

PRE SEK

27 (1999-2000)

1



ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, leto 1999/2000, številka 1, strani 1–64

VSEBINA

MATEMATIKA	Fotografija in matematika IV – Fresnelova leča (Peter Legiša) 4-9 Zlati pravokotnik (Marko Razpet) 34-43
FIZIKA	Vrzeli kot nosilci naboja v kristalih (Janez Strnad) ... 10-15 Kdo potrebuje debele noge? (Vida Kariž Merhar) 44-45
ASTRONOMIJA	Deklinacija Sonca (Marijan Prosen) 22-24
RAČUNALNIŠTVO	Kraljice napadajo (Boštjan Brešar) 16-21
NOVICE	David Hilbert (1862–1943) – Ob stoletnici Osnov geometrije in skorajšnji stoletnici Hilbertovih problemov (Marija Vencelj) 26-31
NALOGE	Da se ti zmeša (Marija Vencelj) 2 Štiri točke – dve razdalji (Marija Vencelj) 2 Kvadratne rože (Martin Juvan) 3 Tri zanimive (Dragoljub M. Milošević, prev. Barbara Japelj) 3 Naloga s problemom (Marija Vencelj) 24 Prepisovanje knjig (Matija Lokar) 25 Lahek kriptaritem (Marija Vencelj) 43 Zloženki (Dragoljub M. Milošević) 45
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Zakaj je 7 oznaka za število sedem? (Matija Lokar) 15 Iskrica (Tatjana Hernaus) 21 Križanka "Merjenje časa" (Marko Bokalič) 32-33 Verižni ulomki in astronomija (Marino Pavletič) 46-51
REŠITVE NALOG	Zapletena sončna ura – Odgovor na vprašanje iz zadnje lanske številke Preseka (Andrej Likar) 52-55
TEKMOVANJA	35. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 56-57 19. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Mojca Čepič) 57-59 37. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko) 59-62 43. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) 62-64
NA OVITKU	Fotografije k članku na strani 4 (foto Peter Legiša) I, II, IV

DA SE TI ZMEŠA

Trije stari prijatelji so sedeli pred čebelnjakom, premlevali, kako dolgo so že na svetu, in ugotovili:

Ko je bil Anton leto dni mlajši, kot je bil Cene star tedaj, ko je bil Blaž pol toliko star, kot bo Cene star čez tri leta, je bil Blaž dvakrat toliko star, kot je bil Cene star tedaj, ko je imel Blaž tretjino toliko let, kot jih je imel Anton pred tremi leti. Toda, ko je bil Cene dvakrat toliko star kot Anton, je imel Blaž eno četrtno let Cenetove starosti izpred enega leta.

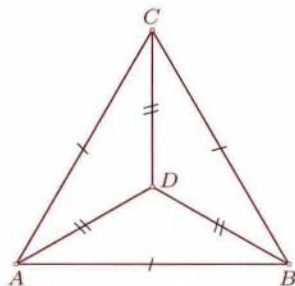
Da bi zabave ne bilo prehitro konec, so začeli primerjati še starosti svojih potomcev. Sliši se neverjetno, toda izkazalo se je, da so starosti njihovih sinov Antona mlajšega, Blaža mlajšega in Ceneta mlajšega povezane na enak način kot njihove. Presenečenje je bilo popolno, ko so ugotovili, da velja enako tudi za starosti njihovih vnukov Antona, Blaža in Ceneta najmlajših.

Poišči starosti vseh devetih možakov, če veš, da so dedje računali s celoletnimi starostmi.

Marija Vencelj

ŠTIRI TOČKE – DVE RAZDALJI

Na papir nariši (to je, izberi v ravnini) štiri različne točke tako, da bosta med njimi le dve različni razdalji. Ena od rešitev je prikazana na naslednji sliki:



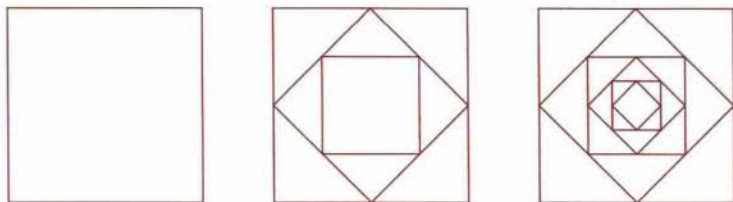
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$$\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC}$$

Obstaja šest bistveno različnih možnosti. Poiščite vsaj še kakšno, potrudite se, da najdete vse!

Marija Vencelj

KVADRATNE ROŽE



Na zgornji sliki so prikazane kvadratne rože redov 1, 3 in 6. Pozorno si jih oglejte, ugotovite, kako so zgrajene, potem pa v programskem jeziku logo poskusite sestaviti ukaz `kvadratna_roza`, ki bo narisal kvadratno rožo izbranega reda. Če radi programirate, lahko poskusite napisati rekurzivno in nerekurzivno različico ukaza.

Martin Juvan

TRI ZANIMIVE

Produkt dvojk

S katero števk se konča produkt 999 dvojk?

Tekma

Marija in Tanja sta tekmovali v teku na 60 metrov. Na cilj je prva pritekla Marija s prednostjo 6 metrov. Dogovorili sta se, da bosta ponovno tekli tako, da bo Marija stopila 6 metrov nazaj. Ali bi pritekli na cilj istočasno, če bi tekli z enako (konstantno) hitrostjo kot v prejšnji tekmi?

Zdenkini otroci

Po več letih sta se srečali stari prijateljici, Zdenka in Nataša. Zdenka se je pohvalila, da ima tri otroke, hčerko in sina dvojčka. Na Natašino vprašanje, koliko so otroci stari, je Zdenka odgovorila: "Produkt njihovih let je 48."

Nataša se je zamislila in ... zmignila z rameni.

"Najstarejši otrok ..." je začela Zdenka, da bi ji pomagala z dodatnim podatkom.

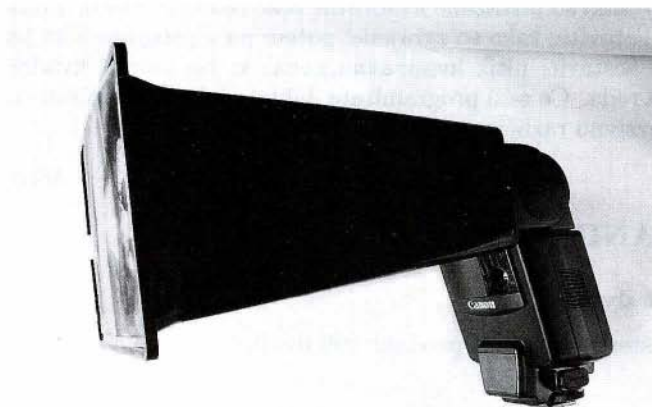
"Aha, sedaj pa vem," jo je prekinila Nataša.

Kaj mislite, koliko let imajo Zdenkini otroci (leta so izražena z naravnimi števili)?

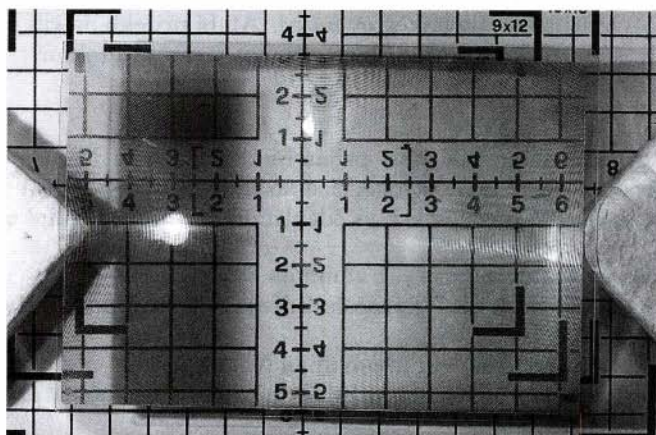
Dragoljub M. Milošević, prev. Barbara Japelj

FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA IV – Fresnelova leča

Pred časom sem v ZDA naročil nastavek za elektronsko bliskavko. Sestavljen je iz črnega plastičnega ohišja in tanke prozorne plastične plošče s komaj opaznimi koncentričnimi brazdami (sliki 1 in 2). Nastavek snop svetlobe iz bliskavke skoncentrira v ožji snop, primeren za teleobjektive z goriščnimi razdaljami nad 300 mm. Na ta način se, kot sem preveril, doseg bliskavke vsaj podvoji.



Slika 1. Fresnelova leča z ohišjem na bliskavki.



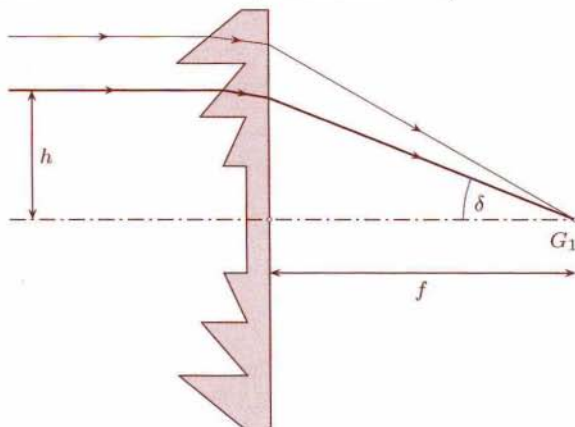
Slika 2. Fresnelova leča.

Zgoraj omenjena plastična plošča stane kakih 1000 SIT, je pa pravzaprav edini pomembni del vse zadeve. Pravi jo *Fresnelova leča*. Če jo vrtimo v rokah, vidimo, da deluje podobno kot zbiralna leča. Na eni strani je gladka, na drugi komaj opazno razbrazdana. Globina brazd narašča proti robu. Seveda sem bil radoveden, kako stvar deluje.

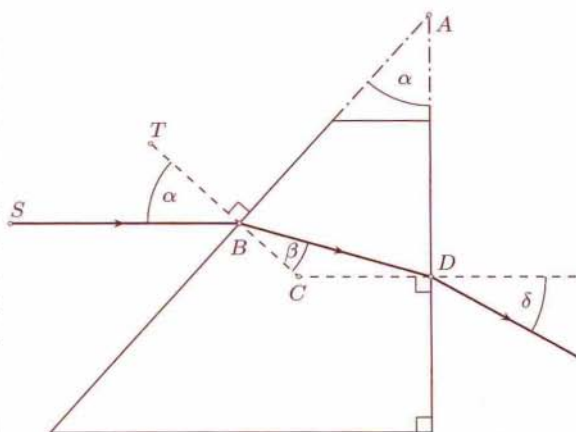
Os *Fresnelove* ali *stopničaste leče* je premica skozi središče vseh brazd, pravokotno na lečo. Prerez take leče z ravnino skozi os je, če ima leča le nekaj brazd, tak kot na sliki 3.

Recimo, da je naloga naše ploščate leče snop svetlobe, vzporeden osi, zbrati v gorišču G_1 (ali pa žarke iz točkastega svetila G_1 preusmeriti v vzporeden snop). Označimo z f razdaljo od G_1 do leče, s h razdaljo od brazde do središča leče in z α naklon brazde k ravnini leče. (Privzeli bomo, da so brazde tanke in da je kot α za vse točke na brazdi enak. Moja leča ima dve brazdi na milimeter, tako da je taka poenostavitev smiselna.) Iz slike 3 sledi

$$h = f \operatorname{tg} \delta. \quad (1)$$



Slika 3. Prerez Fresnelove leče.



Slika 4.

Denimo, da ima plastika naše leče lomni količnik n . Oglejmo si stvar od blizu (slika 4). Žarek SB je vzporeden osi leče in torej pravokoten na AD . Črtkano imamo narisani pravokotnici na plastiko. Kota $\angle SBT$ in

$\sphericalangle DAB$ imata paroma pravokotne krake, zato je $\sphericalangle SBT = \alpha$. Po lomnem zakonu je

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Ker je $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \alpha$, je $\sphericalangle CDB = \alpha - \beta$. Po lomnem zakonu v točki D je

$$\sin \delta = n \sin(\alpha - \beta).$$

Vzemimo, da je $\alpha = 30^\circ$. Za pleksi steklo z $n = 1,49$ izračunamo $\beta \doteq 19,61^\circ$, $\alpha - \beta \doteq 10,39^\circ$ in $\delta \doteq 15,59^\circ$. Za polistiren z $n = 1,59$ pa je $\delta \doteq 18,76^\circ$.

Splošno je

$$\beta = \arcsin(n^{-1} \sin \alpha) \quad \text{in} \quad \delta = \arcsin(n \sin(\alpha - \arcsin(n^{-1} \sin \alpha))). \quad (2)$$

Iz (1) in (2) dobimo pri danem f polmer h brazde kot funkcijo kota α . Čim večji je α , tem večja sta δ in h .

Ker je

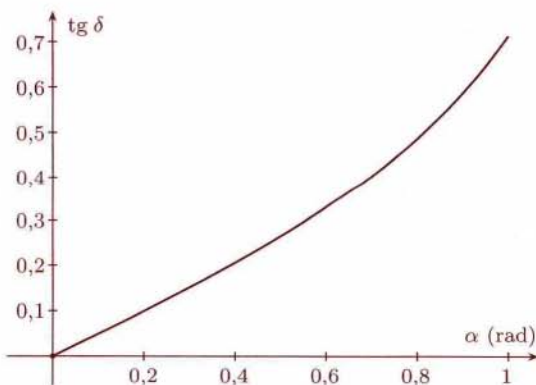
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = n^{-1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha},$$

je končno po adicijskem izreku

$$\sin \delta = (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha) \sin \alpha.$$

Na sliki 5 imamo za $n = 1,49$ narisane $\tan \delta$ kot funkcijo kota α , izražene-ga v radianih.

Na sliki 3 bodo žarki, ki vzporedno padajo na dano brazdo, po izhodu iz Fresnelove leče spet vzporedni. Čim ožje so brazde, tem bližje G_1 se bodo sekali lomljeni žarki. Literatura navaja tudi 8 brazd na milimeter.

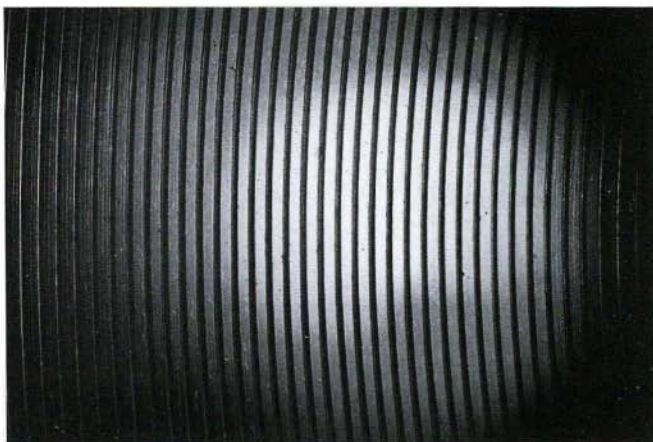


Slika 5.

Goriščna razdalja leče deljena s premerom je *zaslonsko število* z leče. Tako je

$$z = \frac{f}{2h} = \frac{f}{2f \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \delta}.$$

Za $\delta = 15,59^\circ$ je $z = 1,8$, za $\delta = 18,76^\circ$ je $z = 1,5$. Na videz ni spodnje meje za z . Vendar majhne vrednosti za z pomenijo velik δ in s tem velik α . Žarki, vzporedni osi, padajo na zelo strmo brazdo pod zelo majhnim kotom. Pri tem se velik del svetlobe odbije v napačno smer, namesto da bi se lomil. (Kadar je sonce nizko nad vodno površino, se prav tako velik del sončne svetlobe odbije na gladini.) Zelo strme brazde so nepraktične, saj se v njih lahko nabira umazanija. Kot kaže slika 6, so robovi brazd v praksi nekoliko zglajeni, to pa spet omejuje strmino.



Slika 6.

Tako so običajna zaslonska števila do 0,6, se pravi, da je polmer leče nekaj manjši od goriščne razdalje. V grafoskopih Fresnelova leča pokriva celotno ploščo in ima na robu dejansko že kar strme brazde.

Fresnelove leče uporabljajo tudi v žarometih, svetilnikih, iskalih zrcalnorefleksnih aparatov, v bliskavkah z zoomom, se pravi tam, kjer je treba usmerjati svetlobo. Povsod, kjer vidimo prozorno ploščo z množico koncentričnih krogov, gre skoraj gotovo za Fresnelovo lečo.

Če kupimo Fresnelovo lečo, nas tudi opozorijo, naj je ne puščamo na soncu. V primernih okoliščinah namreč lahko leča zbere svetlobo na zelo majhni površini in povzroči škodo ali celo požar.

Navodila priporočajo tudi, kako naj obrnemo lečo. Denimo, da bi lečo s slike 3 obrnili tako, da bi vzporedni snop padal na gladko stran (slika 7).

Vidimo, da je

$$\sin(\alpha + \delta_1) = n \sin \alpha.$$

Za $\alpha = 30^\circ$ in $n = 1,59$ izračunamo $\delta_1 = 22,66^\circ$, kar je za skoraj 4° različno od kota δ za stanje na sliki 3. Obrnjena leča torej žarek, vzporeden osi in na isti oddaljenosti od osi, bolj prelomi kot neobrnjena. Torej ni vseeno, kako obrnemo lečo.

Žarek po lomu seka os leče na razdalji

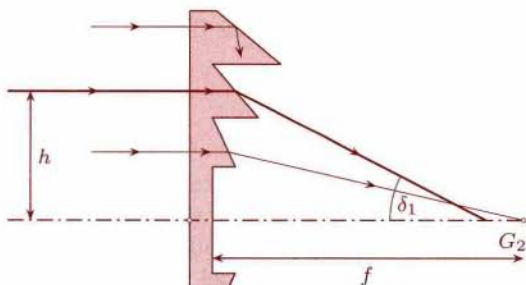
$$\frac{h}{\operatorname{tg} \delta_1} = f \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta_1}.$$

Na sliki 9 imamo narisani količnik

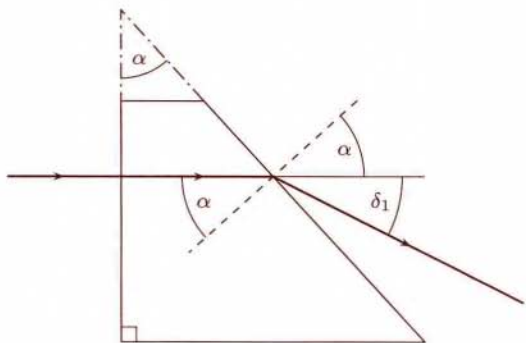
$$\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \delta_1}$$

kot funkcijo kota α (za $n = 1.49$). Za kote α blizu 0 je gornji kvocient blizu 1. Žarki, vzporedni osi in blizu osi, se v obeh primerih srečajo na enaki oddaljenosti od plošče v enem od obeh gorišč G_1, G_2 . Z nekaj višje matematike bi se dalo dokazati, da to velja za vsak n . Robni žarki pa na sliki 7 zgrešijo gorišče G_2 . Še eno omejitev imamo pri stanju na slikah 7 in 8. Veljati mora $\alpha + \delta_1 < 90^\circ$ (sicer žarek ne more iz plošče – pride do *popolnega odboja*). Torej mora veljati

$$n \sin \alpha < 1,$$



Slika 7.



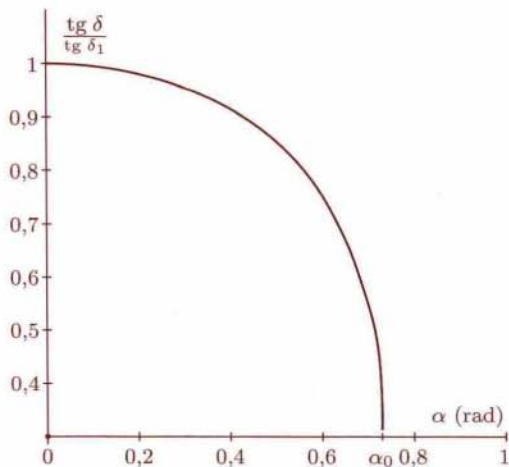
Slika 8.

se pravi $\alpha < \alpha_0$, kjer je

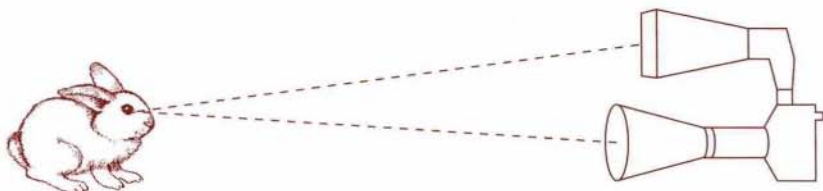
$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n}.$$

Kot α_0 za $n = 1.49$ znaša približno 0,73 radiana.

