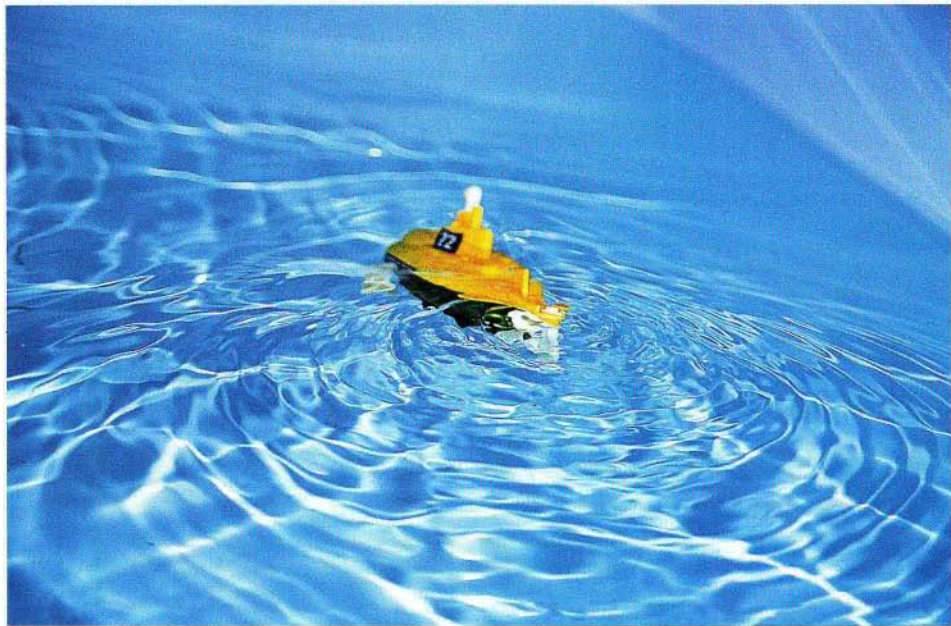


PRE
SEK
4



Podmornica iz trgovine z igračami.



Ker so bili ob pripravi te številke Preseka ribniki zamrznjeni, smo podmornico splovili kar v kopalni kadi. Poskus je nekoliko motila kratka plovna pot.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, leto 1998/99, številka 4, strani 193–256

	VSEBINA
MATEMATIKA	Nožiščne krivulje krožnice (Marko Razpet)..... 198-201 O harmoničnih številih (Jože Grasselli) 218-223 Verižni približki (Marino Pavletič) 234-240
FIZIKA	Podmornica na vzmet – kako deluje v vesolju in na Zemlji (Mojca Čepič) 194-197 Električni tok po plinih (Janez Strnad) 210-212 Padanje dveh povezanih krogel (Milan Ambrožič) .. 230-231
ASTRONOMIJA	Opazovanje vzhajališča in zahajališča Sonca (Marian Prosén) 202-203
RAČUNALNIŠTVO	Nenavadna funkcija z računalnikom (Martin Juvan) 204-208
NALOGE	Naloga o senci (Marian Prosén) 208-209 Želite zaposlitev pri Microsoftu? (Matija Lokar) 212 Razreži na skladne dele (Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj) 217 Razgibani nizi (Martin Juvan) 229
REŠITVE NALOG	Iz petih kvadratov dva – s str. 159 (Marija Vencelj) 203 Okroglo in kvadratasto – s str. 159 (Martin Juvan) 231-233 Številska igrice za mlade računarje – s str. 152 (Marija Vencelj) 240 Zanimiva naloga o Predpsu – s str. 165 (Marian Prosén) 240 Slana sredi grma – s str. 132 (Jože Rakovec) 241 Križanka "Zimski pojavi" – s str. 160 (Marko Bokalič) . 241 Križci in krožci oživljeni (Primož Potočnik) 226-229 Križanka "Ob 250-letnici rojstva" (Marko Bokalič) . 224-225 Pierre-Simon Laplace (1749–1827) – ob 250-letnici rojstva (Marija Vencelj) 213-217
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO NOVICE	34. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 242-243 18. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač) 243-246 42. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) 246-248 Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 1997/98 (Ciril Dominko) 249-254 39. mednarodna matematična olimpiada – Rešitvi izbranih nalog s str. 153 (Matjaž Željko) 254-256
TEKMOVANJA	Astronomija na znamkah – veliki astronomi, instrumenti (zbral Marian Prosén) I, IV Podmornica na vzmet – slike k članku na strani 194 (foto Matjaž Vencelj) II, III
NA OVITKU	

PODMORNICA NA VZMET – KAKO DELUJE V VESOLJU IN NA ZEMLJI

V mojem spominu igra pomembno vlogo pločevinasta podmornica, ki so jo starejši otroci spuščali po majhnem ribniku blizu otroškega igrišča v mariborskem mestnem parku. Poganjal jo je, kakor večino plovil, majhen vijak. Kaj je bilo v podmornici, je bila tedaj zame še skrivnost. Videla sem le srečne lastnike, ki so vijaček nekaj časa vrteli v eno smer, nato pa potopili podmornico v vodo. Podmornica je odbrzela po svoji poti, mi, nevedni gledalci, pa smo stegovali svoje vratove, da bi jo bolje videli. V naslednjem hipu sem se znašla v vodi. Zabave je bilo zame konec.

Januarja 1993 je vesoljsko plovilo Endeavor vzletelo s Floride z bogatim tovorom potrebščin za komunikacijske satelite in mnoge znanstvene poskuse. Na krovu pa so peljali tudi poln zaboj otroških igrac, namenjenih za pouk fizike iz vesolja¹. Ena izmed igrac je bila tudi podmornica, podobna tisti iz mariborskega ribnika. Nekateri med vami tako podmornico poznate, morda se celo skriva v vaši škatli z igračami. Poskusila sem jo poiskati v ljubljanskih trgovinah, vendar o njej še niso slišali. Na prednovoletnem izletu preko meje pa sem jo odkrila v trgovini z otroškimi igračami. Na odmaknjeni polici je samevala košara polna podmornic, ki so čakale na poletje. Podmornica iz trgovina z igračami je zelo podobna tisti vesoljski. Z njo sem naredila nekaj poskusov, s katerimi bo lažje razumeti, kaj se je dogajalo v vesolju.

Za tiste, ki take igrace še nikoli niso videli, jo opišimo. Podmornica ima obliko pomanjšane podmornice (slika na II. strani ovitka), na vrhu ima celo majhne periskope. Le razmerje med njeno dolžino in širino ni najbolj pravo. Sliki na III. strani ovitka prikazujeta notranjost in sestavne dele igrace. Podmornica je na spodnji strani obtežena (a), na zgornji strani ima plastičen mehur, napolnjen z zrakom (b). Na zadnji strani podmornice je vijak (c), ki je preko zobniškega sistema (d) povezan s spiralno vzmetjo (e). Spiralno vzmet navijemo z gumbom na spodnji strani podmornice. Z roko med navijanjem preprečimo vrtenje vijaka. Podmornico potopimo in počakamo, da se napolni z vodo. Nad vodo ostane samo vrhnji del podmornice. Previdno spustimo vijak, ki se začne vrteti, odriva vodo in podmornica se premika. Ko se vzmet odvij, se vijak ustavi, malo kasneje pa se ustavi tudi podmornica.

V vesoljskem laboratoriju seveda niso potapljali podmornice v vodo. Navili so spiralno vzmet in podmornico spustili po prostoru laboratorija. Vijak se je vrtel, odrival je zrak, podmornica se je počasi premikala skozi

¹ http://www.observe.ivv.nasa.gov/nasa/exhibits/toys_space/toyframe.html

zrak. Zgodilo pa se je še nekaj. Medtem ko se je gonilni vijak hitro vrtel v eno smer, se je preostali trup podmornice počasi vrtel v nasprotno smer. Česa takega na Zemlji pri podmornicah nikoli ne opazimo. Zakaj ne?

Medtem ko se je vzmet v trupu podmornice odvijala, je na enem koncu delovala z navorom na vijak podmornice, na nasprotni strani pa z nasprotno enakim navorom na trup plovila. Na celotno podmornico ni bilo nobenega drugega (zunanjega) navora, če zanemarimo majhen navor upora zraka.

Kadar se telesa lahko vrtijo okoli osi, okoli katere deluje navor, je kotni pospešek premosorazmeren velikosti navora. Sorazmernostni koeficient imenujemo vztrajnostni moment telesa in je odvisen od mase ter njene porazdelitve po telesu. Tako ima npr. votel valj, kjer je vsa njegova masa zgoščena v plašču, dvakrat večji vztrajnostni moment kot poln valj z enakimi dimenzijami in enako maso. Matematično zapišemo to zvezo v obliki

$$M = J \alpha ,$$

kjer je M navor, J vztrajnostni moment in α kotni pospešek, ki nam pove, za koliko radianov na sekundo se vsako sekundo poveča kotna hitrost vrtečega se telesa. Pri podmornici sta si navora na vijak in trup podmornice nasprotno enaka, vendar povzročata zaradi različnih vztrajnostnih momentov vijaka in podmornice različne kotne pospeške obeh:

$$J_{\text{vijak}} \alpha_{\text{vijak}} = -J_{\text{trup}} \alpha_{\text{trup}} ,$$

zato se tudi po enakem času različno vrtita v nasprotnih smereh. Trup podmornice, ki je večji in ima precej večjo maso kot vijak, se vrti mnogo počasneje kot lahek vijak. Zelo površno lahko njune frekvence ocenimo. Naj vijak tehta približno 2 g in ima premer 2 cm. Če privzamemo, da je njegova oblika podobna ploščatemu valju ($J_{\text{valj}} = 1/2 mr^2$), je njegov vztrajnostni moment enak približno 5 g cm². Trup podmornice tehta približno 100 g, večina njegove mase pa se skriva v uteži na dnu podmornice. Utež je od osi podmornice odmaknjena približno 2 cm. Vztrajnostni moment trupa bo približno 400 g cm² in je osemdestkrat večji od vztrajnostnega momenta vijaka. Zato pričakujemo 80-krat manjši kotni pospešek podmornice in tudi 80-krat manjšo kotno hitrost na koncu, ko se vijak odvrtil. Kolikšni naj bi bili frekvenci vrtenja vijaka in podmornice? Pri običajnem spuščanju podmornice obrnemo gumb za napenjanje spiralne vzmeti 3-krat. Zobniški prenos poskrbijo, da se zavrti vijak med odvijanjem vzmeti 90-krat. Ko je podmornica navita, sprostimo vijak in približno izmerimo čas vrtenja vijaka na zraku. Ta je zelo kratek – meri le

eno sekundo. Povprečna frekvenca vijaka je 90 obratov na sekundo, trup podmornice pa bo za en obrat v nasprotni smeri potreboval približno eno sekundo več. Na žalost je poskus na internetu predstavljen le z besedami in z zelo preprosto razlago. Resnejših podatkov o uporabljeni igrači pa ni in zato ne moremo narediti resne primerjave z našimi ocenami.

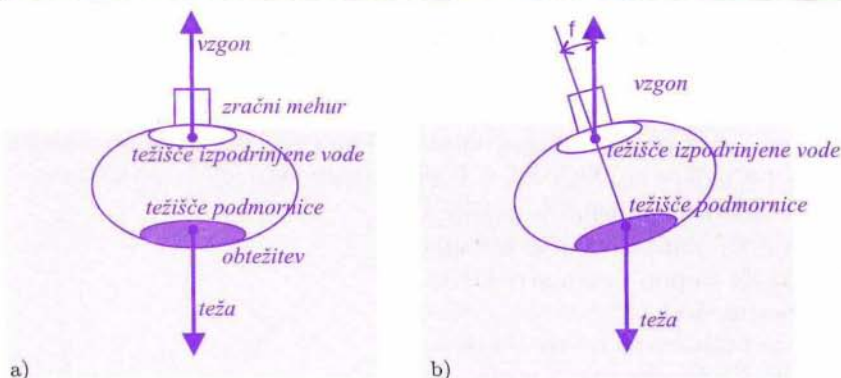
Zakaj takega dogajanja iz izkušenj na Zemlji ne poznamo? Na Zemlji ima podmornica težo. V vodi čuti podmornica tudi vzgon predvsem zaradi vode, ki jo izpodrine zračni mehur. Na Zemlji delujeta na podmornico še dve sili, ki ju v vesolju ni bilo, in povzročata navor. Obe sta posledica zemeljske privlačnosti. Na sliki 1 sta označeni obe sili in njuni prijemališči. Dokler sta teža in vzgon na isti premici (slika 1a), stoji podmornica navpično. Če jo nekoliko sunemo prečno na dolgo os, bo zanihala. Navor dvojice sil – teže in vzgona – namreč vrača ladjo v njeno običajno ravnovesno lego, ko je težišče podmornice natanko pod težiščem izpodrinjene vode. Vidimo torej, da je za podmornico vsota vseh zunanjih navorov enaka nič le v ravnovesni legi, drugače pa ne². Ko se vijak začne vrteti, se trup podmornice začne vrteti v nasprotni smeri, podobno kot v vesoljskem laboratoriju. Vendar bolj kot se zavrti, večji je navor teže in vzgona, ki deluje v nasprotni smeri. Kmalu se vzpostavi ravnovesje, ko je pri nagibu podmornice ϕ navor dovolj velik, da ustavi vrtenje podmornice. Podmornica pluje naprej, njen trup pa je nekoliko nagnjen. Ko se vzmet odvija, se navor zmanjšuje in z njim tudi nagib. Ali matematično:

$$M_{\text{vzmet}} = mg d \sin \phi,$$

kjer je M navor zvite vzmeti, mg teža podmornice, d razdalja med prijemališčema teže in vzgona ter ϕ kot, za katerega se podmornica nagne (slika 1b). Na spodnji sliki na II. strani ovitka je fotografirana podmornica, ki pluje z vrtečim se vijakom. Periskopi so nagnjeni za nekaj 10° .

Poskusimo še na Zemlji simulirati vesoljske razmere. Obeh zunanjih sil – teže in vzgona – ne moremo odpraviti, lahko pa zmanjšamo njen vpliv. Velikost navora dvojice sil je odvisna od njune medsebojne razdalje d . Če premaknemo težišče podmornice proti težišču izpodrinjene vode, se bo navor dvojice sil zmanjšal. Da bo doseženi učinek res dovolj velik, naredimo novo podmornico. Vijak si sposodimo iz podmornice ali pa ga naredimo iz plutovinastega zamaška, v katerega zatakemo aluminijaste lopatice (npr. iz pločevinke). Pritrdimo ga na povkrovček škatlice za šumeče tablete s koščkom trše žice, ki naj ima na notranji strani zanko.

² Obstaja še ena lega, kjer je vsota zunanjih navorov enaka nič, in sicer, ko stoji podmornica na glavi. Ta lega je labilna in že najmanjša motnja podmornico prevrne v lego, kjer je težišče podmornice pod težiščem izpodrinjene vode.



Slika 1.

Skozi škatlico napeljimo elastiko in jo na nasprotni strani pritrdimo s pomočjo vžigalnice, da se ne bo odvijala. Naši novi podpornici navijemo vijak, jo potopimo pod vodo in počakamo, da se z vodo napolni. Vijak pridržimo, da se ne odvrti. Plastika, iz katere je narejena škatlice, je nekoliko lažja od vode, zato škatlica, tudi če je napolnjena z vodo, plava. Ko vijak spustimo, se zavrti, odriva vodo in škatlica se po vodi premika naprej. Pri tem se vrti v nasprotni smeri kot vijak, podobno kot podmornica v vesolju. Zakaj tako drugače od igračke? Težišče izpodrinjene vode je pri igrački približno v središču zračnega mehurja, težišče podmornice pa v sredini uteži na njenem dnu. Razdalja med obema znaša nekaj centimetrov. Tudi vztrajnostni moment podmornice je mnogo večji od vztrajnostnega momenta vijaka in tudi podmornica, v kateri bi obe težišči sovpadali, bi se vrtela počasi. Masa plastične škatlice je enakomerno porazdeljena po obodu, zato je njeno težišče nekje v sredini škatlice; ker je vsa narejena iz enakega materiala in je približno simetrična, je tudi težišče izpodrinjene vode na istem mestu. Plastična škatlica ima poleg tega vztrajnostni moment le nekajkrat večji od vztrajnostnega momenta vijaka, zato je frekvenca vrtenja škatlice le nekajkrat manjša od frekvence vrtenja vijaka. Ker težišči podmornice in izpodrinjene vode sovpadata, tudi navora, ki bi vrtenje preprečil, ni. Ko se elastika odvijje, vrtenje zamre. Navorov okolja na škatlico namreč ne moremo preprečiti. Vrteči se vijak odriva vodo (ali v vesoljskem laboratoriju zrak), navor upora vode pa zavira vrtenje.

Za konec pa še naloga za vas: Naredite podmornico iz škatlice za šumeče tablete. Postopoma jo na dveh različnih mestih obtežite (npr. s plastelinom) in razbremenite (npr. s koščki stiropora) tako, da se navor zopet pojavi. Ugotovite, kdaj se škatlica ne suče več! Ugotovite, kako se spreminja zasuk škatlice medtem, ko se vijak odvija! Pa še sami dodajte kakšno ugotovitev.

Mojca Čepič

NOŽIŠČNE KRIVULJE KROŽNICE

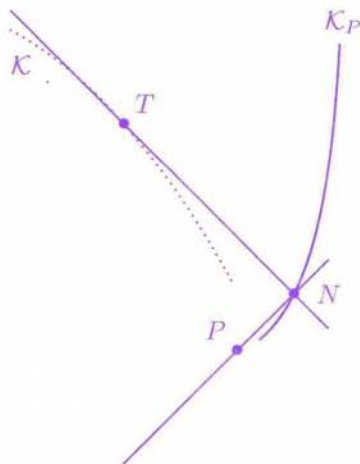
Iz dane ravninske krivulje $\mathcal{K}$ lahko na različne načine naredimo nove krivulje, npr. z raztegi in zrcaljenji. Obstajajo pa tudi bolj zapleteni postopki pridobivanja krivulj. Ogledali si bomo nožiščne krivulje dane krožnice.

V splošnem pridemo do nožiščne krivulje $\mathcal{K}_P$ dane ravninske krivulje $\mathcal{K}$ tako, da najprej v ravnini te krivulje izberemo točko P , nato pa jo pravokotno projiciramo na vse tangente krivulje $\mathcal{K}$. Množica vseh nožišč N , t.j. presečišč pravokotnic skozi P na vse tangente krivulje $\mathcal{K}$, je nožiščna krivulja $\mathcal{K}_P$ krivulje $\mathcal{K}$ glede na pol P .

Premica ni zanimiva, saj je sama sebi tangenta. Nožiščna "krivulja" premice glede na katerokoli točko je točka. Kaj pa nožiščna krivulja krožnice? V tem primeru so reči nekoliko bolj zapletene, toda zanimivejše.

