

PRE SEK

26 (1998-1999)

3

ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



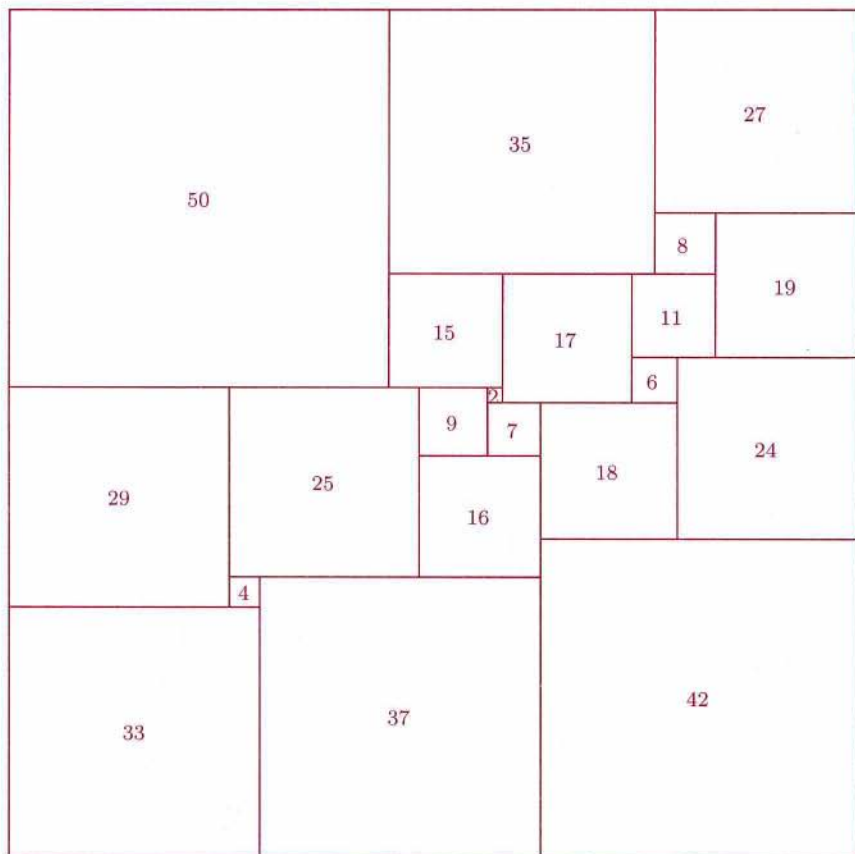
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, leto 1998/99, številka 3, strani 129–192

VSEBINA

MATEMATIKA	Razrez kocke (Tomaž Slivnik ml.)..... 130-132 Dve palici z enakima sencama (Nada Razpet, Danica Mati) 154-156
FIZIKA	Električni tok po kapljevinah (Janez Strnad)..... 138-140
ASTRONOMIJA	O nam najbližji zvezdi, 2. del – Manj znano Sonce (Mirjam Galičič)..... 142-145 Predpes (Marijan Prosén) 162-164
RAČUNALNIŠTVO NALOGE	Logo, sezname in množice (Martin Juvan)..... 146-152 Slana sredi grma (Jože Rakovec)..... 132 Številska igrice za mlade računarje (Marija Vencelj)..... 152 Iz petih kvadratov dva (Marija Vencelj)..... 159 Okroglo in kvadratasto (Martin Juvan) 159 Zanimiva naloga o Predpsu (Marijan Prosén) 165
REŠITVE NALOG	Sestavljanje – s str. 95 (Boštjan Marinšek) 137 Tombola – s str. 102 (Martin Juvan)..... 140-141 Številka križanka – s str. 71 (Marija Vencelj) 164 Križanka "Zlati jubilej DMFA Slovenije" – s str. 96 (Marko Bokalič)..... 165 Nenavadna funkcija – s str. 108 (Martin Juvan) 166-169 Stopnje točk grafov v nalogah – Rešitev portoroške naloge s str. 78 (Sandi Klavžar) 169
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO NOVICE	Mikrotveg (Andrej Likar)..... 133-135 Križanka "Zimski pojavi" (Marko Bokalič)..... 160-161 29. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko) 135 29. fizikalna olimpiada: Skoraj na vrhu sveta (Martin Zadnik) 136-137 39. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko) 153 Poletna šola matematike na Bledu (Klavdija Pintar) 157-159
TEKMOVANJA	Urnik tekmovanj v letu 1999 (Darjo Felda)..... 170-172 33. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje – rešitve s str. 109 (Aleksander Potočnik) 172-174 18. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve s str. 115 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)..... 174-177 Rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1997/98 – s str. 118 (Bojan Golli) 177-184 Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce – rešitve s str. 123 (Matjaž Željko) 185-189 19. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog – rešitve s str. 126 (Aleš Vavpetič) . 189-192
NA OVITKU	Slana sredi grma (foto Jože Rakovec). Preberi tudi vprašanje na str. 132..... I, II Udeleženci poletne šole na Bledu. Glej zapis na str. 157..... II Ilustracija nevtrinskega observatorija Sudbury v Kanadi (k članku na str. 142) III Slovenski olimpijski ekipi na 39. matematični in 29. fizikalni mednarodni olimpiadi. Glej poročila na straneh 135, 136 in 153 ... IV

RAZREZ KOCKE

Kvadrat lahko razrežemo na 21 manjših kvadratov, ki so med sabo vsi različni:



Slika 1.

Ta razrez je leta 1978 našel A. J. W. Duijvestijn, slika pa je vzeta iz knjige B. Bollobás, *Graph Theory, An introductory course*, Springer-Verlag, 1979 (stran 34, slika 1). Dokažemo tudi lahko, da kvadrata ni mogoče razrezati na manj kot 21 neskladnih kvadratov.

V tem prispevku pa bomo pokazali, da se kocke ne da razrezati na manjše kocke, ki bi bile med sabo vse različne.

Pa recimo, da bi bilo to mogoče. Predpostavimo, da je K kocka, razrezana na $n \geq 2$ paroma neskladnih kock $K_1, \dots, K_n$.

Pokazali bomo, da naš razrez vsebuje vsaj $n + 1$ kock. To protislovje bo pokazalo, da tak razrez ne obstaja.

Naj bo L_1 najmanjša med kockami $K_1, \dots, K_n$, ki leži na spodnji ploskvi kocke K .

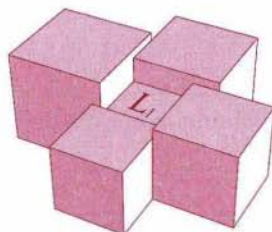
Opazimo, da L_1 ne more biti v kotu kocke K . Recimo, da je. Kocko K zasučimo tako, da L_1 leži v njenem sprednjem levem kotu. Kocka, ki leži na spodnji ploskvi K poleg L_1 na njeni desni strani (njena desna "sosedu"), je večja kot L_1 in zato utesnjuje njeno zadnjo sosedo v prostor, v katerega ne moremo spraviti kocke, večje od L_1 . Toda tudi zadnja sosedu L_1 je večja kot L_1 . To protislovje nas prepriča, da L_1 res ne more biti v kotu kocke K .

Prav tako vidimo, da se L_1 ne more dotikati robov kocke K . Pa predpostavimo, da se dotika enega od robov. K zasučimo tako, da se L_1 dotika njenega sprednjega roba. Vemo, da L_1 ni v kotu in ima zato levo in desno sosedo. Ti sosedi sta obe večji od L_1 in zato utesnjujeta zadnjo sosedo kocke L_1 v prostor, v katerega ne moremo spraviti kocke, večje od L_1 . Toda spet je zadnja sosedu L_1 večja kot L_1 . To protislovje pokaže, da se L_1 res ne more dotikati robov kocke K .

Torej mora spodnja ploskev kocke L_1 v celoti ležati v notranjosti spodnje ploskve K . Ker so vse sosede L_1 večje od nje, je L_1 ograjena s kockami, ki so višje od nje (kot na sliki 2).



pogled od zgoraj



pogled od spodaj

Slika 2. L_1 je ograjena s kockami, ki so večje od nje.

Torej obstaja vsaj ena kocka med $K_1, \dots, K_n$, ki leži nad L_1 . Poleg tega mora biti spodnja ploskev vsake kocke K_i , ki se dotika notranjosti zgornje stranske ploskve L_1 , v celoti vsebovana v zgornji ploskvi L_1 .

Pa naj bo L_2 najmanjša med kockami $K_1, \dots, K_n$, ki leži na zgornji stranski ploskvi L_1 . Kot v primeru razmisleka za L_1 vidimo, da L_2 ne leži ne v kotu ne na robu zgornje ploskve L_1 . Spodnja ploskev L_2 je torej v celoti vsebovana v notranjosti zgornje ploskve L_1 . Ker je L_2 najmanjša kocka, ki leži na zgornji ploskvi L_1 , je tudi L_2 ograjena s kockami, ki ležijo na zgornji ploskvi L_1 in so višje od L_2 .

Zdaj je jasno, kako nadaljujemo: na enak način, kot smo našli L_1 in L_2 , poiščemo še kocke $L_3, \dots, L_{n+1}$. L_{i+1} najdemo kot najmanjšo kocko, ki leži na zgornji ploskvi L_i . Spet vidimo, da leži spodnja ploskev L_{i+1} v celoti v notranjosti zgornje ploskve L_i in da mora biti L_{i+1} ograjena s kockami, ki ležijo na zgornji ploskvi L_i in ki so višje od L_{i+1} ($i = 2, 3, \dots, n$).

Pokazali smo, da med našimi n kockami $K_1, \dots, K_n$ lahko najdemo $n + 1$ različnih kock, ki ležijo ena vrh druge. To protislovje dokazuje, da razrez kocke K na kocke $K_1, \dots, K_n$ sploh ne obstaja.

Torej se kocke res ne da razrezati na končno mnogo manjših kock, ki so med sabo vse različne.