Vidimo, da ni čisto vseeno, kako obrnemo Fresnelovo lečo. Bolje je, da robni žarki na nazobčani strani oklepajo manjši kot z osjo kot na gladki.



Slika 9.



Slika 10.

Na koncu še dve opozorili. Fresnelove leče omogočajo fotografiranje živali z bliskavko tudi na večjih razdaljah. Če držimo bliskavko v bližini aparata, bodo vpadni in v fotografski objektiv odbiti žarki oklepali zelo majhen kot (slika 10). V fotoaparat bo tako lahko prišla svetloba, odbita od očesnega ozadja živali. Če slikamo zajca, veverico ali sovo, bodo ti dobili tudi podnevi krvavo rdeče oči in slike bodo neuporabne. Mačke dobijo na ta način zelene ali rumene oči, vrana na ovitku celo modre. Zapomnimo si še, da je za nočna bitja svetloba bliskavke v trdi temi hud šok. (Kdor ne verjame, naj to preskusi na sebi po prilagoditvi na temo. Zadošča kakršnakoli bliskavka, brez Fresnelove leče.)

Na koncu povejmo, da smo obravnavali le najpreprostejšo različico Fresnelove plošče. Bolj popolne Fresnelove leče imajo poševne dele brazd rahlo zakrivljene in širine brazd se spreminjajo.

Peter Legiša

VRZELI KOT NOSILCI NABOJA V KRISTALIH

Presek je v predzadnji številki prejšnjega letnika opisal *Hallov pojav*. Baterija poganja električni tok po kovinskem traku, postavljenem v prečno magnetno polje. Voltmeter med robovoma traku – prečno na tok in prečno na magnetno polje – pokaže *Hallovo napetost*. Pri toku, usmerjenem k nam, in magnetnem polju v smeri navzgor je na primer pri bakru, srebru, zlatu, kaliju levi rob traku negativen in desni rob pozitiven. Izid pojasnimo takole: elektrone, ki se gibljejo od nas, v nasprotni smeri od dogovorjene smeri toka, vleče sila magnetnega polja proti levi, da se kopičijo na levem robu traku. Tam se pojavi presežek elektronov. Nastalo električno polje preprečuje nadaljnje prehajanje elektronov proti levi. *Hallov koeficient* $K_H = bU_H/IB$ izračunamo z izmerjeno Hallovo napetostjo U_H , z debelino traku b , tokom I in gostoto magnetnega polja B . Hallov koeficient je v tem primeru negativen, kar pomeni, da je levi rob traku negativen, desni pa pozitiven. Absolutna vrednost Hallovega koeficienta določa gostoto nosilcev naboja $N/V = 1/e_0|K_H|$. Hallov pojav lahko izkoristimo tudi za merjenje gostote magnetnega polja. Lepo!

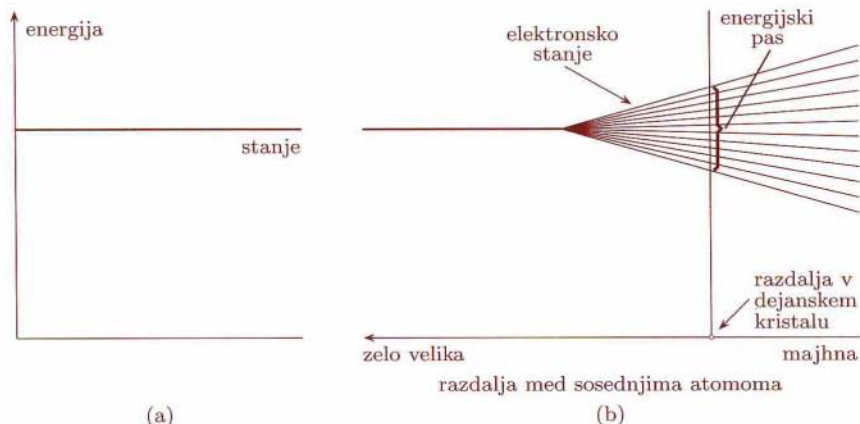
Pri nekaterih kovinah, na primer železu, cinku, volframu, bizmutu, pa je Hallov koeficient pozitiven, kar pomeni, da postane levi rob traku pozitiven in desni negativen. Ta izid je tako presenetljiv, da so ga imeli za paradoks. Pojasnili so ga šele pol stoletja po odkritju Hallovega pojava. Izid je presenetljiv, ker so v kovini gibljivi edino negativni nosilci naboja, to je prevodniški elektroni. Kako naj z *negativnimi* prevodniškimi elektroni pojasnimo *pozitivni* Hallov koeficient? V času, v katerem bi težko prebili brez računalnikov, računal, televizorjev in podobnih naprav, ki vsebujejo elemente iz polprevodnikov, je vredno vsaj poskusiti.

Začnimo s curkom prostih elektronov v katodni cevi televizijskega sprejemnika. Če se elektroni gibljejo od nas v navzgor usmerjenem magnetnem polju, se odklonijo proti levi in le proti levi. Proti desni bi se odklonili, če bi obrnili smer magnetnega polja ali smer gibanja. Toda Hallov koeficient za železo, cink, volfram in bizmut smo izmerili v enakih okoliščinah kot za baker, srebro, zlato, kalij. Prevodniških elektronov v kovini potemtakem ne moremo obravnavati, kot obravnavamo proste elektrone v vakuumu v katodni cevi. Upoštevati moramo, da se gibljejo po notranjosti kristala, v katerem nanje deluje množica atomov, razporejenih po prostoru v periodično ponavljajočem se vzorcu.

Poleg tega gibanja elektronov ne moremo opisati, kot opišemo gibanje žog in drugih teles, ki jih opazujemo s prostim očesom. Za gibanje elektronov velja zakon, ki se razlikuje od Newtonovega. Elektrone moramo obravnavati v okviru kvantne mehanike, ne v okviru klasične mehanike.

Gibanje elektronov v katodni cevi v okviru kvantne mehanike lahko obravnavamo približno kot gibanje žog. Če ne bi bilo tako, ne bi mogli predvideti, kje in kdaj elektroni zadenejo zaslon in ne bi mogli gledati televizije. Pri elektronih v kristalih je drugače. Kaj je mogoče o tem povedati s preprostimi besedami?

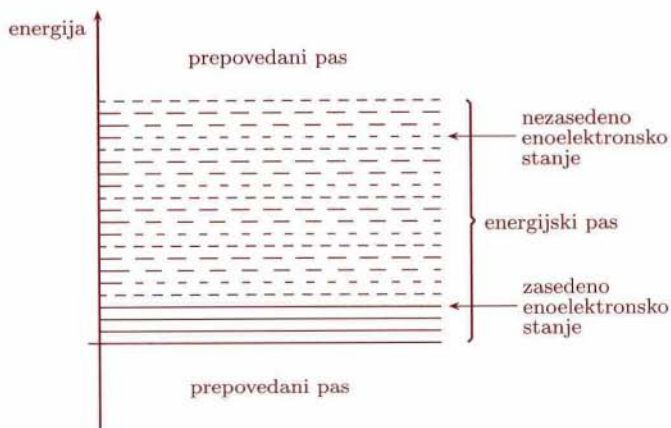
Elektron v osamljenem atomu se lahko giblje na določen način, ki mu ustreza določena energija. V kristalu veliko atomov, ki so urejeno razporejeni po prostoru, vpliva na gibanje elektrona. Mislimo na atome v kristalu, v katerem bi bila razdalja med sosednjima atomoma zelo velika, in se zanimamo samo za elektrone, ki so nanje najšibkeje vezani. Tedaj drugi atomi ne motijo gibanja elektrona in ne vplivajo na njegovo energijo. V takem kristalu ima elektron enako energijo kot v osamljenem atomu. Sosednji atomi bolj in bolj vplivajo na najšibkeje vezane elektrone, ko se razdalja med sosednjima atomoma bolj in bolj manjša. Zaradi tega se nekoliko spremeni energija elektronov. Iz energijskega stanja z določeno energijo elektrona v atomu nastane v kristalu širok *energijski pas* enoelektronskih stanj, ki se po energiji elektrona malo razlikujejo. Preobrazbo energijskih stanj od stanja z ostro določeno energijo pri enem atomu do širokega energijskega pasu v kristalu si lahko samo zamislimo in spremljamo z računom, ni pa mogoče pri poskusu po volji spreminjati razdalje med sosednjima atomoma v kristalu (slika 1).



Slika 1. Stanje elektrona z določeno energijo v osamljenem atomu (a). V kristalu, v katerem je razdalja med sosednjima atomoma zelo velika, sosednji atomi ne vplivajo na najšibkeje vezan elektron v atomu in so razmere take kot v osamljenem atomu (b, levo). Pri vse manjši razdalji pa sosednji atomi vse močneje vplivajo na najšibkeje vezani elektron in energija elektrona se spremeni: bližnja enoelektronska stanja se razprejo v energijski pas (b, desno).

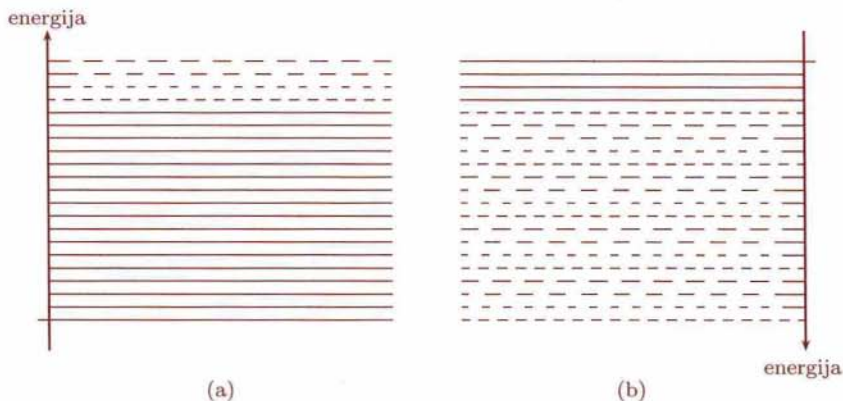
Enoelektronska stanja v pasu so zelo številna in se po energiji med seboj zelo malo razlikujejo. Zato si lahko mislimo, da se energija elektrona poljubno malo poveča ali pomanjša, ko elektron iz danega enoelektronskega stanja preide v malo višje ali malo nižje stanje. Glede energije je tako elektron v kristalu, če se omejimo na energijski pas, v podobnem položaju kot elektron v katodni cevi: ima lahko poljubno energijo. Vendar se v kristalu razmere razlikujejo od razmer v katodni cevi, ker v kristalu pride do izraza število enoelektronskih stanj. V enem enoelektronskem stanju je lahko kvečjemu en elektron. Enoelektronsko stanje je ali *nezasedeno* ali *zasedeno* z enim elektronom. To je znamenita *Paulijeva prepoved*, ki jo je leta 1925 odkril Wolfgang Pauli. Z obojim, s periodično urejenimi atomi, ki delujejo na prevodniške elektrone, da nastane energijski pas, in s Paulijevo prepovedjo je mogoče pojasniti pozitivni Hallov koeficient v kristalih nekaterih kovin.

Upoštevali je treba to, da pod pasom in nad njim, to je pri nižji in pri višji energiji, ni enoelektronskih stanj. Tam sta *prepovedana pasova*. Če je prevodniških elektronov v energijskem pasu veliko manj kot enoelektronskih stanj in je v pasu veliko nezasedenih enoelektronskih stanj, se elektroni vedejo kot prevodniški elektroni, to je približno kot prosti. To smo upoštevali, ko smo pojasnili Hallov koeficient v bakru in podobnih kovinah (slika 2).



Slika 2. Energijski pas z enoelektronskimi stanji v kovini, v kateri je v energijskem pasu veliko manj elektronov kot enoelektronskih stanj. Prevodniški elektroni zasedejo enoelektronska stanja z najnižjo energijo, a tako, da je v vsakem enoelektronskem stanju kvečjemu en elektron. V tem primeru je Hallov koeficient negativen.

Drugače je, če je elektronov samo malo manj kot enoelektronskih stanj in je v sicer zasedenem pasu samo malo nezasedenih elektronskih stanj. Nezasedeno stanje v takem okolju ustreza *primanjkljaju elektrona*. Gibanje primanjkljaja elektrona v skoraj popolnoma zasedenem energijskem pasu opišemo kot gibanje *vrzeli* v skoraj nezasedenem pasu (slika 3).

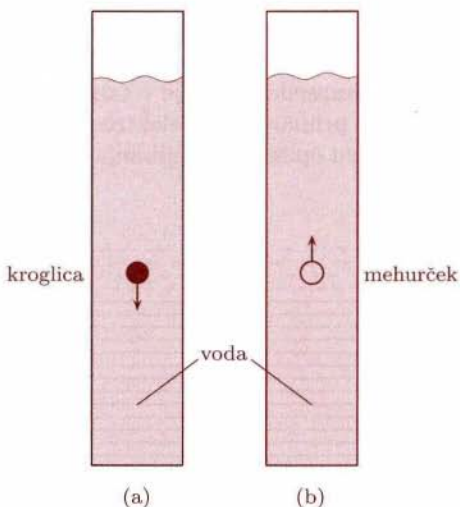


Slika 3. Energijski pas z enoelektronskimi stanji v kovini, v kateri je v energijskem pasu samo malo manj prevodniških elektronov kot enoelektronskih stanj (a). Gibanje nosilcev naboja, ki ustrezajo primanjkljaju prevodniških elektronov v nezasedenih enoelektronskih stanjih, opišemo z vrzelmi v nezasedenem energijskem pasu (b). Vrzeli so namišljeni nosilci naboja s pozitivnim nabojem e_0 , njihova energija je pozitivna v drugo smer kot energija prevodniških elektronov. V tem primeru je Hallov koeficient pozitiven.

Vzel je namišljen delec, ki ima nasproten naboj kot elektron, torej pozitivni osnovni naboj. Pojavi se v računih in si je mehanično ne moremo dobro nazorno predstavljati (slika 4). Rezultat, ki ga dobimo za vzrel v prečnem magnetnem polju, pa je tak kot za elektron, če upoštevamo nasprotni znak naboja. Ker imajo vrzeli nasprotni naboj, se gibljejo v nasprotni smeri kot prevodniški elektroni. Rezultat za magnetno silo se ne spremeni, če spremenimo znak naboja in smer hitrosti. Vrzeli se torej kopičijo na levem robu traku in je ta rob pozitiven proti desnemu robu.

V kovinah z negativnim Hallovim koeficientom je v energijskem pasu prevodniških elektronov veliko nezasedenih enoelektronskih stanj. Kovine s pozitivnim Hallovim koeficientom se od njih razlikujejo po tem, da imajo v tem energijskem pasu le malo nezasedenih enoelektronskih stanj. Tako kolikor mogoče preprosto pojasnimo ozadje pozitivnega Hallovega koeficienta nekaterih kovin.

Slika 4. Mehanična prisposoba za gibanje prevodniških elektronov in vrzeli. V vodi se gibljejo kovinske kroglice navzdol (a), zračni mehurčki pa navzgor (b). Če bi se cevi gibali pospešeno proti desni, bi se kroglice odklonile proti levi, mehurčki pa proti desni. Mehurčke sicer lahko opišemo kot nekakšen primanjkljaj kroglice, a so slabo nadomestilo za vrzeli, ki so računsko pomagalo. S prisposobo ne moremo naravnost pojasniti pozitivnega Hallovega koeficienta, ker se bi morali mehurčki odkloniti v isto smer kot kroglice. Vrzeli so zares dokaj zahteven pojem.



Kako pa je s polprevodniki, ki so tako pomembni? Pri polprevodniku je eden od energijskih pasov do vrha zaseden z elektroni, naslednji pa popolnoma nezaseden. Tako je pri zelo nizki temperaturi, pri kateri je polprevodnik izolator. Pri višji temperaturi elektroni z vrha zasedenega energijskega pasu na račun energije, ki jo dobijo od nihajočih atomov, preidejo preko *energijske špranje* v višji energijski pas in v njem igrajo vlogo prevodniških elektronov. V nižjem, polno zasedenem energijskem pasu, pri tem nastanejo primanjkljaji elektronov, ki jih opišemo kot vrzeli v nezasedenem energijskem pasu. V polprevodniku pri navadni temperaturi prenašajo naboj oboji: prevodniški elektroni in vrzeli. V *polprevodniku brez primesi* je obojih enako. Pri merjenju s takim polprevodnikom potenciala ne dobimo Hallove napetosti, ker bi se prevodniški elektroni in vrzeli nakopičili na levem robu traku in bi učinek enih izravnal učinek drugih.

Na vrzeli je prvi pomislil Werner Heisenberg leta 1926, ko je obravnaval atome elementov, ki so bili v periodni preglednici mesto ali dve pred žlahtnim plinom. Atom takega elementa je bilo mogoče obdelati kot atom žlahtnega plina s primanjkljajem enega ali dveh elektronov. Felix Bloch je leta 1928 opisal elektrone v periodičnem kristalu v okviru kvantne mehanike. Ugotovil je, da se elektron v periodičnem kristalu giblje nemoteno. Za električni upor je krivo termično nihanje atomov in nečistoče ali druge

nepravilnosti v kristalu. Heisenberg je v Leipzigu svetoval mlajšemu sodelavcu Rudolfu Peierlsu, naj razišče, ali je mogoče z Blochovim prijemom pojasniti pozitivni Hallov koeficient. Peierls je to storil v zelo kratkem članku leta 1929. Nato je v letih 1930 in 1932, ko je delal pri Pauliju v Zürichu, podrobno raziskal prevajanje elektrike in toplote v kovinah ter dopolnil Blochove rezultate iz leta 1928 pa tudi svoje iz leta 1929.

Janez Strnad

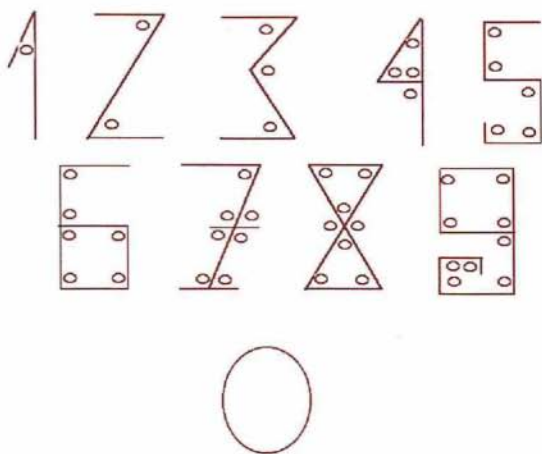
ZAKAJ JE 7 OZNAKA ZA ŠTEVILO SEDEM?

Na Internetu sem povsem slučajno naletel na stran

<http://www.orthohelp.com/numbers.htm>,

na kateri najdete odgovor na zgornje vprašanje. Ne vem, če je odgovoru moč povsem verjeti, vsekakor pa je zanimiv.

Števke, ki jih uporabljamo, so znane pod imenom arabske. Pravzaprav izvirajo iz Indije, preko Bližnjega vzhoda pa so se razširile na ves arabski svet in nato na Iberski polotok. Tam so dobile drugačno obliko od izvirne indijske. Poimenovali so jih gobar. Iz njih izhaja podoba današnjih števk. Na prej omenjeni spletni strani trdijo, da moramo le pogledati starodavni zapis števk, kot so ga uporabljali feničanski trgovci, pa bo takoj jasno, zakaj je 7 oznaka za število 7 in ne za, denimo, 5. Poglejmo stari zapis števk in preštejmo kote. Številka 1 ima en kot, številka 2 ima dva kota, številka 3 tri kote in tako naprej. Torej je podoba številke opredeljena s številom kotov. Kaj pa nič? Ta ne sme imeti nobenega kota, torej mora biti okrogla!

