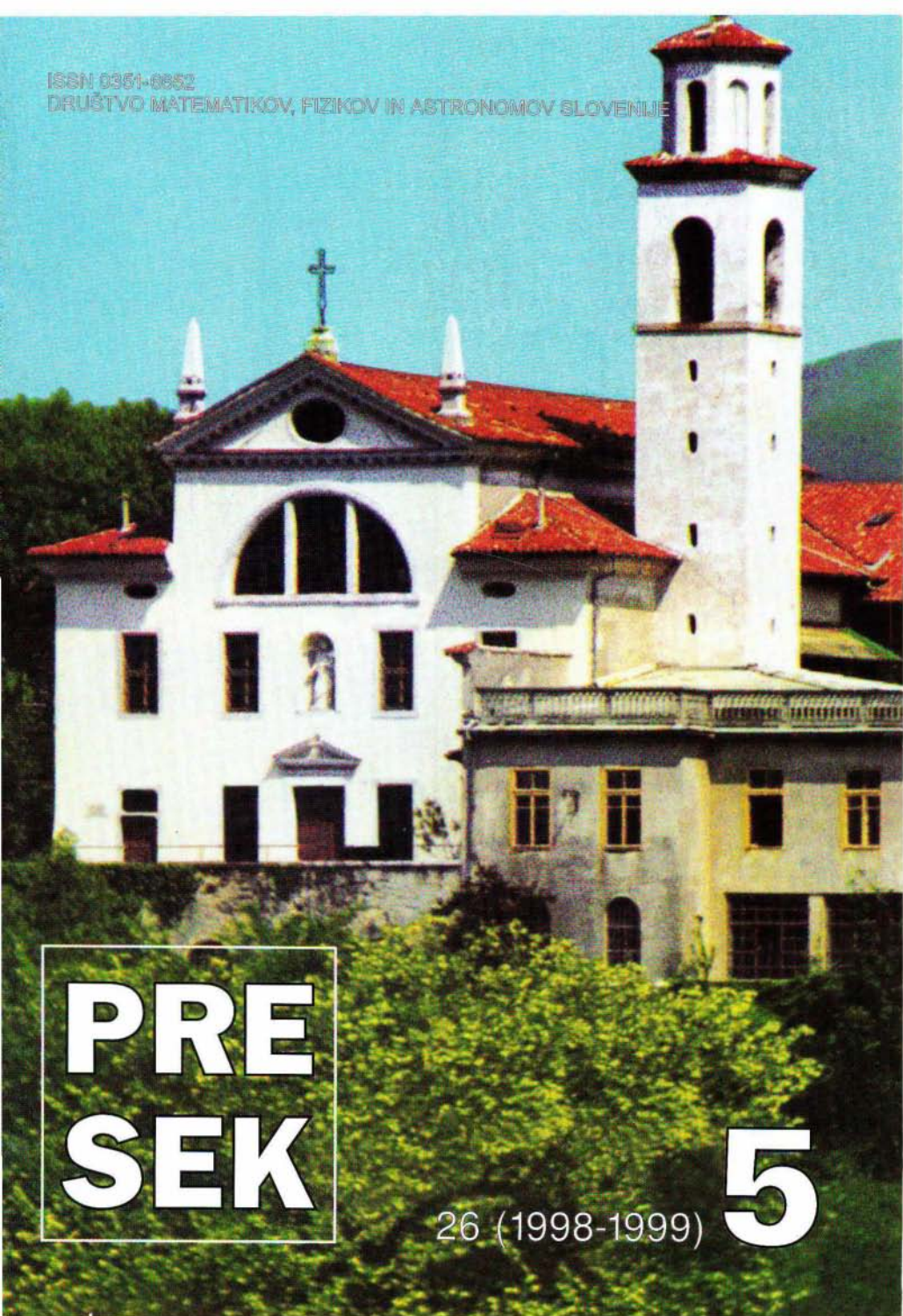


ISSN 0351-0852

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



**PRE
SEK**

26 (1998-1999)

5



Zgoraj:

Skupna grobnica zadnjih Bourbonov v frančiškanskem samostanu na Kosta-njevici v Novi Gorici.



Desno:

Zadnji bourbonski vladar Francije Karel X. Po begu iz Francije je našel zatočišče v Gorici. Na njegovo povabilo je nekaj časa živel v naših krajih in v Močnikovi bližini veliki francoski matematik Augustin Cauchy.

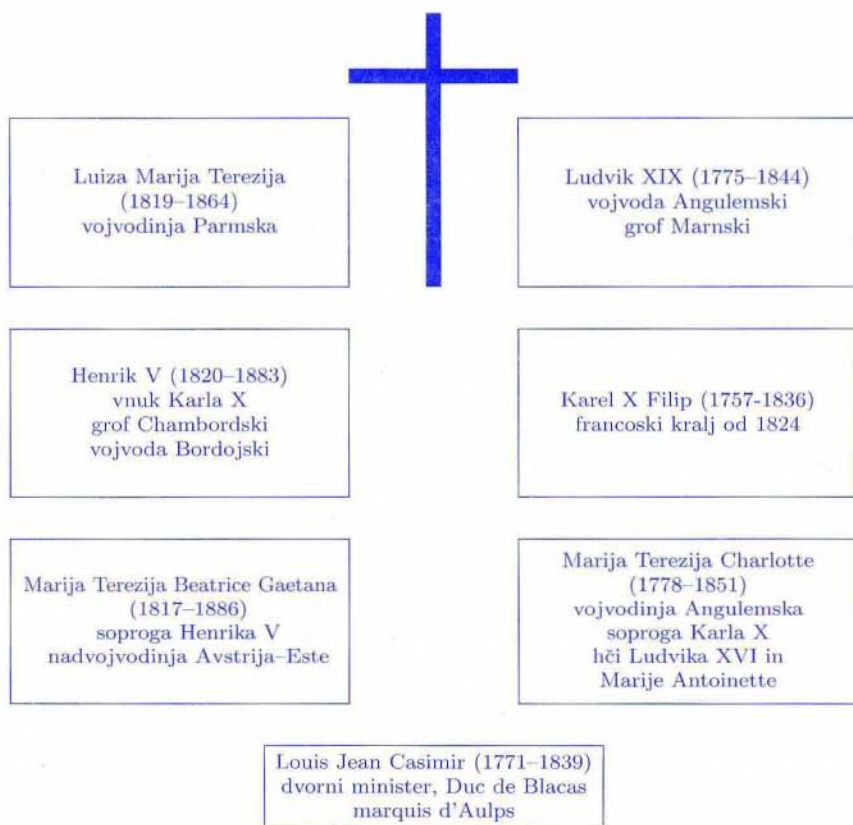
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, leto 1998/99, številka 5, strani 257–320

VSEBINA

MATEMATIKA	Dr. Franc Močnik in Cauchyjeva metoda (Marko Razpet)..... 258-263 Erdős-Mordellova neenakost (Roman Drnovšek) ... 294-301
FIZIKA	Galilejev termometer (Vida Kariž Merhar)..... 280-281 Hallov pojav (Janez Strnad)..... 290-293
ASTRONOMIJA	Zodiak (Marijan Prosén) 268-272 Kako smo spoznavali pulzarje (Andrej Čadež)..... 282-287
RAČUNALNIŠTVO	Kochova snežinka (Matija Lokar) 274-278
NALOGE	Prelaganje žetonov (Dragoljub M. Milošević, prir. Marija Vencelj) 266 Računalo za seštevanje v petiškem sestavu (Marija Vencelj) 279
REŠITVE NALOG	Razgibani nizi – s str. 229 (Martin Juvan) 263-266 Želite zaposlitev pri Microsoftu? – s str. 212 (Matija Lokar)..... 287 Razreži na skladne dele – s str. 217 (Dragoljub M. Milošević)..... 301 Križanka "Ob 250-letnici rojstva" – s str. 224 (Marko Bokalič)..... 293
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Križanka z geslom (Darjan Trupi) 267 Križanka "Planeti našega Sonca" (Marko Bokalič) . 288-289
PISMA BRALCEV	Geometrijski asistent (Matej Šekoranja)..... 273
NOVE KNJIGE	Tekmujmo za Vegova priznanja 2 – Zbirka rešenih nalog s področnih in državnih tekmovanj od 1992 do 1998 (Sandi Klavžar) 272
TEKMOVANJA	34. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – rešitve s str. 242 (Aleksander Potočnik) 302-303 18. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve s str. 243 (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač)..... 303-306 42. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – rešitve s str. 246 (Matjaž Željko) 306-311 Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz fizike v šolskem letu 1997/98 – s str. 249 (Bojan Golli) 311-319 Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado (Matjaž Željko)..... 319-320
NA OVITKU	Slike k članku na strani 258..... I, II Zodiak (glej astronomski članek na strani 268)..... IV Zaključek članka s strani 263..... III

DR. FRANC MOČNIK IN CAUCHYJEVA METODA

Na začetku 17. stoletja so na Kostanjevici pri Gorici zgradili majhno cerkev, ki so ji kasneje pridružili še samostan za karmeličane. Avstrijski cesar Jožef II, sin cesarice Marije Terezije, je proti koncu 18. stoletja dal samostan zapreti, tako kot še mnogo drugih. Leta 1811 so na Kostanjevico prišli frančiškani, ki v samostanu živijo še dandanes (slika na naslovnici). Ustanova premore mnogo zanimivih slik in knjižnico z nekaterimi zelo starimi knjigami. Pod samo cerkvijo pa je grobnica z marmornatimi sarkofagi, v katerih počivajo nekateri člani zadnje francoske kraljeve družine (dinastija Burbonov). Skica prikazuje razpored sarkofagov (glej tudi fotografijo na drugi strani ovitka).



Po bitki pri Waterlooju, kjer je doživel Napoleon dokončen poraz, je leta 1824, po smrti kralja Ludvika XVIII, zasedel francoski prestol kralj Karel X Filip (slika na drugi strani ovitka). Toda leta 1830 je prišlo v Franciji do revolucije in Karel X ter njegov sin Ludvik XIX sta se morala odpovedati prestolu v korist Henrika V, ki pa nikoli ni vladal. Kralj Karel X s spremstvom je moral zbežati iz Francije. Nekaj časa se je mudil na Škotskem in Češkem, nato pa je dobil zatočišče pri grofu Coronini v Gorici, kjer je kmalu po prihodu zbolel za kolero in umrl.

Marija Terezija Beatrice Gaetana ima največ zaslug zato, da zadnji Burboni počivajo v skupni grobnici v frančiškanskem samostanu na Kostanjevici, kar je bila poslednja želja Henrika V. Med prvo svetovno vojno so bili sarkofagi zaradi soške fronte prepeljani na varen kraj blizu Dunaja, leta 1932 pa nazaj na Kostanjevico.

Kaj imajo zadnji Burboni pravzaprav opraviti z matematiko? Tedaj živeči znani francoski matematik Augustin Louis Cauchy (1789–1857) je bil goreč privrženec francoskih kraljev. Kot matematik, podvržen strogemu načinu razmišljanja, je menil, da samo kralj s trdo roko lahko naredi zopet red v državi. Po revoluciji leta 1830 je zato odšel iz Francije in se nekaj časa zadrževal v tujini, dokler ga ni kralj Karel X povabil k sebi v Gorico, da bi bil vnuku Henriku V vzgojitelj in učitelj. Cauchyja je pot res zanesla v Gorico, kjer pa je tiste čase (1832–1836) študiral bogoslovje Franc Močnik (1814–1892). Močnik ni postal duhovnik, ampak učitelj na goriški normalki (1836–1846), hkrati pa je študiral na graški univerzi, kjer je leta 1840 doktoriral. Vsi ga najbolj poznamo po njegovih računicah.

Kaže pa, da je Cauchy, kot eden glavnih matematikov prve polovice 19. stoletja, v Gorici naredil na Močnika izredno velik vtis. Morda se je Močnik ravno zato odločil za matematiko in šolske zadeve. Ni sicer popolnoma znano, kako dobro sta se pravzaprav moža osebno poznala. Edino dejstvo, ki sploh govori v prid poznanstva, je izdajateljeva opomba skoraj 100 strani dolge, v nemščini napisane razprave, ki jo je Močnik objavil na Dunaju leta 1839 in ima naslov *Theorie der numerischen Gleichungen mit einer Unbekannten*, kar pomeni *Teorija numeričnih enačb z*



Augustin Louis Cauchy

eno neznanko. Naslovu sledi še daljši podnaslov *Mit besonderer Rücksicht auf die neueste von Cauchy erfundene allgemeine Auflösungsmethode*, kar pomeni *S posebnim ozirom na najnovejšo splošno metodo reševanja, ki jo je iznašel Cauchy*. S to edino znanstveno razpravo se je Močnik, star 25 let, uveljavil v matematičnem svetu kot avtoriteta, kar mu je še kako koristilo kasneje, recimo pri šolskih reformah.

In izdajateljeva opomba? Pravi, da je Močnik v svoji skromnosti zamolčal, da je imel v Gorici veliko priložnost in srečo delati v neposredni bližini Cauchyja, ki je tam več let vzgajal in učil vojvodo Bordojskega. In da taka povezanost obeh matematikov daje objavljeni razpravi še posebno vrednost.



Franc Močnik

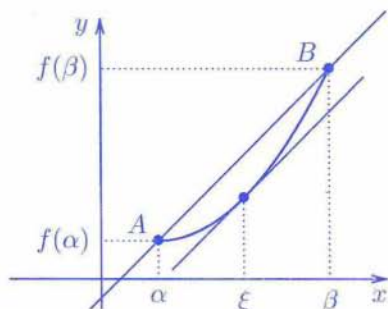
Zakaj v razpravi pravzaprav gre? Močnik obravnava postopek za numerični izračun pozitivnih ničel polinomov z realnimi koeficienti. Nemško govorečim bralcem je podal Cauchyjevo metodo v dostopnejši in razumljivejši obliki. Cauchy je bil eden od prvih, v današnjem smislu strogih in doslednih matematikov, ki je trajneje vplival na Močnika in njegova dela.

Kaj lahko na kratko povemo o sami Cauchyjevi metodi? Metoda v omenjeni razpravi je precej splošna, zato si oglejmo najenostavnejšo, linearno metodo.

Naj bo $f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \dots + f_1 x + f_0$, kjer je $f_n \neq 0$ in $n > 1$, polinom z realnimi koeficienti. Odvod polinoma $f(x)$ je polinom $f'(x) = n f_n x^{n-1} + (n-1) f_{n-1} x^{n-2} + \dots + f_1$. Geometrijsko pomeni $f'(x_0)$ naklon tangente na graf polinoma $f(x)$ v točki $T_0(x_0, f(x_0))$. Če ima $f(x)$ pozitivne koeficiente, ima $f'(x)$ tudi pozitivne koeficiente.

Polinom $f(x)$ z realnimi koeficienti naj ima na intervalu (a, b) , kjer je $0 \leq a < b$, natanko eno ničlo x_0 . To pomeni, da je $f(x_0) = 0$. To ničlo bi radi približno izračunali, ker natančne ne znamo najti. Zapišimo $f(x) = p(x) - q(x)$, kjer imata polinoma $p(x)$, $q(x)$ pozitivne koeficiente. Potem pri pogoju $a < x < b$ očitno veljata relaciji $p'(a) < p'(x) < p'(b)$ in $q'(a) < q'(x) < q'(b)$. Zato velja na intervalu (a, b) relacija: $p'(a) - q'(b) < < f'(x) < p'(b) - q'(a)$.

Opazujemo graf polinoma $f(x)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$, kjer je $\alpha < \beta$. Kot je znano, je smerni koeficient premice skozi točki $A(\alpha, f(\alpha))$ in $B(\beta, f(\beta))$ enak $(f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha)$. Tej premici je vzporedna vsaj ena tangenta na graf polinoma $f(x)$ na obravnavanem intervalu. To pomeni, da vsaj za eno točko ξ med α in β velja: $f'(\xi) = (f(\beta) - f(\alpha))/(\beta - \alpha)$ oz. $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha)$.



Uporabimo sedaj to trditev na intervalu $[a, x]$, kjer je $a < x < b$. Torej lahko najdemo med a in x , tako točko ξ_1 , za katero velja $f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x - a)$. Prav tako lahko najdemo med x in b tako točko ξ_2 , za katero velja $f(b) - f(x) = f'(\xi_2)(b - x)$. Iz zadnjih dveh relacij in iz mej za odvod polinoma $f(x)$ na intervalu (a, b) dobimo relaciji

$$f(a) + (x - a)(p'(a) - q'(b)) < f(x) < f(a) + (x - a)(p'(b) - q'(a))$$

in

$$f(b) + (x - b)(p'(b) - q'(a)) < f(x) < f(b) + (x - b)(p'(a) - q'(b)),$$

ki veljata na intervalu $[a, b]$. Tam torej velja $h(x) \leq f(x) \leq H(x)$, kjer sta $H(x)$ in $h(x)$ linearna polinoma

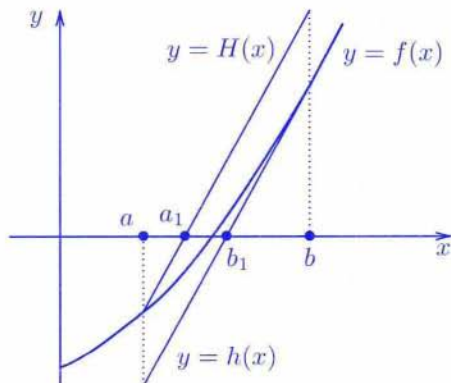
$$H(x) = f(a) + (x - a)(p'(b) - q'(a)), \quad h(x) = f(b) + (x - b)(p'(b) - q'(a)).$$

Očitno je $H(a) = f(a)$ in $h(b) = f(b)$.

Vzemimo najprej, da je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$. Ničli funkcij $H(x)$ in $h(x)$ sta po vrsti

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{p'(b) - q'(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{p'(b) - q'(a)}.$$

Število a je spodnji, b pa zgornji začetni približek za ničlo x_0 polinoma $f(x)$, števili a_1 in b_1 pa sta boljše približka za x_0 in zato velja: $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$.



Ker je $0 = H(a_1) > f(a_1)$ in $0 = h(b_1) < f(b_1)$, lahko opisani račun ponovimo na intervalu (a_1, b_1) , dobimo nov interval (a_2, b_2) itd. Če postopek dovolj dolgo nadaljujemo, dobimo ničlo polinoma $f(x)$ tako natančno, kot želimo.

V primeru $f(a) > 0, f(b) < 0$ obravnavamo polinom $-f(x)$, ki ima iste ničle kot $f(x)$, polinoma $p(x)$ in $q(x)$ pa zamenjata vlogi.

Primer: Polinom $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x - 1$ ima pozitivno ničlo na intervalu $(2, 3)$, saj je $f(2) < 0$ in $f(3) > 0$. Ker je $f(x) = (x^4 + 5x^2) - (3x^3 + 6x + 1)$, lahko uporabimo opisani postopek za $p(x) = x^4 + 5x^2, q(x) = 3x^3 + 6x + 1, p'(x) = 4x^3 + 10x, q'(x) = 9x^2 + 6, a = 2, b = 3$.

Približke a_n in b_n za $n \geq 1$ v tabeli računamo po formulah:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{p'(b_n) - q'(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{p'(b_n) - q'(a_n)}.$$

Pri tem vzamemo: $a_0 = 2, b_0 = 3$.

n	a_n	b_n
0	2.000000	3.000000
1	2.010417	2.729167
2	2.023925	2.512316
3	2.040438	2.342643
4	2.058834	2.217320
5	2.076058	2.136587
6	2.087190	2.099115
7	2.090406	2.090964
8	2.090593	2.090594
9	2.090593	2.090593

Pozitivna ničla polinoma je torej $x_0 = 2.090593$. Polinom $f(x)$ ima še eno realno ničlo na intervalu $(-1, 0)$, saj je $f(-1) > 0$ in $f(0) < 0$. Najprej zamenjamo x z $-x$, tako da iščemo ničlo polinoma $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x - 1$ na intervalu $(0, 1)$. Ker je $f(0) < 0$ in $f(1) > 0$, lahko uberemo zgornji postopek, z drugačnima polinomoma $p(x)$ in $q(x)$, in dobimo ničlo $x_0 = 0.146994$, ki pa se za predznak razlikuje od ničle prvotnega polinoma. Prvotni polinom ima dve realni ničli: $x_1 = -0.146994$ in $x_2 = 2.090593$.

Marko Razpet

RAZGIBANI NIZI – Rešitev s str. 229

Poiskati želimo po abecedi 1999. razgibani niz, ki bo sestavljen le iz znakov A, B in C. Spomnimo se, da je niz znakov razgiban, če ne vsebuje dveh enakih zaporednih strujenih podnizov.

Prvih pet razgibanih nizov je:

A, AB, ABA, ABAC, ABACA.