Problema se lotimo z analitičnimi orodji. Vzemimo v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy krožnico $\mathcal{K}$ s polmerom R in s središčem v točki $S(R, 0)$. Ni težko najti njene enačbe $x^2 + y^2 = 2Rx$. Točko T na $\mathcal{K}$ podajmo s središčnim kotom φ (slika 2). Točka T ima očitno koordinati $(R(1 + \cos \varphi), R \sin \varphi)$. Spomnimo se, da ima tangenta na krožnico $x^2 + y^2 = 2Rx$ v točki $T(x_0, y_0)$ enačbo $x_0x + y_0y = R(x + x_0)$. Če vanjo vstavimo $x_0 = R(1 + \cos \varphi)$ in $y_0 = R \sin \varphi$, dobimo naslednji rezultat: tangenta t na $\mathcal{K}$ v točki T je premica z enačbo $x \cos \varphi + y \sin \varphi = R(1 + \cos \varphi)$.

Naj bo točka $P(-a, 0)$ pol, glede na katerega bomo iskali nožiščno krivuljo $\mathcal{K}_P$. Zaradi simetrije krožnice lahko brez škode za splošnost vzamemo P čisto poljubno, za lažji račun jo postavimo kar na abscisno os. Skozi P narišemo pravokotnico n na tangento t . Enačba premice n je $y = (x + a) \tan \varphi$ oz. $(x + a) \sin \varphi - y \cos \varphi = 0$. Druga oblika je splošnejša, ker dopušča tudi, da je $\varphi = \pm \pi/2$, česar prva oblika ne prenese. Vse tangente na $\mathcal{K}$ dobimo, ko kot φ preteče interval $[0, 2\pi)$.



Slika 1. Nastanek nožiščne krivulje.

Da bi rezultatu dali drugačen geometrijski pomen, načrtamo krožnico $\mathcal{K}'$ skozi P in S , s središčem v točki S' , razpolovišču daljice PS . Premer te krožnice je $R + a$. Premica n seka to krožnico v točki M . Ni težko ugotoviti, da je daljica MS vzporedna z daljico NT in da je štirikotnik $STNM$ pravokotnik.

Iz pravokotnega trikotnika PSM razberemo, da je razdalja r od P do M enaka $(R + a) \cos \varphi$. Pri danem kotu φ je torej razdalja ϱ za R večja od razdalje r .

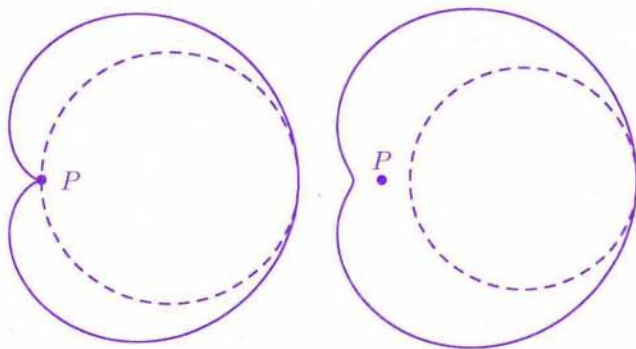
Če vzamemo točko P za pol, za polarno os pa poltrak s krajiščem v P , usmerjen v pozitivni smeri osi x , dobimo polarni koordinatni sistem, v katerem ima krožnica $\mathcal{K}'$ enačbo $r = (R + a) \cos \varphi$, $\mathcal{K}_P$ pa enačbo (1).

Krivulja $\mathcal{K}_P$ je poseben primer krivulje, ki ima v polarnih koordinatah (ϱ, φ) enačbo

$$\varrho = 2d \cos \varphi + b, \quad (2)$$

kjer sta d in b pozitivni števili. Taki krivulji pravimo *Pascalov polž*. Pascalov polž po točkah konstruiramo tako, da načrtamo najprej krožnico s premerom $2d$, imenovano *osnovnica polža*, nato v enem krajišču premera potegnemo poltrak. Iz presečišča poltraka s krožnico naneseemo razdaljo b po poltraku na obe strani in dobimo eno ali dve točki Pascalovega polža. Nato opisano konstrukcijo ponavljamo za več poltrakov in dobljene točke povežemo. Tudi ta konstrukcija je primerna za računalniški program Cabri-géomètre.

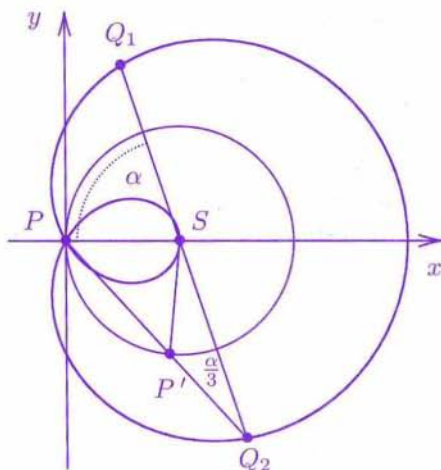
Torej je nožiščna krivulja krožnice glede na katerokoli točko Pascalov polž, pri katerem je $2d = R + a$ in $b = R$.



Slika 3. Primera Pascalovih polžev.

V posebnem primeru $a = 0$ je enačba krivulje $\mathcal{K}_P$ v polarnih koordinatah $\varrho = R(1 + \cos \varphi)$, kar predstavlja *srčnico* ali *kardio* (slika 3 levo). Če je P znotraj $\mathcal{K}$, Pascalov polž nima značilne male zanke (slika 3 desno), kot jo ima tisti na sliki 2.

Pascalov polž je zanimiv tudi kot trisektrisa, to je krivulja, ki pomaga razdeliti kot na tri enake dele. V ta namen je treba vzeti tisti primer polža, ko je $d = b$. Tedaj ima polž pentljo, ki sega ravno do središča krožnice, njegove osnovnice (slika 4).



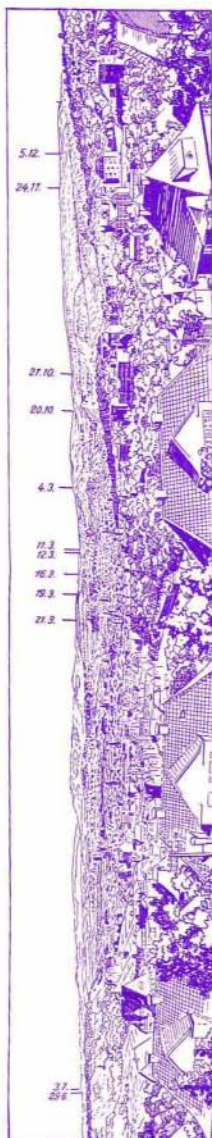
Slika 4. Tretjinjenje kota.

Na sliki 4 je kot $\alpha = \angle PSQ_1$. Daljico skozi Q_1 in S podaljšamo tako, da seka polža v točki Q_2 . Premica skozi Q_2 in P seka osnovnico polža v točki P' . Zaradi posebne izbire le-tega sta trikotnika PSP' in $SP'Q_2$ enakokraka. Naj bo $\varepsilon = \angle P'SQ_2 = \angle P'Q_2S$. Potem je $\angle PP'S = \angle SPP' = 2\varepsilon$, saj je v trikotniku vselej zunanji kot enak vsoti notranjih, nepriležnih kotov. Kot α je kot zunanji kot trikotnika PSQ_2 enak vsoti notranjih, nepriležnih kotov, torej $\alpha = 3\varepsilon$. Ugotovili smo torej, da je $\angle SP'Q_2 = \frac{\alpha}{3}$.

Obliko Pascalovega polža imajo menda pri železnici ekscentri za dviganje in spuščanje signalov, ki povedo stanje kretnic. Oblika poskrbi, da se naprava najhitreje vrti na sredi vrtljaja, na začetku in koncu pa najpočasneje, da ne prihaja do nepotrebnih sunkovitih gibanj.

Marko Razpet

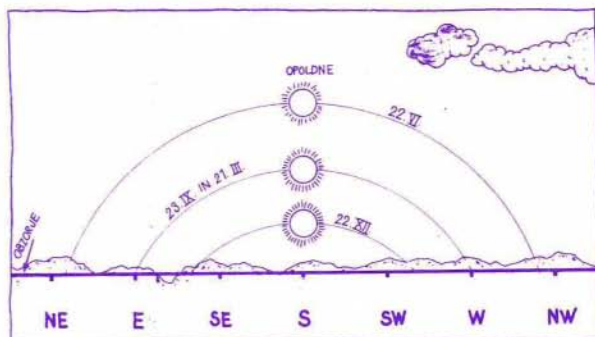
OPAZOVANJE VZHAJALIŠČA IN ZAHAJALIŠČA SONCA



To, da pride Sonce pri svojem navideznem dnevnem gibanju vsako opoldne najvišje nad južnim delom obzorja, veste. Najbrž ste tudi opazili, da Sonce ne vzhaja vse leto v isti točki obzorja in prav tako tudi ne zahaja (slika 1). Točki na vzhodnem delu obzorja, kjer Sonce vzhaja, rečemo *vzhajališče*, točki na zahodnem delu obzorja, kjer zahaja, pa *zahajališče*.

Zanimiva naloga, ki si jo lahko zadate, je opazovanje vzhajališča in zahajališča Sonca med letom. Ne vzame vam veliko časa, čeprav je dolgoročna. Če imate doma proti vzhodu obrnjeno okno, lahko spremljate vzhajanje Sonca, če imate primerno, na zahod obrnjeno okno, pa njegovo zahajanje.

Najpreprosteje je, da si na večji list narišete del obzorja, ki ga vidite skozi okno. Nato vse leto, kadar se pač spomnite in je lepo vreme, več dni zapored ali enkrat na teden, vendar vsaj enkrat na mesec, pričakate vzid Sonca in na pripravljeno skico dela obzorja narišete točko – vzhajališče, kjer je tistega jutra vzšlo Sonce. Zraven zapišete še datum in čas (uro in minuto).



Slika 1. Navidezne dnevne poti Sonca nad našim obzorjem v začetku poletja, ob enakonočjih in v začetku zime – pogled proti jugu (S).

← Slika 2. Zgled, kako lahko uresničite opazovanje Sončevega vzhajališča. Opazujete vedno iz istega opazovališča.

Presenečeni boste, kako hitro se premika vzhajališče po obzorju. Posebej poskušajte zabeležiti vzhajališče ob enakonočjih, tj. 21. 3. in 23. 9., saj ob teh datumih Sonce vzhaja povsod na Zemlji (razen na polih) natančno na vzhodu (slika 2).

Na enak način lahko spremljate premikanje zahajališča Sonca med letom. Ob enakonočjih Sonce zahaja natančno na zahodu. (Vzid ali zaid Sonca sicer lahko tudi fotografirate, vendar morate biti zelo pazljivi, najbolje pa je, da se o tem posvetujete s fotografskim strokovnjakom.)

Ob teh opazovanjih si je zanimivo ogledati tudi barve neba. Ni pa nujno, da opazujete le jutranje ali večerno nebo, saj se včasih pojavijo čudovito lepe barve tudi podnevi, na primer ob spremembi vremena.

OPOZORILO

Dne 11. 8. 1999 okoli poldneva ne pozabite opazovati Sončevega mrka, ki bo s skrajnega severnega dela Slovenije viden skoraj kot popolni. Podatke o njem najdete v društveni publikaciji Astronomske efemeride NAŠE NEBO 1999 ali pa na Internetu.

Marijan Prosén

IZ PETIH KVADRATOV DVA – Rešitev s str. 159

Delno si pri reševanju naloge lahko pomagamo z naslednjim premislekom:

Lik, ki ga želimo sestaviti, je danemu križu ploščinsko enak pravokotnik, ki ima stranici v razmerju 2 : 1. Če označimo z a stranico posameznega od petih kvadratov, ki sestavljajo križ, in z x daljšo od pravokotnikovih stranic, sledi iz primerjave plosčin zveza

$$x^2 = 10a^2.$$

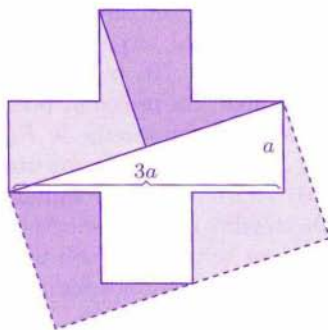
Enakovredna zveza

$$x^2 = (3a)^2 + a^2$$

pa je preko Pitagorovega izreka že dober namig za prvi prerez križa.

Ker poteka ta prerez skozi središče križa, drugega, ob upoštevanju simetrije, ni več težko poiskati.

Marija Vencelj



NENAVADNA FUNKCIJA Z RAČUNALNIKOM

V prejšnji številki Preseka (Nenavadna funkcija, Presek 26 št. 3, str. 166–169) smo spoznali nekatere zanimive lastnosti funkcije F , ki smo jo definirali rekurzivno z naslednjimi predpisi:

$$F(1) = 1 \quad \text{in} \quad F(2n) = F(n), \quad F(2n+1) = F(n) + F(n+1) \quad \text{za } n \geq 1.$$

Tokrat si bomo ogledali nekaj računalniških programov, s katerimi si lahko pomagamo pri raziskovanju lastnosti te funkcije. S programi bomo tudi preverili odgovore na nekatera vprašanja, na katera smo s teoretičnim razmislekom odgovorili že v prejšnji številki Preseka.

Začnimo s programom v logu, s katerim za dano naravno število n izračunamo vrednost $F(n)$:

```
TO F :n
  IF :n < 2 [OUTPUT 1] ;baza rekurzije
  TEST (REMAINDER :n 2) = 0 ;Ali je argument sod?
  IFT [OUTPUT F :n/2] ;Da.
  IFF [OUTPUT (F (:n-1)/2) + (F (:n+1)/2)] ;Ne.
END
```

V gornjem programu računamo vrednost funkcije neposredno iz definicije. Pri taki neposredni uporabi rekurzivnih definicij moramo biti vedno previdni, saj se hitro primeri, da večkrat pokličemo funkcijo z istim argumentom. To pa pomeni odvečno delo in včasih je tega dodatnega dela toliko, da program postane praktično neuporaben. Ker je v našem primeru baza rekurzije le $F(1) = 1$, je pri izračunu vrednosti $F(n)$ funkcija F poklicana z argumentom $n = 1$ natanko $F(n)$ -krat. Že pri izračunu $F(9)$ vrednost $F(1)$ računamo npr. 4-krat. Ker pa funkcija F pri majhnih številih ne zavzame velikih vrednosti, je za majhna števila napisani program še vedno dovolj učinkovit.

Z gornjim programom lahko tudi sestavimo tabelo vrednosti funkcije F za števila od 1 do 16. Vrednosti zlagamo v seznam s , tega pa na koncu izpišemo:

```
MAKE "s [] MAKE "i 0
REPEAT 16 [MAKE "i :i+1 MAKE "s LPUT F :i :s]
PRINT :s
```

Gornji ukazi tako izpišejo

```
1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1
```

S programom lahko tudi ugotovimo, koliko je $F(1999)$. Ukaz

```
print F 1999
```

izpiše 49, toliko, kolikor smo naračunali tudi v že omenjenem prispevku v prejšnji številki Preseka.

V nadaljevanju si bomo ogledali, kako lahko vrednosti funkcije F računamo še precej hitreje. Eden od možnih pristopov je, da vrednosti, ki jih izračunamo, sproti shranjujemo, npr. v tabelo. Poglejmo, kako na ta način s programom v programskem jeziku pascal poiščemo največjo vrednost, ki jo funkcija F zavzame na številih od 1 do 1999.

program NenavadnaFunkcija;

{ Poišče največjo vrednost funkcije F na številih od 1 do meja. }

const

meja = 1999;

var

F: **array** [1..meja] **of** integer; { tabela vrednosti funkcije F }

i: integer;

max: integer;

begin

{ Izračunamo vrednosti funkcije F od 1 do meja. }

F[1] := 1;

for i:=2 **to** meja **do**

if odd(i) **then**

F[i] := F[i div 2] + F[i div 2 + 1]

else

F[i] := F[i div 2];

{ Med vrednostmi poiščemo največjo. }

max := F[1];

for i:=2 **to** meja **do**

if F[i]>max **then** max := F[i];

{ Izpišemo podatke o največji vrednosti. }

writeln('Najvecja vrednost funkcije od 1 do ',meja,' je ',max,'.');

write('Ta vrednost je dosezena pri naslednjih stevilih:');

for i:=1 **to** meja **do**

if F[i]=max **then** write(i:5);

writeln;

end.

Ko program poženemo, ta izpiše

Najvecja vrednost funkcije od 1 do 1999 je 144.

Ta vrednost je dosezena pri naslednjih stevilih: 1365 1707

Seveda so odgovori enaki tistim, ki smo jih s kar precej dolgim in zapletenim razmislekom našli v prejšnji številki Preseka.

Računanje zaporednih vrednosti funkcije s sprotnim shranjevanjem vrednosti v tabelo je učinkovit postopek, kadar želimo izračunati vrednosti funkcije pri prvih nekaj številih. Da dobimo novo vrednost, moramo le preveriti parnost argumenta in morebiti sešteti dve že znani vrednosti. Slaba stran postopka pa je, da potrebuje precej pomnilnika za tabelo vrednosti, kar omejuje njegovo uporabnost. Polovico tabele lahko prihranimo, če v njej hranimo le vrednosti funkcije pri lihih argumentih. Vrednost pri sodem argumentu potem dobimo tako, da argument delimo z 2, dokler je sod, ko pa postane lih, vrednost funkcije preberemo iz tabele. Na ta način nekoliko povečamo čas, ki ga potrebujemo za izračun naslednje vrednosti, hkrati pa razpolovimo količino potrebnega pomnilnika. Kodiranje programa, ki uporablja opisano spremembo, vam prepuščam za vajo.

Kako pa bi izračunali vrednost funkcije F pri velikih argumentih, recimo $F(1\,789\,569\,707)$ ali pa $F(2\,863\,311\,531)$? S shranjevanjem vrednosti v tabelo si ne moremo pomagati, saj bi potrebovali res ogromno tabelo, pa tudi izračun manjših vrednosti bi nam vzel kar nekaj časa. Pa saj nas prejšnje vrednosti sploh ne zanimajo. Poskusimo lahko s programom v logu, ki smo ga napisali na začetku prispevka, a po nekaj minutah obupamo, saj ni videti, da bi se računanje kaj kmalu končalo. No, res je, da je logo programski jezik, ki se tolmači. Programi v jezikih, ki se prevajajo, taka sta npr. pascal in C, so običajno bistveno hitrejši. Tako lahko rekurzivno definicijo funkcije zapišemo kot program v pascalu ali C-ju. Poskusite, gotovo vam bo uspelo. Če vas skrbi predolgotrajno računanje, lahko uporabite še kakšen dodatni "trik". V tabeli lahko pripravite vrednosti funkcije za "majhne" argumente, recimo do 10000, in te vnaprej izračunane vrednosti uporabite kot (razširjeno) bazo rekurzije. Poskusite lahko tudi s shranjevanjem vmesnih rezultatov. Vse vrednosti funkcije F , ki jih izračunate (tudi tiste z vmesnih korakov), skupaj s pripadajočim argumentom shranjujete v tabelo. Ko vas zanima vrednost $F(n)$, najprej pogledate po tabeli, ali ste to vrednost morda že izračunali. Tako zagotovite, da za vsak argument vrednost funkcije računate le enkrat (seveda pa se lahko zgodi, da vam čez čas po veliko opravljenih računih v tabeli zmanjka prostora).