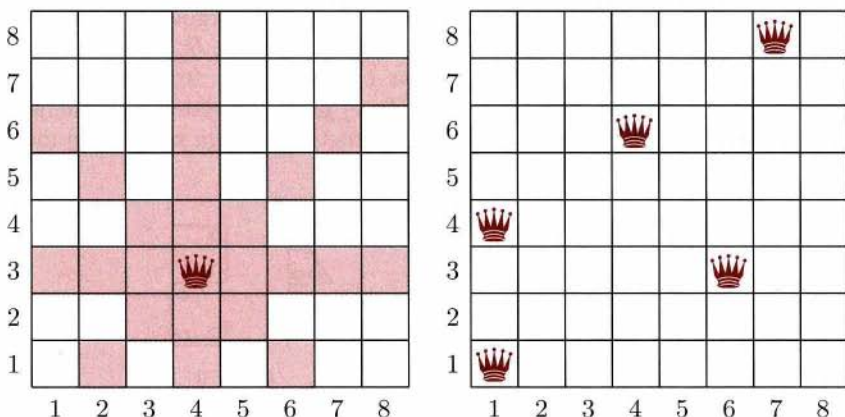


Matija Lokar

KRALJICE NAPADAJO

Situacija, ko sta na šahovski deski več kot dve kraljici, se v šahovski igri ne primeri prav pogosto. Še bolj redko, čeprav ni v nasprotju s pravili, pa imamo na šahovnici pet ali šest kraljic (mimogrede, kaj si mislite o taki igri?). Pustimo si tokrat nekaj svobode in predpostavimo, da od vseh figur polagamo na desko le kraljice in še teh ne ločimo med seboj po barvi.

Spomnimo se, da je velikost šahovske deske 8×8 polj in da se kraljice premikajo v vodoravni, navpični in v obeh diagonalnih smereh. Pravimo tudi, da kraljice *napadajo* določena polja. Zaradi preprostejše računalniške obdelave bomo tako vrstice kot stolpce šahovnice označevali s številkami od 1 do 8. Tako nam polje (5,6) pomeni polje v peti vrstici in šestem stolpcu. Na levi strani slike 1 vidimo kraljico na polju (3,4) in označena vsa polja, ki jih kraljica napada. Dogovorimo se, da kot napadeno polje štejemo tudi polje, na katerem kraljica stoji. Če kraljica stoji na enem izmed polj (4,4), (4,5), (5,4) ali (5,5), napada največje možno število polj (to je 28), najmanj polj (22) pa napada kraljica, ki stoji nekje na robu šahovnice.



Slika 1. Polja, ki jih napada kraljica, in rešitev s petimi kraljicami.

Zastavimo si naslednje vprašanje: *Koliko kraljic je potrebnih, da je napadenih vseh 64 polj na šahovnici?*

S tem in podobnimi problemi so se ukvarjali šahovski navdušenci v Evropi že sredi devetnajstega stoletja. Za zastavljeni problem so našli rešitev s petimi kraljicami. Takih rešitev je v resnici veliko, eno vidite

na desni strani slike 1. Seveda nas zanima najmanjše število kraljic, ki rešijo dano nalogo. Že v devetnajstem stoletju so pravilno predvidevali, da rešitve s štirimi kraljicami ni. Tedaj tega ni nihče preveril, saj je različnih postavitve štirih kraljic na šahovnico kar 635376 (to so kombinacije 64 elementov 4. reda). S pomočjo računalnika pa ta naloga za nas ni pretežka. Sestavili bomo torej program, ki bo preveril vse postavitve štirih kraljic na šahovski deski in ugotavljal, ali postavitve napadajo vsa polja. Program bomo zapisali v programskem jeziku pascal, ki ga gotovo pozna veliko bralcev Preseka.

Najprej se dogovorimo, na kakšen način bomo predstavili podatke. Šahovska deska s stolpci in vrsticami nas napeljuje k temu, da izberemo dvorazsežno tabelo. Ker nas bo o vsakem polju šahovnice zanimalo le, ali je napadeno ali ne, lahko kot elemente tabele izberemo logične vrednosti. V pascalu bomo torej uporabili podatkovno strukturo: `array[1..8, 1..8] of boolean`. Postavitev kraljice je povsem opisana z dvema podatkom, to je stolpcem in vrstico. Zapišimo najprej podprogram `kaj_napada`, ki bo za dano postavitev kraljice določil napadena polja. Za 'navpična' in 'vodoravna' polja bomo uporabili preprosto zanko `for`, za 'diagonalna' polja pa bolj prefinjeni stavek `while`. Uporabili bomo štiri zanke `while` za vse štiri diagonalne smeri in pri tem posnemali pot kraljice po diagonali. Zanka se tako konča, ko pride kraljica do roba šahovnice. Predhodno moramo vrednosti tabele napadenih polj nastaviti na `false`. Za to poskrbi podprogram `nastavi`.

{Nastavi vsa polja šahovnice velikosti $n \times n$ kot nenapadena.}

procedure nastavi(**var** a: sahovnica);

var i,j: integer;

begin

for i := 1 **to** n **do**

for j := 1 **to** n **do** a[i,j] := false;

end; {nastavi}

{Popravi tabelo napadenih polj ob postavitvi kraljice na polje (x,y).}

procedure kaj_napada(x,y: integer; **var** a: sahovnica);

var i,j: integer;

begin

for i := 1 **to** n **do begin**

 a[x,i] := true; a[i,y] := true

end; {for}

```

i := x-1; j := y-1; { levo navzdol }
while (i>=1) and (j>=1) do begin
  a[i,j] := true; i := i-1; j:= j-1;
end; {while}
i := x-1; j := y+1; { desno navzdol }
while (i>=1) and (j<=n) do begin
  a[i,j] := true; i := i-1; j := j+1;
end; {while}
i := x+1; j := y-1; { levo navzgor }
while (i<=n) and (j>=1) do begin
  a[i,j] := true; i := i+1; j := j-1;
end; {while}
i := x+1; j := y+1; { desno navzgor }
while (i<=n) and (j<=n) do begin
  a[i,j] := true; i := i+1; j := j+1;
end {while}
end; {kaj_napada}

```

Zdaj pa k osnovnemu konceptu programa. Za vsako postavitev štirih kraljic bomo določili polja, ki so napadena. To naredimo kar s podprogramom `kaj_napada`, ki ga pokličemo štirikrat zaporedoma. Na koncu bodo napadena polja v tabeli označena z logično vrednostjo `true`. Zatem bomo s funkcijo `preveri` ugotovili, ali so napadena vsa polja, in v tem primeru izpisali rešitev (podprogram `izpis`).

{Preveri, ali so napadena vsa polja šahovnice a.}

function preveri(a: sahovnica): boolean;

var i,j: integer;

 test: boolean;

begin

 test := true;

for i := 1 **to** n **do**

for j := 1 **to** n **do**

if a[i,j]=false **then** test := false;

 preveri := test;

end; {preveri}

{Izpiše rešitev (če ta obstaja).}

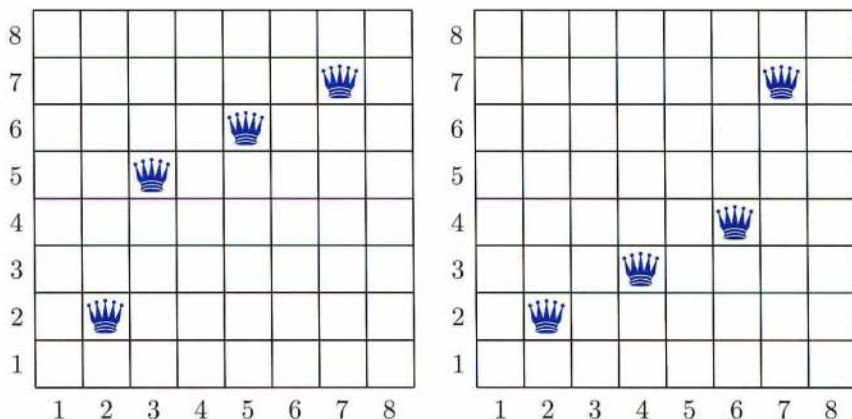
procedure izpis(*i1,j1,i2,j2,i3,j3,i4,j4*: integer);

begin

 writeln('Resitev:',i1,j1,' ',i2,j2,' ',i3,j3,' ',i4,j4);

end;

Preden zapišemo glavni program še nekaj opomb, zaradi katerih lahko skrajšamo čas izvajanja programa. Najprej o vrtenju šahovnice ali zvijanju vratu. Povsem jasno je namreč, da postavitve kraljic napadajo enako število polj, če šahovnico zavrtite za 90, 180 ali 270 stopinj (primer vidimo na sliki 2, kjer smo šahovnico zavrteli za 180°). To tudi pomeni, da stolpce in vrstice lahko oštevilčimo tako, da bo vsaj ena kraljica ležala na polju za vrstico in stolpcem od 1 do 4. Poleg tega v programu (delno) upoštevamo, da so si kraljice enakovredne, torej naj ne bi ponavljali postavitev dveh kraljic, ki le zamenjata svoji mesti. Ker želimo napisati čim preprostejši program, je nekaj takih ponavljanj vendarle ostalo (ali znaš ugotoviti, katera?).



Slika 2. Šahovnico zavrtimo za polkrog.

program kraljice(input,output);

const n=8; { velikost šahovnice }

type sahovnica=array[1..n,1..n] of boolean;

var a: sahovnica; { tabela napadenih polj }

 x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4: integer; { položaji kraljic }

 .

 .

 .

```

begin
  for x1 := 1 to (n+1 div 2) do
    for x2 := x1 to n+1-x1 do
      for x3 := x2 to n+1-x1 do
        for x4 := x3 to n+1-x1 do
          for y1 := 1 to (n+1 div 2) do
            for y2 := 1 to n do
              for y3 := 1 to n do
                for y4 := 1 to n do begin
                  nastavi(a);
                  kaj_napada(x1,y1,a); kaj_napada(x2,y2,a);
                  kaj_napada(x3,y3,a); kaj_napada(x4,y4,a);
                  if preveri(a)=true then
                    izpis(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4);
                end;
              writeln('Pregledovanje postavitev kraljic je koncano.');
```

V manjkajoči del programa je seveda treba prepisati podprograme, ki smo jih zapisali prej, in dobimo program, ki naj bi pravilno deloval. To pomeni, da naj ne bi vrnil nobene rešitve, preden izpiše 'Pregledovanje postavitev kraljic je končano'. Če spremenimo vrednost konstante n , dobimo program, ki bo tekel tudi na šahovnicah drugih dimenzij. Bralec lahko brez veliko dela spremeni program tudi tako, da bo preverjal rešitve z večjim številom kraljic (v glavnem programu je treba dodati ustrezno število zank *for* in popraviti podprogram *izpis*). Kot zanimivost povejmo, da je pet kraljic dovolj tudi za šahovnice velikosti 9×9 , 10×10 in 11×11 , vendar je število rešitev ustrezno manjše. Za te primere lahko naš program spremenimo tako, kot smo maloprej opisali. A opozorilo: na mnogo večjih šahovnicah tega ne bomo počeli, saj problem sodi v skupino, ki ji v računalništvu rečemo NP-težki problemi. Kdor bo na primer poskusil pognati program za šahovnico velikosti 11×11 s petimi kraljicami, si bo lahko med izvajanjem programa privoščil kosilo. Morda bo celo čas za popoldanski spanec.

Naš program bi ob spretnem preprogramiranju lahko postal tudi malce hitrejši. Namreč namesto dvorazsežne tabele bi za vodenje evidence o napadenih poljih vzeli stolpce, vrstice in diagonale šahovnice (upoštevaj, da je posamezno polje napadeno natanko tedaj, ko je v njegovem stolpcu, vrstici ali eni od diagonal kaka kraljica). Teh je skupaj $8 + 8 + 26 = 42$, saj imamo dve vrsti diagonal ('naraščajoče' in 'padajoče'), pri čemer kotne diagonale z enim samim poljem izpustimo. Izvajanje podprograma

kaj napada bi se tako precej skrajšalo, saj bi za postavitev kraljice na določeno polje morali spremeniti le štiri podatke (vrstico, stolpec in diagonali, ki jih kraljica napada). Ob tem bi bilo seveda potrebno spremeniti tudi podprograma **nastavi** in **preveri**, pri čemer bi za slednjega potrebovali nekaj več vrstic programske kode kot v gornji različici.

Naloge (rešitve boste našli v naslednji številki Preseka):

1. Na desnem delu slike 1 imamo eno izmed mnogih rešitev s petimi kraljicami. Ali znaš poiskati tako rešitev, pri kateri se bodo vse kraljice medsebojno napadale (recimo rešitev, pri kateri vse kraljice ležijo na najdaljši diagonali šahovnice)? In še: poišči tako rešitev, da se kraljice medsebojno ne bodo napadale. Obeh nalog se lahko lotiš s pomočjo računalnika ali s poskušanjem na šahovnici.
2. Podoben problem lahko zastavimo za trdnjave, vendar je rešitev zelo preprosta. Vsaj 8 trdnjav potrebujemo, da so vsa polja na šahovnici velikosti 8×8 napadena. Vendar ni vsaka postavitev z osmimi trdnjavami prava. Ali znaš povedati, kakšno lastnost imajo postavitve osmih trdnjav, ki niso prave (ki torej ne napadajo vseh polj)? Kaj pa isti problem na šahovnicah večjih dimenzij?
3. Koliko kraljev potrebujemo, da so napadena vsa polja šahovnice 8×8 ? Komur se to vprašanje zdi prelahko, naj poskusi najti formulo za najmanjše število kraljev, ki napadajo vsa polja šahovnice z n vrsticami in n stolpci.

Boštjan Brešar

ISKRICA

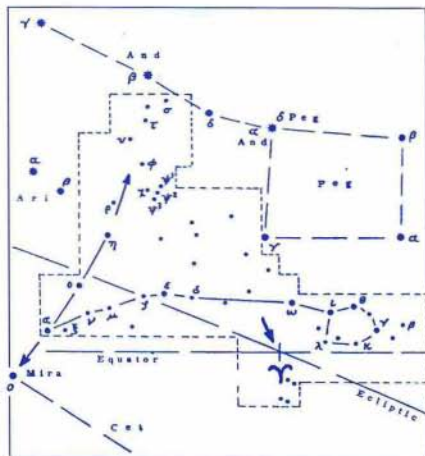
Po težkem kolokviju iz teorije mere so se študenti usidrali v bližnjem lokalu, da s kavo poplaknejo naporno delo in preverijo rešitve. Podajali so si Cauchy-Riemannove enačbe, pa "u po dv" in "v po du" ter se niso mogli zediniti. Tako vso uro. Ko so odhajali, je pristopil natakár in vsakemu ponudil bonbon. Prijetno presenečeni so vprašali, s čim so si to zaslužili.

In odgovor: "Da ne boste ves čas mislili le na DDV!"

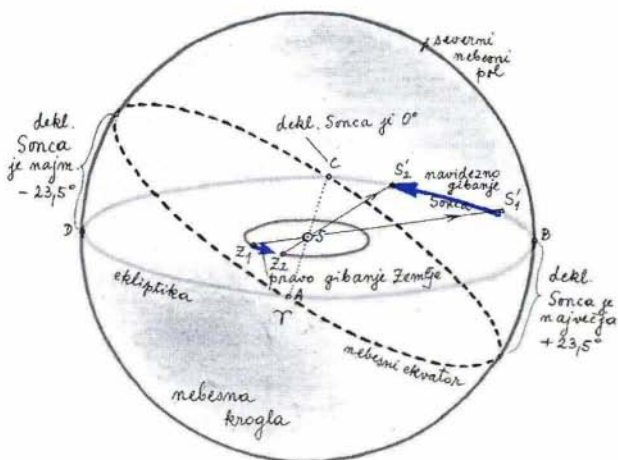
Tatjana Hernaus

Zvezde imajo stalne koordinate (oziroma se v času enega človeškega življenja opazno ne spremenijo), Soncu, Luni, planetom, kometom pa se stalno spreminjajo. Zato vesoljskim telesom, ki se jim kooordinati opazno spreminjata, večkrat rečemo premičnice, če z imenom stalnice mislimo zvezde.

Pomudimo se za hipec še pri deklinaciji Sonca, torej kotu, ki ga oklepa spojnica med središčema Zemlje in Sonca z ravnino, v kateri leži zemeljski in seveda tudi, kot preslikava na nebo, nebesni ekvator. Ravnina ekvatorja oklepa kot $23,5^\circ$ z ravnino zemeljskega gibanja (sliki 2 in 3). Deklinacija Sonca je odvisna od dneva v letu (datumu) in se spreminja v mejah od $-23,5^\circ$ (21. 12. – začetek zime, božič) do $+23,5^\circ$ (21. 6. – začetek poletja, kres).



Slika 2. Skica prikazuje približno današnje lego pomladišča v ozvezdju Ribí.



Slika 3. Navidezno letno gibanje Sonca je posledica kroženja Zemlje okrog Sonca. S – Sonce, S'_1 in S'_2 – legi Sonca na nebu, vidnega z Zemlje. Pri premiku Zemlje iz Z_1 v Z_2 se Sonce navidezno premakne iz S'_1 v S'_2 . Lege Sonca na nebu: A – ob spomladanskem enakonočju, B – ob kresu, C – ob jesenskem enakonočju, D – ob božiču.

Razmeroma dobro oceno za δ Sonca dobimo iz naslednjega izraza:

$$\delta = \delta_0 \cdot \sin \left(\frac{(284 + t) \cdot 360^\circ}{365} \right),$$

kjer je amplituda $\delta_0 = 23,5^\circ$, t pa zaporedni dan v letu.

Narišite graf $\delta = \delta(t)$. Iz poteka deklinacije Sonca med letom poskusite ugotoviti:

1. Kdaj je deklinacija nič?
2. Od kdaj do kdaj je deklinacija pozitivna (Sonce leži na severni nebesni polkrogli)?
3. Od kdaj do kdaj je deklinacija negativna (Sonce leži na južni nebesni polkrogli)?
4. Od kdaj do kdaj deklinacija raste?
5. Od kdaj do kdaj trajajo posamezni letni časi?

Vse, kar boste odkrili, že veste. Pri katerem predmetu ste se že to učili? Vseeno odgovor najdete v prihodnji številki Preseka.

Marijan Prosén

NALOGA S PROBLEMOM

Matevž je odšel na dveurno kolesarjenje. Od doma je najprej vozil po ravnini, se nato povzpел do gorskega cilja, tam obrnil in se po isti poti vrnil domov. Kako daleč od njegovega doma leži obiskani gorski cilj, če je po ravnini vozil s hitrostjo 24 km/h, v hrib 18 km/h in s hriba 36 km/h?

- Se vam zdi, da je v nalogi podatkov preveč, premalo ali ravno prav?
- Ne glede na to, kakšen vtis ste dobili, poskusite nalogo rešiti.
- Presenečeni? Znete razložiti, zakaj je odgovor tak, kakršen je?
- Ali lahko nalogo oblikujemo tako, da kolesarja zamenjamo z veslačem, kolesarjenje po ravnini z veslanjem po mirnem jezeru, vožnjo navkreber nadomestimo s potjo čolna proti toku hitre reke, ki se izliva v jezero, in kolesarjenje s hriba z veslanjem navzdol po reki?

Marija Vencelj

PREPISOVANJE KNJIG

Pred iznajdbo tiska je bilo zelo težko narediti kopijo knjige. Celotno vsebino so morali ročno prepisati pisarji. Pisar je dobil knjigo in čez nekaj mesecev je končal s kopijo. Eden od najbolj znamenitih pisarjev je živel v 15. stoletju in se je imenoval Xaverius Endricus Remius Ontius Xendrianus (XEROX)¹. Delo pisarjev je bilo zelo zamudno in običajno tudi dolgočasno. Pospešili pa so ga lahko le tako, da so najeli še več pisarjev.

