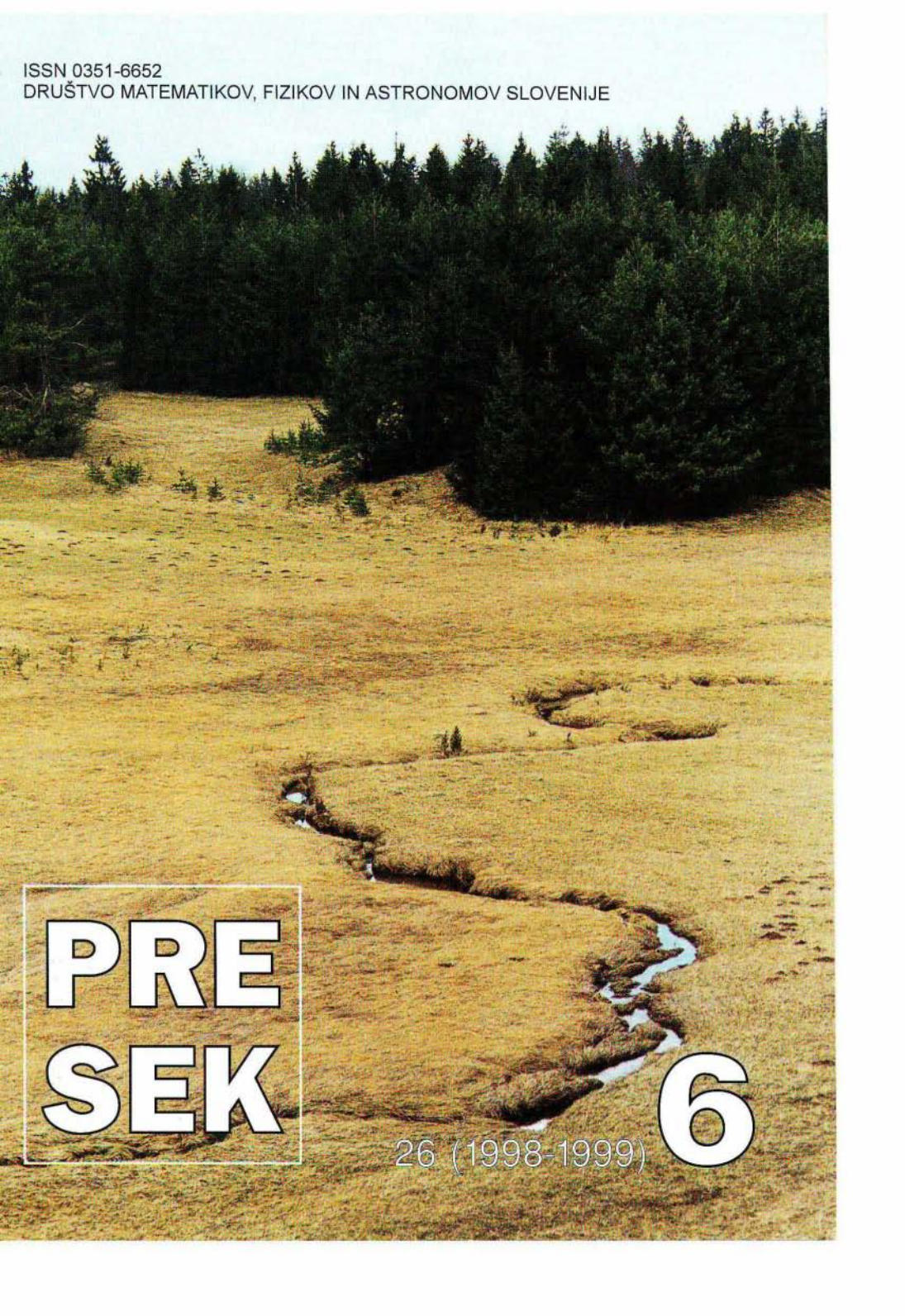


ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



**PRE
SEK**

26 (1998-1999)

6



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, leto 1998/99, številka 6, strani 321–384

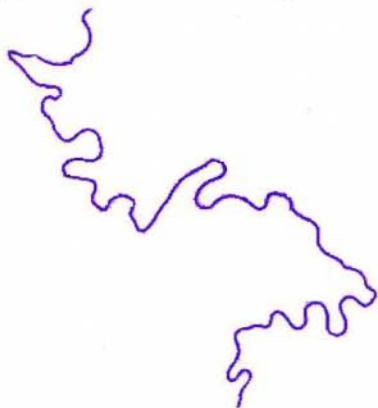
VSEBINA

MATEMATIKA	O Frobeniusovem številu (Jože Grasselli)	328-337
FIZIKA	Meandri (Andrej Likar)	322-327
	O helikopterjih (Janez Strnad)	344-349
ASTRONOMIJA	Rep (Marijan Prosén)	338-340
	Popolni Sončev mrk dne 11. 8. 1999 (Marijan Prosén)	356
RAČUNALNIŠTVO	Težave postajnega načelnika – reš. str. 363 (Matija Lokar)	342
	Iščemo besedo – reš. str. 365 (Martin Juvan)	355
NOVICE	Jurij Vega – Govor v Zagorici marca 1999 (Anton Suhadolc)	343
	O mojstru in orodju (Matija Lokar)	349-351
NALOGE	Milni mehurček – reš. str. 359 (Tomaž Slivnik, ml.)	327
	Koliko besed – reš. str. 359 (Martin Juvan)	337
	Lažnivi Kljukec – nagradna naloga (Andrej Likar)	341
	Zapletena sončna ura (Andrej Likar)	354
	Kocke iz zlata – reš. str. 358 (Marija Vencelj)	355
REŠITVE NALOG	Prelaganje žetonov – s str. 266 (Dragoljub M. Milošević, prir. Marija Vencelj)	351
	Računalo za seštevanje v petiškem sestavu – s str. 279 (Marija Vencelj)	357
	Križanka "Planeti našega Sonca" – s str. 288 (Marko Bokalič)	358
	Križanka z geslom – s str. 267 (Darjan Trupi)	367
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Križanka o trikotniku – reš. str. 362 (Marko Bokalič)	352-353
LETNO KAZALO		380-384
TEKMOVANJA	Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado – rešitve nalog s str. 319 (Matjaž Željko)	368-372
	20. mednarodno matematično tekmovanje mest – naloge (Aleš Vavpetič)	373-375
	20. mednarodno matematično tekmovanje mest – rešitve nalog s str. 373 (Aleš Vavpetič)	375-379
NA OVITKU	Potoki se v nešteti ostrih okljukih vijejo po Bloški planoti.	I, II
	Okljuka znamenitega potoka Bloščice, ki se po kljukih prebija do podzemlja blizu Velikih Blok – slike k članku na strani 322 (foto Andrej Likar)	IV

MEANDRI

Reke in potoki, ki tečejo po skoraj vodoravnih tleh, radi prav neverjetno vijugajo (slike na ovitku). Vijugam pravimo okljuki ali meandri. Slednja beseda izvira iz starodavnega imena reke Mendere, ki teče iz sedanje Turčije v Sredozemsko morje. Grki so jo imenovali Meandros, njen tok je zelo vijugast. Tudi v Sloveniji najdemo vode, ki izrazito vijugajo. Znamenit je potok Bloščica (slika na naslovnici), ki se vije po Bloški planoti, pa tudi le nekaj kilometrov dolga reka, ki bi jo iz zraka videli kot krivuljo na sliki 1. Bralci naj sami poskušajo ugotoviti, za katero reko gre.

Ko si vodni tok išče pot po skoraj ravnih tleh, ga zmoti vsaka najmanjša vzpetinica ali kotanja. Zato pričakujemo, da bo tu vijuganje večje kot v zgornjem toku, kjer je korito strmo in voda zato hitrejša. Kljub temu je izrazitost vijug povsem nesorazmerna valovitosti tal, saj se ponekod tok po dolgi poti po okljuku v obliki črke S vrne in teče tik pod nekaj višjim koritom. Zgodi se celo, da voda najde bližnjico in nastane mrtev okljuk, kakršnih je vse polno na reki Muri. Izrazite okljuke pojasnimo s spodjedanjem bregov na eni strani in nanašanjem proda ali peska na drugi strani korita. (Spodjedanje lepo vidimo na spodnji sliki na II. strani



Slika 1. Tudi reke vijugajo, ko se znajdejo na skoraj ravnem polju. Katera slovenska reka ima takle tok?

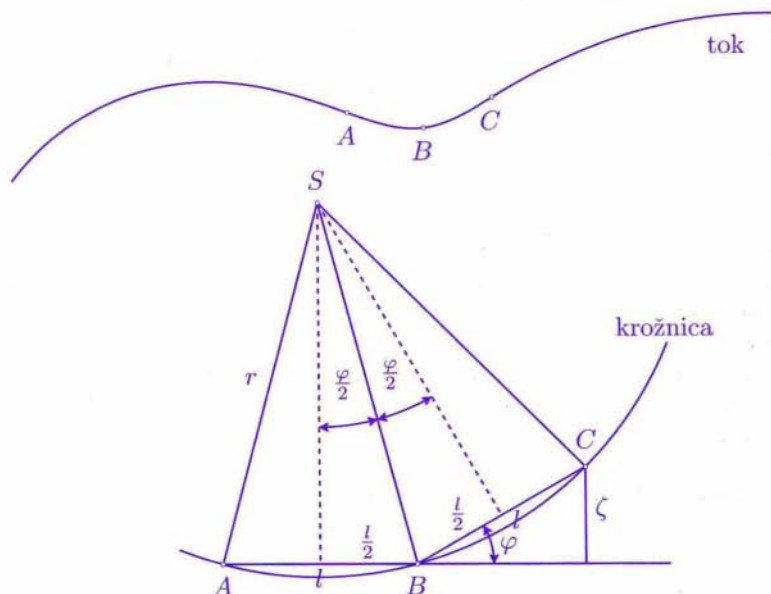
ovitka, ki kaže presušeno korito hudournega potoka z okljuki.) Ker voda v okljuku spreminja smer, pritiska na zunanji, daljši breg, ga počasi odnaša, s peskom in prodom, ki ga reka nosi s seboj, pa zasipava notranji breg. Tako se rečno korito počasi premika in okljuki postajajo vse izrazitejši. Nekatere reke zato regulirajo. Bregove utrdijo, korito poglobijo in tako preprečijo njegovo premikanje.

Zanimivo je, da se tudi povsem ravno korito pogosto spontano sprevrže v vijugasto. Pri takih rekah na začetku majhne razlike v globini korita na enem in drugem bregu povzročajo večje odnašanje usedlin v bližini enega brega in nanašanje le-teh na drugem bregu. Pri določenih pogojih se reka znajde v začaranem krogu: razlika v globini tako spremeni tok, da se ta razlika še poveča. Na enem bregu nastane globok tolmun, na drugem pa obsežna plitvina. Med pogoji, ki pripeljejo do začaranega kroga, ima

najpomembnejšo vlogo razmerje med globino reke in njeno širino. Ozko in globoko korito ne začne spontano vijugati. Razmere pa niso preproste in jih je mogoče podrobneje analizirati le z zapletenimi računi.

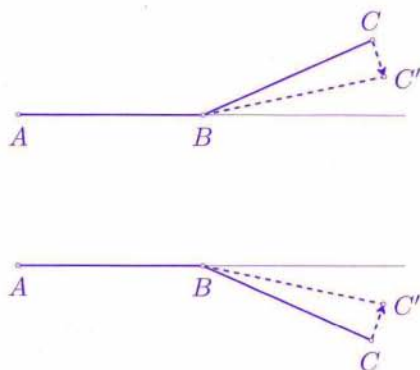
Razvoj meandrov bomo poskusili opisati tudi računsko. Predpostavili bomo, da je hitrost vodnega toka glede na korito povsod enaka. Zaradi spodjedanja bregov in nanašanja peska se korito premika. Premikanje bomo določili po naslednjem premisleku. V ovinku mora na vodo delovati sila, ki je prečna na breg, zato tudi voda pritiska na breg in ga spodjeda. Če bi se voda gibala po krožnici, bi bila sila brega na del vode z maso m kar $F = m \frac{v^2}{r}$, kjer je v hitrost vode, r pa polmer krožnice. Pri gibanju po zakrivljeni strugi najprej poiščemo krožnico, ki se strugi najbolj prilega, določimo njen polmer r in nato izračunamo silo prav tako kot pri krožnem koritu. Privzeli bomo, da je hitrost spodjedanja kar sorazmerna sili F , torej sorazmerna z $\frac{1}{r}$, saj sta m in v ves čas enaka. Korito se v času Δt premakne za $\Delta x = \alpha \frac{1}{r}$ pravokotno na smer toka.

Računanje močno poenostavimo, če si rečno korito ponazorimo s točkami. Opazujemo le tri sosednje točke, A , B in C (slika 2a). Najprej moramo poiskati polmer krožnice, ki se točkam najbolj prilega. Ker lahko narišemo skozi tri točke le eno krožnico, je naloga vedno rešljiva.



Slika 2a. Korito predstavimo s točkami. Narisane so tri zaporedne točke A , B in C in razdalje, ki jih potrebujemo pri računanju krivinskega polmera r .

V našem primeru lahko nalogo poenostavimo. Privzeli bomo, da je razdalja l med sosednjima točkama enaka in da je polmer r precej večji kot l . Takrat iz slike razberemo, da približno velja: $\varphi = \frac{l}{r}$ in $\varphi = \frac{\zeta}{l}$, zato tudi $\frac{1}{r} = \frac{\zeta}{l^2}$. Tu smo z ζ označili razdaljo med točko C in premico, ki gre skozi točki A in B . Računali bomo, da se rečno korito premakne v točki C za Δx pravokotno na premico, ki jo določata točki B in C , in to v smeri, da se korito med točkami A , B in C zravna (slika 2b). Premik Δx naj bo majhen v primeri z razdaljo l .

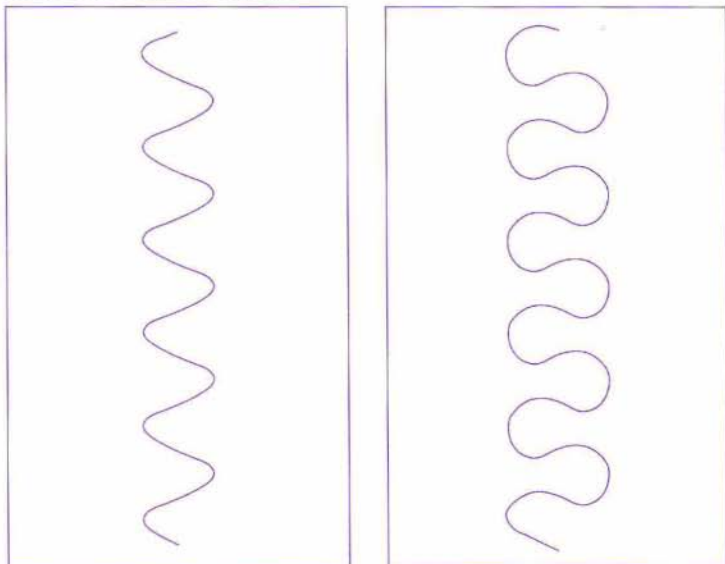


Slika 2b. Premik točke C pri spodjedanju brega je vedno takšen, da je odsek $A - C$ po premiku bolj raven kot prej.

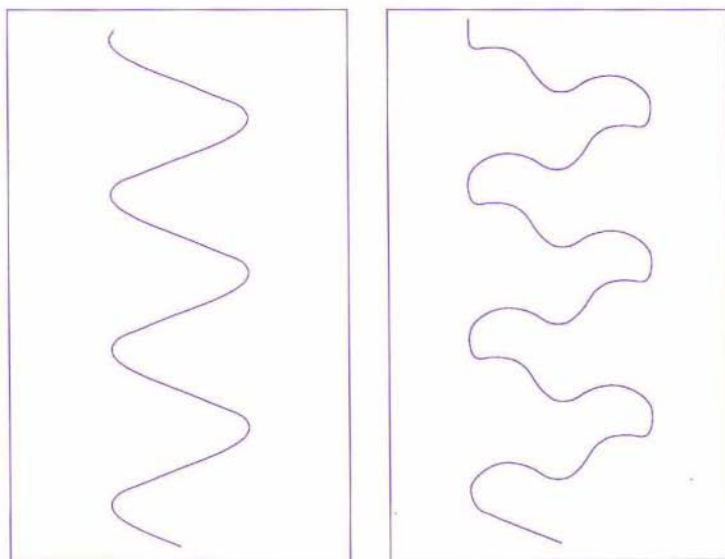
Da bo računanje udobno, ga opravimo z računalnikom, program pa priredimo tako, da ponavljamo račun za prvo trojico točk, nato za drugo trojico, kjer sta zadnji točki prejšnje trojice tudi prvi dve točki nove. Ko izračunamo premik korita še za zadnjo trojico, se vrnemo na začetek. Računanje ponavljamo in opazujemo spreminjanje korita tako, da točke narišemo in skoznje povlečemo krivuljo, ki se jim najtesneje prilaga. Nekaj risb, kjer smo začeli z enakomerno valovitim koritom, je prikazanih na slikah 3a do 3e na naslednjih straneh. Vidimo, da s tem preprostim računom kar dobro opišemo tvorbo meandrov.

Presenetljivo je, da se korito vedno bolj zapleta, čeprav točko C premikamo tako, da se korito na odseku $A - C$ izravna. Očitno izravnavanje na kratkih razdaljah vodi na velikih razdaljah v vedno večje zapletanje. Pravimo, da se lokalna težnja ne odraža tudi globalno. Takšno obnašanje je znano tudi na drugih področjih. Primera sta hitro pri roki. Indija je prenaseljena. Gostejša poselitev pomeni manj zemlje na posameznika in zato manj hrane, manj čiste vode, energije, zdravil... Mislili bi, da bo tako tudi v družinah – manj ko bo v družini otrok, lažje bo živela. Pa ni tako: družinam z več otroki gre v Indiji bolje. Tudi tu je lokalna težnja v nasprotju z globalno. Drug primer zadeva tehnološki razvoj človeštva. Pogosto slišimo, da bi kazalo razvoj upočasniti, saj bi tako imeli dlje časa surovine in energijo. Prav očitno je, da bi še posebno kazalo ustaviti razvoj v oboroževanju, denar pa nameniti za kaj bolj koristnega. Pa premislimo! Skupnost, ki bi začela tudi izvajati te za vse koristne ukrepe, bi se kmalu izpostavila nevarnostim, ki jih prinaša nerazvitost – izgubi samostojnosti

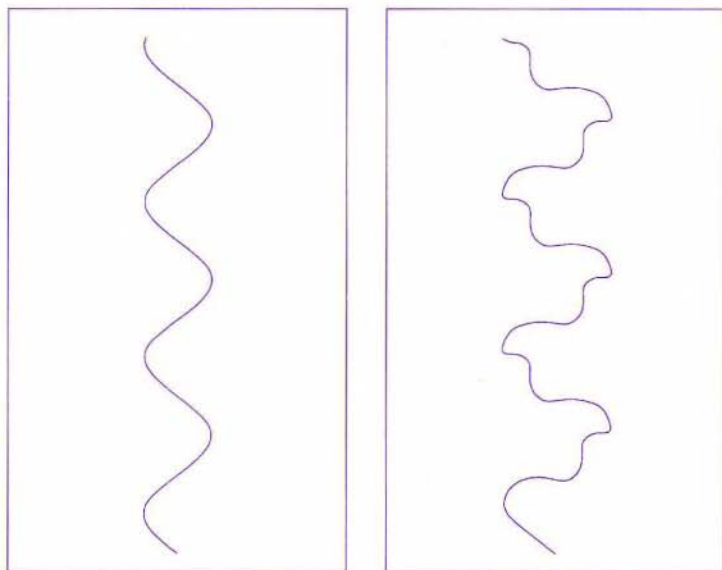
Na naslednjih slikah je nekaj izračunanih okljukov. Na levi je prvotni tok, na desni pa potem, ko smo ga lokalno izravnali.