Za konec prispevka pa si bomo ogledali tisto pravo metodo za računanje vrednosti funkcije F pri velikih argumentih. Postopek bo malce zvit, a preprost, zelo hiter in ne bo zahteval nobenega dodatnega prostora. Recimo, da bi radi izračunali vrednost $F(n)$. Iskano vrednost bomo zapisali

kot celoštevilsko linearno kombinacijo dveh zaporednih vrednosti funkcije F :

$$F(n) = a \cdot F(m) + b \cdot F(m + 1).$$

Na začetku vzamemo kar $m = n$, $a = 1$ in $b = 0$. Nato število m razpolovimo in izračunamo nova koeficienta. Pri tem ločimo dve možnosti. Če je število m sodo, $m = 2m'$, potem velja $F(m) = F(m')$ in $F(m + 1) = F(m') + F(m' + 1)$. Tako dobimo

$$F(n) = a \cdot F(m) + b \cdot F(m + 1) = (a + b) \cdot F(m') + b \cdot F(m' + 1).$$

Če pa je število m liho, $m = 2m' + 1$, potem imamo $F(m) = F(m') + F(m' + 1)$ in $F(m + 1) = F(m' + 1)$. Tedaj velja

$$F(n) = a \cdot F(m) + b \cdot F(m + 1) = a \cdot F(m') + (a + b) \cdot F(m' + 1).$$

V obeh primerih lahko torej $F(n)$ zapišemo kot kombinacijo vrednosti $F(m')$ in $F(m' + 1)$, pri čemer nova koeficienta na zelo preprost način izračunamo iz prejšnjih dveh.

Zapišimo program v programskem jeziku C, ki za izračun vrednosti funkcije F uporablja zgoraj opisani postopek.

```
#include <stdio.h>
```

```
/*
```

```
    Hiter izračun vrednosti funkcije F.
```

```
    Deluje hitro tudi za velike vrednosti argumenta.
```

```
*/
```

```
unsigned long F(unsigned long);
```

```
int main(void)
```

```
{
```

```
    unsigned long n; /* argument */
```

```
    do {
```

```
        printf("Vpisi vrednost argumenta (0 za konec): ");
```

```
        scanf("%lu", &n);
```

```
        if (n != 0) printf("F(%lu) = %lu\n\n", n, F(n));
```

```
    } while (n != 0);
```

```
    return 0;
```

```
}
```

```

/* Nerekurzivno in brez tabele izračuna vrednost F(m). */
unsigned long F(unsigned long m)
{
    unsigned long a = 1, b = 0;

    /* Invarianta zanke: iskana vrednost = a*F(m)+b*F(m+1). */
    while (m > 1) {
        if (m % 2 == 0) a += b; else b += a;
        m /= 2;
    }
    return a + b; /* F(1) = F(2) = 1 */
}

```

S programom izračunamo vrednosti

$$F(1\,789\,569\,707) = 2\,178\,309 \quad \text{in} \quad F(2\,863\,311\,531) = 3\,524\,578.$$

Še na eno malenkost opozorimo. Programski jezik C pozna nepredznačena dolga cela števila (tip `unsigned long`). Na osebnih računalnikih spremenljivka takega tipa običajno zaseda 32 bitov, tako da je največja vrednost, ki jo lahko shranimo vanjo, enaka $2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,295$. Turbo pascal takega tipa ne pozna. (Predznačena) dolga cela števila (tip `longint`) sicer zavzamejo 32 bitov, a največja vrednost, ki jo lahko shranimo v spremenljivko tega tipa, je $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$. Če bi gornji program napisali v (turbo) pascalu, tako z njim ne bi mogli izračunati vrednosti $F(2\,863\,311\,531)$, saj je argument funkcije prevelik in bi prišlo do prekoračitve. Morali bi sprogramirati še računanje s "pravimi" dolgimi števili ali pa prvo uporabo rekurzivnega pravila opraviti s svinčnikom in papirjem.

Martin Juhan

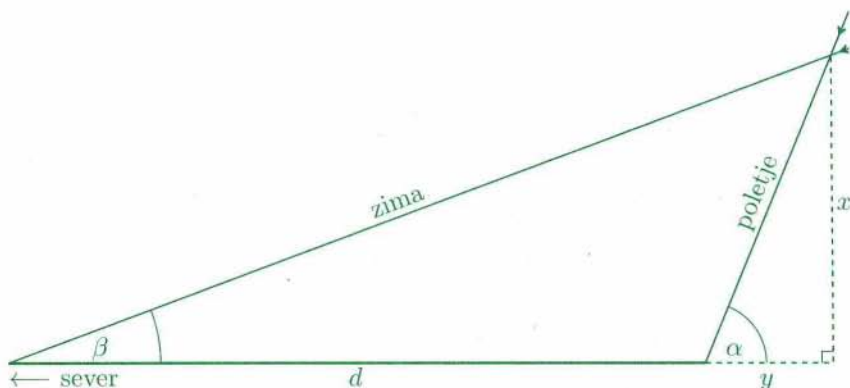
NALOGA O SENCI

Natančno sem opazoval senco, ki jo na vodoravna tla meče od Sonca osvetljena navpična palica. Razlika med najdaljšo in najkrajšo dolžino opoldanske sence je bila $d = 215$ cm.

Kje sem zabodel palico in kako dolga je bila? Reši računsko in grafično. Zemljepisna širina kraja opazovanja je $\varphi = 46^\circ$.

Rešitev

Vedeti moramo, da je opoldanski višinski kot Sonca ob enakonočju $90^\circ - \varphi = 44^\circ$, deklinacija Sonca pa se spreminja v mejah od $-23,5^\circ$ do $+23,5^\circ$. Opoldanski višinski kot Sonca ob poletnem Sončevem obratu – kresu (ok. 21. 6.), ko je opoldanska senca najkrajša, je $\alpha = 44^\circ + 23,5^\circ = 67,5^\circ$, opoldanski višinski kot Sonca ob zimskem obratu – božiču (ok. 21. 12.), ko je opoldanska senca najdaljša, pa je $\beta = 44^\circ - 23,5^\circ = 20,5^\circ$.



Slika 1. Grafična rešitev naloge. Narišemo topokotni trikotnik z znano osnovnico d in priležnima kotoma β in $180^\circ - \alpha$; x (višino trikotnika) in y odčitamo s slike.

Naj bo x dolžina palice, y pa dolžina najkrajše opoldanske sence oziroma razdalja podnožjišča palice do vrha najkrajše opoldanske sence. Iz skice izpeljemo

$$x = y \operatorname{tg} \alpha \quad \text{in} \quad x = (y + d) \operatorname{tg} \beta.$$

Iz enakosti $y \operatorname{tg} \alpha = (y + d) \operatorname{tg} \beta$ sledi

$$y = \frac{d \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = 39 \text{ cm} \quad \text{in} \quad x = \frac{d \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = 95 \text{ cm}.$$

Dolžina palice je bila res 95 cm, dolžina najkrajše sence pa 40 cm. Napaka ± 1 cm pa je pri takšnih meritvah povsem dopustna.

Marijan Prosén

ELEKTRIČNI TOK PO PLINIH

V prejšnjih številkah Preseka smo že spregovorili o toku po kovinah in elektrolitih, pomudimo se tokrat pri toku po plinih. Čist zrak ne prevaja elektrike. Molekule plina so električno nevtralne, tako da v zraku ni nosilcev naboja. Zrak prevaja le, če vanj nosilce naboja uvajamo ali jih v njem naredimo. To lahko dosežemo s plamenom, s kratkovalovno svetlobo ali pa z naelektrenimi delci. Pri tem se nevtralna molekula spremeni v *ionski par*, kakor imenujemo negativni elektron in pozitivni ion. Pravimo, da plin *ioniziramo*. V prostoru med elektrodama, na katerih je stalna električna napetost, se pozitivni ioni gibljejo proti negativni elektrodi, elektroni pa proti pozitivni elektrodi. Elektron se včasih obesi na molekulo in tedaj pri prevajanju poleg pozitivnih ionov in elektronov sodelujejo tudi negativni ioni.

Med elektrolitom in plinom je pomembna razlika. Elektrolit prevaja, dokler z elektrolizo ne porabimo vse raztopljene snovi. Da bi prevajal plin, pa ga moramo nenehno ionizirati. Ioni in elektroni se namreč združijo v nevtralne molekule ali odtečejo iz prostora med elektrodama, tako da tok preneha. Tok, ki preneha, če od zunaj na plin ne vplivamo, imenujemo *nesamostojni tok*. Nesamostojni tok opazimo v plinu pri razmeroma nizki napetosti. Pomemben je, ker lahko preko njega zaznavamo naelektrene delce, ki se gibljejo po plinu, ali kratkovalovno svetlobo, s katero obsevamo plin.

Pri visoki napetosti in nizkem tlaku se pojavi ti. *samostojni tok*. V njem elektron ali ion zaradi dela električne sile med zaporednima trkoma v povprečju pridobi dovolj veliko kinetično energijo, da ob trku molekulo plina ionizira. Čim nižji je tlak, tem večjo pot prepotuje elektron ali ion v povprečju med zaporednima trkoma in tem več kinetične energije pridobi. Tok v tem primeru vzdržuje samega sebe: v plinu, ki je navzven nevtralen in na katerega ne vplivamo od zunaj, trki nosilcev naboja z molekulami dobavljajo nove in nove elektrone ter ione. Takemu plinu pravimo *plazma*. Molekule v tem primeru tudi sevajo, izsevana svetloba pa dodatno ionizira plin. Pride še do drugih pojavov, zaradi katerih utegnejo biti razmere v plazmi dokaj zapletene.

V laboratoriju navadno dobimo plazmo z visoko napetostjo v plinu pri nizkem tlaku. Mogoče pa jo je dobiti tudi pri zelo visoki temperaturi. Zaradi termičnega gibanja postanejo trki med molekulami v tem primeru dovolj močni, da nastanejo ionski pari. Večkrat slišimo, da je plazma "četrto agregatno stanje", ki celo prevladuje v vesolju. Tako sredice zvezd sestavlja plazma, ki zelo dobro prevaja elektriko. V središču zvezd so v plazmi pri zelo visoki temperaturi trki med atomskimi jedri tako močni, da

pride do jedrske reakcije, pri kateri se zlivajo lahka atomska jedra. Zlivanje le-teh dobavlja zvezdam energijo, ki jo izsevajo. V laboratoriju želijo posnemati razmere v zvezdah tako, da plazmo močno segrejejo. Težava pa je v tem, da se plazma razbeži, ker ni gravitacije, ki drži skupaj dele zvezde. Poskušajo si pomagati z magnetnim zadrževanjem redke plazme ali pa s ponavljanjem majhnih eksplozij v gosti plazmi.

Pri podrobnejšem obravnavanju začnemo z nesamostojnim tokom. Za prevodnost plina velja podobna enačba kot za prevodnost elektrolita, in sicer

$$\frac{1}{\zeta} = e_0(\beta^+ + \beta^-) \frac{N}{V},$$

e_0 je osnovni naboj, β^+ gibljivost pozitivnih ionov, β^- gibljivost elektronov, N/V gostota pozitivnih ionov, ki je enaka gostoti elektronov, ker je plin navzven električno nevtralen.

Enačba velja, če se elektroni ne obešajo na molekule in v plinu ni negativnih ionov. Tako je v žlahtnih plinih, npr. heliju in argonu, ne pa, npr. v kloru. Toda celo v žlahtnih plinih se lahko pojavijo zapleti. Za gibljivost ionov He^+ iz cevi s tokom pri znižanem tlaku v heliju so dobili precej več kot za delce α iz radioaktivnega izvira, ki so tudi ioni helija. Izid so pojasnili z ioni He_2^+ , ki poleg ionov He^+ sodelujejo pri prevajanju v heliju in ki imajo večjo maso, a tudi večjo gibljivost. Zato ne preseneti, da vsebujejo različne preglednice podatke za gibljivosti, ki se med seboj nekoliko razlikujejo. Helij ima pri sobni temperaturi in navadnem tlaku prevodnost približno $13 (\Omega\text{m})^{-1}$, če je gostota elektronov 10^{21} m^{-3} . Prispevek ionov k prevodnosti lahko zanemarimo.

Ion	β^+	ion	β^+
H^+ v vodiku	$12,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$	Li^+ v heliju	$25,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$
He^+ v heliju	$5,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$	Na^+ v heliju	$22,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$
Ar^+ v argonu	$1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$	K^+ v argonu	$2,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$
N_2^+ v dušiku	$2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$		

Gibljivost ionov v nekaterih plinih pri sobni temperaturi in navadnem zračnem tlaku.

	β^-		β^-
v heliju	$500 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$	v argonu	$800 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}$

Gibljivost elektronov v žlahtnih plinih pri sobni temperaturi in navadnem zračnem tlaku.

V plazmi, v kateri so ionizirane vse molekule, je prevodnost le malo odvisna od gostote ionov ali gostote elektronov in močno narašča z naraščajočo temperaturo (sorazmerno s $T^{3/2}$). V tem primeru gibljivost preneha biti konstantna in je ni smiselno navajati. Plazma je pri visoki temperaturi zelo dober prevodnik, npr. vodikova plazma pri temperaturi nad 20 milijonov kelvinov bolje prevaja kot srebro (pri navadni temperaturi). Prevodnost za elektrone je kakih dvajsetkrat večja kot prevodnost za ione, če oboje nosilce naboja obravnavamo ločeno. Vodikova plazma ima npr. pri temperaturi tisoč kelvinov prevodnost približno $100 (\Omega\text{m})^{-1}$ pri gostoti elektronov 10^{21} m^{-3} . Če se gostota elektronov milijonkrat spremeni, se prevodnost spremeni za manj kot dvakrat, zato podatek o gostoti elektronov ni pomemben. Tudi v tem primeru lahko prispevek ionov zanemarimo. Plazma iz težjih elementov ima manjšo prevodnost.

Janez Strnad

ŽELITE ZAPOSLOITEV PRI MICROSOFTU?

Na zadnjem občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov (če slučajno ne veste – to je društvo, ki je "krivo" za Presek) mi je kolega Marko Petkovšek povedal zanimivo nalogo. To nalogo naj bi menda zastavljali tudi tistim, ki se želijo zaposliti pri Microsoftu. In kakšna je naloga?

Skupina U2 ima koncert, ki se začne čez 17 minut. Vsi štirje člani skupine stojijo na začetku mosta, ki vodi do odra. Most je ozek, tako da gresta lahko hkrati čezenj največ dva. Trda tema je in vsi člani skupine skupaj imajo le eno baterijsko svetilko. Kdorkoli gre preko mostu, bodisi posameznik ali par, mora imeti s sabo svetilko. To mora vedno nekdo nositi in je ni moč metati ali kako drugače spraviti preko mostu. Vsak član skupine hodi s svojo hitrostjo. Par hodi skupaj tako hitro, kot hodi počasnejši med njima. Bono potrebuje 1 minuto, da pride čez most, Edge 2 minuti, Adam 5 minut, najpočasnejši pa je Larry, ki potrebuje za prehod mostu 10 minut. Kako naj člani skupine U2 prečkajo most, da ne bodo zamudili začetka koncerta? Če gresta npr. prva čez most Bono in Larry, bosta na drugi strani čez 10 minut. Če se s svetilko vrne Larry, bo preteklo že 20 minut. ...

V nalogi ni nobenega trika, le pravilno zaporedje prehodov je treba izbrati. Pri Microsoftu naj bi od kandidata pričakovali rešitev v petih minutah.

Matija Lokar

PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827) – ob 250-letnici rojstva

*Napredek in izpopolnjevanje matematike
sta tesno povezana z blagostanjem države.*

Napoleon I

Da ni bilo Leibniza, Eulerja in francoskih matematikov, bi lahko osemnajsto stoletje z vidika zgodovine matematike imenovali dolgočasni odmor med dvema velikima dejanjima: sedemnajstim stoletjem, stoletjem genijev, in zlato dobo matematike devetnajstega stoletja. V sedemnajstem stoletju so odkrili¹ analitično geometrijo in integralni račun, devetnajsto je prineslo porast matematične strogosti in razcvet geometrije.



Osemnajsto stoletje ni dalo kakšnih velikih in bistvenih novosti v matematiki. So pa francoski matematiki v času revolucije znatno prispevali k razvoju drugih ved in močno vplivali na razvoj matematike v smeri, ki je vodila v njen bujni razcvet v naslednjem stoletju.

Med matematike francoske revolucije štejemo d'Alemberta, enega izmed glasnikov revolucije, ki ni živel dovolj dolgo, da bi videl padec Bastilije, in šest drugih, ujetih v zmedo revolucije: Mongea, Lagrangea, Laplacea, Legendra, Carnota in Condorceta.

Zadnjih šest je bilo približno enako starih. Najstarejši Lagrange je bil rojen leta 1736, najmlajši Carnot 1753. Razen Condorceta, ki je napravil samomor v zaporu, so vsi preživeli holokavst revolucije in dočakali starost preko sedemdeset let, Legendre celo več kot osemdeset.

Življenje in delo vsakega od njih bi bilo vredno zapisa v Preseku. Ker letos mineva 250 let od Laplaceovega rojstva, bomo tokrat pozornost namenili njemu.

Pierre-Simon Laplace se je rodil 23. marca 1749 v kraju Beaumont-en-Auge v francoski Normandiji. O njegovem otroštvu je malo znanega, saj se je zelo sramoval svojih preprostih staršev in napravil vse, da bi skril svoje kmečko poreklo. Bistremu dečku iz vaše šole so omogočili, da je

¹ Človek že vse ve, le spomniti se še mora (Platon).

od sedmega do šestnajstega leta kot zunanji učenec obiskoval benediktinski kolegij v Beaumont-en-Auge. Nato je za dve leti odšel na univerzo v Caenu, kjer je odkril svoj matematični talent. Namesto, da bi ustregel staršem in nadaljeval šolanje na teološki fakulteti, je 1768. leta za vedno stresel s svojih čevljev beaumontski prah in odšel v Pariz osvojiti matematični svet.

Z d'Alembertovo pomočjo je postal profesor matematike na vojaški šoli v Parizu. Povprečno nadarjene kadete iz uglednih družin je poučeval geometrijo, trigonometrijo, elementarno analizo in statistiko, kar je bilo daleč pod njegovimi ambicijami in sposobnostmi, vendar mu je plača omogočila, da je lahko ostal v Parizu.

Kot je bilo pričakovati, je Laplace vso svojo energijo in sposobnosti usmeril v cilj, doseči matematični sloves. Po petih letih Pariza je, komaj štiriindvajsetleten, postal dopisni član Akademije znanosti. Condorcet, ki je nekaj pred tem postal stalni tajnik akademije, je zapisal, da še nikoli do tedaj akademija ni prejela od tako mladega kandidata in v tako kratkem času toliko pomembnih člankov s tako različnih in zahtevnih področij.

V poznih sedemdesetih letih 18. stoletja se je Laplaceov sloves razširil tudi izven majhnega kroga matematikov, ki so lahko razumeli njegovo delo. Tako je leta 1785, star 36 let, postal redni član Akademije znanosti in bil od poznih osemdesetih let dalje ena vodilnih osebnosti akademije. V letu svoje izvolitve za rednega člana akademije je Laplace, kot član izpitne komisije za kraljevo artilerijsko šolo, srečal tudi osebo, ki je kasneje odločilno vplivala na njegovo javno delovanje. To je bil tedaj šestnajstletni kadet z imenom Napoleon Bonaparte.