Za konec pa bralcem zastavljam še tri vprašanja:

Vprašanje 1: V našem dokazu smo predpostavili, da morajo biti stranice kock v razrezu kocke na končno mnogo manjših kock vzporedne s stranicami celotne kocke. Ali vidiš, kje smo to predpostavili? Ali je naša predpostavka utemeljena?

Vprašanje 2: Ali znaš kocko razrezati na neskončno mnogo neskladnih kock?

Vprašanje 3: Ali je mogoče enakostranični trikotnik razrezati na končno mnogo neskladnih enakostraničnih trikotnikov?

Tomaž Slivnik ml.

SLANA SREDI GRMA

Z naslovnico tokrat zastavljamo Presekovim bralcem naslednje vprašanje: "Zakaj je slana samo na sredi grma?"

Morda se boste laže dokopali do odgovora, če si ogledate še fotografijo istega grma z nekaj več okolice na II. strani ovitka.

Jože Rakovec

MIKROTVEG

V vsakdanjem življenju je mnogo naključij. Pri tem imamo v mislih dogodek, ki jih nismo predvideli ali pa jih ne moremo predvideti. Naključni dogodek je na primer nedogovorjeno srečanje dveh znancev v tujem mestu; dogodek, da ujamemo mestni avtobus prav v trenutku, ko smo prišli na postajo; da na loteriji zadenemo kak dobitok. Naključni pa so tudi manj prijetni dogodki, kot so razne nevšečnosti in nesreče. Prav slednjim bi se prav radi izognili, a so v veliki meri nenapovedljive.

Kljub nenapovedljivosti pa lahko povemo kaj več o tveganju za določen dogodek. Pri skoku z okna v drugem nadstropju je sicer mogoče, da bomo ostali nepoškodovani, a ni pričakovati, da se bo to res zgodilo. Pravimo, da je tak izid prav malo verjeten. Prav tako je malo verjetno, da nas zadene meteor ali del razpadlega satelita. Ni pa tako malo verjetno, da nas pri neprevidnem prečkanju ceste zadene kako vozilo. Verjetnost lahko opredelimo tudi s številom. Pri tem se spomnimo, kako delajo poskuse fiziki, ki jih zanimajo lastnosti atomskih jeder. Na jedro usmerijo kak delec in pogledajo, če se je pri tem zgodila reakcija. Ta poskus ponavljajo. Največkrat reakcije ni, včasih pa z detektorji zaznajo delce, ki kažejo, da se je zgodila. Če se je pri 1000 poskusih reakcija zgodila petkrat, je verjetnost zanjo kar razmerje $5/1000 = 0,005$. Fiziki seveda ne pošiljajo delcev posamezno, temveč v curku, da merjenje ne traja predolgo.

Verjetnost določamo torej z opazovanjem velikega števila poskusov pri podobnih okoliščinah. Pri tem štejemo število vseh poskusov in število poskusov, pri katerih so se dani dogodki zgodili. Neprevidno prečkanje ceste je torej poskus, dogodek pa je, če nas pri tem zadene avto. Prav tako je poskus celodnevni sprehod v naravi, dogodek pa, denimo, da tedaj vidimo medveda.

Pri oceni verjetnosti za kako nesrečo seveda ne delamo eksperimentov. Zanesemo se na poročila o nesrečah, ki so se že zgodile, in jih razvrščamo v skupine s čim bolj enakimi okoliščinami. To da število dogodkov, število poskusov pa ocenimo iz statističnih podatkov.

Pri vsakdanjih opravilih je pogostost nesreč, pri katerih bi se nam zgodilo kaj hudega, majhna. Verjetnosti so v območju 10^{-6} , se pravi v povprečju 1 dogodek na milijon poskusov. Verjetnosti 10^{-6} bomo rekli mikrotveg. Oglejmo si dejavnosti (torej poskuse), pri katerih je verjetnost, da izgubimo življenje, enaka enemu mikrotvegu:¹

- potovati z vlakom v 2500 km oddaljeni kraj,
- leteti s civilnim letalom na razdalji 2000 km,

¹ Podatki so povzeti iz prispevka Georga Marxa "People and risks" na konferenci Rio Followup v Egru na Madžarskem od 22.–27. avgusta leta 1994.

- potovati na razdalji 80 km z avtobusom,
- voziti se z osebnim avtom na 65 km dolgi poti,
- prekolesariti razdaljo 12 km,
- voziti motor na razdalji 3 km (res je, le treh kilometrov!),
- pokaditi eno cigareto,
- živeti 2 tedna s kadilcem v isti sobi,
- popiti pol litra vina,
- preživeti 10 dni v opečnati hiši in tvegati življenje zaradi radioaktivnega sevanja naravnih radioaktivnih izotopov, predvsem radonovih potomcev,
- tri dni dihati onesnažen zrak velemesta.

Tveganja v področju mikrotvega so za večino ljudi sprejemljiva. Seveda bi se radi tudi tako majhnim tveganjem izognili. Največkrat to ni mogoče, saj tudi prizadevanje, da se dogodku izognemo, ni vedno brez tveganja.

Različni poklici nosijo s seboj različna tveganja. Za delo v trgovini tvegamo 10 mikrotvegov na leto, v tovarni pa 10 do 100 mikrotvegov. Pri transportu je tveganje 400 mikrotvegov na leto, rudarjenje nosi 800 mikrotvegov, gradnja daljnovodov 1200 mikrotvegov letno. Pri črpanju nafte iz morskega dna na velikih globinah tvegamo 1500 mikrotvegov, ribarjenje na odprtem morju z globinskimi mrežami pa pomeni 1800 mikrotvegov letno. Ocenili so, da tvega predsednik ZDA kar nekaj tisoč mikrotvegov letno. Seveda so vsa ta tveganja prav majhna v primerjavi s tveganjem kadilca. Povprečni kadilec pokadi 8000 cigaret letno, kar prinese 8000 mikrotvegov. To je nekajkrat več, kot so tveganja, ki so jim izpostavljeni ljudje v naštetih poklicih. Svetovna tobačna industrija naredi $5 \cdot 10^{12}$ cigaret letno. Naj bralec sam presodi, koliko žrtev terjajo cigarete vsako leto.

Zadnje čase ljudi posebno skrbi tveganje zaradi radioaktivnosti. Vprašanje je zanimivo, saj smo temu sevanju izpostavljeni vsi. Z leti so z mnogimi študijami dognali, da vsakdo letno tvega zaradi naravnega radioaktivnega sevanja v povprečju 100 mikrotvegov. V nekaterih področjih sveta je naravno sevanje še posebno izrazito in je lahko tudi 12-krat večje od navedenega. Posebno skrb vzbuja radioaktivni radon, ki ga je v nekaterih delih sveta precej več kot drugje. Tam so področja, kjer je tveganje zaradi vdihavanja radonovih potomcev tolikšno kot pri kadilcih. Strogi predpisi, ki se jim morajo pokoravati jedrske elektrarne, zagotavljajo, da je dodatno tveganje okoliškega prebivalstva zaradi normalnega obratovanja elektrarne manj kot za 1% povečano glede na tveganje zaradi naravnih virov.

Pri presoji nevarnosti kakega početja se le redki ozirajo na podatke o tveganju, ki so na voljo. Nekdo se panično boji letenja z letalom, brez skrbi pa se vozi z motorjem. Drugega zelo skrbi sevanje, pri tem pa pokadi tudi 12 000 cigaret letno. Spet tretji gradi novo hišo, ker se boji, da je v stari preveč radona. Meritve sicer pokažejo, da je povišanje neznatno, tveganje, da gre kaj hudo narobe pri gradnji, pa nekaj tisočkrat večje od tistega, ki ga prinaša življenje v stari hiši. Kakršnokoli prepričevanje pa ne zaleže. Voda na mlin tovrstnemu presojanju so izkušnje. Podatek o verjetnosti za kak dogodek je sicer dobrodošla podlaga zavarovalnicam, ki imajo opravka z velikim številom ljudi. Pri posameznikih pa gre včasih vse narobe: ponesreči se voznik, ki je na cesti le nekajkrat letno, dobro pa jo odnese trgovski potnik, ki v enem letu prevozi tudi do 100 000 km. Nevarno zbolí znanec, ki je vse življenje živel zgledno, se ukvarjal s športom, jedel le zdravo hrano, nikoli pil alkoholnih pijač ali kadil. Prav dobro pa se počuti sosed, ki kadi kot Turek, se baše z mastno hrano in mesom in je prav redko trezen. Prav take izkušnje si ljudje radi zapomnijo, ker so presenetljive, čeprav niso v nasprotju z načeli verjetnostnega računa. Le pri zelo velikih tveganjih smo nekoliko bolj racionalni: ne zgodi se prav pogosto, da bi voznik z vso hitrostjo zapeljal v križišče pri rdeči luči.

Andrej Likar

29. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Olimpiada je bila od 2. do 10. julija 1998 v Reykjaviku, glavnem mestu Islandije. Sodelovalo je 266 tekmovalcev iz 56 držav, tri države pa so bile prisotne na olimpiadi kot opazovalke.

V slovenski ekipi so bili: Martin Zadnik, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana, Klemen Naveršnik, Matija Mazi, Natan Osterman, vsi iz Gimnazije Bežigrad Ljubljana, in Blaž Zupančič, Šolski center Brežice. Spremljevalca in člana mednarodne komisije sva bila Bojan Golli, Pedagoška fakulteta v Ljubljani, in Ciril Dominko, DMFA Slovenije. Udeležbo na olimpiadi nam je finančno omogočilo Ministrstvo za šolstvo in šport.

Letos je bilo potrebno doseči za zlato medaljo najmanj 42 točk od 50 možnih, za srebrno 36 točk, za bronasto 30 točk in za pohvalo 23 točk. Največ uspeha so imeli kitajski tekmovalci; vseh pet je prejelo zlato medaljo in tudi zmagovalec olimpiade je bil član kitajske ekipe.