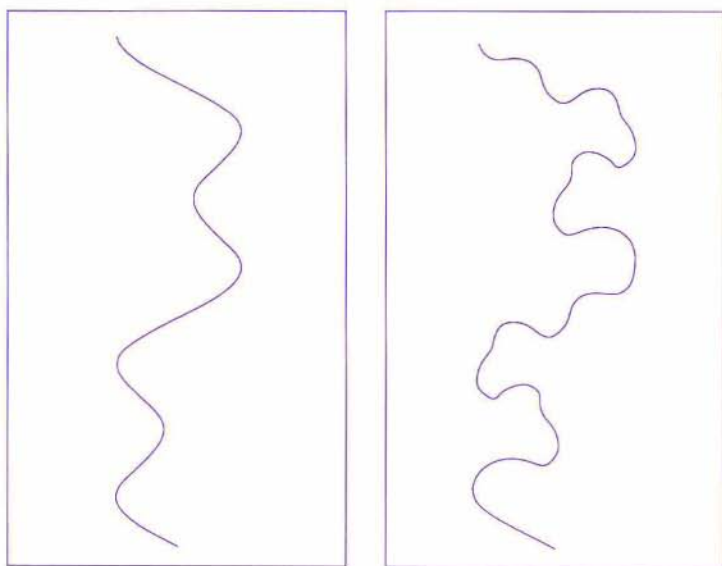
Slika 3a.



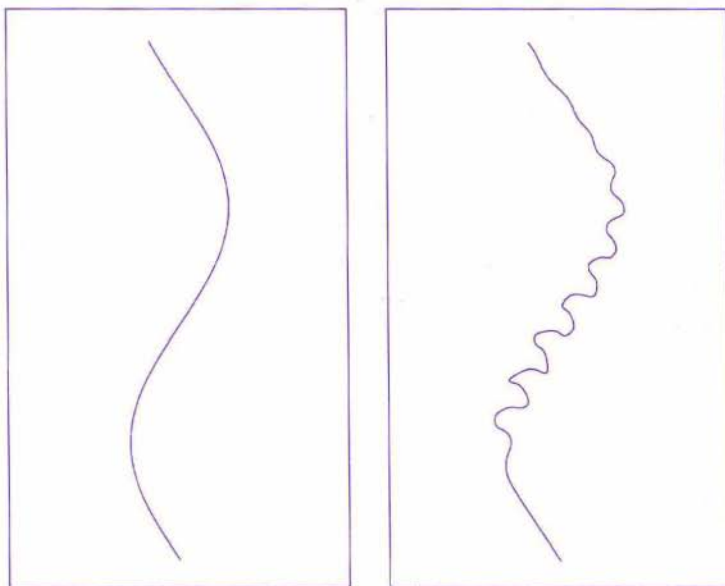
Slika 3b.



Slika 3c.



Slika 3d.



Slika 3e.

in biti na milost in nemilost prepuščen volji drugih. V ameriškem filmu "Out of Africa" vidimo prizor, ko plemenski poglavar sprašuje priseljeno Evropejko: "Kaj vam je prinesel ta vaš napredek? Ali ste zato kaj bolj srečni?" Odgovora ni dobil, a je bil na dlani: "Ne, nismo bolj srečni, ste pa zaradi nas nesrečni vi." Priseljenci so se namreč namenili izseliti celo pleme na neko neprijazno pobočje, ker so želeli ozemlje, na katerem je pleme živelo dolga leta, spremeniti v nasad kave.

Andrej Likar

MILNI MEHURČEK

Okoli Zemlje napnemo milni mehurček. Mehurčku dodamo dovolj milnice, da se mu površina zveča za 1 m^2 . Pod zračnim pritiskom mehurček spet zavzame sferično obliko. Za koliko se mehurčku zveča prostornina? Za koliko naraste njegov polmer? (Predpostaviš lahko, da je Zemlja krogla s polmerom 7000 km .)

Tomaž Slivnik, ml.

O FROBENIUSOVEM ŠTEVILU

1

V daljnji deželi plačujejo le s kovanci po 7 in 10 denarnih enot. Katere zneske lahko poravnajo?

Zastavljeno vprašanje zahteva dopolnitev. Sprašujemo seveda le po zneskih, ki se povedo v naravnih številih (saj zneska, ki je necelo število, ni mogoče poravnati). Upoštevati pa je potrebno še nekaj. Recimo, da hočemo v Sloveniji v kovancih izplačati 18 SIT. Odštejemo npr. tri kovance po 5 SIT in tri po 1 SIT; lahko pa damo npr. štiri kovance po 5 SIT in dobimo nazaj kovanec 2 SIT. Znesek 18 SIT je bil prvič poravnan *brez vračila*, drugič *z vračilom*.

Katere zneske je mogoče v daljnji deželi izplačati z vračilom?

Ker je

$$7 \cdot 3 + 10 \cdot (-2) = 1, \quad (1)$$

je možno izplačati znesek 1. (Plačnik da tri kovance po 7 enot in vrnejo mu dva kovanca po 10 enot.) Po množenju z naravnim številom n iz (1) dobimo

$$7(3n) + 10(-2n) = n \quad (2)$$

in vidimo, da je mogoče poravnati znesek n . (Za $3n$ kovancev po 7 enot vrnejo $2n$ kovancev po 10 enot.) Označimo z x število kovancev po 7 enot, z y število kovancev po 10 enot in vsebino enakosti (2) povejmo takole:

A. Vsako naravno število n izrazimo lahko v obliki $7x + 10y$ s celima številoma x in y .

Ali:

Pri vsakem naravnem številu n je enačba

$$7x + 10y = n$$

rešljiva v celih številih x, y .

Kako je v daljnji deželi s plačevanjem zneskov brez vračila?

Ker ni vračanja, nobeno od celih števil x, y ne sme biti negativno. Gre torej za natančno tiste zneske, ki jih lahko izrazimo v obliki

$$7x + 10y, \quad (3)$$

ko se x, y spreminjata po nenegativnih celih številih

$$0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Moremo izplačati npr. vsote $7 = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 0$, $10 = 7 \cdot 0 + 10 \cdot 1$, $17 = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 1$; ne pa npr. 1, 8, 23.

Pokažimo, da je naravno število n , večje od 53, izrazljivo v obliki (3) pri x, y iz (4) in da 53 take izrazitve nima.

Iz ugotovitve A vemo, da obstajata celi števili x_0, y_0 , ko je

$$7x_0 + 10y_0 = n. \quad (5)$$

Delitev y_0 s 7 daje količnik k in nenegativen ostanek r ; števili k, r sta celi in

$$y_0 = 7k + r, \quad 0 \leq r < 7. \quad (6)$$

Z najdenim k in znanim x_0 naredimo celo število $r_1 = x_0 + 10k$; od tod sledi

$$x_0 = r_1 - 10k. \quad (7)$$

Ko zapisa (6), (7) za y_0 in x_0 vnesemo v (5), dobimo

$$7r_1 + 10r = n. \quad (8)$$

Po privzetku je $n > 53$, zaradi (6) pa $0 \leq r < 7$; zato iz (8) izhaja ocena

$$7r_1 = n - 10r > 53 - 60 = -7.$$

Torej je $7r_1 > -7$ in tako $r_1 > -1$; to pove, da je celo število r_1 iz množice (4); ker velja to tudi za r , imamo v (8) želeno izrazitev za n .

Ali je lahko

$$7x + 10y = 53 \quad (9)$$

pri x, y iz (4)? Ker je $10 \cdot 6 > 53$ in x ni negativen, more y v (9) biti le 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ko te vrednosti za y postavimo v (9), dobimo za $7x$ po vrsti 53, 43, 33, 23, 13, 3; nobeno teh števil ni deljivo s 7 in tako x v (9) ni celo število.

Dognali smo: Brez vračila morejo v daljnji deželi poravnati vsak znesek 54, 55, 56, ...; zneska 53 brez vračila ne morejo izplačati; od zneskov 1, 2, ..., 52 lahko brez povračila plačajo le nekatere.

Povejmo to ugotovitev še drugače.

- B. Vsako naravno število $n > 53$ lahko zapišemo v obliki $7x + 10y$ z nenegativnima celima številoma x, y ; za število 53 to ni mogoče.

Ali:

Za vsako naravno število $n > 53$ ima enačba

$$7x + 10y = n$$

rešitev v nenegativnih celih številih x, y ; pri $n = 53$ enačba take rešitve nima.

Lahko se zgodi, da pri plačevanju brez vračila plačnik enega od obeh kovancev za 7 ali 10 enot ne uporabi; ker ni vračanja, more npr. znesek 56 enot poravnati le tako, da našteje osem kovancev po 7 enot.

Pa vzemimo, da v daljnji deželi poostrijo pogoje izplačevanja. Dovoljeno je le še plačevanje brez vračila in pri vsakem plačilu je potrebno uporabiti oboje kovanec. Katere zneske je sedaj mogoče poravnati? Ravno tiste, ki jih opiše izraz $7x + 10y$, ko tečeta x, y po naravnih številih $1, 2, 3, \dots$. Natančnejši odgovor vsebuje trditev

- C. Vsako naravno število $n > 70$ lahko izrazimo v obliki $7x + 10y$ pri naravnih x, y ; za $n = 70$ to ne velja.

Ali:

Za vsako naravno število n večje od 70 ima enačba

$$7x + 10y = n$$

rešitev v naravnih številih x, y ; pri $n = 70$ enačba take rešitve nima.

Enakosti

$$\begin{array}{ll}
 7 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = 71 & 7 \cdot 8 + 10 \cdot 2 = 76 \\
 7 \cdot 6 + 10 \cdot 3 = 72 & 7 \cdot 1 + 10 \cdot 7 = 77 \\
 7 \cdot 9 + 10 \cdot 1 = 73 & 7 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 78 \\
 7 \cdot 2 + 10 \cdot 6 = 74 & 7 \cdot 7 + 10 \cdot 3 = 79 \\
 7 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 75 & 7 \cdot 10 + 10 \cdot 1 = 80
 \end{array} \tag{10}$$

kažejo, da za naravna števila od 71 do 80 drži, kar pravi trditev C. Naj bo sedaj naravno število $n \geq 81$ in števka njegovih enic j . Med števili (10) je ravno eno, ki ima enico j ; zaznamujmo ga a_j (npr. $a_2 = 72$, $a_0 = 80$). Ker je $n \geq 81$ in $71 \geq a_j \geq 80$, je razlika $n - a_j$ naravno število; ker

se n in a_j končujeta z enako števk, je $n - a_j$ večkratnik od 10; torej je $n - a_j = 10k$ pri naravnem k . Iz (10) je $a_j = 7x + 10y$ z naravnima x, y in $n = 7x + 10(k + y)$ je zelena izrazitev.

Če bi bilo

$$7x + 10y = 70 \quad (11)$$

pri naravnih x, y , bi 7 delil $10y$ in potem 7 delil y ; torej bi bilo $y = 7s$ pri naravnem s . Prav tako bi po (11) bil x deljiv z 10 in $x = 10t$ pri naravnem t . Najdena x, y , postavljena v (11), pripeljeta do $70(s + t) = 70$ in po krajšanju do $s + t = 1$. Za naravni števili s, t to ne more veljati (vsota dveh naravnih števil je 2 ali več). Z naravnima x, y se torej enačba (11) ne da izpolniti.

Trditev C je dognana.

Povzemimo: Ko morajo v daljnji deželi pri plačevanju brez vračanja uporabiti oboje kovance, lahko plačajo vsak znesek 71, 72, 73, ...; zneska 70 ne morejo poravnati; od zneskov 1, 2, 3, ..., 69 nekatere da, druge ne.

2

Zapustimo daljnjo deželo in se pomudimo pri nekaterih posplošitvah ugotovitev iz razdelka 1. Namesto 7 in 10 vzamemo tuji naravni števili a in b , večji od 1.

- Č. Če sta a, b tuji naravni števili, je vsako naravno število izrazljivo v obliki $ax + by$ s celoštevilskima x, y .

Ali:

Naj bosta a, b tuji naravni števili; pri naravnem številu n je enačba

$$ax + by = n$$

rešljiva v celih številih x, y .

Trditve Č ne bomo dokazovali. Povejmo samo, da npr. z Evklidovim algoritmom na a, b pridemo do celih števil x_1, y_1 , takih, da velja

$$ax_1 + by_1 = 1.$$

Pri celih številih $x_0 = nx_1, y_0 = ny_1$ je potem

$$ax_0 + by_0 = n.$$

D. Naj bosta a, b tuji naravni števili, večji od 1, in

$$g(a, b) = ab - a - b. \quad (12)$$

Vsako naravno število $n > g(a, b)$ je izrazljivo v obliki $ax + by$ z nenegativnima celoštevilskima x, y ; za $n = g(a, b)$ to ne drži.

Ali:

Pri tujih naravnih številih a, b , večjih od 1, ima enačba

$$ax + by = n \quad (13)$$

za vsako naravno število $n > g(a, b)$ rešitev v nenegativnih celih številih x, y ; za $n = g(a, b)$ take rešitve nima.

Trditev D doženemo podobno kot B. Po Č obstajata celi števili x_0, y_0 , ko je

$$ax_0 + by_0 = n. \quad (14)$$

Ko delimo y_0 z a , dobimo količnik k in ostanek r ter imamo

$$y_0 = ka + r, \quad 0 \leq r < a \quad (15)$$

pri celoštevilskih k, r . Znani x_0, b, k določajo celo število $r_1 = x_0 + kb$ in od tod je

$$x_0 = r_1 - kb. \quad (16)$$

Postavimo (16) in (15) v (14) pa smo pri enačbi

$$ar_1 + br = n. \quad (17)$$

Zaradi (15) je r največ $a - 1$; zato iz (17) izhaja ocena

$$ar_1 + b(a - 1) \geq n.$$

Upoštevamo privzetek $n > ab - a - b$ in dobimo

$$ar_1 > ab - a - b - b(a - 1) \quad \text{ali} \quad ar_1 > a.$$

Torej je celo število $r_1 > -1$ in tako $r_1 \geq 0$; po (15) je tudi $r \geq 0$ in (17) predstavlja rešitev enačbe (13) v nenegativnih celih številih $x = r_1, y = r$.

Ali je lahko

$$ax + by = ab - a - b \quad (18)$$

pri nenegativnih celoštevilskih x, y ? Potem je

$$a(x+1) = b(a-1-y)$$

in b deli $a(x+1)$; ker je b tuj a , mora b deliti $x+1$ in je zato

$$x = -1 + sb. \quad (19)$$

Tu je s naravno število, saj je x nenegativno celo število in b naravno število. Iz (18) sledi tudi

$$b(y+1) = a(b-1-x).$$

Od tod vidimo, da a deli $y+1$ in je potem

$$y = -1 + ta \quad (20)$$

pri naravnem številu t . Zapisa (19), (20) sledita iz predpostavke, da x, y ustrezata enačbi (18). Ko ju vanjo vnesemo, po skrčenju dobimo $(s+t)ab = ab$. Ker je $ab \neq 0$, je $s+t = 1$. V naravnih številih pa to ne gre.

Trditev D je dognana.

Naravni števili a, b sta po privzetku večji od 1 in tuji, zato različni. Kadar sta najmanjši, je eno 2, drugo 3; torej je

$$ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1 \geq 2 - 1 = 1.$$

Z (12) podano celo število $g(a, b)$ je tako pozitivno in liho, saj sta a, b tuja. Imenuje se *Frobeniusovo število* za a, b .

Zaznamujmo s $h(a, b)$ število naravnih števil, ki jih ne moremo izraziti v obliki $ax + by$, kjer sta x, y celi nenegativni števili. Največje naravno število te vrste je po trditvi D Frobeniusovo število $g(a, b)$. Zato je $h(a, b) \geq 1$. Do boljše ocene privede kratek razmislek.

Ce sta naravni števili n_1, n_2 izrazljivi, obstajajo nenegativni celoštevilski x_1, y_1, x_2, y_2 , da je

$$ax_1 + by_1 = n_1, \quad ax_2 + by_2 = n_2.$$

Po seštetju dobimo

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = n_1 + n_2$$

in vidimo, da je obenem z n_1, n_2 tudi vsota $n_1 + n_2$ izrazljiva (saj sta $x_1 + x_2, y_1 + y_2$ nenegativni celi števili).

Vse možnosti, kako zapisati $g(a, b)$ z vsoto dveh nenegativnih celih števil, so

$$\begin{aligned}
 0 + g(a, b) &= g(a, b) \\
 1 + (g(a, b) - 1) &= g(a, b) \\
 2 + (g(a, b) - 2) &= g(a, b) \\
 &\dots\dots\dots \\
 (g(a, b) - 1) + 1 &= g(a, b) \\
 g(a, b) + 0 &= g(a, b)
 \end{aligned} \tag{21}$$

V vsaki od teh enačb vsaj eden od obeh sumandov na levi strani ni izrazljiv; če sta namreč oba sumanda izrazljiva, je po prejšnjem odstavku tudi njuna vsota $g(a, b)$ izrazljiva; vemo pa, da $g(a, b)$ ni izrazljiv. Ker je $g(a, b)$ lih, sta v vsaki od enačb sumanda različna, isti sumand nastopa ravno v dveh enačbah (npr. 1 v drugi in predzadnji enačbi). Neizrazljivih sumandov je tako vsaj toliko, kot je polovično število enačb (21). Zato drži

$$h(a, b) \geq \left(\frac{1}{2}(g(a, b) + 1)\right). \tag{22}$$

Zgled. V skladu z (12) smo že v B našli $g(7, 10) = 53$; po (22) je $h(7, 10) \geq 27$.

Izpeljimo še trditev:

E. Pri tujih naravnih številih a, b , večjih od 1, vsako naravno število $n > ab$ lahko izrazimo v obliki $ax + by$ z naravnima x, y ; za $n = ab$ take izrazitve ni.

Ali:

Pri tujih naravnih številih a, b , ki sta nad 1, je za vsako naravno število $n > ab$ enačba

$$ax + by = n$$

rešljiva v naravnih številih x, y ; za $n = ab$ take rešitve ni.

Vsako naravno število $n > ab$ lahko zapišemo $n = ab + j$, kjer je j naravno število. Po ugotovitvi D obstajata nenegativni celi števili x_0, y_0 , ko je

$$ax_0 + by_0 = ab - a - b + j.$$

Seveda velja

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b.$$

Iz vsote teh enačb

$$a(x_0 + 1) + b(y_0 + 1) = ab + j$$

že sledi zahtevana izrazitev za $n > ab$; od celih števil x_0, y_0 namreč nobeno ni negativno, zato sta $x_0 + 1, y_0 + 1$ naravni števili.

Ce bi pri naravnih številih x, y imeli

$$ax + by = ab, \quad (23)$$

bi iz tujosti a, b izhajalo, da je $x = sb, y = ta$ pri naravnih s, t ; to bi v (23) pripeljalo do nemogoče enačbe $s + t = 1$.

Trditev E je dognana.

3

V razdelku 2 smo si ogledali, katera naravna števila zavzame izraz $ax + by$, če sta a, b tuji naravni števili nad 1 in se x, y spreminjata po celih, nenegativnih celih ali le po pozitivnih celih številih. Povejmo še nekaj besed o tem v splošnem primeru.

Naj bodo $c_1, c_2, \dots, c_t$ tuja naravna števila, ustrezajoča pogoju

$$1 < c_1 < c_2 < \dots < c_t$$

in $t \geq 3$.

Vsako naravno število n lahko izrazimo v obliki

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_tx_t = n,$$

kjer so $x_1, x_2, \dots, x_t$ cela števila.

Največje naravno število, ki ga ne moremo zapisati v obliki $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_tx_t$ z nenegativnimi celimi $x_1, x_2, \dots, x_t$, se imenuje *Frobeniusovo število* za $c_1, c_2, \dots, c_t$ in ga označujemo $g(c_1, c_2, \dots, c_t)$. Zanj velja

$$c_1 - 1 \leq g(c_1, c_2, \dots, c_t) \leq c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_1c_t - c_1 - c_2 - \dots - c_t. \quad (24)$$

V razdelku 2 smo našli $g(c_1, c_2) = c_1c_2 - c_1 - c_2$. Za $g(c_1, c_2, \dots, c_t)$ pri $t \geq 3$ tak obrazec ni poznan. Je pa mogoče včasih $g(c_1, c_2, \dots, c_t)$ določiti, če imajo $c_1, c_2, \dots, c_t$ poleg zgornjih še kakšne dodatne lastnosti. Navedimo dva takšna primera.