Leta 1788 se je Laplace poročil z dvajset let mlajšo Marie-Charlotte de Courty de Romanges. Imela sta dva otroka. Sin Charles-Émile, ki si je izbral vojaško kariero in postal general, ni imel otrok. Laplaceova hči, Sophie-Suzanne, markizinja de Portes, je umrla na porodu. Deklica, ki jo je rodila, je preživela. Njeni potomci, grofje Colbert, so kot drugo družinsko ime izbrali priimek Laplace.

Skozi revolucijo je Laplace takorekoč pojezdil na konju in videl marsikaj, vendar relativno brez skrbi za življenje. Imel je nekaj pomembnih položajev. Bil je član Komiteja za uteži in mere. Sodeloval je pri organizaciji École normal in École polytechnique ter bil na obeh visokih šolah tudi profesor. Po revoluciji se je strastno posvetil politiki. Na tem področju se je izkazal kot pravi genij, saj se je dobro znašel v nemirnih političnih vodah in vedno znal pluti s tokom.

Zadnja leta življenja je prebil Laplace na svojem lepem posestvu v Arcueilu blizu Pariza. Umrl je po kratki bolezni, star 78 let.

Opisati Laplaceovo znanstveno delo bi bil zaradi njegove obsežnosti in zahtevnosti za Presek prehud zalogaj. Zato si ga oglejmo le v grobih črtah.

Laplace je od vseh matematikov osemnajstega stoletja prišel najbližje temu, kar imenujemo uporabna matematika. Vendar moramo celo v njegovem primeru vzeti pojem uporabna v zelo omejenem pomenu. Ukvarjal se je predvsem s teorijo verjetnosti in nebesno mehaniko in vprašanje je, za kako praktični lahko štejemo v njegovi dobi ti dve področji.

Lahko pa z gotovostjo trdimo, da je Laplace v prvi vrsti videl v matematiki orodje, ki ga je genialno priredil za vsak poseben problem, ki se je pojavil. Bil je velik filozof, ki je želel spoznati naravo in je v ta namen izkoristil višjo matematiko.

Vendar je tudi s strogo teoretičnega vidika njegov prispevek matematiki velik, predvsem v potencialni teoriji in teoriji verjetnosti. Ni pretirano reči, da teorija verjetnosti dolguje Laplaceu več kot kateremukoli drugemu matematiku.

Laplaceovo znanstveno življenje bi lahko razdelili na štiri etape, od katerih sta se prvi dve odvijali pod starim monarhističnim režimom in zadnji dve v času francoske revolucije - Napoleonovega režima in restavracije.

V prvem obdobju od leta 1768 do 1778 je Laplace vzhajal na znanstvenem obzorju, pisal članke o problemih integralnega računa, matematični astronomiji, o vesolju, teoriji iger na srečo in aposteriorni verjetnosti. V tem obdobju rasti je ustvaril svoj stil, sloves in filozofski položaj. Oblikoval je določene matematične tehnike in zastavil program raziskav na dveh področjih, verjetnosti in nebesni mehaniki, na katerih je matematično deloval do konca življenja.

V drugem obdobju (1778 - 1789) je ti dve področji obogatil s pomembnimi rezultati (po katerih je slaven), ki jih je kasneje vključil v svoji veliki deli *Nebesna mehanika* (*Mécanique céleste*) in *Analitična teorija verjetnosti* (*Théorie analytique des probabilités*). Uporabljene matematične postopke je večinoma sam uvedel in razvil. Med najpomembnejše sodijo rodovne funkcije, transformacija, ki po njem nosi ime Laplaceova, formula za razvoj determinante (ki se tudi imenuje po Laplaceu), variacija konstant za iskanje aproksimativnih rešitev diferencialnih enačb v astronomiji in posplošena gravitacijska funkcija. V tem času je Laplaceovo pozornost pritegnila tudi fizika. Deloma mu je prav sodelovanje z Lavoisierjem v toplotni teoriji na strežaj odprlo vrata v vplivno znanstveno srenjo.

V tretjem obdobju (1789-1805), času revolucije in vlade direktorija, je Laplace dosegel svoj vrh. V zgodnjih devetdesetih letih 18. stoletja je napisal obsežno serijo člankov o planetarni astronomiji in sodeloval

pri pripravi metričnega merskega sistema. V drugi polovici devetdesetih let je bil najvplivnejša osebnost oddelka za eksaktne znanosti na Institut de France (ki je nadomestil bivšo Akademijo znanosti); imel je močan položaj v svetu École polytechnique, od koder je izšla prva generacija matematičnih fizikov. V letih 1799 do 1805 so izšli prvi štirje deli Nebesne mehanike, v katerih je posplošil zakone mehanike za njihovo uporabo pri obravnavi gibanja in števila nebesnih teles.

V Laplaceovem delu četrtega obdobja (1805-1827) opazimo elemente vzpona in pojanja intelektualne moči. Zreli, morda že tudi starajoči se Laplace, je skupaj z Bertholletom ustanovil neformalno šolo Société d'Arcueil. Toda ta se ni ukvarjala z astronomijo. V središču njenega zanimanja je bila fizika: kapilarnost, teorija toplote, optika delcev in hitrost zvoka. Čeprav je Société d'Arcueil imela morda nekoliko preveč 'šolski' značaj, ni dvoma o njenem velikem prispevku k matematizaciji znanosti.

Po letu 1810 je Laplaceovo zanimanje spet pritegnila verjetnost. V Analitični teoriji verjetnosti, ki je izšla 1812. leta, je zbral in posplošil rezultate svojih zgodnjih raziskovalnih let in dodal pomembne novosti za njihovo uporabo, npr. metodo najmanjših kvadratov. Kasnejšim izdajam je dodal analizo verodostojnosti prič, izbora nepristrane sodne porote in volilnih teles ter napak pri statistični obdelavi geodetskih in meteoroloških podatkov.

V letih 1823-1825 je postopoma izšel peti del Nebesne mehanike, ki je dejansko samostojno delo. Medtem ko vsebujejo prvi štirje deli Laplaceove rezultate, ki jih je objavil že pri stari akademiji, je vsebina petega dela nov pomemben fizikalni material, ki je nastal v tem obdobju.

Laplace je obe svoji veliki deli pospremil s preprosto razlago, namenjeno inteligentni francoski (ne ozko strokovni) publiki. Razlaga vesolja (Exposition du système du monde) je izšla leta 1796 pred izidom Nebesne mehanike, Filozofska razprava o verjetnosti (Essai philosophique sur les probabilités) pa leta 1814 kot uvod v drugo izdajo Analitične teorije verjetnosti.

Prav je, da opišemo Laplacea tudi po drugi strani. Čeprav sodi med matematike francoske revolucije, dejansko ni sodeloval v revolucionarnih aktivnostih. Kakor je imel zelo stroga merila glede znanstvenih resnic, kaže, da je bil v politiki brez pomislekov. To ne pomeni, da se je plašno umaknil v ozadje. Brez strahu se je odkrito družil z znanstvenimi kolegi, ki so bili v kriznem obdobju politično sumljivi. Pravijo celo, da sta se skupaj z Lagrangeom izognila giljotini samo zato, ker ju je Napoleon potreboval

za izračunavanje poti topovskih izstrelkov in pripravo zalog za pohod v Egipt.

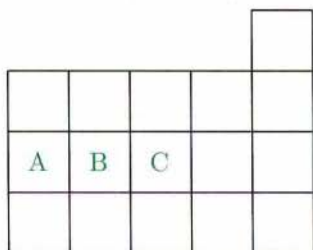
Laplace pa je bil tudi grob koristolovec. Po vsakem padcu vlade je dobil boljši položaj. Prav nič težko mu ni bilo čez noč preleviti se iz divjega republikanca v strastnega monarhista, ko se je Napoleon proglasil za cesarja. Napoleonova odlikovanja vseh vrst so krasila nestanovitna Laplaceova prsa, celo Veliki križ častne legije in Orden prijateljstva, Napoleon ga je imenoval tudi za grofa cesarstva. Zasedal je številne ugledne položaje, za kratek čas ga je Napoleon, ki je bil velik občudovalec znanstvenikov, celo postavil za notranjega ministra². Ko pa je Napoleon padel, je Laplace brez oklevanja podpisal listino, s katero je obsodil svojega dobrotnika, in nemudoma svojo vdanost prenesel na Ludvika XVIII. Poplačan je bil s sedežem v Zgornjem domu, k čemur je sodil tudi plemiški naziv markiz de Laplace, in bil imenovan za predsednika odbora za reorganizacijo École polytechnique.

Marija Vencelj

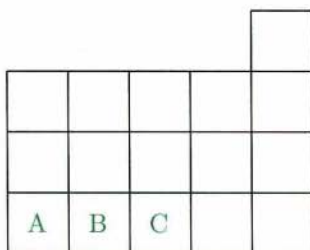
RAZREŽI NA SKLADNE DELE

Vsakega od danih dveh likov razreži na štiri skladne dele tako, da bodo črke *A*, *B* in *C* vsaka v svojem delu.

a)



b)



Dragoljub M. Milošević, prev. Marija Vencelj

² Laplace ni pokazal nobene nadarjenosti za uradovanje in Napoleon se je bojda celo rogal na njegov račun, "da je prinesel duh neskončno majhnega v upravljanje državnih zadev".

O HARMONIČNIH ŠTEVILIH

Naj bodo $d_1 = 1, d_2, \dots, d_j = n$ vsi pozitivni delitelji naravnega števila n . Njihovo harmonično sredino označujemo s $H(n)$, torej je

$$H(n) = \frac{j}{\frac{1}{d_1} + \dots + \frac{1}{d_j}}. \quad (1)$$

Zgled. Potenca p^c , kjer je p praštevilo in c naravno število, nima drugih pozitivnih deliteljev kot 1, $p, p^2, \dots, p^c$; vseh je $c + 1$ in po (1) je

$$H(c) = \frac{c + 1}{1 + p^{-1} + \dots + p^{-c}} = \frac{p^c(c + 1)}{p^c + p^{c-1} + \dots + 1}. \quad (2)$$

Naravno število n je *harmonično* ali *Orejevo*, kadar je število $H(n)$ celo (Oystein Ore (1899–1968), norveški matematik).

Zgled. Edini pozitivni delitelj za 1 je 1, vsi pozitivni delitelji za 10 so 1, 2, 5, 10. Zato je

$$H(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$H(10) = \frac{4}{1^{-1} + 2^{-1} + 5^{-1} + 10^{-1}} = \frac{20}{9}$$

Torej je 1 harmonično število, 10 pa ne.

Še sta med naravnimi števili $n_1, \dots, n_t$ vsaki dve tuji, velja enakost

$$H(n_1 \dots n_t) = H(n_1) \dots H(n_t). \quad (3)$$

Pravimo, da je harmonična sredina $H(n)$ multiplikativna. Vsako naravno število $n > 1$ ima izrazitev

$$n = p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}, \quad (4)$$

kjer so $p_1, \dots, p_s$ različna praštevila, $c_1, \dots, c_s$ naravna števila. Zaradi multiplikativnosti je

$$H(p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}) = H(p_1^{c_1}) \dots H(p_s^{c_s}). \quad (5)$$

Faktorje na desni izračunajmo po obrazcu (2).

Navedimo nekaj ugotovitev glede vrednosti za $H(n)$.

A. Če je p praštevilo in c naravno število, število $H(p^c)$ ni celo. (Torej praštevilska potenca ni harmonično število.)

Naj bo namreč $H(p^c) = v$ pri celem številu v . Ko upoštevamo (2), dobimo

$$(c+1)p^c = v(p^c + \dots + p + 1). \quad (6)$$

Ta enakost kaže, da p^c deli $v(p^c + \dots + p + 1)$. Toda števili p^c , $p^c + \dots + p + 1$ sta tuji, zato mora p^c deliti v in je $v = tp^c$ pri naravnem številu t . Vnesemo $v = tp^c$ v (6) in po krajšanju s p^c najdemo

$$c+1 = t(p^c + \dots + p + 1).$$

Ker je $p \geq 2$ in $c \geq 1$, je dalje

$$c+1 \geq p^c + \dots + p + 1 > p^c \geq 2^c = (1+1)^c = 1 + c + \dots \quad (7)$$

Na koncu v (7) stoji $1 + c$, če je $c = 1$; in več kot $c + 1$, če je $c \geq 2$. Neenakost (7) tako v nobenem primeru ni mogoča, trditev A torej drži.

Naravno število n je *popolno*, če znaša vsota njegovih (pozitivnih) deliteljev $2n$. Dokazano je, da so med sodimi števili popolna natančno tista, ki se zapišejo v obliki

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1), \quad (8)$$

kjer je p praštevilo in 2^{p-1} praštevilo. Ni znano, ali je sodih popolnih števil neskončno; doslej so jih našli nekaj več kot 30, najmanjša so 6, 28, 496, 7128.

B. Vsako sodo popolno število je harmonično.

V (8) sta števili 2^{p-1} , $2^p - 1$ tuji. Z indukcijo se prepričamo, da je

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

za vsak naraven n . Vsota vseh pozitivnih deliteljev za 2^{p-1} je tako

$$1 + 2 + \dots + 2^{p-1} = 2^p - 1$$

in zato

$$H(2^{p-1}) = \frac{2^{p-1}p}{2^p - 1}. \quad (9)$$

Število $2^p - 1$ v (8) je praštevilo, edina pozitivna delitelja sta 1, $2^p - 1$; zato je

$$H(2^p - 1) = \frac{(2^p - 1)2}{2^p}. \quad (10)$$

Zaradi multiplikativnosti je po množenju (9) in (10)

$$H(2^{p-1}(2^p - 1)) = p.$$

Trditev B je tako dognana.

Ali liha popolna števila obstajajo, ne vemo. Če obstajajo, so tudi ona harmonična.

Najmanjše harmonično število, ki ni popolno, je $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Res velja

$$H(2^2 \cdot 5 \cdot 7) = \frac{2^2 \cdot 3}{7} \cdot \frac{5 \cdot 2}{6} \cdot \frac{7 \cdot 2}{8} = 5.$$

Do 27845 je vsega 14 harmoničnih števil; navaja jih preglednica (M. Garcia):

n	$H(n)$	n	$H(n)$
1	1	$1638 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$	9
$6 = 2 \cdot 3$	2	$2970 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	11
$28 = 2^2 \cdot 7$	3	$6200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 31$	10
$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$	5	$8128 = 2^6 \cdot 127$	7
$270 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$	6	$8190 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	15
$496 = 2^4 \cdot 31$	5	$18600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 31$	15
$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$	8	$18620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$	14

Vseh harmoničnih števil do 10^7 je 46, največje med njimi je $8872200 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 53$; našli pa so še več kot 200 nadaljnjih harmoničnih števil. Vsa doslej najdena harmonična števila so soda. Ore je postavil domnevo, da lihih harmoničnih števil ni. Ko bi se izkazalo, da ta domneva drži, bi bilo obenem dognano, da liha popolna števila ne obstajajo; vsako popolno število je namreč po že povedanem harmonično.

Kako poiščemo harmonična števila?

Napravimo obsežnejši seznam vrednosti $H(p^c)$ za praštevila $p = 2, 3, 5, 7, \dots$ in eksponente $c = 1, 2, 3, 4, \dots$ ter opazujemo, kdaj je

produkt (5) celo število. Tako npr. iz

$$H(2^5) = \frac{2^6}{3 \cdot 7}, \quad H(3^3) = \frac{3^3}{2 \cdot 5}, \quad H(5) = \frac{5}{3}, \quad H(7) = \frac{7}{4}$$

izhaja

$$H(30240) = H(2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7) = \frac{2^6}{3 \cdot 7} \cdot \frac{3^3}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{4} = 24.$$

Torej je 30240 harmonično število.

Kadar gre za harmonična števila, ki ležijo pod dano vrednostjo k , je treba seznam vrednosti $H(p^c)$ dovolj dolgo nadaljevati in računati produkte teh vrednosti. Pomagamo si lahko tudi tako, da gledamo, katere potence števila 2 (ali kakšnega drugega praštevila) morejo biti faktor v harmoničnem številu, ki ne presega k . Vzemimo, da je $k = 3 \cdot 10^7$. Ali obstaja harmonično število $n < 3 \cdot 10^7$, ki je deljivo z 2^{12} , ne pa z 2^{13} ? Tedaj je seveda

$$n = 2^{12} p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}$$

pri različnih lihih praštevilih $p_1, \dots, p_s$ in naravnih številih $c_1, \dots, c_s$. Po (2) izračunamo

$$H(2^{12}) = \frac{2^{12} \cdot 13}{8191}.$$

Imenovalc 8191 je praštevilo. Da bo

$$H(n) = \frac{2^{12} \cdot 13}{8191} \cdot \frac{p_1^{c_1}(c_1 + 1)}{p_1^{c_1} + \dots + 1} \dots \frac{p_s^{c_s}(c_s + 1)}{p_s^{c_s} + \dots + 1}$$

celo število, mora 8191 deliti vsaj enega od števcov na desni, npr. $8191 \mid p_1^{c_1}(c_1 + 1)$. To pomeni, da je $p_1 = 8191$ ali pa nastopa p_1 v stopnji 8190 (in je potem $c_1 + 1 = 8191$). Prvič dobimo za n oceno

$$n = 2^{12} p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s} \geq 2^{12} \cdot 8191 = 33550336 > 3 \cdot 10^7.$$

Drugič je $p_1 \geq 3$ in smo pri oceni

$$n \geq 2^{12} \cdot 3^{8190} > 3 \cdot 10^7.$$

Torej ni harmoničnega števila, ki bi bilo manjše od $3 \cdot 10^7$ in deljivo z 2^{12} , ne pa z višjo potenco števila 2.

Med števili, ki so večja od $3 \cdot 10^7$, pa se najdejo harmonična števila, deljiva natančno z 2^{12} . Saj je že

$$H(33550336) = H(2^{12} \cdot 8191) = \frac{2^{12} \cdot 13}{8191} \cdot \frac{8191 \cdot 2}{8192} = 13.$$

Dodatno olajšujejo iskanje harmoničnih števil še nekatere njihove lastnosti, ki pa jih na tem mestu ne bomo opisovali.

Brez dokaza omenimo še

C. Naj bo r racionalno število. Obstaja kvečjemu končno mnogo naravnih števil n , da je $H(n) = r$.

Če je r naravno število, je zato kvečjemu končno mnogo naravnih števil n , da velja $H(n) = r$. Iz preglednice (11) vidimo, da že pri začetnih harmoničnih številih n zavzame $H(n)$ vsa naravna števila od 1 do 11, razen 4. Da se pokazati, da je $H(n) \neq 4$ pri vsakem naravnem številu n . Ali so poleg 4 še katera druga naravna števila, ki jih $H(n)$ izpusti?

Naloge.