Premožni stric se je odločil, da si omisli domačo knjižnico. V veliki deželni knjižnici si je izposodil K svojih najljubših knjig (te so oštevilčene s števili od 1 do K) in najel P pisarjev. Pravila zahtevajo, da posamezno knjigo v celoti prepíše en sam pisar. V pogajanjih z deželnimi stanovi je ceh pisarjev tudi dosegel, da sme posamezni pisar prepisovati le zaporedne knjige. Tako je prepisovanje zanimivejše, saj lahko pisar med prepisovanjem sledi tudi daljšim zgodbam. Pravijo, da tako naredi manj napak. Tudi deželna knjižnica je podprla njihovo zahtevo, saj je tako manj možnosti, da se katera od knjig izgubi. Vsi pisarji so enako hitri (vsaj tako zagotavljajo v pisarni ceha pisarjev), čas, ki ga pisar potrebuje za prepis knjige, pa je sorazmeren s številom strani, ki jih ima knjiga. Čas, ki ga za prepis skupine knjig potrebuje skupina pisarjev, je tako določen s pisarjem, ki dobi največ dela (prepisati mora največ strani).

In kakšna je vaša vloga v celotni zgodbi? Stricu se že mudi z opremo knjižnice, pa tudi stroški izposoje knjig niso zanemarljivi. Zelo ga tudi skrbi, da bi pisarji zavlačevali z delom. Ker vam je stric nedavno kupil "čudežni mlinček" (računalnik), ste se ponudili, da izračunate, koliko časa bodo za prepis knjig potrebovali pisarji (seveda v najboljšem primeru). Vaša naloga je torej, da napišete program, ki bo iz števila strani posameznih knjig in iz števila razpoložljivih pisarjev izračunal čas, ki ga pisarji potrebujejo za prepis knjig.

Oglejmo si primer. Trije pisarji bodo 9 knjig, ki imajo po vrsti 100, 200, ..., 900 strani, najhitreje prepisali tako, da prvi prepíše prvih pet knjig, drugi naslednji dve in tretji zadnji dve. Tako bodo porabili 1700 časovnih enot. Če bi jim knjige lahko dodelili v prepisovanje brez omejitev, bi bila rešitev seveda drugačna. Tako bi na primer prvi pisar prepisal knjigi s 600 in 900 stranmi, drugi tisti dve s 700 in 800 stranmi, tretji pa preostalih pet knjig. Vsi bi z delom končali hkrati po 1500 časovnih enotah. Toda ceh pisarjev ne dovoli, da bi knjige pisarjem dodelili povsem poljubno (zviti so tile pisarji, ni kaj). Znete napisati program, ki bo razpršil stričeve strahove?

Matija Lokar

¹ Tega podatka pri zgodovini raje ne povejte. Dvomim, da vam bo učitelj verjel.

DAVID HILBERT (1862–1943) – Ob stoletnici Osnov geometrije in skorajšnji stoletnici Hilbertovih problemov

David Hilbert se je rodil leta 1862 v Königsbergu v vzhodni Prusiji. Stari oče in oče sta bila sodnika v Königsbergu, nagnjenje do matematike pa je David podedoval po svoji materi. Učenost je nabiral v rodnem Königsbergu z izjemo enega semestra univerzitetnega študija, ko je študiral v Heidelbergu. Po doktoratu 1885. leta je odšel v Leipzig in Pariz, naslednje leto pa je bil sprejet za privatnega docenta na königsberški univerzi. Leta 1892 je postal izredni in naslednje leto redni profesor na tej univerzi. V tem času se je tudi poročil s Käthe Jerosch¹. Leta 1895 je dobil Hilbert katedro na univerzi v Göttingenu, kjer je ostal vse do upokojitve v letu 1930. Leta 1925 je zbolel za pogubno anemijo, ki je tisti čas veljala za neozdravljivo. Odtlej ni več zmogel delati s polno znanstveno močjo. Umrli je med drugo svetovno vojno leta 1943. Dve leti zatem je njegov Königsberg, skoraj popolnoma uničen, pod imenom Kaliningrad pripadel Rusom.

“Če bi bil slikar, bi zlahka narisal Hilbertov portret, tako močno so se mi v spomin vtisnile njegove poteze izpred štiridesetih let, ko je bil na vrhuncu svojega življenja. Še vedno vidim njegovo visoko čelo, sijoče oči, strmo zroče skozi očala, strogo, kratko poraščeno bradico, vidim celo smeli panamski klobuk na njegovi glavi. In v ušesih mi še vedno odzvanja njegov ostri vzhodnopruski naglas ...” je v knjigi Raziskovalci in znanstveniki sodobne Evrope zapisal F. M. Levi. Takega Hilberta so se spominjali tudi drugi, ki so ga zgodaj spoznali. Tiste pa, ki so ga srečali kasneje, ko ga je že prizadela bolezen, je njegov videz globoko pretresel.



¹ Njun edinec Franz je pri enaindvajsetih duševno zbolel. Hilbert fantove bolezni ni najlepše sprejel. Sinu se je takorekoč odrekel in ko se je ta vrnil iz bolnišnice, je bil za očeta samo moteč dejavnik pri njegovem znanstvenem delu.

Königsberg, Hilbertovo rojstno mesto in mesto njegovega zorenja v matematika, je postalo eno od matematičnih središč v obdobju 1827–1842, ko je tam deloval Carl G. J. Jacobi. Hilbertov profesor v prvih študentskih letih je bil algebraik Heinrich Weber, Dedekindov sodelavec v teoriji algebraičnih funkcij. Leta 1883 ga je nasledil Weierstrassov učenec F. Lindemann, izvrsten, a zmeden matematik, ki je leto pred tem prvi dokazal, da je π transcendentno število. Pod njegovim vplivom je Hilbert začel svoje prve znanstvene raziskave v teoriji invariant. V Hilbertovih študentskih letih je v Königsbergu blestel sijajni študent matematike Hermann Minkowski, dve leti mlajši od Hilberta, a po študiju semester pred njim. Minkowski je leta 1883 prejel veliko nagrado Pariške akademije. Leta 1884 je bil za izrednega profesorja v Königsbergu nastavljen Adolf Hurwitz, le tri leta starejši od Hilberta, a tedaj že zrel matematik, ki je bil polnih osem let Hilbertov matematični vodja. Skupno delo je bilo prekinjeno leta 1892, ko sta Hurwitz in Minkowski dobila mesti na univerzi v Zürichu. Sodelovanje z Minkowskim je Hilbert obnovil leta 1902 v Göttingenu, kjer so na Hilbertovo iniciativo posebej za Minkowskega ustanovili novo matematično katedro.

— — —

Hilbertovo znanstveno delo lahko z vidika objavljenih rezultatov grobo razdelimo na šest obdobji: teorija invariant (do leta 1893); algebraična teorija števil (1894–1899); osnove geometrije (1899–1903); analiza: Dirichletov princip, variacijski račun, integralske enačbe, Waringov problem (1904–1909); teoretična fizika (1912–1914); osnove matematike (po letu 1918).

— — —

Posebej velja omeniti pomembno Hilbertovo dejanje, od katerega bo prihodnje leto minilo sto let. V času pariške svetovne razstave je Hilbert na II. mednarodnem kongresu matematikov v Parizu nagovoril svoje stanovske kolege takole: "Prepričanje, da je vsak matematični problem rešljiv, je močna vzpodbuda pri našem delu. Prišepetava nam: *Pred teboj je problem, poišči njegovo rešitev! Do nje lahko prideš s čistim razmislekom, kajti v matematiki ne obstaja ignorabimus*²." S temi besedami

² ignoramus et ignorabimus – ne vemo in ne bomo vedeli – besede, ki absolutizirajo meje spoznanja; izrekel jih je mehanični materialist Du Bois leta 1872 na nekem predavanju.

je Hilbert uvedel svoj znameniti izbor triindvajset odprtih matematičnih problemov, s katerimi je poskušal v glavnih potezah nakazati obrise matematične dejavnosti v prihodnosti in ki so sprožili številne matematične raziskave v dvajsetem stoletju.

I. V teoriji invariant je Hilbert uvedel povsem nov pristop: direktno nealgoritmčno metodo, ki je napovedala in pripravila osnove za tisto, kar bi lahko imenovali abstraktna algebra dvajsetega stoletja. Zanimivo je, da je delo na področju invariant opustil takoj po svojem zelo odmevnem predavanju na mednarodnem kongresu matematikov v Chicagu leta 1893 in se k njemu ni nikoli več vrnil. Podobno so ravnali tudi številni drugi matematiki. Še nikoli ni tako cvetoča matematična veja tako hitro ovenela. Teorija invariant je izumrla kot samostojno področje. Razlog ni bil v tem, da bi bil Hilbert rešil vse njene probleme, ampak, ker je uvedel nov, širši pogled na invariante. To se v matematiki pogosto dogaja. S splošnejšega vidika postanejo veličastne ideje ničeve, globoki premisleki trivialni in rafinirani sklepi nepotrebni. Vseeno pa je presenetljivo, da se je usoda teorije invariant tako bliskovito spremenila, da je bil njen padec tako globok in da ga je povzročil en sam človek.

II. Teorija števil je matematično področje, ki je s svojo lepoto vedno nezadržno privabljalo matematično elito sveta. Tudi Hilberta je po opustitvi teorije invariant zvalila "kraljica matematike". Na kratko ni mogoče ustvariti pravega vtisa o količini in vrednosti Hilbertovih rezultatov in objav v algebrski teoriji števil. Njegovi prispevki tej matematični veji so tako vsesplošni in popolni, da, kljub dosežkom njegovih predhodnikov, ostaja vtis, da se je algebrska teorija števil začela pravzaprav s Hilbertom.

Od del s tega področja omenimo posebej le *Der Zahlbericht*, zbirko dokazov iz algebrske teorije števil, ki je izšla leta 1897. *Der Zahlbericht* je več kot le poročilo. To je klasična mojstrovina matematične literature, ki je bila dobrega pol stoletja biblija vseh, ki so se želeli poučiti o algebrski teoriji števil. Le malo je matematičnih del, ki se po jasnosti in didaktični zgradbi lahko kosajo z *Der Zahlbericht*.

V algebrski teoriji števil je Hilbert dosegel svoj znanstveni vrhunec. Od področja se je poslovil, ko je bilo še veliko nedokončanega dela. Svojim učencem in naslednikom je prepustil, da ga dopolnijo.

III. Napoved, da bo v zimskem semestru 1898/99 Hilbert predaval geometrijo, je osupnila göttingenške študente, saj je vsa tri leta, od prihoda na tamkajšnjo univerzo, predaval le teorijo števil.

To je bil začetek Hilbertovega kratkega geometrijskega obdobja. Tradicionalna geometrija je bila veliko lažja kot visoko formalizirana matematika, s katero se je Hilbert ukvarjal v preteklosti. Tudi sicer Hilbertovo delo v geometriji ne zdrži primerjave z njegovimi prispevki k teoriji invariant, algebraični teoriji števil ali analizi.

Svojo pozornost je Hilbert usmeril predvsem v osnove geometrije in že leta 1899 je izdal knjigo *Grundlagen der Geometrie* (Osnove geometrije). V Osnovah geometrije bi težko našli kakšen rezultat, do katerega se ne bi sčasoma dalo priti tudi po drugačni poti, vendar je bila to imenitna knjiga. Doživela je številne izdaje in prevode ter bila zanesljivo najbolj brano Hilbertovo delo.

Delo je imelo velik vpliv na matematiko dvajsetega stoletja. Po aritmetizaciji analize in Peanovih aksiomih je bila večina matematike postavljena na strogo aksiomatske temelje. Ni pa to veljalo za geometrijo. Geometrija je v devetnajstem stoletju cvetela kot še nikoli dotlej, vendar je bil Hilbert prvi, ki ji je v Osnovah geometrije poskusil dati povsem formalni značaj. Več kot dve tisočletji star Evklidov pristop je sicer imel deduktivno zgradbo, toda bila je polna prikritih domnev, nepotrebnih definicij in logičnih nejasnosti.

Hilbert je doumel, da vseh matematičnih pojmov ni moč definirati. Zato začenja svojo obravnavo geometrije s tremi nedefiniranimi objekti: točko, premico in ravnino (ki bi jim po njegovem prav tako lahko rekli miza, stol in vrček za pivo) ter šestimi nedefiniranimi relacijami: biti na, biti v, biti med, biti skladen, biti vzporeden in biti zvezen. Geometrijo je zgradil na skupini enaindvajsetih privzetkov, znanih pod imenom Hilbertovi aksiomi. Sem sodi osem aksiomov pripadnosti (med njimi tudi prvi Evklidov postulat), štirje aksiomi urejenosti, pet aksiomov skladnosti, trije aksiomi zveznosti (česar pri Evklidu eksplicitno ne najdemo) in aksiom o vzporednosti, ki je ekvivalenten petemu Evklidovemu postulatu. Za razliko od Evklida je zahteval, da sistem aksiomov izpolnjuje določene logične pogoje:

Biti mora *popoln*: Vsi izreki teorije morajo biti izvedljivi z logičnim premislekom le iz sistema aksiomov.

Biti mora *neodvisen*: Če odstranimo iz sistema poljuben aksiom, potem najmanj enega izreka teorije ne bo moč dokazati.

Biti mora *neprotisloven*: Iz sistema aksiomov ne moremo z logičnim premislekom priti do protislovne trditve.

Hilbertovo pionirsko delo je vplivalo na nastanek novih alternativnih geometrijskih aksiomatik in na začetku dvajsetega stoletja je bil v popolnosti oblikovan povsem formalen deduktivni značaj geometrije.

Od izdaje do izdaje so Osnove geometrije postopoma modernizirali. Toda same osnove geometrije, kot matematično področje, so se razvijale hitreje kot je potekala modernizacija Osnov geometrije. Tako je dandanes Hilbertova knjiga predvsem zgodovinski dokument in ne več osnova za moderni pouk geometrije.

IV. Takoj po izidu Osnov geometrije se je začel Hilbert ukvarjati s starim in slavnim problemom, znanim pod imenom Dirichletov princip. Kot začetek Hilbertovih objav v analizi štejemo leto 1904, ko je osupnil matematični svet z rešitvijo tega problema. Presenečenje je bilo toliko večje, ker je pred tem Weierstrassov kritikizem Dirichletovemu principu močno zmanjšal ugled in mu odrekal verodostojnost. Zanimivo je, da je Hilbert potrdil Dirichletov princip z metodo surove sile podobno preprosto, kot je pred tem opravil s teorijo invariant.

Hilbert je s svojimi deli obogatil tudi klasični variacijski račun, najpomembnejši njegov prispevek k analizi pa je obravnava integralskih enačb v člankih med letoma 1904 in 1910.

Iz Hilbertovega analitičnega obdobja ne smemo prezreti precej izoliranega, a morda njegovega najlepšega dela. To je dokaz pravilnosti Waringove hipoteze, postavljene leta 1770, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto kvečjemu m samih n -tih potenc, kjer je število m odvisno le od eksponenta n (tako lahko npr. zapišemo vsako naravno število kot vsoto največ štirih kvadratov naravnih števil, devetih kubov, devetnajstih četrtih potenc itd.)

V. Po letu 1909 je kazal Hilbert čedalje večje zanimanje za fiziko, ki je bila, kot je trdil, pretežka, da bi jo prepustili samo fizikom. Rezultati te aktivnosti so bili le delno objavljeni (kinetična teorija plinov, aksiomatika radiacije, relativnost). Splošno mnenje je, da Hilbertovim dosežkom na tem področju manjkata tista temeljitost in iznajdljivost, ki ju najdemo v njegovih matematičnih delih.

VI. Od svojih prvih aksiomatskih dni je Hilbert gojil neizpolnjeno željo, dokazati neprotislovnost matematike ali - po njegovem - neprotislovnost teorije števil. Ta dolgo zatirana želja je sčasoma postala obsedenost.

Njegova ideja absolutnega dokaza neprotislovnosti je bila, prevesti matematiko na končno igro z neskončno mnogo formulami, ki bi bile podane s končno mnogo definicijami. Ta igra bi morala biti neprotislovna;

to je, dokazati bi bilo treba, da, igraje v skladu s pravili, nikoli ne moremo priti do formule $0 \neq 0$.

Med Hilbertovi matematičnimi sodobniki so bili taki, ki so dvomili, da je ideja moč izpeljati, pa tudi taki, ki so absolutnemu dokazu neprotislovnosti odrekli smisel.

Katastrofalni udarec za Hilberta je prišel, ko je leta 1931 Kurt Gödel dokazal, da je Hilbertova ideja neizvedljiva. Mar ni Hilbert nikoli podvomil v zdravost svoje ideje? Vse, kar je objavil s tega področja, je tako naivno, da kaže, da je temu res tako. Le kako je to mogoče? Je preveč verjel misli, da v matematiki ne obstaja ignorabimus?

— — —

Hilbert je bil stroga osebnost in neodvisen mislec tudi na nematematičnih področjih. Kot vzhodni Prus je nagibal k političnemu konservatizmu, toda preziral sleherno obliko nacionalizma. Med prvo svetovno vojno je odklonil podpis slavne Deklaracije kulturnega sveta, listo nekakšnih "ni-res-da" stališč, in si drznil objaviti nekrolog za umrlim francoskim matematikom Darbouxom, čeprav sta se Francija in Nemčija vojskovali na nasprotnih straneh.

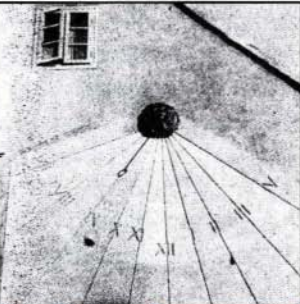
Biografski zapisi, ki so nastali za časa Hilbertovega življenja, vsebujejo bolj ali manj običajne življenjepisne podatke in se ne dotikajo njegove osebnosti in življenja. Več o Hilbertovem življenju se je ohranilo v ustnem izročilu. Pričevanja je zbrala Constance Reid in leta 1970 izdala skoraj dvestopetdeset strani obsegajočo Hilbertovo biografijo, v kateri je verodostojno in razumevajoče prikazala Hilbertovo osebnost in njegov svet. Knjigi je priključila tudi nekoliko skrajšani nekrolog Hermanna Weyla, ki je ob Hilbertovi smrti izšel v Bulletin of the American Mathematical Society. Weylov zapis je temeljita in večša analiza Hilbertovega znanstvenega dela in tudi vpliva njegove osebnosti na študente in sodelavce: "...kot zapeljiva Panova piščal je druge vabil za seboj v globoke matematične vode...". O Hilbertovem življenju pričajo tudi njegovi lastni spomini na Minkowskega in na Hurwitza³ in ne nazadnje devetinšestdeset doktorskih del, izdelanih pod njegovim vodstvom. Številni Hilbertovi študenti so kasneje postali slavni matematiki. Med njimi sta bila tudi dva Slovenca, Josip Plemelj in Rihard Zupančič.

Marija Vencelj

³ Zvezek s Hilbertovimi spomini, ki mu je priložena gramofonska plošča s Hilbertovim glasom, in knjigo Constance Reid o Hilbertu hrani tudi Matematična knjižnica Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani.