Če sta od števil c_1, c_2, c_3 vsaki dve tuji, je

$$g(c_1c_2, c_2c_3, c_3c_1) = 2c_1c_2c_3 - c_1c_2 - c_2c_3 - c_3c_1.$$

Za zaporedna naravna števila $c, c+1, c+2, \dots, c+t-1$ in c večji od 1 je

$$g(c, c+1, c+2, \dots, c+t-1) = \left[\frac{c+t^2-3}{t-1} \right] c + \frac{t^2-t-2}{2} + \frac{(2c+t-1)t}{2}. \quad (25)$$

Oglati oklepaj v (25) pomeni, da je treba vzeti največje celo število, ki ne presega števila $(c+t^2-3)/(t-1)$. Npr. za $c=100, t=3$ iz (25) najdemo

$$g(100, 101, 102) = 53 \cdot 100 + 2 - 101 \cdot 3 = 4999.$$

Naj pomeni $h(c_1, c_2, \dots, c_t)$ število naravnih števil, ki jih ni mogoče izraziti v obliki $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_tx_t$ pri nenegativnih celoštevilskih $x_1, x_2, \dots, x_t$. Podobno kot v (23) ugotovimo

$$h(c_1, c_2, \dots, c_t) \geq \frac{1}{2}(g(c_1, c_2, \dots, c_t) + 1).$$

Največje naravno število, ki ga ne moremo izraziti kot vsoto $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_tx_t$ pri naravnih $x_1, x_2, \dots, x_t$, zaznamujemo $f(c_1, c_2, \dots, c_t)$; s Frobeniusovim številom je takole povezano

$$f(c_1, c_2, \dots, c_t) = g(c_1, c_2, \dots, c_t) + c_1 + c_2 + \dots + c_t. \quad (26)$$

Iz $g(100, 101, 102) = 4999$ sledi po (26)

$$f(100, 101, 102) = 4999 + 303 = 5302.$$

Za vsako naravno število $n > 5302$ obstajajo naravna števila x_1, x_2, x_3 , da je $100x_1 + 101x_2 + 102x_3 = n$. Ni pa mogoče v tej obliki zapisati 5302 (in nekaterih manjših naravnih števil).

Pripis. Ferdinand Georg Frobenius se je rodil leta 1849 v Berlinu in tam umrl leta 1917. Po končanem študiju v rojstnem mestu je bil profesor najprej na politehniki v Zürichu, nato na univerzi v Berlinu. Deloval je na raznih področjih matematike, zlasti pomembni so njegovi prispevki v algebri.

Naloge.

1. Trditvi D, E držita tudi tedaj, če izpustimo zahtevo, da sta a, b nad 1; ni pa $g(a, b)$ več naravno število. Prepričaj se o tem.
2. Katera naravna števila lahko izrazimo v obliki $ax + by$ z nenegativnima celoštevilskima x, y , če naravni števili a, b nista tuji?
3. Preveri, da je $h(7, 10) = 27$, $h(7, 11) = 33$.
4. Število 140 lahko le na en način izrazimo v obliki $7x + 10y$, če naj bosta x, y naravni števili (namreč $x = 10$, $y = 7$). Toda 141 je mogoče v taki obliki izraziti na dva, 211 na tri načine. Poišči izrazitve!
5. Vse celoštevilске rešitve enačbe

$$100x_1 + 101x_2 + 102x_3 = 5302$$

so zajete z obrazcema

$$x_1 = 51 + x_3 + 101v, \quad x_2 = 2 - 2x_3 - 100v,$$

ko x_3, v tečeta po celih številih. Od tod takoj vidimo, da enačbe ni mogoče izpolniti v naravnih številih. (Da bo x_2 naravno število, mora biti $x_3 = 0$, $v = 0$.)

6. Poštne pristojbine so 40, 41, 42, 43, ... denarnih enot, poravnati jih je mogoče le z lepljenjem znamk. Uprava se odloči, da bo izdala znamke le dveh različnih vrednosti, ne bo pa med njima znamke z vrednostjo 1. Ugotovi, da sta samo dve izbiri: znamki za 2 in 41 ali pa za 5 in 11 denarnih enot.

Jože Grasselli

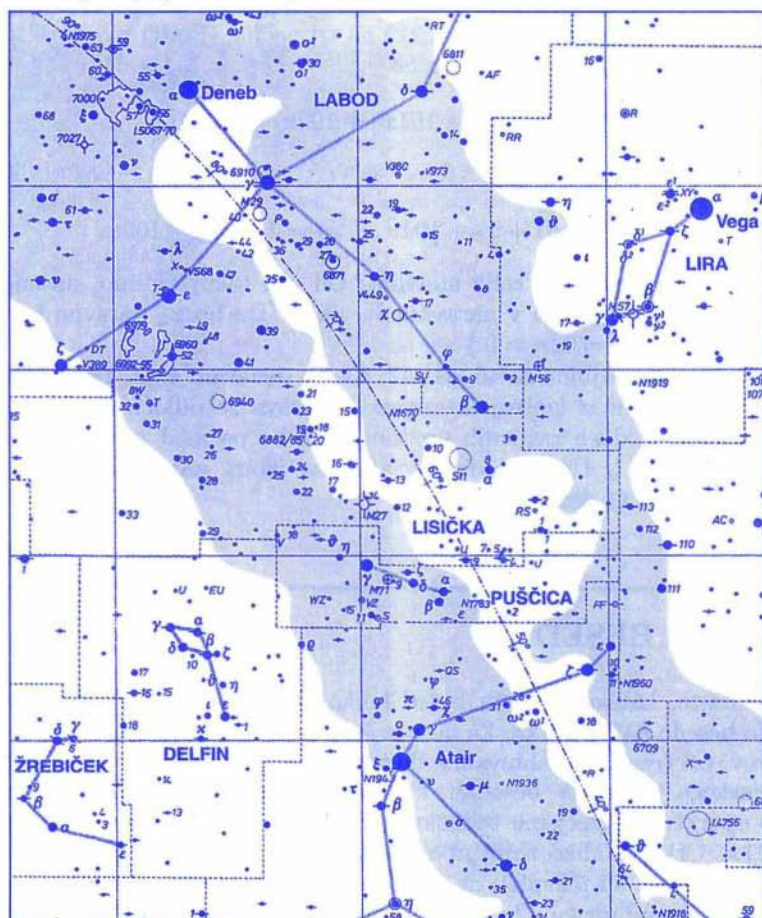
KOLIKO BESED

Izračunajte, koliko različnih besed lahko sestavimo iz znakov, ki sestavljajo besedo **MATEMATIKA**. Za besedo štejemo vsako (neprazno) zaporedje znakov, pri čemer ne zahtevamo, da to zaporedje pomeni smiselno besedo slovenskega jezika. V besedah, ki jih želimo prešteti, lahko posamezno črko uporabimo kvečjemu tolikokrat, kolikorkrat nastopa v besedi **MATEMATIKA**. Črko **A** lahko torej uporabimo največ trikrat, črka **E** pa lahko nastopa enkrat ali pa sploh ne. Da boste lažje preverili pravilnost vašega razmisleka, vam povem, da lahko iz znakov besede **PRESEK** sestavimo 1010 različnih besed.

Martin Juvan

REP

V jasnih poletnih nočeh, posebno tistih brez mesečine, lahko visoko na jugu in okoli nadglavišča opazujemo tri zelo svetle zvezde. To so Vega, Atair in Deneb (slika 1). Tokrat posvetimo vso pozornost zvezdi Deneb, glavni zvezdi v ozvezdju Labod. Mimogrede, beseda *deneb* je arabska in pomeni rep, v našem primeru rep laboda (slika 2 in 3). Ime zvezde torej natančno pove, kje v ozvezdju leži zvezda.

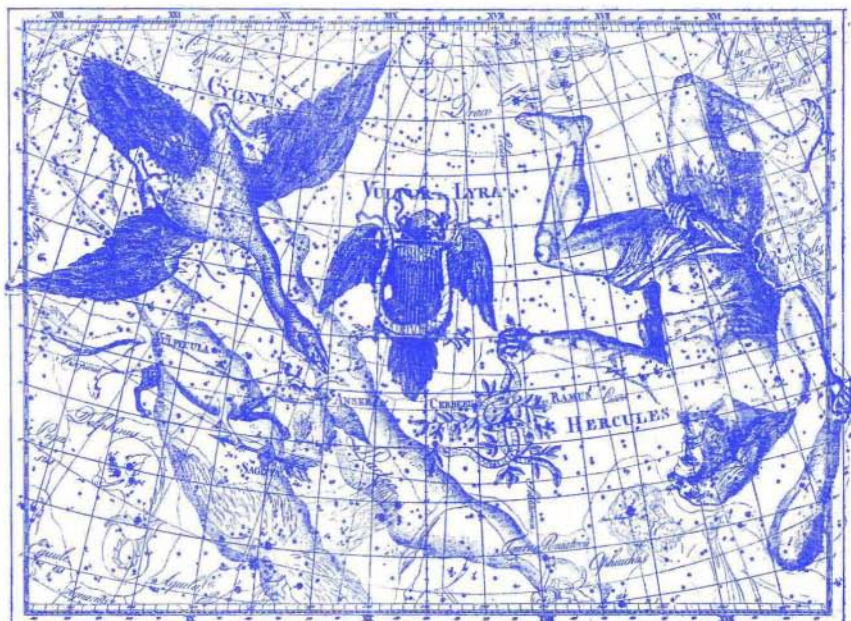


Slika 1. Svetle zvezde: Vega v ozvezdju Lira, Atair v Orlu in Deneb v ozvezdju Labod sestavljajo značilni nebesni trikotnik, ki ga lahko opazujemo v jasnih nočeh več mesecev vse od poletja do zime.

Čeprav je zvezda Deneb po
siju šele na dvajsetem mestu, jo
brez težav izsledimo. Deneb pri
pada zvezdam, ki vzhajajo in za-
hajajo. Značilno zanjo je tudi,
da pride v naših krajih pri svo-
jem navideznem gibanju nad ob-
zorjem natančno v nadglavišče ali
zenit. To njeno značilnost bomo
uporabili za zanimiva opazovanja.
Tako lahko ugotavljamo, kje (stran
neba) in kdaj Deneb vzide, kdaj
pride v nadglavišče, kje in kdaj za-
ide. Zapišemo, kaj smo opazili.



Slika 2. Let nebesnega Laboda proti jugu – v repu te ptice leži zvezda Deneb (α Orla), od nas dobrih 800 svetlobnih let oddaljena orjakinja, ki je okoli 45-krat večja od Sonca in seva s svetlobno močjo kar 25 000 Sonc.



Slika 3. Ozvezdje Labod, prikazano v stari zvezdni karti.

Ocenimo lahko časovni presledek med vzidom in zaidom zvezde (toliko časa je namreč Deneb nad obzorjem, če je ves čas vidna, pa je že drugo vprašanje), čas od vzida do prihoda zvezde v nadglavišče ali čas od prihoda zvezde v nadglavišče do njenega zaida. Čase primerjamo med seboj.

Opazujemo s prostim očesom in iz istega opazovališča. Opazovanja lahko prikažemo v tabelarični obliki, npr. takole:

Čas, smer vzida in zaida zvezde Deneb in čas njenega prihoda v zenit

datum	Zvezda					čas nad obzorjem
	vzid	stran neba	zenit	stran neba	zaid	
	ura min		ura min		ura min	
1. 9.						
15. 9.						
1.10.						
...						

Ugotovitve zapišite.¹

Ugotavljamo lahko tudi, kako zvezda sveti, ali je njena svetloba ves čas stalna ali ne in ali zvezda migota (scintilira), kadar jo opazujemo nizko in visoko na vzhodnem delu neba, ob zenitu ter visoko in nizko na zahodnem delu neba. Migotanje zvezde opišemo z besedami: močno, šibko (malo), nič, npr. v taki preglednici:

Migotanje zvezde Deneb

	Kakšno je migotanje zvezde Deneb					
datum	vzhodna stran neba		zenit	zahodna stran neba		opombe
	15° do 20°	30° do 40°	90°	30° do 40°	15° do 20°	
1. 9.						
15. 9.						
1.10.						
...						

Ugotovitve zapišite.¹

Opazovanje, prikazano v prvi tabeli, lahko sicer opravimo tudi z vrtiljivo zvezdno karto ali na računalniku, vendar raje opazujte na prostem, kjer doživite vso veličastnost zvezdnega neba.

Morda se zdijo predlagana opazovanja lahka. Poskusite se jih lotiti. Kmalu boste ugotovili, da zahtevajo celega človeka.

Marijan Prosén

¹ Točko obzorja, kjer vzide in zaide zvezda, to je vzhajališče in zahajališče zvezde; ali se spreminjata vzhajališče in zahajališče zvezde; kako in zakaj se s spreminjanjem višinskega kota spreminja migotanje zvezde itn.

LAŽNIVI KLJUKEC

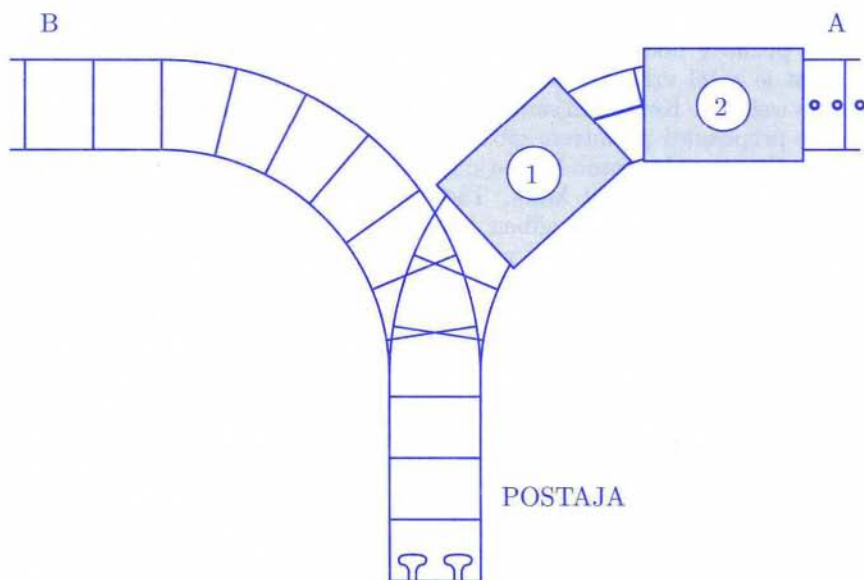
Lažnivi Kljukec se je začel zanimati za astronomijo in opazoval je zvezdnato nebo. "Kako zanimivo!", je poročal prijateljem. "Nebo sem opazoval julija, na Jadranu, da me ponoči ni preveč zeblo. Veličastni Orion je sijal sredi neba, poleg njega, malo bolj na levo in navzdol pa je sijal Sirius. Ko sem ga pogledal skozi močan daljnogled, sem opazil, da sveti kot majhna Luna v prvem krajcu. Tudi Venera je izgledala tako, svetila je še pozno v noč, najlepše sem jo lahko opazoval okrog polnoči. Prav takrat je začel vzhajati Merkur, ki pa ga je zaradi zelo majhne velikosti težko izslediti. Ker imam sam veliko izkušenj z opazovanjem, mi ga ni bilo težko prepoznati po hitrem gibanju okrog Sonca. Prav očitno je bilo, da se ni gibal z enako kotno hitrostjo kot zvezde v ozadju. Prav lahko je bilo opaziti rdečkasti planet Mars. Tudi ta se na nebu ni premikal skupaj z zvezdami, bil je povsem negiben, kot luč na visokem tovarniškem dimniku. V knjižici "Naše nebo" sem pozneje prebral, da je bil takrat v zastojni točki. Kmalu po polnoči je vzšla Luna in ker je bila polna, sem usmeril daljnogled nanjo. Pri največji povečavi sem brez težav videl sledi astronautov na njej, posebej še zastavo, odtisi čevljev pa so bili slabo vidni, ker jih je že spihal veter. Pogled proti Severnici ni bil nič posebnega, ujel pa sem jo tik preden je zašla skupaj z Malim vozom za severno obzorje. Proti jutru sem čakal zvezdo Danico. S tem imenom označimo planet, ki je na jutranjem nebu najsvetlejši. To pot je bil to planet Pluton, ki je svetil še potem, ko se je sij drugih zvezd izgubljal v jutranji zarji. Potem sem opazoval umetne satelite. Podobno kot planeti, sateliti ne sevajo, le odbijajo svetlobo s Sonca. Zato jih vidimo le zvečer in zgodaj zjutraj, ko je Sonce le malo za obzorjem. Izbral sem si takega, ki obkroži Zemljo v desetih minutah, in sem zato kar šestkrat videl njegov veličastni prelet preko neba. Ker se je noč počasi prevešala v jutro, nisem hotel zamuditi sončnega vzhoda. In res se je pokazala velikanska kroglja na obzorju, to pot je bila modra, kar je napovedovalo poslabšanje vremena in deževne dni."

Prijatelji so strmeli in sramovali so se svoje nevednosti, saj sami nikoli niso tako podrobno opazovali neba. Občudovali so Kljukčevo iznajdljivost in se čudili, da je ta zaspane zdržal vso noč pri daljnogledu. Le Petru ni šlo v račun, da je Kljukec tako udobno opazoval ozvezdje Oriona, saj sta z očetom pri tem vedno prezebala. A Kljukcu so vsi verjeli, saj je celo učitelje spravljaj v zadrego s svojim obsežnim znanjem. Morda bi kdo od bralcev le našel kakšno nenavadnost v Kljukčevem poročilu. Izžrebani bralci, ki bodo našli in utemeljili čimveč Kljukčevih laži, bodo dobili vrtljivo zvezdno karto.

Andrej Likar

TEŽAVE POSTAJNEGA NAČELNIKA

V mestu PopPush je znamenita železniška postaja, zgrajena še v prejšnjem stoletju. Žal so bila sredstva za gradnjo takrat zelo omejena. Zato je postaja na slepem tiru, do katerega vodi tir iz smeri A, iz njega pa izhaja tir v smeri B (glej sliko).



Lokalna tradicija je, da vsak vlak, ki pride iz smeri A, nadaljuje pot v smeri B z na določen način preurejenim vrstnim redom vagonov. Predpostavi, da ima vlak, ki prihaja iz smeri A, $N \leq 1000$ vagonov, oštevilčenih naraščajoče: $1, 2, \dots, N$. Postajni načelnik mora vedeti, ali je vagone, ki prihajajo iz smeri A, možno preurediti tako, da bo njihov vrstni red v smeri B enak $a_1, a_2, \dots, a_N$. Enega ali več vagonov lahko z vlaka odpnejo in zapeljejo na postajo, od tam pa na izhodni tir v smeri B. V vsakem trenutku je na postaji lahko poljubno mnogo vagonov. Ko vagon pride na postajo, se ne more več vrniti na tir v smeri A. Prav tako se vagon ne more vrniti nazaj na postajo, ko jo enkrat zapusti v smeri B.

Pomagaj postajnemu načelniku in sestavi program, ki določi, ali je možno dobiti želeni razpored vagonov. Na primer, za podatke 1 3 4 5 2 bo odgovor pritrdilen (Da), za podatke 1 3 5 2 4 pa nikalen (Ne).

Matija Lokar

JURIJ VEGA – Govor v Zagorici marca 1999

Po tradiciji se v okviru občinskega praznika občin Moravče in Dolsko poklonimo tudi spominu na rojaka barona Jurija Vego, ki je bil rojen leta 1754 prav tu, kjer sedaj praznujemo. Naj na kratko osvetlim njegovo delovanje na mnogih področjih. Delo in pomen našega rojaka je podrobno osvetljeno že v mnogih knjigah. Nedavno je ga. Gerlinde Faustmann napisala doktorat, ki tudi obravnava Vegovo delo. Prav dosti novega ni odkrila, z novo najdenimi dokumenti pa je ga. Faustmann znanstveno utrdila mnoga že prej znana dejstva.

Vega je kot profesor na topniški akademiji na Dunaju napisal štiri učbenike višje matematike, mehanike in balistike. Več spisov je sestavil s področja fizike in v podporo metričnemu sistemu, ki so ga tedaj po vzoru iz Francije uvajali tudi v Avstriji. Najpomembnejše delo pa so njegove štiri knjige logaritmov, ki so bile v uporabi vse do prihoda računskih mehanskih strojev in pozneje računalnikov. Posebno Logaritmično-trigonometrični priročnik iz leta 1793 je doživel izdaje v več kot desetih jezikih. Leta 1971 npr. je izšla zadnja, 102. nemška izdaja tega priročnika.

Pomembno področje Vegovega delovanja je tudi balistika. Ni se omejil le na teorijo, saj so po njegovih navodilih tedaj izdelovali možnarje, ki so streljali mnogo dlje kot drugi sodobni. Končno ne smemo pozabiti na njegovo vojaško delovanje. Kot poveljnik topničarjev se je kot avstrijski državljani udeležil mnogih bitk; omenim naj tudi Vegovo odločilno vlogo pri osvoboditvi Beograda izpod Turkov.