1. Ali obstaja harmonično število, manjše od 10^{12} in deljivo z 2^6 ter 3^6 , ne pa z višjima potencama od 2 in 3? (Izračunaj $H(2^6)$, $H(3^6)$ in upoštevaj, da sta 127, 1093 praštevili.)
2. Pokaži, da število $2p^c$, kjer je p liho praštevilo in c naravno število večje od 1, ni harmonično.
3. Pokaži, da mora liho popolno število imeti obliko

$$n = p^c v^2.$$

Tu je p praštevilo oblike $4t + 1$, naravno število c tudi te oblike, v naravno število. Ugotovi od tod, da je $H(n)$ celo število. (Naj bo namreč

$$n = p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s},$$

kjer so $p_1, \dots, p_s$ različna liha praštevila, in $c_1, \dots, c_s$ naravna števila. Ker je n popolno število, velja enakost

$$(1 + p_1 + \dots + p_1^{c_1}) \dots (1 + p_s + \dots + p_s^{c_s}) = 2p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}, \quad (12)$$

saj je leva stran vsota vseh pozitivnih deliteljev od n . Zaradi (12) je na levi natanko eden od faktorjev deljiv z 2, ne pa z 2^2 . Lahko vzamemo, da je to kar prvi faktor, tj. $1 + p_1 + \dots + p_1^{c_1}$; ker je v tej vsoti $c_1 + 1$ lihih sumandov, mora biti c_1 lih; vsi drugi faktorji so lihi, zato $c_2, \dots, c_s$ sodi. Če p_1, c_1 ne bi bila oblike $4t + 1$, bi imela obliko $4t - 1$ in prvi faktor bi bil deljiv s 4; to hitro vidimo.)

4. Naj bo p praštevilo, c naravno število. Za $c = 1$ je

$$H(p) = \frac{2p}{1+p} \quad (13)$$

in za $c > 1$

$$H(p^c) = \frac{p^c(c+1)(p-1)}{p^{c+1}-1} > \frac{(c+1)(p-1)}{p} \geq \frac{3(p-1)}{p} > \frac{2p}{1+p}. \quad (14)$$

Zaradi $p^2 > 3$ je namreč $3(p^2 - 1) > 2p^2$. Nadalje je

$$\begin{aligned} \frac{2p}{1+p} &= 2 - \frac{2}{1+p} > 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{za } p > 2 \quad \text{in} \\ \frac{2 \cdot 2}{1+2} &= \frac{4}{3} \quad \text{za } p = 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Iz (13), (14), (15) pri naravnih številih $c_1, \dots, c_s$ in različnih praštevilih $p_1, \dots, p_s$ dobimo zaradi multiplikativnosti

$$H(p_1^{c_1}) \geq \frac{4}{3} \quad \text{in} \quad H(p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}) > \left(\frac{4}{3}\right)^s \quad \text{za } s \geq 2. \quad (16)$$

5. Pokaži, da je

$$\left(\frac{4}{3}\right)^s > s \quad \text{za } s \geq 7$$

in

$$H(p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}) > s \quad \text{za } s = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

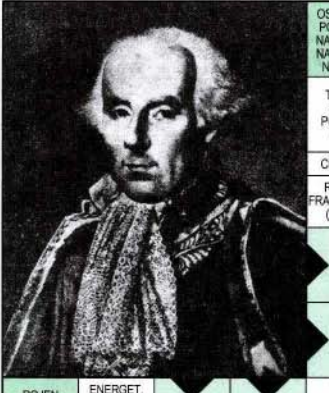
Po (16) potem velja

$$H(p_1^{c_1} \dots p_s^{c_s}) > s; \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

6. Če naj bo $H(n) = 4$, sme biti n zaradi (17) deljiv z največ tremi različnimi praštevili (ali njihovimi potencami). Od tod moreš ugotoviti, da je $H(n) \neq 4$ za vsak naraven n .

Jože Grasselli

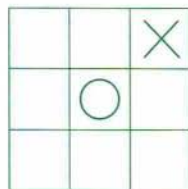
KRIŽANKA “OB 250-LETNICI ROJSTVA”

	OSEŃENI POJMI SE NANAŠAJO NA OSEBO NA SLIKI		OZNANJE-VALEC, ZNANILEC	AM. FILM. REŽISER (MARTIN)	SL. REPREZENTANČNI KEGLJAŠKI TRENER (MILAN)	GRŠKA UPRAVNA ENOTA, OKRAJ	VELIK TROPSKI SADEŽ	MESTO V SZ MAKEDONIJI	VEČ O NJEM PREBERITE NA STR.
	TEMNO RDEČ POLDRA-GULJ								VŠITEK
	CITRONE								POSREDO-VALEC PODATKOV
	REKA V FRANKFURTU (ORIG.)								ISLAMSKI POGLAVAR
ROJEN 23.3.1749, UMRL 5.3.1827	ENERGET. SREDSTVO								
	STAR IZRAZ ZA PLUTO				KUNA Z DRAGOCENIM KRZNOM	TROPSKA TRAVNATA POKRAJINA			
						PRITOK VOLGE			
POKONČNI KLAVIR							DRŽAVA V VZHODNI AFRIKI		
							KOSITER		
IZRAŠTEK NAD ŽIVAL. ZADNJO			PIŠKOT						
			OGLJIKO-VODIK C_2H_6					NJEGOVA MATIČNA DRŽAVA	AM. FILM. IGRALKA (VERONICA)
HRIBOVSKA VAS PRI LJUBLJANI				SL. FILM. REŽISER (RAJKO)					MESTO OB TISI V VOJVODINI
				EVA LONGYKA					ZADAR
MLAJŠI BRAT (LJUBKOV.)						LADJAR ONASSIS	TRTNA MLAJKA		
							NJGOV PLEMISKI NASLOV		
KOROŠČEVA VLOGA V PRODANI NEVESTI					IME PEVKE LEAR				
SVETLOBNA OKVARA NA FILMU				NESNAGA, KI SE NABERE NA POLICAH	KAKOVOST. STOPNJA				RAZLIČNA SOGLASNIK
					EVROPSKI VULKAN				
RIMSKA 6		PREGRI-NJALO NA MZI	AM. FILOZ. (CHARLES)						GRŠKI E
			PRITOK RTISA V OMSKU						TELESN. ZAZNAV
UVOZ						NAJVEČJA ŽIVAL			SEČEVOD (LAT.)
						DAVID NIVEN			
NJGOVA RODNA DEŽELA									PODROČJE NJGOVEGA DELA V FIZI
PRIPADNIK IZUMRLE VEJE SLOVANOV			KRANJSKO. GORSKI GORSKI VODNIK						RAZGIBANA VIŠOKA PLANOTA SV OD SARAJEVA (1500 M)

KITAJSKA POSODA ZA KUHANJE	ŠTEFAN BANACH	ANG. LITERARNI KRITIK RICHARDS	ŠIRNI PROSTOR, KI GA JE OBRAVNAVAL	JUNAK IZ ROMANA POD SVOBODNIM SONCEM	SILVA ČUŠIN	IZRASTEK IZ DREVEŠNEGA DEBLA	IME IGRALKE GARDNER	VZDEVEK IGRALCA RADKA POLJČA	RIBIŠKA BERA	NJEGOVO NAJOBSEZ- NEJŠE DELO	A/TOR MARKO BOKALIČ
				HRVAŠKI KNJIŽEV. (AUGUST)							VIJOLIČASTA GOZDNA CVETICA
	DRUŽINA ŽUŽELK				NEMŠKI MATEM. (CARL)						
	PESEM S TRAGIČNIM KONCEM				SLOVAŠKA						
ZMES LAKA IN KOVINE V PRAHU							KRASILNA TEKSTILNA TEHNIKA	ZGODOV. OBDOBJE			
NAKLADAČ								PLATNARSKA OBRT			
		DEL KROŽNICE				MARJAN PROSEN			STANKO LORGER		
		KRAJ PRI OPATJI				NOVOZEL. DOMORODEC			IVO DANEU		
					GRN Z RDEČIMI JAGODAMI						
					RAHEL GIB						
				NEASFALT, CESTIŠČE							
				CESAR V NJEGOVI DOBI							
			MESTO V ZAH. FRANC.						MAJDA ARH		
			FRANČOSKI OBLIKOVALEC PARKOV						GIOVANNI LEONE		
		NJGOV SODOBNIK, MATEM. (JOSEPH- LUIS)									NAJVEČJA CELINA
	MESTO, KJER JE UMRL	JUNAŠKA PRIPOVED V VERZIH			ANG. IGRALKA IN PEVKA (DIANA)	PREPROSTA POPOTNA TORBA					
		FR. KNJIŽNICA V LJUBLJANI				VEZNIK					
		TENISAČ KORDA							ALOJZ ŽUPAN		
									MOJZEŠOV BRAT		
ORGAN ZA NJE ZVOKA							SANKE				
							ZORMANČVA LITERARNI JUNAKINJA				
						ZELO REDKA KOVINA (Y)					
						TRST					
					NAJVEČJI PRITOK RONE						

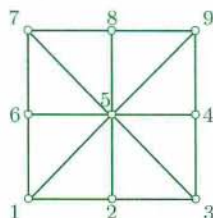
KRIŽCI IN KROŽCI OŽIVLJENI

Gotovo se je vsak od nas vsaj enkrat že poskusil v igri, ki jo poznamo pod imenom *križci in krožci*. Vseeno na hitro ponovimo pravila. V 3×3 tabelo dva igralca – nasprotnika – izmenično vrisujeta eden križce, drugi krožce. Če komu od igralcev uspe zasesti eno od treh vrstic, treh stolpcev ali dveh diagonal, je zmagovalec.



Slika 1. Križci in krožci.

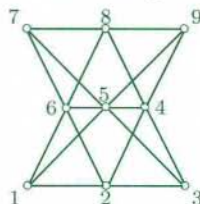
Igro lahko predstavimo tudi drugače. Devet polj 3×3 tabele zamenjamo z devetimi točkami v ravnini. Če smo točke razporedili, kot kaže slika 2, lahko skozi njih potegnemo osem ravnih črt, katerih vsaka povezuje tiste točke, ki so prej ležale bodisi v skupnem stolpcu bodisi v skupni vrstici bodisi na skupni diagonal. Igralca sedaj izmenično barvata točke, vsak s svojo barvo, zmaga pa tisti, ki s svojo barvo prvi pobarva vse točke neke črte.



Slika 2. Križci in krožci – malo drugače.

Zdrava pamet nam pove, da je igralec, ki začne, v prednosti in da je najpametneje pobarvati tisto točko, ki leži na največ črtah. S slike 2 je razvidno, da točka 5 leži na štirih črtah, točke 1, 3, 7 in 9 na treh črtah, točke 2, 4, 6 in 8 pa le na dveh črtah. Zato je za prvega igralca – recimo mu napadalec – najbolje, da pobarva točko 5. Drugi igralec – branilec – mora igrati pazljivo. Če zasede katero od točk, ki ležijo le na dveh črtah, bo lahko napadalec s pravilno igro zmagal. Če pa branilec v svoji prvi potezi zasede eno od točk 1, 3, 7 ali 9, bo uspel obdržati ravnotežje in pripeljati igro do neodločenega izida. S tem smo vse možnosti izčrpali.

Ostane nam dvoje: igro lahko opustimo ali pa jo izboljšamo. Poskusimo s slednjim. Sprememimo igralno desko s slike 2. Pomaknimo točki 4 in 6 na pol poti proti točki 5. Točke lahko sedaj povežemo, kot kaže slika 3. Dobili smo novo igralno desko, ki pa jo od prve loči pomembna razlika. Napadalec sedaj nima očitne najboljše prve poteze, saj vsaka točka leži na natanko treh črtah. S tega stališča so vse točke enakovredne.



Slika 3. Papusova razporeditev.

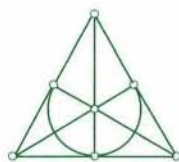
Denimo, da napadalec spet prične s točko 5. Kako naj odgovori branilec? Napadalec je s svojo potezo ogrozil tri črte, ki gredo skozi točko 5. Branilec sklepa, da je najpametneje zavarovati vsaj eno od teh črt,

recimo tisto, ki gre skozi točke 1, 5, 9, in odgovori s točko 1. Hitro vidimo, da se igra zanj ne bo dobro končala. Napadalec bo namreč zasedel točko 3 in po izsiljeni potezi branilca še točko 4. Branilca je postavil pred nerešljiv problem, zaščititi se pred dvema grožnjama hkrati. Kako naj torej igra branilec po začetni potezi napadalca? Je igra zanj izgubljena? Prepričan sem, da boste odgovor našli sami.

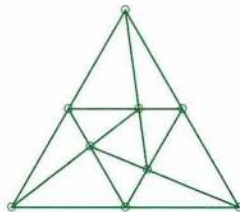
Medtem pa poskusimo poiskati še kakšno zanimivo igralno desko, ki jo odlikujejo podobne lastnosti kot desko s slike 3. Postavljeni smo pred naslednjo nalogo:

V ravnini razpostavi n točk in skoznje potegni n ravnih črt tako, da bo vsaka črta vsebovala tri točke in bo vsaka točka ležala na treh črtah.

Naloga je vse prej kot lahka. Tiste, ki bi radi na takšen način razpostavili manj kot devet točk, naj od brezupnih poskusov že na začetku odvrnem in vam zaupam, da naloga pri $n < 9$ ni rešljiva. Morda najbližje rešitvi pridemo, če narišemo sliko 4. Tu smo sedem točk povezali s šestimi ravnimi črtami in eno krivo. Podobno se nam godi tudi pri osmih točkah. Za $n = 9$ eno rešitev že poznamo, na sliki 5 pa je še ena. Trikotnik s slike 5 nam da idejo še za nove razporeditve na sliki 6. Bralec je gotovo opazil vzorec, po katerem lahko sam poišče razporeditve za poljubno mnogo točk. Več kot je točk, zanimivejša je igra in težje je vprašanje, ali lahko napadalec ob pravilni igri vedno zmagaja.



Slika 4. Fanova razporeditev.

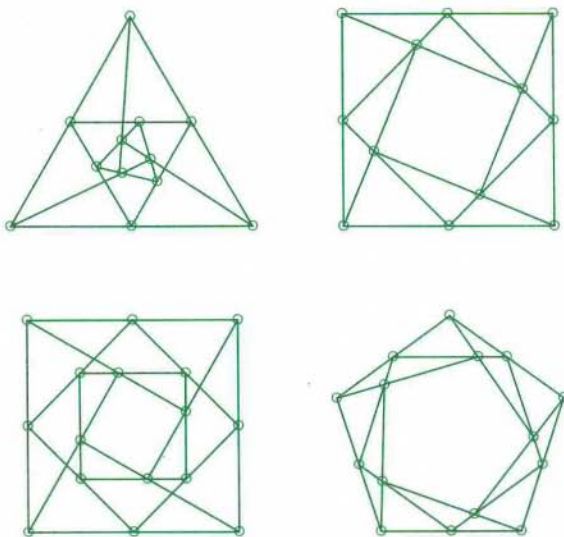


Slika 5. Trije trikotniki.

Posvetimo se še vprašanju, ali so na igralni deski, kjer vsaka točka leži na treh črtah, res vse začetne poteze enakovredne. Ali se vseeno ne more zgoditi, da ena začetna poteza branilcu dopušča zadovoljivo obrambo, druga pa ne? Ali mu jo vsaj nekoliko oteži? Odgovoriti na ta vprašanja ni lahko. V posebnem primeru pa lahko vseeno zatrdimo, da so res vse začetne poteze enakovredne. Oglejmo si ta primer podrobneje.

Imejmo razporeditev n točk in te točke poimenujmo kar z naravnimi števili $1, 2, \dots, n$. Permutaciji π teh točk, ki ima lastnost, da točke $\pi(i), \pi(j)$ in $\pi(k)$ ležijo na skupni črti natanko tedaj, ko na skupni črti ležijo točke i, j in k , rečemo *avtomorfizem* razporeditve. Permutacija neke množice je bijektivna preslikava te množice same nase. To pomeni, da

lahko permutacijo π predstavimo kot niz prvih n naravnih števil, kjer vsako število med 1 in n nastopi natanko enkrat. Točka $\pi(i)$ bo v tem nizu nastopala na i -tem mestu.



Slika 6. Še nekaj razporeditev.

Za zgled avtomorfizma si oglejmo še enkrat sliko 3. Permutacijo, ki zamenja tri točke zgornje vrstice s tremi točkami spodnje vrstice, točke na sredini pa pusti, kjer so, bi označili z nizom $(7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3)$. Prav hitro se prepričamo, da ta permutacija zadošča zahtevi avtomorfizma – črte res preslika v črte. Denimo točke 1, 5, 9 so se preslikale v točke 7, 5, 3. Podobno se je črta, ki povezuje točke 1, 2, 3, preslikala v črto, ki povezuje točke 7, 8, 9.

Vrnimo se k našemu vprašanju, ali so vse začetne poteze enakovredne. Denimo, da za dve točki i in j obstaja avtomorfizem razporeditve, ki točko i preslika v točko j . Označimo ta avtomorfizem s π . Trdimo, da sta tedaj začetni potezi i in j enakovredni v smislu, da napadalec lahko s pravilno igro zmaga po potezi i natanko tedaj, ko lahko zmaga po potezi j . V to se z lahkoto prepričamo, če opazimo, da vsakemu zaporedju potez $i, i_2, i_3, \dots$ v primeru začetne poteze i ustreza v primeru začetne poteze j zaporedje potez $j, \pi(i_2), \pi(i_3), \dots$. Pri tem bo zaradi zahtevane lastnosti avtomorfizma (da točke na skupni črti preslika na točke, ki spet ležijo na

skupni črti) prvo zaporedje zmagovalno za napadalca natanko tedaj, ko bo zmagovalno tudi drugo zaporedje. Denimo, da ima naša razporeditev to lastnost, da za vsaki dve točki i in j obstaja neki avtomorfizem, ki eno preslika v drugo. Tedaj res lahko trdimo, da so vse začetne poteze enakovredne. Bralec naj sam premisli, ali imajo vse razmestitve, ki smo jih navedli do sedaj, to lastnost.

Za tiste, ki jih igranje križcev in krožcev dolgočasi, razmišljanje o avtomorfizmih pa jim ne gre od rok, naslednje vprašanje: Ali lahko vse razmestitve s slik 5 in 6 konstruiramo z ravnilom in šestilom? Za začetek se lahko spopadete s primerom s slike 5. Opozorim naj, da so trije trikotniki na sliki enakostranični, oglišča po velikosti srednjega od njih pa ležijo natanko na razpoloviščih stranic večjega. Kako v tem primeru s šestilom in ravnilom konstruirati oglišča notranjega trikotnika, da bodo nosilke njegovih stranic res vsebovale oglišča zunanjega trikotnika?

Primož Potočnik

RAZGIBANI NIZI

Rekli bomo, da je niz znakov *razgiban*, če ne vsebuje dveh enakih zaporednih strnjenih podnizov. To med drugim pomeni, da tak niz ne vsebuje dveh enakih zaporednih znakov. Primeri razgibanih nizov so ABC, ABAC, MARTIN; primeri nizov, ki niso razgibani, pa ABBA, BABA in RABARBARA.

Iz črk A in B lahko sestavimo šest razgibanih nizov (našteti so v abecednem vrstnem redu): A, AB, ABA, B, BA, BAB. Če pa uporabimo še dodatno črko C, lahko najdemo neskončno razgibanih nizov (dokaz, da je takih nizov res neskončno, ni prav preprost, zato mi kar verjemite na besedo).