KRIŽANKA “MERJENJE ČASA”

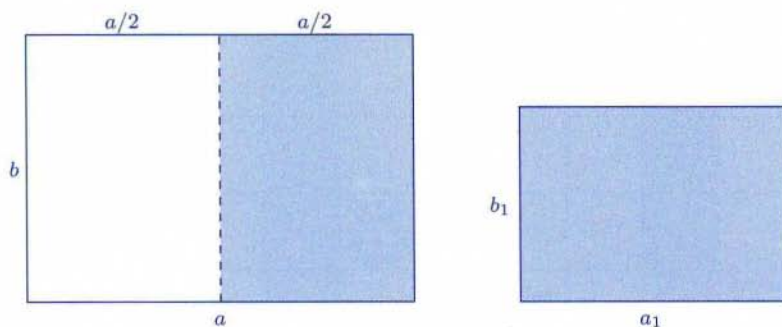
			STARA ČASOMERILNA NAPRAVA, DELUJOČA NA CURLJANJE VODE		IME DVEH DOL. KRAJEV (MALE IN VELIKE)	OVČJE KRZNO	DEŽEVNIK V PESKU NA MORSKI OBLJI	NAUK O GIBANJU TELES	IME SO-PRANISTKE PUSAR	1400 KM DOLGA R. V AFRIKI, PRITOČADSKEGA JEZE
			KANAL ZA ODPLAKE V MESTU							URA ZA MERJENJE ŠPORTNIH DOSEŽKOV
			SL. LITER. ZGODOV. (JANKO)							TOPNIČAR
			PESNIK							UTOPIČNA PREDSTAVA
AVTOR MARKO BOKALIČ	ČUT ZA LASTNOSTI JEDI	KRAJ PRI TRSTU							ODŠTEVALNA URA	
		ZELEN DEL RASTLINE							TEMEN TROPSKI LES	
POJAV PRI MLADIH DREVESNIH STEBLIH										NASVET STANČE
IME ŠAHISTKE GROSAR				JUD. UČENJAK (BEN)						TEMEN MATIČ. RES
				PISATELJ GODINA						
ORIGIN. KRATICA ZA ZDRUŽENE DRŽAVE			DARIO FO			RUMENO RJAVJA BARVA				ZAPČ. ARE
			PREIZKUS VINJENOSTI							
ŠPORTNI NOVINAR NA TVS (ANDREJ)						IGRALKA TURNER				OS. EN. MEDN.
						"LUNINA" ČAS. ENOTA				
	OBIČAJ NA SVATBI									SL. F. (JOZ.) EN. ZA
	PASTIRSKA PESEM	PAPEŽ RE-FORMATOR KOLEDARJA							NARAVOSLOVNA VEDA O LASTNOSTIH IN SPREMEMBAH SNOVI	PRIČAKOVANJE, NADA
NEMŠKI SKLADATELJ (WERNER)				DELNICE						
				ORGANIZAT. SL. OPERE (JOSIP)						
ZEVSOV OČE. BOG ČASA							PRODUKT SILE IN POTI V FIZIKI	LUNINO ŠTEVILO	GRŠKI BASNOPISEK	
ČAS OBHODA ZEMLJE OKOLI SONCA					NABREKLINA ZARADI NASIRANJA TEKOCINE					ČASOVNI PRISLOV
										BODIČASTA ŽIVAL
VOGAL				KEM. ELEM. V ATOMSKI URI						
				IRENA AVBELJ						
LJUDSKI IZRAZ ZA VIOLINO					VASICA NAD KNEZO, STRAN DOLINO BAČE					1. POLDI KAH. TICE
PRAŠKA ZALOŽBA KNJIG O UMETNOSTI						OBLAGA IZ DEŠČIC				PRIPI. IZU. VI. SLOV.

EKA K RA	MESTNO PROMETNO SREDSTVO	OLIVER TWIST	ZBADLJIVOST	IME NEKD. IZRAEL ŠAHISTKE KUSNAR	POTEG Z NOŽEM	IRANOVA ZAHODNA SOSEDA	SEZNAM BLAGA Z NAVEDBO CEN	ALBERT CAMUS				
		AM. REŽISER (ELIA)						ZNAMKA KOREJSKIH AVTOMO- BILOV				
		IGRALKA SOMMER		ŠEST- DESETINA URE	NAPAKA, POGREŠEK					HOLANDSKI ŽANRSKI SLIKAR (JAN)	NAJVIŠJA TOČKA, KI JO DOSEŽE SONCE PRI DNEVNEM GIBANJU	
ILEN JP V VANJE					PLOVEN DESNI PRITOK SENE	PRODAJNA HIŠICA MIRIAM KORBAR						MEDMET PRIGANJANJA
ELJINA EMA- NA NICA							IME HRV. IGRALCA NALISA					
HRNIK. STANT							NAJVEČJA ŠPAN. REKA, KI TEČE NA VZHOD	ZGOR. DEL OBRAZA IRS. REPUB. ARMADA				
NOVNA ČASOVNA OTA, ENA IZMED KNOVNIH ENOT ARODNEGA SISTEMA	DEL GOSTIN. LOKALA NA PROSTEM	UROŠ SLAK				AVSTIRJ. SKLADAT. (GOTTFRIED)						SISTE- MATIONA RAZDELITEV ČASA
EVKA ICA)						OBRAMBNI ZID ALI STOLP						
OTA MOC												
					NOVI NEMŠKI PREDSEDNIK (JOHANNES)					NOVARA		
					SORTA, ŽANR					ALBANSKI DIKTATOR HOXHA		
				SKUPNA EVROPSKA VALUTA	ZLATA OGNJANOVIČ GIGANI			MADRID. SPORTNI KLUB DEL ROKE				
	ŽIVEC						MAJHNO DNO					
	ČAS ZASUKA ZEMLJE OKOLI OSI						SMUČ. REŠ. PRIPRAVA					
TAŠA ENC		ENOGLASNO CERKVENO PETJE TOMAŽ TERČEK							ČUT ZA SVETLOBO MILAN ERIČ			
30. JEVNIK, R SE ČASA												
ADNIK VRLE JE RANOV				NATANČEN POTOVALNI NACRT								

ZLATI PRAVOKOTNIK

V vsakdanjem življenju imamo pogosto opravka s takim in drugačnim pisarniškim materialom. Nedvomno ste že slišali za papir formata A4, najbrž pa tudi za formate A3, A5 in druge.

Pisarniški papir formata A4 je pravokotne oblike in ima približne dimenzije 210×297 mm. Razmerje med daljšo in krajšo stranico je $297/210 = 1,4142857\dots$, kar se dobro ujema s številom $\sqrt{2}$. Osnova formatov A je, da z delitvijo ali prepogibanjem pravokotnika vzdolž krajše srednjice dobimo dva pravokotnika, ki sta prejšnjemu podobna. Preprost račun to potrdi.



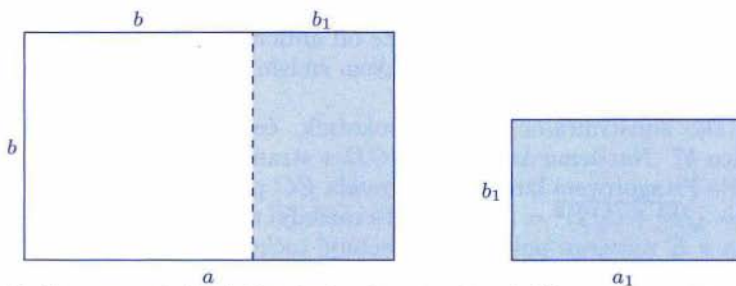
Recimo, da ima pravokotnik daljšo stranico a in krajšo b . Po delitvi vzdolž krajše srednjice dobimo nova pravokotnika z daljšo stranico $a_1 = b$ in krajšo stranico $b_1 = a/2$. Zahteva po podobnosti pravokotnikov da enačbo

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{b}{a/2} = \frac{2b}{a},$$

iz katere dobimo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \quad \text{ozioroma} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Vzemimo sedaj drugačen pravokotnik z daljšo stranico a in krajšo stranico b . Če mu odrežemo kvadrat s stranico b , kot prikazuje slika, naj bo preostali pravokotnik podoben prvotnemu. Kakšno mora biti v takem primeru razmerje stranic?



Naj bosta a_1 in b_1 daljša in krajša stranica dobljenega manjšega pravokotnika. Očitno je $a_1 = b$ in $b_1 = a - b$. Zahteva po podobnosti pravokotnikov da tokrat enačbo

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{b}{a-b} = \frac{1}{a/b-1}.$$

Iz nje sledi kvadratna enačba, ki ji mora zadoščati razmerje $\phi = a/b$:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Enačbo preoblikujemo:

$$4\phi^2 - 4\phi + 1 = 5,$$

tako da dobimo na levi strani popolni kvadrat

$$(2\phi - 1)^2 = 5.$$

Sledi

$$2\phi - 1 = \sqrt{5} \quad \text{in} \quad 2\phi - 1 = -\sqrt{5}.$$

Druga možnost odpade, ker nudi negativno razmerje a/b , zato nam preostane edinole

$$\phi = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

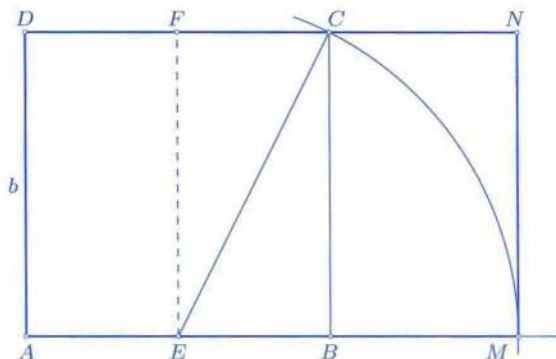
Odslej bomo število ϕ imenovali *število zlatega reza*, iskani pravokotnik pa *zlati pravokotnik*. Zapišimo število ϕ še enkrat in navedimo nekaj njegovih prvih decimalk:

$$\phi = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) = 1,618033 \dots$$

Očitno je ϕ iracionalno število, kar pomeni, da ga ne moremo izraziti v obliki ulomka s celim števcem in imenovalcem. Zlati pravokotnik ima

torej eno stranico b , drugo pa ϕb . Že od antičnih časov velja v umetnosti pravilo, da je zlati pravokotnik v nekem smislu izmed vseh pravokotnikov najlepši.

Kako konstruiramo zlati pravokotnik, če poznamo njegovo krajšo stranico b ? Narišemo kvadrat $ABCD$ s stranico b in njegovo srednjico EF . Po Pitagorovem izreku je diagonalna EC pravokotnika $EBCF$ enaka $|EC| = \sqrt{b^2 + (b/2)^2} = (b/2) \sqrt{5}$. To razdaljo nanesemo iz točke E vzdolž tistega v E začetega poltraka, ki vsebuje točko B . Dobimo točko M , za katero velja $|AM| = b/2 + (b/2) \sqrt{5} = \phi b$. S tem smo našli drugo stranico zlatega pravokotnika $AMND$.



Število ϕ se pojavlja v zvezi s pravilnim petkotnikom in desetkotnikom. S tem se tokrat ne bomo ukvarjali, pač pa se bomo razgledali po nekaterih algebrskih lastnostih tega števila.

Osnovna lastnost števila ϕ je, da ustreza enačbi $\phi^2 = 1 + \phi$, iz katere sledijo še $\phi^3 = \phi + \phi^2$, $\phi^4 = \phi^2 + \phi^3$ in tako naprej. Očitno pa velja tudi $\phi = \phi^{-1} + 1$, $1 = \phi^{-2} + \phi^{-1}$ in tako dalje. Čisto splošno velja:

$$\phi^n = \phi^{n-2} + \phi^{n-1} \quad \text{za } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Zaporedje potenc $x_n = \phi^n$ je torej neke vrste dvostransko Fibonaccijevo zaporedje za $x_0 = 1$ in $x_1 = \phi$ z rekurzivno formulo $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$.

Člene x_n tega zaporedja pa lahko izrazimo na en sam način s številom ϕ v obliki

$$x_n = \alpha_n + \beta_n \phi, \quad (1)$$

kjer so koeficienti α_n in β_n cela števila za vsak celoštevilski indeks n . Kako vemo, da je zapis (1) s celimi koeficienti en sam? Vzemimo, da je vsemu navkljub možno zapisati še

$$x_n = \gamma_n + \delta_n \phi,$$

tudi s celimi koeficienti. Potem bi imeli

$$\alpha_n + \beta_n \phi = \gamma_n + \delta_n \phi,$$

iz česar bi takoj dobili

$$\alpha_n - \gamma_n = (\delta_n - \beta_n) \phi.$$

Če bi bil δ_n različen od β_n , bi dobili

$$\phi = \frac{\alpha_n - \gamma_n}{\delta_n - \beta_n}.$$

Na desni strani v gornji enačbi bi imeli racionalno število, kar pa ni mogoče, ker je ϕ iracionalno število.

Ker je $x_1 = \phi$, je $\alpha_1 = 0$ in $\beta_1 = 1$. Ker je $x_2 = \phi^2 = 1 + \phi$, je seveda $\alpha_2 = 1$ in $\beta_2 = 1$. Naprej izrazimo: $x_3 = \phi^3 = \phi + \phi^2 = \phi + 1 + \phi = 1 + 2\phi$. Torej je $\alpha_3 = 1$ in $\beta_3 = 2$. Izberimo še $\alpha_0 = 1$ in $\beta_0 = 0$. Iz $x_{-1} = \phi^{-1} = \phi - 1$ preberemo: $\alpha_{-1} = -1$ in $\beta_{-1} = 1$.

Sedaj trdimo, da sta zaporedji (α_n) in (β_n) Fibonaccijevi za $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ in $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$. Če predpostavimo, da za vsak celoštevilski indeks n velja (1), dobimo iz rekurzivne formule $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n \phi &= \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} \phi + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \phi = \\ &= (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}) + (\beta_{n-2} + \beta_{n-1}) \phi. \end{aligned}$$

Zaradi enoličnosti zapisa (1) velja:

$$\alpha_n = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \quad \text{in} \quad \beta_n = \beta_{n-2} + \beta_{n-1}.$$

Pri tem je, kot smo že prej ugotovili, $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$ in $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$. Torej lahko obe zaporedji nadaljujemo v nedogled na obe strani: za cele indekse, večje od 1, uporabimo rekurzivno formulo $\xi_n = \xi_{n-2} + \xi_{n-1}$, za preostale cele indekse pa rekurzivno formulo $\xi_{n-2} = \xi_n - \xi_{n-1}$. Pri tem za ξ izberemo bodisi α ali β . Tako dobimo:

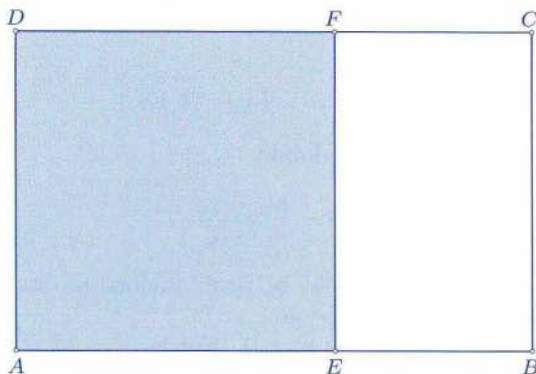
$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 1; \quad \alpha_3 = 1, \beta_3 = 2; \quad \alpha_4 = 2, \beta_4 = 3; \dots$$

Še nekaj členov z negativnimi indeksi:

$$\alpha_{-1} = -1, \beta_{-1} = 1; \quad \alpha_{-2} = 2, \beta_{-2} = -1; \quad \alpha_{-3} = -3, \beta_{-3} = 2; \dots$$

Z drugimi oznakami imamo na primer $\phi^4 = 2 + 3\phi$, $\phi^{-2} = 2 - \phi$, $\phi^{-3} = -3 + 2\phi$.

Vzemimo zlati pravokotnik $ABCD$ s krajšo stranico b in daljšo stranico ϕb in ga razdelimo na kvadrat $AEFD$ in pravokotnik $FEBC$.

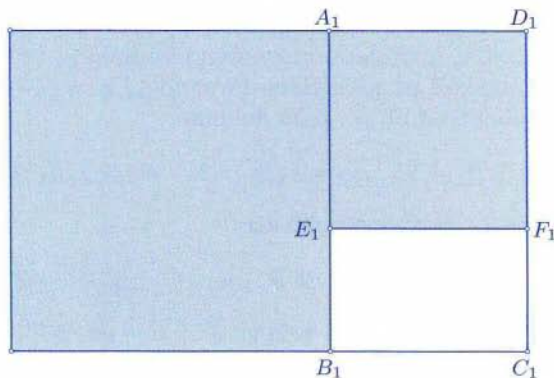


Označimo $A_1 = F$, $B_1 = E$, $C_1 = B$, $D_1 = C$. Pravokotnik $A_1B_1C_1D_1$ je podoben prvemu in je tudi zlati pravokotnik, ki ima krajšo stranico $b_1 = \phi b - b = (\phi - 1)b = \phi^{-1}b$ in daljšo $a_1 = b$. Razmerje je res $a_1/b_1 = \phi$. Mimogrede preverimo še, da točka E deli stranico AB v razmerju zlatega reza. To pomeni: krajši odsek $|EB|$ proti daljšemu odseku $|AE|$ je v enakem razmerju kot daljši odsek $|AE|$ proti celotni stranici $|AB|$. Res:

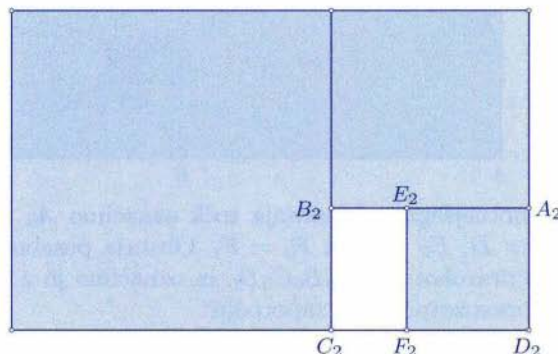
$$\frac{|EB|}{|AE|} = \frac{(\phi - 1)b}{b} = \phi - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

in

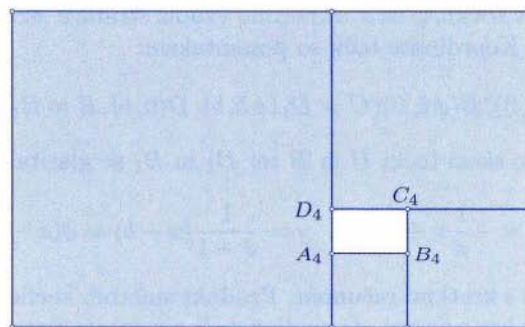
$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{b}{\phi b} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$



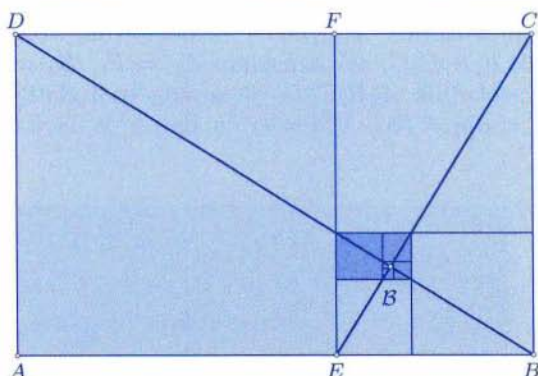
Nadaljujmo: pravokotnik $A_1B_1C_1D_1$ razdelimo na kvadrat $A_1E_1F_1D_1$ in pravokotnik $F_1E_1B_1C_1$ ter označimo $A_2 = F_1$, $B_2 = E_1$, $C_2 = B_1$, $D_2 = C_1$. Pravokotnik $A_2B_2C_2D_2$ je seveda tudi zlati, njegova krajša stranica je $b_2 = \phi b_1 = (\phi - 1)^2 b = \phi^{-2}b$, daljša pa $a_2 = b_1 = (\phi - 1)b = \phi^{-1}b$.



Ponovno ga na isti način razdelimo na kvadrat in zlati pravokotnik s krajšo stranico $b_3 = \phi^{-3}b$ in daljšo stranico $a_4 = \phi^{-2}b$, tega pa zopet razdelimo na kvadrat in pravokotnik, tako kot doslej. Prispemo do zlatega pravokotnika $A_4B_4C_4D_4$, ki je podoben onemu, s katerim smo začeli, pa tudi zasukan je prav tako. Njegova krajša stranica je $b_4 = \phi^{-4}b$, daljša pa $a_4 = \phi^{-3}b$.



Opisani postopek lahko nadaljujemo na pravokotniku $A_4B_4C_4D_4$, po štirih korakih dospemo do še manjšega pravokotnika $A_8B_8C_8D_8$, in tako naprej. Zgodba se nikdar ne konča.