Za vojaške in znanstvene zasluge je bil Vega povišan v plemiški stan. Po smrti je bil poimenovan po njem krater na Luni. Njegovo ime nosi tudi vojašnica v dunajskem 14. okrožju, v Ljubljani pa ima ulico. Poleg kipa v Moravčah stoji Vegov kip pred Fakulteto za elektrotehniko v Ljubljani, mavčni odlitek tega kipa pa je v osnovni šoli na Dolskem.

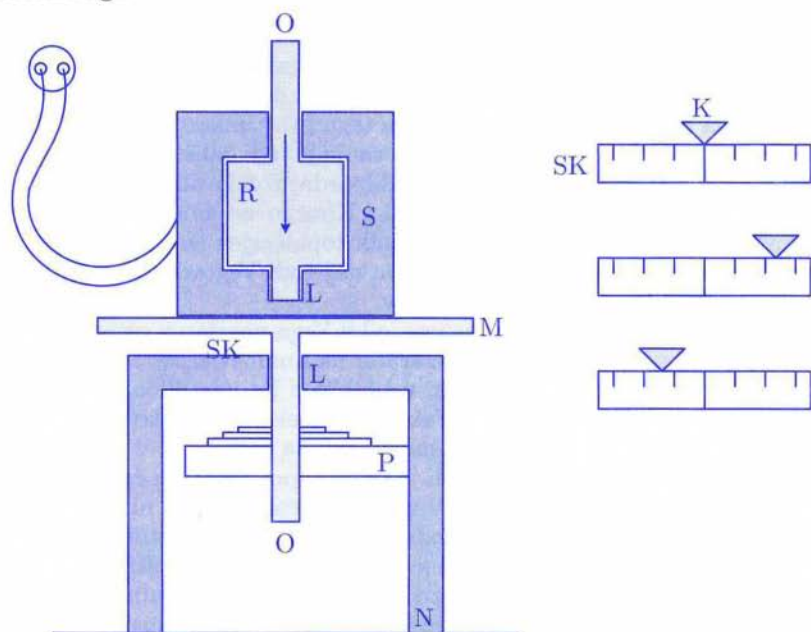
Končno naj se še vprašamo, ali je kljub zaposlenosti in častem baron Jurij Vega ostal zvest domovini. V njegovem času morda ni mogoče govoriti o narodnostni, slovenski zavednosti; moremo pa z gotovostjo trditi, da je bil Vega zaveden Kranjec, ki svojega izvora ni tajil. Kot dokaz navajam, da je proti koncu svojega življenja, ki se je prekmalu in tragično končalo leta 1802, potem, ko je že izgubil večino svoje družine, poslal zbirko svojih znanstvenih del kranjskim deželnim stanovom s pismom, ki izraža hvaležnost za izobrazbo, prejeto v Ljubljani na jezuitski šoli. Prav letos mineva 200 let od tega baronovega plemenitega dejanja.

Vam, občanom Dolskega in Moravč, čestitam k vašemu občinskemu prazniku in k dejstvu, da imate za rojaka svetovno znanega učenjaka, vojskovodjo in zvestega sina domovine – barona Jurija Vego.

Anton Suhadolc

O HELIKOPTERJIH

Članek Mojce Čepič o podmornici na vzmet v Preseku me je spomnil na poskus, pri katerem je vodoravna mizica vrtljiva okoli navpične osi in je preko polžaste povezana z ohišjem. Eno krajišče vzmeti je privito na ohišje, drugo na os mizice, tako da mizica lahko sučno niha. Na mizico je pritrjen majhen elektromotor, vrtljiv okoli navpične osi, ki leži v osi mizice (slika 1). Elektromotor priključimo na izvir napetosti z lahkim ohlapnima žicama. Ko se začne elektromotor vrteti, se mizica odkloni iz začetne lege. Čez čas se motor vrti s konstanto kotno hitrostjo in mizica ni več odklonjena. Ko motor izključimo in se začne zaustavljati, se mizica odkloni na nasprotno stran. Čez čas motor obmiruje in mizica je zopet v začetni legi.



Slika 1. Okvirna risba motorja, mizice in ohišja v prvem delu poskusa: O os, L ležaj, R vrtljivi in S mirujoči del motorja, M mizica, K kazalec, pritrjen na mizico, SK skala, pritrjena na ohišje, P polžasta vzmet, N ohišje. Pri poskusu se pri pogledu od zgoraj vrtljivi del vrti v smeri urnega kazalca. Tako vrtenje zaznamujemo s puščico navpično navzdol; v to smer bi lezel desni sveder, če bi ga vrteli, kakor se vrti opazovano telo. Pred poskusom in dolgo časa po njem mizica ni odklonjena (zgoraj desno), pri pospeševanju, ko motor priključimo, se odkloni na eno stran (v sredini) in pri zaviranju, ko motor izključimo, na drugo (spodaj).

Vrtljivi del motorja na mirujoči del deluje z navorom, ki je enako velik kot navor mirujočega dela na vrtljivi del, a ima nasprotno smer. Tako pravi tretji Newtonov zakon ali zakon o vzajemnem učinku za navore. Mislimo na vrtljivi del motorja. Ko elektromotor priključimo, magneti v mirujočem delu začnejo z navorom delovati na vrtljivi del, ki se zaradi tega pospešeno vrti. Vrtljivi del deluje z nasprotnim navorom na "mirujoči" del, ki se zaradi tega skupaj z mizico odkloni v nasprotno smer, dokler ohišje preko polžaste vzmeti ne uravnovesi tega navora. Čez čas se vrtljivi del enakomerno vrti in mirujoči del nanj ne deluje več z navorom. Teda tudi vrtljivi del ne deluje z navorom na mirujoči del in mizica ni več odklonjena iz začetne lege. Na navor trenja v ležajih se nismo ozirali.

Potem ko motor izključimo, začne navor trenja v ležajih zavirati vrtljivi del. Vrtljivi del deluje na mirujoči del z nasprotno enakim navorom in mizica se odkloni v smer, v katero se vrti vrtljivi del. Čez čas se vrtljivi del zaustavi, nanj ne deluje več navor ležajev in zato ni nasprotnega navora. Mizica zopet ni več odklonjena od začetne lege. Poskus je opisan v prvem delu srednješolskega učbenika *Fizika I.* Kuščerja in A. Moljka.

Poskus lahko nadaljujemo. Na os vrtečega se dela pritrdimo majhen vijak (propeler). Izid poskusa je zdaj drugačen. Mizica je odklonjena tudi, ko se vrtljivi del vrti s konstantno kotno hitrostjo (slika 2). Mislimo na motor kot celoto, h kateri sodi tudi vijak, ne samo na vrtljivi del. Del motorja miruje in del se vrti s konstantno kotno hitrostjo, zato je vsota vseh navorov, ki delujejo na motor, enaka nič. Navor ohišja preko polžaste vzmeti je nasprotno enak navoru zraka na vijak. Kaj se primeri, če polžasto vzmet odvijemo od osi, da mizica z motorjem ni več povezana z ohišjem in se prosto vrti? "Mirujoči" del, to je motor z mizico, se začne vrteti v nasprotno smer kot vijak. A poskus moramo kmalu prekiniti, ker bi se zapletle dovodne žice.

Bralec je že sam ugotovil, da poskusi z motorjem na mizici ustrezajo poskusom s podmornico. Poskus na prosto vrtljivi mizici ustreza poskusu s podmornico v vesoljski ladji, poskus z mizico s pritrjeno polžasto vzmetjo pa poskusu s podmornico v vodi. Navor teže in vzgona na zračni mehur ustreza navoru polžaste vzmeti in nagib podmornice, o katerem priča nagib periskopa, odklonu mizice.

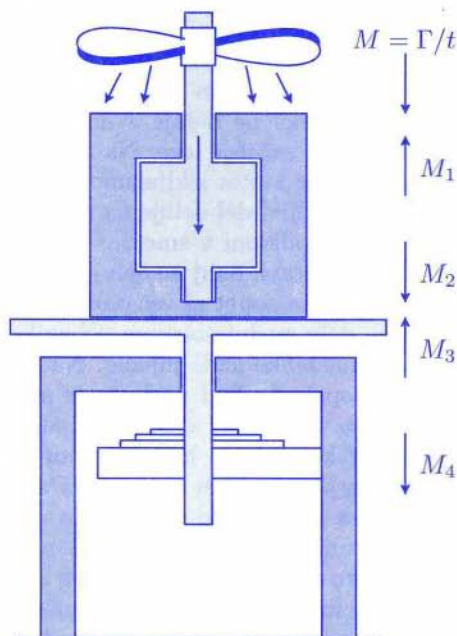
Na poskuse navežemo razmišljanje o *helikopterjih*, ki navpično vzletijo in pristanejo. Vrtljivi del motorja z vijakom ustreza vijaku helikopterja z vrtljivim delom, mirujoči del motorja pa ohišju motorja s trupom helikopterja. Helikopter je bilo veliko teže izdelati kot letalo. Rešiti so morali več tehničnih problemov, od katerih imajo nekateri zanimivo fizikalno ozadje. Med drugim so morali izdelati motor z dovolj veliko močjo in dovolj majhno težo. Krila vijaka poskrbijo za dinamični vzgon ali prečno

silo, ki uravnovesi težo. Za razliko od običajnih letalskih kril, ki so toga povezana s trupom letala, se krila helikoptrskega vijaka gibljejo glede na zrak, četudi helikopter miruje. Helikopter ustreza motorju na mizici, ki je polzasta vzmet ne povezuje s ohišjem. Kako preprečijo, da se trup helikopterja ne vrtil okoli navpične osi v nasprotno smer kot vijak?

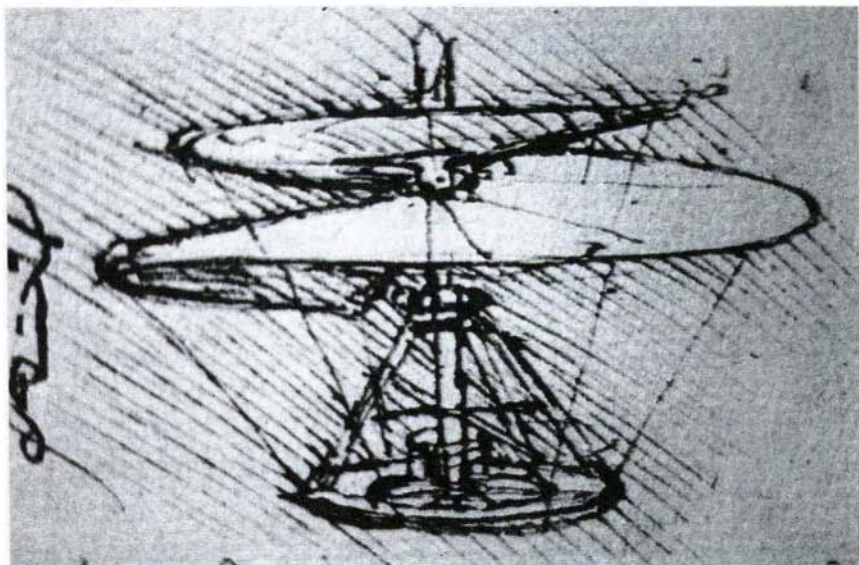
Slika 2. Okvirna risba za drugi del poskusa, pri katerem na os motorja pritrdimo vijak. Krila vijaka so zasukana tako, da zrak potiskajo navzdol. Helikoptski vijaki imajo od dve do pet kril z dolžino od 5 do 12 metrov in več. Vijaki evropskih helikopterjev se vrtijo večinoma v smeri urnega kazalca, če jih gledamo navzdol, ameriški pa v nasprotni smeri. Tu smo se odločili za evropsko smer.

Poučno je pojav podrobneje razčleniti. Sunek sile kril na zrak je po izreku o gibalni količini enak spremembi gibalne količine zraka: $Ft = G - G_0 = -G$, če je G končna komponenta gibalne količine zraka v smeri navpično navzdol. Sila zraka na krila F_1 , je po zakonu o vzajemnem učinku nasprotno enaka sili kril na zrak F in enaka negativnemu toku gibalne količine zraka $F_1 = -F = -G/t$. Tok spremenimo z nagibom kril proti vodoravni ravnini in tako uravnavamo gibanje helikopterja v navpični smeri.

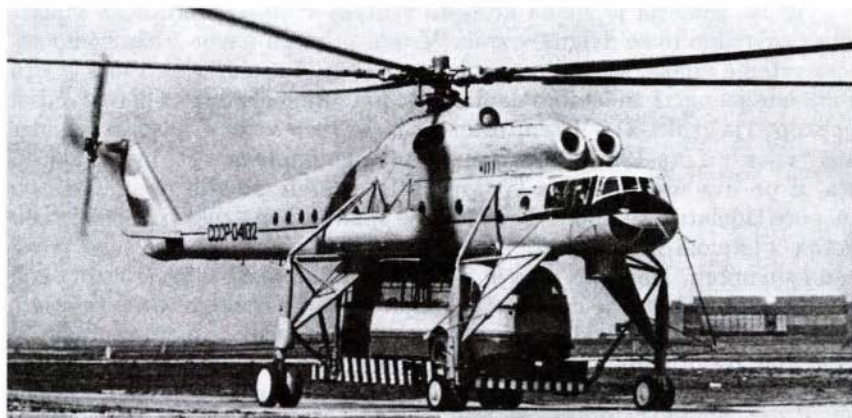
Sunek navora kril je po izreku o vrtilni količini glede na nepremično os enak spremembi vrtilne količine zraka $Mt = \Gamma - \Gamma_0 = \Gamma$, če je Γ končna vrtilna količina zraka. Navor zraka na vijak (vrtljivi del) M_1 je po zakonu o vzajemnem učinku nasprotno enak navoru vijaka (vrtljivega dela) M na zrak in enak negativnemu toku vrtilne količine zraka $M_1 = -M = -\Gamma/t$. Vrtljivi del se vrtil s konstantno kotno hitrostjo, zato je po izreku o ravnotežju vsota navorov enaka nič in je navor zraka na vijak (vrtljivi del) M_1 nasprotno enak navoru mirujočega dela na vrtljivi del M_2 . Po zakonu o vzajemnem učinku je navor vrtljivega dela na mirujoči del M_3 nasprotno enak navoru mirujočega dela na vrtljivi del M_2 . Po izreku o ravnotežju je navor ohišja (polzaste vzmeti) na mirujoči del M_4 nasprotno enak navoru vrtljivega dela na mirujoči del M_3 . Zakon o vzajemnem učinku povezuje navor prvega telesa na drugo telo z navorom drugega telesa na prvo telo, izrek o ravnotežju pa zagotavlja, da je enaka nič vsota navora drugega in navora tretjega telesa na prvo telo, ki miruje ali se enakomerno vrtil. Na motor kot celoto delujeta kot edina zunanja navora navor zraka M_1 in navor ohišja (polzaste vzmeti) M_4 . Izrek o ravnotežju se za motor glasi $M_1 + M_4 = 0$. To sledi tudi iz zveze $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0$, ker sta notranja navora M_2 in M_3 po zakonu o vzajemnem učinku nasprotno enaka in ne vplivata na gibanje motorja.



Iz 14. stoletja je znana kitajska vrtavka v obliki trikrilnega vijaka, ki ga zavrtimo in se dvigne v zrak. V tem primeru navor zraka samo zavira vrtenje vijaka, sestavljenega iz enega kosa. Leonardo da Vinci je leta 1483 narisal načrt za letalno napravo, ki jo imajo nekateri za prvo zamisel helikopterja (slika 3). V tem primeru bi se trup vrtel v nasprotno smer kot "vijak". Leta 1907 so poskusi s francosko napravo s štirimi vijaki, ki sta se po dva in dva vrtela v nasprotnih smereh, zbudili upanje, da bo mogoče izdelati helikopter. Leta 1923 je španski konstruktor naredil velik korak z letalom z običajnim vijakom, a brez krila, ki bi bilo togo povezano s trupom. Namesto tega je imelo štirikrilni vijak, ki se je vrtel okoli navpične osi prosto, ne da bi ga poganjal motor. Letalo je varno pristalo, ko so v veliki višini izključili motor. Vrteči se vijak z navpično osjo je poskrbel, da ni padalo prehitro. Podobno padajo tudi vrteča se semena javora ali črnega bora, ki pa so iz enega kosa. Leta 1936 je nemški konstruktor izdelal helikopter z dvema vijakoma, ki sta se vrtela v nasprotnih smereh. Nekateri mislijo, da je bil to prvi pravi helikopter. Po podobnih načrtih drugega nemškega konstruktorja iz leta 1940 so izdelali že tisoč helikopterjev.



Slika 3. Ena od najznamenitejših risb Leonarda da Vincija kaže načrt za letalni stroj, v katerem je mogoče videti prvo zamisel helikopterja. Na kovinsko ogrodje z radijem 4,8 metra je napeto platno v obliki vijačne ploskve. Vijak naj bi preko vzvodov poganjali ljudje, ki bi hodili po ogrodju, ali z vrvjo, navito na os. Ob risbi je besedilo: "Mislim, da se bo vijačna naprava v zraku [...] dvignila, če bo dobro narejena, to je iz poškrbljenega platna (da bodo zaprte vse pore), in se bo hitro vrtela."



Slika 4. V šestdesetih letih so uporabljali ruski tovorni helikopter MI-10 z enim glavnim vijakom in z manjšim vijakom z vodoravno osjo na repu po zamisli I. Sikorskega (zgoraj) in helikopter Boeing Vertol 107 za prevoz potnikov z dvema glavnima vijakoma, ki se vrtita v nasprotnih smereh (spodaj).

Dotlej so imeli vsi helikopterji dva vijaka na eni osi ali dveh vzporednih oseh, ki sta se vrtela v nasprotnih smereh, tako da je bil skupni navor zraka na vijaka glede na težišče helikopterja enak nič in se zaradi tega trup ni vrtel. Leta 1941 pa se je Rus Igor Sikorsky v ZDA prvič dvignil s svojim helikopterjem z enim glavnim vijakom z navpično osjo. Na repu je imel helikopter manjši vijak z vodoravno osjo. Prečna sila zraka

na manjši vijak povzroči navor glede na težišče helikopterja, ki uravnovesi navor zraka na večji vijak. Z nagibom kril manjšega vijaka glede na navpično ravnino uravnavajo prečno silo in dosežejo, da trup helikopterja miruje ali se okoli navpične osi vrti v eno ali drugo stran. Sikorsky je prve poskuse delal s tremi manjšimi vijaki na repu, ker je mislil, da je treba uravnovesiti navore okoli treh osi. Potem je uvidel, da zadostuje en sam manjši vijak in da je tak helikopter celo stabilnejši. Večina današnjih helikopterjev sledi zamisli Sikorskega, samo manjši del helikopterjev ima dva glavna vijaka (slika 4). Helikopterji so pomembni za transport ljudi in tovara, posebno na težko dostopne kraje, in pri reševanju ljudi ob raznih nesrečah. Uporabljajo jih – žal – tudi v vojaške namene.

Janez Strnad

O MOJSTRU IN ORODJU

Za devetimi gorami in devetimi vodami je živel mizar Janez. Ker so bili njegovi izdelki res lepi in dobro narejeni, je slovel daleč naokoli. Tudi iz daljnjih dežel so prihajali k njemu naročat omare, skrinje, mize in druge najrazličnejše izdelke. Ni je bilo stvari, ki je ne bi znal narediti. V isti vasi pa je živel še en mizar, Polde po imenu. Ker mu je šel posel slabo, je bil ljubosumen na Janezovo slavo in uspeh. Kar naprej je tuhtal, v čem neki je Janez boljši od njega. Tako se je nekega večera pritihotapil pod okno mizarske delavnice in prisluškoval. Zaslišal je Janeza, ki je govoril: “No, moj čudežni oblič, še tole desko zgladiva, pa bo dovolj za danes. Kaj bi brez tebe, ti moje čudežno orodje!” “Aha, tu je Janezova skrivnost! Saj sem vedel, da ni nič boljši mizar kot jaz, le čudežni oblič ima!” si je mislil Polde. Sredi noči se je ponovno priplazil do Janezove delavnice in mu ukradel oblič. Toda nič ni pomagalo. Janezovi izdelki so bili še vedno lepi, Poldetovi pa skrpucala...