Med našimi tekmovalci sta Martin Zadnik in Matija Mazi prejela pohvali, kar nas po uspehu uvršča na sredino vseh sodelujočih držav.

Naslednja, 30. mednarodna fizikalna olimpiada, bo od 18. do 27. julija 1999 v Padovi v Italiji.

Ciril Dominko

29. FIZIKALNA OLIMPIADA: SKORAJ NA VRHU SVETA

Začelo se je drugega julija zjutraj na Brniku, zapletlo pa že istega dne popoldne v Frankfurtu. Na že davno rezerviranem letalu za Islandijo za slovensko sedmerico na lepem ni bilo prostora. Grozilo nam je, da bomo prespali v Frankfurtu, a so našli zvezo za Reykjavik, toda – preko Pariza. Tako smo spoznali še Air France in letališče Charles de Gaulle, kjer mrgoli zajcev. Tam so nas poskušali poslati spet v Frankfurt, a po vseh težavah smo se le znašli na letalu družbe Icelandair in približno ob dveh ponoči pristali na letališču Keflavik. Peljali so nas v Reykjavik in namestili v hotel, spremljevalca v enega, ostalih pet pa v drugega – vse po pravilih. Zjutraj smo šli na uradno otvoritev olimpiade, kjer je naš vodič Áki, študent glasbe, igral trobento, nato pa še na sprejem k županu Reykjavika. Do tedaj smo že spoznali zoprno islandsko vreme, to je nenehen dež in pa veter, ki naredi dežnike neuporabne.

Drugi dan našega bivanja na Islandiji je bilo teoretično tekmovanje. Naloge smo reševali v športni hali Laugardalshöll, kot vedno pet ur. Prva naloga je obravnavala kotaljenje pravilne šeststrane prizme (svinčnika) po klancu, druga obnašanje vode pod ledeno kapo ob vulkanskem izbruhu, tretja pa meritve sevanja radijskih valov sestavljenega izvira iz naše galaksije. Po tekmovanju so nas peljali na ogled črpališča pitne vode, na katero so zaradi neonesnaženosti Islandci izredno ponosni. Zvečer smo šli na večerjo k islandskim družinam, slovenska peterica ravno k družini znanstvenika, strokovnjaka za ledenike, tako da smo se lahko pogovorili o drugi tekmovalni nalogi.

Na Islandiji v juliju sonce sicer zaide, a le za nekaj ur in tik pod obzorje, tako da je vso noč svetlo. Na dan teoretičnega tekmovanja smo ob polnoči opazovali tak zahod in sploh se nam ni mudilo spat. Spali smo vse dni bolj malo, saj se zvečer zaradi sonca ne zaveš, koliko je ura, in je mimogrede polnoč, zjutraj pa je treba vstati, da ne zamudiš tekmovanja ali drugih aktivnosti. Na dan oddiha med reševanjem teoretičnih in eksperimentalnih nalog je bila taka aktivnost za nas vzpon na goro Esja, kjer se da udobno ležati na debelem mahu.

Naslednjega dne je bilo na vrsti eksperimentalno tekmovanje. Eksperimentalno napravo je sestavljalo jedro transformatorja z dvema tuljavama in še manjša merilna tuljava. Merili smo, kako debelina kovinskega lističa, skozi katerega potekajo magnetne silnice, vpliva na zmanjšanje gostote magnetnega polja, nato še induktivnosti tuljav in relativno permeabilnost jedra. Po koncu reševanja smo si šli ogledat obrat za pridobivanje aluminija. Tekmovalci smo s tem svoje opravili in čeprav so bili občutki o

uspešnosti morda nekoliko klavrnji, smo vseeno lažje zadihali. Začela sta se dva dneva aktivnosti, ocenjevalci pa so se tačas seveda "kopali" v kupih papirja.

V torek je bil na vrsti ogled narodnega parka, kjer je prikazan potek tektonske razpoke, ki poteka po dnu Atlantika. Naslednja postaja je bil precej oddaljen ledenik, pot do tja pa poteka po pokrajini, podobni tisti na Luni. Tam smo se v debelih oblekah na odprtem vozilu peljali po ledeniku, kjer se je dežju pridružil še mrzel veter. Na poti nazaj so nas opozorili na rastlinjake ob cesti, kjer gojijo banane. Za ogrevanje izkoriščajo vrele vode. Energije na Islandiji zares ne primanjkuje!

Za sredo smo si izmed dvanajstih ponujenih možnosti izbrali obisk meteorološkega urada in inštituta za zaščito pred sevanjem. Na prvem so nam rekli, da kljub vsem instrumentom za napovedovanje uporabljajo tudi preverjeno metodo, da gredo na balkon in pogledajo v nebo. Na slednjem pa smo dobili občutek, da Slovenija le ni tako majhna država, saj na omenjenem inštitutu dela le pet znanstvenikov in 1,5 (?) tajnice.

Še nekaj besed o hrani. Zaradi predhodnih informacij, ki smo jih dobili o Islandiji, smo pričakovali le izmenjavanje rib in jagnjetine, a z ničemer niso pretiravali. Zajtrk je bil tak kot pri nas. Za kosilo smo imeli na voljo bone in seznam lokalov z raznoliko ponudbo: ponekod severnjaška hrana, enkrat smo jedli celo grško polnjeno pito, morali pa smo poskusiti še McDonald's, saj je njihov hamburger na Islandiji menda najdražji na svetu. Samopostrežna večerja je bila v tekmovalni hali, in sicer ena ali dve topli jedi in množica hladnih prilog in solat.

Predzadnji dan je bila zaključna prireditev z glasbenimi točkami, govori zaslužnih za organizacijo olimpiade in seveda podelitvijo pohval in medalj. Naš izkupiček sta bili dve pohvali. Zvečer je bil organiziran še banket v hotelu bližnjega mesta, ki pa se ni zavlekel pozno v noč, saj nas je v petek zjutraj čakala pot domov. Od nje smo si po izkušnjah izpred tedna dni obetali, da bomo videli vsaj London, če ne že Moskve. A "žal" je šlo vse gladko in smo bili zvečer že doma.

Martin Zadnik

SESTAVLJANKA – Rešitev s str. 95

MATEMATIKA.

Boštjan Marinšek

ELEKTRIČNI TOK PO KAPLJEVINAH

V eni od prejšnjih števil je Presek obravnaval tok elektronov po kovini. Večina vodnikov je res iz kovine, navadno iz bakra, a elektriko prevajajo tudi druge snovi. Najprej pomislimo na tok po kapljevinah.

Čista voda zelo slabo prevaja elektriko. Veliko bolje jo prevaja vodna raztopina kisline, baze ali soli, tako imenovani *elektrolit*. Molekula plina ali kapljavine se ob raztapljanju v vodi razdeli na dva dela, od katerih je eden naelektren pozitivno in drugi negativno, na pozitivni in negativni *ion*. Na take ione se ob raztapljanju v vodi razdeli tudi kristal. Pozitivni in negativni ioni se v raztopini neurejeno prerivajo med molekulami vode in blidijo sem ter tja.

Med elektrodama, na kateri priključimo konstantno napetost, pa električna sila vleče negativne ione proti pozitivni elektrodi in pozitivne ione proti negativni. Zaradi tega se neurejenemu gibanju pridruži potovanje: negativni ioni potujejo proti pozitivni elektrodi, pozitivni pa proti negativni elektrodi. Oboji prispevajo k toku. Ta je v elektrolitu drugačen, kot v kovini, v kateri sodelujejo pri prevajanju samo negativni nosilci naboja. Ko izvir napetosti po elektrolitu požene tok, ioni potujejo, na elektrodah se izločajo snovi. To je *elektroliza*.

Pri kovini smo ugotovili, da je prevodnost, to je obratna vrednost specifičnega upora, tem večja, čim večja je absolutna vrednost naboja nosilca, čim večja je gibljivost nosilcev in čim večja je njihova gostota. Enačbo razumemo, četudi je ne izpeljemo. Ni je težko preoblikovati tako, da velja za elektrolit. Upoštevamo, da sodelujejo pri prevajanju v njem nosilci nabojev obeh znakov. Prevodnost elektrolita je tem večja, čim večji sta absolutni vrednosti naboja obojih nosilcev, čim večji sta gibljivosti obojih nosilcev in čim večja je njihova gostota. Iz enačbe za kovino $1/\zeta = e_0\beta N/V$, v kateri je ζ specifični upor, $1/\zeta$ prevodnost, e_0 osnovni naboj, to je absolutna vrednost naboja elektrona, β gibljivost elektronov in N/V gostota števila elektronov, nastane tako enačba

$$\frac{1}{\zeta} = e_0(\beta^+ + \beta^-) \frac{N}{V}.$$

Pri tem je naboj pozitivnega iona e_0 in naboj negativnega iona $-e_0$. Gostota pozitivnih ionov je enaka gostoti negativnih ionov, ker je elektrolit navzven električno nevtralen. β^+ je gibljivost pozitivnih ionov in β^- gibljivost negativnih ionov. Hitrost negativnih ionov zaradi električne sile ima nasprotno smer kot hitrost pozitivnih ionov. Minus zaradi nasprotni smeri hitrosti in minus zaradi negativnega naboja dasta pri množenju plus, zato imata oba člena v enačbi za prevodnost enak znak.

Smiselno je navesti gostoto ionov za kilomol raztopljene snovi v 1 m^3 . V kilomolu je Avogadrovo število delcev $N_A = 6,0 \cdot 10^{26}$, tako da je v tem primeru produkt osnovnega naboja in števila delcev $e_0 N_A = 9,65 \cdot 10^7 \text{ As} = e_F$. To je Faradayev naboj, ki smo ga že srečali. Prevodnost elektrolita, v katerem je del $\mathcal{M}$ kilomola spojine raztopljen v 1 m^3 , je

$$\frac{1}{\zeta_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}(\beta^+ + \beta^-) \frac{e_F}{V}.$$

Prostornina $V = 1 \text{ m}^3$ v imenovalcu poskrbi za pravo enoto. Enak rezultat dobimo, če namesto s kilomolom na kubični meter računamo z molom na liter: kot je mol tisočkrat manjši od kilomola, je 1 liter, $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$, tisočkrat manjši od 1 m^3 . Prednost računanja s kilomoli ali moli je v tem, da veljajo zapisane enačbe za katerokoli snov. Če želimo pripraviti raztopino, pa moramo povedati, katero snov imamo v mislih in kolikšna je masa njenega kilomola ali mola.