Zaradi enotnejšega indeksiranja točk označimo $A_0 = A$, $B_0 = B$, $C_0 = C$, $D_0 = D$, $E_0 = E$ in $F_0 = F$. Obstaja posebna točka, recimo ji *zlata točka* pravokotnika $A_0B_0C_0D_0$ in označimo jo z B , ki je skupna vsem zlatim pravokotnikom v zaporedju

$$A_0B_0C_0D_0 \supset A_4B_4C_4D_4 \supset A_8B_8C_8D_8 \supset \dots \ni B.$$

Točka B je seveda zlata za vse zlate pravokotnike $A_kB_kC_kD_k$. Točka B je v presečišču diagonal D_0B_0 in D_1B_1 v pravokotnikih številka 0 in 1, prav tako je B v presečišču diagonal D_1B_1 in D_2B_2 v pravokotnikih številka 1 in 2 in tako naprej. Vselej pa se diagonali sekata pravokotno. Znamo pa tudi izračunati, kje točka B je. Morda se je najenostavneje prepričati o obojem, če vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem z izhodiščem v točki A , os x usmerimo vzdolž stranice AB , os y pa vzdolž stranice AD . Koordinate točk so potentakem:

$$A(0, 0), B(\phi b, 0), C = D_1(\phi b, b), D(0, b), E = B_1(b, 0).$$

Enačbi premic skozi točki D in B ter D_1 in B_1 se glasita

$$y = -\frac{1}{\phi}x + b \quad \text{in} \quad y = \frac{1}{\phi - 1}(x - b) = \phi(x - b),$$

kar preverimo s kratkim računom. Produkt smernih koeficientov teh dveh premic je -1 , kar pomeni, da se diagonali res sekata pravokotno.

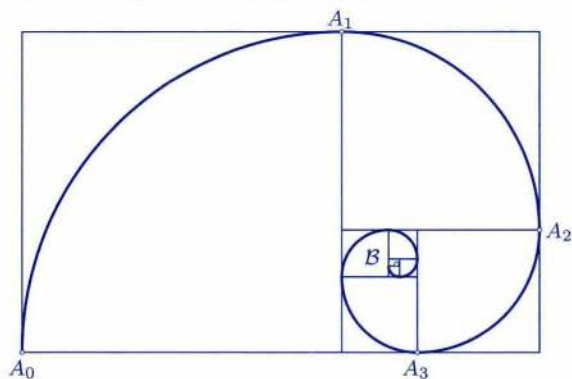
Presečišče premic pa pove, kje je zlata točka B . Njena abscisa x je rešitev enačbe

$$-\frac{1}{\phi}x + b = \phi(x - b).$$

Kratek račun nam izda koordinati zlate točke

$$x = \frac{1+3\phi}{5}b \quad \text{in} \quad y = \frac{3-\phi}{5}b.$$

Konstruirajmo še zaporedje krožnih lokov, katerih vsak naj ima središče v točki E_k , poteka pa naj od točke A_k do F_k , za k pa vzemimo $0, 1, 2, \dots$. Dobimo spiralo, kakršna je na sliki, kjer sta prikazana dva njena zavoja.



Zapišimo še koordinate točk B, A_0, A_1, A_2 in A_3 :

$$B \left(\frac{1+3\phi}{5}b, \frac{3-\phi}{5}b \right),$$

$$A_0(0,0), \quad A_1(b,b), \quad A_2(\phi b, \phi^{-2}b), \quad A_3((1+\phi^{-3})b, 0).$$

Ni se težko prepričati, da se daljici A_0A_2 in A_1A_3 sekata ravno v točki B , in to pravokotno. Enačbi premic nosilk teh daljic sta:

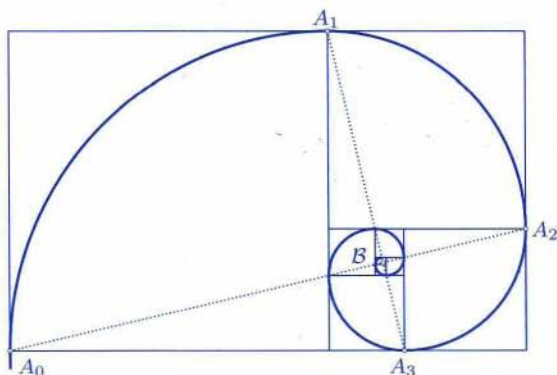
$$y = \phi^{-3}x \quad \text{in} \quad y = -\phi^3(x-1) + 1.$$

Označimo z d_k razdaljo od točke B do točke A_k . Če izračunamo razdaljo d_0 točke B od točke A_0 in razdaljo d_1 točke B od točke $A_1 = C$, dobimo:

$$d_0^2 = \frac{2}{5}(2+\phi)b^2, \quad d_1^2 = \frac{2}{5}(3-\phi)b^2.$$

Iz tega sledi: $d_1^2 \phi^2 = d_0^2$. Torej sta d_0 in d_1 v razmerju ϕ . Zaradi podobnosti zlatih pravokotnikov, konstruiranih na opisani način iz začetnega zlatega pravokotnika $A_0B_0C_0D_0$, velja:

$$\frac{d_0}{d_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_2}{d_3} = \dots = \phi.$$

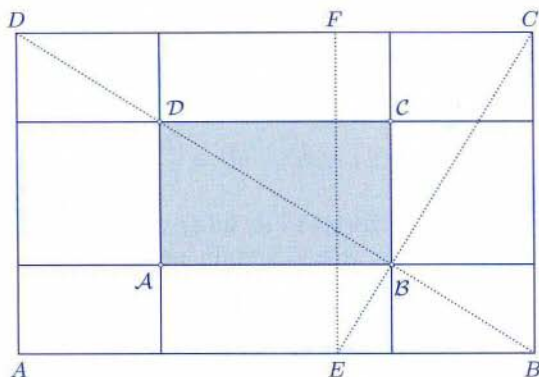


Zaporedje razdalj d_n je geometrijsko. Preprost sklep nam da enostavno formulo: $d_n = d_0 \phi^{-n}$. Uvedimo polarni koordinatni sistem s polom v točki B in polarno osjo skozi točko D_0 . Polarni kot, računani vselej vadianih, označimo z φ . Spirala, ki obide točke A_k , ima v polarnih koordinatah enačbo

$$\varrho = d_0 \phi^{2\varphi/\pi}.$$

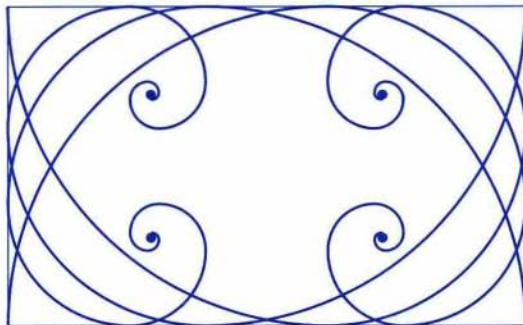
To je *zlata spirala*. Njen približek smo malo prej narisali s četrtinskimi krožnimi loki.

Zlate pravokotnike smo iz osnovnega pridobivali z delitvami in s tem prehajali na vedno manjše in manjše. Lahko pa jih tudi povečujemo, tako da osnovnemu pririšemo kvadrat s stranico ϕb in postopek nadaljujemo z vedno večjimi zlatimi pravokotniki. Vsi se lepo prilegajo zlata spirali.



Osnovni zlati pravokotnik ima seveda 4 zlate točke, kajti razdeliti se ga da na kvadrat in nov zlati pravokotnik tudi tako, da leži kvadrat ob stranici BC . Zlate točke označimo z A, B, C in D , tako da je A najbližje A , B najbližje B in tako dalje. Ni težko preveriti, da je štirikotnik $ABCD$ zlati pravokotnik in da premice skozi AB , DC , BC in AD delijo osnovni zlati pravokotnik na pravokotnike, od katerih je tudi še nekaj zlatih.

Zadnja slika prikazuje vse štiri zlate spirale, ki se vijajo okoli zlatih točk.



Marko Razpet

LAHEK KRIPTARITEM

1. Naj bodo $*$, ∇ , $?$, $\oplus$ števke v štiriškem številskem sistemu, ki niso nujno zapisane po velikosti. Poišči pomen simbolov $*$, ∇ , $?$, $\oplus$, če velja enakost

$$* \nabla ? \oplus + ? \nabla * \nabla = \nabla \nabla ? \nabla \nabla.$$

2. Ali obstaja še kakšen številski sistem, v katerem so $*$, ∇ , $?$, $\oplus$ štiri take števke, da velja zgoraj napisani račun? Če obstaja, navedi njegovo osnovo in vrednosti posameznih simbolov.

Marija Vencelj

KDO POTREBUJE DEBELE NOGE?

Sloni imajo debele noge, miške pa drobne. Zakaj imata ti dve živali tako različni konstituciji? Ali bi miška lahko zrasla do višine slona? Kakšna bi bila konstitucija tako velike miši?

Poiščimo odgovore na ta vprašanja. V zgodbi nastopata majhna miška in miš velikanka, ki sta si geometrijsko podobni. Pri obeh živalih, miški in velikanki, morajo celotno težo nositi noge. Izrazimo težo telesa F_g na enoto preseka nog S : F_g/S . Teža telesa je sorazmerna s prostornino živali, ki jo pišemo kot $V = aL^3$, pri tem je a konstanta, L pa dolžina, ki je za dano žival značilna. Imenujemo jo značilna velikost živali. Tudi presek nog izrazimo z značilno velikostjo živali: $S = bL^2$, b je konstanta. Ugotovimo, da je:

$$\frac{F_g}{S} \propto \frac{V}{L^2} \propto \frac{L^3}{L^2} = L. \quad (1)$$

Kvocien med težo telesa in presekom nog je sorazmeren z značilno velikostjo živali. Večja kot bo žival, bolj bodo njene noge obremenjene. Kvocien F_g/S nam daje podatke tudi o tem, kakšne obremenitve prenese snov oziroma organizem. Snovi ne prenesejo poljubno velikih obremenitev, obremenimo jih lahko le do določene meje. To pa pomeni, da tudi miške ne moremo poljubno povečati v velikanko, kajti slej ko prej postane obremenitev nog prevelika in te ne morejo več nositi teže telesa. Če želimo, da se velikanki ne bodo polomile noge, moramo povečati premer njenih nog bolj kot ostale dimenzije.

Poglejmo, za kolikšen faktor moramo povečati polmer nog, če povečamo ostale dimenzije miške 100-krat.

Ker imata obe živali enako mejo trdnosti, lahko izraz (1) prepišemo:

$$\frac{F_{gm}}{S_m} = \frac{F_{gM}}{S_M} \propto L_m \quad \text{ozioroma} \quad L_M \quad (2)$$

Indeksi m se nanašajo na miško, količine z indeksom M pa opisujejo velikanko. Ko dimenzije miške 100-krat povečamo, ugotovimo, da presežemo mejo trdnosti:

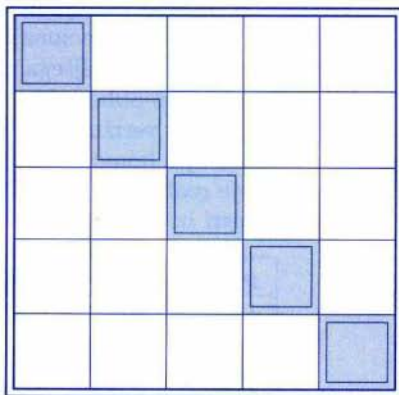
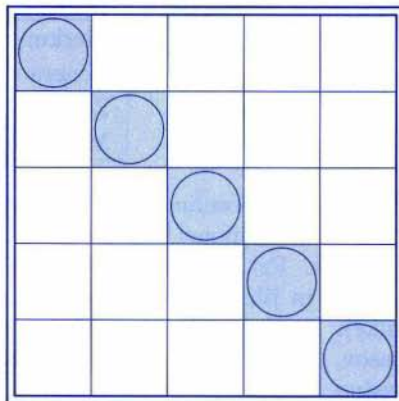
$$\frac{F_{gM}}{S_M} \propto \frac{100^3 L_m^3}{100^2 L_m^2} = 100 L_m. \quad (3)$$

To pa ne gre. Če povečamo polmer nog še za dodaten faktor 10, potem zadostimo pogoju o meji trdnosti. V izrazu (3) se potem stotica na desni strani enačbe pokrajša. To pa pomeni, da bi imela velikanka nesorazmerno debelejša noge kot miška. Miška in velikanka si ne bi bili več geometrijsko podobni; konstitucija velikanke bi bila bolj podobna slonovi kot miškini. Tako bodo morale miške še naprej opazovati slone iz žabje perspektive.

Vida Kariž Merhar

ZLOŽENKI

1. Besede BINOM, FOKUS, NARIS, NORMA in RADIJ razvrstite vodoravno v kvadrat tako, da bo na diagonali ime natančne merline naprave.
2. Besede DOKAZ, KOČKA, NIČLA, TREND in VSOTA razvrstite vodoravno v kvadrat tako, da bo na diagonali pojem iz matematike.



Dragoljub M. Milošević

VERIŽNI ULOMKI IN ASTRONOMIJA

V 4. številki lanskega letnika *Preseka* smo spoznali verižne ulomke, spoznali pa smo tudi razlog, zaradi katerega so jih matematiki začeli preučevati: Verižni približki so zelo dobri približki za (manj lepa) realna števila.

Verižnih ulomkov niso prvi preučevali matematiki, pač pa astronomi. Pri svojih opazovanjih so naleteli na célo vrsto števil, ki se ne "izidejo lepo".

Kot prvi primer navedimo obhodne čase planetov pri gibanju okrog Sonca. Spodnja tabela prikazuje podatke za prve štiri planete, približni obhodni časi so podani v *letih* (t.j. v obhodnih časih Zemlje).

planet	obhodni čas
Merkur	0.241
Venera	0.615
Zemlja	1.000
Mars	1.881

Števila niso posebno lepa, vendar Osončje kljub temu brez težav funkcionira že milijone let. Drugače je, če želimo izdelati mehanski model Osončja. Pri mehanskem modelu bomo "planete" (kroglice) pritrdili na vzvode in jih s pomočjo sistema zobnikov poganjali okoli "Sonca" (svetilke). Vendar lahko z zobniki ustvarimo le *racionalna* razmerja obhodnih časov. Torej je razmerje med obhodnima časoma "planetov" v modelu vedno *ulomek*.

Rešitev iz zagate ponujajo verižni približki. Spomnimo se, da so verižni približki najboljše racionalni približki – med ulomki z manjšim ali enakim imenovalcem ni boljšega približka za dano število, kot je verižni približek. Torej bomo obhodni čas planeta razvili v verižni ulomek (zadostuje že prvih nekaj verižnih koeficientov) in izračunali ustrezne verižne približke. Izmed njih bomo potem izbrali ulomek, ki ga je možno z zobniki čim enostavneje realizirati, hkrati pa zadošča zaželeni natančnosti.

Za vrednosti iz zgornje tabele dobimo naslednje verižne približke:

planet	obhodni čas
Merkur	$0.241 \doteq 0 \doteq \frac{1}{4} \doteq \frac{6}{25} \doteq \frac{7}{29} \doteq \dots$
Venera	$0.615 \doteq 0 \doteq 1 \doteq \frac{1}{2} \doteq \frac{2}{3} \doteq \frac{3}{5} \doteq \frac{8}{13} \doteq \dots$
Zemlja	1.000
Mars	$1.881 \doteq 1 \doteq 2 \doteq \frac{15}{8} \doteq \frac{32}{17} \doteq \frac{79}{42} \doteq \dots$

V tabeli so navedeni vsi verižni približki, ki jih je glede na natančnost podatkov smiselno navesti. Bralcu prepuščam, da izbere, kateri približek bi bil tehnično gledano najboljši, in da tudi res izdelata tak model.

Drugi astronomski problem, povezan z verižnimi ulomki, je problem *lunarnega* oziroma *lunisolarnega* koledarja.

Stoletja so naši predniki poskušali sestaviti koledar, ki bi bil povezan z gibanjem Lune in Sonca (oziroma Zemlje okrog Sonca). Današnji koledar izpolnjuje to nalogo le napol. *Leto* res ustreza obhodu Zemlje okoli Sonca, *mesec* pa nima nikakršne zveze z gibanjem Lune, čeprav je beseda *Mesec* pravzaprav staro slovensko ime za Luno. Pravimo, da je to *solarni* (Sončev) koledar.

Precej ljudi méni, da Luna dosti bolj vpliva na življenje, kot običajno mislimo (preberite npr. knjigo *Vse ob svojem času* ali vsaj *Setveni koledar*). Med našimi predniki je bilo tako mnenje celo zelo razširjeno in naš koledar bi se jim zdel nesprejemljiv. "Pravi" koledar naj bi jasno podal tudi Lunine méne. Mesec mora trajati od mlaja do mlaja. ("En mesec je čas, ko se Mesec vidi. Ko ga ne vidimo več, se mesec neha.")

Z dolgotrajnim opazovanjem Lune in z dodajanjem novih in novih izboljšav, se je astronomom že v antičnih časih posrečilo, da so tak(e) koledar(je) tudi res izdelali. Danes se problema lahko lotimo po lažji poti, brez opazovanj. V astronomskih knjigah zasledimo, da traja en Lunin mesec (čas od enega do drugega mlaja ali *sinodski mesec*) v povprečju $M = 29.530588$ dni. Odstopanja od povprečja so majhna, zato bomo računali, kot da vsi meseci trajajo natančno toliko.

Razvijmo število M v verižni ulomek:

$$29.530588 = [29, 1, 1, 7, 1, 2, 16, 1, \dots].$$

Takoj dobimo tudi ustrezne verižne približke:

$$29, \quad 30, \quad \frac{59}{2}, \quad \frac{443}{15}, \quad \frac{502}{17}, \quad \frac{1447}{49}, \quad \frac{23654}{801}, \quad \frac{25101}{850}, \quad \dots$$

Prvi trije približki nam razkrijejo tisto, kar so naši predniki najhitreje ugotovili: 2 (Lunina) meseca trajata približno 59 dni. Torej si morajo v koledarju izmenično slediti (koledarski) meseci z 29 in 30 dnevi. Temu bomo rekli *osnovno zaporedje*.

Približek $\frac{443}{15}$ pomeni, da 15 mesecev traja približno 443 dni; naslednji približek $\frac{502}{17}$ pa, da je 17 mesecev približno 502 dneva. Ulomka sta približno enako preprosta, vendar je $\frac{502}{17}$ boljši približek, zato si ga oglejmo natančneje. 502 dneva je možno zelo preprosto razporediti na 17 (koledarskih) mesecev:

$$\underbrace{30 + 29 + 30 + 29 + 30 + \cdots + 30}_{17 \text{ mesecev}} = 502 \text{ dneva}.$$

Takó dobimo sedemnajstmesečni *ciklus*, ki od osnovnega zaporedja odstopa le ob koncu oziroma ob začetku novega ciklusa. Takrat si sledita dva meseca s po 30 dnevi, sicer pa meseci tečejo izmenično (30, 29, ...) kot v osnovnem zaporedju.

Poglejmo si še natančnost:

$$17M = 17 \cdot 29.530588 = 502.019996 \text{ dni},$$

kar je le za 0.019996 dneva (približno pol ure) več kot en koledarski cikel. Torej je napaka

$$\Delta = 0.019996 \text{ dni/1 cikel}$$

ali

$$\Delta = 1 \text{ dan/50.01 ciklusa}.$$

Ker koledar odstopa od gibanja Lune povprečno za 1 dan v 50 ciklikih, je logično poskusiti z najpreprostejšim popravkom: Po vsakem petdesetem ciklusu dodamo 1 dan (lahko bi rekli "prestopni dan") in šele po tem dnevju se začne naslednji cikel.

Če vključimo ta popravek, potem 50 ciklov (z dodatkom) traja

$$50 \cdot 502 + 1 = 25101 \text{ dan},$$

ti dnevi pa so razporejeni v

$$50 \cdot 17 = 850 \text{ mesecev}.$$

Zanimivo je, da smo tako prišli prav do števila $\frac{25101}{850}$, kar je spet verižni približek za število M .