In kako poiščemo naslednji razgibani niz? Najprej na konec zadnjega niza poskušamo dodati črko A. Če je dobljeni niz razgiban, je to po abecedi naslednji niz. Toda niz ABACAA ni razgiban. Zato namesto črke A poskusimo dodati po abecedi naslednjo črko, črko B. Tokrat dobimo razgibani niz

ABACAB.

Ko iščemo naslednji niz, zopet najprej poskusimo s črko A. Dobljeni niz

ABACABA

je razgiban. Ko pa temu nizu dodamo A, B ali C, nikoli ne dobimo razgibanega niza. Razgibanega niza ABACABA se torej ne da podaljšati, treba ga bo spremeniti. Ker moramo poskušati po abecedi, zadnjo črko iz A spremenimo v B. Dobljeni niz se konča z dvema B-jema, torej ni razgiban. Nato poskusimo zadnjo črko spremeniti v C. Tokrat dobimo razgibani niz

ABACABC.

(Če tudi ta niz ne bi bil razgibani, bi zadnjo črko odvrgli – na tem mestu smo poskusili že vse možnosti – in poskusili s “povečano” predzadnjo itn. Ker je razgibanih nizov iz črk A, B in C neskončno (že v besedilu naloge smo omenili, da dokaz tega dejstva ni prav preprost, morda ga bomo prikazali v eni od prihodnjih številčk Preseka), poskušanje prej ali slej uspe. Če pa bi uporabljali le črki A in B, potem se po šestem nizu zgodi, da odvržemo

vse znake, kar pomeni, da naslednjega razgibanega niza ni.) Na enak način dobimo tudi deveti in deseti razgibani niz:

ABACABCA in ABACABCAC.

Napišimo še program za iskanje razgibanih nizov, ki bo uporabljal opisani postopek. Zapisali ga bomo v programskem jeziku C. Nize bomo gradili v tabeli znakov, imenovali jo bomo niz. Poglejmo "glavni program":

```
/* Iskanje razgibanih nizov po abecedi. */

#include <stdio.h>

#define MAX 1999

/* Globalna spremenljivka, ki pove, koliko nizov še manjka. */
int stevec;

void poisci(char [], int);
int lahkoDodam(char [], int, char);

int main(void)
{
    char niz[MAX + 1]; /* Tabela, v kateri gradimo razgibane nize. */
    int n;              /* Kateri razgibani niz iščemo? */
    int i;

    do {
        printf("Kateri razgibani niz naj poiscem: ");
        scanf("%d", &n);
    } while (n < 1 || n > MAX);

    for (i = 0; i <= MAX; i++) niz[i] = '\0';
    stevec = n; /* Toliko razgibanih nizov moramo poiskati. */
    poisci(niz, 0);
    /* Preverimo, ali smo res našli n razgibanih nizov. */
    if (stevec > 0)
        printf("Ne obstaja %d razgibanih nizov.\n", n);
    else /* Niz smo našli. Izpišemo ga. */
        printf("Po abecedi %d. razgibani niz je:\n%s\n", n, niz);

    return 0;
}
```

V programu najprej v spremenljivko *n* preberemo, kateri razgibani niz iščemo (za rešitev naloge vtipkamo 1999), nato inicializiramo tabelo *niz* (to je pomembno zaradi izpisovanja razgibanega niza pri koncu programa)

in spremenljivko **stevec** ter pokličemo funkcijo **poisci**. Ta opravi glavnino dela. Pri tem v globalni spremenljivki **stevec** šteje, koliko razgibanih nizov je treba še poiskati, da bomo prišli do *n*-tega. Če je po klicu funkcije **poisci** vrednost spremenljivke **stevec** enaka 0, to pomeni, da smo *n*-ti niz našli. Ta zgrajen čaka v tabeli **niz**, zato ga lahko izpišemo. Če pa je vrednost ostala pozitivna, potem niza nismo našli (ker teorija zagotavlja, da niz obstaja, to pomeni, da se je v program prikradla napaka).

Funkcija **poisci** ima dva parametra: tabelo znakov **niz** in celo število **dol**. Pred klicem so v tabelo **niz** na mesta 0, ..., **dol** - 1 že vpisani znaki, ki sestavljajo razgibani niz dolžine **dol**. Na začetku je niz prazen, zato je pri klicu v glavnem programu drugi parameter enak 0.

```
/* Poskusimo podaljšati že zgrajeni niz: niz[0],...,niz[dol - 1]. */
/* Funkcija spreminja globalno spremenljivko stevec. */
void poisci(char niz[], int dol)
{
    char znak; /* Črka, s katero poskušamo podaljšati niz. */

    for (znak = 'A'; znak <= 'C'; znak++)
        if (lahkoDodam(niz, dol, znak)) {
            /* Podaljšamo niz. Tudi ta je razgibani. */
            niz[dol] = znak;
            if (--stevec <= 0) return; /* Našli smo že dovolj nizov. */
            poisci(niz, dol + 1);
            if (stevec <= 0) return;
        }
    niz[dol] = '\0'; /* Počistimo za seboj. */
    return;
}
```

Funkcija **poisci** je napisana rekurzivno. V njej dani niz najprej poskušamo podaljšati s črko A, nato z B, nazadnje pa še s C. Ali bo podaljšani niz razgiban, pove (logična) funkcija **lahkoDodam**. Če podaljševanje uspe, zmanjšamo **stevec** in preverimo, ali je bil to zadnji iskani niz (tedaj s klicem **return** skočimo iz funkcije). Sicer pa z rekurzivnim klicem poiščemo še nadaljnje razgibane nize. Po klicu ne smemo pozabiti še enkrat preveriti, ali smo že našli vse nize ali ne, saj rekurzivni klic običajno zmanjša vrednost spremenljivke **stevec**. Če se zanka **for** izteče, ne da bi našli iskani razgibani niz, potem "počistimo" za seboj in končamo (se vrnemo na prejšnji nivo rekurzije). Na vsakem nivoju rekurzije velja, da če je vrednost spremenljivke **stevec** po klicu funkcije **poisci** pozitivna, potem je vsebina tabele **niz** pred tem klicem enaka kot po njem, vrednost spremenljivke **stevec** pa je zmanjšana za toliko, kolikor je razgibanih nizov dolžine vsaj **dol** + 1, katerih prvih **dol** znakov je enakih tistim, zapisanim

v tabeli niz. Vrstici z `return` skrbita le za štetje najdenih razgibanih nizov in za pravočasen konec rekurzije.

Zapišimo še funkcijo `lahkoDodam`:

```
/* Ali lahko že zgrajeni niz (niz[0],...,niz[dol - 1])
   podaljšamo z znakom znak? */
int lahkoDodam(char niz[], int dol, int char)
{
    int pod; /* dolžina podvojenega podniza */
    int i;

    for (pod = 1; pod <= (dol + 1) / 2; pod++)
        if (niz[dol - pod] == znak) { /* kandidat za podvojeni podniz */
            /* Od zadaj primerjamo podniza niz[dol - pod + 1,...,dol - 1]
               in niz[dol - 2 * pod + 1,...,dol - pod - 1]. */
            for (i = dol - 1; i > dol - pod && niz[i] == niz[i - pod]; i--) ;
            if (i == dol - pod) return 0; /* Podaljšani niz ni razgiban. */
        }
    return 1; /* Podaljšani niz je razgiban. */
}
```

S predstavljenim programom zlahka poiščemo 1999. razgibani niz, sestavljen le iz črk A, B in C. Ta je kar dolg, saj ima 1823 znakov. Ogledate si ga lahko na tretji strani ovitka.

Za vajo lahko poskusite program spremeniti tako, da bo sproti izpisoval zgrajene nize in da bo znal graditi razgibane nize tudi iz več različnih znakov, ne le iz črk A, B in C. Seveda ne pozabite poskusiti, kakšne nize dobite, če dovolite le črki A in B.

Martin Juhan

PRELAGANJE ŽETONOV

Na mizi so trije kupi žetonov. Posameznemu kupu lahko v vsaki potezi dodamo ali od njega odvezamemo toliko žetonov, kolikor jih je na ostalih dveh kupih skupaj, npr. $(10, 7, 3) \rightarrow (10, 20, 3)$ ali $(10, 7, 3) \rightarrow (0, 7, 3)$.

Igro igrata izmenično vsak po eno potezo dva igralca. Zmaga tisti, ki prvi doseže, da je en kup prazen.

Janez in Miha sta začela igro s kupi, v katerih je bilo 1999, 199 in 19 žetonov. Kdo zmaga, če oba igrata optimalno dobro in je Janez prvi na potezi?

Dragoljub M. Milošević, prir. Marija Vencelj

KRIŽANKA Z GESLOM

Uganko reši v skladu z naslednjimi navodili:

1. Reši številsko križanko.
2. Dobljene številke zamenjaj s črkami, kot je razvidno iz tabele.
3. Rešitev uganke dobiš, če dobljeno besedilo prebereš po vodoravnih vrstah, začeniš v zgornjem levem kotu.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E	T	Č	K	S	B	P	O	A	N

Vodoravno:

1. $\sqrt{196}$.
3. $5^2 + 3^2 + 22 < x < 31 + 3^3$ in $x \in \mathbb{N}$. Kolikšen je x ?
5. Tanja je stara 36 let in je od Tineta starejša 11 let. Ko se je rodil Tadej, je imel Tine 17 let. Koliko let ima Tadej?
6. Polž preleze v eni uri 360 mm. Koliko mm preleze v eni sekundi, če leze enakomerno.
7. Mama je kupila 1 kg bonbonov in jih enakomerno razdelila med 5 otrok. Koliko kg bonbonov je dobil vsak?
9. Zapiši število $\frac{7}{5} - \frac{1}{2}$ v decimalnem zapisu.
11. Kolikšna je hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama 6 in 8?
13. $6xy + 20y = 222$ in $y = 3$. Poišči x .
14. $\sqrt{x} = 6$; $x = ?$
15. $\frac{100-19}{x} = 9$; $x = ?$

1	2		3	4
5		6		
7	8		9	10
	11	12		13
14			15	

Navpično:

1. Kolikšna je vsota notranjih kotov trikotnika?
2. Rešitev enačbe $3x + 5(x + 6) + x = 66$.
3. Kot $\frac{17\pi}{6}$ v stopinjah.
4. Po velikosti četrto liho število.
6. $\sin 180^\circ$.
8. Volumen kvadra z robovi 12, 6 in 3 enote.
10. Petdeseto sodo število zmanjšano za prvo liho število.
12. $\cos 90^\circ$.
14. Rešitev enačbe $25 - x^2 = 4^2$.
15. 3^2 .

Darjan Trupi in Marko Perc, dijaka ŠC Celje,
prir. ured.

ZODIAK

Jasnega dne lahko opazujemo Sonce, kako se navidezno giblje prek neba. Zjutraj vzide na vzhodnem delu obzorja, dopoldne se dviga, opoldne je na južni strani neba najvišje nad obzorjem, popoldne se Sonce spušča; na zahodnem delu obzorja pa zvečer zaide.

To je *navidezna dnevna* pot Sonca nad obzorjem; poteka od vzhoda proti zahodu. V mislih si jo lahko dopolnimo z nočno potjo od zahoda do ponovnega vzhoda, ko je Sonce pod obzorjem in ga ne vidimo. Navidezno rečemo zato, ker gibanje Sonca na nebu ni resnično. Nam se tako le zdi, saj nastopi zaradi vrtenja Zemlje od zahoda proti vzhodu.

Za razumevanje, kaj je resnično in kaj navidezno, naredite tale poskus: Pred seboj iztegnjeno roko premikajte tako, da jo projicirate na nebo, torej vidite na nebu. Roka se giblje resnično, na nebu glede na kak oblak (značilni predmet) pa lahko opazujete njeno navidezno gibanje. Ptice, letala, oblaki se gibljejo v zraku nad vami, vi pa jih vidite na nebu. To je njihovo navidezno gibanje.

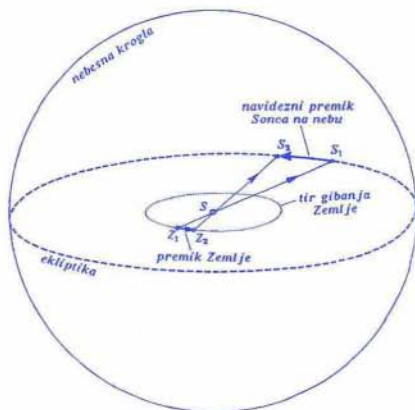
V istem kraju se vzhajališče in zahajališče Sonca med letom spreminjata in s tem navidezna dnevna pot Sonca. Opoldne vsakega dne je Sonce različno visoko. Vse to pomeni, da Sonce spreminja lego glede na zvezde, ki ne spreminjajo medsebojnih leg na nebu.

Večina zvezd vzhaja in zahaja kot Sonce. Določena zvezda pa ima vedno isto vzhajališče in prav tako isto zahajališče. O tem se lahko prepričamo, če opazujemo, kje na obzorju vzide in kje zaide kaka svetlejša, dobro znana zvezda.

Razen dnevnega *navideznega* gibanja ima Sonce tudi *navidezno letno gibanje*. Med letom se premika glede na zvezde. To gibanje *poteka od zahoda proti vzhodu*, torej v nasprotni smeri od dnevnega. Sonce naredi en navidezni obhod (360°) po nebesni krogli v 365 dneh, to je v enem letu, ko Zemlja obkroži Sonce. V enem dnevu se Sonce glede na zvezde premakne za $360^\circ/365$, kar je nekaj manj od 1° . Navidezni letni poti Sonca rečemo *ekliptika* (slika 1).

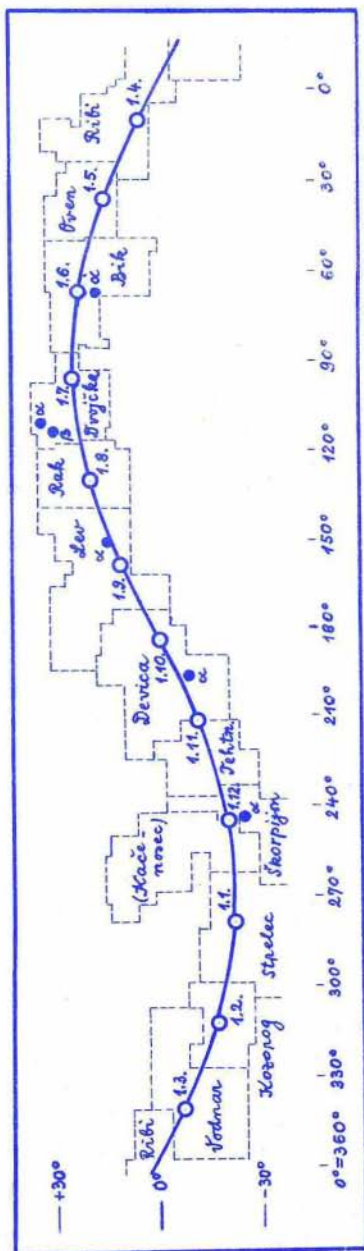
Navidezna letna pot rečemo zato, ker ta pot Sonca med zvezdami ni resnična. Ker kroži Zemlja okrog Sonca, se nam zdi, da se Sonce premika. To je tako, kot se nam zdi, da se premikajo sicer mirujoče hiše in drevesa glede na ozadje, če jih opazujemo iz drvečega vlaka ali avtomobila.

Ekliptiko lahko prikažemo kot krožnico na nebesni krogli ali pa kot valovito črto – val, sestavljen iz hriba in doline (slika 2). Ekliptika prečka



Slika 1. Navidezna letna pot Sonca na nebu (ekliptika) – posledica kroženja Zemlje okrog Sonca. Z_1 – lega Zemlje v času t_1 (npr. 15. 3.), Z_2 – lega Zemlje v poznejšem času t_2 (npr. 15. 4.), S_1 – navidezna lega Sonca v času t_1 , S_2 – lega Sonca v t_2 . Z Zemlje v legi Z_1 , "vidimo" Sonce v smeri Z_1S_1 , z Z_2 pa v smeri Z_2S_2 . Pri premaknitvi Zemlje iz Z_1 v Z_2 , se Sonce na nebu premakne iz S_1 v S_2 . V mesecu dni se Sonce navidezno premakne iz enega v drugo ozvezdje zodiaka. V enem letu navidezno prečka vseh 12 ozvezdij. Tako naredi Sonce ravno en navidezni obhod preko celotnega neba.

Slika 2. Ekliptika, prikazana kot krivulja. Krožci s piko označujejo na krivulji navidezne lege Sonca vsakega prvega v mesecu. Dne 1. 9. je Sonce navidezno v ozvezdju Lev blizu njegove glavne zvezde (α) Regul. Na krivulji lahko ugotovimo, kje (ozvezdje) in kdaj (datum) se navidezno giblje Sonce med letom; najdaljši dan (22. 6.), "ko je Sonce najvišje na krivulji" (v ozvezdju Dvojčka oz. znamenju Rak), najkrajši dan (22. 12.), "ko je Sonce najnižje na krivulji" (v ozvezdju Strelec oz. znamenju Kozorog).



določena ozvezdja, kar pomeni, da med letom Sonce navidezno prečka ta ozvezdja. V različnih dneh leta je Sonce navidez v različnih ozvezdjih. Ker imajo ta ozvezdja večinoma imena po živalih, se pas ozvezdij ($\pm 8^\circ$) ob ekliptiki imenuje *živalski pas* ali *zodiak*. Pesniško mu rečejo tudi živalska cesta (slika 3).

V enem letu Sonce navidez prečka naslednjih dvanajst ozvezdij zodiaka: Oven, Bik, Dvojčka, Rak, Lev, Devica, Tehtnica, Škorpion, Strelec, Kozorog, Vodnar, Ribi.

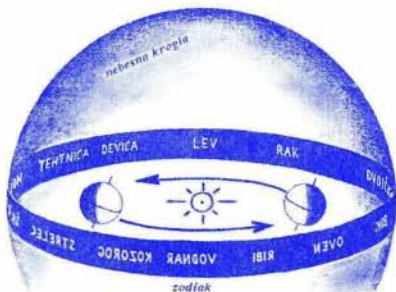
Na ekliptiki leži točka, ki ji rečemo *pomladišče* ali *točka Gama*. Označujemo jo s simbolom (znamenjem) ozvezdja Oven – ♈. Pomladišče je točka, v katero pride Sonce pri svojem navideznem letnem gibanju ob spomladanskem enakonočju (okoli 21. 3.).

V vesolju in tako tudi na nebu se vse giblje. Premika se tudi pomladišče.

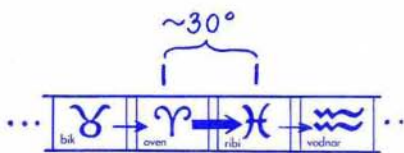
Zemljo si lahko predstavljamo kot vrtavko s poševno vrtilno osjo. Zaradi privlačne sile Sonca in Lune Zemljina vrtilna os opleta – opisuje plašč stožca v prostoru. To ima za posledico, da se *pomladišče zelo počasi, vendar vztrajno, navidezno premika po ekliptiki od vzhoda proti zahodu*. Zaradi tega se spreminja navidezna podoba zvezdnega neba ali drugače povedano, spreminjajo se lege zvezd glede na ♈, ki predstavlja izhodišče koordinatnega sistema na nebu.

Pomladišče naredi en obhod (360°) po ekliptiki približno v 26 000 letih. V enem letu se navidezno premakne za $360^\circ/26\,000 = 360 \cdot 60'/26\,000$, kar je približno $1'$ (ena kotna minuta).

V 2000 letih se pomladišče navidezno premakne za $2000'$, to je za $2000'/60$, kar je okoli 30° . V 2000 letih torej pomladišče navidezno prepotuje iz enega v drugo zodiasko ozvezdje. Ob začetku našega štetja, ko so "sestavljali" ozvezdja, je bilo pomladišče v ozvezdju Oven. Takrat so pomladišče označili s simbolom ♈ tega ozvezdja. Do danes se je pomladišče premaknilo v ozvezdje Ribi, Ovnov simbol (znamenje) pa je ostal.



Slika 3. Zodiak. Kadar je npr. Sonce navidezno v ozvezdju Škorpion, tega ozvezdja ne moremo videti, saj je na nebu podnevi, pač pa lahko opazujemo ponoči njemu nasprotna zodiaska ozvezdja, ki sta v našem primeru Dvojčka in Bik.



Slika 4. Premaknitev pomladišča; pred približno 2000 leti je pomladišče ležalo v ozvezdju Ovna, do danes pa se je premaknilo v ozvezdje Ribi.

Razlikovati moramo med zodiaskimi ozvezdji in zodiaskimi oz. nebesnimi znamenji. Zodiaska znamenja so dobila ime po dvanajstih zodiaskih ozvezdijih, ki so bila v teh legah pred 2000 leti. Zodiaska znamenja razdelijo ekliptiko na 12 povsem enakih delov, zodiaska ozvezdja pa ne. Vsako znamenje obsega $360^\circ/12 = 30^\circ$ na ekliptiki.