Vaša naloga je, da poiščete po abecedi 1999. razgibani niz, ki je sestavljen le iz črk A, B in C. Ker bo iskani niz kar dolg, vam svetujem uporabo računalnika. Za lažje preverjanje pravičnega delovanja vaše rešitve vam povem, da je po abecedi deseti razgibani niz, sestavljen le iz črk A, B in C, enak

ABACABCAC,

petdeseti tak razgibani niz pa je

ABACABCACBABCABACABCACBACABACBABCABACABCACBABCAB.

Martin Juvan

PADANJE DVEH POVEZANIH KROGEL

V Preseku je bilo že govora o gibanju teles z zračnim uporom. Prebrali smo lahko tudi dokaz o protislovnosti trditve, da težja telesa vedno padajo hitreje kot lažja. Če bi to res veljalo, bi lahko prišli do protislovja takole: Če spustimo posebej lažjo in težjo kroglo, težja pada hitreje. Potem ju zvežemo z dolgo vrvico in spustimo, tako da je lažja krogla višje. Zvezani krogli imata skupaj večjo maso kot vsaka posebej in bi morali padati še hitreje kot prej težja krogla. V resnici pa lažja krogla pri padanju zavira težjo in padata počasneje kot prosta težja krogla.

Če spustimo samo eno kroglo, ta pada najprej pospešeno, potem pa se njena hitrost približa mejni vrednosti. Ta je določena z ravnotežjem dveh sil, in sicer teže ter zračnega upora. Upor F_u narašča s kvadratom hitrosti v krogle: $F_u = \frac{1}{2}C_u S \rho v^2$. Pri tem je C_u koeficient upora, ki je odvisen od oblike telesa. Za kroglo je približno 0,4. Največji čelni presek krogle S glede na smer gibanja je enak ploščini glavnega kroga $S = \pi r^2$. Gostota zraka je $\rho \approx 1,2 \text{ kg/m}^3$. Mejno hitrost izračunamo iz enačbe $F_g = F_u$. Telo med padanjem spremeni zračni tlak in gostoto v svoji bližini (npr. neposredno nad kroglo se tlak zmanjša).

Naloga

Imejmo dve enako veliki krogli, narejeni iz snovi z različnima gostotama. Če ju spustimo posebej, pada lažja krogla s hitrostjo v_1 , težja pa s hitrostjo v_2 (potem, ko praktično dosežeta mejno hitrost). Lahko pa ju spnemo skupaj s tanko vrvico in ju spustimo. Kako izračunamo hitrost njunega padanja, če poznamo le hitrosti v_1 in v_2 ? Vrvica mora biti dovolj dolga, da med padanjem ena krogla ne spremeni zračnega tlaka in gostote okrog druge.

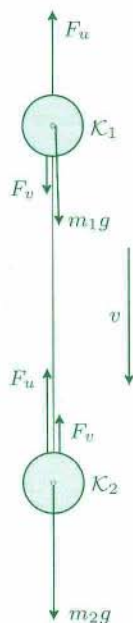
Rešitev

Najprej izrazimo ravnotežni hitrosti za obe krogli, ko padata vsaka posebej:

$$mg = \frac{1}{2}C_u S \rho v^2 = K v^2.$$

Koeficient $K = \frac{1}{2}C_u S \rho$ je za obe krogli enak, saj sta enako veliki in enake oblike. Če ima lažja krogla maso m_1 , težja pa maso m_2 , sta hitrosti $v_1 = \sqrt{\frac{m_1 g}{K}}$ in $v_2 = \sqrt{\frac{m_2 g}{K}}$.

Sedaj si oglejmo primer, ko sta krogli speti z vrvico (slika 1). Zgornjo (lažjo) kroglo označimo s K_1 , spodnjo



Slika 1. Sile pri padanju spetih krogel.

pa s K_2 . Na vsako od njiju delujejo 3 sile: teža mg , zračni upor F_u in sila vrvice F_v . Upor je za obe krogli enak, prav tako sila vrvice.

Napišimo enačbi za ravnovesje sil na obe krogli:

$$m_1 g = F_u - F_v$$

$$m_2 g = F_u + F_v.$$

Enačbi seštejmo: $(m_1 + m_2)g = 2F_u = 2Kv^2$, od koder $Kv_1^2 + Kv_2^2 = 2Kv^2$. Iz tega sledi za hitrost

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}}.$$

Hitrost pri skupnem padanju krogel je med vrednostma v_1 in v_2 .

Milan Ambrožič

OKROGLO IN KVADRATASTO – Rešitev s str. 159

Predno se lotimo okroglih in kvadratastih množic, se spomnimo, kako iz razcepa naravnega števila na prafaktorje razberemo, ali je število popolni kvadrat ali ne. Število je popolni kvadrat natanko tedaj, ko v njegovem razcepu vsako praštevilo nastopa s sodim eksponentom. Tudi za praštevila, ki v razcepu ne nastopajo, si lahko mislimo, da v njem nastopajo s sodim eksponentom, in sicer z eksponentom 0. Ker se pri množenju eksponenti pri posameznih praštevilih seštevajo, je produkt dveh števil popolni kvadrat natanko tedaj, ko je za vsako praštevilo parnost eksponenta, s katerim nastopa v razcepu prvega števila, enaka parnosti, s katero nastopa v praštevilskem razcepu drugega števila.

Lotimo se najprej kvadratastih množic. Naj bo A po moči največja kvadratasta podmnožica množice $\mathbb{N}_{1999} = \{1, 2, \dots, 1998, 1999\}$. Produkt poljubnih dveh števil iz množice A je torej popolni kvadrat. Recimo, da obstajata tako praštevilo p in tako število $a \in A$, da praštevilo p nastopa v razcepu števila a z lihimi eksponentom. Ker je množica A kvadratasta, mora praštevilo p nastopati z lihimi eksponenti tudi v praštevilskih razcepah vseh drugih števil iz množice A . Praštevilo p torej deli vsa števila iz množice A . Potem pa je

$$A' = \left\{ \frac{a}{p} \mid a \in A \right\}$$

zopet množica naravnih števil. Množica A' je podmnožica množice $\mathbb{N}_{1999}$, ima enako moč kot množica A , hkrati pa je tudi kvadratasta, saj se v produktih parov eksponent, s katerim nastopa praštevilo p , zmanjša za 2,

tako da se parnost ohrani. Množica A' je torej ena od tistih kvadratastih množic, katerih moč želimo določiti. Z zamenjavo smo dosegli, da v razcepih števil iz A' praštevilo p nastopa le s sodimi eksponenti. Ker je praštevilo, ki lahko nastopijo v razcepih, le končno mnogo (nobeno ni večje od 1999), lahko z nekaj zamenjavami gornje oblike poiščemo tako po moči največjo kvadratasto podmnožico množice $\mathbb{N}_{1999}$, označili jo bomo z $\mathcal{A}$, da v razcepu vsakega števila iz $\mathcal{A}$ vsako praštevilo nastopa s soddim eksponentom. Drugače povedano, vsa števila v množici $\mathcal{A}$ so popolni kvadrati. Ker je $\mathcal{A}$ po moči največja kvadratasta podmnožica množice $\mathbb{N}_{1999}$, množica vseh popolnih kvadratov, ki so manjši ali enaki 1999, pa je kvadratasta, je $\mathcal{A}$ kar množica vseh teh kvadratov,

$$\mathcal{A} = \{1, 4, 9, 16, \dots, 1849, 1936\}.$$

Moč množice $\mathcal{A}$ je torej 44, saj je $44^2 = 1936 \leq 1999 < 2025 = 45^2$. Iz prevedbe množice $\mathcal{A}$ v množico A' tudi sledi, da je $\mathcal{A}$ v resnici edina kvadratasta podmnožica množice $\mathbb{N}_{1999}$, ki ima 44 elementov.

Sedaj pa se lotimo še okroglih podmnožic. V grobem je ideja podobna: začnemo z eno od največjih okroglih podmnožic, jo prevedemo na "enakovredno" množico, katere elementi so "lepe" oblike, in preštujemo, koliko elementov ima ta množica.

Naj bo B po moči največja okrogla podmnožica množice $\mathbb{N}_{1999}$. Produkt nobenih dveh različnih števil iz množice B torej ni popolni kvadrat. Recimo, da obstajata tako praštevilo p in tako število $b \in B$, da praštevilo p nastopa v razcepu števila b z eksponentom, ki je večji ali enak 2. Potem je tudi $b' = \frac{b}{p^2}$ naravno število, ki pa ne pripada množici B (produkt števil b in b' je namreč popolni kvadrat). Ker je za vsako praštevilo parnost eksponentov, s katerima nastopa v razcepu števil b in b' , enaka, je tudi množica

$$B' = (B \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$$

ena od po moči največjih okroglih podmnožic množice $\mathbb{N}_{1999}$. Z zaporedjem zamenjav gornje oblike lahko množico B prevedemo v tako množico $\mathcal{B}$, da kvadrat nobenega praštevila ne deli nobenega števila iz $\mathcal{B}$. Vsako število iz $\mathcal{B}$ je torej produkt samih različnih praštevil. Ker je $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}_{1999}$ po moči največja okrogla podmnožica, množica vseh tistih števil iz $\mathbb{N}_{1999}$, ki so produkti samih različnih praštevil, pa je okrogla, je množica $\mathcal{B}$ kar enaka množici vseh takih števil,

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, \dots, 1997, 1999\}.$$

Določiti moramo še moč množice $\mathcal{B}$, to pa bo bolj zapleteno, kot je bilo določanje moči množice $\mathcal{A}$. Ker je štetje s svinčnikom in papirjem zamudno, v logaritmskih tablicah pa so razcepi le prvih tisoč števil, sem se odločil, da napišem kratek računalniški program, ki bo določil moč množice $\mathcal{B}$. Program pregleda vsa števila od 1 do 1999 in za vsako preveri, ali je deljivo s kvadratom kakega praštevila.

```

program ProduktiRazlicnihPrastevil;
{ Prešteje, koliko števil od 1 do meja je produkt samih različnih
  praštevil. }
const
  meja = 1999;
  Pmeja = 14; { koliko praštevil je do korena iz meja }
  pra: array[1..Pmeja] of integer { praštevila do korena iz meja }
    = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43);
var
  stevec: integer; { števec iskanih števil }
  pra2: array[1..Pmeja] of integer; { kvadrati praštevil }
  i, j: integer;
begin
  for i:=1 to Pmeja do { Pripravimo kvadrate praštevil. }
    pra2[i] := sqr(pra[i]);
  stevec := 0;
  for i:=1 to meja do begin { Pregledamo vsa števila. }
    j := 1; { indeks v tabeli kvadratov praštevil }
    while (j <= Pmeja) and (i mod pra2[j] <> 0) do j := j + 1;
    if j > Pmeja then stevec := stevec + 1;
  end; {for}
  writeln('Nasel sem ', stevec, ' produktov različnih prastevil.');
```

end.

V programu preverjamo deljivost le s praštevili od 2 do 43; to so namreč edina praštevila, katerih kvadrat lahko deli kako število iz $\mathcal{B}$. S programom ugotovimo, da je moč množice $\mathcal{B}$ enaka 1215. Kot zanimivost omenimo, da teorija pravi, da je med števili od 1 do n približno $\frac{6}{\pi^2}n$ takih, ki so produkt samih različnih praštevil (natančneje, limita, ko gre n proti neskončno, kvocienta med $\frac{6}{\pi^2}n$ in dejanskim številom števil od 1 do n , ki so produkt samih različnih praštevil, obstaja in ima vrednost 1). Za $n = 1999$ tako dobimo napoved 1215.25, ki se zelo dobro ujema s pravo vrednostjo.

Množica $\mathcal{B}$ ni edina okrogla podmnožica množice $\mathbb{N}_{1999}$, ki ima moč 1215. Kakšne so ostale take podmnožice, nam kaže prevedba množice $\mathcal{B}$ v množico $\mathcal{B}'$. Ugotoviti, koliko je po moči največjih okroglih podmnožic množice $\mathbb{N}_{1999}$, pa vam prepuščam v razmislek.

Martin Juvan

VERIŽNI PRIBLIŽKI

V matematičnih učbenikih kar mrgoli nalog, kot je tale:

Poenostavi: $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}$.

Brez posebnega truda ugotovimo, da je rezultat naloge $\frac{54}{19}$.

Ko opazujemo nalogo in rezultat, nam pride na misel vprašanje, kako je pisec naloge sestavil. Pogosta zvijača pri sestavljanju matematičnih nalog je, da začnemo pri koncu in rezultat preoblikujemo tako dolgo, dokler se nam izraz ne zdi dovolj zapleten. Takega zastavimo kot nalogo za učence.

Začnimo torej z ulomkom $x = \frac{54}{19}$. Kot vidimo, ga lahko razdelimo na celi in ulomljeni del

$$x = \frac{54}{19} = 2 + \frac{16}{19}.$$

Ulomljeni del zdaj spremenimo v dvojni ulomek

$$x = 2 + \frac{1}{\frac{19}{16}}.$$

Pod glavno ulomkovo črto smo dobili ulomek $\frac{19}{16}$, ki ga spet lahko razdelimo na celi in ulomljeni del $\frac{19}{16} = 1 + \frac{3}{16}$. Prvotni ulomek je torej enak

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{16}}.$$

Postopek lahko nadaljujemo. Zadnji dobljeni ulomljeni del $\frac{3}{16}$ spet spremenimo v dvojni ulomek in dobimo

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{16}{3}}}.$$

Če še $\frac{16}{3}$ delimo na celi in ulomljeni del $5 + \frac{1}{3}$, lahko x izrazimo kot

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}. \quad (1)$$

To pa je izraz, zapisan na začetku.

Sestavljalcu naloge se je zdel ta izraz očitno že dovolj zapleten, mi pa se vprašajmo, ali bi lahko s postopkom nadaljevali. Kot vidimo, smo uporabljali izmenično dva koraka:

- A. ulomek (večji od 1) smo razdelili na celi in ulomljeni del (ulomek med 0 in 1),
- B. dobljeni ulomljeni del smo spremenili v dvojni ulomek oziroma poiškali smo njegovo recipročno vrednost. Ker je le-ta večja od 1, smo lahko spet uporabili korak A.

Zadnji ulomljeni del, ki smo ga dobili v našem primeru, je enak $\frac{1}{3}$ in njegova recipročna vrednost je 3, torej celo število. Če poskusimo spet uporabiti korak A, dobimo neceli del enak 0, kar pomeni, da postopka ne moremo več nadaljevati. Z uporabo enakosti $3 = 2 + \frac{1}{1}$ lahko izsilimo še en korak, ki nas pripelje do pravilnega, a nič kaj lepega zapisa

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}. \quad (2)$$

Pravi matematik zdajle že premišljuje, kako bi se dalo nova spoznanja posplošiti. Tudi nam po glavi rojijo vprašanja:

Ali lahko podoben postopek uporabimo tudi za druge ulomke?

Ali morda tudi za ostala števila?

Kako bi lahko dobljeni rezultat uporabili v praksi?

Da potešimo radovednost, povejmo nekaj osnovnih ugotovitev, do katerih so se prikopali veliki matematiki pred nami. Ugotovili so, da lahko postopek izvajamo tudi na splošno. S ponavljanjem korakov A in B lahko vsak ulomek u pretvorimo v obliko

$$u = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_n}}}}}. \quad (3)$$

Pravimo, da smo število u razvili v *verižni ulomek*. Zaradi načina dela (korak B) so vsi števcii enaki 1 in vrednost verižnega ulomka določajo števila $b_0, b_1, \dots, b_n$, ki jim pravimo *verižni koeficienti*. Ker je zapis verižnega ulomka v običajni matematični obliki (3) precej nepregleden, ga

na kratko zapišemo tako, da navedemo njegove verižne koeficiente: $u = [b_0, b_1, \dots, b_n]$. Torej bomo število, s katerim smo začeli to zgodbo, pisali kot $\frac{54}{19} = [2, 1, 5, 3]$ (ali pa, če upoštevamo drugo, gršo možnost, $\frac{54}{19} = [2, 1, 5, 2, 1]$).

Velja izrek, ki ga navajamo brez dokaza:

Izrek. Poljubno pozitivno racionalno število lahko razvijemo v verižni ulomek na natanko dva načina.

Oba načina smo že spoznali, to sta obliki (1) in (2). Običajno uporabljamo "lepši" način – tisti, ki se ne konča z $\frac{1}{1}$.

Če je verižni ulomek preprost, ga lahko spremenimo nazaj v običajni ulomek že z nekaj preprostimi računskimi operacijami – računati moramo od spodaj navzgor. Težave nastopijo, če je verižni ulomek zapletenejši. Za ta primer so matematiki izdelali posebno shemo, ki nam omogoča hitrejšo računanje. Oglejmo si jo na našem zgledu: verižni ulomek $[2, 1, 5, 3]$ bomo poskusili preoblikovati v $\frac{54}{19}$.

Najprej napišimo shemo

		2	1	5	3
0	1				
1	0				

Števila 2, 1, 5, 3 v prvi vrstici so verižni koeficienti našega števila, ničle in enke na levi strani pa so začetne vrednosti, ki so potrebne za pravilno delovanje sheme (njihova razporeditev je enaka za vse ulomke). Zdaj moramo napolniti desni del spodnjih dveh vrstic. Ravnali se bomo po principu $a + b \cdot c$. Če je v zgornji (prvi) vrstici število c , v spodnji (drugi ali tretji) pa sta v prejšnjih stolpcih števili a in b , bomo v prazen prostorček pod c vpisali vrednost $a + b \cdot c$. Enak postopek uporabljamo za drugo in za tretjo vrstico, paziti je treba le, da število c obakrat vzamemo iz prve vrstice.

Tako bomo pod število 2 vpisali v drugo vrstico $0 + 1 \cdot 2 = 2$, v tretjo pa $1 + 0 \cdot 2 = 1$

		2	1	5	3
0	1	2			
1	0	1			

Enako računamo do konca

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & 54 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 & 19 \end{array}$$

V zadnjem stolpcu že vidimo števili 54 in 19, torej se rezultat skriva v zadnjem stolpcu. Zapisan je že v obliki ulomka, manjka le ulomkova črta. Tudi ostale pare števil si lahko predstavljamo kot ulomke – dodajmo še ulomkove črte

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & 54 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 & 19 \end{array}$$

Poleg rezultata $\frac{54}{19}$ smo dobili še tri ulomke: $x_0 = \frac{2}{1} = 2$, $x_1 = \frac{3}{1} = 3$ in $x_2 = \frac{17}{6}$. Pomožnim ulomkom, ki jih dobimo z opisano shemo, bomo rekli *verižni približki* danega števila. Verižne približke dobimo pravzaprav tako, da zadnjih nekaj verižnih koeficientov v razvoju $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ izpustimo. V našem primeru je

$$2 = [2], \quad 3 = [2, 1], \quad \frac{17}{6} = [2, 1, 5], \quad \frac{54}{19} = [2, 1, 5, 3].$$

Verižni približki so za matematiko zanimivi, ker so zelo *dobri približki*. Med ulomki, ki imajo imenovalac manjši ali enak 6, je ulomek $\frac{17}{6}$ *najboljši približek* za vrednost $\frac{54}{19}$. To velja tudi splošneje, z eno samo majhno izjemo: prvi verižni približek je celi del danega števila in zato ni nujno najboljši celoštevilski približek. Tudi v našem primeru prvi približek ($x_0 = 2$) ni najboljši celoštevilski približek – drugi približek ($x_1 = 3$) je boljši.