V tem primeru je napaka enaka

$$\begin{aligned}\frac{25101}{850} - 29.530588 &\doteq 0.00000024 \text{ dni/1 mesec} \doteq \\ &\doteq 1 \text{ dan/4250000 mesecev} \doteq \\ &\doteq 1 \text{ dan/350000 let.}\end{aligned}$$

Tak koledar je gotovo za zdaj zelo dober; če bo treba, pa ga lahko čez par tisočletij popravimo.

Tako smo dobili uporaben *lunarni* koledar – koledar, ki se natančno ujema z (izračunanimi) Luninimi menami. Mlaj je vedno prvega (ali zadnjega) v mesecu, polna Luna je petnajstega. Odstopanje pravih Luninih men od matematičnega povprečja je majhno (do 1 dan) in **skoraj** bi lahko trdili, da je tak koledar idealen.

Skoraj! Ne smemo spregledati, da je tudi ta koledar le polovičarski. Nikakor namreč ne sledi toku letnih časov, je *samo* *lunarni*. Naslednje vrstice posvetimo zato problemu združitve lunarnega in solarne koledarja v *lunisolarni* koledar.

Najprej poskusimo ugotoviti, koliko Luninih mesecev traja eno leto. Pogled v astronomsko literaturo nam pove, da eno leto v povprečju traja $L = 365.2422$ dni. Torej ima leto

$$\frac{365.24422}{29.530588} = 12.36827 \text{ mesecev.}$$

Dobljeno število razvijemo v verižni ulomek:

$$12.36827 = [12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 1, 3, \dots].$$

Ustrezni verižni približki so

$$12, \quad \frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \frac{235}{19}, \quad \frac{4131}{334}, \quad \dots$$

To pomeni, da ima leto približno 12 mesecev, natančneje, dve leti imata skupaj 25 mesecev, a odstopanje je še kar precejšnje ($7\frac{3}{4}$ dni v dveh letih). Boljši je naslednji približek $\frac{37}{3}$, ki pomeni, da ima "navadno leto" 12 mesecev, vsako tretje leto pa je "prestopno" in ima en mesec več (odstopanje je le 3 dni v 3 letih).

Bralcu prepuščamo, da se pozabava še s približkoma $\frac{99}{8}$ in $\frac{136}{11}$. Zlasti slednji približek je zanimiv, saj trdi, da je 11 let približno 136 mesecev; 136 mesecev pa je enako obdobje kot 8 zgoraj opisanih sedemnajst-mesečnih ciklusov.

Zgodovinsko se je najboljše izkazal šesti približek, ki pravi, da je 19 let približno 235 mesecev. Približek je zelo natančen, saj odstopa od prave vrednosti le za 1 dan v 220 letih. Na osnovi tega približka so babilonski in grški astronomi sestavili koledar, ki je ponekod po svetu, z nekaterimi spremembami in različicami, v veljavi še zdaj. Uporabljajo ga zlasti muslimani in Židje, z njegovo pomočjo pa določajo tudi datume premakljivih praznikov (Velika noč, Binkošti) v prenekateri krščanski cerkvi.

Osnova koledarja je Métonov cikel 235 Luninih mesecev. Ti meseci so razdeljeni na 19 let takó, da dobimo 12 let s po 12 meseci in 7 let s po 13 meseci. Praktično se da razporeditev izvesti na primer takó, da pride prva polna Luna po pomladnem enakonočju na 15. dan prvega meseca. Prvi dan prvega meseca je potem vedno v dneh okrog pomladnega enakonočja, od leta do leta so sicer razlike, a niso pretirano velike. Tak koledar so uporabljali Židje že pred več tisočletji in kot izvemo iz Svetega pisma, je bil véliki praznik *Pasha* (po naše Velika noč) vedno 15. *nisana*¹. Iz istega vira izvemo še več: različne verske ločine so uporabljale različne variante tega koledarja in zato je trinajsterica z Jezusom na čelu proslavljala *Pasho* dva dni prej, kot so jo proslavljali v jeruzalemskem templju.

Vprašajmo se še, kako naj bi bili razporejeni dnevi v teh 235 mesecih. Žal število 235 ni deljivo s 17, zato si ne moremo pomagati s sedemnajst-mesečnimi ciklusi, ki so se nam tako lepo posrečili. Mesece s 30 in 29 dnevi sicer lahko razporejamo takó, kot smo opisali zgoraj, a potem bodo med koledarji za posamezna leta velike razlike.

Bolj logično je, če začnemo vsa leta enako. Prvih 12 mesecev naj bo:

$$30 + 29 + 30 + 29 + \dots + 29 = 354 \text{ dni,}$$

morebitni trinajsti mesec pa naj ima vedno 30 dni. Tako pridemo za 19 let do skupne vsote

$$19 \cdot 354 + 7 \cdot 30 = 6936 \text{ dni.}$$

V resnici pa 235 Luninih mesecev traja 6939.6882 dni, torej moramo nekam dodati še 3.6882 dni. Če dodamo še po 1 dodatni dan vsakemu drugemu prestopnemu mesecu, smo s tem dodali celotnemu ciklusu 3.5 dni (v dveh ciklusi je 14 prestopnih mesecev, sedmim dodamo po en dan).

¹ Nisan je ime prvega meseca.

Ujemanje z Luninimi menami je zdaj že bistveno boljše in odstopanje je približno 1 dan na 100 let. Postopek lahko zdaj nadaljujemo tako, da dodamo še po 1 dan na vsakih 100 let, izračunamo novo odstopanje, ga spet popravimo in tako naprej, dokler nismo z rezultatom zadovoljni.

Lahko pa bi se stvari spet lotili z verižnimi ulomki. Število 3.6882 bi razvili v verižni ulomek in poiskali kak lep verižni približek. Že $\frac{11}{3}$ je boljši približek kot 3.5, pomeni pa, da moramo v treh Métonovih ciklusih dodati 11 dodatnih dni. V treh ciklusih je 21 prestopnih mesecev in enajstim bi morali dodati po 1 dan (to pomeni: prvemu, tretjemu, petemu, ... in enaindvajsetemu). Realizacija tega popravka torej ni težka, bralcu pa predlagamo še, da ugotovi, kakšno bi bilo odstopanje od idealnega Luninega koledarja.

Vprašajmo se še, zakaj sploh računati odstopanje od Luninega meseca. Zakaj ne računamo raje odstopanja od Sončevega leta?

Odgovor je praktične narave. Odstopanje od Luninega meseca je opaznejše, saj je mesec krajši. Zato je pametneje, da poskrbimo za ujemanje koledarja z Luno in pri tem dopustimo odstopanje od teka letnih časov. Povedali smo že, da približek $\frac{235}{19}$ odstopa od prave vrednosti za 1 dan v 220 letih. Če dobro uređimo lunarni del koledarja, bo solarni del avtomatično odstopal od Sončevega leta samo za toliko. Začetek leta pri lunisolarinem koledarju ni fiksni in zato povprečen človek v svojem kratkem življenju takó majhne napake niti ne opazi. Šele v približno 40000 letih bi napaka tako narasla, da bi se začetek leta prestavil s pomladnega na jesensko enakonočje.

Kaj pa tedni? Če vztrajamo pri sedemdnevnih tednih, je uskladitev z meseci in leti takorekoč nemogoča. Še najlepša je varianta, pri kateri se leto vedno začne z nedeljo, ne glede na to, s katerim dnevom se je prejšnje leto končalo.

Drugo zanimivo varianto dobimo z delitvijo meseca na tretjine. Tako dobimo desetdnevne tedne, le zadnjemu tednu v 29-dnevem mesecu manjka 1 dan; koledar je za vse mesece enak, izjema je le dodatni zadnji dan. Dodatna zanimivost takega koledarja je dejstvo, da ima leto približno $12\frac{1}{3}$ meseca, kar vidimo iz približka $37 \text{ mesecev} \doteq 3 \text{ leta}$. Bralca vabim, da poskusi izdelati koledar, ki bi temeljil na ustreznem triletnem ciklusu, ali pa koledar, v katerem bi imelo leto 12 mesecev in še en dodatni desetdnevni teden. Poglavitni del naloge je seveda razporeditev popravkov, t.j. dodatnih mesecev oziroma tednov, s katerimi uredimo trajanje leta, in dni, s katerimi uredimo trajanje meseca.

Marino Pavletič

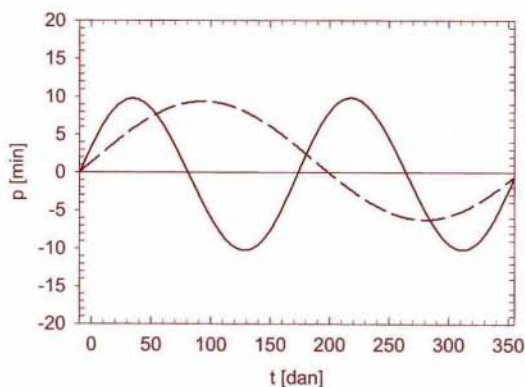
ZAPLETENA SONČNA URA – Odgovor na vprašanje iz zadnje lanske številke Preseka

V vprašanju, postavljenem v zadnji številki Preseka, smo iskali razlago za krivulje na prikazani sončni uri. Krivulje nakazujejo, da ob 12 uri Sonce ni vedno natančno na jugu, senca palice sončne ure torej ne kaže natančno proti severu. Natančneje podaja trenutke kulminacije, to je trenutke, ko doseže Sonce najvišjo lego na nebu, preglednica v knjižici *Naše nebo 1999* (DMFA Založništvo, 1999) na straneh 8–15. Poleg kulminacij izvemo tudi za trenutke Sončevega vzhoda in zahoda. Iz preglednice vidimo, da je 7. februarja 1999 Sonce doseglo najvišjo točko šele ob 12 uri, 15 minut in 59 sekund, in da bo 3. novembra letos Sonce v najvišji legi že ob 11 uri, 45 minut in 27 sekund. To je presenetljivo, saj se zdi nemogoče, da bi se Zemlja ne vrtela enakomerno okrog svoje osi. Res je to vrtenje zelo enakomerno. Z zelo natančnimi urami in skrbnim opazovanjem so astronomi dognali, da se časi enega obrata okrog osi med seboj razlikujejo manj kot za 2 tisočinki sekunde. Ta čas merijo tako, da z velikim daljnogledom, ki je zelo natančno usmerjen vzdolž navpičnice, opazujejo prehod slike zelo oddaljene zvezde preko sredine vidnega polja daljnogleda. Čas med dvema prehodoma je ravno čas, ko se Zemlja zavrti okrog svoje osi za polni kot. Meritve so pokazale, da porabi Zemlja za polni obrat približno $\tau_d = 23$ ur, 56 minut in 4 sekunde. Novo presenečenje, saj traja dan 24 ur. Kje so se izgubile tiste 3 minute in 54 sekund? Ker se Zemlja vrti okrog svoje osi in pri tem še potuje okrog Sonca, se mora v enem dnevu zvrtni malo več kot za polni kot. To bomo najlažje razumeli, če naredimo poskus. Zavrtimo se za polni kot okrog svoje osi, ko počasi hodimo v vlogi Zemlje okrog drevesa – Sonca. Za polni kot smo se zavrteli tedaj, ko po obratu spet gledamo naravnost na zelo oddaljeno točko, na primer kakšen hrib na obzorju. Če hočemo spet gledati v drevo, pa se moramo zavrteti še malo več. Če bi leto trajalo natančno 365 dni, bi se Zemlja zavrtela okrog svoje osi za 366 polnih obratov.

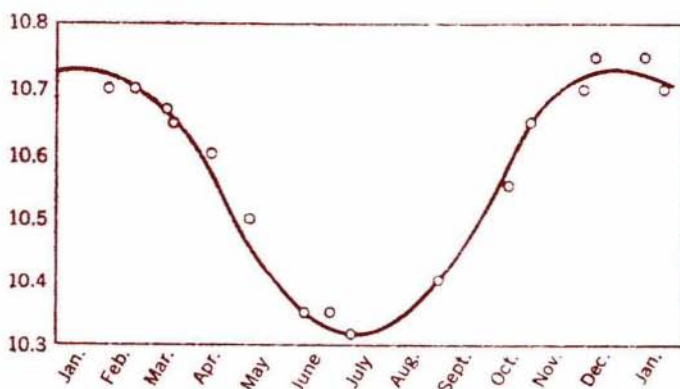
Do zamikov pri sončni uri pride zaradi dveh drugih razlogov. Zemljiska os je glede na ekliptiko nagnjena za 23 stopinj in 27 minut. Ekliptika je ravnina, po kateri Zemlja potuje okrog Sonca. Že sam ta nagib je dovolj, da sončna ura ne deluje povsem pravilno, četudi bi se Zemlja povsem enakomerno vrtela okrog Sonca. Na sliki 1 smo prikazali zamude in prezgodnje prihode Sonca v najvišjo lego glede na 12. uro (polna črta). Vidimo, da bi bila napaka ure v tem primeru največ deset minut.

Gibanje Zemlje okrog Sonca ni povsem enakomerno. Zemlja je 3. januarja najbližja Soncu in takrat je kot, ki ga opiše veznica med Zemljo in Suncem v eni sekundi, nekoliko večji kot poleti, ko je Sonce najdlje

Slika 1. Trenutki kulminacije Sonca, merjeni glede na 12. uro, če bi se Zemlja gibala okrog Sonca po krožnici, njena os pa bi bila nagnjena glede na ekliptiko za kot 23° in $27'$ (polna črta) ali če bi se gibala po elipsi in bi bila njena os pravokotna na ekliptiko (črtkana črta). V obeh primerih je kotna hitrost vrtenja Zemlje okrog lastne osi taka, kot so jo izmerili, cel obrat okrog Sonca pa naredi v enem letu.



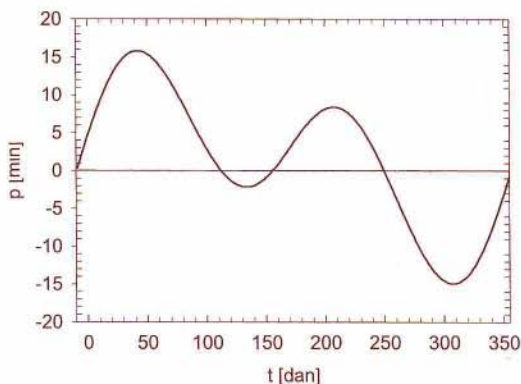
od Zemlje. Vpliv tega neenakomernega gibanja na sončno uro vidimo na sliki 1, kjer smo v računu zemeljsko os zravnali, da je pravokotna na ekliptiko (črtkana črta). Od zime proti pomladi se tako čas med zaporednima kulminacijama sonca podaljšuje, spomladi in poleti se zmanjšuje, ker se Zemlja takrat giblje počasneje, jeseni pa se spet povečuje. Spet nekoliko presenetli, da smo pozimi Soncu najbližji, 3. januarja smo od njega oddaljeni za 147 milijonov kilometrov, poleti, na začetku julija, pa 152 milijonov kilometrov. To se tudi neposredno vidi, če natančno opazujemo velikost Sonca na nebu (glej sliko 2); pozimi je nekoliko večje kot poleti.



Slika 2. Navidezni polmer Sonca se preko leta spreminja. Največje je videti 3. januarja, najmanjše pa pol leta pozneje. Meritev so opravili tako, da so merili premer Sončeve slike, ki jo je na zaslon preslikal teleskop. Enote na ordinati so poljubne.

Bralci bodo iz navedenih podatkov gotovo znali izračunati, kolikšno je največje razmerje navideznih polmerov Sonca poleti in pozimi. Prav tako zaradi gibanja Zemlje po elipsi trajata pomlad in poletje skupaj 8 dni več kot jesen in zima.

Na sliki 3 so prikazani trenutki, ko je Sonce v danem dnevu najvišje na nebu in kaže takrat senca navpične palice natančno proti severu. Krivuljo smo sicer izračunali, a se zelo dobro ujema s podatki iz knjižice Naše nebo 1999. Kdor si bo naredil preprosto sončno uro in ne namerava računati popravkov, se mora sprijazniti z odstopanji, ki pa niso nikoli večja kot četrt ure. Lahko pa si izdela uro, ki smo jo pokazali na fotografiji v prejšnji številki Preseka. Taka ura je točna in pokaže tudi datum – je res koledar in ura obenem.



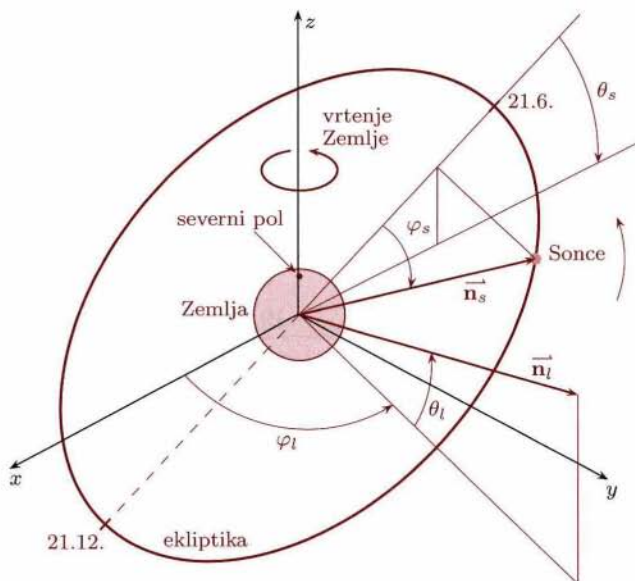
Slika 3. Trenutki kulminacije Sonca, merjeni glede na 12. uro. Krivulja je zelo blizu podatkom, ki jih najdemo v knjižici Naše nebo 1999.

Kogar zanima računanje, bo morda radoveden, kako smo prišli do krivulj na slikah 1 in 3. Postavili smo se v koordinatni sistem Zemlje, kjer smo os z naravnali vzdolž zemeljske osi, os x od središča Zemlje do točke, kjer se 21. decembra opolnoči sekata ekvator in poldnevnik pri 15° , os y pa je pravokotna na osi z in x ter usmerjena tako, da dobimo desni koordinatni sistem (glej sliko 4). Nato smo opazovali kot med vektorjem $\vec{n}_l$, ki kaže od središča do neke točke na 15-tem poldnevniku z geografsko širino θ_l in vektorjem $\vec{n}_s$, ki kaže v smeri Sonca. Oba ta vektorja se vrtita, prvi s kotno hitrostjo Zemlje, drugi pa s kotno hitrostjo kroženja Zemlje okrog Sonca. Drugi vektor leži v ekliptiki in se v času dt zavrti za kot $d\varphi_s = \frac{2\pi}{\tau(1-\epsilon^2)^{3/2}}(1 + \epsilon \cos(\varphi_s - \varphi_{s_0}))^2 dt$. S τ smo označili čas enega obhoda Zemlje okrog Sonca, ki je eno leto. S kotom φ_{s_0} upoštevamo, da doseže Sonce najbližjo lego šele 3. januarja. Ekliptika je za kot $\theta_s = 23^\circ + 27'$ nagnjena glede na ravnino xy . Os y leži v ekliptiki. Oba

vektorja smo izrazili z vektorji enote vzdolž osi x , y in z , ki jih označimo z $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$:

$$\vec{n}_l = \cos(\theta_l) \cos(\varphi_l) \vec{i} + \cos(\theta_l) \sin(\varphi_l) \vec{j} + \sin(\theta_l) \vec{k}, \quad (1)$$

$$\vec{n}_s = -\cos(\theta_s) \cos(\varphi_s) \vec{i} + \sin(\varphi_s) \vec{j} + \sin(\theta_s) \cos(\varphi_s) \vec{k}. \quad (2)$$



Slika 4. Pri računu uporabimo geocentrični koordinatni sistem, ki je za tovrstne račune prikladen. Sonce se na sliki vrti okrog Zemlje po nepremični ekliptiki, Zemlja pa okrog svoje osi, oba v nasprotni smeri urinega kazalca. Kot φ_s merimo v ekliptiki med vektorjem $\vec{n}_s$ in, na primer, med smerjo tega vektorja ob kresu. Kot θ_l je v računu nepomemben.