Na to zgodbico sem se spomnil pred kratkim, ko sem v roke dobil novo računalno podjetja Texas Instruments TI-89. Pripomoček, ki po velikosti ni večji od običajnega računalna, “obvlada” zelo veliko matematike, skratka je nekakšno čudežno orodje. A svojo pravo veljavo pokaže le v rokah pravega mojstra. Še vedno je potrebno vedeti, kdaj in kako uporabiti določen postopek, ki je v računalno vgrajen. Razmišljati namesto nas verjetno na srečo (ali smolo) noben pripomoček ne bo nikoli znal.

Računalna, priprave, ki omogočajo, da brez zapletenih postopkov, brskanja po tablicah ali zamudnega računanja “peš”, ugotovimo, koliko je $1132 \cdot 234$, $64/578$, $\sin(34.89)$... so že tako prisotni v vsakdanjem življenju,

da si matematike (predvsem njene uporabe) brez njih praktično ne znamo več predstavljati. TI-89 pa je računal, ki obvlada tudi tako imenovano simbolno računanje. Simbolno računanje je, kot namiguje že ime samo, računanje s simboli. Tako kot z računalom zmnožimo dve števili, s simbolnim računalom zmnožimo dva izraza (npr. $(a + b^2) \cdot (2ab - c^3)$), izračunamo razcep števila na prafaktorje, določimo odvod funkcije $\sin(\cos(\ln(x)))$, narišemo graf funkcije, rešimo enačbo, poiščemo nedoločeni integral funkcije...

Kot smo že omenili, zmožnosti tega računalu in podobnih pripomočkov še ne pomenijo, da lahko pozabimo na učenje matematike. Kot nas uči tudi zgodnica, bo še tako zmogljivo orodje v rokah nekoga, ki ga ne bo znal uporabljati, povsem neuporabno. Že pri veliko manj zmogljivemu pripomočku, običajnem računalu, je tako. Če bi morali za vsak račun, denimo $2 \cdot 3$, posegati po računalu, bi hitro ugotovili, da ne pridemo nikamor. Računalu nam tudi nič ne pomaga, dokler ne vemo, kaj z njim sploh početi. Poglejmo zelo enostaven primer. Kupili bi radi 15 kg jabolk. Ta stanejo 78.5 tolarjev za kilogram. Koliko denarja potrebujemo? Pri reševanju naloge si bomo pomagali z računalom, a še vedno bomo potrebovali matematično znanje. Tako bomo morali kar sami ugotoviti, da do rešitve pridemo tako, da zmnožimo 15 in 78.5. Pri "golem" računanju res uporabimo računalu in ugotovimo, da je to 1177.5. Kaj pa če smo se "zatipkali" in pri ceni namesto 7 vtipkali 1? Računalu bo slepo izpolnilo ukaz in izračunalo 262.5. Spet potrebujemo določeno znanje, da vemo, da je tukaj nekaj narobe. In ker so programi za simbolno računanje še precej bolj zmogljivi pripomočki, je potrebno za njihovo uspešno uporabo tudi ustrezno znanje matematike. Skratka – različni pripomočki so sicer koristna stvar, vendar jih moramo znati uporabljati. To znanje ne pomeni le poznavanja gole tehnike pritiskanja na gumbe oz. izbiranja ukazov, ampak vedenje o tem, na kakšen način lahko pripomoček uporabljamo, kako mu pripraviti podatke, kaj narediti z rezultati...

Pa si malo podrobneje oglejmo to naše orodje. Na prvi pogled je videti kot običajno računal, le nekaj nenavadnih tipk je še na njem. Prižgimo ga. Na zaslonu vidimo drugačen prizor, kot bi ga od računalu



pričakovali. Vse skupaj je podobno, kot če bi sedeli za nekim starejšim programom na računalniku. S tipkami F1, F2... odpiramo menuje, s pomočjo modro obarvanih tipk s puščicami se po teh menutih sprehamo, s tipko označeno z ESC podobno kot pri programih na računalnikih menuje zapiramo... Glede na to, da je to le računalno, poskusimo z njim nekaj izračunati. Natipkajmo 5×3 in pritisnimo na tipko Enter. Na zaslonu zagledamo tako naš račun kot tudi rezultat. Poskusimo vnesti še $5 \times 12 - 3 / 7$. Ker smo se pri tipkanju zmotili in dvakrat pritisnili na znak za deljenje, se izraz ni vnesel in smo ga morali popraviti. Torej lahko pri TI-89 izraze med vnosom popravimo, na zaslonu pa vidimo poleg rezultata tudi vnešeni izraz. Ko vnesemo zadnji izraz, namesto rezultata oblike 59.5714 ali kaj podobnega, dobimo ulomek $417/7$. TI-89 torej računa točno in ne počne "neumnosti" kot običajna računalna, ki $1/3$ proglasijo za 0.333333. Če se še malo igramo z "večnadstropnimi ulomki", vidimo, da jih TI-89 lepo uredi v enonivojske ter jih še okrajša. Kaj bi dal za tako orodje takrat, ko sem moral reševati dolge stolpce računov, ki so zahtevali prav to!

Še ena tipka pritegne našo pozornost. Na njej piše CATALOG. Pritisnimo jo. Odpre se okence, v katerem so zbrani vsi ukazi, ki jih pozna TI-89. Za malo morje jih je! Z njimi lahko razstavljamo polinome, računamo razcep števila na praštevila, rišemo funkcije, rešujemo enačbe, računamo s kompleksnimi števili, tabeliramo vrednosti funkcij ter počnemo še tisoč in eno stvar, za katere morda prej sploh nismo vedeli, da obstajajo. Torej bo potrebno kar nekaj časa, preden bomo vsaj približno spoznali vse možnosti, ki jih računalno nudi.

Računalno TI-89 nam omogoča, da z njegovo pomočjo gradimo res lepe matematične izdelke, ki nam bodo v ponos in v veselje. Seveda pa bo to možno le, če bomo dovolj "pravi" mojstri in ne bomo, tako kot Polde, pričakovali, da bo že orodje samo iz nas naredilo mojstra.

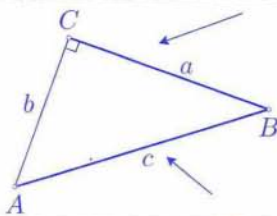
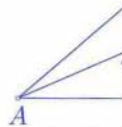
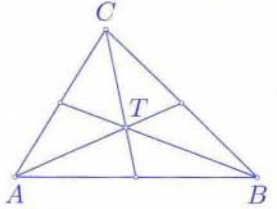
Matija Lokar

PRELAGANJE ŽETONOV – Rešitev s str. 266

Nihče. Igre ni moč dobiti. Po vsaki potezi ostane število žetonov na dveh kupih nespremenjeno, na tretjem kupu pa se spremeni za sodo število (ker je vsota dveh lihih števil sodo število). Na posameznem kupu je torej vedno liho mnogo žetonov in praznega kupa ni moč doseči.

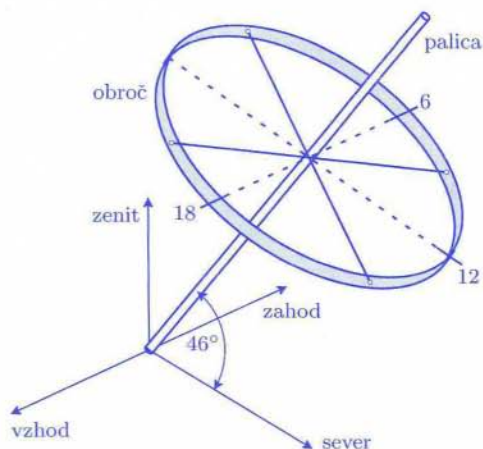
Dragoljub M. Milošević, prir. Marija Vencelj

KRIŽANKA O TRIKOTNIKU

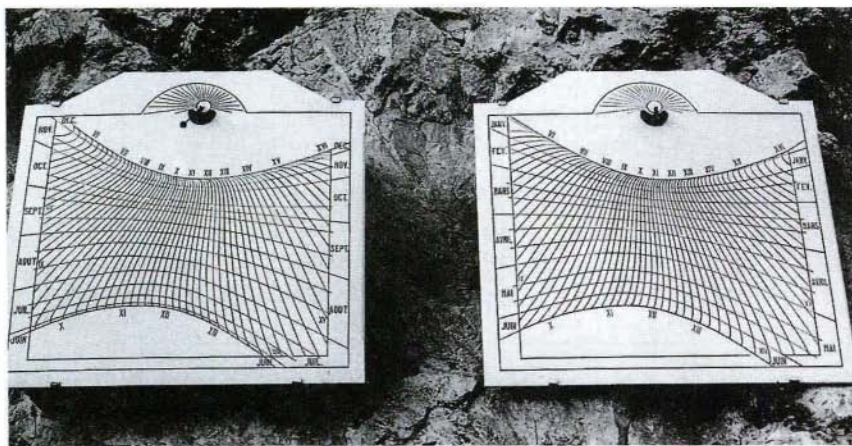
			VELIK DOMAČI PTIČ Z MOGOČNIM REPOM		TRAVA DRUGE KOŠNJE	MNOGO-CELIČAR	ZAZNAVA S PRSTI	ČAČAK		
			PODPORA							
			GRŠKI JONSKI OTOK							
MESTECE NA ZAČETKU POLOTOKA PELJEŠCA			NAŠI JUŽNI SOSEDI					EVROPSKA OTOKŠKA DRŽAVA	ELEKTRIČNI ŠTEVEČ	OBČINA P L J U B L J A
1000 M										
ČOLN ZA ENEGA VESLAČA				AMERIŠKI JELEN						
				NAJDAJŠA FR. REKA						
ZNAČILEN PREDSTAVNIK			KRČEVINA				VELIK ČRN HROŠČ			
			ZUNANJI DEL LOKALA				GR. ANTIČNO MESTO			
MESTO OB KRIVAJI V BOSNI					SIBIRSKO VELEMESTO					DISCIPLI UKREP
					OROČJE Z REZILOM					SVETO RI NJE TEL
KOT, KI GA OKLEPATA STRANICI TRIKOTNIKA										
PODZEMNA ŽELEZNICA						KOS KAMNINE				
NEMŠKI AVTOMOBILSKI KONSTRUKTOR (KARL)						CESTNI ROB				
ANGLEŠKI DRAMATIK JONSON			SL. SLIKAR (ANTON)					OVALEN LIK		
			TIROLSKO MESTCE					DENIS ŽVEGELJ		
TOK ZA OČALA				STAR NARKOTIK	DVOSPOLNIK					
					ŠPRANJA					
ČLOVEK, KI NIMA MERE									KOLOS	
									KAR SE NABERE, ZBIRKA	
KAR JE ZRASLO SKUPAJ							RUSKA JUHA IZ MESA IN ZELJA	IGLAVEC		
								JEZERO IN DRŽAVA V AFRIKI		
										
			LASTNIK AMERIŠKE FARME							
			OPERA SKLADATELJA GIUSEPPEJA VERDIJA							

ZAPLETENA SONČNA URA

Menil sem, da je sončna ura zelo preprosta naprava. Naradimo jo tako, da postavimo palico v navpično ravnino, ki seka vodoravno ravnino v smeri sever-jug, in jo nagnemo proti severu za kot 46° . Tako je palica vzporedna osi, okoli katere se vrtil Zemlja. Na palico nataknemo obroč s številčnico (slika 1), obroč naravnamo, da kaže ura prav, in potem kaže prav v vsakem času, poleti in pozimi, če je le sončno vreme. Kot kaže slika 2, pa ni vse tako preprosto. Na prikazani uri so zarisane zapletene črte, ki povezujejo mesto sence ob istih urah v različnih obdobjih leta.



Slika 1.



Slika 2.

Kako to? Ali gre za uro in koledar hkrati? Ali se Zemlja ne vrtil enakomerno okrog svoje osi? Morda pa bo kdo od bralcev znal pojasniti to zapletenost?

Andrej Likar

KOCKE IZ ZLATA

Faraon je dal predse privesti svojega zlatarja in mu naročil: “Do jutra mi boš iz tega velikega kupa lesketajočih se zlatih zrn naredil štiri kocke za dar bogovom. Toda pazi! O daru sem se posvetoval s svečeniki. Ti zahtevajo, da so kocke različno velike in da je rob vsake kocke, merjen z debelino mojega palca, celo število, manjše od 12. Vsota robov najmanjše in največje kocke mora biti enaka 13 debelin palca, enako naj velja za vsoto robov ostalih dveh kock. Da potolažimo jezo bogov, moraš porabiti zlato do zadnjega zrna. Če naročila ne boš natančno izpolnil, boš umrl.”

Trepetajoči zlatar se je vročično spravil k delu, tehtal in talil je zlato ter računal in računal. Končno je našel štiri dolžine za robove kock, ki so ustrezale vsem faraonovim zahtevam, razen eni: rob največje kocke je meril 12 faraonovih palcev. Obupan se je zlatar odločil tvegati faraonovo jezo in tik pred zoro je dokončal delo.

Ob zori je bil usmrčen.

Navedi dimenzije kock, ki bi jih zlatar moral narediti, in kakšne so bile dimenzije kock, ki jih je naredil?

Marija Vencelj

IŠČEMO BESEDO

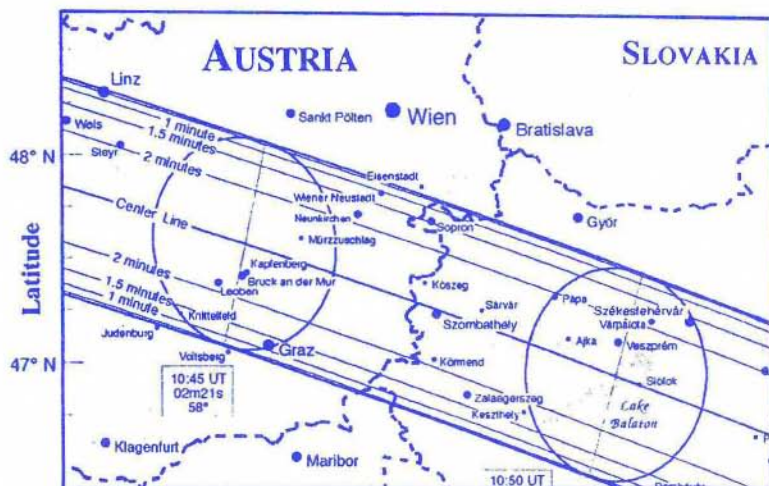
Če imamo na razpolago n različnih črk, lahko iz njih sestavimo $n!$ različnih besed, v katerih vsaka črka nastopa natanko enkrat. Pri tem pojem beseda označuje poljubno (končno) zaporedje znakov. Seveda pa tako zaporedje le redkokdaj določa besedo slovenskega jezika. Iz črk **a**, **h** in **m** lahko tako sestavimo naslednje besede:

ahm, amh, ham, hma, mah, mha.

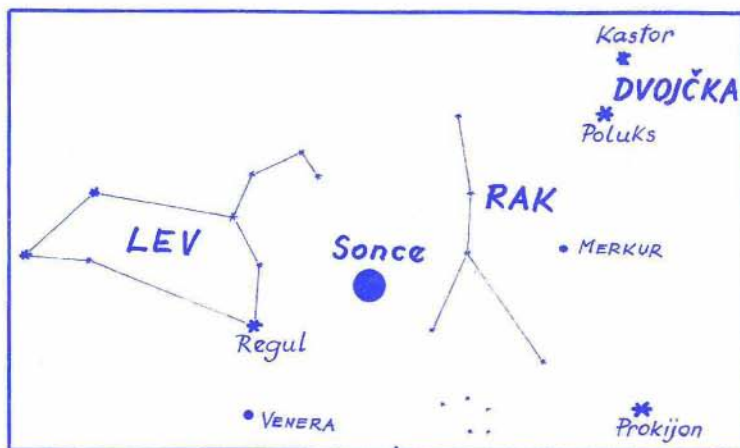
Vaša naloga je, da v enem od svojih priljubljenih programskih jezikov sestavite program, ki kot vhod vzame skupino n različnih črk in naravno število k ter med $n!$ različnimi besedami, ki jih lahko dobimo z razmeščanjem danih črk, poišče tisto, ki je pri ureditvi po abecedi na k -tem mestu. Pri črkah **a**, **h**, **m** in številu $k = 3$ je to beseda **ham**. Poskusite še, kakšen odgovor dobite pri črkah **a**, **b**, **o**, **r**, **v** in številu $k = 38$.

Martin Juvan

POPOLNI SONČEV MRK DNE 11. 8. 1999



Slika 1. Takole bo Lunina senca oplazila skrajno severni del Slovenije, od koder bo viden popolni Sončev mrk. Iz drugih krajev v naši državi pa bo viden delni mrk. Ostale podatke preberete s skice, ki smo jo posneli z Interneta.



Slika 2. Ob popolnem mrku bomo v jasnem vremenu visoko na nebu okoli od Lune zatemnjenega Sonca lahko opazovali svetle zvezde Prokijon, Regul, Kastor in Poluks, od planetov pa Venero in Merkur.

Marijan Prosén

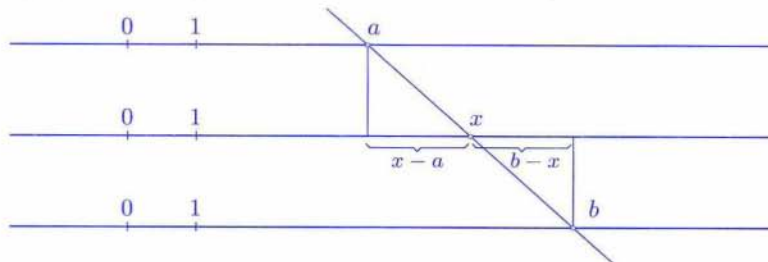
RAČUNALO ZA SEŠTEVANJE V PETIŠKEM SESTAVU – Rešitev s str. 279

Za začetek ne spreglejmo dveh osnovnih resnic:

- Pri izbranih slikah števil 0 in 1 se v dano točko številske premice upodobi natanko določeno število, ne glede na to, v kakšnem številskem sestavu smo ga zapisali. Npr.: Šest enot v pozitivni smeri od števila nič leži slika števila šest, ki ga lahko zapišemo kot 6 v desetiškem sistemu, 11 v petiškem, 110 v dvojiškem itd.
- Vsota števil je odvisna le od vrednosti seštevancev in prav nič od tega, kako smo seštevance in vsoto zapisali.

Iz obojega sledi, da moramo preveriti le naslednjo trditev: Točka, ki leži ob ravnilu na srednji številski premici, je slika vsote števil, katerih sliki sta točki ob ravnilu na zunanjih premicah.

Naj bodo številske premice v taki medsebojni legi, kot je bilo opisano v nalogi, le enote naj bodo na vseh treh začetni premislek enako velike.



Če sta a in b seštevancev, upodobljena ob ravnilu na zunanjih premicah, je na srednji premici ob ravnilu upodobljena njuna aritmetična sredina $\frac{a+b}{2}$ (v narisanim primeru, za katerega je $a < b$, sledi to iz enačbe $x - a = b - x$; podobno premislamo, če je $a \geq b$).

Naj bo sedaj enota na srednji premici enaka polovici enote na zunanjih premicah. V vsako točko na tako umerjeni srednji premici se upodobi dvakrat tolikšno število kot v narisanim primeru. Za našo nalogo to pomeni, da se v točko ob ravnilu na srednji premici upodobi število $2 \cdot \frac{a+b}{2} = a + b$. Računalo torej vedno pravilno sešteva.

Kako lahko računalo uporabimo za odštevanje, ste gotovo že sami ugotovili.

Tudi na vprašanje, kako napraviti podobna računalna za seštevanje v drugih številskih sestavih, smo spotoma že odgovorili. Le točke na številskih premicah moramo označiti v željenem številskem sestavu.

Marija Vencelj

KOCKE IZ ZLATA – Rešitev s str. 355

Predpostavimo seveda, da so bili svečeniki nezmotljivi in da je torej naloga, zastavljena zlatarju, rešljiva.

Pare kock, z vsoto robov enako 13, predstavljajo naslednji pari celih števil: (1, 12); (2, 11); (3, 10); (4, 9); (5, 8) in (6, 7).