Pred 2000 leti so se zodiaska znamenja ujemala z zodiaskimi ozvezdji. Zaradi premaknitve pomladišča za 30° so se z njo premaknila tudi znamenja stran od ozvezdij, po katerih so dobila ime. Sedaj enako imenovano znamenje in ozvezdje nimata več iste lege, ki se šteje prav od izbrane točke na nebu – pomladišča. Zato izjava, da je Sonce danes v določenem ozvezdju, ne pomeni, da je v istoimenskem znamenju. To kaže naslednja preglednica:

Zodiasko ozvezdje	Čas gibanja Sonca v ozvezdju	Zodiasko znamenje	Čas gibanja Sonca v znamenju
Ribi	12.3. – 18.4.	Oven	21.3. – 20.4.
Oven	19.4. – 13.5.	Bik	21.4. – 21.5.
Bik	14.5. – 20.6.	Dvojčka	22.5. – 21.6.
Dvojčka	21.6. – 19.7.	Rak	22.6. – 22.7.
Rak	20.7. – 9.8.	Lev	23.7. – 23.8.
Lev	10.8. – 15.9.	Devica	24.8. – 23.9.
Devica	16.9. – 30.10.	Tehtnica	24.9. – 23.10.
Tehtnica	31.10. – 22.11.	Škorpion	24.10. – 22.11.
Škorpion	23.11. – 29.11.	Strelec	23.11. – 21.12.
(Kačenossec)	30.11. – 17.12.		
Strelec	18.12. – 18.1.	Kozorog	22.12. – 20.1.
Kozorog	19.1. – 15.2.	Vodnar	21.1. – 18.2.
Vodnar	16.2. – 11.3.	Ribi	19.2. – 20.3.

Povezava med zodiaskim ozvezdjem in znamenjem. Zaradi navideznega premikanja pomladišča se znamenja premikajo v smeri proti zahodu glede na istoimenska ozvezdja. Če smo bili npr. rojeni v znamenju Ribi, je bilo Sonce ob našem rojstvu v ozvezdju Vodnar.

Opomba: Pri svojem navideznem letnem gibanju prečka Sonce med ozvezdjem Škorpion in Strelec tudi del ozvezdja Kačenossec (Ofijuh). Tega ozvezdja pa ne moremo jemati za zodiškega, saj se ga velika večina razteguje zelo daleč od ekliptike. Zodiaskim ozvezdjem včasih rečemo tudi ekliptiška ozvezdja, saj ležijo neposredno ob ekliptiki. V vsakem od zodiaskih ozvezdij se Sonce navidezno zadržuje nekaj časa, od enega tedna do enega meseca, odvisno od tega, kako razsežno je ozvezdje. V zodiaskem znamenju pa se zadržuje točno en mesec.

V davnini so ljudje videli zodiak kot velik pas ozvezdij, ki krožijo po nebu. Za njih je bila to sveta pot, po kateri potujejo Sonce, Luna in planeti. Za mnoge je v preteklih časih pomenil zodiak veliko nebesno uro. Sonce vzhaja vedno v enem od omenjenih ozvezdij, prav tako tudi Luna in planeti.

Daljna predhodnica astronomije je bila nekakšna naravna astrologija, ki je temeljila na skrbnem opazovanju neba in shranjevanju opazovalnih podatkov. Ukvarjala se je z merjenjem časa v zvezi s koledarjem, določala je letne čase, napovedovala mrke, Lunine mene, vidnost planetov in drugih teles Osončja itn.

Vzporedno z njo pa se je razvijala še druga vrsta astrologije, ki se še danes ukvarja s horoskopi in prerokbami o človeški prihodnosti, predvsem glede počutja, ljubezenskih in denarnih zadev, pomembnih dogodkov itn. Stoletja in stoletja so ljudje opazovali nebo in tudi drug drugega. Skušali so ugotoviti vpliv vesolja na človeka. Ljudi so razvrstili po značaju in splošnih lastnostih v skupine glede na to, v katerem nebesnem znamenju so rojeni. Iz leg zvezd, planetov in Lune ob človekovem rojstvu napovedujejo usodo. Za večino ljudi je to velika zabava in igra, za nekatere dolgočasje in puhlost, nekaj pa jih v to celo verjame.

Marijan Prosén

Slika na IV. strani ovitka: Ozvezdja zodiaka na znamkah

Včasih naletimo na znamko, ki prikazuje kak zanimiv dogodek, nenavaden pojav ali znamenito osebo iz astronomije. Zelo redko najdemo znamko z motivom ozvezdja. Državica San Marino pa je namenila kar celo serijo znamk ozvezdjem, in sicer kar vsem dvanajstim ozvezdjem zodiaka. Kot bivšemu filatelistu so mi jo prinesli domači z izleta po Italiji. Serija mi je všeč. Res je lepa, zato jo posredujem v občudovanje tudi vam.

TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA 2

Zbirka rešenih nalog s področnih in državnih tekmovanj od 1992 do 1998

V Presekovi knjižnici je izšla zbirka rešenih nalog za Vegova priznanja, ki zajema področna in državna tekmovanja od leta 1992 dalje. Ker smo tik pred novim ciklom tekmovanj, ki postaja vedno bolj množično, bo knjižica nepogrešljiv priročnik tekmovalcem in njihovim mentorjem ter nasploh učiteljem. V tej knjižici bomo srečali tudi naloge, kakršnih prej nismo poznali. V zadnjih štirih letih namreč tekmovalci na področnih tekmovanjih poleg standardnih nalog, kjer morajo podati tudi potek reševanja, rešujejo še sklop nalog, pri katerih izmed ponujenih odgovorov izbirajo pravega.

Sandi Klavžar

GEOMETRIJSKI ASISTENT

Dandanes se računalniki vse bolj se uveljavljajo tudi v izobraževanju. V ta namen nastajajo različni programi, ki nam pomagajo pri učenju. Eden takih programov je tudi Geometrijski asistent.

Ko smo pri pouku matematike prešli na geometrijo, sem spoznal programa za risanje geometrijskih konstrukcij *Čabri* in *C.a.r.* Na pobudo profesorja matematike sem se odločil narediti program, ki združuje dobre lastnosti in odpravlja nekatere pomanjkljivosti teh dveh programov. Tako je nastal Geometrijski asistent – program za risanje dinamičnih geometrijskih konstrukcij.

Program omogoča, da iz osnovnih konstrukcij (točka, daljica, poltrak, premica, krožnica, simetrala daljice in simetrala kota) zgradimo željeno konstrukcijo. Vse postorimo zgolj z uporabo miške. Glavna prednost programa je, da konstrukcija ni samo statična, temveč tudi dinamična. Kadarkoli si pri konstrukciji izberemo neko točko, jo lahko premikamo in s tem ustrezno spreminjamo vse povezave z njo.

Geometrijski asistent ima preprost uporabniški vmesnik, ki omogoča hitro in enostavno delo, tako da tudi začetniki z njim ne bodo imeli težav. Kljub preprostosti pa je Geometrijski asistent namenjen tudi konstruiranju zahtevnejših geometrijskih konstrukcij. Vsebuje namreč možnost sledenja točke. Izbrana točka, vezana na konstrukcijo, more za sabo puščati sled, kar je posebno uporabno pri obravnavanju raznih možnosti ali spreminjanju podatkov, od katerih je konstrukcija odvisna. Pri daljših konstrukcijah se nam lahko zgodi, da pozabimo potek konstrukcije. Nič hudega. Geometrijski asistent je zmožen pokazati celoten potek (zgodovino) konstrukcije, korak za korakom, kakor je nastajala.

Geometrijski asistent je napisan v Javi, mogoče pa ga je izvajati tudi preko Interneta. Če hočete program preskusiti, pokukajte na naslov:

<http://library.advanced.org/17426/>

Mogoče bo na voljo že naslednja verzija, ki bo omogočala nekatere konstrukcije v prostoru¹.

Opomba. Geometrijski asistent je nastal kot raziskovalna naloga in je na 4. festivalu računalništva v skupini *Vizualizacija* osvojil prvo mesto. Program sem prijavil tudi na mednarodno tekmovanje v izobraževalnih WWW straneh Think-Quest 98 ter se uvrstil v polfinale.

Matej Šekoranja, dijak SŠER, Ljubljana

¹ Avtor programa nam je poslal še prikaz uporabe programa pri zanimivi konstrukcijski nalogi. Tudi tega si lahko ogledate na zgornjem naslovu na Internetu (op. ured.).

KOCHOVA SNEŽINKA

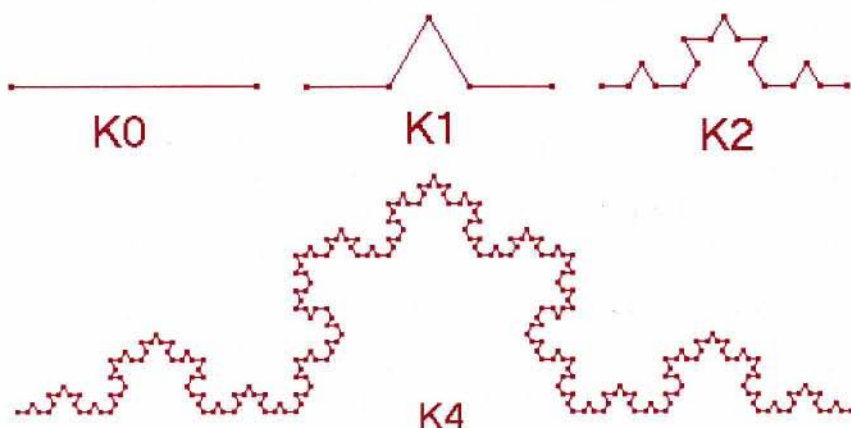
Zima se je poslovila in snežinke bodo kmalu le še oddaljeni spomin. Da ne bo prehod v poletno soparo prehiter, si z računalnikom pričarajmo še malo zimskega vzdušja in narišimo snežinko ali dve.

Naše snežinke bodo seveda nekoliko matematično obarvane. Za osnovo bomo vzeli t.i. Kochovo krivuljo. Ta spada med rekurzivne objekte. Ti nastanejo tako, da z določenim postopkom preoblikujemo osnovni objekt v več enakih objektov. Osnovni objekt je lahko trikotnik, črta, kocka ali kaj drugega. Dobljene objekte z enakim postopkom preoblikujemo naprej. Tako poznamo Peanovo krivuljo, zmajnico, Hilbertovo krivuljo, trikotnik Sierpinskega. Več o teh krivuljah si lahko preberete v članku Cirila Pezdirja, *Nenavadne krivulje*, Presek 18 (1990/91), str. 56–64.

Kochova krivulja

Kochovo krivuljo dobimo tako, da ravno črto (Kochovo krivuljo ničtega reda) razdelimo na tretjine. Srednji del izrežemo in ga nadomestimo z dvema črtama, ki bi skupaj z zbranim delom tvorili enakostranični trikotnik. Dobimo Kochovo krivuljo prvega reda.

Če postopek ponovimo na vseh štirih dobljenih črtah, nastane Kochova krivulja drugega reda. Od tod do Kochove snežinke ni več daleč. Vzamemo enakostranični trikotnik in mu namesto stranic narišemo Kochove krivulje ustreznega reda.



Za risanje rekurzivnih objektov je zelo primeren programski jezik logo. Če ste tega jezika vsaj malo vešči, bo snežinka kaj hitro pred vami. Zanimiv članek o risanju Kochove snežinke najdete tudi na Internetu

na naslovu <http://www.eurologo.org/papers/logomov.html>. A v logu smo v Preseku že veliko programirali. Zato si bomo tokrat ogledali, kako bi snežinko narisali s pomočjo programa DERIVE. Ta program je sicer namenjen predvsem simbolnemu računanju. Ker pa zna narisati točke in v njem lahko definiramo tudi rekurzivne funkcije, bo za našo nalogo povsem primeren.

Risanje točk s programom DERIVE

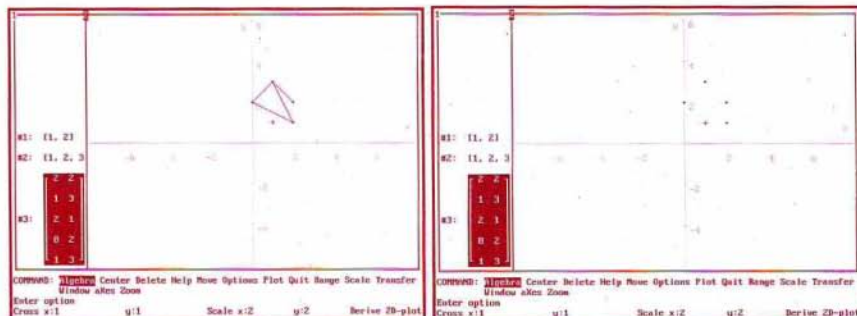
Točko v programu DERIVE podamo kot par koordinat v oglatih oklepajih, pri čemer sta koordinati ločeni z vejico. Tako je koordinatno izhodišče točka $[0,0]$, točka s koordinato $x = 1$ in koordinato $y = 2$ pa v programu DERIVE predstavimo kot $[1,2]$. Če tak izraz (npr. $[1,2]$) narišemo, dobimo narisano točko $(1,2)$.

Če želimo narisati več točk, sestavimo vektor, katerega komponente so spet dvodimenzionalni vektorji – torej matriko velikosti $n \times 2$, kjer je n število točk. Kadar imamo več točk, se lahko odločimo, ali bomo pri risanju točke med sabo povezali ali ne. Ko smo v oknu za risanje (ukaz Plot) z izbiro Options/State, nastavimo Mode v Connected ali pa v Discrete.

```

OPTIONS STATE: Coordinates:(Rectangular)Polar Mode: Connected Discrete
                Size:(Large)Small Follow:(Yes)No Trace: Yes(No)
Select plot point mode
Cross x:1      y:1      Scale x:2      y:2      Derive 2D-plot
  
```

Prva nastavev pomeni, da DERIVE takrat, ko riše več točk, te med sabo poveže, druga nastavev pa, da črt med zaporednimi točkami ne bo.



Če narišemo matriko velikosti 2×2 , dobimo daljico. Začetek daljice določa prva, konec pa druga vrstica matrike.

Kochova krivulja s programom DERIVE

Izračunajmo tri nove točke, ki nastanejo po prvem koraku. Definirajmo tri funkcije. Te vrnejo točke, ki skupaj s krajišči prvotne črte določajo novo črto. Parametra vseh treh funkcij sta začetna in končna točka. Vnesimo z ukazom **Author** vse te tri funkcije. Izrazi z lihimi številkami so komentarji, ki jih lahko izpustimo.

```
#1: "Točka na tretjini med A in B."
#2: TT(a, b) := a + (b - a) / 3
#3: "Točka na dveh tretjinah med A in B."
#4: TDT(a, b) := TT(b, a)
#5: "Točka na osti."
#6: TO(a, b) := (a + b) / 2 + (sqrt(3) / 6) * [(a - b) / 2, (b - a) / 2]

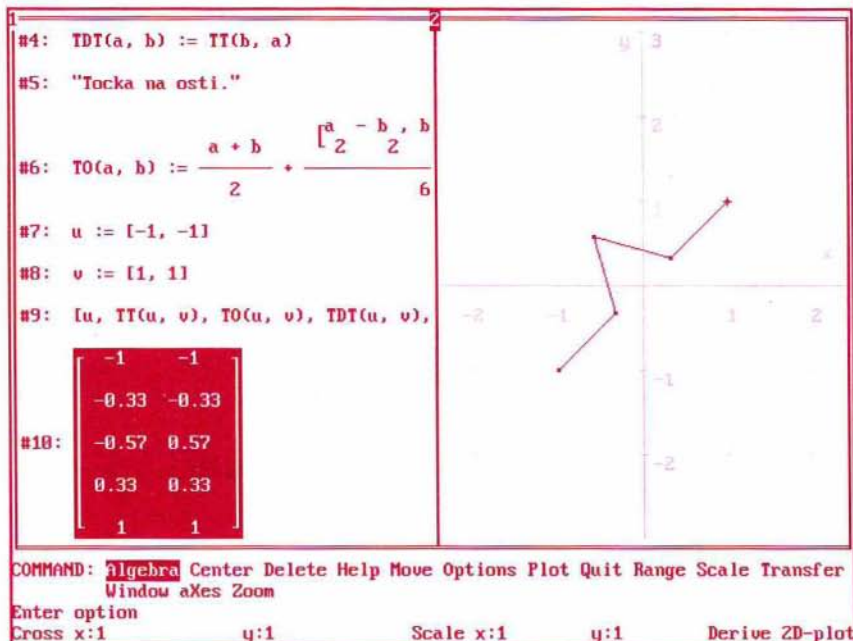
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove move Window approx
Enter option
User Free:100% Ins Derive Algebra
```

Nekaj težav imamo lahko pri vnosu indeksov. Če želimo dobiti koordinato x prve točke, moramo vzeti prvo komponento iz a . To storimo z **a SUB 1**. Zadnjo funkcijo torej vnesemo kot

```
TO(a,b) := (a+b)/2 + SQRT(3)/6 [(a SUB 2-b SUB 2),(b SUB 1-a SUB 1)]
```

Da bomo videli, ali delamo prav, narišimo tako dobljeno črto. Naj bo u začetna točka (denimo $[-1, 1]$) in v končna točka ($[1, 1]$). Narisati moramo torej poligonsko črto $[u, TT(u,v), TO(u,v), TDT(u,v), v]$. Žal DERIVE izraza ne zna narisati kar v taki obliki, ampak ga moramo prej poenostaviti z ukazom **Simplify**. Ne pozabimo, da moramo pri **Options/State** v risalnem oknu nastaviti povezovanje točk.

Za računanje točk, ki določajo krivuljo višjega reda, uporabimo rekuzijo. Če je stopnja krivulje enaka 0, vrnemo krajišči, drugače pa oglišča poligonske črte, ki jo sestavljajo Kochove krivulje, eno nižje stopnje nad odseki: od u do $TT(u,v)$, od $TT(u,v)$ do $TO(u,v)$, od $TO(u,v)$ do $TDT(u,v)$ in od $TDT(u,v)$ do v . Dobimo torej poligonsko črto, sestavljeno iz množice daljic.



Ves naš program za risanje Kochove krivulje je torej:

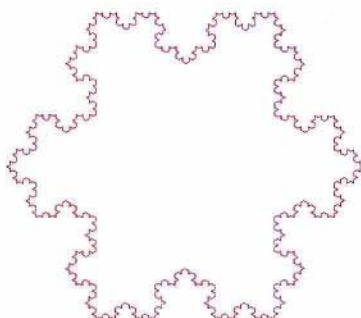
```
"Točka na tretjini med A in B."
TT(a,b) := a + (b - a) / 3
"Točka na dveh tretjinah med A in B."
TDT(a,b) := TT(b,a)
"Točka na osti."
TO(a,b) := (a+b)/2 + SQRT(3)/6 [(a SUB 2-b SUB 2),(b SUB 1-a SUB 1)]
"Kochova crta."
CRTA(a,b,n) := IF(n=0,[a,b],[CRTA(a,TT(a,b),n-1),
                                CRTA(TT(a,b),TO(a,b),n-1),
                                CRTA(TO(a,b),TDT(a,b),n-1),
                                CRTA(TDT(a,b),b,n-1)])
```

Seveda zadnjo funkcijo vpišemo vso v eni vrsti. Sedaj lahko vnesemo izraz

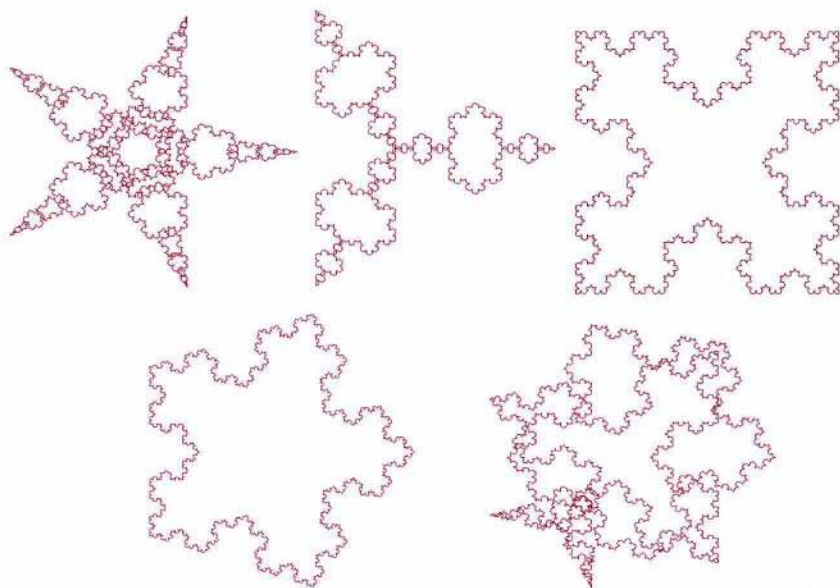
```
CRTA([-2,0],[2,0],3)
```

in ga poenostavimo s **Simplify**. Dobimo dolg vektor točk. Če jih narišemo (**Plot/Plot**), dobimo Kochovo krivuljo tretjega reda med točkama $[-2,0]$ in $[2,0]$.