Naredimo račun za kalijev klorid KCl. V preglednici preberemo, da je vsota gibljivosti kalijevega in klorovega iona $1,55 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{Vs}$. S tem podatkom da enačba za prevodnost $0,0015 (\Omega\text{m})^{-1}$, $0,15 (\Omega\text{m})^{-1}$, $15 (\Omega\text{m})^{-1}$, če v 1 m^3 po vrsti raztopimo desettisočino kilomola, stotino kilomola in en kilomol – ali v 1 l desettisočino mola, stotino mola in en mol. Relativna atomska masa kalija je 39,1 in klora 35,5, tako da ima kilomol kalijevega klorida maso 74,6 kg. Desettisočina kilomola kalijevega klorida ima maso 7,46 g, stotina kilomola pa 746 g. Tolikšno maso raztopimo v 1 m^3 vode ali tisočino te mase v 1 l.

Z merjenjem dobijo ustrezne prevodnosti $0,0015 (\Omega\text{m})^{-1}$, $0,147 (\Omega\text{m})^{-1}$, $11,2 (\Omega\text{m})^{-1}$. Pri elektrolitu z majhno gostoto ionov je dal račun pravo prevodnost, pri elektrolitu z večjo gostoto ionov pa je izmerjena prevodnost manjša od izračunane, in to tem bolj, čim večja je gostota ionov. Pojasnilo je hitro pri roki. V elektrolitu z večjo gostoto ionov ioni zaradi svojih nabojev delujejo drug na drugega z električno silo in se motijo. Električna sila med ionoma deluje na večji razdalji kot sila med nenaektrenima molekulama, ki deluje le, če sta molekuli zelo blizu.

Izračunajmo še prevodnost žveplene kisline, če v 1 m^3 raztopimo desettisočino kilomola H_2SO_4 , ki ima maso 98,1 kg, torej 9,8 g. Iz preglednice dobimo $4,45 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{Vs}$ za vsoto gibljivosti iona H^+ in iona SO_4^{--} . Toda člen za pozitivne ione moramo pomnožiti z 2, ker odpadeta na molekulo H_2SO_4 dva iona H^+ , člen za negativne ione pa zato, ker ima ion SO_4^{--} dva negativna osnovna naboja. Tudi ta elektrolit je navzven električno nevtralen. Tako dobimo za prevodnost $0,0086 (\Omega\text{m})^{-1}$. Na splošno velja enačba $1/\zeta_{\mathcal{M}} = z\mathcal{M}(\beta^+ + \beta^-)e_F/V$, če se molekula razdeli na z ionov enega znaka in ima drugi ion z osnovnih nabojev.

Nazadnje izračunajmo še prevodnost čiste vode. Pomagamo si s podatkom, da je del $M = 10^{-7}$ molekul vode razdeljen na iona H^+ in OH^- . Z vsoto gibljivosti za ta iona $5,69 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{Vs}$ dobimo $1/\zeta = 5,5 \cdot 10^{-6} (\Omega\text{m})^{-1}$. To se ujema s podatkom za prevodnost vode pri temperaturi 22°C .

Nazadnje se ne moremo upreti skušnjavi, da bi poskusili oceniti gibljivost iona. To je eden od redkih primerov, ko je mogoča preprosta ocena. V približku opišimo upor pri gibanju iona z viskoznostjo η v zvezni snovi in spreglejmo, da delujejo na ion posamezne molekule vode ob trkih. Z linearnim zakonom upora dobimo $\beta = e_0/6\pi r\eta$, če je r radij iona. Razumljivo se zdi, da je gibljivost iona tem večja, čim manjši je ion in čim manj se kapljevina upira gibanju iona po njej. Z viskoznostjo 10^{-3} kg/ms in radijem iona kalija $1,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ dobimo za gibljivost oceno $6,4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$. Pogled na preglednico pokaže, da to ni slabo.

Ion	β^+	ion	β^-
H^+	$36,23 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$	OH^-	$20,64 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$
Na^+	$5,19 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$	Cl^-	$7,91 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$
K^+	$7,62 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$	SO_4^{--}	$8,29 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$

Gibljivost za nekatere ione v vodni raztopini pri temperaturi 25°C .

Janez Strnad

TOMBOLA – Rešitev s str. 102

Poglejmo najprej, kako zagotovimo, da imamo pri tomboli vedno le enega zmagovalca. Če je vsaka številka od 1 do 9 obkrožena le na eni (ali pa na nobeni) od tablic, potem ne moremo dobiti dveh zmagovalcev. Na tekočem koraku lahko namreč zmaga le igralec, katerega obkrožena številka je bila pravkar izvlečena, tak igralec pa je zaradi predpostavke en sam. Če pa obstaja številka, ki je obkrožena na dveh ali več tablicah, potem lahko dobimo več zmagovalcev. Poglejmo, kako. Brez škode lahko privzamemo, da je večkrat obkrožena številka 1, saj je sklepanje za druge številke povsem enako. Lahko se zgodi, da v prvih šestih žrebanjih izvlečemo številke 4, 5, 6, 7, 8 in 9. Tombola še vedno nima zmagovalca, saj ni izvlečena nobena številka iz prve vrstice, vsaka tablica pa ima obkroženo po eno številko iz te vrstice. Če na naslednjem koraku izvlečemo številko 1, potem tombolo dobijo ravno tisti igralci, ki imajo na tablici obkroženo to številko. Teh igralcev pa je po predpostavki več.

Ugotovili smo torej, da ima tombola vedno le enega zmagovalca natančno tedaj, kadar nobena številka ni obkrožena na dveh ali več tablicah. Ker imamo na tablicah po devet števil, na vsaki tablici pa so obkrožene natanko tri, lahko v tomboli, ki ima vedno le enega zmagovalca, sodelujejo največ trije igralci. Eden od možnih naborov tablic, ki zagotavlja le enega zmagovalca, je prikazan na spodnji sliki.

①	2	3
④	5	6
⑦	8	9

1	②	3
4	⑤	6
7	⑧	9

1	2	③
4	5	⑥
7	8	⑨

Tudi ko želimo število zmagovalcev tombole omejiti na dva, je sklepanje enako kot pri omejevanju na enega zmagovalca. Če nobena številka ni obkrožena več kot dvakrat, bosta zmagovalca kvečjemu dva. Če pa imamo število, ki je obkrožena na treh ali več tablicah, se lahko primeri, da imamo tri ali več zmagovalcev. Ker igramo z 9 številkami, pri čemer je vsaka obkrožena kvečjemu dvakrat, na vsaki tablici pa so obkrožene po tri številke, lahko Martin na zabavo povabi največ $9 \cdot 2/3 = 6$ prijateljev. Tablice lahko pripravi na več načinov. Vzame lahko po dve kopiji vsake od tablic z gornje slike, čeprav taka izbira verjetno ni najboljša, saj z njo dobimo tri pare enakovrednih igralcev. Z malo več truda lahko poiščemo nabore samih različnih tablic. Eden je prikazan tudi na spodnji sliki.

①	2	3
④	5	6
⑦	8	9

①	2	3
4	⑤	6
7	⑧	9

1	2	③
4	5	⑥
7	⑧	9

1	②	3
4	⑤	6
⑦	8	9

1	②	3
4	5	⑥
7	8	⑨

1	2	③
④	5	6
7	8	⑨

Martin Juvan

O NAM NAJBLIŽJI ZVEZDI – 2. del MANJ ZNANO SONCE

Čas je, da končno povemo še kaj o velikih vprašanjih glede Sonca: o Sončevih nevtrinih, visoki temperaturi korone, nastajanju Sončevega vetra, o Sončevem vrtenju in Sončevem dinamiku.

Za velik napredek na področju solarne astronomije v zadnjem času se moramo zahvaliti številnim novim inštrumentom. Posebej pomembni so satelitski teleskopi, ki krožijo v orbitah nad nami in opazujejo Sončevo svetlobo pri tistih valovnih dolžinah, ki jih Zemljina atmosfera absorbira in je zato s površja Zemlje ne moremo zaznati. Tako ultravijolični in rentgenski teleskopi opazujejo zunanje plasti Sončeve atmosfere. Najnovejši in doslej najzmogljivejši helioseizmografski observatorij SOHO smo že omenili v prejšnjem prispevku. Observatoriji za preučevanje najglobljih plasti Sonca pa so, nasprotno, zgrajeni globoko pod Zemljino površino.