Ker je nesrečni zlatar v svojem usodnem poskusu porabil vse zlato, moramo iz teh parov izbrati dvakrat po dva para tako, da bo vsota prostornin štirih kock prvega izbora enaka vsoti prostornin štirih kock drugega izbora. Edina možna rešitev te naloge je

$$2^3 + 11^3 + 3^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3 + 5^3 + 8^3 = 2366.$$

Zlatar je izdelal kocke z robovi 1, 5, 8 in 12 faraonovih palcev, morale pa bi meriti 2, 3, 10 in 11 palcev.

Marija Vencelj

KRIŽANKA "PLANETI NAŠEGA SONCA" –
Rešitev s str. 288

Luna ☾										Zemlja ☿										Sonce ☼										Zemlja ☿									
										K O N J U N K C I J A										S o n c e										Z e m l j a									
MESECE ME																																							

MILNI MEHURČEK – Rešitev s str. 327

Prostornina krogle s polmerom r je $V(r) = 4\pi r^3/3$, površina sfere, ki tvori njen rob, pa $S(r) = 4\pi r^2$. Če se polmer krogle zveča za Δr , se njena prostornina in površina njenega roba povečata za približno

$$\Delta V \approx V'(r) \cdot \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r \quad (1)$$

$$\Delta S \approx S'(r) \cdot \Delta r = 8\pi r \Delta r. \quad (2)$$

Od tod iz enačbe (2) dobimo

$$\Delta r \approx \Delta S / (8\pi r). \quad (3)$$

In iz (1) in (3) potem še

$$\Delta V \approx r \Delta S / 2. \quad (4)$$

V našem primeru je $r = 7 \times 10^6$ m in $\Delta S = 1$ m². Od tod nam formuli (3) in (4) dasta

$$\Delta r \approx 1 / (56\pi) \times 10^{-6} \text{ m} \approx 56 \text{ nm}$$

in

$$\Delta V \approx 7 \times 10^6 / 2 \text{ m}^3 \approx 3.5 \times 10^6 \text{ m}^3.$$

Polmer se torej poveča za približno 56 nanometrov, zajeta prostornina pa za približno 3,5 milijone kubičnih metrov.

Vprašanje: Problem lahko rešimo tudi bolj eksaktno, brez uporabe približkov, ki nam jih da diferencialni račun. Poskusi to narediti. Koliko najmanj decimalnih mest mora imeti tvoj žepni računalnik, da ti lahko da smislen rezultat? Ali je tako reševanje smiselno?

Tomaž Slivnik, ml.

KOLIKO BESED – Rešitev s str. 337

Pri nalogah, ki zahtevajo ugotavljanje števila določenih objektov, v našem primeru besed, moramo biti temeljiti, da upoštevamo res vse objekte, in previdni, da nobenega objekta ne upoštevamo večkrat. Velikokrat prešteevamo tako, da vpeljemo pomožne količine, ki štejejo objekte s posebnimi lastnostmi, poiščemo zveze med temi količinami in nato s pomočjo teh zvez izračunamo iskane vrednosti.

Poglejmo, kako opisani pristop uporabimo pri štetju različnih besed, sestavljenih iz dane skupine znakov. Za vpeljavo pomožnih količin bomo

izbrali dve lastnosti: skupino znakov, ki jih lahko uporabimo za sestavljanje besed, in dolžino sestavljene besede. Tako ne bomo šteli le, koliko besed lahko sestavimo iz danih znakov, ampak bomo vedno vedeli tudi, koliko besed je posamezne dolžine. Skupino znakov, iz katerih sestavljamo besede, bomo postopno povečevali, dokler ne bo obsegala vseh znakov besede **MATEMATIKA**.

Poiskati moramo še zveze med pomožnimi količinami. Vzemimo skupino znakov, označimo jo z $\mathcal{B}$, in recimo, da že vemo, koliko besed posamezne dolžine lahko sestavimo iz znakov iz $\mathcal{B}$. Označimo te vrednosti z $B_1, B_2, \dots$. Za $\mathcal{B} = \{A, A, A\}$ imamo npr. $B_1 = B_2 = B_3 = 1$ in $B_i = 0$ za $i \geq 4$. Dodajmo v $\mathcal{B}$ še k kopij znaka, ki v $\mathcal{B}$ še ne nastopa, označimo novo, večjo skupino znakov z $\mathcal{B}'$ in naj bo $B'_i, i = 1, 2, \dots$, število različnih besed dolžine i , ki jih lahko sestavimo iz znakov iz $\mathcal{B}'$. Potem velja

$$B'_i = \sum_{j=0}^k \binom{i}{j} B_{i-j}. \quad (*)$$

Pri tem moramo vzeti $B_0 = 1$ in $B_i = 0$ za $i < 0$. Simbol $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ je binomski simbol, ki pove, koliko različnih podmnožic moči j ima množica z i elementi. Tudi tu je $\binom{i}{j} = 0$ za $i < j$.

Pojasnimo, kako pridemo do formule (*). Vzemimo besedo dolžine i , sestavljeno iz znakov iz $\mathcal{B}'$. Ta lahko vsebuje $0, 1, \dots, k-1$ ali k pojavitev novega znaka (tistega, ki ga ni v $\mathcal{B}$). Koliko je teh pojavitev, označuje indeks j . Beseda je torej sestavljena iz i znakov, od katerih je j kopij novega znaka. Tako imamo $\binom{i}{j}$ možnosti za izbiro mest, na katera postavimo kopije novega znaka (kopij novega znaka med seboj seveda ne ločimo), preostalih $i-j$ mest pa "zapolnimo" z besedo dolžine $i-j$, sestavljeno le iz znakov iz $\mathcal{B}$. Za različne podmnožice in različne besede dolžine $i-j$ seveda dobimo različne besede dolžine i .

Za ogrevanje preštejmo, koliko različnih besed lahko sestavimo iz znakov besede **PRESEK**. Štetje bomo opravili v petih korakih, ker v besedi **PRESEK** nastopa pet različnih črk. Računanje je manj zapleteno, če najprej dodajamo tiste črke, ki nastopijo večkrat, kasneje pa tiste, ki nastopijo manjkrat. Tako imamo

znaki	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
EE	1	1	0	0	0	0

Dodamo (eno kopijo) znaka K. Formula (*) pravi, da je

$$B'_i = B_i + i \cdot B_{i-1}.$$

Tako dobimo (namesto B'_i zopet pišemo B_i)

znaki	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
EEK	2	3	3	0	0	0

Po vrsti dodamo še znake P, R in S ter izračunamo

znaki	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
EEKP	3	7	12	12	0	0
EEKPR	4	13	33	60	60	0
EEKPRS	5	21	72	192	360	360

Vsota števil v zadnji vrstici je 1010, toliko, kolikor je bilo omenjeno v besedilu naloge.

Sedaj pa k nalogi. Štetje besed, sestavljenih iz znakov besede MATEMATIKA, poteka enako kot pri besedi PRESEK, le računsko je nekoliko zahtevnejše. Ker v besedi MATEMATIKA nastopa 6 različnih črk, bomo izračun opravili v šestih korakih. V besedi največkrat nastopa črka A, zato bomo začeli z njo. Črki M in T nastopata po dvakrat, torej bomo formulo (*) morali uporabiti tudi za $k = 2$. Tedaj se le-ta glasi

$$B'_i = B_i + i \cdot B_{i-1} + \frac{i(i-1)}{2} \cdot B_{i-2}.$$

Prvi trije koraki so torej

znaki	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
AAA	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
AAAMM	2	4	7	10	10	0	0	0	0	0
AAAMMTT	3	9	25	62	130	210	210	0	0	0

Ko dodajamo posamezne znake, je zveza za člen krajša

$$B'_i = B_i + i \cdot B_{i-1}.$$

Tako dobimo

znaki	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
AAAMMTTE	4	15	52	162	440	990	1680	1680	0	0
AAAMMTTEI	5	23	97	370	1250	3630	8610	15120	15120	0
AAAMMTTEIK	6	33	166	758	3100	11130	34020	84000	151200	151200

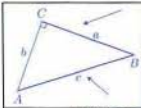
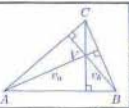
Pri koncu smo. Število besed, ki jih lahko sestavimo iz znakov besede **MATEMATIKA**, je enako vsoti števil iz zadnje vrstice razpredelnice

$$6+33+166+758+3100+11130+34020+84000+151200+151200 = 435613.$$

Če ste pri volji za računanje, lahko preštejete še, koliko različnih besed lahko naredimo iz znakov besed **FIZIKA**, **ASTRONOMIJA** in **RAČUNALNIŠTVO**. Če se rajši ukvarjate z računalniki, lahko poskusite napisati računalniški program, ki bo štetje opravil namesto vas. Če pa ste bolj "razmišljujoče" narave, lahko poskusite poiskati še kakšno dodatno zvezo oz. lastnost, ki bo olajšala računanje, ali pa si celo izmislite svoj postopek za štetje različnih besed. Na primer, gotovo ste opazili, da sta v vseh vrsticah razpredelnice zadnji (neničelni) števili enaki.

Martin Juvan

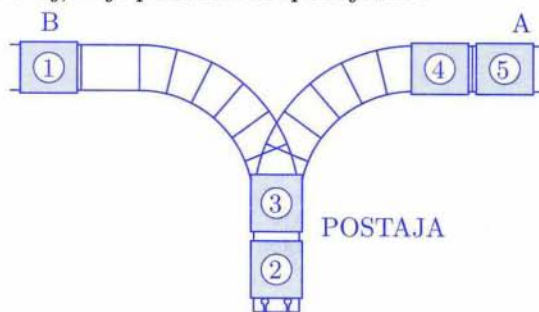
KRIŽANKA O TRIKOTNIKU – Rešitev s str. 352

	VEŠE TROKOTNE PUNE Z SLOVENSKIM REŠENJEM	TRIN TRIN TRIN	MOŠKO MOŠKO MOŠKO	ZADNJA ZADNJA ZADNJA	ČAKO		PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV	ČUDNO ČUDNO ČUDNO	ANIMIRAN ANIMIRAN ANIMIRAN	ENI ENI ENI	POSREDOV POSREDOV POSREDOV	SKUPAJ SKUPAJ SKUPAJ	GLAVNO GLAVNO GLAVNO	
POVRHNO POVRHNO POVRHNO	P	O	M	O	Č		S	P	R	E	V	O	D	
POVRHNO POVRHNO POVRHNO	K	A	T	E	T	A	V	I	Š	I	N	S	K	A
PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV	H	R	V	A	T	I	T	I	M	E	S	K	O	K
ČAKO ČAKO ČAKO	S	K	I	F	V	A	P	I	T	I	O	C	E	N
ANIMIRAN ANIMIRAN ANIMIRAN	T	I	P	L	A	Z	R	O	G	A	Č	T	O	N
POVRHNO POVRHNO POVRHNO	O	L	O	V	O	M	S	K	U	K	O	R	K	S
ČUDNO ČUDNO ČUDNO	N	O	T	R	A	N	J	I	K	O	T	A	P	A
PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV	M	E	T	R	O	K	A	M	E	N	A	L	T	A
ANIMIRAN ANIMIRAN ANIMIRAN	B	E	N	A	Ž	B	E	L	I	P	S	A	P	A
ČUDNO ČUDNO ČUDNO	E	T	U	I	A	N	D	R	O	G	I	N	L	E
PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV	N	E	Z	M	E	R	N	E	Ž	V	E	L	I	K
ČUDNO ČUDNO ČUDNO	Z	R	A	S	T	E	K	B	O	R	K	O	N	K
	T	E	Ž	I	Š	Č		G	A	T	O	H	I	O
ČUDNO ČUDNO ČUDNO	R	A	N	Č	A	R		E	U	L	E	R	J	E
PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV PREMIŠLJIV	A	I	D	A				K	R	O	Ž	N	I	C

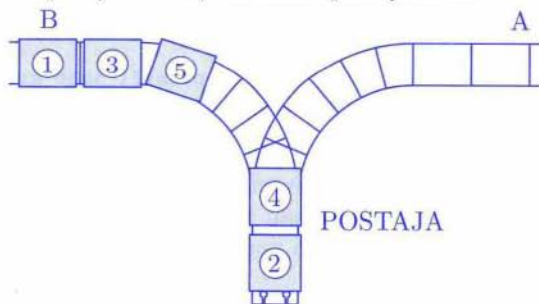
TEŽAVE POSTAJNEGA NAČELNIKA – Rešitev s str. 342

Ideja rešitve je, da simuliramo sestavljanje preurejenega vrstnega reda vagonov. Denimo, da na izhodnem tiru (smer B) potrebujemo vagon številka k . Na postaji so čakajoči vagoni vedno urejeni padajoče. Ker moramo s postaje najprej premakniti prvi čakajoči vagon, pogledamo samo tega. Če to ni vagon številka k , je možno, da je iskani vagon še vedno sestavni del vlaka na vhodnem tiru (smer A). Če vagona tam ni, želene razporeditve ni moč dobiti. Ker so vagoni na tiru A urejeni po vrsti, tudi tam pogledamo le prvega. Če ima številko manjšo ali enako k , prepeljemo vse vagona do k -tega na postajo.

Poglejmo primer. Denimo, da bi radi dosegli razporeditev 1 3 4 5 2. Najprej prepeljemo vagon številka 1 na izhodni tir. Na naslednjem koraku potrebujemo vagon številka 3. Zato vagona 2 in 3 zapeljemo na postajo in dobimo položaj, ki je prikazan na spodnji sliki.



Vagon številka 3 odpeljemo na izhodni tir, nato pa nanj prepeljemo še vagona številka 4 in 5, prav nazadnje pa s postaje odpeljemo še vagon številka 2. Če pa bi bila želena razporeditev 1 3 5 2 4, pač ne bi šlo. Začeti bi morali tako kot prej. Ko bi na tir B prepeljali vagon številka 5, bi bili vagoni razporejeni tako, kot kaže spodnja slika.



Iz tega položaja pa vagona številka 2 ni mogoče dobiti pred številko 4.

```
#include <stdio.h>
/* Ugotovi, ali je s pomočjo slepega tira vagoni mogoče
   preurediti v zeleni vrstni red. */
#define MAXN 1000 /* največja dolžina vlaka */
int main(void)
{
    int N; /* dejanska dolžina vlaka - število vagonov */
    int vagon[MAXN]; /* zelena razporeditev vagonov na tiru B */
    int postaja[MAXN]; /* vagoni, ki čakajo na postaji */
    int na_tiru_A; /* številka prvega vagona na tiru A */
    int na_postaji; /* število vagonov na postaji */
    int i, j;
    printf("\nVnesi dolžino vlaka: "); scanf("%d", &N);
    printf("Vnesi zeleno razporeditev vagonov na izhodnem tiru:\n");
    for (i = 0; i < N; i++) {
        printf(" st. %d. vagona: ", i + 1);
        scanf("%d", &vagon[i]);
    };
    na_tiru_A = 1;
    /* Na začetku so vsi vagoni na tiru A, */
    na_postaji = 0; /* postaja pa je prazna. */
    for (i = 0; i < N; i++) { /* Na tir B moramo dati vagon[i]. */
        if (na_tiru_A <= vagon[i]) {
            /* Vagoni do vagon[i] morajo iti na postajo. */
            for (j = na_tiru_A; j < vagon[i]; j++) {
                postaja[na_postaji] = j;
                na_postaji++;
            };
            /* vagon[i] "prepeljemo", prvi na tiru A je vagon[i] + 1. */
            na_tiru_A = vagon[i] + 1;
        }
        else if (vagon[i] == postaja[na_postaji - 1])
            na_postaji--; /* Vagon gre s postaje na tir B. */
        else break; /* Zelene razporeditve ni mogoče dobiti! */
    } /* for */
    if (i == N) printf("\nGre!\n"); else printf("\nNe gre!\n");
    return 0;
}
```

Pri pisanju programa smo privzeli, da bodo vhodni podatki vnešeni pravilno in da bodo res predstavljali neko permutacijo števil od 1 do N. Dopolnite program tako, da bo pri napačnem vnosu "protestiral".

Matija Lokar

IŠČEMO BESEDO – Rešitev s str. 355

Ljudje števila običajno zapisujemo v desetiškem sestavu. V računalništvu večkrat srečamo tudi osnove dva, osem in šestnajst. Seveda pa obstajajo tudi bolj nenavadni zapisi. Videli bomo, da je rešitev naloge povezana z enim od takih zapisov.

Števila lahko zapišemo tudi v "faktorielnem" zapisu. Vsako naravno število k od 0 do $n! - 1$ lahko enolično zapišemo kot

$$k = c_{n-1} \cdot (n-1)! + c_{n-2} \cdot (n-2)! + \dots + c_2 \cdot 2! + c_1 \cdot 1!,$$

kjer za številke c_i , $i = 1, \dots, n-1$, velja $c_i \in \{0, 1, \dots, i-1, i\}$. O obstoju in enoličnosti zapisa se lahko prepričamo z matematično indukcijo.

In kako poiščemo faktorielni zapis števila? Podobno, kot poiščemo zapise v bolj običajnih sestavih. Dvojiški zapis števila poiščemo npr. tako, da število zaporedoma celoštevilsko delimo z 2 in beležimo ostanke. Deljenje končamo, ko število postane enako 0. Ostanke, prebrani od zadnjega proti prvemu, dajo dvojiški zapis izbranega števila. Npr.:

$$\begin{array}{rclcl} 37 & = & 18 & \cdot & 2 & + & 1 \\ 18 & = & 9 & \cdot & 2 & + & 0 \\ 9 & = & 4 & \cdot & 2 & + & 1 \\ 4 & = & 2 & \cdot & 2 & + & 0 \\ 2 & = & 1 & \cdot & 2 & + & 0 \\ 1 & = & 0 & \cdot & 2 & + & 1 \end{array}$$

Torej je $37 = 100101_{(2)}$. Posamezna mesta v dvojiškem zapisu so utežena s potencami števila 2: 1, 2, 4, 8, ... V faktorielnem zapisu pa so posamezna mesta utežena s fakultetami števil: $1!, 2!, 3!, 4!, \dots$. Pri iskanju zapisa zato na prvem koraku število delimo z 2, na drugem s 3, na tretjem s 4 itn. Tako dobimo

$$\begin{array}{rclcl} 37 & = & 18 & \cdot & 2 & + & 1 & & k & = & k_2 & \cdot & 2 & + & c_1 \\ 18 & = & 6 & \cdot & 3 & + & 0 & & k_2 & = & k_3 & \cdot & 3 & + & c_2 \\ 6 & = & 1 & \cdot & 4 & + & 2 & & & & & & & & \vdots \\ 1 & = & 0 & \cdot & 5 & + & 1 & & k_{n-1} & = & k_n & \cdot & n & + & c_{n-1} \end{array}$$

Če je število k manjše od $n!$, potem je zadnji kvocient k_n enak 0. Faktorielni zapis števila 37 je torej $37 = 1201_{(1)}$.


```

{ Poiščemo zapis števila  $k - 1$  v 'faktorielnem' zapisu. }
k := k - 1;
for i:=1 to n - 1 do begin { Zapis ima  $n - 1$  števk. }
    stevka[n - i] := k mod (i + 1); {Najprej dobimo zadnjo števko.}
    k := k div (i + 1);
end;

if k > 0 then begin { Število  $k$  je preveliko. }
    writeln("Toliko različnih besed ne obstaja.");
    PoisciBesedo := "";
    exit;
end;

{ Zgradimo iskano besedo. }
beseda := "";
for i:=1 to n - 1 do begin
    { Pazimo, da števke povečamo za ena. }
    beseda := beseda + crke[stevka[i] + 1];
    delete(crke, stevka[i] + 1, 1);
end;
beseda := beseda + crke; { Dodamo še preostalo črko. }

PoisciBesedo := beseda;
end; {PoisciBesedo}

```

Črke, ki jih imamo na voljo za gradnjo besed, smo predstavili z nizom znakov (tip `string`). Taka izbira nam olajša brisanje že porabljenih črk. Uporabimo lahko kar v turbo pascal vgrajeni podprogram `delete` (ta ima tri parametre: niz, iz katerega brišemo znake, indeks prvega zbrisane znaka in število zbranih znakov). Funkcija `PoisciBesedo` zahteva, da so črke v parametru `crke` urejene po abecedi, sicer ne deluje pravilno. Pokličemo jo lahko kar s konstantnim nizom in številom, saj za oba parametra uporabljamo prenos po vrednosti. Tako na primer klic `PoisciBesedo('aborv', 38)` vrne niz `bravo`.

Martin Juvan

KRIŽANKA Z GESLOM – Rešitev s str. 267

EKSPONENTNA ENAČBA.

