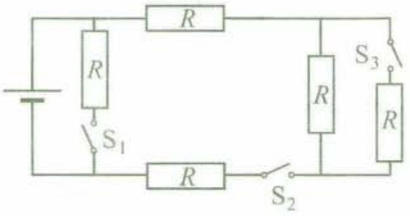
2. Kocko s stranico 5,0 cm in maso 300 g postavimo na vodoravno ploskev. Koeficient trenja med kocko in ploskvijo je 0,05. V istem trenutku, ko sunemo kocko v vodoravni smeri s hitrostjo 5,0 m/s,

začnemo pihati nanjo s sušilcem za lase v navpični smeri navzdol. Med gibanjem sledimo kocki s sušilcem, tako da zadeva zračni curek navpično navzdol ravno celotno zgornjo ploskev in se ob njej popolnoma ustavi. Hitrost zraka v curku je 30 m/s, gostota zraka pa 1,3 kg/m^3. Po določenem času od začetka gibanja sušilec izklopimo. Koliko časa moramo pihati na kocko, da se ustavi 8,0 s potem, ko smo jo sunili?

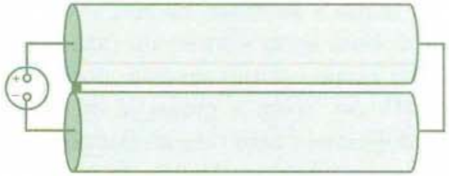
3. Točkasto telo z maso m obesimo na lahko neraztegljivo vrvico z dolžino l in z drugim koncem vrvice pritrdimo na strop. Telo primemo, ga odklonimo (pri čemer je vrvica ves čas napeta), tako da je vrvica vodoravna (glej sliko) in spustimo. Kolikšen kot z navpičnico tvori vrvica v trenutku, ko je navpična komponenta hitrosti telesa največja? Pomagalo ti bo, če razmisliš, kaj se dogaja z navpično komponento pospeška telesa.

Skupina C

1. V vezju na sliki ima baterija gonilno napetost 1,50 V in notranji upor 2,50 Ω, zunanji uporniki pa imajo upor po 1,00 Ω. V vezju so tri stikala: S_1, S_2 in S_3. Katera stikala morajo biti sklenjena, da bo moč, ki se troši na zunanjih upornikih, največja?



2. Elektrotop je orožje prihodnosti. Model je prikazan na sliki. Dve 20 m dolgi kovinski žici z debelino 0,5 m sta povezani s tokovnim izvirom in na drugem koncu kratko sklenjeni. Med žicama je 1 cm široka reža, v začetek te reže vstavimo kovinski izstrelek z maso 10 g. *Oceni*, s kolikšno hitrostjo izleti izstrelek iz naprave. Med pospeševanjem teče v žicah konstanten električni tok 1 MA (za to skrbi tokovni izvir), skozi izstrelek pa teče 10% tega toka.



Izstrelek se dotika obeh žic, trenje je zanemarljivo majhno. Žici ves čas obravnavaj kot dolgi. Indukcijska konstanta je $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

3. Dolg, pokončen valj je na dnu zaprt, vmes, med dnom in vrhom, pa se lahko brez trenja giblje lahek bat, ki zapira 1,0 g zraka pri temperaturi okolice 20°C in pri zunanjem zračnem tlaku 100 kPa. Plašč valja je na notranji strani prevlečen z 0,10 mm debelo plastjo snovi s specifičnim uporom $1{,}0^{-3}$ Ωm. Dno valja in bat sta izdelana iz 20 mm debele snovi, s toplotno prevodnostjo 2,0 W/mK. Na dnu valja in na batu sta električna priključka, ki imata stik s prevodno plastjo v notranjosti valja. Notranji polmer valja je 50 mm. Plašč valja je idealno toplotno izoliran.
Med priključka na batu in dnu valja priključimo napetost 20 V.
   a) Kolikšen električni tok steče skozi napetostni izvir v trenutku, ko vključimo napetost?
   b) Kolikšna je razdalja med najbližjima ploskvama dna in bata, ko je bat v ravnovesju?

   Kilomolska masa zraka je 29 kg, splošna plinska konstanta pa 8300 J/Kkmol.