Nevtrini s Sonca

Pri jedrskih reakcijah, ki potekajo v Sončevi notranjosti, se sproščajo nevtrini. To so delci, ki potujejo s svetlobno hitrostjo. Še vedno ni jasno, ali so brezmasni ali pa vendarle imajo maso. Po zadnjih rezultatih v eksperimentalni fiziki visokih energij naj bi bila masa nevtrina pod 0.2 elektronskega volta (eV). Za primerjavo: masa elektrona je 511 000 eV.¹ Za nevtrino je značilno, da prepotuje ogromne količine snovi, ne da bi se mu karkoli zgodilo, ne da bi *interagiraj* s snovjo. Predstavljamo si lahko, da se zdi nevtrinu vse prozorno. Večina nevtrinov, ki priletijo v smeri Zemlje, tako le-to prečkajo, kot da bi bila prazen prostor. Le včasih se zgodi, da kateri reagira s kakim atomom. Na osnovi poznavanja takih reakcij gradijo nevtrinske observatorije, ki so zakopani globoko pod zemljo, tako globoko, da naj bi jih mogli doseči le nevtrini. Ti observatoriji so ponavadi ogromni sodi snovi, v kateri se včasih ustavi nevtrino tako, da atomu te snovi izbije elektron. Ocenjujejo, da vsako sekundo vsak kubični centimeter zemeljske snovi prečka 60 milijard Sončevih nevtrinov, od teh jih le zelo malo sproži reakcijo. Na osnovi števila izmerjenih reakcij ocenijo, koliko nevtrinov je šlo mimo neopaženih, oziroma kolikšno je bilo približno število vseh. Rezultati prvih nevtrinskih observatorijev

¹ V jedrski fiziki je navada, da mase delcev podajajo v eV, kar je sicer enota za energijo. Ustrezno maso v kilogramih dobimo tako, da maso v eV, ki jih še pretvorimo v joule (J), delimo s kvadratom svetlobne hitrosti. Če to res storimo npr. za elektron, vidimo, da je njegova masa v kilogramih nepredstavljivo majhna, tako da se nam zdi uporaba enote eV tudi s tega stališča smiselna.

tako kažejo približno pravilno število nevtrinov, če naj bodo jedrske reakcije tisto, kar greje Sonce. Vendar so izmerili le tretjino do polovice predvidenega števila Sončevih nevtrinov. Za to neujemanje se je kot najbolj verjetna pojavila razlaga, da morda nevtrinov še ne razumemo dobro. Vemo, da so nevtrini treh vrst, vsak pripada svojemu *leptonu* (lahkemu delcu): elektronski nevtrino elektronu, muonski nevtrino delcu z imenom *muon* in tauonski nevtrino delcu *tau*. Ker so nevtrini, ki so jih detektirali v dosedanjih nevtrinskih observatorijih, elektronski in ker jih je le približno tretjina pričakovanega števila, predpostavljajo, da nevtrini zmorejo prehajati ali *oscilirati* iz ene vrste v drugo. Tako naj bi na osem in pol minutnem potovanju od Sonca do Zemlje dve tretjini nevtrinov zamenjalo svojo elektronsko identiteto za muonsko ali tauonsko, zaradi česar jih potem nevtrinski detektorji preštejejo približno trikrat premalo. Za odgovor glede pravilnosti te ideje bodo potrebne nove meritve. Trenutno sta v izgradnji dva velika nevtrinska observatorija, eden v Kanadi, drugi pa na Japonskem. Odgovori na vprašanje o nevtrinskih oscilacijah, ki jih bosta morda pomagala najti, bodo ključnega pomena ne le za fiziko Sonca in astrofiziko, ampak tudi za jedrsko fiziko in na sploh za globlje razumevanje narave v celoti.

Temperatura Sončeve korone

Povedali smo že, da je korona najbolj zunanja plast Sončeve atmosfere. Astronome pa, kot piše Kenneth R. Lang v ameriški reviji *Sky & Telescope*, že precej dlje kot vprašanje Sončevih nevtrinov vznemirja vprašanje, kako more biti korona segreta do temperatur nekaj milijonov stopinj Kelvina. Fotosfera, ki je mnogo bližja Sončevi peči, je nekaj stokrat hladnejša, in pričakovali bi, da bo vse hladneje, ko gremo še bolj stran od peči. Zdi se, da neki mehanizem prenaša energijo v korono in jo tam odlaga ter segreva snov v koroni. Kljub pol stoletja raziskovanj pa narava tega mehanizma ostaja neznana. Novih upov vlivajo opazovanja z novjšimi satelitskimi teleskopi, ki opazujejo pri ultravijoličnih in rentgenskih valovnih dolžinah. Na srečo so spektralne črte, ki jih sevajo posamezni atomi ali njihovi ioni, zelo občutljive na temperaturo, pa tudi na gostoto in kemično sestavo snovi. Tako različne črte prihajajo z različnih višin oziroma globlin Sončeve atmosfere. Astronomi se nadejajo, da bodo z natančnim opazovanjem mnogih črt dobili tridimenzionalno sliko temperature, zgradbe snovi in njenega gibanja v Sončevi atmosferi, pa tudi podatke o magnetnih poljih in različnih valovih, ki v snovi prenašajo energijo. Morda bo ob tem koga od raziskovalcev tudi prešinila ideja, kateri od fizikalnih mehanizmov bi lahko bil vzrok za izjemno visoke temperature v koroni.

Sončni veter

Korona se širi v medzvezdni prostor, vedno redkejša je, nudi pa stalen izvor ionizirane snovi, ki se pne v Osončje. Tej snovi pravimo Sončev veter. Na določeni razdalji od Sonca postane namreč njegov gravitacijski privlak prešibek v primeri s tlakom vročega plina in le-ta pobegne v obliki Sončevega vetra. Odnešeno snov nadomesti nova in tako veter neprestano piha. Meritve so pokazale, da ima hitrost odtekajoče snovi v Sončevem vetru dve komponenti, počasno in hitro. Počasna hitrost je okrog 400 kilometrov na sekundo, hitra je dvakrat tolikšna. Počasna komponenta je povezana s temperaturo korone, ni pa jasno, kako pride do hitre. Meritve s satelita Ulysses so pokazale, da snov s hitro komponento hitrosti odteka z bližine Sončevih polov. Sklepajo, da ima pri pospeševanju določeno vlogo magnetno polje. Za natančnejše odgovore pa bo treba počakati na nova opazovanja, veliki upi so spet usmerjeni v satelitski observatorij SOHO.

Vrtenje Sonca

Že več kot tri stoletja astronomi vedo, da se Sončeva fotosfera vrti hitreje ob ekvatorju kot pri večjih (heliografskih) širinah. To je v nasprotju z izkušnjami, kakršne imamo za vrtenje togega telesa, na primer krogle: če leseno kroglo natakemo na os, vpnemo in (enakomerno) zavrtimo, potem pa narišemo pike pri različnih kroglografskih širinah in merimo časovne razmike, v katerih pike pridejo naokrog, vidimo, da so vsi izmerjeni časi ali periode (do merske napake) enaki. Tudi na Zemlji je dan enako dolg od pola preko ekvatorja do drugega pola. Pri Soncu pa je perioda rotacije ob ekvatorju 25 dni, medtem ko se proti poloma daljša, in je pri 40° širine že skoraj za tri dni daljša. S pomočjo novejših helioseizmografskih meritev so ugotovili, da se takšen vzorec vrtenja ohranja vse do dna konvekcijske plasti, kar predstavlja skoraj trideset odstotkov polmera. Pri večjih globinah se hitrost vrtenja ob ekvatorju začne upočasnjevati, proti poloma pa pospeševati! Pri približno polovici premera se obe hitrosti zlagoma poenotita in kaže, da se po premeru notranja polovica Sonca vrti enakomerno, torej kot togo telo. Za tako nenavaden vzorec vrtenja doslej še ni dobre razlage.

Sončev dinamo

Zadnje od vprašanj solarne astronomije, ob katerem se bomo na kratko ustavili, se tiče Sončevega magnetizma. Z magnetizmom v zunanjih plasteh je povezana Sončeva aktivnost. Sončne pege smo že omenili. Kako pa nastane magnetno polje, ki ima svoja pola v paru peg? Sončev plin je

dovolj vroč, da je ioniziran. Elektroni so izbiti iz atomov, tako da imamo proste negativno nabite elektrone in pozitivno nabite ione. Takemu plinu pravimo *plazma*. Plazma je električno prevodna. Če se električni prevodnik giblje preko magnetnega polja, se v njem inducira električni tok. Električni tok ustvarja novo magnetno polje. To se doda prvotnemu. Po drugi strani gibajoče se magnetno polje teži k temu, da bi povleklo prevodnik s seboj. Posledica vsega tega je, da so plini in magnetne silnice med seboj povezani – tako je v vsaki plazmi in tudi na Soncu. Plini drsijo vzdolž magnetnih silnic. Opis njihovega gibanja je zapleten, z njim je, kot že rečeno, povezana nenehna Sončeva aktivnost v obliki peg in izbruhov, ki jih lahko opazujemo tudi z Zemlje. Močni izbruhi sproščajo nakopičeno magnetno energijo, ki je ekvivalentna energiji milijard jedrskih eksplozij in ki dvigne temperaturo področij v velikosti Zemlje za desetine milijonov stopinj. Pojavljanje takšnih izbruhov teče vzporedno s ciklom sončevih peg.

Površinski magnetni pojavi pa izvirajo iz nevidnega notranjega generatorja. V astronomskih učbenikih beremo o t.i. Sončevem dinamumu. Nastajanje elektromagnetnih polj Sonca naj bi bilo podobno kot pridobivanje elektrike v elektrarnah – z vrtenjem dinamama. In kakšen naj bi bil Sončev dinamo? “Dinamo” so vroči krožeči plini globoko v notranjosti Sonca, ki se gibljejo skozi Sončevo magnetno polje, pri tem se generirajo električni tokovi, ki jih spremljajo nova magnetna polja. Ker pri magnetohidrodinamiki, ki natančneje opisuje zgoraj omenjeno, ne gre brez dolgih in težkih enačb, bo bralec, ki bi ga to utegnilo podrobneje zanimati, morda pomislil na študij fizike.

Danes pa se zdi, da model dinamama ni več v skladu z novjšimi opazovanji gibanj plinov znotraj Sonca. Nekateri tako govorijo o krizi v teoriji Sončevega dinamama. Za začasno rešitev so teoretiki Sončev dinamo zato premaknili globlje, v bližino središča, kjer se Sonce vrti enakomerno. Zagotovo vemo le, da je magnetizem, ki se dogaja globoko v notranjosti Sonca, direktno povezan z magnetizmom v površinskih plasteh in tako s Sončevo aktivnostjo. Za podrobnejše razlage o tej povezavi pa čakamo na nove opazovalne podatke, in ko bodo le-ti temeljito ovrednoteni, bodo teoretiki spet morali dopolniti stare modele. Upamo lahko, da bomo kmalu izvedeli, kaj pravzaprav so sončeve pege, ki pa jih dotlej lahko – seveda ob primernih varnostnih ukrepih za zaščito oči – opazujemo kar s šolskim teleskopom.