Če narišemo sedaj Kochovo črto nad oglišči trikotnika, dobimo snežinko. Večjo "nabrazdanost" (stopnjo krivulje) bomo uporabili, lepša bo.



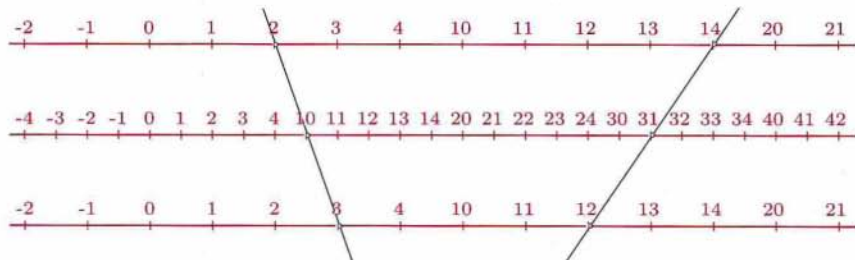
Za bolj zimsko vzdušje pa še nekaj snežink, dobljenih tako, da smo med sabo povezali nekaj Kochovih črt.



Matija Lokar

RAČUNALO ZA SEŠTEVANJE V PETIŠKEM SESTAVU

Skica prikazuje preprost pripomoček za seštevanje v petiškem številskem sestavu, ki ga lahko sami poljubno podaljšate.



Sestavljajo ga tri vzporedne številске premice; pri tem je srednja premica enako oddaljena od zunanjih dveh. Vse tri slike števila 0 leže na isti pravokotnici na številске premice. Enoti na zunanjih premicah sta enaki in dvakrat tolikšni kot enota na srednji premici. Na vseh treh premicah so oznake celih števil zapisane v petiškem sestavu.

Če bi radi sešteli dve števili, poiščemo na zgornji premici sliko enega od seštevancev in na spodnji premici sliko drugega. Ob dobljeni točki prislonimo ravnilo in ob njem na srednji premici preberemo rezultat. Na skici smo ravnilo prikazali s črno premico. Premica *A* prikazuje račun

$$2_{(5)} + 3_{(5)} = 10_{(5)},$$

premica *B* pa

$$14_{(5)} + 12_{(5)} = 31_{(5)}.$$

Res je

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1$$

in

$$(1 \cdot 5 + 4 \cdot 1) + (1 \cdot 5 + 2 \cdot 1) = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1.$$

- Preskusite pravilno delovanje računalu še na nekaj primerih, ki si jih izberite sami.
- Premislite, kako računalu deluje, in dokažite, da vedno pravilno seštevata.
- Ali lahko računalu uporabimo tudi za odštevanje? Kako?
- Napravite podobna računalu za seštevanje v drugih številskih sestavih. Kaj moramo pri tem spremeniti?

Marija Vencelj

GALILEJEV TERMOMETER

Temperaturo merimo z različnimi termometri. Najpogosteje uporabljamo živosrebrne in alkoholne, pogosti pa so tudi kovinski, ki vsebujejo bimetalni trak. Na tem mestu ne bomo govorili ne o enih ne o drugih, pač pa o tistem prvem, ki si ga je leta 1593 omislil Galileo Galilei. Njegov termometer je za kazanje spremembe temperature izkoriščal spremembo volumna zraka med segrevanjem oziroma ohlajanjem. Bil je torej plinski termometer. Enostavno ga lahko naredimo tudi sami. Termometri, ki jih prodajajo v trgovinah kot Galilejeve termometre, se od svojega starega predhodnika razlikujejo tako po obliki kot tudi po principu delovanja.

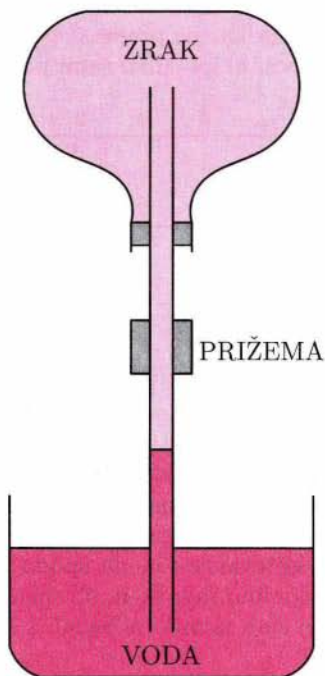
Naredimo najprej stari Galilejev termometer. V posodo z obarvano vodo postavimo pokonci cevko, ki vodi v drugo posodo, v kateri je zaprt zrak (slika 1). Vse skupaj vpnemo v stojalo.

Bučko z zrakom ohladimo. Zraku se volumen manjša in obarvana voda se v cevki dvigne. Ko pa bučko z zrakom segrejemo, se segreti zrak širi po cevki in izpodriva vodo. Čim višja je torej gladina vode v cevki, tem nižjo temperaturo kaže termometer.

Tak termometer ni kaj prida natančen. Delovanje zunanjega zračnega tlaka na obarvano vodo v odprti posodi prav gotovo ni zanemarljivo.

Termometri, ki jih danes prodajajo kot Galilejeve termometre, so veliko bolj lični (slika 2). Toda princip njihovega delovanja je povsem drugačen.

V zaprti posodi je kapljevina, v njej pa enako velike uteži, ki se med seboj rahlo razlikujejo po teži. Vse uteži so v celoti potopljene, lažje so na vrhu, težje pa spodaj. Pri izbrani temperaturi nekatere lebdijo v kapljevini, druge pa ležijo na dnu posode.



Slika 1. Skica Galilejevega termometra.

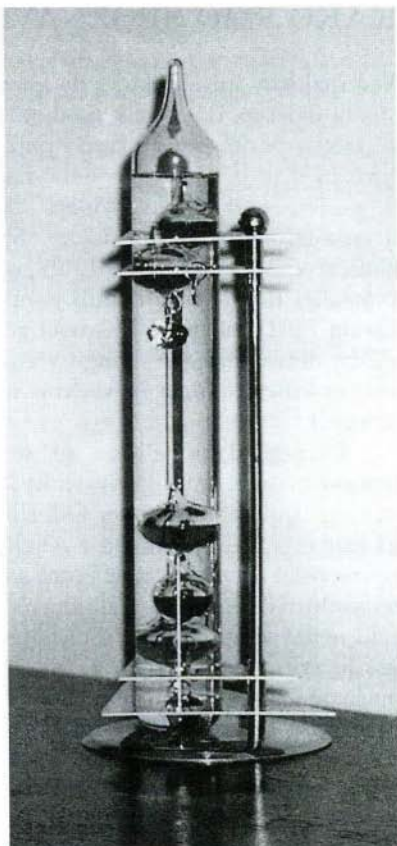
Za utež, ki lebdi, velja, da je sila vzgona kapljavine, ki deluje nanjo, nasprotno enaka njeni teži. S segrevanjem kapljavine se njena gostota zmanjšuje, sila vzgona postane manjša od teže uteži in utež začne padati. Čim višja je temperatura, tem več uteži je na dnu posode. Z ohlajanjem kapljavine se njena gostota večja, sila vzgona postane večja in pri nekaterih utežeh preseže njihovo težo, zato se te uteži dvigajo. Spreminjanje temperature torej povzroča dviganje in padanje uteži.

Tudi utežem, ki so iz stekla, na njih pa je obešena kovinska ploščica, na kateri je označena temperatura, se s segrevanjem nekoliko spremeni gostota. Toda sprememba gostote trdne snovi je veliko manjša kot sprememba gostote kapljavine.

Princip delovanja termometra z utežmi si lahko ogledamo kar v domači kuhinji. V posodo z ohlajeno vodo damo jajce. V vodi raztopimo toliko soli, da jajce v njej lebdi. Pustimo, da se slana voda segreva, in jajce se začne počasi spuščati. Ko pa posodo s slano vodo ponovno ohladimo, se jajce spet dvigne.

V posodo potunkajmo še eno jajce, ki se od prvega, kljub temu, da sta enako veliki, rahlo razlikuje po teži. Tisto jajce, ki ima večjo težo, v celoti lebdi v slani vodi, tisto z manjšo pa malo kuka iz nje. Ko začnemo vodo segrevati, najprej pade na dno posode tisto z večjo težo, tisto z manjšo pa nekaj kasneje, ko se voda bolj segreje. Ko prestavimo posodo z jajcema v hladilnik, je vrstni red dvigovanja obrnjen.

Galilejevi termometri, ki jih danes najdemo v trgovinah, so namenjeni bolj okrasu kot pa merjenju temperature.



Slika 2. Današnji "Galilejev termometer".

KAKO SMO SPOZNAVALI PULZARJE

Več razlogov mi narekuje, da govorim o pulzarjih. Med najpomembnejše spada dejstvo, da je bila predlani Nobelova nagrada za fiziko pravzaprav že tretjič podeljena v zvezi s pulzarji. Torej spadajo te čudne zvezde gotovo med najzanimivejša nebesna telesa. Obstaja pa tudi osebni razlog; dolga leta sem si želel "videti" pulzar in ta želja se mi je pred dobrima dvema letoma prvič uresničila. Skupaj z Bojanom Dintinjano in Mirjam Galičič smo na Golovcu v Ljubljani opazovali mežikanje slavnega pulzarja v meglici Rakovici. Predani jeseni in v marcu lani pa sva z Mirjam opazovala taisti pulzar v Rakovici z velikim 1.82 metriskim teleskopom in z našim detektorjem v Asiagu v Italiji. (Od takrat, ko je bilo to zapisano, smo opazovali pulzar še večkrat na velikih teleskopih, vendar o tem kdaj drugič.)

Če pogledamo v leksikon, se poučimo, da so pulzarji vrteče se nevtronske zvezde, ki oddajajo radijske pulze, ko njihova magnetna polja vplivajo na okoliške elektrone. Odkrili so jih leta 1967 v skupini prof. Hewisha na univerzi v Cambridgeu v Angliji. Najprej seveda niso vedeli, da gre za nevtronske zvezde. Presenečeni so bili, da so opazili radijske zvezde, ki izredno hitro mežikajo – celo do več desetkrat na sekundo. To je bilo nekaj zelo nenavadnega in povsem nepričakovanega. Kako je mogoče, da telo, kot je zvezda, torej telo, ki ima maso Sonca, oziroma 300 000-krat večjo maso od Zemlje, pomežikne nekajkrat v sekundi? Vsakdanja izkušnja nas uči, da se masivni predmeti premikajo oz. spreminjajo počasi. Če udarimo po majhnem zvončku, visoko zapoje, velik pa globoko zadoni. Za ton zvenenja zvona sta odgovorna njegova velikost in hitrost, s katero se zvok širi po kovini. Poje s tako frekvenco, da se vrh vala ujame z vrhom, ko potuje z zvokom naokrog po plašču. Rekli boste, da to ne more biti edini vzrok, zakaj naj velik zvonec doni globoko, majhen pa visoko, saj lahko izberemo za velikega snov z veliko hitrostjo zvoka, za majhnega pa tako, v kateri je zvočna hitrost počasna. Tedaj bo majhen zvonček pel globoko, velik pa visoko. Vendar se pokaže, da je hitrost zvoka v različnih snoveh sicer lahko nekoliko različna, vendar kakšnih posebno velikih razlik med različnimi materiali ne poznamo. Zato zelo velik zvonec vedno doni globoko, zelo majhen pa cinglja visoko. Ta vsakdanja izkušnja nam torej pove tudi to, da se je narava odločila (vsaj na Zemlji) ustvariti snovi, v katerih se zvok širi s hitrostjo nekaj tisoč metrov v sekundi. Lahko je le nekoliko višja ali nekoliko nižja, veliko pa se od te vrednosti ne razlikuje. Tudi zvezde sledijo svoji zakonitosti, ki jo razumemo na podoben način. Njihova snov je v stanju zelo vročega in razmeroma gostega plina, zato se zvok v njih širi s hitrostjo nekaj deset tisoč metrov v sekundi. Tudi zvezde

so lahko zvončki, ki zaradi svoje velikosti donijo zelo, zelo globoko – enkrat zanihajo kvečjemu v nekaj urah, včasih pa traja en nihaj tudi po več kot eno leto. Če je amplituda takih nihanj pri nekaterih zvezdah velika, jih spremlja tudi sprememba sija. Astronomi tovrstna nihanja opazujejo pri nekaterih zvezdah že več kot sto let. Teoretična razlaga opazovanega pojava z nihanjem kot pri zvoncu se zelo dobro ujema z opazovanji zvezd, imenovanih kefeide. Danes poznamo na stotine takih zvezd. Pulzarji pa so bili pravi šok – nekaj tako mogočnega, kot je zvezda, utripa ne samo desetkrat ali stokrat, ampak do več milijonkrat hitreje od normalne zvezde. Zvezda doni (?) skoraj tako visoko kot zvon slavne ure na london-skem parlamentu. Ali res doni? Po dobrem mesecu opazovanj so našli še nekaj nenavadnih lastnosti utripanja pulzarjev. Utripanje je nenavadno enakomerno, njegova perioda pa zelo natančno narašča s časom. Vendar utripanje ni podobno nihanju nihala, pulzar oddaja v zelo kratkih sunkih, ki trajajo le desetino periode ali pa še manj. Mnogi pulzarji oddajo celo dva neenaka pulza v vsaki periodi. Utripanje kefeid ima drugačne značilnosti: nihanje sija je podobno sinusnemu (kot pri nihanju nihala) in je enakomerno, vendar ne povsem. Razlog za to danes dobro razumemo in je podoben kot pri zvonu: če se temperatura zvona malo poviša, se ta raztegne in doni za spoznanje niže kot prej, in obratno, frekvenca se rahlo poveča, če se zvon ohladi. V vrhnjih plasteh mnogih kefeid tečejo razni konvektivni tokovi, ki odnašajo energijo z zvezde. Ker so taki vetrovi slučajni pojavi, odnašajo energijo včasih za spoznanje hitreje, včasih pa za spoznanje počasneje, zato zvezda nima vedno natanko enakih pogojev in za spoznanje spreminja ton, s katerim doni. Nasprotno pa pulzarji brenčijo povsem enakomerno, boljše od najboljših ur, le čedalje bolj (a enakomerno) počasi.

Na osnovi teh podatkov so astronomi prišli do sklepa, da je treba iskati razlago za utripanje pulzarjev drugje. Preprostejšo razlago je obetala hipoteza, da so pulzarji vrteče se zvezde, nekakšni vesoljski svetilniki, ki oddajajo ozek snop (ponavadi radijske) svetlobe. Tega zaznamo, ko nas ob vrtenju oplazi. Obetali so si, da bo mogoče v okviru take hipoteze pojasniti vsaj tri lastnosti utripanja, ki jih tako ločijo od kefeid: utripanje v kratkih pulzih, izredno stabilnost periode in njeno enakomerno in počasno naraščanje. Rešiti pa je bilo treba še problem, zakaj seva zvezda le v eno ali dve smeri kot svetilnik, in predvsem, kako je mogoče, da bi se zvezda zavrtela po nekajkrat v sekundi.

Problem zvona se je pri zadnjem vprašanju pokazal za ključnega. Pokazati se da namreč naslednje: Recimo, da imamo kovinsko vrtavko, ki zacinglja s frekvenco 2 500 Hz, če udarimo po njej. To vrtavko lahko zavrtimo samo do 2 500 obratov v sekundi, pri hitrejšem vrtenju pa bi

se zaradi velikega centrifugalnega pospeška razletela.¹ Če uporabimo ta izrek pri pulzarjih, ugotovimo, da bi pulzarji, če so res vrteče se zvezde, zadoneli oz. zabrenčali še z višjo frekvenco, kot utripljejo, če bi mogli s kakšnim orjaškim kladivom udariti po njih. Visoka frekvenca pulzarjev nam v skladu s tem izrekom pripoveduje, da mora val s hitrostjo zvoka prečkati pulzar v morda nekaj deset milisekundah. Res nenavadno! Če bi bil pulzar železen, bi ne smel biti večji kot kvečjemu nekaj metrov. To pa je seveda prav neumen odgovor, saj nekajmetrske krogle ne opazimo niti na razdalji nekaj kilometrov in nikakor ne more sevati toliko ali skoraj toliko kot manjša zvezda. Iz zagate se lahko rešimo le, če obstaja snov, v kateri je hitrost zvoka bistveno, bistveno večja. Na Zemlji take snovi prav gotovo ni. Fizika trdne snovi nam celo zagotavlja, da je ne more biti, ker določa trdnost in gostoto snovi predvsem igra med kvantnomehanskimi odbojnimi silami med elektroni in privlačna električna sila med pozitivnimi jedri in negativnimi elektroni. Urejenost atomov je v različnih snoveh različna in to določa razlike v trdnosti, trdoti in gostoti snovi. Vendar so te razlike razmeroma majhne in dopuščajo razlike v hitrosti zvoka morda za faktor 10, nikakor pa ne milijonskih faktorjev, ki bi jih potrebovali. Pulzarje moramo vsekakor iskati med zvezdami, ki so bistveno drugačne od normalnih zvezd, sestavljati jih mora izjemno eksotična snov.

Kakšna mora biti torej snov, da bomo lahko razumeli hitro utripanje pulzarjev. Obrnimo zgoraj navedeni izrek! Pulzar je stabilen, ko se vrti, torej ohranja zunanje plasti, iz česar sklepamo, da je tudi na površini težni pospešek večji od centrifugalnega pospeška. Če je R polmer zvezde in M masa zvezde, lahko to zahtevo zapišemo z neenačbo takole:

$$G \frac{M}{R^2} > (2\pi\nu)^2 R,$$

pri čemer je $G (= 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)$ gravitacijska konstanta, ν pa frekvenca pulzarja. Če gornjo enačbo delimo z R in se spomnimo, da je $\frac{4\pi}{3} R^3$ prostornina krogle, $\frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$ pa povprečna gostota (ρ) krogle, v kateri je masa M , lahko gornje zapišemo v obliki:

$$G\rho > 3\pi\nu^2.$$

¹ Dokaz za nekoliko poenostavljeno vrtavko, sestavljeno iz idealne vzmeti z dolžino l , na koncih katere sta enaki masi m , je razmeroma preprost in si ga bo morda kdo od bralcev sam poiskal.

Če upoštevamo, da so odkrili pulzarje, katerih frekvenca je skoraj 500 Hz, lahko izračunamo, da mora biti njihova gostota večja od

$$3.5 \times 10^{16} \text{ kg/m}^3.$$

To je fantastična gostota, 35 trilijonkrat večja od gostote vode! Ko so v zvezi s pulzarji prvič izračunali to število, so mnogi astronomi menili, da to ne more biti prava smer za iskanje odgovora. Nekateri, ki so bili v začetku v manjšini, pa so se spomnili belih pritlikavk in najbolj norih sanj teoretikov v zvezi z njimi.

Prvo belo pritlikavko je odkril Bessel že pred približno 150 leti, ko je opazoval najsvetlejšo zvezdo Sirij, da bi izmeril njeno oddaljenost. Z zelo natančnimi meritvami je opazil, da Sirij pravzaprav vijuga po nebu. Sklepal je, da mora pospešek pri zavijanju priskrbeti neka zvezda v bližini Sirija, katere maso je lahko ocenil na približno enako Sončevi. Pri tem pa je čudno, da tudi Sirijeva masa ni kaj dosti večja od mase Sonca, a je Sirij za nas najsvetlejša zvezda, njegove spremljevalke, z le nekoliko manjšo maso, pa kljub vsem naporom ni mogel zaznati. Torej sveti prav gotovo kar nekaj tisočkrat manj od Sirija. Šele mnogo let kasneje je ameriški izdelovalec teleskopov Alvin Clark preizkušal takrat najboljši teleskop in opazil šibko, šibko spremljevalko Sirija. Ko so astronomi končno uspeli zaznati njeno barvo, je bilo to pravo presenečenje. Spremljevalka je še bolj bela od Sirija samega in je zato po tem, kar vemo o sevanju vročih teles (Stefanov, Wienov in Planckov zakon), še bolj vroča od Sirija. Po Stefanovem zakonu seva vsak kvadratni meter vročega telesa (natančen tehnični izraz je črno telo) moč, ki je sorazmerna samo s četrto potenco temperature. Torej mora sevati vsak kvadratni meter spremljevalke Sirija več kot Sirij sam, celotna zvezda pa kljub temu seva več tisočkrat manj od Sirija. To je mogoče samo, če je površina Sirijeve spremljevalke več kot desetstisočkrat manjša od Sirija. Ker je površina krogle sorazmerna s kvadratom polmera ($P = 4\pi R^2$), sklepamo, da je šibka zvezda stokrat manjša od Sirija. Naprej: ker je prostornina krogle sorazmerna s tretjo potenco polmera, je prostornina Sirijeve spremljevalke milijonkrat manjša od Sirijeve. Pa vendar imata obe zvezdi približno enako maso. Torej je Sirijeva spremljevalka približno milijonkrat gostejša od Sirija, katerega povprečna gostota je nekako tolikšna kot povprečna gostota Sonca, to je zelo približno $1\,000 \text{ kg/m}^3$. Ko so začeli izdelovati večje in večje teleskope, so lahko še natančneje pogledali med zvezde in odkrili še veliko belih pritlikavk, ki so vse potrjevale sklepe o razmeroma visoki temperaturi in predvsem o njihovi gostoti, ki je več milijonkrat večja od gostote vode.