Skupina D

1. Tajni agent James Bond ima na nogah posebne plinske amortizerje za seskoke z večjih višin. Amortizer je posoda, napolnjena z zrakom ($\kappa = 1{,}4$), in neprodušno zaprta s tankim batom, ki lahko brez trenja drsi in je pripet na podplat čevlja. Ko po skoku agent pristane na tleh, bat hitro stisne plin in amortizer ublaži udarec. S kolikšne največje višine lahko skoči 75 kg težak agent, če pristane sonožno in je največja sila, ki ji je za kratek čas lahko izpostavljena posamezna noga, 600 kN?
Prečni presek bata je 200 cm^2, oddaljenost bata od dna pri nestisnjenem amortizerju pa 7,5 cm. Ploščina podplata je enaka ploščini bata. Specifična toplota za pline je pri konstantnem volumnu $c_v = \dfrac{R}{M(\kappa-1)}$.

2. Vrata, široka 1,2 m in težka 20 kg, so vpeta v tečaje nekoliko postrani (visijo). Če jih pustimo odprta v položaju pravokotno na steno, se zaprejo v 6 sekundah. S poskušanjem ugotovimo, da moramo utež z maso 300 g pristaviti k vratom najmanj 70 cm od vpetega roba vrat, da stojijo odprta.

   a) Kolikšen je koeficient lepenja med utežjo in tlemi? Privzemi, da deluje na vrata v vseh legah konstanten navor in zanemari trenje v tečajih.

   b) V resnici je privzetek o konstantnem navoru na vrata neupravičen. Če bi se vrata lahko zavrtela za polni krog okrog tečajev, bi videli, da imajo nekje ravnovesno lego, v kateri je navor enak nič. Izračunaj nihajni čas pri nihanju vrat za majhne zasuke okrog te lege, če veš, da je tako nihanje sinusno. Zveznica obeh tečajev tvori z navpičnico kot 2,0°. Za majhne kote je $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$.

3. Delfin plava v kostantni globini s hitrostjo 6 m/s proti opazovalcu na kopnem in pri tem oddaja zvok s stalno frekvenco. Opazovalec zazna zvok s frekvenco 52,1 kHz pod kotom 12°, glede na pravokotnico na morsko gladino. Določi frekvenco zvoka, ki jo oddaja delfin! Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s, v vodi pa 1450 m/s.

Ciril Dominko

20. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – pomladanski krog

V šolskem letu 1998/99 se je na vabilo k sodelovanju na mednarodnem matematičnem tekmovanju mest odzvalo 23 dijakov in dijakinj. Posebno diplomo, ki jo podeljujeta *Ruska akademija znanosti* in revija *Kvant*, so prejeli Mojca Miklavec (Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana), Irena Majcen in Ajda Skarlovnik (Gimnazija Bežigrad, Ljubljana), Katja Prnaver (II. gimnazija Maribor) ter Jure Kališnik in Matjaž Urlep (ŠC Celje, Splošna in strokovna gimnazija Lava).

V aprilu je potekal pomladanski krog 20. tekmovanja mest. Dijaki prvih in drugih letnikov so tekmovali v prvi skupini, ostali pa v drugi. Izdelek vsakega tekmovalca je bil ocenjen z največjo možno vsoto točk iz treh nalog. V prvem delu so imeli dijaki na izbiro naslednje naloge:

Prva skupina

1. Oče in sin drsata po krožnem drsališču. Na vsake toliko časa oče prehiti sina. Ko začne sin drsati v nasprotni smeri, pa se srečujeta petkrat bolj pogosto kot prej, ko sta drsala v isto smer. Koliko je oče hitrejši od sina? (3 točke)

2. Nad hipotenuzo AB pravokotnega trikotnika ABC je z zunanje strani narisan kvadrat $ABDE$. Naj bo $\overline{AC} = 1$ cm in $\overline{BC} = 3$ cm. V kakšnem razmerju simetrala kota pri oglišču C razdeli daljico DE? (4 točke)

3. Na tabli je zapisano nekaj naravnih števil $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Na drugo tablo po vrsti zapišemo število b_0, ki pove, koliko je števil na prvi tabli, število b_1, ki pove, koliko števil na prvi tabli je večjih od 1, število b_2, ki pove, koliko števil na prvi tabli je večjih od 2,... To nadaljujemo dokler so števila b_i pozitivna (ničle ne napišemo na tablo). Na podoben način zapišemo števila $c_0, c_1, \ldots$ na tretjo tablo, le da sedaj opazujemo števila $b_0, b_1, \ldots$ na drugi tabli. Pokaži, da so števila na tretji tabli enaka številom na prvi. (4 točke)