Mirjam Galičič

LOGO, SEZNAMI IN MNOŽICE

Željava grafika je gotovo najbolj znan in najbolj priljubljen del programskega jezika logo. Uporaba grafike ni zapletena, poznati moramo le nekaj ukazov, prav pa pridejo tudi pomožne spremenljivke in seveda odločitveni stavki ter zanke. Zelo zanimive risbe lahko narišemo tudi z uporabo rekurzije. Nekoliko manj znan in tudi nekoliko zahtevnejši del loga pa so sezname. Ti sodijo v tisti del loga, ki se močno navezuje na programski jezik lisp (**list processing**; list je angleška beseda za seznam).

Seznami v logu nastopajo zelo pogosto in so poleg števil in nizov znakov osnovni v logu vgrajeni podatkovni tip. Srečamo jih tudi kot parametre pri vgrajenih ukazih. Tako ima ukaz **REPEAT** dva parametra: prvi je številska vrednost; ta pove, kolikokrat se ponovijo ukazi iz seznama, ki je drugi parameter.

V nadaljevanju bomo spoznali osnovne ukaze za delo s sezname, za vajo pa bomo v narečju MSWlogo¹ sprogramirali nekaj ukazov za delo z množicami. Množice bomo predstavili s sezname, v katerih bodo naštet elementi množic. Na primer, množico $\{1, 2\}$ bomo predstavili s seznamom `[1 2]`, morda pa tudi s seznamom `[2 1]`, saj vrstni red, v katerem naštejemo elemente množice, ni pomemben.

Za začetek napišimo ukaz, s katerim bomo za dano število n zgradili množico, ki vsebuje števila od 1 do n . Program bomo zasnovali klasično. Uporabili bomo pomožno spremenljivko. To v logu uvedemo z ukazom **LOCAL**. Njena začetna vrednost bo prazen seznam `[]`. Nato v zanki **REPEAT**, ki jo ponovimo n -krat, na konec seznama, ki je shranjen v pomožni spremenljivki, z ukazom **LPUT** ("last put") po vrsti dodamo števila $1, 2, \dots, n$.

```
TO seznam :n
; Zgradi seznam števil od 1 do n. Varianta z zanko.
  LOCAL "s
  MAKE "s []
  REPEAT :n [MAKE "s LPUT REPCOUNT :s]
  OP :s
END
```

Ukaz **REPCOUNT** vrne število, ki pove, v kateri ponovitvi zanke **REPEAT** smo. Ukaz **LPUT** svoj prvi argument, ta je v našem primeru število, ki ga vrne **REPCOUNT**, postavi na konec seznama, ki je drugi argument, in kot rezultat vrne povečani seznam. S povečanim seznamom je treba v programu nekaj storiti, sicer bo logov tolmač javil napako. Tako ga z ukazom **MAKE** zopet shranimo v spremenljivko `s`.

Kako se obnaša napisani ukaz, lahko poskusimo na primer s `SHOW seznam 7` ali pa s `SHOW seznam 2 * 5`.

Napisani ukaz `seznam` je precej omejen. Dopolnimo ga tako, da bo tudi spodnja meja seznama, ki ga želimo zgraditi, spremenljiva.

```
TO seznam :m :n
; Zgradi seznam števil od m do n. Rekurzivna izvedba.
  IF :m > :n [OP []] ;Baza rekurzije.
  OP FPUT :m (seznam :m + 1 :n)
END
```

Tokrat smo ukaz napisali rekurzivno. Rekurzija je programerski prijem, ki nam velikokrat olajša programiranje in poenostavi rešitev, hkrati pa jo naredi bolj pregledno. Pri rekurzivnem programiranju vedno potrebujemo ustavitveni pogoj (osnovo rekurzije), to je primer, ko ukaz ne pokliče samega sebe, temveč vrne neko znano vrednost ali pa opravi neko določeno opravilo. V našem programu rekurzivni klic ni potreben tedaj, ko je spodnja meja večja od zgornje (to preverimo z ukazom `IF`). Če pa spodnja meja še ni večja od zgornje, seznam števil od m do n zgradimo tako, da rekurzivno (z istim ukazom, le s spremenjenim prvim argumentom) zgradimo seznam števil od $m + 1$ do n , v ta seznam pa nato na začetek z ukazom `FPUT` dodamo še število m . Pri vsakem rekurzivnem klicu se tako razlika med drugim in prvim argumentom zmanjša za ena, kar zagotavlja, da se rekurzija res izteče. Ukaz `FPUT` ("first put") deluje enako kot ukaz `LPUT`, le da element doda na začetek in ne na konec seznama.

Spomnimo se, da je množica podmnožica druge množice, če je vsak element prve množice tudi element druge množice. Sestavimo ukaz v logu, ki bo ugotovil, ali je prva množica podmnožica druge.

```
TO podmnozica :a :b
; Ali je vsak element iz a tudi v b? Rekurzivna varianta.
  IF EMPTYP :a [OP "TRUE"] ;Prazna množica je vedno podmnožica.
  IF NOT MEMBERP (FIRST :a) :b [OP "FALSE"] ;Ni podmnožica.
  OP podmnozica (BF :a) :b
END
```

Tudi tokrat smo ukaz napisali rekurzivno. Za konec rekurzije imamo dve možnosti. Prazna množica je podmnožica vsake množice. Ali je seznam prazen, ugotovimo z ukazom `EMPTYP`. Kadar prva množica ni prazna, pogledamo, ali je njen prvi element vsebovan tudi v drugi množici. Do prvega elementa seznama pridemo z ukazom `FIRST`. Ali ta element pripada seznamu, ugotovimo z ukazom `MEMBERP`. Ukazi, ki se končajo s črko `P`, vračajo niz znakov, ki predstavlja logično vrednost (`TRUE` – resnično ali

FALSE – lažno). Z negacijo NOT, ki jo najpogosteje uporabljamo v logičnih pogojih, spremenimo vrednost TRUE v FALSE in obratno. Do rekurzivnega klica pride, kadar je prvi element prve množice tudi element druge množice. Tedaj moramo preveriti, ali je prva množica brez prvega elementa podmnožica druge množice. To storimo z rekurzivnim klicem, pri katerem za prvi argument uporabimo prvo množico brez prvega elementa (seznam brez prvega elementa vrne ukaz BF – “but first”). Pri vsakem rekurzivnem klicu se tako dolžina prvega argumenta zmanjša za ena, kar zopet zagotavlja, da se rekurzija res konča.

Seznama [1 2] in [2 1] nista enaka (kot seznama), predstavljata pa isto množico. Za ugotavljanje enakosti množic torej ne moremo uporabiti v logo vgrajenega operatorja =, ampak moramo sprogramirati svoj ukaz. To pa ni težko, saj sta množici enaki natanko tedaj, kadar je prva podmnožica druge in hkrati druga podmnožica prve.

```
TO enaki :a :b
; Ali imata seznama enake elemente?
OP AND podmnozica :a :b podmnozica :b :a
END
```

Preizkusimo ukaze, ki smo jih sprogramirali. Če se nismo zmotili, klic

```
enaki (seznam 10 20) (REVERSE seznam 10 20)
```

vrne vrednost resnično. Pri tem je REVERSE ukaz, ki vrne seznam z zamenjanim vrstnim redom elementov. Na primer, klic REVERSE [a b c] vrne seznam [c b a]. Okrogli oklepaji okoli argumentov ukaza enaki sicer niso nujno potrebni, povečajo po čitljivost izraza.

Sedaj pa je že čas, da se lotimo (vsaj na prvi pogled) nekoliko zahtevnejše naloge. Sestavili bomo ukaz, ki izračuna presek dveh množic. Tudi tokrat je osnovna ideja rešitve preprosta. Sprehodimo se po prvi množici in na vsakem koraku za tekoči element pogledamo, ali je tudi v drugi množici ali ne. Če ni, ga le preskočimo, sicer pa ga postavimo v rezultat. Sprehod skozi prvo množico bomo zopet napisali rekurzivno.

```
TO presek :a :b
; Izračuna presek množic a in b. Rekurzivna varianta.
IF EMPTY? :a [OP :a] ;Baza rekurzije. Konec pregleda prve množice.
;Prvi element iz a ni v preseku.
IF NOT MEMBERP (FIRST :a) :b [OP presek BF :a :b]
;Prvi element iz a je v preseku.
OP FPUT (FIRST :a) (presek BF :a :b)
END
```

Naslednji problem, ki se ga bomo lotili, je izračun kartezičnega produkta para množic. Ta je definiran kot množica vseh urejenih parov, pri katerih je prva komponenta para iz prve, druga pa iz druge množice:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Domenimo se, da bomo urejeni par (a, b) v logu predstavili kot navadno množico z elementoma a in b , pazili bomo le, da bo a v paru naveden pred b , torej $[a \ b]$. Napisati torej želimo ukaz, ki bo deloval nekako takole: klic

```
kartezicni [a b c] [1 2]
```

naj vrne

```
[[a 1] [a 2] [b 1] [b 2] [c 1] [c 2]].
```

Rešitev bomo tokrat napisali klasično, z uporabo dveh vgnezenih zank REPEAT. S prvo se sprehodimo skozi prvo množico, pri izbranem elementu x iz prve množice pa v drugi zanki zgradimo vse pare, ki kot prvo komponento vsebujejo element x .

```
TO kartezicni :a :b
; Izračuna kartezični produkt množic a in b. Iterativna varianta.
LOCAL "s ;Pomožna spremenljivka za kartezični produkt.
(LLOCAL "x "y) ;Komponenti urejenega para.
MAKE "s []
REPEAT COUNT :a [
  MAKE "x ITEM REPCOUNT :a
  ;Naredimo vse pare, ki imajo x za prvo komponento.
  REPEAT COUNT :b [
    MAKE "y ITEM REPCOUNT :b
    MAKE "s LPUT (LIST :x :y) :s
  ]
]
OP :s
END
```

V rešitvi smo uporabili nekaj ukazov, ki jih doslej še nismo srečali. Tako ukaz COUNT vrne število elementov seznama. Z ukazom ITEM dobimo izbrani element seznama; klic ITEM :i :s vrne i-ti element seznama s. Če želimo sestaviti seznam, ki bo kot elementa vseboval vrednosti spremenljivk x in y, ne smemo zapisati [:x :y]. Logov tolmač namreč izrazov znotraj seznamov ne ovrednoti, tako da se :x in :y ne bosta nadomestila z ustreznima vrednostma. Uporabiti moramo ukaz LIST, da se argumenti

najprej ovrednotijo, nato pa ukaz iz njih sestavi seznam. Ukaz ima lahko tudi samo enega ali več kot dva argumenta. Pri taki uporabi moramo celoto obvezno obdati z okroglimi oklepaji.