Jasno je, da je snov, ki sestavlja bele pritlikavke povsem drugačna kot tista na Zemlji. Kaj se je zgodilo s snovjo v belih pritlikavkah? Prej smo

že povedali (brez dokaza), da je gostota snovi na Zemlji določena z igro med električnimi privlačnimi silami med negativno nabitimi elektroni in pozitivnimi jedri ter kvantnomehanskimi odbojnimi silami, predvsem med elektroni. Snov je organizirana tako, da se večina elektronov, ki pripadajo danemu jedru, porazdeli okrog njega kot nekakšna vatasta kroglica, katere velikost določajo zakoni kvantne mehanike. Le majhen delež preostalih elektronov ostane, da z električnimi privlačnimi silami povezujejo vataste kroglice med seboj. Velikost "vatastih kroglic" določa povprečno razdaljo med njimi in s tem gostoto snovi. Snov je mogoče zgostiti, če "vataste kroglice" stisnemo. Toda to na Zemlji ni mogoče, saj lahko stiskamo "vato" cnc snovi samo z "vato" druge snovi, ki pa je približno enako mehka ali enako trda. Resno stiskanje je možno le, če nam pomaga sila, ki je bistveno močnejša od kvantnomehanskih odbojnih sil, ki določajo velikost atomov na Zemlji. Sila teže je edina, ki lahko to stori, ker je vedno privlačna. Poglejmo si to trditev nekoliko podrobneje. Vzemimo, da vataste kroglice z maso $\bar{\mu}$ in s povprečno gostoto ρ_0 zlagamo (nekje v vesolju) na velik kup. Ko vsebuje kup N kroglic, ima maso $M = N\bar{\mu}$ in prostornino $V = M/\rho_0$. Če je kup kroglast, lahko izračunamo iz prostornine polmer

$$R = \left(\frac{3N\bar{\mu}}{4\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1)$$

po Newtonovem gravitacijskem zakonu pa še težni pospešek na površini kupa

$$g = G \frac{M}{R^2} = GN\bar{\mu} \left(\frac{4\pi\rho_0}{3N\bar{\mu}} \right)^{\frac{2}{3}} = G(N\bar{\mu})^{\frac{1}{3}} \left(\frac{4\pi}{3} \rho_0 \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Pomembno pri gornjem rezultatu je, da težni pospešek na površini narašča s tretjim korenem iz števila kroglic. Pri dovolj velikem številu kroglic postane lahko teža kroglice večja od sile, s katero se vata upira stiskanju, pa če je vata še tako trda. In prav to se lahko zgodi, če naredimo tako velike kupe snovi, kot so zvezde. Dokler je zvezda v notranjosti še tako vroča, kot je Sonce, in se še ni preveč skrčila, lahko tlak plina kljubuje teži. Ko pa po mnogih letih zvezda s sevanjem izgubi preveč energije, "vatasti atomi" ne morejo nastati in zvezda se sesuje vase tako daleč, da postane pravzaprav en sam atom z zelo trdo "elektronsko vato". Računi pokažejo, da se izmerjena gostota belih pritlikavk ujema z navedenimi fizikalnimi razlagami.

Kaj pa pulzarji, ki bi morali biti še kakih milijardokrat gostejši od belih pritlikavk? Ko so v tridesetih letih tega stoletja delali teorijo belih pritlikavk, so prišli do zanimivih rezultatov. Enačba (1) nas namreč napeljuje do nenavadnega razmišljanja: z večanjem števila delcev lahko dosežemo poljubno veliko težo na površini, torej lahko dosežemo poljubno velike sile, ki stiskajo "vato", v katero se skušajo delci organizirati. Če je "vata" prožna, se mora pod določeno silo vdati, to pa poveča gostoto in s tem težni pospešek, oz. silo med delci. Ali lahko "vata" vzdrži poljubno naraščanje teže? Chandrasekhar je pokazal (za to je dobil Nobelovo nagrado), da lahko "vata", ki jo sestavljajo elektroni, vzdrži le, če je na kupu manj snovi kot za 1.44 mase Sonca. Če je več, pa elektroni ne morejo vzdržati pritiska teže. Kaj se zgodi potem, sprva ni bilo jasno, vendar je v tem grmu tičal zajec, ki je pokazal pot do razumevanja pulzarjev. Pri večjih pritiskih teže "elektronska vata" ne zdrži več in elektrone preprosto potisne v protone v atomskih jedrih. Pri tem protone spremeni v nevtrone. Pri nekaterih zvezdah se to v resnici zgodi v nekaj trenutkih, ko na koncu svoje življenjske poti izgubijo vse ostale možnosti upiranja teži. Od tega trenutka dalje v zvezdi skoraj ni več elektronov in nevtroni postanejo tista "vata", ki kup zadrži pred nadaljnjim krčenjem. S tem postane zvezda eno samo atomsko jedro. Zato ni čudno, da ima tudi podobno gostoto, kot bi jo dobili, če bi delili maso nevtrona z njegovo prostornino. Nekateri teoretiki, predvsem Volkoff, Oppenheimer in Snyder, so že v tridesetih letih tega stoletja pokazali, da je to mogoče. Odkritje nevtronskih zvezd in odkritje ozadja njihovega nastanka pa je pokazalo, kako daleč lahko seže pogled dobrega teoretika.

Andrej Čadež

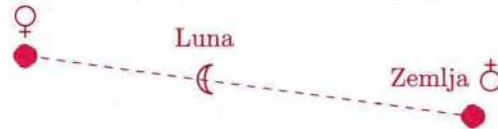
ŽELITE ZAPOSLOITEV PRI MICROSOFTU? – Rešitev s str. 212

Službo pri Microsoftu vam "priskrbi" naslednje zaporedje prehodov:

- Bono, Edge: 2 minuti,
- vrne se Bono: 1 minuta,
- Adam, Larry: 10 minut,
- vrne se Edge: 2 minuti,
- Bono, Edge: 2 minuti.

Matija Lokar

KRIŽANKA “PLANETI NAŠEGA SONCA”

							REŽISER RUSSEL	3. OSEBA ŽENSKEGA SPOLA	NATAŠA DOLENC	OREHOVA SREDICA	PREVAI
AUTOR MARKO BOKALIČ	♀	E	IDEN- TICNOST	NAJEMNINA ZA STANOVANJE	OSLIKA IMENA IGNACIJ	VERZ ENAJSTEREC ROŽA PERUNIKA					
VPISNA PRISTOU- BINA									VENERA NA JUTRANJEM NEBU		
SORTA JABOLK							KOLUT NA VRHICI (IGRACA)	RAZČLE- NJEVALEC	RADON		
PERIOD. NIHANJE ZEMELJSKE OSI									REŽISER TITANIKA (JAMES)		
ANGLEŠKI KOLIDŽ					SREDIŠČE PLANETAR- NEGA SISTEMA				ČMOKAČ		VPIS PODATI V OBRA
DROBNE KAPLJICE NA TRAVI					SLOJ MALTE NA ZIDU	KITAJSKI KROMPIR HIŠNI ČUVAJ				GENOVA	IZTO BOŽI
VEDA O ČLOVEKU											
	♀	STARO- GRŠKI EP	NAZIV Ψ				UREJEN SKUPEK CVETLIC NEVLJUDNO OPOZORILO				
AMERIŠKA ZVEZNA DRŽAVA										KMEČKO ORODJE	KRAM ROPO?
FILOZOF IZ ŠOLE V JUŽNI ITALIJI						PTIČJI GLAS REKA V HADU					DRVAR DROČ KAVLJ PRET
IGRALEC TORN				EDVARD ŠLAJMER	NIŽJI RIMSKI URADNIK TRENUTEK						
UČITELJ VEROUKA								VENO TAUFER	h		
ZMANJ- ŠANJE JAKOSTI ZVOKA									OBVESTILO O POSILNEM BLAGU		
FILM AKIRE KUROSAVE				MEDNA- RODNA VOJAŠKA ZVEZA					ZNANI FILMSKI PAR IZ BURLESK	SUHI BURKEŽ	

HALLOV POJAV

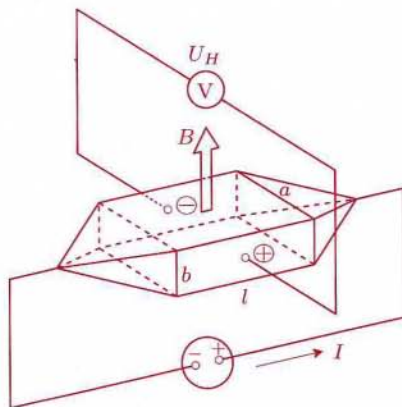
Ameriški fizik Edwin Hall je na univerzi Johns Hopkins v Baltimoru pred stodvajsetimi leti pripravljaval doktorsko delo. Tedaj je bila ameriška fizika še v povojih in njegov mentor Henry Rowland je bil sploh prvi profesor fizike na tej univerzi. Hall se je namenil raziskati vprašanje, ki je zanimalo že Jamesa Clerka Maxwella, očeta teorije o električnem in magnetnem polju. Ali prijemlje sila magnetnega polja v nosilcih naboja ali v vodniku? Hall je domneval, da "se pojavi nekakšna mehanična napetost, [...] da elektrika gre na eno stran," če deluje magnetno polje na gibajoče se nosilce naboja. Leta 1879 je naredil poskus, ki je to domnevo potrdil.

Po tankem zlatem traku je v vzdolžni smeri pognal tok in pravokotno na tlak usmeril magnetno polje. S točkama na nasprotnih straneh traku je povezal priključka voltmetra. Voltmeter je pokazal *Hallovo napetost* U_H v prečni smeri. Če se elektroni gibljejo v smeri od nas, je bil priključek voltmetra na levem robu traku negativen, priključek na desnem robu pa pozitiven (slika 1). To je *Hallov pojav*, ki ga štejejo med *magnetogalvanske pojave*.

Negativnim elektronom, ki se gibljejo od nas, ustreza tok pozitivnih nosilcev naboja v smeri proti nam. To je smer toka po dogovoru. Sila magnetnega polja na vodnik je pravokotna na magnetno polje in na tok. Znano je, da magnetno polje v smeri navzgor na vodnik s tokom v smeri proti nam deluje s silo proti levi (slika 2). To silo izkoriščajo elektromotorji.

Negativnim elektronom, ki se gibljejo od nas, ustreza tok pozitivnih nosilcev naboja v smeri proti nam. To je smer toka po dogovoru. Sila magnetnega polja na vodnik je pravokotna na magnetno polje in na tok. Znano je, da magnetno polje v smeri navzgor na vodnik s tokom v smeri proti nam deluje s silo proti levi (slika 2). To silo izkoriščajo elektromotorji.

Izzida Hallovega poskusa ni težko pojasniti. Dogovorjenemu toku proti nam ustreza tok elektronov od nas in magnetno polje jih sili proti



Slika 1. Razporeditev naprav pri Hallovem pojavu. Baterija z napetostjo U požene po vezju tok I , ki v magnetnem polju z gostoto B povzroči v prečni smeri Hallovo napetost U_H .

levi. Tam jih zaustavi rob traku, na njem se kopičijo in tako ta rob postane negativen. Na desnem robu traku elektronov primanjkuje in zato ta rob postane pozitiven. Električno polje zaradi presežka elektronov na levem robu in primanjkljaja na desnem naposled prepreči nadaljnje kopičenje. Tedaj sila tega električnega polja izravna silo magnetnega polja. Sila električnega polja na elektrone je eU_H/a , če je e absolutna vrednost naboja prevodniških elektronov v odseku kovine in a prečni rob traku. Delo, ki ga opravi sila električnega polja, ko se premaknejo elektroni z enega roba na drugega, Fa , je namreč enako produktu njihovega naboja in napetosti eU_H . Magnetna sila na elektrone v vodniku IlB je sorazmerna s tokom I , z dolžino odseka vodnika v magnetnem polju l in gostoto magnetnega polja B , če je magnetno polje pravokotno na vodnik. Sili izenačimo

$$e \frac{U_H}{a} = IlB$$

in vpeljemo *Hallovo koeficient*

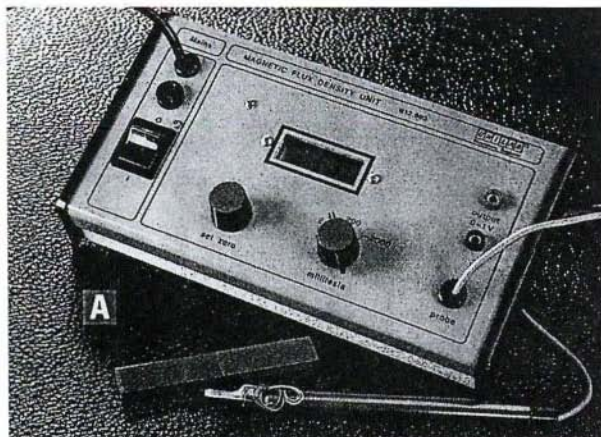
$$K_H = \frac{bU_H}{IB}.$$

Iz prve enačbe izračunamo $U_H/IB = al/e$ in enačbo pomnožimo z višino traku b , pa imamo $K_H = abl/e = V/e$. To je obratna vrednost gostote nosilcev naboja $e/V = e_0N/V$, če vpeljemo število nosilcev naboja v odseku vodnika N in naboj enega nosilca e_0 ter upoštevamo, da je $abl = V$ prostornina odseka vodnika. Izmerjena Hallova napetost, tok po traku in gostota magnetnega polja ter višina traku določajo gostoto nosilcev, ki sodelujejo pri prevajanju. Ne samo, da lahko preko Hallovega pojava določimo gostoto nosilcev naboja v vodniku, ki sodelujejo pri prevajanju, določimo lahko tudi znak njihovega naboja. Če je levi rob negativen, prenašajo naboj negativni nosilci, če je levi rob pozitiven, pa pozitivni.



Slika 2. Smer magnetne sile določimo z desno roko: palec kaže dogovorjeno smer električnega toka (od pozitivnega priključka izvira k negativnemu), kazalec smer magnetnega polja in sredinec smer sile. Pri dogovorjeni smeri toka k nam, ko se negativni elektroni gibljejo od nas, deluje nanje magnetno polje proti levi.

Pogosto rečemo, da je Hallov koeficient v prvem primeru negativen, v drugem pa pozitiven.



Slika 3. Hallov merilnik gostote magnetnega polja, ki ga izdeluje Unilab. Ima tri območja, in sicer od 0 do 19,99 mT, od 0 do 199,9 mT in od 0 do 1999 mT, to je približno 2 T. S potenciometrom je mogoče naravnati ničlo. Zemeljsko magnetno polje zajamemo z najboljčutljivejšim območjem.

Kovina	K_H	Kovina	K_H
baker	$-0,55 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$	železo	$0,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$
zlato	$-0,72 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$	cink	$0,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$
srebro	$-0,84 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$	volfram	$1,18 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$
kalij	$-4,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$	bizmut	$2,44 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$

Hallov koeficient za nekatere kovine

Hallovemu koeficientu z absolutno vrednostjo $10^{-10} \text{ m}^3/\text{As}$ ustreza gostota nosilcev naboja $N/V = 1/e_0|K_H| = 6,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Izmerjeni Hallovi koeficienti za najboljše prevodnike, h katerim štejemo baker, zlato, srebro, so po pričakovanju negativni. Preseneti pa nas, da imajo nekatere kovine, npr. železo, cink, volfram, bizmut, pozitivni Hallov koeficient. Vse kaže, da prevajajo v drugem primeru elektriko pozitivni nosilci naboja! To bo treba posebej pojasniti.

Mimogrede omenimo, da ta čas Hallov pojav zbuja pozornost v zvezi z Nobelovo nagrado za fiziko leta 1998. Pri tem pa gre za pojav v posebnih geometrijskih razmerah v zelo močnem magnetnem polju in pri zelo nizki temperaturi, ki ga je mogoče opisati samo v kvantni mehaniki.

ERDÖS–MORDELLOVA NEENAKOST

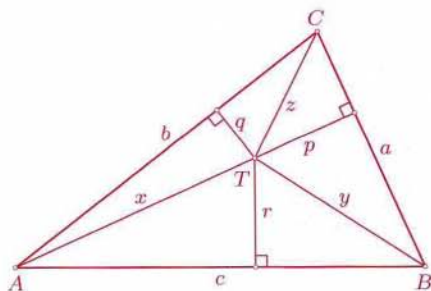
Leta 1996 preminuli Paul Erdős je bil izjemno plodovit matematik, saj je avtor okoli 1500 znanstvenih člankov. Ob njegovi smrti je več matematičnih revij pisalo o njem in njegovem delu. V slovenskem jeziku je v *Obzorniku za matematiko in fiziko*, letnik 44 (1997), številka 1, izšel krajši zapis prof. A. Suhadolca. Bolj podrobno je Erdős predstavljen v glasilu Ameriškega matematičnega društva *Notices of the American Mathematical Society*, letnik 45 (1998), številka 1.

V tem prispevku se bomo ukvarjali z neenakostjo v trikotniku, ki jo je Erdős odkril leta 1932, vendar je ni dokazal. Spoznali bomo tudi nekaj iz nje izpeljanih neenakosti.

1. Naj bo T poljubna točka v trikotniku ABC ali na njegovem robu. Z x , y in z zaporedoma označimo razdalje te točke do oglišč A , B in C , s p , q in r pa razdalje do (nosilk) stranic $a = BC$, $b = CA$ in $c = AB$ (glej sliko 1). Paul Erdős je domneval, da za te razdalje velja neenakost

$$x + y + z \geq 2(p + q + r). \quad (1)$$

To domnevo je preskusil na precejšnjem številu trikotnikov, vendar je ni uspel dokazati. Nadalje je domneval, da v neenakosti velja enačaja le tedaj, ko je točka T središče enakostraničnega trikotnika ABC . Prvi dokaz neenakosti (1) je leta 1935 našel L. J. Mordell, zato se ta neenakost sedaj imenuje *Erdős-Mordellova neenakost*.



Slika 1.

Povzemimo dokaz te neenakosti po članku z naslovom *A short proof of the Erdős-Mordell theorem*, ki ga je v matematičnem mesečniku *American Mathematical Monthly* 104 (1997), str. 57–60, v spomin na Paula Erdösa napisal V. Komornik.

Dokažimo najprej, da velja neenakost

$$bq + cr \leq ax \quad (2)$$

celo za poljubno točko T , ki leži znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu. Iz dokaza bo razvidno, da velja enačaja v (2) natanko takrat, ko točka T

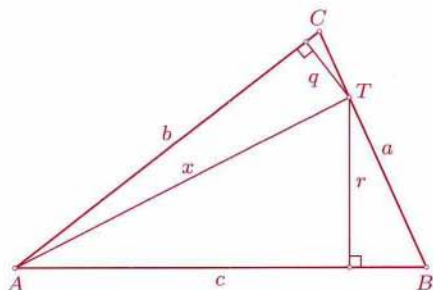
leži na nosilki višine na stranico a . Če točka T leži na stranici a (glej sliko 2), potem (2) sledi iz očitne ocene za ploščino trikotnika ABC

$$P_{ABC} \leq \frac{ax}{2}$$

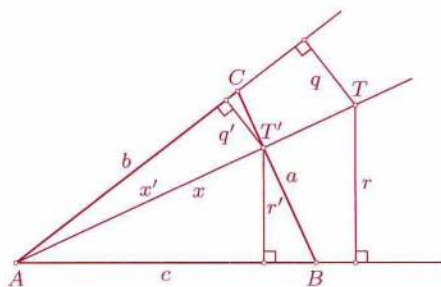
in zveze

$$P_{ABC} = P_{ATC} + P_{ABT} = \frac{bq}{2} + \frac{cr}{2}.$$

Denimo sedaj, da je T poljubna točka znotraj kota $\sphericalangle BAC$ ali na njegovem robu. Naj bo T' presečišče premice skozi točki A in T s stranico BC . Z x' , q' in r' zaporedoma označimo razdalje točke T' do oglišča A , stranice b in stranice c (glej sliko 3). Potem za točko T' velja neenakost (2), torej imamo $bq' + cr' \leq ax'$. Ker je zaradi podobnih trikotnikov $x' = kx$, $q' = kq$ in $r' = kr$ pri nekem $k > 0$, od tod sledi veljavnost neenakosti (2) tudi za točko T .