4. Koščék sira ima obliko kocke s stranico 10 cm. Šest kvadratnih aluminjastih folij ima skupno površino 600 cm^2 in niso vse med seboj enake. Ali lahko z gotovostjo trdimo, da se koščka sira ne da pokriti s temi šestimi folijami? (Folij ne smemo pretrgati in pokriti moramo celo površino sira.) (4 točke)

5. Z devetimi navpičnimi in devetimi vodoravnimi črtami razdelimo kvadrat na 100 pravokotnikov. To storimo na tak način, da je natanko 9 izmed njih kvadratov. Pokaži, da med temi devetimi kvadrati obstajata dva enaka. (5 točk)

Druga skupina

1. Eno za drugim zapišemo 1999 števil. Prvo število je 1. Vsa števila razen prvega in zadnjega so vsota sosednjih dveh števil. Katero je zadnje število? (3 točke)

2. Nad hipotenuzo AB pravokotnega trikotnika ABC je z zunanje strani narisan kvadrat $ABDE$. Naj bo $\overline{AC} = 1$ cm in $\overline{BC} = 3$ cm. V kakšnem razmerju simetrala kota pri oglišču C razdeli daljico DE? (3 točke)

3. Na tabli je zapisano nekaj naravnih števil $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Na drugo tablo po vrsti zapišemo število b_0, ki pove, koliko je števil na prvi tabli, število b_1, ki pove, koliko števil na prvi tabli je večjih od 1, število b_2, ki pove, koliko števil na prvi tabli je večjih od 2,... To nadaljujemo dokler so števila b_i pozitivna (ničle ne napišemo na tablo). Na podoben način zapišemo števila $c_0, c_1, \ldots$ na tretjo tablo, le da sedaj opazujemo števila $b_0, b_1, \ldots$ na drugi tabli. Pokaži, da so števila na tretji tabli enaka številom na prvi. (3 točke)

4. V ravnini leži črn enakostraničen trikotnik. V ravnino je potrebno položiti 9 tlakovcev enakih velikosti in oblik kot je črn trikotnik, ki se paroma ne prekrivajo in da vsak pokrije vsaj eno točko znotraj črnega trikotnika. Kako lahko to naredimo? (5 točk)

5. Dva igralca v tabelo 9×9 izmenoma vrisujeta znakce. Prvi vrisuje križce, drugi pa krožce. Ko je vseh 81 polj zapolnjenih, preštejemo vse vrstice in stolpce, v katerih je več križcev kot krožcev, in število označimo s K. Število H pa nam pove, v koliko vrsticah in stolpcih je več krožcev kot križcev (vseh vrstic in stolpcevje 18). Razlika $B = K - H$ je vrednost zmage prvega tekmovalca. Poišči vrednost B za katero velja:
   (a) prvi lahko zagotovi zmago z vrednostjo vsaj B, ne glede na to kako bo igral drugi tekmovalec;
   (b) drugi tekmovalec lahko igra tako, da vrednost zmage prvega ne bo večja B, ne glede na igro prvega.

   (5 točk)

V drugem delu pomladanskega kroga so tekmovalci reševali šest nalog. Objavljamo po dve za vsako skupino:

Prva skupina

1. Prvi igralec zapiše na papir števko 0 ali 1. Nadaljuje s pisanjem bodisi števke 0 ali 1 desno od nastalega niza na papirju dokler ne nastane 1999 mestno število. Po vsakem zapisu števke prvega igralca (razen, ko napiše prvo števko) drugi igralec izbere poljubni dve števki v nizu in ju zamenja. Ali lahko drugi tekmovalec doseže, da je po njegovi zadnji potezi nastalo število simetrično? (4 točke)

2. Trikotniku ABC včrtana krožnica se v točki P dotika stranice AB in v točki Q stranice AC. Točki R in S sta razpolovišči stranic AC in BC, točka T pa je presečišče daljic PQ in RS. Pokaži, da točka T leži na razpolovnici kota trikotnika pri oglišču B. (6 točk)

Druga skupina

1. Poišči vse pare celih števil (x, y), za katere velja, da sta obe števili $x^3 + y$ ter $x + y^3$ deljivi s številom $x^2 + y^2$. (5 točk)

2. Nenegativno število i zapišemo v binarnem sistemu. Če se v zapisu pojavi sodo mnogo enic, naj bo $M(i) = 0$, drugače pa $M(i) = 1$. (Prvih nekaj členov zaporedja $M(i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ je torej $0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$).