Če ste pozorno pregledali ukaz **kartezicni**, potem ste gotovo opazili, da pomožne spremenljivke *y* pravzaprav ne potrebujemo. Za vajo lahko tako poskusite napisati varianto ukaza, ki bo uporabljala le eno pomožno spremenljivko. Naj vam namignem, da je treba gorjajo različico spremeniti le na treh mestih.

Naš zadnji program bo izračunal potenčno množico dane množice. Spomnimo se, da je potenčna množica množice *A* sestavljena iz vseh podmnožic množice *A*:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Ukaz v logu naj bi torej deloval nekako takole: klic

```
potencna [a b c]
```

naj vrne

```
[[[] [a] [b] [a b] [c] [a c] [b c] [a b c]]].
```

Pri programiranju bomo spet uporabili rekurzijo. Ideja je takale. Če je vhodna množica *A* prazna, potem ima njena potenčna množica en element, prazno množico (to bo osnova rekurzije). Sicer pa vzamemo $a \in A$. Množice v $\mathcal{P}(A)$ so dveh vrst: tiste, ki vsebujejo *a*, in tiste, ki elementa *a* ne vsebujejo. Če poiščemo tiste, ki ne vsebujejo *a* (to so ravno množice iz $\mathcal{P}(A \setminus \{a\})$, te pa lahko dobimo z rekurzivnim klicem), nato pa vsako od njih "podvojimo" (naredimo še eno kopijo, ki ji dodamo *a*), dobimo ravno potenčno množico množice *A*.

```
TO potencna :a
```

```
; Določi potenčno množico množice a. Rekurzivna varianta.
```

```
IF EMPTYP :a [OP [[]]] ;Potenčna množica prazne množice.
```

```
OP SE (potencna BL :a) (razsiri (LAST :a) (potencna BL :a))
```

```
END
```

```
TO razsiri :x :s
```

```
; Na konec vsakega elementa iz s doda x in vrne seznam razširjenih
```

```
; seznamov. Npr. razsiri 1 [[a] [b] [a b]] --> [[a 1] [b 1] [a b 1]].
```

```
IF EMPTYP :s [OP :s]
```

```
OP FPUT (LPUT :x FIRST :s) (razsiri :x BF :s)
```

```
END
```

V programu je uporabljenih tudi nekaj novih ukazov. Ukaza **LAST** in **BL** ("but last") delujeta podobno kot ukaza **FIRST** in **BF**, le da učinkujeta

na koncu in ne na začetku seznama. Delovanje ukaza SE (to je okrajšava za ukaz SENTENCE) je nekoliko bolj zapleteno. Če so argumenti sezname, potem ukaz vrne seznam, ki ga dobi z združitvijo argumentov. Argumente, ki niso sezname, ukaz obravnava kot enoelementne sezname. Na primer, ukazi

(SE [a] [b] [c]), SE 1 2 in (SE [1 2] 3 [] [[4]])

vrnejo

[a b c], [1 2] in [1 2 3 [4]].

Ponovimo, katere ukaze za delo s sezname smo spoznali. Prvi element seznama vrne ukaz FIRST, zadnji element seznama pa dobimo z ukazom LAST. Seznam brez prvega elementa vrne ukaz BF, seznam brez zadnjega elementa pa ukaz BL. Če katerega od ukazov FIRST, LAST, BF, BL uporabimo na praznem seznamu, pride do napake med izvajanjem. Ali je seznam prazen, ugotovimo z ukazom EMPTYP. Sezname povečujemo z ukazoma FPUT in LPUT. Prvi doda element na začetek, drugi pa na konec seznama. Koliko elementov ima seznam, nam pove ukaz COUNT. Z ukazom MEMBERP ugotovimo, ali je izbrani objekt element seznama, z ukazom REVERSE pa obrnemo vrstni red elementov v seznamu. Do elementa na izbranem mestu pridemo z ukazom ITEM. Sezname gradimo z ukazoma LIST in SENTENCE. Našteti ukazi (razen ukaza REVERSE) so standardni in jih poznajo praktično vsa narečja loga. Omenimo še, da večina zgoraj naštetih ukazov smiselno deluje tudi na številih in nizih znakov.

Za konec dodajmo še nekaj nalog za nadaljnje delo:

1. Če prvi ukaz **seznam** pokličemo z negativnim številom, npr. **seznam -3**, pride do napake med izvajanjem. Ukaz **REPEAT** namreč kot prvi parameter zahteva nenegativno število. Spremenite ukaz tako, da bo takrat, ko bo argument negativen, vrnil seznam števil od -1 do vrednosti argumenta. Primer: klic **seznam -3** naj vrne $[-1 -2 -3]$.
2. Omenili smo že, da isto množico lahko predstavimo z različnimi sezname. Zamenjamo lahko vrstni red elementov, pa tudi nekateri elementi se v seznamu lahko ponovijo. Na primer, vsi sezname $[1\ 2]$, $[2\ 1]$ in $[1\ 2\ 2\ 1]$ predstavljajo isto množico (tudi ukaz **enaki**, ki smo ga napisali, jih med seboj ne loči). Sprogramirajte ukaz **poenostavi**, ki vzame seznam in iz njega izloči večkratne pojavitve elementov; npr. **poenostavi [1 2 3 1 2]** naj vrne $[1\ 2\ 3]$.
3. S pomočjo ukaza **poenostavi** iz prejšnje naloge in ukaza **COUNT** sestavite ukaz **moc**, ki vrne moč množice, ki jo predstavlja seznam. Na primer, klic **moc [1 2 3 1 2]** mora vrniti 3.

4. Uporabite ukaz **poenostavi** iz druge naloge ter ukaz **SENTENCE** in sestavite ukaz **unija**, ki poišče unijo dveh množic. Pri tem naj bo unija predstavljena s seznamom, v katerem ne bo večkratnih pojavitev elementov.
5. V teoriji množic urejeni par (x, y) običajno definiramo kot množico $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Spremenite ukaz **kartezični** tako, da bo elemente kartezičnega produkta vrnil v taki obliki. Tako naj klic z argumentoma `[a b]` in `[1 2]` vrne seznam

`[[[a][a 1]] [[a][a 2]] [[b][b 1]] [[b][b 2]]]`.

6. Ukaz **potencna** razvrsti elemente seznama, ki predstavlja potenčno množico, tako, da so v prvi polovici tisti, ki ne vsebujejo zadnjega elementa, v drugi polovici pa tisti, ki ga vsebujejo. Spremenite ukaz tako, da bodo elementi potenčne množice razvrščeni po moči, pri enaki moči pa na enak način kot doslej. Na primer, klic z argumentom `[a b c]` naj vrne

`[[[] [a] [b] [c] [a b] [a c] [b c] [a b c]]]`.

7. Celotno skupino ukazov za delo z množicami bi lahko zasnovali tudi drugače. Vsako množico bi predstavili v "kanonski" obliki z urejenim seznamom brez ponovitev elementov. Pri taki predstavitvi se nekatere operacije nad množicami poenostavijo oziroma jih lahko sprogramiramo bolj učinkovito. Na primer, enakost množic lahko preverimo kar z vgrajenim operatorjem `=`. Poskusite sestaviti ukaze, ki bodo delali s tako predstavljenimi množicami. Seveda morate paziti, da bodo rezultati, ki jih vračajo ukazi, spet v "kanonski" obliki.

Martin Juvan

ŠTEVILSKA IGRICA ZA MLADE RAČUNARJE

Ana je Miha spet spravila v zadrego z računsko igro. Dala mu je naslednja navodila:

"Izmisli si poljubno število in ga pomnoži z 2. Produktu prištej 3, dobljeno vsoto pomnoži s 5 in od rezultata odštej 11. Če mi poveš, koliko si dobil, ti **tako** povem, katero število si si na začetku izmisliš."

Miha ne čudi, da zna Ana poiskati začetno število. Navsezadnje je potrebno samo ves račun izpeljati v 'obratni smeri'. Toda, kako ji to tako hitro uspe?

Mu znate pojasniti?

Marija Vencelj

39. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Da je bilo tekmovalcem na matematični olimpiadi vedno vroče vsaj dva dni, je vsem jasno. Da pa je bilo na zadnji olimpiadi tekmovalcem vroče kar dva tedna, postane vsem jasno, ko razkrijemo prizorišče: Tajvan ali *Formoza*, kot so ta tropski otok poetično poimenovali portugalski pomorščaki.