Kot φ_l se enakomerno povečuje s kotno hitrostjo vrtenja Zemlje, ki je 360° v času τ_d . Sedaj lahko izračunamo skalarni produkt obeh vektorjev, ki je kar enak kosinusu kota, ki ga vektorja oklepata. Tako smo prišli do kota med Soncem in zenitom, saj sta to vektorja, od katerih kaže eden ves čas v zenit in drugi v Sonce. Ko je bil ta kot najmanjši (njegov kosinus pa največji), smo si čas tega dogodka, to je kulminacije Sonca, zapisali. Če je vse prav, je ta čas vedno blizu poldneva, to je 12. ure.

Andrej Likar

35. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši sedmošolci in osmošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 15. maja 1999, pomerili v šestih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po veljavnem pravilniku uvrsti do 0,5% vseh sedmošolcev s posameznega področja in do 1% vseh osmošolcev s posameznega področja.

REGIJA	7. razred	8. razred
Ljubljana	87	129
Maribor	46	77
Celje	28	43
Koper	19	25
Nova Gorica	8	16
Novo mesto	19	40
SKUPAJ	207	330

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 16 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 19 od 25 možnih točk.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem:

7. razred

I. nagrada

Marko Petkovski, OŠ Danile Kumar, Ljubljana; Andrea Tellini, OŠ Pietro Zorutti, Palmanova, Italija.

II. nagrada

Maja Ratej, OŠ Šmarje pri Jelšah.

III. nagrada

Ni bila podeljena.

8. razred**I. nagrada**

Katarina Bolko, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina; Žiga Novšak, OŠ Boštanj; Peter Golob, OŠ Brusnice; Nuša Dremelj, OŠ Davorina Jenka, Cerklje; Miha Jernejčič, OŠ Notranjskega odreda, Cerknica; Mojca Kure, OŠ Podzemelj, Gradac; Črt Jamšek, OŠ Toma Brejca, Kamnik; Andreja Malus, OŠ Jurija Dalmatina, Krško; Zora Golob, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana; Miha Veršnjak, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana; Anja Jutraž, OŠ Vižmarje-Brod, Lj. Šentvid; Urška Kožar, OŠ Prežihovega Voranca, Maribor; Gašper Zerovnik, OŠ Medvode; Saša Janežič, OŠ Mokronog; Monika Turk, OŠ Grm, Novo mesto; Bine Šebez, I. OŠ Slovenj Gradec; Petra Strnad, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka; Ivan Pridigar, OŠ Vuzeonica; Rafael Hofman, OŠ Rudolfa Maistra, Šentilj.

II. nagrada

Ni bila podeljena.

III. nagrada

Ni bila podeljena.

Aleksander Potočnik

**19. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE
ZA OSNOVNOŠOLCE**

Oddelek za fiziko in tehniko Pedagoške fakultete Univerze v Ljubljani in Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije sta v soboto, 8. maja 1999, organizirala 19. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Ljubljani se je za Zlata Stefanova priznanja pomerilo v znanju fizike 80 ekip. Vsi udeleženci pa so si še z uvrstitvijo na državno prvenstvo zaslužili zlate Stefanove znacke.

Pred državnim tekmovanjem so bila v soboto, 27. marca 1999, v devetih različnih slovenskih krajih področna tekmovanja. Ta tekmovanja so organizirali in vodili člani IO DMFA Koper v Izoli, Vesna Harej v Ljubljani, Zlatko Bradač in Mirko Cvahte v Mariboru, Milojka Frank v Novi Gorici, Nada Bačič v Puconcih, France Pogorelnik v Radljah ob Dravi, Stanko Polanec v Slovenskih Konjicah, Jože Novak v Šmarjeških Toplicah in Marjan Kočevar v Žireh. Sodelovalo je 365 ekip učencev iz 7. razredov in 408 ekip učencev iz 8. razredov, skupaj 773 ekip oziroma 1546 učencev.

Najbolje uvrščeni tekmovalci 8. razreda so se lahko udeležili letne šole mladih fizikov na Bledu. To nagrado podeljuje DMFA Slovenije pod pokroviteljstvom in v sodelovanju z Ministrstvom za šolstvo in šport Republike Slovenije.

Na državnem tekmovanju so Zlata Stefanova priznanja prejeli:

Šola	Tekmovalca (ki)
7. razred	
OŠ Breg, Ptuj	Aljaž Godec, Ruben Sipoš
OŠ Venclja Perka, Domžale	Klemen Pirnat, Lea Smerkolj
OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina	Nik Stopar, Kris Stopar
OŠ Dobropolje, Videm	Andrej Žnidaršič, Peter Jakopič
OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka	Domen Stadler, Tomaž Draksler
OŠ Ledina, Ljubljana	Tadej Janež, Samo Marinč
OŠ bratov Polaničev, Maribor	Klemen Žiberna, Anja Kostevšek
OŠ Rače, Rače	Mihael Gojkošek, Uroš Kline
OŠ Olge Meglič, Ptuj	Urška Kolar, Marko Turkuš
OŠ Šempeter v Savinjski dolini	Tadej Kotnik, Franci Sopotnik
OŠ Vič, Ljubljana	Andrej Ondračka, Ana Luin
OŠ Naklo, Naklo	Vesna Tišler, Jure Dobnikar
OŠ Martina Krpana, Ljubljana	Arber Dedaj, Igor Petrovič
OŠ Center, Novo mesto	Matija Kraševac, Katarina Škrbec
OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana	Lan Žagar, Klemen Blokar
OŠ Šmarjeta, Šmarješke toplice	Maja Barbo, Anja Mervar
OŠ Podčetrtek, Podčetrtek	Jure Čonč, Matej Hrovatič
OŠ Franca Rozmana Staneta	Miha Zatler, Peter Horvat
OŠ Rovte, Rovte	Igor Hladnik, Mojca Celarc
OŠ Radlje ob Dravi, Radlje	Katja Kure, Tanja Ledinek
OŠ Franceta Prešerna, Maribor	Žiga Brdник, Domen Zafred
8. razred	
OŠ Medvode, Medvode	Gašper Žerovnik, Primož Svoljšak
OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana	Ivo List, Miha Veršnjak
OŠ dr. Franceta Prešerna, Ribnica	Aleš Lampe, Nejc Nadler
OŠ Stična, Ivančna Gorica	Marko Kotar, Klemen Ban
OŠ Ljubečna, Ljubečna	Tone Potočnik, Monika Arh
OŠ Rudolfa Maistra, Šentilj	Rafael Hofman, Denisa Kolarič
OŠ Metlika, Metlika	Katja Škof, Peter Molek
OŠ Karla Destovnika Kajuha, Ljubljana	Gorazd Gotovac, Boštjan Čeh
OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina	Luka Skvarč, Vanja Kovač
OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka	Gregor Šifrar, Tine Porenta
OŠ Dravljje, Ljubljana	Ana Mihor, Boris Brajdih
OŠ narodnega heroja Rajka, Hrastnik	Tadej Borovšak, Marko Polak

Šola	Tekmovalca (ki)
OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina	Jure Grbec, Anja Kovač
OŠ Bistrica, Tržič	Janez Šter, Boštjan Rožič
OŠ Sava Kladnika, Sevnica	Matej Tajnikar, Jure Božič
OŠ Šmarje pri Jelšah	Igor Cesarec, Ignac Šilec
OŠ Gustava Šiliha, Velenje	Uroš Kuzman, Gregor Kralj
OŠ Bojana Iliča, Maribor	Mitar Milutinović, Marko Lubej
OŠ prof. dr. J. Plemlja, Bled	Rok Dolenc, Rok Dežman
OŠ Frana Erjavca, Nova Gorica	Petra Šinigoj, Rok Prislan
OŠ Starše, Starše	Bojan Žunkovič, Jernej Huber

Mojca Čepič

37. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Podobno kot v prejšnjih letih je tudi letos potekalo tekmovanje srednješolcev iz fizike v štirih skupinah (A, B, C in D), razdeljenih po snovi, in v treh stopnjah.

Prve stopnje – regijskega tekmovanja – se je udeležilo čez 1000 dijakov iz 56 srednjih šol. Tekmovanje je potekalo 17. aprila 1999 istočasno na osmih srednjih šolah po vsej Sloveniji. Organizirale so ga naslednje srednje šole: Gimnazija Bežigrad in Gimnazija Vič iz Ljubljane, Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer, I. gimnazija v Celju, Srednja elektro in strojna šola Kranj, Šolski center Nova Gorica, Gimnazija Gian Rinaldo Carli Koper in Srednja šola Črnomelj. Tekmovalne komisije, sestavljene iz profesorjev fizike s sodelujočih šol, so popravile izdelke in predložile tekmovalce za državno tekmovanje iz posamezne regije.

Državno tekmovanje je bilo 8. maja. Po predlogu regijskih komisij se ga je v skupini A udeležilo 34 tekmovalcev, v skupini B 39, v skupini C 29 in v skupini D 23; skupaj 125 tekmovalcev iz 38 srednjih šol.

Organizator državnega tekmovanja je bil Tehniški šolski center Nova Gorica. Poleg izvedbe tekmovanja so organizatorji pripravili tudi program za mentorje in tekmovalce. Tako so si mentorji ogledali Sveto goro, po koncu reševanja nalog pa so si tekmovalci ogledali grobnico Burbonov na Kostanjevici.

Tekmovanje je izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa sta krila Ministrstvo za šolstvo in šport ter organizator državnega tekmovanja. Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so pomagali študentje Fakultete za matematiko in fiziko, Oddelka za fiziko.

Na razglasitvi rezultatov je komisija podelila 6 prvih nagrad, 5 drugih, 11 tretjih in 40 pohval.

Podeljene nagrade in pohvale:

Skupina A

I. nagrada

Anka Ilc, Škofijska gimnazija, Vipava; Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka.

II. nagrada

Ni bila podeljena.

III. nagrada

Alan Šuligoj, Gimnazija Tolmin; Matjaž Božič, Gimnazija Koper; Jernej Urankar, Gimnazija Kranj; Klemen Šivic, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Pohvala

Gregor Bregar, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Edvard Končan, Gimnazija Kranj; Boštjan Kosec, Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer; Andraž Stožer, II. gimnazija Maribor; Andraž Briški Javor, Gimnazija Kranj; Jugoslav Njenjić, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Anton Gradišek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Luka Honzak, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Skupina B

I. nagrada

Andrej Košmrlj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Gregor Tavčar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

II. nagrada

Eva Berdajs, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Andrej Muhič, Gimnazija Novo mesto; Janez Langus, Gimnazija Kranj.

III. nagrada

Damir Najvirt, Šolski center Ptuj – gimnazija; Igor Veselič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Rok Strniša, Gimnazija Ledina, Ljubljana.

Pohvala

Tomaž Šolc, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Štefan Žagar, I. gimnazija Maribor; Matej Tadina, Šolski center Celje – poklicna in tehniška strojna šola; Jurij Dreo, Šolski center Brežice – gimnazija; Martin Lukan, Tehniški

šolski center, Nova Gorica; Dragan Simeonov, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Mitja Gomboc, Gimnazija Murska Sobota; Uroš Cerk, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Aleš Česen, Gimnazija Kranj; Damjan Golob, Gimnazija Novo mesto; Uroš Leskovšek, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Mojca Miklavc, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana; Jure Brankovič, Gimnazija Poljane, Ljubljana; Martin Fras, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Nina Marinšek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

Skupina C

I. nagrada

Matej Kanduč, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija, Ljubljana.

II. nagrada

Nejc Košnik, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje; Irena Majcen, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

III. nagrada

Jure Strle, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Jernej Bodlaj, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija, Ljubljana.

Pohvala

Tadej Podgornik, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana; Mitja Basle, Šolski center Celje – poklicna in tehniška elektro in kemijska šola; Iztok Pižorn, I. gimnazija v Celju; Martin Bombač, Šolski center Rudolf Maister Kamnik – gimnazija; Marko Ušaj, Tehniški šolski center, Nova Gorica; Nejc Bernot, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Jure Bezgovšek, Šolski center Velenje – splošna in strokovna gimnazija; Stane Vrtnik, Srednja elektro in strojna šola Kranj; Matej Gorjan, Šolski center Velenje – splošna in strokovna gimnazija; Rok Marolt, Šolski center Brežice – gimnazija; Gregor Skrt, Tehniški šolski center, Nova Gorica; David Štular, Gimnazija Kranj.

Skupina D

I. nagrada

Miran Bürmen, Gimnazija Murska Sobota.

II. nagrada

Ni bila podeljena.

III. nagrada

Urban Simončič, Šolski center Novo mesto; Miha Kadunc, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana.

Pohvala

Gorazd Karer, Šolski center Nova Gorica; Gregor Jerše, Gimnazija Kranj; Miha Erjavec, Gimnazija Ravne na Koroškem; Tomaž Weiss, II. gimnazija Maribor; Vasilij Centrih, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava.

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 28. maja na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelku za fiziko. Udeležilo se ga je 10 najboljših tekmovalcev iz skupine D in 3 najboljši iz skupine C z državnega tekmovanja. Na letošnjo 30. mednarodno fizikalno olimpiado, ki je potekala med 18. in 27. julijem v Padovi, so se uvrstili: Miran Bürmen, Gimnazija Murska Sobota; Urban Simončič, Šolski center Novo mesto; Matej Kanduč, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija, Ljubljana; Gregor Jerše, Gimnazija Kranj in Miha Kadunc, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana.

Ciril Dominko

43. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 15. maja 1999 se je 153 dijakov iz 43 gimnazij in srednjih šol v prostorih Šolskega centra Celje – splošne in strokovne gimnazije Lava spopadlo z nalogami na 43. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije. Popoldan so se nekateri tekmovalci odpravili na kopanje v Atomske Toplice, drugi pa podali na izlet po bližnji okolici Celja.

Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade in pohvale:

1. letnik

I. nagrada

David Danev, Gimnazija Velenje; Tone Gradišek, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Igor Puh, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

II. nagrada

Klemen Šivic, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matija Perne, Gimnazija Škofja Loka.

III. nagrada

Aleksandra Franc, I. gimnazija v Celju; Aleš Frece, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Bor Harej, Škofijska gimnazija, Vipava; Tina Murn, Gimnazija Škofja Loka; Erik Štrumbelj, Gimnazija Kočevje.

Pohvala

Jure Klanjšček, Šolski center Nova Gorica; Jugoslav Njenjič, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Teja Oblak, Gimnazija Jesenice; Borut Sluban, II. gimnazija, Maribor; Staš Lapanja, Srednja elektro in strojna šola, Kranj; Maša Farkaš, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Kaja Mozetič, Šolski center Rudolf Maister, Kamnik; Martin Čokl, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Anka Ilc, Škofjska gimnazija, Vipava; Gabrijela Hladnik, Gimnazija Vič, Ljubljana.

2. letnik**II. nagrada**

Franja Pajk, Gimnazija Škofja Loka.

III. nagrada

Mojca Miklaveč, Škofjska klasična gimnazija, Ljubljana; Andrej Košmrlj, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Miha Papler, Gimnazija Kranj; Sergej Omladič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Matej Kocjan, Šolski center Novo mesto.

Pohvala

Gregor Karer, Šolski center Nova Gorica; Luka Novak, I. gimnazija v Celju; Peter Lukan, Šolski center Nova Gorica; Matija Pretnar, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Tadej Bajda, Šolski center Brežice – Gimnazija; Matej Car, Gimnazija Murska Sobota; Martin Lukan, Tehniški šolski center Nova Gorica.

3. letnik**II. nagrada**

Sašo Jelenčič, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Irena Majcen, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana.

III. nagrada

Matjaž Urlep, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Barbara Grobelnik, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Lan Umek, Gimnazija Poljane, Ljubljana.

Pohvala

Črto Kreft, Šolski center Ptuj – Gimnazija; Adrijan Magajna, Gimnazija Ledina, Ljubljana; Rok Marolt, Šolski center Brežice – Gimnazija; Izotok Grilc, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje; Jaka Hajnšek, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava; Blaž Likozar, Gimnazija Kranj; Žiga Virk, Gimnazija Vič, Ljubljana; Anže Žagar, Gimnazija Šentvid, Ljubljana; Jure Željko, II. gimnazija, Maribor.

4. letnik

II. nagrada

Jure Kališnik, Šolski center Celje – splošna in strokovna gimnazija Lava.

III. nagrada

Ajda Skarlovnik, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana; Dušan Jan, Gimnazija Tolmin; Gorazd Karer, Šolski center Nova Gorica; Primož Lukšič, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje.

Pohvala

Samo Juretič, Šolski center Nova Gorica; Monika Kavalir, Srednja šola Postojna; Mateja Škrlec, Gimnazija Franca Miklošiča, Ljutomer.

Po določiteli *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja izbrala ekipo, ki bo zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Romuniji. V ekipo so se uvrstili: Dušan Jan, Jure Kališnik, Irena Majcen, Mojca Miklaveč, Ajda Skarlovnik in Matjaž Urlep.

Matjaž Željko

PRESEK

**list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
27. letnik, šolsko leto 1999/2000, številka 1, strani 1 – 64**

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1998/99 je za posamezne naročnike **2.000 SIT**, za skupinska naročila šol **1.650 SIT**, posamezna številka **400 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

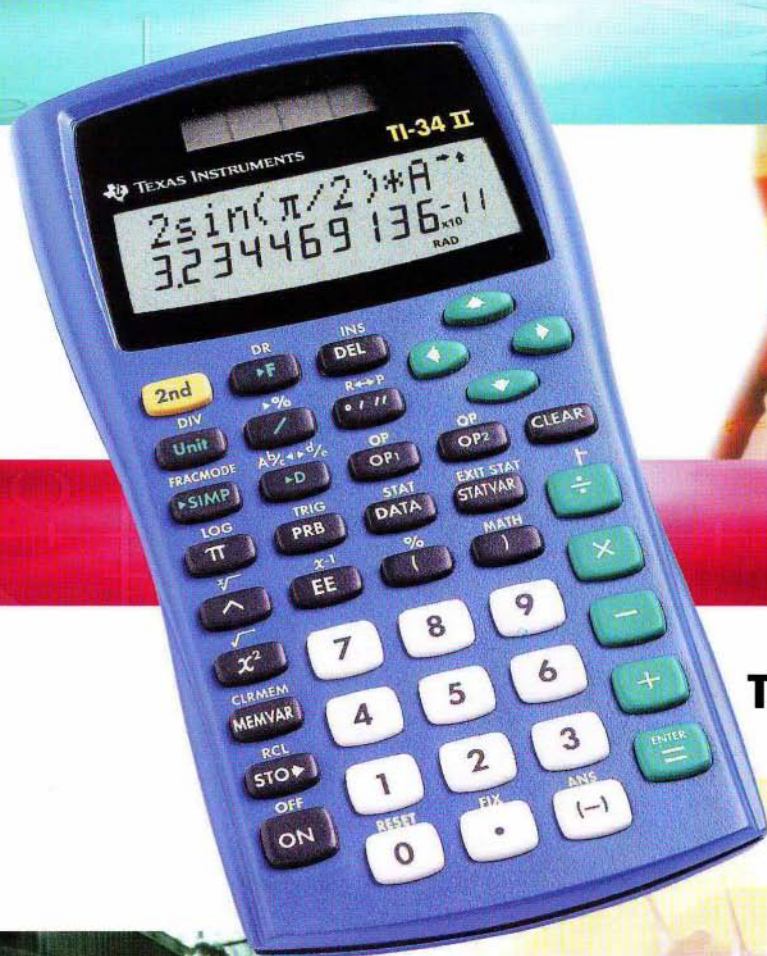
List sofinancirata MZT in MŠŠ
Založilo DMFA – založništvo
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1389

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

Kalkulatorji

 **TEXAS
INSTRUMENTS**



TI-34 II



MEDIS

MEDIS, Brnčičeva 1, Ljubljana
Tel.: 061 189 69 10, faks: 061 189 69 90
e-mail: pc.biro@medis.si

**Za katalog in
seznam prodajnih mest
pokličite: 061 189 69 20**