   (a) Pokaži, da v zaporedju $M(0), M(1), \ldots, M(1\,000)$, obstaja vsaj 320 členov, ki so enaki svojemu nasledniku; $M(i) = M(i + 1)$. (2 točki)

   (b) Pokaži, da v zaporedju $M(0), M(1), \ldots, M(1\,000\,000)$, obstaja vsaj 450.000 členov, za katere velja $M(i) = M(i + 7)$. (5 točk)

Aleš Vavpetič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

27. letnik, šolsko leto 1999/2000, številka 2, strani 65 – 128

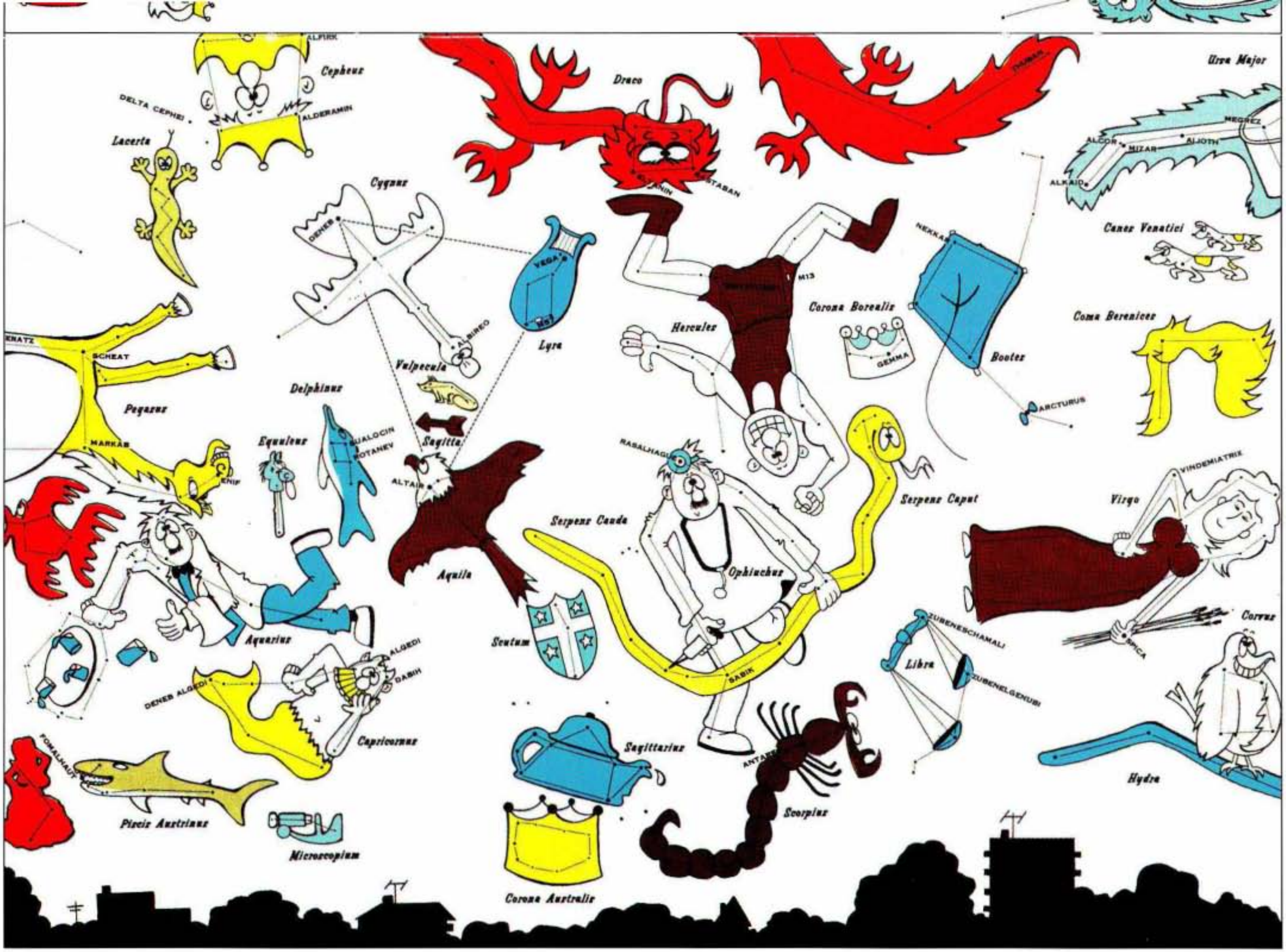
Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1999/2000 je za posamezne naročnike **2.000 SIT**, za skupinska naročila šol **1.650 SIT**, posamezna številka **400 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



JESENSKO NEBO

POLETNO NEBO