Darjan Trupi

IZBIRNI TESTI ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO – Rešitve nalog s str. 319

I/1. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = y$, od koder sledi

$$f(0) = (f(x) - x)^2 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Pri $x = 0$ je zato $f(0) = f^2(0)$. Torej $f(0) = 0$ ali $f(0) = 1$. Če je $f(0) = 0$, je $f(x) = x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in ta funkcija ustreza pogoju naloge.

Če pa je $f(0) = 1$, iz (1) sledi $f(x) - x = 1$ ali $f(x) - x = -1$. Torej je za vsak $x \in \mathbb{R}$ bodisi $f(x) = x + 1$ ali pa $f(x) = x - 1$. Dokažimo, da druga možnost odpade. V funkcijsko enačbo vstavimo $y = 0$, od koder sledi

$$f(x^2) = f^2(x) - 2xf(0) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

V funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$. Torej je

$$f(y^2) = f(0)^2 + y^2 \text{ za vsak } y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Če torej za neki x velja $f(x) = x - 1$, z upoštevanjem (3) in (2) sledi

$$1 + x^2 = f(x^2) = (x - 1)^2 - 2x = x^2 - 4x + 1.$$

Potem je $x = 0$ in zato $f(0) = -1$. Torej je $f(x) \neq x - 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Nazadnje preverimo, da funkcija f , $f(x) = x + 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, ustreza pogoju naloge.

Opomba. Zlahka preverimo, da funkcija f , $f(x) = x - 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, ne zadošča pogoju naloge, vendar to ne ovrže možnosti, da je $f(x) = x - 1$ za neki x in $f(y) = y + 1$ za neki $y \neq x$.

I/2. Označimo $\sphericalangle BAD = \alpha$ in $\sphericalangle ABC = \beta$. Premici AD in BC se sekata in njuno presečišče označimo z E . Točka L je potem višinska točka trikotnika ABE . Sledi

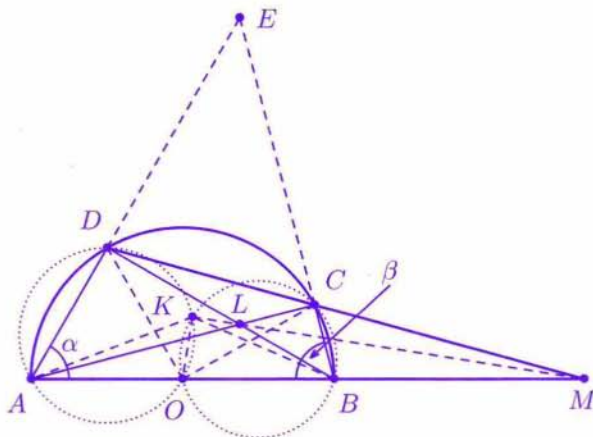
$$\sphericalangle ALB = \sphericalangle CLD = \alpha + \beta. \quad (4)$$

Po Miquelovem izreku so točke $CEDK$ konciklične, zato je

$$\sphericalangle CKD = \pi - \sphericalangle DEC = \alpha + \beta. \quad (5)$$

Ker sta AOD in COB enakokraka trikotnika z vrhom O , je

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle AKO + \sphericalangle OKB = \sphericalangle ADO + \sphericalangle OCB = \alpha + \beta. \quad (6)$$



Iz enačb (4), (5) in (6) sledi, da sta $ABLK$ in $CDKL$ tetivna štirikotnika. Ker se potenčne premice krožnic skozi $ABCD$, $ABLK$ in $CDKL$ sekajo v eni točki (tj. točki M), so točke K , L in M kolinearne. Nazadnje izračunamo

$$\sphericalangle OKM = \sphericalangle AKL - \sphericalangle AKO = (\pi - \sphericalangle LBO) - \alpha = (\pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha)) - \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

I/3, 1. način. (a) Alenka lahko potegne dve kroglici na 36 različnih načinov, zato je število p_n enako koeficientu pri x^n polinoma

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{36}(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \cdot \\ &\quad \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = \\ &= \frac{1}{36}(x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + \\ &\quad + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}). \end{aligned}$$

Sledi $p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$, $p_3 = p_{11} = \frac{2}{36}$, $p_4 = p_{10} = \frac{3}{36}$, $p_5 = p_9 = \frac{4}{36}$, $p_6 = p_8 = \frac{5}{36}$, $p_7 = \frac{6}{36}$ in $p_n = 0$ za druge $n \in \mathbb{N}$.

(b) Če so kroglice pri Barbari v eni žari označene s številkami $a_1, a_2, \dots, a_6$ in v drugi žari s številkami $b_1, b_2, \dots, b_6$, je verjetnost p_n enaka koeficientu pri x^n polinoma

$$q(x) = \frac{1}{36}(x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_6})(x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_6}).$$

Polinoma $36q(x)$ in $36p(x) = x^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$ sta zato enaka. Ker so vsa števila a_i in b_i pozitivna, je

$$\begin{aligned}x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_6} &= x(x+1)^\alpha(x^2+x+1)^\beta(x^2-x+1)^\gamma \\ x^{b_1} + x^{b_2} + \dots + x^{b_6} &= x(x+1)^{2-\alpha}(x^2+x+1)^{2-\beta}(x^2-x+1)^{2-\gamma},\end{aligned}$$

kjer je $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2\}$. Če vstavimo $x = 1$ v prvo enačbo, dobimo $6 = 2^\alpha 3^\beta$, zato je $\alpha = \beta = 1$. Ločimo tri možnosti:

- Če je $\gamma = 0$, so zaradi

$$x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$

in

$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8$$

kroglice v prvi žari označene s številkami 1, 2, 2, 3, 3 in 4, v drugi pa z 1, 3, 4, 5, 6 in 8.

- Če je $\gamma = 1$, ima Barbara enako označene kroglice kot Alenka.
- Primer $\gamma = 2$ pa je simetričen primeru $\gamma = 0$. V prvi žari so kroglice 1, 3, 4, 5, 6, 8, v drugi pa 1, 2, 2, 3, 3, 4.

I/3. 2. način. Točko (a) lahko rešimo povsem elementarno. Zapišemo vse možne vsote $1+1, 1+2, \dots, 6+6$ in od tod neposredno razberemo verjetnosti.

(b) Ker se vsota 2 pojavi le kot $1+1$, mora biti v vsaki žari natanko ena kroglica označena z 1. Ker se vsota 3 pojavi dvakrat, je to lahko $2+1, 2+1$ ali $2+1, 1+2$ ali pa $1+2, 1+2$. V prvem primeru sta v prvi žari dve kroglici označeni z 2, v drugem primeru je v vsaki žari po ena kroglica označena z 2, v tretjem pa sta dve kroglici iz druge žare označeni z 2. Pogledmo sedaj vsoto $4 = 1+3 = 2+2 = 3+1$. Ta se pojavi trikrat. Za analizo vsakega od prejšnjih primerov ugotovimo, da so edine možnosti le 1, 2, 2, 3, 3 v prvi žari in 1, 3 v drugi žari, 1, 2, 3 v obeh žarah ali 1, 3 v prvi žari in 1, 2, 2, 3, 3 v drugi žari. Podobno razmišljamo tudi v nadaljevanju in s podrobno analizo vseh primerov ugotovimo, da so edine možnosti le tiste tri, ki so navedene v prvem načinu.

II/1. Označimo $x = cz$ in $y = bz$, kjer sta b in c tuji si naravni števili. Enačbo potem preoblikujemo v $c + b^2z + z^2 = bc z^2$, od koder sledi, da je $c = az$ za neko naravno število a . Enačbo še enkrat poenostavimo $a + b^2 + z = ab z^2$ in iz nje izrazimo $a = \frac{b^2+z}{bz^2-1}$.

Če je $z = 1$, je $a = \frac{b^2+1}{b-1} = b + 1 + \frac{2}{b-1}$. Število $\frac{2}{b-1}$ je celo le za $b \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Ker je b naravno število, je lahko le $b = 2$ ali $b = 3$. V prvem primeru dobimo rešitev $(x, y) = (5, 2)$, v drugem pa $(x, y) = (5, 3)$.

Če je $z = 2$, je $a = \frac{b^2+2}{4b-1}$. Da bi lahko polinom $b^2 + 2$ (celoštevilsko) delili s polinomom $4b - 1$, ga pomnožimo s 16. Dobimo

$$16a = \frac{16b^2 + 32}{4b - 1} = 4b + 1 + \frac{33}{4b - 1}.$$

Ker je $b \geq 1$, pridejo med pozitivnimi delitelji števila 33 v poštev le 3, 11 in 33, zato sta $b = 1$ in $b = 3$ edini možnosti. V prvem primeru dobimo rešitev $(x, y) = (4, 2)$, v drugem pa $(x, y) = (4, 6)$.

Uporabimo gornjo metodo v splošnem: $z^2 a = \frac{z^2 b^2 + z^3}{z^2 b - 1} = b + \frac{b+z^3}{z^2 b - 1}$. Ker je $\frac{b+z^3}{z^2 b - 1}$ naravno število, je $\frac{b+z^3}{z^2 b - 1} \geq 1$, zato je

$$b \leq \frac{z^3 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 - z + 1}{z - 1} = z + \frac{1}{z - 1} < z + 1$$

za $z \geq 3$. Torej je $b \leq z$ in lahko ocenimo

$$a = \frac{b^2 + z}{z^2 b - 1} \leq \frac{z^2 + z}{z^2 - 1} = 1 + \frac{1}{z - 1} < 2.$$

Sledi $a = 1$ in zato je b celoštevilska rešitev enačbe

$$b^2 - b z^2 + (z + 1) = 0. \quad (7)$$

Diskriminanta te kvadratne enačbe je $z^4 - 4(z + 1)$. Ker je $(z^2 - 1)^2 < z^4 - 4(z + 1) < (z^2)^2$ za $z \geq 3$, število $z^4 - 4(z + 1)$ ni popolni kvadrat. Ker enačba (7) nima celoštevilskih rešitev za b , so edine rešitve zastavljene enačbe trojice

$$(x, y, z) \in \{(5, 2, 1), (5, 3, 1), (4, 2, 2), (4, 6, 2)\}.$$

20. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST

Na lanskoletnem 19. mednarodnem tekmovanju mest so naši tekmovalci prejeli 6 pohval: Matjaž Urlep, Jure Kališnik (oba ŠC Celje – gimnazija Lava), Matija Mazi (gimnazija Bežigrad), Martin Knapič (gimnazija Šentvid), Dušan Jan (gimnazija Tolmin), in Mojca Miklavc (Škofijska klasična gimnazija Ljubljana).

Z novim šolskim letom se je začel tudi nov cikel tekmovanja mest. Na jesenskem krogu letošnjega tekmovanja so tekmovalci reševali naloge dva dni. V lažjem sklopu nalog so reševali naslednje naloge:

Prva skupina

1. Kocko z dolžino stranice 20 razdelimo na 8000 disjunktnih enotskih kockic in v vsako kockico napišemo število. V vsakem stolpcu 20-ih kockic, vzporednem stranici kocke, je vsota števil v kockicah enaka 1 (to velja za vse stolpce v vseh treh smereh). Ena od enotskih kockic vsebuje število 10. Skozi to kocko potekajo tri rezine $1 \times 20 \times 20$, vzporedne stranicam kocke. Poišči vsoto vseh števil v kockicah zunaj teh treh rezin. (3 točke)
2. Kvadrat naravnega števila je oblike ...09. Zadnji dve števki sta 0 in 9, dokaži, da je pred-predzadnja števka soda. (3 točke)
3. V trikotniku ABC ležijo točka A' znotraj stranice BC , B' znotraj CA in C' znotraj AB . Pri tem velja $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle B'A'C$, $\sphericalangle CB'A' = \sphericalangle A'C'B$ in $\sphericalangle BA'C' = \sphericalangle C'B'A$. Pokaži, da so točke A' , B' in C' razpolovišča stranic trikotnika ABC . (4 točke)
4. Dvanajst kandidatov za župana sodeluje v televizijskem pogovoru. V nekem trenutku eden od kandidatov reče: "Pred tem je bila izrečena laž." Drugi nato reče: "Zdaj pa sta bili izrečeni že dve laži." Nato tretji: "Zdaj že tri." In tako dalje do dvanajstega kandidata, ki izjavi: "Zdaj je bilo izrečenih dvanajst laži." V tem trenutku moderator prekine razpravo. Izkaže se, da je vsaj eden od kandidatov povedal točno število laži, izrečenih pred njegovo izjavo. Koliko laži je bilo torej izrečenih? (4 točke)
5. Naj bo (n, m) -krokodil šahovska figura, katere premik na neskončni šahovnici se začne s skokom za n polj v eno smer (vodoravno ali navpično) in konča s skokom za m polj v smer, pravokotno na prvotno. Za dani naravni števili n in m pokaži, da lahko neskončno šahovnico pobarvamo črno in belo tako, da se (n, m) -krokodil vedno premakne iz črnega na belo polje in obratno. (5 točk)

Druga skupina

1. Danih je 19 uteži z masami 1g, 2g, 3g, ..., 19g. Devet jih je železnih, devet bronastih, ena pa je iz čistega zlata. Vemo, da je skupna masa železnih uteži za 90g večja od skupne mase bronastih. Poišči maso zlate uteži. (3 točke)
2. Na ravnini leži n papirnatih krogov polmera 1 tako, da se vsi njihovi robovi sekajo v točki, ki leži znotraj območja, pokritega s krogi. To območje je "večkotnik z ukrivljenimi robovi". Poišči njegov obseg. (3 točke)
3. Šahovnica 8×8 ima 17 označenih polj. Pokaži, da lahko vedno izberemo dve taki označeni polji, da bo konj od enega do drugega izbranega polja potreboval najmanj tri premike. (4 točke)
4. Oglejmo si vse take množice realnih števil $\{x_1, x_2, \dots, x_{20}\}$, da velja $x_1 x_2 \cdots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_{20})$, pri čemer števila x_i izbiramo z odprtega intervala $(0, 1)$. Med temi množicami poišči tisto z največjim produktom $x_1 x_2 \cdots x_{20}$. (4 točke)
5. Skupina psihologov je sestavila inteligenčni test, ki vsaki testirani osebi priredi kvocient Q (višji kot je Q , bolj inteligentna je oseba). Inteligenčni kvocient (IQ) v državi je definiran kot povprečje (aritmetična sredina) vrednosti Q za celotno prebivalstvo države.
 - (a) Skupina ljudi je emigrirala iz države A v državo B . Pokaži, da je možna posledica te emigracije porast IQ v obeh državah. (1 točka)
 - (b) Skupina ljudi iz države B (lahko so v njej tudi bivši emigranti iz A) je nato emigrirala v A . Ali lahko IQ v obeh državah spet naraste? (3 točke)
 - (c) Skupina ljudi je emigrirala iz A v B , skupina ljudi iz B pa je odšla v državo C . Znano je, da je rezultat migracij porast IQ v vseh treh državah. Smer migracij se kasneje spremeni: del prebivalstva iz C se preseli v B in del iz B v A . Izkaže se, da je IQ v vseh treh državah spet višji (v primerjavi z IQ -jem po prvi in pred drugo migracijo). Tako vsaj trdijo tiskovne agencije v vseh treh državah. Je to mogoče (če je, kako, če ni, zakaj)? (Predpostavljamo, da se v tem času ohranja opazovana populacija in kvocient Q posameznikov.) (2 točki)

V težjem sklopu nalog jesenskega kroga so tekmovalci reševali šest nalog. Objavljamo po dve za vsako skupino:

Prva skupina

1. Dokaži, da za vsaki dve naravni števili a, b iz enakosti $v(a, a + 5) = v(b, b + 5)$ lahko sklepamo $a = b$. (Oznaka v pomeni najmanjši skupni večkratnik.) (3 točke)
2. Roparska banda je bogatemu trgovcu ukradla vrečo kovancev. Vrednost vsakega kovanca je celo število penijev. Če iz vreče odstranimo katerikoli kovanec, si lahko roparji kovanice pošteno razdelijo (vsak dobi enako vrednost v penijih). Pokaži, da je po odstranitvi enega kovanca število kovancev deljivo s številom roparjev. (7 točk)

Druga skupina

1. Pri okrogli mizi so pripravili 12 prostorov za člane porote in jih opremili z imeni porotnikov. Raztreseni profesor K. je kot prvi namesto na svoj prostor sedel takoj na naslednjega, gledano v smeri urinih kazalcev. Vsak naslednji član porote je nato zasedel bodisi svoj prostor bodisi prvi prost sedež od svojega v smeri urinih kazalcev, če je bil njegov že zaseden. Končni sedežni red je odvisen od vrstnega reda prihodov porotnikov k mizi. Koliko različnih sedežnih redov obstaja? (6 točk)
2. Definirajmo velikost kvadra kot vsoto njegove dolžine, širine in višine. Ali lahko kateri od kvadrov vsebuje večji kvader? (7 točk)

Aleš Vavpetič

20. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Rešitve nalog s str. 372

Rešitve nalog prvega dela

Prva skupina

1. Celotna kocka se sestoji iz 400 stolpcev, tako da je vsota 8000-ih števil 400. Vsota števil v vsaki rezini je 20. Vsoto števil na treh rezinah dobimo tako, da od $3 \cdot 20$ odštejemo vsoto števil na treh stolpcih, ki ležijo v preseku dveh rezin. Vsota teh števil pa je $3 \cdot 1$ minus število, ki leži na kockici, ki je v preseku vseh treh stolpcev. Torej je iskana vsota $400 - 3 \cdot 20 + 3 \cdot 1 - 10 = 333$.

2. Označimo število z n . Tedaj je n liho število, torej oblike $n = 2k + 1$. Ko delimo število $n^2 = 4k(k + 1) + 1$ z 8, dobimo ostanek 1, zato je $n^2 - 1$ deljivo z 8. Število $n^2 - 1$ je deljivo z 8 natanko tedaj, ko je trimestno število, sestavljeno iz zadnjih treh števk števila $n^2 - 1$, deljivo z 8. Ker sta zadnji dve števki 0 in 8, je pred-predzadnja številka soda.
3. Naj bo $\sphericalangle CB'A' = \sphericalangle A'C'B = \alpha$, $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle B'A'C = \beta$ in $\sphericalangle BA'C' = \sphericalangle C'B'A = \gamma$. Tedaj je $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \sphericalangle C'A'B' + \sphericalangle A'B'C' + \sphericalangle B'C'A' = 540^\circ$. Ker je $\sphericalangle C'A'B' + \sphericalangle A'B'C' + \sphericalangle B'C'A' = 180^\circ$, je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Torej je $\sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC = \beta$ in $\sphericalangle B'C'A' = \sphericalangle BCA = \gamma$. Torej sta štirikotnika $A'BC'B'$ in $A'CB'C'$ paralelograma. Ker je $|BA'| = |C'B'| = |A'C|$, je točka A' razpolovišče daljice BC . Podobno sklepamo, da je B' razpolovišče stranice CA in C' razpolovišče stranice AB .
4. Predpostavimo, da je i -ti župan prvi povedal resnico. Tedaj so vse izjave za njim lažne. Torej je bilo izrečenih i laži pred i -tim županom ter $12 - i$ laži za njim, torej 12 laži. (Od tod sledi, da je $i = 1$.)
5. Če sta števili n in m različne parnosti, pobarvamo šahovnico na običajni način. Ko se premaknemo v eno smer za sodo število polj, ne spremenimo barve polja, ko pa se premaknemo za liho število polj, spremenimo barvo polja.
- Če sta obe števili n in m lihi, pobarvamo cele stolpce izmenoma črno in belo. Če se najprej premaknemo v vodoravni smeri, spremenimo barvo polja (premaknemo se za liho število polj), potem pa, ko se premaknemo v navpični smeri, ostanemo na isti barvi. Podobno sklepamo, če se najprej premaknemo v navpični smeri.
- Nazadnje si ogledamo še primer, ko sta m in n sodi števili. Naj bo t največje naravno število, da število 2^t deli n in m . Tedaj je $n = 2^t k$ in $m = 2^t l$, kjer je vsaj eno izmed števil k in l liho. Neskončno šahovnico razdelimo na večja polja dimenzije $2^t \times 2^t$ in vsa polja v večjem polju pobarvamo enako. Tako smo prevedli primer (n, m) -krokodila na primer (k, l) -krokodila. Večja polja pobarvamo tako, kot smo zapisali zgoraj, glede na parnost števil k in l .