Izrek. Vsak verižni približek danega števila, razen morda prvega, je boljši približek tega števila kot katerikoli drug ulomek z manjšim ali enakim imenovalcem.

Vsak ulomek lahko zapišemo tudi v decimalni obliki – tako trdi teorija. V praksi pa se pojavijo težave. Decimalni zapis ima skoraj vedno neskončno mnogo decimalk in iz čisto praktičnih razlogov ga ponavadi zaokrožimo na nekaj mest.

Poglejmo si naslednjo nalogo. Pri računanju z računalom se na zaslone izpiše število $y = 2.358208955$. To seveda ni pravi rezultat računa, ki smo ga želeli izračunati, je le decimalni približek. Ali bi se dalo ta decimalni približek nekako nadomestiti z ulomkom?

Pomagali si bomo s postopkom razvijanja v verižni ulomek. Koraka **A** in **B** namreč lahko izvajamo tudi, če je število zapisano v decimalni obliki. Pa poglejmo:

$$\begin{aligned} y = 2.358208955 &= 2 + 0.358208955 = 2 + \frac{1}{2.791666668} = \\ &= 2 + \frac{1}{2 + 0.791666668} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1.263157892}} = \dots \end{aligned}$$

Vidimo, da moramo na računalu samo izmenično uporabljati tipki **FRAC** (= ulomljeni del)¹ in **1/x** (= recipročna vrednost). Pri tem ne pozabimo zapisovati dobljenih celih delov, to so namreč verižni koeficienti. Po nekaj korakih dobimo naslednji razvoj

$$y = [2, 2, 1, 3, 1, 4, 997446, 1, 1, 6, 3, \dots].$$

Iz koeficientov dobimo naslednje verižne približke

$$\begin{aligned} [2] &= 2 \\ [2, 2] &= \frac{5}{2} \\ [2, 2, 1] &= \frac{7}{3} \\ [2, 2, 1, 3] &= \frac{26}{11} \\ [2, 2, 1, 3, 1] &= \frac{33}{14} \\ [2, 2, 1, 3, 1, 4] &= \frac{158}{67} \\ [2, 2, 1, 3, 1, 4, 997446] &= \frac{157596501}{66828896} \\ &\dots \end{aligned}$$

Žepno računalno nam pokaže, da se že ulomek $\frac{158}{67}$ ujema s številom y na vsa mesta, kar jih je na zaslončku. To velja tudi za zadnji ulomek, ki pa ima neprimerno večji števec in imenovalec. Ulomek $\frac{158}{67}$ je torej precēj lepši približek za rezultat računa, ki smo ga želeli izračunati.

¹ Na nekaterih računalih te tipke ni. Pomagamo si tako, da celi del kar odštejemo.

Ker ostalih decimalnih rezultata ne poznamo, ne moremo vedeti, če se ga sploh da pisati kot ulomek; zgornji račun pa nam kaže, da lahko za *praktične potrebe* privzamemo, da je rezultat skoraj enak $\frac{158}{67}$. Celó več: ujemanje je takó lépo, da je možno, da je pravi rezultat enak $\frac{158}{67}$, naslednje verižne koeficiente pa smo dobili le zaradi napak pri zaokrožanju. Tisti, ki se mu zdi, da je število 997446 preveliko za napako pri zaokrožanju, naj se spomni, da smo ga dobili kot recipročno vrednost števila 0.00000100256. Pojav tako velikega verižnega koeficienta nas navadno opozarja, da smo prišli do meje natančnosti, ki jo lahko dosežemo z računalom: naslednji koeficienti so praviloma napačni (zaradi napak pri zaokrožanju).

Poskusimo podobno še s številom $z = 1.414213562$. Hitro dobimo razvoj

$$z = [1, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

in ustrezne verižne približke

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \dots$$

Število z je desetmestni približek števila $\sqrt{2}$. Števila $\sqrt{2}$ ne moremo zapisati z ulomkom — pravimo, da je *iracionalno*. Zato se verižni koeficienti nadaljujejo v neskončnost. Če bi bilo koeficientov končno mnogo, bi bil zadnji verižni približek neki ulomek, enak številu $\sqrt{2}$, kar ni mogoče.

Tudi na splošno velja:

Izrek. V verižni ulomek lahko razvijemo poljubno pozitivno realno število. Razvoj racionalnih števil je končen, razvoj iracionalnih števil pa neskončen.

Opomba: Zgled $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$ potrebuje še malo razlage. Kdor je zadosti vztrajen, bo prišel po nekaj korakih računanja z računalom tudi do koeficientov, različnih od 2. To je posledica napak pri zaokrožanju, pri pravem razvoju se nadaljujejo v neskončnost same dvojke.

Bralca vabim, da poskusi napisati računalniški program za (približno) pretvarjanje decimalnih števil v ulomke. Program naj izpiše vse verižne približke, ki jih je pri danem številu *smiselno* izpisati. To pomeni, da mora upoštevati, na koliko mest natančni so podatki, in nehati z izpisom, ko pridejo na vrsto verižni koeficienti, pri katerih se napake pri zaokrožanju preveč poznajo.

Za konec si oglejmo še verižne približke za število π . Če izhajamo iz približka $\pi \doteq 3.141592654$ in računamo na deset mest (z računalom), dobimo razvoj

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 4, \dots].$$

Temu razvoju pripadajo verižni približki

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{104348}{33215}, \quad \dots$$

Nadaljnji verižni približki se razlikujejo od prave vrednosti šele na desetem decimalnem mestu. Sklepamo, da naslednji verižni koeficienti zaradi napak pri zaokrožanju najbrž niso natančni. Dober računalniški program bo torej izpisal samo navedene približke.

Marino Pavletič

ŠTEVILSKA IGRICA ZA MLADE RAČUNARJE – Rešitev s str. 152

Skrivnost Aninega hitrega odgovora je v našem običajnem računanju v desetiškem številskem sistemu in naslednjem preoblikovanju zastavljenega računa:

$$(2x + 3) \cdot 5 - 11 = 10x + 4,$$

kjer smo z x označili Mihovo skrivno začetno število. Iz desetiškega zapisa rezultata $10x + 4$ dobimo namreč število x tako, da preprosto **opustimo** (ne odštejemo!) zadnjo števko 4 na desni.

Zgled: Naj bo npr. izbrano začetno število 7. Potem so delni rezultati zapored 14, 17, 85 in 74. Če iz končnega rezultata 74 odstranimo števko 4, dobimo začetno število 7.

Marija Vencelj

ZANIMIVA NALOGA O PREDPSU – Rešitev s str. 165

Označimo s P izsev Prokijona B, z r njegovo oddaljenost, z R pa polmer. Velja $j = P/4\pi r^2 \Rightarrow P = j \cdot 4\pi r^2 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \cdot 4\pi (11 \cdot 10^{16} \text{ m})^2 = 1,5 \cdot 10^{23} \text{ W}$. Izsev Prokijona B v izsevih Sonca je $P/P_{\odot} = 4 \cdot 10^{-4}$, torej Prokijon B seva za nekaj desetstisočink izseva Sonca, glede na glavno zvezdo pa še dosti manj.

Če sevata zvezdi pri enaki površinski temperaturi, je kvocient izsevov Prokijona A in B sorazmeren kvocientu njunih površin, torej $4\pi R^2/4\pi R_{\odot}^2 = 4 \cdot 10^{-4} P_{\odot}/6 P_{\odot} \Rightarrow R/R_{\odot} = 0,8 \cdot 10^{-2} \Rightarrow R = 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot 110 R_Z = 0,9 R_Z$. Prokijon B je torej približno tako velik kot naša Zemlja.

Gornja rezultata zgovorno pričata, zakaj je tako težko izslediti Prokijonovo spremljevalko.

Marijan Prosén

34. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

V soboto, 16. maja 1998, se je 198 sedmošolcev in 316 osmošolcev, ki so se na področnem tekmovanju najbolje odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Novi Gorici in Novem mestu na državnem tekmovanju slovenskih osnovnošolcev v znanju matematike.

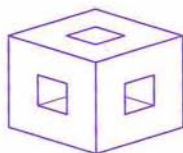
Zlato Vegovo priznanje je osvojilo 25 sedmošolcev in 101 osmošolec, prejeli pa so ga sedmošolci, ki so osvojili vsaj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk.

Državna tekmovalna komisija, ki jo je vodila predsednica prof. Terezija Uran, je pripravila naloge, pregledala rešitve in določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj. Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

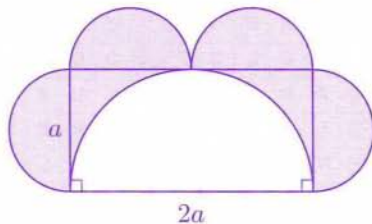
7. razred

1. Dokazi: Če je n naravno število, večje od 2, potem je količnik $\frac{10^n + 8}{72}$ tudi naravno število.
2. Dan je enakokraki trapez $ABCD$, ki ga diagonala razdeli na dva enakokraka trikotnika.
Izračunaj velikost ostrega kota v tem enakokrakem trapezu.
3. V kocko 3 krat 3 krat 3 so naredili tri luknje. Luknje imajo kvadratni prerez 1 krat 1 in potekajo od središča ene ploskve kocke do središča nasprotne ploskve (glej skico).

Izračunaj površino nastalega telesa.



4. Ploščina obarvane ploskve na sliki je 968 cm^2 .
Kolikšen je obseg te ploskve?



5. Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{(a+c)^2 - (-c-a)^2 - (b+c)^2}{(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2},$$

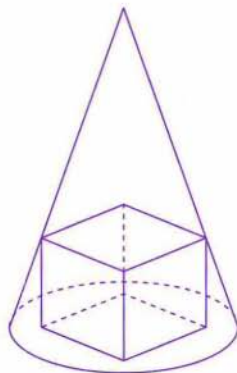
če je $a = \sqrt{52}$, $b = 1 + \sqrt{48}$ in $c = -1$.

8. razred

1. Trije najstniki so ugotovili, da je produkt števil njihovih let 2520.
Čez koliko let bodo skupaj imeli 110 let?
2. Temperatura zraka je čez dan narasla za 20 %, ponoči pa se je znižala za 30 %. Naslednje jutro je bila za 4°C nižja kot prejšnje jutro.
Kolikšna je bila temperatura zraka prejšnje jutro?
3. Iz pokončnega stožca s polmerom 10 cm in višino $12\sqrt{2}$ cm izrežemo največjo možno kocko (glej skico!).
Izračunaj površino te kocke.
4. Dan je trikotnik $\triangle ABC$ ($\overline{BC} = 15$ cm, $\overline{AC} = 13$ cm, $\overline{AB} = 14$ cm).
Na stranici AB sta točki D in E , tako da je daljica CD višina, daljica CE pa težiščnica na stranico AB .
Izračunaj ploščino kroga, v katerem je daljica CE najdaljša tetiva.
5. Za katere vrednosti spremenljivk a, b, c, d ima izraz

$$a^2 + d^2 - 2b(a + c - b) + 2c(c - d)$$

najmanjšo vrednost?

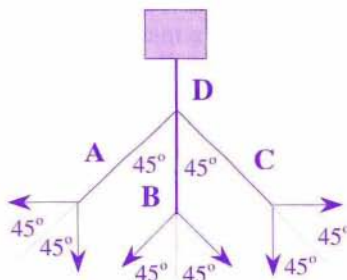


Aleksander Potočnik

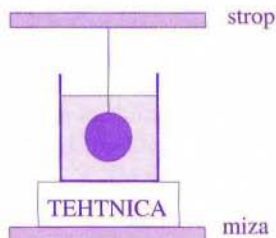
18. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

7. razred

1. Šest sošolcev si za vleko klade pripravi vrvi, kot kaže slika. Vsak vleče z enako veliko silo 100 N v nakazanih smereh. Klada se ne premakne.
 - a) Kolikšne sile natezajo vrvi A, B, C in D?
 - b) Klada se premakne, če nanjo delujemo s silo 500 N. S koliko silo naj vleče vsak od sošolcev, da se bo klada premaknila? Tudi v tem primeru so sile sošolcev enako velike. Smeri sil so enake kot v prvem primeru.
 Nalogo lahko rešiš tudi z načrtovanjem.

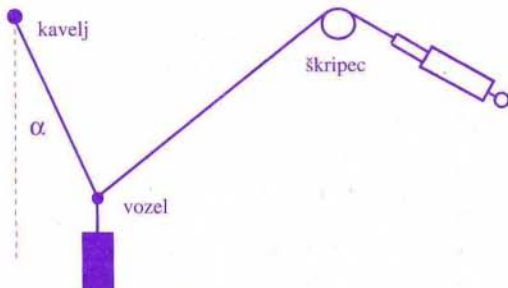


2. Mrežo (ogrodje) kvadra sestavimo iz osmih aluminijastih palic z dolžino 1,000 m in štirih jeklenih palic z dolžino 2,000 m.
- Kolikšno prostornino določa takšna mreža?
 - Kolikšna pa je prostornina, če mrežo segrejemo za 300°C ?
- Podatke za temperaturno raztezanje aluminija in jekla poišči v učbeniku.
3. Na tehtnico postavimo čašo z maso 100 g, v njej pa je 500 g vode. V vodi visi na vrvi krogla z maso 540 g in prostornino 200 cm^3 .
- Izračunaj, kolikšna je sila vode na kroglo (sila vzgona)!
 - Kolikšna je sila krogle na vodo? Zapiši velikost in z besedami opiši tudi smer te sile.
 - Na posebni skici nariši vse sile, ki delujejo na sistem {čša + voda}, in izračunaj, kolikšna je sila tehtnice na sistem.
 - Koliko gramov kaže tehtnica?



Eksperimentalni nalogi

4. Določi maso ene svinčene kroglice. Manjša čaša plava v navpični legi, če so kroglice enakomerno razporejene po dnu čaše. Pribor: večja čaša z vodo ($\rho_v = 1,0\text{ g/cm}^3$), manjša čaša z merilom in presekom $18,3\text{ cm}^2$, svinčene kroglice.
5. En konec vrvice pritr-dimo na kavelj, drugega pa speljemo preko škripec in vlečemo z dinamometrom, kot kaže slika. Na vrvi je obešena utež z maso 1000 g.
- Meri silo F v odvisnosti od kota α in na milimetrski papir nariši diagram $F = F(\alpha)$ za kote od 0° do 60° v korakih po 15° .
 - Izračunaj, približno koliko dela opravi sila dinamometra, ko se utež premakne iz začetne lege ($\alpha = 0^{\circ}$) v lego, ko je kot $\alpha = 30^{\circ}$. Izračun bo le približen, saj sila ne narašča enakomerno.
 - Izmeri potrebne podatke in izračunaj spremembo potencialne energije uteži za premik iz začetne lege ($\alpha = 0^{\circ}$) do lege, ko je kot $\alpha = 30^{\circ}$.



8. razred

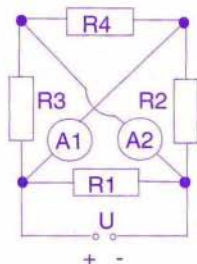
1. Voznik avtomobila je pri hitrosti 100 km/h zagledal na cesti veliko skalo in začel ustavljati. Pojemek med zaviranjem na suhi cesti je 7 m/s^2 , reakcijski čas voznika pa 0,60 s. Reakcijski čas je čas od trenutka, ko voznik zagleda oviro, do trenutka, ko pritisne na zavoro.
 - a) Koliko metrov pred sabo je voznik zagledal oviro, če se je vanjo zaletel s hitrostjo 20 km/h? Tak trk privezanim potnikom praviloma ne povzroči telesnih poškodb.
 - b) Nariši diagram hitrosti v odvisnosti od časa od trenutka, ko je voznik zagledal oviro, do takrat, ko se je vozilo ustavilo, če je od začetka trka do ustavitve vozila preteklo 0,10 s.
 - c) Kolikšna je bila sila varnostnega pasu na voznika med trkom in kolikšna med zaviranjem, če predpostavimo, da so v obeh primerih vse ostale sile v vodoravni smeri zanemarljivo majhne glede na silo varnostnega pasu? V približku lahko upoštevamo, da je bilo tudi med trkom gibanje enakomerno pojemačno. Masa voznika je 70 kg.

2. Tekmovalec z rolerji se je spustil navzdol po strmini z naklonskim kotom 45° .

Z izrekom o kinetični in potencialni energiji izračunaj hitrost tekmovalca, ko je prevozil razdaljo 5,0 metrov. Sila trenja je bila 5 odstotkov teže tekmovalca, delo sile upora zraka pa je pri tako majhnih hitrostih zanemarljivo majhno. Masa tekmovalca je bila 80 kg.

3. Štiri upornike ($R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 4,0 \text{ k}\Omega$ in $R_4 = 5,0 \text{ k}\Omega$), baterijo, z napetostjo 10,0 V in zanemarljivim notranjim uporom, ter dva idealna ampermetra povežemo, kot kaže slika.

- a) Preriši sliko in vriši smeri tokov skozi upornike in skozi ampermetra.
- b) Koliko pokažeta ampermetra?
Idealni ampermeter ima notranji upor enak nič in v vezju predstavlja kratek stik.



Eksperimentalni nalogi

4. Roku je pregorela zadnja žarnica na dvokolesu. Ko jo je odvil iz grla, je na njej prebral podatka 6V/0,6W. Take žarnice doma ni našel, imel pa je rezervno žarnico za sprednjo luč s podatkom 6V/2,4W. To žarnico je privil v zadnjo luč, vendar ni bil zadovoljen, saj je potem sprednja luč svetila preslabo.

S poskusom ugotovi, za koliko odstotkov se zmanjša električna moč žarnice v sprednji luči, če v zadnjo luč namesto žarnice 6V/0,6W privijemo žarnico s podatkom 6V/2,4W, torej enako žarnico, kot je v sprednji luči.

Nariši električni shemi vezij za primer, ko sta žarnici različni, in za primer, ko uporabiš dve sprednji žarnici. Za vsak primer napiši vse izmerjene in izračunane vrednosti. Pazi, kako boš vezal merilnika. Če ti pregori varovalka v ampermetru, pokliči demonstratorja, da jo zamenja – pri tej nalogi pa boš izgubil 5 točk.

Pribor: dve žarnici 6V/2,4W (večja žarnica, na shemi označi $\tilde{Z}_1$), ena žarnica 6V/0,6W (manjša žarnica, označi $\tilde{Z}_2$), voltmeter, ampermeter, vezne žice, napetostni izvir (ima podobne karakteristike kot dinamo, ko vrtimo pedale z veliko hitrostjo, na skicah ga nariši s simbolom $\text{---} \text{D} \text{---}$).

- Na sredini eksperimentalnega prostora se enakomerno vrti svetilka, tako da svetla lisa potuje po stenah učilnice v vodoravni smeri. Določi razdaljo od svojega zaslona do svetilke. Iz postopka mora biti razvidno, kako si prišel do rezultata.