Slika 2.



Slika 3.

Pri dokazu Erdős-Mordellove neenakosti lahko predpostavimo, da je kvečjemu eno od števil p , q in r enako 0. Če je namreč T eno izmed oglišč trikotnika ABC , denimo $T = C$, potem veljata neenakosti $a \geq r$ in $b \geq r$. Ker je vsaj ena izmed teh dveh neenakosti stroga, je $a + b > 2r$, torej v tem primeru velja (1).

Vzemimo najprej, da je trikotnik ABC enakostraničen. Tedaj je neenakost (1) enostavna posledica neenakosti (2). Res, zaradi $a = b = c$ je $x \geq q + r$. Analogno veljata še oceni $y \geq r + p$ in $z \geq p + q$, ki ju dobimo s ciklično permutacijo trojic x, y, z in p, q, r . Če te neenakosti seštejemo, dobimo neenakost (1). Prav tako je iz dokaza razvidno, da v neenakosti velja enačaja natanko tedaj, ko točka T leži na vseh višinah trikotnika, torej le tedaj, ko je T središče enakostraničnega trikotnika ABC .

Denimo sedaj, da trikotnik ABC ni enakostraničen. Prezrcalimo točko T preko simetrale s_a kota $\sphericalangle BAC$ in dobljeno točko označimo s T_1 . Razdalje te točke do oglišča A , stranice b in stranice c zaznamujmo

Če vse tri neenakosti seštejemo, dobimo

$$px + qy + rz \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)pq + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)qr + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)rp.$$

Ker za poljubno pozitivno število u (tako kot prej) velja neenakost $u + 1/u \geq 2$, smo dokazali še neenakost

$$px + qy + rz \geq 2(pq + qr + rp). \quad (3)$$

Z uporabo neenakosti med aritmetično in geometrijsko sredino dobimo iz (2) tudi oceno $ax \geq 2\sqrt{(bq)(cr)}$. Podobno veljata neenakosti $by \geq 2\sqrt{(cr)(ap)}$ in $cz \geq 2\sqrt{(ap)(bq)}$. Po množenju vseh treh neenakosti dobimo

$$xyz \geq 8pqr. \quad (4)$$

3. Naj bodo v_a , v_b in v_c zaporedoma višine na stranice a , b in c . Z R označimo polmer trikotniku ABC očrtane krožnice, ρ pa polmer včrtane krožnice.

Ker očitno veljajo ocene $x + p \geq v_a$, $y + q \geq v_b$ in $z + r \geq v_c$, je

$$x + y + z + p + q + r \geq v_a + v_b + v_c.$$

Z uporabo neenakosti (1) od tod dobimo neenakost

$$\frac{x + y + z}{2} \geq \frac{v_a + v_b + v_c}{3}. \quad (5)$$

Ocenimo vsoto vseh višin navzdol! Po neenakosti med aritmetično in harmonično sredino je

$$\frac{v_a + v_b + v_c}{3} \geq \frac{3}{1/v_a + 1/v_b + 1/v_c}.$$

Ker velja

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{a}{av_a} + \frac{b}{bv_b} + \frac{c}{cv_c} = \frac{a + b + c}{2P_{ABC}} = \frac{1}{\rho},$$

dobimo tako neenakost

$$v_a + v_b + v_c \geq 9\rho$$

in z uporabo (5) še

$$x + y + z \geq 6\rho.$$

Ko substitucijo I uporabimo na Erdős-Mordellovi neenakosti, dobimo neenakost

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2 \left(\frac{p}{yz} + \frac{q}{zx} + \frac{r}{xy} \right)$$

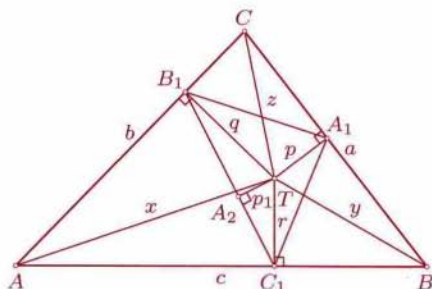
oziroma

$$xy + yz + zx \geq 2(px + qy + rz). \quad (6)$$

Če združimo neenakosti (3) in (6), imamo še

$$xy + yz + zx \geq 4(pq + qr + rp).$$

5. Tudi sedaj vzemimo, da točka T leži v notranjosti trikotnika ABC . Naj bodo A_1 , B_1 in C_1 zaporedoma pravokotne projekcije točke T na stranice a , b in c . Z x_1 , y_1 , z_1 , p_1 , q_1 in r_1 označimo zaporedno razdalje točke T do oglišč A_1 , B_1 in C_1 ter stranic B_1C_1 , C_1A_1 in A_1B_1 (glej sliko 6). Potem je $x_1 = p$, $y_1 = q$ in $z_1 = r$. Naj bo A_2 pravokotna projekcija točke T na stranico B_1C_1 . Ker



Slika 6.

je štirikotnik AC_1TB_1 tetiven, sta kota $\angle B_1AT$ in $\angle B_1C_1T$ enaka, saj sta obodna kota nad isto tetivo B_1T . Od tod sledi, da sta si pravokotna trikotnika B_1AT in A_2C_1T podobna. Zato je $p_1 = qr/x$ in analogno še $q_1 = rp/y$ ter $r_1 = pq/z$. S tem smo dokazali naslednje:

Če neka neenakost velja za razdalje x , y , z , p , q in r v poljubnem trikotniku ABC , potem velja tudi po substituciji oziroma transformaciji

$$V : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow \left(p, q, r; \frac{qr}{x}, \frac{rp}{y}, \frac{pq}{z} \right).$$

Če uporabimo substitucijo V na Erdős-Mordellovi neenakosti, dobimo novo neenakost

$$p + q + r \geq 2 \left(\frac{qr}{x} + \frac{rp}{y} + \frac{pq}{z} \right)$$

oziroma

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} \geq 2 \left(\frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} \right).$$

Če substitucijo V izvedemo v neenakosti (6), izpeljemo neenakost

$$pq + qr + rp \geq 2 \left(\frac{qrp}{x} + \frac{rpq}{y} + \frac{pqr}{z} \right)$$

oziroma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Če na zadnji neenakosti naredimo substitucijo I , dobimo še neenakost

$$\frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} \geq 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right).$$

Povzemimo! V poljubnem trikotniku ABC za razdalje x, y, z, p, q in r veljajo naslednje neenakosti

$$\begin{aligned} x + y + z &\geq 2(p + q + r) \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &\geq 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ xy + yz + zx &\geq 2(px + qy + rz) \\ \frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} &\geq 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\ px + qy + rz &\geq 2(pq + qr + rp) \\ \frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} &\geq 2 \left(\frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz} \right) \end{aligned}$$

Članek končajmo z naslednjo, nekoliko presenetljivo trditvijo:

Če iz trikotnika $A_1B_1C_1$ dobimo trikotnik $A_2B_2C_2$ na enak način, kot smo iz trikotnika ABC dobili trikotnik $A_1B_1C_1$, in če to ponovimo še enkrat, potem je zadnji trikotnik $A_3B_3C_3$ podoben prvotnemu trikotniku ABC .

Za dokaz te trditve izračunajmo, kaj dobimo, če trikrat zapovrstjo uporabimo transformacijo V . Ker je

$$V^2 : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow \left(\frac{qr}{x}, \frac{rp}{y}, \frac{pq}{z}; \frac{pqr}{yz}, \frac{pqr}{zx}, \frac{pqr}{xy} \right),$$

je

$$V^3 : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow \left(\frac{pqr}{yz}, \frac{pqr}{zx}, \frac{pqr}{xy}; \frac{p^2qr}{xyz}, \frac{pq^2r}{xyz}, \frac{pqr^2}{xyz} \right)$$

oziroma

$$V^3 : (x, y, z; p, q, r) \rightarrow (Kx, Ky, Kz; Kp, Kq, Kr),$$

kjer je

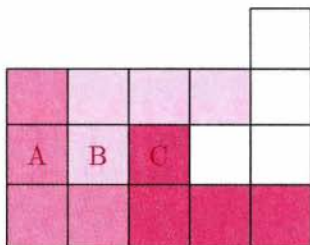
$$K = \frac{pqr}{xyz}.$$

Od tod sledi, da sta si trikotnika ABC in $A_3B_3C_3$ podobna s podobnostnim koeficientom K . Ker po (4) velja $K \leq 1/8$, so stranice trikotnika $A_3B_3C_3$ vsaj 8-krat manjše od stranic trikotnika ABC .

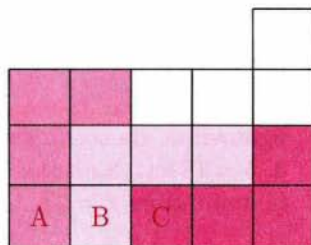
Roman Drnovšek

RAZREŽI NA SKLADNE DELE – Rešitev s str. 217

a)



b)

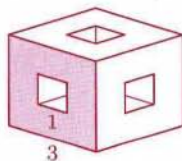
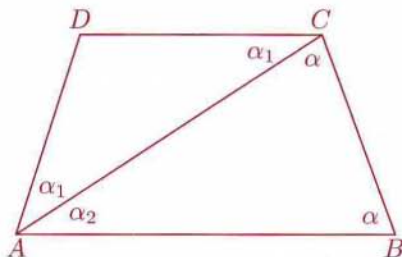


Dragoљjub M. Milošević

34. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 242

7. razred

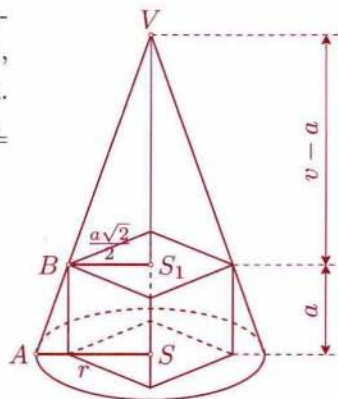
- Število $10^n + 8$ ima v zapisu števk 1 in n ničel. Zato je vsota števk števila $10^n + 8$ enaka 9, kar pomeni, da je število $10^n + 8$ deljivo z 9. Za $n > 2$ so 008 zadnje tri števke števila $10^n + 8$, zato je to število deljivo tudi z 8. Število $10^n + 8$ je deljivo z 8 in 9, torej je deljivo tudi z 72.
- Trikotnik $\triangle ACD$ je enakokrak, zato je $\overline{AD} = \overline{CD}$ in $\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle DCA = \alpha_1$. Tudi trikotnik $\triangle ABC$ je enakokrak, pa je $\overline{AC} = \overline{AB}$ in $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle ACB = \alpha$. Kota $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle ACD$ sta izmenična, zato je $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$. Iz enačbe $\alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$ sledi $\alpha = 72^\circ$.
- Površina nastalega telesa je sestavljena iz 6 ploskev s ploščino 8 (skupaj 48) in 24 ploskev s ploščino 1 (skupaj 24). Površina nastalega telesa je 72 ($48 + 24 = 72$).
- Iz ploščine osenčene ploskve $2 \cdot \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(2a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot \pi a^2\right) = 968$ izračunamo $a = 22$ cm. Obseg ploskve je $o = 2 \cdot 2\pi \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi a = 66\pi$ cm.
- Vrednost izraza je $-\frac{6}{25}$.



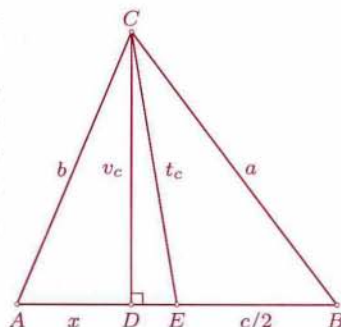
8. razred

- Število 2520 razstavimo na prafaktorje $2520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ in ugotovimo, da so najstniki stari $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ let, $2 \cdot 7 = 14$ let in $3 \cdot 5 = 15$ let. Nato sledi enačba $(12 + x) + (14 + x) + (15 + x) = 110$, ki ima rešitev $x = 23$. Čez 23 let.
- Označimo temperaturo zraka (v $^\circ\text{C}$) prejšnje jutro z x in dobimo enačbo $x + \frac{x}{5} - \frac{3}{10} \cdot \frac{6x}{5} = x - 4$. Rešitev enačbe je $x = 25$, kar pomeni, da je bila prejšnje jutro temperatura zraka 25°C .

3. Trikotnika $\triangle ASV$ in $\triangle BS_1V$ sta podobna, zato je $r : \frac{a\sqrt{2}}{2} = v : (v - a)$, od koder dobimo $a = \frac{60\sqrt{2}}{11} \doteq 7,7$ cm. Površina kocke pa je $P = 6 \cdot \left(\frac{60\sqrt{2}}{11}\right)^2 \doteq 357$ cm².



4. Najprej označimo $\overline{AD} = x$, zato $\overline{DB} = 14 - x$. Vidimo $\overline{CD}^2 = 13^2 - x^2$ in $\overline{CD}^2 = 15^2 - (14 - x)^2$, zato velja $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$. Sledi $x = 5$, $\overline{CD} = 12$ in $\overline{DE} = 2$. Zato je $\overline{CE}^2 = 12^2 + 2^2$ in $\overline{CE} = 2\sqrt{37}$. Polmer krožnice je $r = \frac{\overline{CE}}{2} = \sqrt{37}$ cm, njena ploščina pa $p = 37\pi$ cm².



5. Izraz $a^2 + d^2 - 2b(a + c - b) + 2c(c - d)$ preoblikujemo v vsoto kvadratov $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2$. Dani izraz ima najmanjšo vrednost, če je $a = b = c = d$.

Aleksander Potočnik

18. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve nalog s str. 243

7. razred

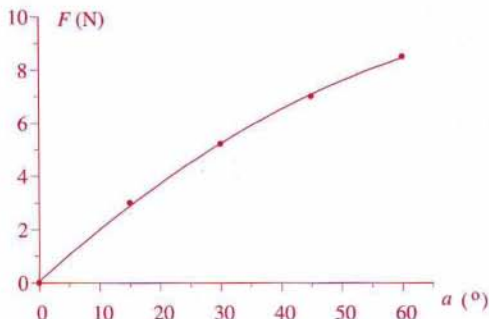
1. a) Sile v vrveh A, B in C so enako velike. Ko seštejemo dve, med seboj pravokotni in enako veliki sili sošolcev, ki recimo vlečeta za vrv A, dobimo $R_1 = 100 \text{ N} \cdot \sqrt{2} = 140 \text{ N}$. Na vozle delujeta dve pravokotni sili po 140 N (vrvi A in C), njuna delna rezultanta je $R_2 = 140 \text{ N} \cdot \sqrt{2} = 200 \text{ N}$. K tej sili prištejemo še silo v vrvi B, ki je po velikosti enaka R_1 , in dobimo 340 N. Tolikšna sila

tudi vleče kladu in s tolikšno silo je napeta vrv D. Nalogo lahko rešimo tudi z načrtovanjem.

- b) Sila v vrvi D je v drugem primeru $500 \text{ N}/340 \text{ N} = 1,47$ krat večja kot v prvem. Zato se vse sile povečajo za enak faktor. Vsak od sošolcev vleče s silo 147 N .
2. a) Začetna prostornina je $1,000 \text{ m} \cdot 1,000 \text{ m} \cdot 2,000 \text{ m} = 2,000 \text{ m}^3$.
 b) V učbeniku preberemo, da je raztezek metrske aluminijaste palice $0,023 \text{ mm}$ pri temperaturni spremembi 1 K , pri 300 K torej $300 \cdot 0,023 \text{ mm} = 6,9 \text{ mm}$. Raztezek jeklene palice je $2 \cdot 0,012 \text{ mm}$ pri temperaturni spremembi 1 K , pri 300 K torej $300 \cdot 0,024 \text{ mm} = 7,2 \text{ mm}$. Prostornina po segrevanju je $1,007 \text{ m} \cdot 1,007 \text{ m} \cdot 2,007 \text{ m} = 2,035 \text{ m}^3$.
3. a) Sila vzgona je
 $F_{\text{vzg}} = 10 \text{ N/dm}^3 \cdot 0,200 \text{ dm}^3 = 2,0 \text{ N}$.
 b) Po zakonu o vzajemnem učinku je sila krogle na vodo nasprotno enaka sili vzgona $F_k = 2,0 \text{ N}$, smer pa je navpično navzdol.
 c) Teža vode $F_{\text{gv}} = 5,0 \text{ N}$, teža čaše $F_{\text{gč}} = 1,0 \text{ N}$, sila krogle na vodo $F_{\text{kv}} = 2,0 \text{ N}$, sila tehtnice $F_{\text{teh}} = F_{\text{gv}} + F_{\text{gč}} + F_{\text{kv}} = 8,0 \text{ N}$.
 d) Tehnica kaže 800 g .
4. Najprej pokrijemo dno manjše čaše s kroglicami, da čaša v vodi plava navpično. Izmerimo višino potopljenega dela čaše x_1 . Nato dodamo N kroglic in meritev ponovimo. Izmerimo x_2 . Čaša se je zaradi N novih kroglic dodatno potopila za $x_2 - x_1$ in dodatna izpodrinjena prostornina je $S \cdot (x_2 - x_1)$. Dodatni vzgon uravnovesi težo dodatnih kroglic: $\rho_v \cdot S \cdot (x_2 - x_1) \cdot g = N m_1 g$. Sledi $m_1 = \rho_v \cdot S \cdot (x_2 - x_1) / N$. Rezultat za 30 kroglic: $x_2 - x_1 = 1,1 \text{ cm}$ in $m_1 = 0,67 \text{ g}$. Zaradi nenatančne meritve razlike $(x_2 - x_1)$ in zaradi neenakih kroglic je napaka rezultata lahko $\pm 10\%$.

5. a)

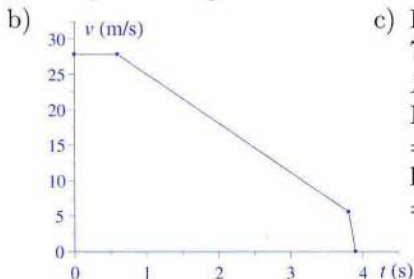
$\alpha (^{\circ})$	$F (\text{N})$
0	0
15	3,0
30	5,2
45	7,0
60	8,5



- b) Pri premiku se sila spreminja od 0 do 5,2 N tako, da je povprečna sila okrog 2,6 N. Izmeriti moramo še premik krajišča vrvice, na katerega je pritrjen dinamometer, pri čemer dobimo $s = 19$ cm. Delo je približno enako $A = Fs = 2,6 \text{ N} \cdot 0,19 \text{ m} = 0,49 \text{ J}$.
- c) Pri premiku izmerimo, da se je utež dvignila za približno 5,3 cm, tako da je sprememba potencialne energije uteži enaka $\Delta W_p = 10 \text{ N} \cdot 0,053 \text{ m} = 0,53 \text{ J}$, kar je približno enako kot v primeru b), saj mora biti opravljeno delo enako spremembi potencialne energije.

8. razred

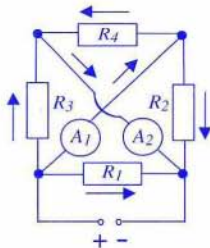
1. a) Med reakcijskim časom je avto prevozil razdaljo $s_1 = 27,8 \text{ m/s} \cdot 0,6 \text{ s} = 16,7 \text{ m}$. Čas zaviranja je bil $t = \Delta v/a = (22,2 \text{ m/s})/(7 \text{ m/s}^2) = 3,2 \text{ s}$. V tem času je avto prevozil razdaljo $s_2 = v_{sr} \cdot t = ((27,8 + 5,6)/2) \text{ m/s} \cdot 3,2 \text{ s} = 53 \text{ m}$. Voznik je torej moral zagledati oviro na razdalji $s = 53 \text{ m} + 16,7 \text{ m} \approx 70 \text{ m}$.



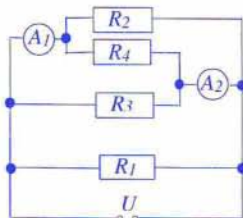
- c) Pojemek med zaviranjem je bil 7 m/s^2 , sila pasu na voznika pa $F_1 = 70 \text{ kg} \cdot 7 \text{ m/s}^2 = 490 \text{ N}$. Med trkom je bil pojemek $a_2 = 5,6 \text{ m/s}/0,1 \text{ s} = 56 \text{ m/s}^2$, sila pasu na voznika pa $F_2 = 70 \text{ kg} \cdot 56 \text{ m/s}^2 = 3920 \text{ N}$.