Druška skupina

1. Skupna masa devetih najtežjih uteži je $11g + \dots + 19g = 135g$, masa najlažjih devetih uteži pa je $1g + \dots + 9g = 45g$. Razlika je ravno $90g$. Torej je zlata utež težka $10g$.

2. Za vsak $i = 1, \dots, n$ naj bo ϑ_i kot, pod katerim vidimo del loka i -tega kroga, ki pripada robu "ukriviljenega večkotnika", iz točke, kjer se sekajo robovi krogov. Ker je ta točka znotraj večkotnika, je $\vartheta_1 + \dots + \vartheta_n = 2\pi$. Kot, pod katerim vidimo del loka i -tega kroga, ki pripada robu "ukriviljenega večkotnika", iz središča i -tega kroga, je $2\vartheta_i$. Od tod sledi, da je obseg večkotnika enak $2\vartheta_1 + \dots + 2\vartheta_n = 4\pi$.
3. V polja šahovnice vpišemo črke $A, \dots, P$, kot kaže spodnja leva slika. Ni se težko prepričati, da konj potrebuje najmanj tri skoke, da pride od enega polja do drugega z vpisano isto črko. Ker je do A do P 16 črk, po Dirichletovem principu obstajata dve označeni polji, ki imata isto vpisano črko. Spodnja desna slika pokaže, da trditev naloge velja že za 11 označenih polj.

D	H	L	P	B	F	J	N
D	H	L	P	B	F	J	N
C	G	K	O	A	E	I	M
C	G	K	O	A	E	I	M
B	F	J	N	D	H	L	P
B	F	J	N	D	H	L	P
A	E	I	M	C	G	K	O
A	E	I	M	C	G	K	O

B	C	A	I	I	B	D	A
G	F	J	E	E	J	F	H
H	I	B	C	D	A	I	G
J	E	G	C	D	H	E	J
J	F	G	A	B	H	F	J
H	I	D	A	B	C	I	G
G	E	J	F	F	J	E	H
D	A	C	I	I	D	B	C

4. Ker velja $x_1 x_2 \cdots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_{20})$, bo produkt $x_1 x_2 \cdots x_{20}$ največji, ko bo največji produkt

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \cdots x_{20} (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_{20}) &= \\ &= x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \cdots x_{20}(1 - x_{20}). \end{aligned}$$

Torej je dovolj poiskati število x_i iz intervala $(0, 1)$, da bo produkt $x_i(1 - x_i)$ največji. Iz neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino dobimo $x_i(1 - x_i) \leq \left(\frac{x_i + (1 - x_i)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ in enakost velja pri $x_i = 1 - x_i = \frac{1}{2}$. Torej bo produkt $x_1 x_2 \cdots x_{20}$ največji, ko bo $x_1 = \dots = x_{20} = \frac{1}{2}$.

- 5.(a) Država A naj ima dva državljana, eden ima Q 50, drugi pa 30. V državi B pa naj prebiva le ena oseba in ta ima Q enak 10. Če oseba, ki ima Q 30, iz države A emigrira v državo B , se državi A kvocient IQ dvigne iz 40 na 50, državi B pa iz 10 na 20.

- (b) To se ne more zgoditi. Naj bo prvotni IQ v državi A enak a_0 in v B enak b_0 . Naj ima pri prvi selitvi skupina emigrantov iz A v B povprečje inteligenčnih kvocientov enako c_1 in naj bo nov IQ v državi A enak a_1 in v B enak b_1 . Ker se je pri tem IQ v obeh državah povečal, velja $a_1 > a_0$ in zato $a_0 > c_1$ ter $b_1 > b_0$ in zato $c_1 > b_1$. Od tod sledi, da je $a_1 > b_1$. Naj ima pri selitvi skupina emigrantov iz B v A povprečje inteligenčnih kvocientov enako c_2 in novi IQ v državah a_2 ter b_2 . Podobno kot prej iz $a_2 > a_1$ in $b_2 > b_1$ sledi $b_2 > b_1 > c_2 > a_2 > a_1$. To pa je v protislovju z neenakostjo $a_1 > b_1$.
- (c) Država A naj ima dva prebivalca z inteligenčnim kvocientom 30 in 10. Država B ima pet državljanov, ki imajo Q enak 630, 60, 60, 50 in 50. Država C ima le enega prebivalca, ki ima Q enak 20. Torej je IQ držav enak 20, 170 ter 20. Pri prvi selitvi se državljan iz A , ki ima Q enak 10, preseli v državo B ter oba državljana iz B , ki imata Q enak 50, emigrirata v C . Novi IQ držav so tako 30, 190 ter 40. Pri drugi selitvi se prebivalec države C , ki ima Q enak 20, preseli v B , iz države B pa odideta oba državljana, ki imata Q enak 60, v državo A . Novi IQ držav so 50, 220 in 50.

Rešitve nalog drugega dela

Prva skupina

- Ker je $(a+5) - 5 = 5$, je $D(a, a+5)$ enako 5 ali 1. Podobno dobimo, da je $D(b, b+5)$ enako 5 ali 1. Vemo, da je $v(a, a+5) = \frac{a(a+5)}{D(a, a+5)}$ in $v(b, b+5) = \frac{b(b+5)}{D(b, b+5)}$. Torej velja $a(a+5) = b(b+5)$, $5a(a+5) = 5b(b+5)$ ali $a(a+5) = 5b(b+5)$. Če je $a(a+5) = b(b+5)$, je $(a-b)(a+b+5) = 0$. Torej je $a = b$, saj sta števili a in b pozitivni. Če je $5a(a+5) = b(b+5)$, je b deljiv s 5 in $D(a, a+5) = 1$. Torej je $b(b+5)$ deljivo s 25, kar pomeni, da je število a deljivo s 5. Od tod pa sledi $D(a, a+5) > 1$, kar ni možno. Enakost $a(a+5) = 5b(b+5)$ podobno kot prejšnja ni možna.
- Naj bo k število kovancev in n število roparjev. Naj bodo $a_1, \dots, a_k$ vrednosti kovancev v penijih. Tedaj velja

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + \dots + a_k &= nb_1; \\ a_1 + a_3 + \dots + a_k &= nb_2; \\ &\vdots \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} &= nb_k, \end{aligned}$$

kjer je b_i vrednost v penijih, ki bi jo dobil vsak od roparjev, če bi odstranili i -ti kovanec. Če seštejemo zgornje enačbe dobimo

$$(k-1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = n(b_1 + b_2 + \cdots + b_k).$$

Naj bo d največji skupni delitelj števil $a_1 + \cdots + a_k$ in n . Ker je $a_2 + \cdots + a_k = nb_1$, je število a_1 deljivo z d . Podobno iz i -te enačbe dobimo, da je število a_i deljivo z d . Ker je b_i vsota vrednosti nekaj kovancev in je vsaka vrednost deljiva z d , je tudi vrednost b_i deljiva z d . Torej lahko števila a_i in b_i delimo z d . Zato lahko predpostavimo, da je $d = 1$. Tedaj iz zgornje enačbe sledi, da $k-1$ deli n .

Druga skupina

1. Recimo, da bi bilo okoli mize n sedežev in je a_n število možnih sedežnih redov. Če se je profesor K. usedel na mesto i -tega porotnika (to je oseba, ki se je kot i -ta usedla za mizo), tedaj so se drugi, tretji, ..., $(i-1)$ -vi porotnik pravilno usedli, ostali pa so se razvrstili na a_{n-i+1} načinov. Od tod sledi, da je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + 1$. Ker je $a_2 = 1$, je $a_n = 2^{n-2}$. Torej je $a_{12} = 2^{12} = 1024$.
2. Naj bodo a , b in c dolžine stranic kvadra in naj bo v njem kvader z dolžinami stranic x , y in z . Ker je površina zunanjega kvadra večja od površine notranjega kvadra, velja

$$2xy + 2xz + 2yz \leq 2ab + 2ac + 2bc.$$

Tudi diagonala notranjega kvadra je krajša od diagonale zunanjega kvadra, zato je

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \leq \\ &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = \\ &= (a+b+c)^2, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $x + y + z \leq a + b + c$.

Aleš Vavpetič

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje — 26. letnik, leto 1998/99, številke 1–6, strani 1–384

IZ STARIH ŠTEVILK

Oda kvadratni enačbi z baladnim priokusom (Tomaž Pisanski)	8-9
Množenje na prste (Jože Vrabec)	10-12
Poskusi – premisli – odgovori (Zvonko Trontelj)	13
Odkritje pulzarja v ostanku supernove 1987 A (Andrej Čadež)	18-19
Praznični okrasek (Marija Vencelj)	19
Nevarna literatura (Peter Petek)	21-22
Bistrovidec (Vladimir Batagelj)	22
Zasukaj premico (Boris Lavrič)	23-25
Tri modre (Vilko Domajnko)	28-30
Enake vsote (Boris Lavrič)	31
Metoda "ostrega pogleda" v programiranju (Tomi Dolenc)	34-37
"Breztežno stanje" (Janez Strnad)	38-39
Mavrična uganka (Marija Vencelj)	41
Nenavadna premica (Dušan Repovš)	41
Kriptaritem z dvema kartama (Peter Petek)	42
Obojestranska praštevila (Edvard Kramar)	42-43
Preprost preizkus – napačna razlaga (Andrej Likar)	44
Tekmovanja	50-52
Ali znaš pokriti šahovsko desko z dominami? (Egon Zakrajšek)	III

MATEMATIKA

Okrnjena Fibonaccijeva števila (Mitja Rosina)	20-21
Stopnje točk grafov v nalogah (za konec gremo tudi v Portorož) (Sandi Klavžar)	72-78
O premočrtnem in krožnem gibanju (Ivan Vidav)	86-90
Razrez kocke (Tomaž Slivnik ml.)	130-132
Dve palici z enakima sencama (Nada Razpet, Danica Mati)	154-156
Nožiščne krivulje krožnice (Marko Razpet)	198-201
O harmoničnih številih (Jože Grasselli)	218-223
Verižni približki (Marino Pavletič)	234-240
Dr. Franc Močnik in Cauchyjeva metoda (Marko Razpet)	258-263
Erdős–Mordellova neenakost (Roman Drnovšek)	294-301
O Frobeniusovem številu (Jože Grasselli)	328-337

FIZIKA

Človeška moč (Janez Strnad).....	2-7
Skrivljena zrcala (Andrej Likar).....	66-70
Električni tok po kovini in elektroni (Janez Strnad).....	98-102
Električni tok po kapljevinah (Janez Strnad).....	138-140
Podmornica na vzmet – kako deluje v vesolju in na Zemlji (Mojca Čepič).....	194-197
Električni tok po plinih (Janez Strnad).....	210-212
Padanje dveh povezanih krogel (Milan Ambrožič).....	230-231
Galilejev termometer (Vida Kariž Merhar).....	280-281
Hallov pojav (Janez Strnad).....	290-293
Meandri (Andrej Likar).....	322-327
O helikopterjih (Janez Strnad).....	344-349

ASTRONOMIJA

Lunina kimanja (Marijan Prosén).....	26-28
O nam najbližji zvezdi – 1. del (Mirjam Galičič).....	80-83
Oko (Marijan Prosén).....	104-106
O nam najbližji zvezdi, 2. del – Manj znano Sonce (Mirjam Galičič).....	142-145
Predpes (Marijan Prosén).....	162-164
Opazovanje vzhajališča in zahajališča Sonca (Marijan Prosén).....	202-203
Zodiak (Marijan Prosén).....	268-272
Kako smo spoznavali pulzarje (Andrej Čadež).....	282-287
Rep (Marijan Prosén).....	338-340
Popolni Sončev mrk dne 11. 8. 1999 (Marijan Prosén).....	356

RAČUNALNIŠTVO

Srečna števila z računalnikom (Martin Juvan).....	14-17
Dotikajoči se krogi – rešitev naloge s str. 31 (Martin Juvan).....	92-94
Logo, sezname in množice (Martin Juvan).....	146-152
Nenavadna funkcija z računalnikom (Martin Juvan).....	204-208
Kochova snežinka (Matija Lokar).....	274-278
Težave postajnega načelnika – reš. str. 363 (Matija Lokar).....	342
Iščemo besedo – reš. str. 365 (Martin Juvan).....	355

REŠITVE NALOG

Stopnje točk grafov v nalogah – Rešitev portoroške naloge s str. 78 (Sandi Klavžar).....	169
---	-----

NOVICE

Slovenski dijaki na letošnjih olimpiadah iz matematike in fizike	7
Za rešitev Bealovega problema razpisana nagrada v višini 50.000 dolarjev (Roman Drnovšek)	78-79
29. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	135
29. fizikalna olimpiada: Skoraj na vrhu sveta (Martin Zadnik)	136-137
39. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko)	153
Poletna šola matematike na Bledu (Klavdija Pintar)	157-159
Pierre-Simon Laplace (1749–1827) – ob 250-letnici rojstva (Marija Vencelj)	213-217
Jurij Vega – Govor v Zagorici marca 1999 (Anton Suhadole)	343
O mojstru in orodju (Matija Lokar)	349-351

NALOGE

Prav posebno število! Pa je to tudi res? – reš. str. 106 (Marija Vencelj)	13
Dotikajoči se krogi – reš. str. 92 (Martin Juvan)	31
Številska križanka – reš. str. 164 (Marija Vencelj)	71
Tombola – reš. str. 140 (Martin Juvan)	102-103
Nenavadna funkcija – reš. str. 166 (Martin Juvan)	108
Slana sredi grma – reš. str. 241 (Jože Rakovec)	132
Številska igrice za mlade računarje – reš. str. 240 (Marija Vencelj)	152
Iz petih kvadratov dva – reš. str. 203 (Marija Vencelj)	159
Okroglo in kvadratasto – reš. str. 231 (Martin Juvan)	159
Zanimiva naloga o Predpsu – reš. str. 240 (Marian Prosén)	165
Naloga o senci (Marian Prosén)	208-209
Želite zaposlitev pri Microsoftu? – reš. str. 287 (Matija Lokar)	212
Razreži na skladne dele – reš. str. 301 (Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj)	217
Razgibani nizi – reš. str. 263 (Martin Juvan)	229
Prelaganje žetonov – reš. str. 351 (Dragoljub M. Milošević, prir. Marija Vencelj)	266
Računalo za seštevanje v petiškem sestavu – reš. str. 357 (Marija Vencelj)	279
Milni mehurček – reš. str. 359 (Tomaž Slivnik, ml.)	327
Koliko besed – reš. str. 359 (Martin Juvan)	337
Lažnivi Kljukec – nagradna naloga (Andrej Likar)	341
Zapletena sončna ura (Andrej Likar)	354
Kocke iz zlata – reš. str. 358 (Marija Vencelj)	355

PISMA BRALCEV

Nekaj bi vam radi povedali (Nevenka Dušak in učenci OŠ Nove Fužine).....	83
Geometrijski asistent (Matej Šekoranja).....	273

TEKMOVANJA

34. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik).....	53-54
18. državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte).....	54-55
36. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko).....	56-58
42. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko)....	58-60
19. mednarodno matematično tekmovanje mest – reš. iz XXV/6, str. 378 (Aleš Vavpetič).....	61-64
Mednarodna matematična olimpiada 1999 (Matjaž Željko).....	109
33. področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje – reš. str. 172 (Aleksander Potočnik).....	109-115
18. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 174 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte).....	115-118
Naloge s fizikalnega predtekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 1997/98 (Ciril Dominko).....	118-123
Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce – reš. str. 185 (Matjaž Željko).....	123-125
19. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog – reš. str. 189 (Aleš Vavpetič).....	126-128
Urnik tekmovanj v letu 1999 (Darjo Felda).....	170-172
Rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1997/98 – s str. 118 (Bojan Golli).....	177-184
34. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – reš. str. 302 (Aleksander Potočnik).....	242-243
18. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 303 (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač).....	243-246
42. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – reš. str. 306 (Matjaž Željko).....	246-248
Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 1997/98 (Ciril Dominko).....	249-254
39. mednarodna matematična olimpiada – Rešitvi izbranih nalog s str. 153 (Matjaž Željko).....	254-256
Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz fizike v šolskem letu 1997/98 – s str. 249 (Bojan Golli).....	311-319
Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado – reš. str. 368 (Matjaž Željko).....	319-320
20. mednarodno matematično tekmovanje mest – reš. str. 375 (Aleš Vavpetič).....	373-375

NOVE KNJIGE

- Tekmujemo za Vegova priznanja 2 – Zbirka rešenih nalog s področnih
in državnih tekmovanj od 1992 do 1998 (Sandi Klavžar)..... 272

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

- Velikani na Marsu (Vida Kariž Merhar)..... 40
Križanka "Tu smo že petindvajset let" – reš. str. 108 (Marko Bokalič) .. 32-33
Kockasti dodekaeder (Tomaž Pisanski)..... 84-85
Izvor besede sinus (Matija Lokar)..... 90-91
Sestavljanje – reš. str. 137 (Boštjan Marinšek) 95
Križanka "Zlati jubilej DMFA Slovenije" – reš. str. 165
(Marko Bokalič) 96-97
Mikrotveg (Andrej Likar)..... 133-135
Križanka "Zimski pojavi" – reš. str. 241 (Marko Bokalič)..... 160-161
Križci in krožci oživljeni (Primož Potočnik)..... 226-229
Križanka "Ob 250-letnici rojstva" – reš. str. 293 (Marko Bokalič) 224-225
Križanka z geslom – reš. str. 367 (Darjan Trupi)..... 267
Križanka "Planeti našega Sonca" – reš. str. 358 (Marko Bokalič)..... 288-289
Križanka o trikotniku – reš. str. 362 (Marko Bokalič)..... 352-353

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, šolsko leto 1998/99, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1998/99 je za posamezne naročnike **1.800 SIT**, za skupinska naročila šol **1.500 SIT**, posamezna številka **360 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Založilo DMFA – založništvo
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1384

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

Kalkulatorji

**TEXAS
INSTRUMENTS**

TI-89

grafični
kalkulator



TI-36X Solar

1234567890 99

TI-36XS

tehnični
kalkulator



TI-89 je izredno zmogljiv CAS (Computer Algebra System) kalkulator za srednješolski in fakultetni nivo s 640 kB pomnilnika, elektronsko nadgradnjo in programsko opremo za višjo matematiko.

- CAS (Computer Algebra System) za algebro, računanje izrazov in matrično algebro
- Flash tehnologija omogoča elektronsko nadgradljivost in nadgradnjo obstoječih programov
- 640 kB pomnilnika (256 kB RAM, 384 kB za podatke)
- analitično in numerično reševanje diferencialnih enačb
- tridimenzionalni izris grafov z rotacijo
- konstante in pretvarjanje enot
- statistične regresije
- lastne vrednosti in lastni vektorji, matrične funkcije
- visokokонтраstni, lahko berljivi zaslon s 100 x 160 točkami
- priložen vmesnik za povezavo z drugim kalkulatorjem TI-89
- opcija: povezava s PC-jem ali MAC-om
- 2 leti garancije

TI-36XS je primeren za reševanje težjih problemov algebre, trigonometrije, računalništva, kemije in statistike.

- zaslon s 10-mestnim zapisom števil in 2-mestnim eksponentom za prikaz rezultatov s plavajočo vejico
- trije spomini
- eno- in dvodimenzionalna statistika (linearna regresija, srednja vrednost, vsota, vsota kvadratov, standardna deviacija, analiza trendov)
- 10 pretvorb anglosaških/metričnih mer
- 8 fizikalnih konstant
- možen vnos in računanje z binarnimi, osmiškimi, decimalnimi in šestnajstiškimi števili
- pretvarjanje polarnih koordinat v pravokotne
- pretvarjanje kotnih stopinj, minut in sekund v decimalni zapis, računanje z ulomki
- napajanje z energijo preko sončnih celic
- 2 leti garancije

Model	Redna cena	Cena za bralce Preseka
TI-36XS	3.864,-	3.284,-
TI-80	12.075,-	10.264,-
TI-83	23.215,-	19.733,-
TI-89	37.716,-	32.059,-

Cena že vključuje 5% p.d.

Poleg navedenih modelov si lahko v našem podjetju ogledate in preizkusite tudi ostale kalkulatorje Texas Instruments.

Modele s popustom lahko naročite tudi po tel.: **061 189 69 20** - navedite, da ste bralec revije **Presek**. Kalkulator vam bomo poslali po pošti - plačilo ob prevzemu.

MEDIS

MEDIS, Brnčičeva 1, Ljubljana
Tel.: 061 189 69 10, faks: 061 189 69 90
e-mail: pc.biro@medis.si