Pribor: štoparica, merilni trak in zaslon, preko katerega potuje svetla lisa.

Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

42. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Poročilo s tekmovanja smo objavili v prvi letošnji številki Preseka, sedaj objavljamo še naloge.

Prvi letnik

- Za katera cela števila x in y je $xy = 20 - 3x + y$? Poišči vse rešitve! Vemo, da obstaja tako štirimestno število, v katerem so enice za ena večje od desetice, stotice so dvakratnik desetice in tisočice niso manjše od dvakratnika enic, število samo pa je dvakratnik nekega praštevila. Določi to štirimestno število.
- V notranjosti stranice CD pravokotnika $ABCD$ leži taka točka E , da je trikotnik DBE enakokrak, trikotnik ABE pa pravokoten. Določi razmerje stranic pravokotnika.

3. V levem spodnjem kotu šahovske table razsežnosti 8×8 stoji 9 žetonov, označenih z $\bullet$. Vsak žeton lahko skoči čez žeton na sosednjem polju in pristane na polju za njim, če je le to polje prosto. (Polji sta sosednji, če imata skupen rob ali oglišče.)

Ali lahko le s takimi potezami vseh devet žetonov prestavimo na polja, označena z $\circ$?

$\circ$	$\circ$	$\circ$					
$\circ$	$\circ$	$\circ$					
$\circ$	$\circ$	$\circ$					
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$					
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$					
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$					

Drugi letnik

- Poišči vsa naravna števila n , ki so enaka vsoti števk števila n^2 .
- Poišči vse pare realnih števil (p, q) , za katere velja $p + q = 1998$ in ima enačba $x^2 + px + q = 0$ le celoštevilске rešitve.
- Dana je krožnica $\mathcal{K}$ s središčem v O in točka A izven nje. Premica AO seka krožnico $\mathcal{K}$ zaporedoma v točkah B in C , tangenta iz točke A pa se je dotika v točki D . Izberimo poljubno tako točko E na premici BD , da leži točka D med B in E . Trikotniku DCE očrtana krožnica seka premico AO v točkah C in F , premico AD pa v točkah D in G . Dokaži, da sta premici BD in FG vzporedni.
- Oglejmo si igro za dva igralca. Na začetku imata en kup z vsaj dvema kamnoma. Igralec na potezi izbere enega od kupov in ga razdeli na 2 ali 3 nove kupe s po vsaj enim kamnom. Izgubi tisti, ki ne more več razdeliti nobenega kupa. Kdo zmaga, če oba igrata preudarno?

Tretji letnik

1. Pokaži, da je število

$$\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}$$

celo za vsako celo število a .

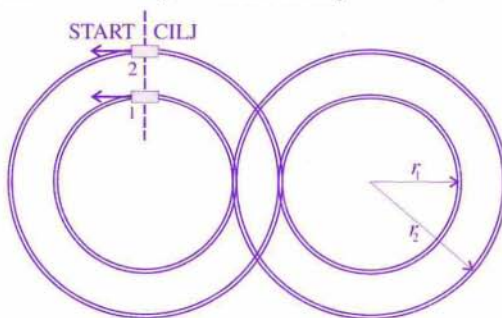
2. Poišči vse polinome p z realnimi koeficienti, za katere velja

$$(x - 8)p(2x) = 8(x - 1)p(x) \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

NALOGE Z DRŽAVNEGA FIZIKALNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 1997/98

Skupina A

- Čaša valjaste oblike ima zanemarljivo tanko steno in masivno dno. S čašo opravimo dva med seboj neodvisna poskusa v večji valjasti posodi s presekom dna 150 cm^2 . V posodi je voda s specifično težo 10 kN/m^3 . Količina, ki jo merimo, je sprememba višine vodne gladine v večji posodi.
 - Čašo položimo na gladino vode v večji posodi tako, da plava. Pri tem se gladina vode v posodi dvigne za $3,0 \text{ cm}$.
 - Čašo potopimo pod gladino vode v posodi tako, da se cela potopi in pristane na dnu. Gladina vode v posodi se dvigne za $1,0 \text{ cm}$. Kolikšna je specifična teža stekla, iz katerega je narejena čaša, in kolikšna je teža čaše?
- Marsikdo pozna igro z dvema enakima avtomobilčkoma na električnih tračnicah. Proga je v obliki osmice, tako kot je prikazano na sliki. Polmer notranjega kroga je 60 cm , polmer zunanjega pa 80 cm . START (in hkrati tudi CILJ) je na prvi četrtini levega kroga. Največja hitrost avtomobilčka je na zunanji progi $1,2 \text{ m/s}$, na notranji pa $1,0 \text{ m/s}$; največji pospešek pri povečevanju hitrosti je $0,2 \text{ m/s}^2$, pri upočasnjevanju pa lahko zmanjšata hitrost v zanemarljivo kratkem času. Tračnice usmerjajo avtomobilček tako, da od STARTA do CILJA prevozi en krog po notranji progi in en krog po zunanji progi ali obratno. Avtomobilčka postavimo na START: avtomobilček številka 1 na notranjo progo in avtomobilček številka 2 na zunanjo. Kateri avtomobilček prvi doseže CILJ, če oba prevozita progo v najkrajšem možnem času? Za koliko se razlikujeta časa voženj?



vina. Areometer spustimo iz lege, ko je njegov spodnji del tik nad gladino vina v sodu.

- Kolikšno največjo globino doseže dno areometra, če je sod dovolj globok?
- Ker se že bliža trgatev, je v sodu globina vina le še 30 cm. Ko areometer zadene dno sode, se zaradi usedlin ustavi, potem pa se začne brez začetne hitrosti dvigati. Koliko največ se vrh areometra dvigne nad gladino vina?

Upor vina pri gibanju areometra je zanemarljivo majhen. Težni pospešek je $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

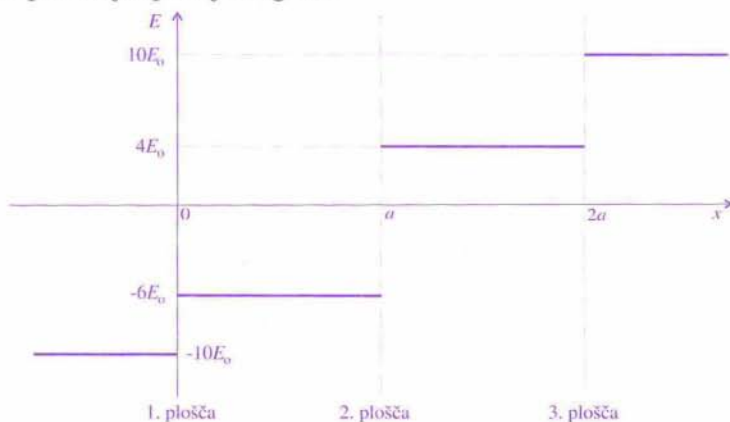
Skupina C

- V veliki posodi, napolnjeni z glicerinom, plava kocka iz pleksi stekla z robom 30,0 cm tako, da je osnovna ploskev kocke vzporedna z gladino. Izračunaj, za koliko se spremeni višina tistega dela kocke, ki je nad gladino glicerina, če glicerin in kocko segrejemo s temperature 20°C na 100°C .

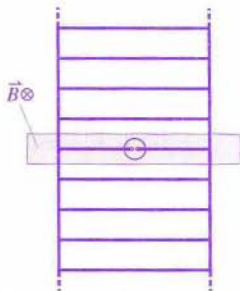
Temperaturni koeficient prostorninskega raztezka za glicerin je $5,0 \cdot 10^{-4}/\text{K}$ in za steklo $9 \cdot 10^{-6}/\text{K}$. Gostota glicerina pri temperaturi 20°C je 1260 kg/m^3 , pleksi stekla pa 1180 kg/m^3 .

Kolikšen bi moral biti temperaturni koeficient prostorninskega raztezka stekla, da se pri segrevanju razmerje med višino potopljenega dela kocke in višino dela, ki je nad gladino, ne bi spremenilo?

- V medsebojni razdalji a so vzporedno postavljene tri neskončno velike plošče. Posamezna plošča je nabita z določeno pozitivno površinsko gostoto naboja. Jakost električnega polja med ploščami in okrog plošč prikazuje spodnji diagram.



- a) V kakšnem razmerju so površinske gostote naboja na ploščah?
- b) V vsako ploščo naredimo majhno luknjico tako, da so vse luknjice na premici, vzporedni z osjo x . Pri $x = 0$ spustimo skozi luknjico prve plošče proton z maso $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg in nabojem $+1,6 \cdot 10^{-19}$ As. Kolikšna mora biti minimalna začetna hitrost protona v pozitivni smeri osi x , da doseže tretjo ploščo? Na grafu je $E_0 = 10$ V/m, $a = 2,0$ mm.
3. Iz aluminijaste žice s konstantnim presekom naredimo lestev z dolžino 1,0 m in širino 20 cm, ki ima 101 prečko (klin). Lestev postavimo navpično med pola magneta, ki ustvarja vodoravno homogeno magnetno polje z gostoto 0,02 T. Širina pasu magnetnega polja je večja od 20 cm, višina pa je 1 cm, tako da je v magnetnem polju le ena prečka. Magnetno polje je pravokotno na prečko. Kolikšna mora biti napetost izvira v prečki, da bo lestev lebdela v narisanim položaju? Kakšna mora biti polariteta priključkov? Izvir je zanemarljivo majhen in lahek, prav tako je zanemarljivo majhen notranji upor. Gostota aluminija je $2,7 \cdot 10^3$ kg/m³ in specifični upor $2,8 \cdot 10^{-8}$ Ω m. Težni pospešek je $g = 10$ m/s².



- a) Nalogo najprej obravnavaj v približku, ko je upor navpičnih odsekov lestve zanemarljivo majhen.
- b) Približno oceni, kako se spremeni rezultat, če upoštevamo pri upor tudi prispevek navpičnih odsekov lestve.

Skupina D

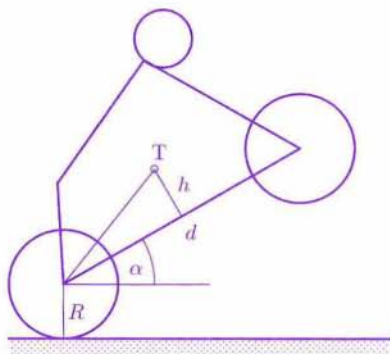
1. V visoko posodo, katere osnovna ploskev je kvadrat s stranico 40,0 cm, natočimo 70,0 l glicerina. Vanj damo kocko iz pleksi stekla z robom 30,0 cm. Kocka plava tako, da je osnovna ploskev kocke vzporedna z gladino.
- a) Kako visoko nad notranjim dnom posode je zgornja ploskev kocke?
- b) Glicerin in kocko segrejemo s temperature 20°C na 100°C. Kako visoko je v tem primeru zgornja ploskev kocke, če predpostaviš, da se posoda, v kateri je glicerin, ne razteza? Ali se zgornja ploskev kocke glede na gladino glicerina dvigne ali spusti?

Gostota glicerina pri temperaturi 20°C je 1260 kg/m^3 , stekla pa 1180 kg/m^3 , temperaturni koeficient prostorninskega raztezka za glicerin je $5,0 \cdot 10^{-4}/\text{K}$ in za steklo $9 \cdot 10^{-6}/\text{K}$.

2. Na motociklistični dirki se zmagovalec po prehodu cilja na motor-nem kolesu pogosto dvigne s prednjim kolesom visoko v zrak in vozi dobršen del poti le na zadnjem kolesu. Zdi se, da tak položaj krši osnovne zakone statike.

- a) Če motociklist miruje, tak položaj gotovo ni možen. Kako se morata gibati voznik in motocikel, da lahko vztrajata v takšnem položaju: voziti, denimo, z veliko konstantno hitrostjo, pospeševati s konstantnim pospeškom ali pa morebiti zavirati s konstantnim pojemkom?

Zračni upor pri tem ni pomemben in ga pri obravnavi **ne upoštevaj**.



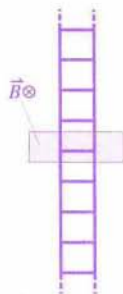
- b) Nariši in imenuj vse *zunanje* sile, ki delujejo na voznika in motocikel v tem primeru. Kako je z ravnovesjem sil?
- c) Kako je z ravnovesjem navorov? Ali je vseeno, kam postavimo os?
- d) Poišči zvezo med količino, ki opisuje gibanje voznika in motocikla v tem položaju (podvprašanje a)), ter naklonskim kotom motocikla (α), t.j. kotom med vodoravnico in zveznico osi obeh koles. Napiši račun za naslednje vrednosti: kot $\alpha = 30^{\circ}$, premer koles $2R = 60\text{ cm}$, medosna razdalja $d = 150\text{ cm}$, težišče voznika in motocikla naj bo na simetrali koles, pravokotni na zveznico osi koles, $h = 30\text{ cm}$ oddaljeno od zveznice na strani voznikove glave, $g = 10\text{ m/s}^2$. (Geometrijski namig: najprej izračunaj kót, ki ga tvorita zveznica osi obeh koles ter zveznica med osjo zadnjega kolesa in težiščem.)
- e) Pri določenem *kritičnem kotu* α voznik ne more več vztrajati v tem položaju. Gre za največji ali najmanjši možni kot? Pojasni. Od katerega parametra – poleg moči in navora motorja – je kritični kot lahko odvisen?

3. Iz aluminijaste žice s konstantnim presekom naredimo lestev s 101 prečko (klinom), tako da je razmik med prečkami ravno enak širini prečke. Lestev postavimo navpično in spustimo skozi vodoravno homogeno magnetno polje z gostoto 1 T, ki je pravokotno na prečke. Višina pasu magnetnega polja je enaka ravno razmiku med prečkama, širina pa večja od dolžine prečke, tako da je v magnetnem polju vedno le ena prečka. Gostota aluminija je $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ in specifični upor $2,8 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.

- a) Pojasni, zakaj se lestev po določenem času giblje enakomerno. Skiciraj, kako tečejo tokovi po lestvi. Pazi na smer!
- b) Izračunaj nadomestni upor lestve, izražen z uporom ene prečke, če priključimo napetost med krajišči prve prečke na lestvi. (Namig: zaporedje $x_1 = 1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$ z lastnostjo

$$\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{2 + x_n}$$

se zelo hitro približuje (konvergira) k vrednosti $x = \sqrt{3} - 1$ (domača naloga).)



- c) Pokaži, da je končna hitrost padanja lestve v magnetnem polju neodvisna od dimenzij lestve in preseka žice. Izračunaj končno hitrost. Pri tem lahko (smiselno) uporabiš rezultat, ki si ga dobil pri prejšnjem podvprašanju, ali kako drugače. Težni pospešek je $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- d) Približno oceni, v kolikšnem času lestev praktično doseže končno hitrost in kolikšno pot napravi v tem času, če je na začetku mirovala.

Ciril Dominko

39. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA – Rešitvi izbranih nalog s str. 153

1. Iz n sodnikov lahko naredimo $\binom{n}{2}$ parov sodnikov in ker se v vsakem paru ocene ujemajo pri največ k tekmovalcih, je vseh ujemanj največ $k \binom{n}{2}$.

Označimo z a_i oz. b_i število sodnikov, ki so i -tega tekmovalca ocenili z uspešen oz. neuspešen. (Seveda je $a_i + b_i = n$.) Računajmo

$$\begin{aligned} \binom{a_i}{2} + \binom{b_i}{2} &= \frac{1}{2}(a_i^2 - a_i + b_i^2 - b_i) = \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2 - n) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(a_i + b_i)^2 - n \right) = \frac{1}{4}((n-1)^2 - 1), \end{aligned} \quad (1)$$

kjer smo v oceni (1) upoštevali neenakost med kvadratno in aritmetično sredino. Ker je število n liho, število $\binom{a_i}{2} + \binom{b_i}{2}$ pa celo, lahko zapišemo strožjo oceno

$$\binom{a_i}{2} + \binom{b_i}{2} \geq \frac{1}{4}(n-1)^2.$$

Število ujemanj ocen sodnikov je torej enako $\sum_{i=1}^m \left(\binom{a_i}{2} + \binom{b_i}{2} \right)$ in z upoštevanjem gornjih ocen sledi

$$k \binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^m \left(\binom{a_i}{2} + \binom{b_i}{2} \right) \geq m \cdot \frac{1}{4}(n-1)^2,$$

od koder zlahka izpeljemo željeno oceno.

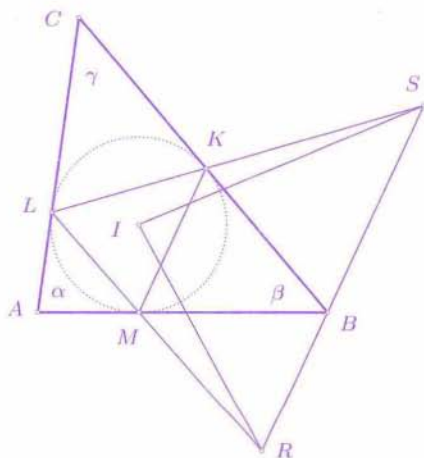
2. Po kosinusnem izreku v trikotniku RIS je

$$\cos \sphericalangle RIS = \frac{|RI|^2 + |SI|^2 - |RS|^2}{2|RI||SI|},$$

zato zadošča dokazati, da je

$$|RI|^2 + |SI|^2 - |RS|^2 > 0. \quad (2)$$

Ker je $BI \perp MK$ in $MK \parallel RS$, je $BI \perp RS$. S pomočjo Pitagorovega izreka izpeljemo

$$\begin{aligned} |RI|^2 + |SI|^2 - |RS|^2 &= \\ &= (|BR|^2 + |BI|^2) + (|BS|^2 + |BI|^2) - (|BR| + |BS|)^2 = \\ &= 2(|BI|^2 - |BR| \cdot |BS|). \end{aligned}$$


Ker je trikotnik MBK enakokrak, je $\sphericalangle BMK = \sphericalangle BKM = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$. Zaradi $MK \parallel RS$ je zato tudi $\sphericalangle MBR = \sphericalangle KBS = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$. Podobno je še $\sphericalangle BMR = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ in $\sphericalangle BKS = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, od koder sledi $\sphericalangle BRM = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ in $\sphericalangle BSK = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Trikotnika BRM in BKS sta si

podobna, zato je

$$\frac{|BR|}{|BM|} = \frac{|BK|}{|BS|},$$

od koder sledi

$$|BR| \cdot |BS| = |BM| \cdot |BK| = |BM|^2.$$

Upoštevajmo slednje v izrazu (2) in dobimo

$$\begin{aligned} |RI|^2 + |SI|^2 - |RS|^2 &= 2(|BI|^2 - |BR| \cdot |BS|) = \\ &= 2(|BI|^2 - |BM|^2) = 2|IM|^2 > 0, \end{aligned}$$

kot je bilo potrebno dokazati.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

26. letnik, šolsko leto 1998/99, številka 4, strani 193 – 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: DMFA – založništvo, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1998/99 je za posamezne naročnike **1.800 SIT**, za skupinska naročila šol **1.500 SIT**, posamezna številka **360 SIT**, za tujino 25 EUR, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometenem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1376

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