2. a) Ko tekmovalec prevozi razdaljo s , se spusti za višino $h = s/\sqrt{2} = 3,5 \text{ m}$, saj je trikotnik med vodoravnico, navpičnico in strmino kar polovica kvadrata. Pri gibanju se je potencialna energija zmanjšala za $mgh = 2750 \text{ J}$. Delo sile trenja je bilo $A_t = F_t \cdot s = -0,05 \cdot 800 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = -200 \text{ J}$. Kinetična energija se je povečala za 2550 J, tako da za hitrost dobimo $v = \sqrt{2\Delta W_k/m} = \sqrt{2 \cdot 2550 \text{ J}/80 \text{ kg}} = 8,0 \text{ m/s}$.

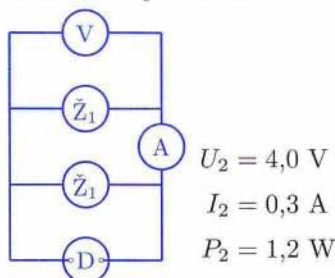
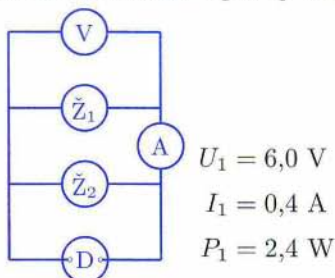
3. a)



- b) Če vezje prerišemo, ugotovimo, da so vsi uporniki vzporedno povezani na napetost 10,0 V. Tokovi skozi upornike so $I_2 = 10,0 \text{ V} / 2,0 \text{ k}\Omega = 5,0 \text{ mA}$, $I_3 = 10,0 \text{ V} / 4,0 \text{ k}\Omega = 2,5 \text{ mA}$ in $I_4 = 10,0 \text{ V} / 5,0 \text{ k}\Omega = 2,0 \text{ mA}$. Ampermeter A_1 meri tokova skozi R_2 in R_4 , $I_1 = 7,0 \text{ mA}$, A_2 pa skozi R_3 in R_4 , $I_2 = 4,5 \text{ mA}$.



4. Sestaviti moramo spodnji vezji in izmeriti naslednje količine:



- $P_2/P_1 = 1,2 \text{ W} / 2,4 \text{ W} = 50 \%$, torej se je električna moč žarnice v sprednji luči zmanjšala za približno 50 %.
5. Iz izmerjene dolžine zaslona x_Z in izmerjenega časa prehoda svetle pike preko zaslona t_Z izračunamo hitrost potovanja pike. Z enako hitrostjo potuje pika po krožnici z dolžino $2\pi r$. Z izmerjenim obhodnim časom t_o izračunamo oddaljenost do središča iz enačbe $x_Z/t_Z = 2\pi r/t_o$. Sledi $r = (x_Z/t_Z) \cdot (t_o/2\pi)$. Izmerjene vrednosti: $x_Z = 1,28 \text{ m}$, $t_Z = 1,3 \text{ s}$, $t_o = 60,0 \text{ s}$ in $r = 9,5 \text{ m}$.

Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

42. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE – Rešitve nalog s str. 246

I/1. Enakost $xy = 20 - 3x + y$ je izpolnjena natanko tedaj, ko velja $(x-1)(y+3) = 17$. Za celi števili x in y je zadnja enačba izpolnjena natanko v primerih, ko je $\{(x-1), (y+3)\} = \{1, 17\}$ ali $\{(x-1), (y+3)\} = \{-1, -17\}$, saj je število 17 praštevilo. To pomeni, da so iskani pari števil (x, y) enaki $(18, -2)$, $(2, 14)$, $(-16, -4)$ ali $(0, -20)$.

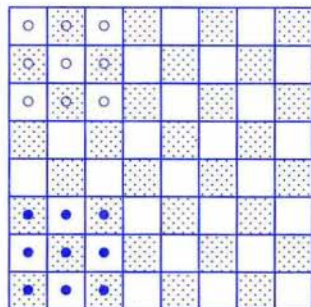
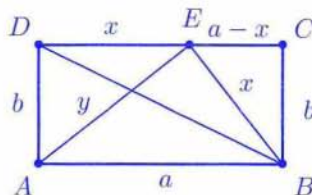
I/2. Ker so stotice dvakratnik desetic, so lahko na zadnjih treh mestih števila: 845, 634, 423, 212 ali 001. Ker je število deljivo z 2, zadnja števka ni ne 5 ne 3 in ne 1. Ker je število dvakratnik praštevila, zadnje tri števke tudi niso 212, ker bi bilo v tem primeru število deljivo s 4. Preostali možnosti sta tako: 8634 in 9634. Ker pa je število 8634 deljivo s šest, je iskano število $9634 = 2 \cdot 4817$.

I/3. Privzemimo oznake s slike. Po Pitagorovem izreku v trikotnikih AED , ABE in BCE je $b^2 + x^2 = y^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ in $b^2 + (a - x)^2 = x^2$. Iz prvih dveh enačb sledi $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$, iz tretje pa $x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$. Torej je

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right)^2 = \frac{a^2 - b^2}{2},$$

od tod pa $a^4 - 4a^2b^2 - b^4 = 0$. Zato je $a^2 = (2 \pm \sqrt{5})b^2$ in iskano razmerje je $\frac{a}{b} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

I/4. Odgovor je ne. Pobarvajmo šahovnico kot običajno z belo in črno. Pri vsaki potezi se barva polja, na katerem stoji žeton, ohranja. Na začetku ležijo žetoni na natančno 5 črnih poljih, zato željenega položaja, kjer ležijo žetoni le na štirih črnih poljih, ne moremo doseči.



II/1. Naj število n zadošča pogojem naloge. Z m označimo število števk v n , vsoto števk števila n^2 pa označimo s $S(n^2)$. Ker ima število n^2 kvečjemu $2m$ števk in te ne presegajo 9, velja $S(n^2) \leq 2m \cdot 9 = 18m$. Po drugi strani je $n \geq 10^{m-1}$. Ker za $m \geq 3$ velja ocena $18m < 10^{m-1}$, je tudi $S(n^2) < n$. Torej mora biti $m \in \{1, 2\}$. Potem je $n = S(n^2) \leq 18 \cdot 2 = 36$.

Oglejmo si še ostanke pri deljenju z 9. Ker je ostanek števila n^2 enak ostanku števila $S(n^2)$, je ostanek števila $n(n-1) = n^2 - n$ enak ostanku $S(n^2) - n = 0$. Torej $9 \mid n(n-1)$, od koder sledi, da je ostanek števila n pri deljenju z 9 enak 0 ali 1.

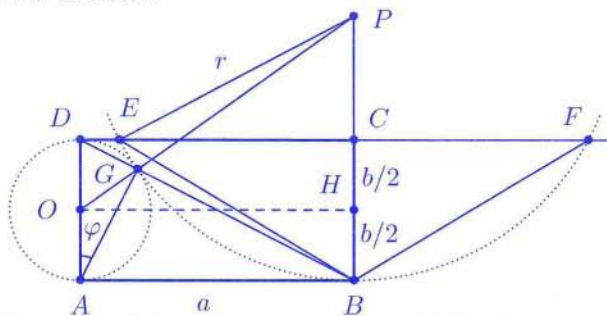
Torej je $n \in \{1, 9, 10, 18, 19, 27, 28, 36\}$. Z neposrednim računom se prepričamo, da sta edini rešitvi 1 in 9.

II/2. Po Vietovih formulah velja za korena x_1 in x_2 kvadratne enačbe $x^2 + px + q = 0$ naslednje: $-(x_1 + x_2) + x_1x_2 = p + q = 1998$. Od tod

Če ima polinom q kakšno (kompleksno) ničlo $x_0 \neq 0$, so ničle tega polinoma tudi $2x_0, 4x_0, 8x_0, \dots$. Polinom q bi potemtakem imel neskončno ničel, kar je možno le za $q(x) \equiv 0$. Če je $x_0 = 0$ edina ničla polinoma q , je $q(x) = ax^n$ za neka $a \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N}$. Z upoštevanjem enačbe $q(2x) = q(x)$ potem sledi $n = 1$ in $a = 0$. Če pa polinom q nima nobene (kompleksne) ničle, je $q(x) \equiv c \in \mathbb{R}$. Vse rešitve so torej polinomi $p(x) = c(x-2)(x-4)(x-8)$, $c \in \mathbb{R}$.

III/3. Označimo $a = |AB|$ in $b = |AD|$. Ker je EBF enakokrak trikotnik, leži središče P njemu očrtane krožnice na poltraku BC . Označimo polmer te krožnice z r . Po Pitagorovem izreku v trikotniku EBC je $|EC|^2 = a^2 - b^2$. Po Pitagorovem izreku v trikotniku ECP je $r^2 = (r-b)^2 + |EC|^2 = (r-b)^2 + (a^2 - b^2)$, od koder izračunamo $r = \frac{a^2}{2b}$.

Po Pitagorovem izreku v trikotniku OHP je $|OP|^2 = a^2 + (r-b/2)^2$. Ker pa je $a^2 + (r-b/2)^2 = (r+b/2)^2$, je zato $|OP| = r + b/2$ in omenjeni krožnici se res dotikata.



Za dokaz točke (b) pa označimo $\varphi = \angle GAD$. Potem je $\angle GOD = \angle GPB = 2\varphi$. Ker pa je $\angle ADG = \pi/2 - \varphi$ in $\angle GBA = \pi/2 - \angle PBG = \pi/2 - \frac{1}{2}(\pi - 2\varphi) = \varphi$, so točke B, G in D res kolinearne.

III/4. Označimo z n število let, ki jih je imel Alf, ko je šel v šolo, in s $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$ razred, ki ga je ponavljal. Oglejmo si najprej primer, da je Alf ponavljal 1. razred. Tedaj je število mačk enako

$$(n+2) + 2(n+3) + 3(n+4) + \dots + 8(n+9) = \frac{8 \cdot 9}{2}n + \sum_{i=1}^8 i(i+1) = 36n + 240.$$

Če bi Alf ponavljal 2. razred, bi za opravljeni 1. razred dobil le $n+1$ mačk, za ostale razrede pa enako – skupaj torej eno manj, kot če bi ponavljal 1. razred. Če bi ponavljal 3. razred, bi dobil eno manj za 1. razred in dva manj za 2. razred.

Ker pa je Alf ponavljal k -ti razred, je dobil $1 + \dots + (k - 1)$ mačk manj. Dobil je le $36n + 240 - \frac{k(k-1)}{2}$ mačk. To število je deljivo s 1998, torej tudi s 6. Ker je število $36n + 240$ deljivo s 6, je deljivo s 6 tudi število $\frac{k(k-1)}{2}$. Edini možnosti sta $k = 1$ ali $k = 4$.

Možnost $k = 1$ odpade, saj število $36n + 240$ ni deljivo z 9, kar bi zaradi $1998 = 9 \cdot 222$ moralo biti. Preostane nam le še primer $k = 4$, ki pa je zares možen. Število $36n + 234$ je deljivo s 1998, npr. za $n = 49$. Alf je torej ponavljal 4. razred.

IV/1. Velja $1998 = xyz_{(n)} = x n^2 + y n + z$ in $x + y + z = 24$. Torej je $x(n^2 - 1) + y(n - 1) = 1998 - 24 = 1974$. Ker je $x \geq 1$, mora biti

$$1974 = x(n^2 - 1) + y(n - 1) \geq n^2 - 1$$

oz. $n < 45$. Očitno pa je $n > 10$.

Število $n - 1$ deli število 1974. Ker je $1974 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 47$, mora biti $n - 1 \in \{14, 21, 42\}$ oz. $n \in \{15, 22, 43\}$. Ker je

$$1998 = 8 \cdot 15^2 + 13 \cdot 15 + 3 = 4 \cdot 22^2 + 2 \cdot 22 + 18 = 1 \cdot 43^2 + 3 \cdot 43 + 20,$$

vidimo, da vse tri možnosti za n res ustrezajo.

IV/2. V funkcijsko enačbo vstavimo $1 - x$ namesto x in dobimo

$$f(1 - x) + (1 - x)f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Ko to enačbo pomnožimo z x in odštejemo od dane funkcijske enačbe, dobimo

$$f(x) - x(1 - x)f(x) = (x^2 - x + 1)f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

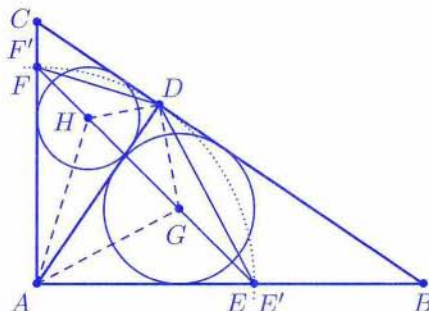
Ker je $x^2 - x + 1 \neq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, lahko izrazimo

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Nazadnje preverimo, da funkcija f res zadošča pogoju naloge.

IV/3. Krožnica s središčem v A in polmerom $|AD|$ naj seka kateti trikotnika v točkah E' in F' , premica $E'F'$ pa naj seka simetrali kotov $\sphericalangle BAD$ in $\sphericalangle DAC$ v točkah G in H . Trikotnik $AE'F'$ je po konstrukciji enakokrak, zato je

$$\sphericalangle AE'F' = \sphericalangle AF'E' = \frac{\pi}{4}.$$



Trikotnika $AE'G$ in ADG sta skladna, zato je $\sphericalangle ADG = \frac{\pi}{4}$. Točka G je tako središče trikotniku ABD vrtane krožnice. Podobno je tudi točka H središče trikotniku ADC vrtane krožnice. Naloga je rešena, saj je $E = E'$ in $F = F'$.

IV/4. Opazimo, da na črnih poljih (glej sliko k nalogi **I/4**) šahovnice leži $2^{2k} \equiv 1 \pmod{3}$ zrn, na belih pa $2^{2k-1} \equiv 2 \pmod{3}$ zrn. Ker konj skače z belega na črno polje in s črnega na belo, obišče na svoji poti enako število belih in črnih polj. Število pojedenih zrn je tako res deljivo s 3.

Matjaž Željko

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1997/98 – s str. 249

Objavljamo rešitve nalog z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 18. aprila 1998 v Škofji Loki. Besedila nalog smo objavili v letošnji 4. številki Preseka. (Zaradi boljše kontrole podajamo pri nekaterih nalogah numerične vrednosti rezultatov na eno mesto natančneje, kot bi bilo sicer fizikalno smiselno.)

Skupina A

- Podatki: $\Delta h_1 = 3,0 \text{ cm}$, $\Delta h_2 = 1,0 \text{ cm}$, $S = 150 \text{ cm}^2$, $\sigma_v = 10 \text{ kN/m}^3$.
 - Možen razmislek: vsota teže vode in teže čaše je enaka sili tlaka $\sigma_v(h_0 + \Delta h_1)$ na dno velike posode, če je h_0 višina gladine vode, preden vanjo potopimo čašo, torej $T + \sigma_v S h_0 = \sigma_v S(h_0 + \Delta h_1)$. Sledi $T = \sigma_v S \Delta h_1$.

- ii) Prostornina stekla je enaka prostornini izpodrinjene vode $V = S\Delta h_2$. Za specifično težo in težo steklene posode dobimo

$$\sigma = \frac{T}{V} = \sigma_v \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = 30 \text{ kN/m}^3, \quad T = \sigma V = \sigma S\Delta h_2 = 4,5 \text{ N}.$$

2. Podatki: $r_1 = 0,6 \text{ m}$, $v_1 = 1,0 \text{ m/s}$, $r_2 = 0,8 \text{ m}$, $v_2 = 1,2 \text{ m/s}$, $a = 0,2 \text{ m/s}^2$.

Prvi avtomobilček pospeši do v_1 v $t_1 = v_1/a = 5,00 \text{ s}$ in napravi pot $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = 2,5 \text{ m}$, preostanek do križišča $s'_1 = 3\pi r_1/2 = 0,33 \text{ m}$ prevozi v času $t'_1 = s'_1/v_1 = 0,33 \text{ s}$. Nato v času $t_1'' = (v_2 - v_1)/a = 1,00 \text{ s}$ pospeši do hitrosti v_2 in pri tem napravi pot $s_1'' = v_1 t_1'' + \frac{1}{2}at_1''^2 = 1,1 \text{ m}$, preostanek $s_1''' = 2\pi r_2 - s_1'' = 3,92 \text{ m}$ pa v času $t_1''' = s_1'''/v_2 = 3,27 \text{ s}$. Na križišču v trenutku zavre do hitrosti v_1 in napravi zadnjo četrtino poti v času $t_1^{iv} = \pi r_1/2v_1 = 0,94 \text{ s}$. Skupni čas do cilja je $10,5 \text{ s}$.

Za drugi avtomobilček podobno dobimo: $t_2 = v_2/a = 6,00 \text{ s}$, $t_2' = (3\pi r_1/2 - \frac{1}{2}at_2^2)/v_2 = 0,14 \text{ s}$, $t_2'' = 2\pi r_1/v_1 = 3,77 \text{ s}$, $t_2''' = (v_2 - v_1)/a = 1,00 \text{ s}$, $t_2^{iv} = (\pi r_2/2 - (v_1 t_2''' + \frac{1}{2}at_2'''^2))/v_2 = 0,13 \text{ s}$; skupaj $11,0 \text{ s}$, kar pomeni, da do cilja pride najprej prvi avtomobilček.

3. Podatki: $T = 0,050 \text{ N}$, $\alpha = 60^\circ$.

- a) Sila ene stoječe karte na drugo ima lahko le vodoravno smer; označimo jo z F_2 . Na dotikališču z ležečo karto deluje pravokotna komponenta podlage F_0 , ki uravnovesi težo karte, $F_0 = T$, in sila lepenja F_l , ki uravnovesi F_2 . Ravnovesje navorov za os na vrhu zahteva

$$l\frac{\sqrt{3}}{2}F_l - l\frac{1}{2}F_0 + \frac{1}{2}l\frac{1}{2}T = 0 \quad \text{ali} \quad l\frac{\sqrt{3}}{2}F_l = \frac{1}{4}lF_0.$$

V mejnem primeru dobimo

$$k_l = \frac{F_l}{F_0} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,29.$$

- b) Za spodnje karte prav tako velja, da ima sila ene (stoječe) karte na drugo lahko le vodoravno smer; označimo jo z F_2 ; sila ležeče karte na spodnje karte pa ima lahko le smer navpično navzdol, saj je spodnja površina karte idealno gladka. Celotna sila je kar enaka teži zgornjih treh kart $3T$, na vsako spodnjo karto odpade

$\frac{3}{4}T$. Ravnoesje sil za vsako od spodnjih kart zahteva $F_0 = \frac{3}{4}T + T = \frac{7}{4}T$, ravnoesje navorov za os na vrhu pa vodi do:

$$l\frac{\sqrt{3}}{2}F_l + \frac{1}{2}l\frac{1}{2}T - l\frac{1}{2}F_0 = 0,$$

$$F_l = \frac{\frac{5}{8}T}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad k_l = \frac{F_l}{F_0} = \frac{5\sqrt{3}}{21} = 0,41.$$

Skupina B

1. Podatki: $v_1 = 100$ m/s, $s = 5,0$ km, $h = 1,0$ km.

- a) Ker pri poševnem metu porabi granata za dviganje enak čas kot za spuščanje, je čas dviganja kar enak času prostega pada z višine h .
- b) Za hitrost v navpični smeri velja $v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt = 0$, torej $v_0 = gt / \sin \alpha = \sqrt{2gh} / \sin \alpha$. V vodoravni smeri je vsota poti rakete in objekta enaka $s = v_0 \cos \alpha t + v_1 t = 2h / \tan \alpha + v_1 \sqrt{2h/g}$; od tod

$$\tan \alpha = \frac{2h}{s - v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}}}, \quad \alpha = 29^\circ \quad \text{in} \quad v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha} = 290 \text{ m/s}.$$

2. Podatki: $2R = 200$ m, $s = 35$ m, $k_l = 0,6$, $\alpha = 30^\circ$.

Z F_0 označimo pravokotno silo podlage in z F_l silo lepenja. Komponente sil v navpični smeri so v ravnoesju:

$$-mg + F_0 \cos \alpha - F_l \sin \alpha = 0, \quad F_l = k_l F_0, \quad F_0 = \frac{mg}{\cos \alpha - k_l \sin \alpha},$$

v vodoravni smeri pa enake produktu mase in centripetalnega pospeška

$$m\omega^2 r = F_0 \sin \alpha + F_l \cos \alpha = mg \frac{\sin \alpha + k_l \cos \alpha}{\cos \alpha - k_l \sin \alpha}.$$

Obhodni čas je potem

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r(\cos \alpha - k_l \sin \alpha)}{g(\sin \alpha + k_l \cos \alpha)}}.$$

Najmanjši je pri $r = R$ in enak $t_0 = 15$ s.

3. Podatki: $l = 20$ cm, $l'/l = 3/4$ (l' je višina areometra, potopljenega v vodo), $h' = 30$ cm.

- a) Masa areometra je enaka $m = \frac{3}{4}m'$, če z m' označimo maso vode, ki jo areometer izpodriva, ko je ves potopljen v vodo. Globino, do katere se potopi, dobimo iz energijskega izreka: Sprememba potencialne energije je enaka delu vzgona. Dokler je areometer ves potopljen v vodi, je vzgon enak $F = m'g = \frac{4}{3}mg$, ko areometer leze iz vode, se vzgon linearno spreminja od največje vrednosti do 0; pri računu za delo tedaj lahko vzamemo kar povprečno vrednost $\bar{F} = \frac{1}{2}F = \frac{2}{3}mg$. Velja

$$mgh = \frac{4}{3}mg(h-l) + \frac{2}{3}mgl, \quad h = 2l = 40 \text{ cm}.$$

- b) Če bi se areometer dvignil z globine 40 cm, bi se ravno ves dvignil iz vode (glej a)). Ker pa se dviga z manjše globine, se ne dvigne v celoti iz vode. Del areometra, ki ostane potopljen, označimo z x . Ko sedaj areometer leze iz vode, se vzgon linearno spreminja od največje vrednosti do vrednosti $\frac{x}{l}m'g$; povprečna vrednost vzgona je $\bar{F} = \frac{1}{2}(m'g + \frac{x}{l}m'g)$. Energijski izrek zapišemo

$$\begin{aligned} mg(h' - x) &= m'g(h' - l) + \bar{F}(l - x) = \\ &= \frac{4}{3}mg \left[(h' - l) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{l} \right) (l - x) \right]. \end{aligned}$$

Po preureditvi dobimo kvadratno enačbo $2x^2 - 3lx + 2l^2 - lh' = 0$ z rešitvijo

$$x_{1,2} = \frac{3}{4}l \pm \frac{1}{4}\sqrt{8lh' - 7l^2}.$$

Ker je $\frac{3}{4}l$ ravno ravnovesna lega, je smiselna rešitev tista z negativnim predznakom, saj se areometer dvigne *nad* ravnovesno lego. (Areometer na koncu niha med legama, ki ustrezata korenoma enačbe.) Areometer se dvigne iz vode za $s = l - z = \frac{1}{4}(l + \sqrt{8lh' - 7l^2}) = 16,2$ cm.

Skupina C

1. Podatki: $a = 30,0$ cm, $\beta_0 = 5,0 \cdot 10^{-4}/\text{K}$, $\beta_1 = 9 \cdot 10^{-6}/\text{K}$, $\rho_0 = 1260 \text{ kg/m}^3$, $\rho_1 = 1180 \text{ kg/m}^3$, $\Delta T = 80$ K.

Za ravnovesje vzgona in teže pred segrevanjem velja: $\rho_0 a^2 x g = \rho_1 a^3 g$. Od tod dobimo za višino potopljenega dela $x = \rho_1 a / \rho_0$. Višina dela nad gladino je $y = a - x = a(1 - \rho_1 / \rho_0) = 1,90$ cm.

Po segrevanju veljajo enake enačbe, le vsako količino je potrebno nadomestiti z ustrezno novo: $\rho'_1 = m/V' = m/V(1 + \beta_1 \Delta T) = \rho_1 / (1 + \beta_1 \Delta T)$, $\rho'_0 = \rho_0 / (1 + \beta_0 \Delta T)$ in $a' = a(1 + \frac{\beta_1}{3} \Delta T)$. Višina dela nad gladino po segrevanju je potem

$$y' = a(1 + \frac{\beta_1}{3} \Delta T) - \frac{\rho_1 a}{\rho_0} \cdot \frac{(1 + \beta_0 \Delta T)(1 + \frac{\beta_1}{3} \Delta T)}{(1 + \beta_1 \Delta T)} = 0,80 \text{ cm.}$$

Sprememba v višini dela nad gladino je $y' - y = -1,10$ cm. Kocka je torej v drugem primeru bolj potopljena.

Razmerje potopljenega dela in dela, ki gleda iz glicerina, je odvisno le od razmerja gostot. Če želimo to razmerje ohraniti, se mora torej ohraniti tudi razmerje gostot. To je možno le v primeru, ko sta koeficienta temperaturnega raztezka enaka.

2. Podatki: $E_0 = 10$ V/m, $a = 2,0$ mm, $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $e_0 = +1,6 \cdot 10^{-19}$ As.

- a) K polju zunaj kondenzatorja prispevajo vse tri plosče z enakim predznakom

$$10E_0 = \frac{e_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{e_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{e_3}{2\varepsilon_0 S},$$

za polje med prvo in drugo ploščo velja

$$-6E_0 = \frac{e_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{e_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{e_3}{2\varepsilon_0 S},$$

za polje med drugo in tretjo ploščo pa

$$4E_0 = \frac{e_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{e_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{e_3}{2\varepsilon_0 S}.$$

Če vpeljemo $e_0 = 2E_0\varepsilon_0 S$, hitro dobimo rešitev zgornjih enačb: $e_1 = 2e_0$, $e_2 = 5e_0$, $e_3 = 3e_0$; torej je razmerje $e_1 : e_2 : e_3 = 2 : 5 : 3$.

- b) Zadostuje, da premagamo potencialno razliko med prvo in drugo ploščo $U = 6E_0 a$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = e_0 U, \quad v_0 = \sqrt{\frac{12e_0 a E_0}{m}} = 4800 \text{ m/s}.$$

3. Podatki: $a = 20$ cm, $l = 1$ m, $N = 101$, $\zeta = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$, $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $B = 0,02$ T.

- a) Magnetna sila na prečko uravnovesi težo lestve: $mg = IaB$.
Maso letve izrazimo kot $m = (2l + Na)S\rho$ in dobimo

$$I = \frac{(2l + Na)S\rho}{aB}.$$

Če zanemarimo stranske vodnike in je R_0 upor ene prečke, velja

$$R = R_0 + \frac{R_0}{N-1} \approx R_0 = \frac{\zeta a}{S},$$

$$U = RI = \frac{(2l + Na)\zeta\rho g}{B} = 0,85 \text{ V}.$$

V prečki, ki je v magnetnem polju, teče tok v desno (glej skico pri besedilu naloge), v drugih prečkah pa v levo.

- b) Če upoštevamo prevajanje skozi lestev iz treh, petih, sedmih, ..., lahko ugotovimo, da se izraz za nadomestni upor približuje k vrednosti, ki je približno 20 % večja od R_0 ; za toliko je večja tudi napetost.

Skupina D

1. Podatki: $a = 30,0$ cm, $b = 40,0$ cm, $V = 70,0$ l, $\beta_0 = 5,0 \cdot 10^{-4}/\text{K}$, $\beta_1 = 9 \cdot 10^{-6}/\text{K}$, $\rho_0 = 1260 \text{ kg/m}^3$, $\rho_1 = 1180 \text{ kg/m}^3$, $\Delta T = 80$ K.

- a) Ko damo kocko v glicerin, začne kocka plavati. Višina potopljenega dela je enaka $x = \rho_1 a / \rho_0 = 28,1$ cm. Višina glicerina h_0 je potem $V_0 + a^2 x = b^2 h_0$, $h_0 = 0,596$ m. Zgornji rob kocke sega tako do višine $h = h_0 + a - x = 61,45$ cm nad dno posode.

- b) Po segrevanju veljajo enake enačbe kot pri a), le vsako količino je potrebno nadomestiti z ustrezno novo: $\rho'_1 = m/V' = m/V(1 + \beta_1 \Delta T) = \rho_1/(1 + \beta_1 \Delta T)$, $\rho'_0 = \rho_0/(1 + \beta_0 \Delta T)$, $a' = a(1 + \frac{\beta_1}{3} \Delta T)$, $a'^2 = a^2(1 + \frac{2\beta_1}{3} \Delta T)$, $V'_0 = V_0(1 + \beta_0 \Delta T)$.

Višina potopljenega dela po segrevanju je

$$x' = \frac{\rho_1 a}{\rho_0} \cdot \frac{(1 + \beta_0 \Delta T)(1 + \frac{\beta_1}{3} \Delta T)}{(1 + \beta_1 \Delta T)} = 29,2 \text{ cm},$$

višina glicerina v posodi pa

$$h'_0 = \frac{1}{b^2} \left[V_0(1 + \beta_0 \Delta T) + a^2(1 + \frac{2\beta_1}{3} \Delta T)x' \right] = 0,619 \text{ m}.$$

Zgornja ploskev kocke je tako na višini $h' = h'_0 + a(1 + \frac{\beta_1}{3} \Delta T) - x' = 62,74$ cm nad dnom posode. Zgornja ploskev kocke se glede na gladino glicerina spusti (dvig gladine glicerina je višji od dejanskega dviga kocke).

2. Podatki: $2R = 60$ cm, $d = 150$ cm, $h = 30$ cm, $\alpha = 30^\circ$.

- Pospešuje s konstantnim pospeškom.
- V težišču prijemlje teža, v dotikališču zadnjega kolesa s tlemi pa pravokotna komponenta podlage, ki je nasprotno enaka teži, in sila lepenja, ki kaže v smeri gibanja in je enaka produktu mase sistema in pospeška.
- Vsota navorov je enaka 0 le za os v težišču.
- Če z l označimo razdaljo od osi zadnjega kolesa do težišča $l = \frac{d}{2 \cos \varphi}$, $\tan \varphi = \frac{h}{2d}$, lahko zapišemo ravnovesje navorov za os v težišču kot

$$F_l(l \sin(\alpha + \varphi) + R) = F_0 l \cos(\alpha + \varphi).$$

Sila lepenja pospešuje motor, podlaga pa uravnovesi težo

$$ma = F_l, \quad F_0 = mg.$$

Za pospešek dobimo

$$a = g \frac{l \cos(\alpha + \varphi)}{l \sin(\alpha + \varphi) + R} = g \frac{\frac{1}{2}d \cos \alpha - h \sin \alpha}{\frac{1}{2}d \sin \alpha + h \cos \alpha + R} = 5,3 \text{ m/s}^2.$$

- Kritični kot je najmanjši možni; pri manjšem kotu bi bila potrebna vodoravna komponenta sile podlage večja od največje možne sile lepenja, $k_l mg$, kolo začne spodrsavati in ne zagotavlja več potrebnega pospeška. Kritični kot je torej odvisen od koeficienta lepenja.
3. Podatki: $N = 101$, $\zeta = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$, $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $B = 1,0 \text{ T}$.
- V prečki, ki pada skozi magnetno polje, se inducira napetost, ki požene tok po lestvi. Magnetna sila na prečko, ki se pri tem pojavi, zavira padanje lestve in narašča, vse dokler ne uravnovesi teže lestve. Lestev po tem pada s konstantno hitrostjo. V prečki, ki je trenutno v magnetnem polju, teče tok v desno (glej skico pri besedilu naloge), v drugih prečkah pa v levo.

- b) Z R_1 označimo upor enega odseka (prečke). Če bi bila lestev sestavljena le iz dveh prečk (kvadrata), bi za nadomestni upor R_2 veljala zveza

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1 + R_1},$$

če iz treh

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1 + R_2},$$

če iz $n + 1$ -odsekov pa

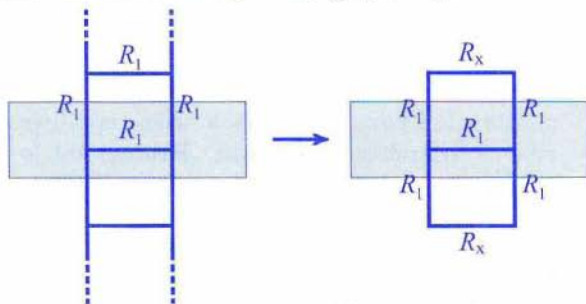
$$\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_1 + R_n}.$$

Z uvedbo $x_n = R_n/R_1$ zgornje zaporedje predelamo v podano obliko; torej je pri dovolj velikem n nadomestni upor lestve kar $R_x = xR_1 = (\sqrt{3} - 1)R_1$.

- c) Ko magnetna sila uravnovesi težo in če lestev pada s konstantno hitrostjo v , velja

$$mg = Iab, \quad m = (2(N-1) + N)aS\rho, \quad I = \frac{U_i}{R}, \quad U_i = vab.$$

Nadomestno vezje, po katerem teče inducirani tok, sestavljajo R_1 (ki ustreza prečki v polju) in dve vzporedno vezani veji iz zaporedno vezanih dveh R_1 in R_x (glej sliko).



Nadomestni upor je potem

$$R = R_1 + \frac{1}{2}(2R_1 + R_x) = \left(2 + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) \frac{\zeta a}{S}.$$

Končno dobimo

$$v = \frac{U_i}{aB} = \frac{RI}{aB} = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right) \frac{(3N - 2)\zeta\rho g}{B^2} = 53 \text{ cm/s}.$$

- d) Povprečna zaviralna sila je $\bar{F} = mg - \frac{1}{2}IaB = \frac{1}{2}mg$, $\bar{a} = \frac{1}{2}g$,
 $t = v_0/\bar{a} = 0,1 \text{ s}$, $s = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 = 2,5 \text{ cm}$. (Točen račun pokaže, da v
 tem času hitrost doseže 86 % končne.)

Bojan Golli

IZBIRNI TESTI ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO

Za uvrstitev v ekipo, ki je zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi, so se kandidati pomerili na dveh izbirnih tekmovanjih. Prvo je bilo 23. januarja, drugo pa 24. aprila 1998.

Prvi izbirni test

1. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2x f(y) + y^2$$

za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Dana je polkrožnica s središčem O in premerom AB . Na premici AB je izbrana takšna točka M , da je $|AM| > |BM|$. Točka M leži izven daljice AB . Premica skozi M seka krožni lok $\widehat{AB}$ v takih točkah C in D , da je $|CM| < |DM|$. Očrtani krožnici trikotnikov AOD in OBC se sekata v točkah O in K .
 Dokaži, da se premici OK in KM sekata pravokotno.
3. a) Alenka ima dve žari in v vsaki od njiju je 6 kroglic, označenih s številkami od 1 do 6. Alenka naključno izbere po eno kroglico iz vsake žare. Označimo s p_n verjetnost, da je vsota števil na izvlečenih kroglicah enaka n . Določi p_n za vsak $n \in \mathbb{N}$.
- b) Tudi Barbara ima dve žari in v vsaki od njiju je 6 kroglic, označenih z (neznanimi) naravnimi števili. Kroglice v eni žari so lahko drugače označene kot v drugi. Več kroglic v isti žari ima lahko enako številko. Če Barbara naključno izbere po eno kroglico iz vsake žare, je verjetnost, da je vsota števil na izvlečenih kroglicah enaka n , enaka p_n (torej enaka kot pri Alenki).
 Določi neznane oznake kroglic. (Poišči vse rešitve.)

Drugi izbirni test

1. Poišči vsa naravna števila x in y , ki zadoščajo enačbi

$$x + y^2 + z^3 = xyz,$$

kjer je z največji skupni delitelj števil x in y .

2. V ravnini ležijo krožnica $\mathcal{K}$ s središčem O , premica p , ki s krožnico nima skupne točke, in taka točka P na premici p , da je $OP \perp p$. Izberimo poljubno, od P različno točko X na premici p . Tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ iz točke X se krožnice dotikata v točkah A in B . Označimo s C in D pravokotni projekciji točke P na premici AX in BX .
- a) Označimo presečišče premic AB in OP z Y . Dokaži, da je lega točke Y neodvisna od izbire točke X na premici p .
- b) Označimo presečišče premic CD in OP z Z . Dokaži, da je Z razpolovišče daljice PY .
3. Zaporedje (a_n) naj bo podano z začetnim členom $a_0 = 1998$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 1}$ za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokaži, da je $[a_n] = 1998 - n$ za $n \in \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$.
- Opomba.* Z $[x]$ označimo največje celo število, ki ne presega realnega števila x .

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, šolsko leto 1998/99, številka 5, strani 257 – 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1998/99 je za posamezne naročnike **1.800 SIT**, za skupinska naročila šol **1.500 SIT**, posamezna številka **360 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1381

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

RAZGIBANI NIZI – Nadaljevanje rešitve s str. 263

Po abecedi 1999. razgibani niz, sestavljen le iz črk A, B in C, je:

ABACA BCACB ABCAB ACABC ACBAC ABACB ABCAB ACABC ACBAB CABAC BABCA CBACA
BACBA BCABA CABCA CBABC BACAB ACBAB CABAC ABCAC BACAB ACBAB CABAC ABCBA
BCABA CBABC ACBAC ABACB ABCAB ACABC ACBAB CABAC BABCA CBACA BACBA BCABA
CABCB ABCAB ACBAB CACBA CABAC BABCA BACBC ABCBA BCABA CABCA CBABC ABACA
BCBAB CABAC BABCA CBACA BACBA BCABA CABCA CBABC ABACB ABCAC BACAB ACBAB
CABAC ABCBA BCABA CBABC ACBAC ABACB ABCAB ACBCA BCBAB CABAC BABCA CBACA
BACBA BCABA CABCA CBABC ABACB ABCAC BACAB ACBAB CABAC ABCBA BCABA CBABC
ACBAC ABACB ABCAC BCABA CABCA CBABC ABACA BCACB CABAC ABCBA BCABA CABCA
CBABC ABACA BCBAB CABAC BABCA CBACA BACBA BCABA CABCA CBABC ABACB ABCAC
BACAB ACBAB CABAC ABCBA BCABA CBABC ACBAC ABACB ABCAB ACBCA BCBAB CABAC
ABCAC BABCA BACAB CBABC ABACB ABCAC BACAB ACBAB CABAC ABCAC BABCA BACBA
BCACB ACABA CBABC ABACA BCBAB CABAC BABCA CBACA BACBA BCACB CABAC ABCAC
BABCA BACAB CACBC ABACA BCBAB CABAC ABCAC BABCA BACAB CBABC ABACB ABCAC
BACAB ACBAB CABAC ABCAC BABCA BACBA BCACB ACABA CBABC ABACA BCBAB CABAC
BABCA CBACA BACBA BCABA CBCAB CBABC ABACA BCACB ABCBA CABAC BABCA BACAB
CACBA BCABA CBABC ACBAC ABACB ABCAB ACABC ACBAB CABAC BABCB ACABA CBABC
ABACA BCACB ABCAB ACBCA BCBAB CABAC ABCAC BABCA BACAB CBABC ABACB ABCAC
BACAB ACBAB CABAC ABCAC BABCA BACBA BCACB ACABA CBABC ABACA BCBAB CABAC
BABCA CBACA BACBA BCABA CBCAB CBABC ABACA BCACB ABCAB ACABC BABCA BACBA
BCACB ACABA CBABC ABACA BCACB ABCAB ACBAB CACBA CABAC BABCA BACAB CBABC
ABACB ABCAC BCABA CABCA CBABC ABACA BCACB CABAC ABCBA BCABA CABCA CBABC
ABACA BCBAB CABAC BABCA CBACA BACBA BCABA CABCA CBABC ABACB ABCAC BACAB
ACBAB CABAC ABCBA BCABA CBABC ACBAC ABACB ABCAB ACBCA BCBAB CABAC ABCAC
BABCA BACAB CBABC ABACB ABCAC BACAB ACBAB CABAC ABCAC BABCA BACBA BCACB
ACABA CBABC ABACA BCBAB CABAC BABCA CBACA BACBA BCACB CABAC ABCAC BABCA
BACAB CACBC ABACA BCBAB CABAC ABCAC BABCA BACAB CBABC ABACB ABCAC BACAB
ACBAB CABAC ABCAC BABCA BACBA BCACB ACABA CBABC ABACA BCBAB CABAC BABCA
CBACA BACBA BCABA CBCAB CBABC ABACA BCACB ABCAB ACABC BABCA BACBA BCACB
ACABA CBABC ABACA BCACB ABCAB ACBAB CACBA CABAC BABCA BACAB CBABC ABACB
ABCAC BCABA CABCA CBABC ABACA BCACB CABAC ABCBA BCABA CABCA CBABC ABACA
BCBAB CABAC BABCA CBACA BAC

Seveda pa zgornji niz ni po abecedi 1999. razgibani niz. Če bi uporabljali vse črke, potem bi bil 1999. razgibani niz drugačen. Do razlik pride že pri 8. nizu: če uporabljamo le črke A, B in C, je to ABACABC, če pa dovolimo še črko Č, lahko naredimo tudi niz ABACABAČ.

Martin Juvan



REP. SAN MARINO

SAGITTARIO



F.D.C.

Serie ZODIACO