Slovensko ekipo so sestavljali tekmovalci Dušan Jan iz Gimnazije Tolmin, Jure Kališnik iz ŠC Celje – Gimnazije Lava, Martin Milanič iz Gimnazije Koper, Ajda Skarlovnik in Tadej Starčič iz Gimnazije Bežigrad in Matjaž Titan iz Gimnazije Murska Sobota, član mednarodne tekmovalne komisije Darjo Felda in uradni opazovalec Gregor Dolinar s Fakultete za elektrotehniko ter vodja ekipe Matjaž Željko s Fakultete za matematiko in fiziko. Ekipa je prispela v Taipei nekaj dni pred tekmovanjem. Čas smo porabili za prilagoditev na tropsko klimo in na šest ur časovnega premika. Najbolj pestro je bilo 15. in 16. julija, ko so se tekmovalci spoprijeli z nalogami, med katerim sta bili tudi naslednji dve:

1. Na nekem tekmovanju je sodelovalo m tekmovalcev in n sodnikov, kjer je $n \geq 3$ liho število. Vsak sodnik je ocenil vsakega tekmovalca bodisi z *uspešen* bodisi z *neuspešen*. Naj bo k tako število, da se za vsaka dva sodnika njune ocene ujemajo pri največ k tekmovalcih. Dokaži, da je

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}.$$

2. Naj bo I središče trikotniku ABC vrtane krožnice. Včrtana krožnica se dotika stranic BC , CA in AB zaporedoma v točkah K , L in M . Vzporednica k premici MK skozi točko B seka premici LM in LK zaporedoma v točkah R in S . Dokaži, da je kot $\sphericalangle RIS$ oster.

Po tekmovanju so si tekmovalci ogledali še nekaj lokalnih znamenitosti in preživeli manjši potres v osrednjem delu otoka.

Na matematični olimpiadi je naša ekipa uspešno sodelovala, saj je Tadej Starčič osvojil bronasto medaljo, Ajda Skarlovnik in Matjaž Titan pa sta prejela pohvali.

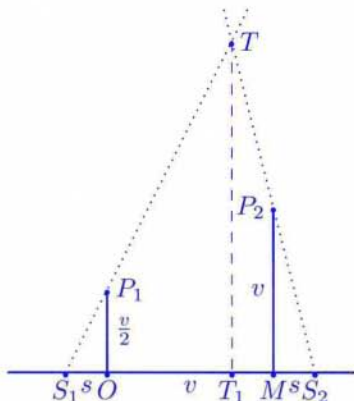
Zahvala za uspehe naših olimpijcev in tekmovalcev na drugih tekmovalnih gre predvsem učiteljem-mentorjem, ki mladim nadobudnežem pomagajo pri spoznavanju matematike, nastop na olimpiadi pa so v veliki meri omogočili Ministrstvo za šolstvo in šport, Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter sponzorji Hermes Softlab iz Ljubljane in Mura ter Modna kravata Gjergjek iz Murske Sobote.

Matjaž Željko

DVE PALICI Z ENAKIMA SENCAMA

Se spominjate stare taborniške naloge o merjenju višine droga? Glasi se takole: Imamo pokonci postavljen drog za zastavo, palico in merilni trak. Zmaga tisti, ki najhitreje izmeri dolžino droga. Prebrisani novinec postavi pokonci palico, zaznamuje, kje je 1 m nad zemljo, izmeri dolžino sence tega dela palice in dolžino sence droga ter hitro izračuna dolžino droga.

Ali vedno različno dolge navpične palice mečejo različno dolge sence? Odgovor je pritrdilen le, če merimo dolžine sence takrat, ko so svetlobni žarki, ki padajo na palice, med seboj vzporedni (in je podlaga seveda vodoravna). To je takrat, ko je svetilo zelo daleč, oziroma, če je svetilo Sonce. Kaj pa, če svetilo ni daleč stran? Poglejmo si naslednjo nalogo (slika 1).



Slika 1.

Dve palici zabodemo navpično v zemljo tako, da ima prva višino v in druga višino $v/2$ ter da sta v razdalji v . Če je podlaga vodoravna, lahko opazujemo senci, ki ju mečeta palici. Kam moramo v ravnini palic postaviti svetilo, da bosta senci na nasprotnih straneh palic in da bosta enako dolgi?

Narišimo skico in opazujmo, po kakšni krivulji se giblje točka T , v kateri je svetilo, ko se dolžini senc (s) daljšata (krajšata).

Nalogo lahko rešimo vsaj na dva načina.

Prvi način

Koordinatni sistem izberemo tako, da je os x kar na podlagi, os y pa vzdolž krajše palice. Pri oznakah kot na sliki, leži točka T na presečišču premice $p(S_1, P_1)$ in premice $p(S_2, P_2)$.

Iz enačb teh dveh premic

$$y = \frac{v}{2s}(x + s)$$

$$y = -\frac{v}{s}(x - v - s)$$

izločimo parameter s in dobimo enačbo krivulje, po kateri se giblje točka T (oziroma naše svetilo):

$$y = \frac{v(2x - v)}{3x - 2v}.$$

To je enačba enakoose hiperbole, ki ima asimptoti

$$x = \frac{2}{3}v \quad \text{in} \quad y = \frac{2}{3}v.$$

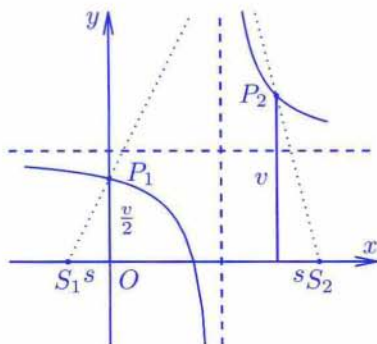
Ali točka T opiše vso hiperbolo? Poglejmo na poskus s praktičnega stališča. Svetilka mora biti višje kot zgornja konca palic, torej $y > v$, in med podaljškoma obeh palic ($0 < x < v$), saj sicer ne bi mogli dobiti senc na nasprotnih straneh. To pomeni, da je

$$\frac{v(2x - v)}{3x - 2v} > v \quad \text{in} \quad \frac{v - x}{3x - 2v} > 0.$$

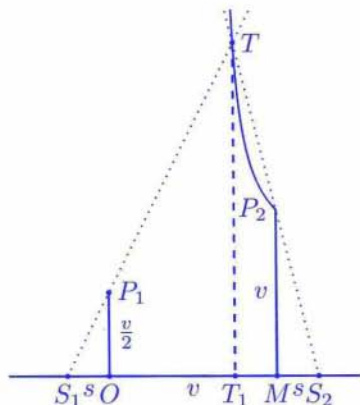
Ker je $0 < x < v$, mora biti $3x - 2v > 0$ in končno

$$\frac{2}{3}v < x < v.$$

To pa pomeni, da je krivulja, po kateri se giblje svetilo, le del desne veje hiperbole, kot kaže slika 3, seveda brez točke P_2 , ki je teme desne veje hiperbole.



Slika 2.



Slika 3.

Drugi način

Obdržimo koordinatni sistem tak, kot je bil v prvem primeru, in izberimo dolžino v za enoto. Na sliki 1 opazimo podobne trikotnike:

$$\begin{aligned} \triangle TT_1S_1 &\sim \triangle P_1OS_1 \\ \triangle TT_1S_2 &\sim \triangle P_2MS_2. \end{aligned}$$

Iz primerjav dolžin stranic sledi:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x+s} &= \frac{1}{2s} \\ \frac{y}{1-x+s} &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Enačbi preuredimo:

$$\begin{aligned} 2sy &= x+s \\ sy &= 1-x+s \end{aligned}$$

in izrazimo s (dolžino sence) z x in $\frac{1}{s}$ z y :

$$\begin{aligned} s &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{s} &= 3\left(y - \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}.$$

Faktorja na desni strani dobljene enačbe sta pozitivna (enaka sta $\frac{s}{3}$ in $\frac{1}{3s}$, kjer je s dolžina sence) in sta zato razdalji točke T od premic $x = \frac{2}{3}$ in $y = \frac{2}{3}$. Enačba pove, da je produkt teh razdalj konstanten, ne glede na izbor točke T . Krivulja, ki ima lastnost, da je produkt razdalj poljubne njene točke od dveh premic (asimptot) konstanten, je hiperbola. Upoštevati moramo le tisti del hiperbole, kjer sta izraza $x - \frac{2}{3}$ in $y - \frac{2}{3}$ pozitivna in ki leži med obema palicama.

Nada Razpet, Danica Mati

Vprašanje za bralce: Ali je odgovor bistveno drugačen, če sta palici poljubnih dolžin in na poljubni oddaljenosti druga od druge?

POLETNA ŠOLA MATEMATIKE NA BLEDU

Na poletni šoli matematike so se zbrali najboljši matematiki – bivši osmošolci. To so tisti, ki so osvojili vse možne točke na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. "Tabor" je pripravilo DMFA.

Izpis iz dnevnika šole:

Naše prvo srečanje je bilo na avtobusni postaji Ljubljana. Sledila je kratka predstavitev: Matic Glavan, Aleš Frece, Tonček Gradišek, Mojca Lakner, Matija Perne, Tjaša Stepišnik Perdih, Ana Šinkovec in še naša vodja Klavdija Pintar.

Ko smo se vsi drug drugega dobro nagledali, je počasi stekel tudi pogovor. Naši jezički so se na poti proti Bledu vse bolj razvezali.

Letos smo vsi končali osmi razred in zato je bila prva tema valeta. Se strinjate z mano, da o tem lahko govoriš več ur?

Na Bledu smo si najprej podrobno ogledali Plemljevo vilo, nato izbrali apartmaje, oblikovali urnik za ves teden, se pogovorili o urniku, ki nam ga je pripravil gospod Potočnik, ter se domenili o nalogah, ki naj bi jih posamezni član opravljal. Mene je doletela funkcija pisanja dnevnika (Ana).

Pogledat nas je prišla tudi svetovalka z Zavoda za šolstvo, Francka Urbanija Vencelj. Z nami je posedela dve uri, predložila nam je tudi neka idej za preživljanje prostega časa.

Da pa nismo ostali lačni, so nas gostili v restavraciji hotela Kompas. Tako je bil prvi dan zaključen.

Naslednji dan nas je neusmiljena Klavdija vrgla iz postelje že ob sedmih. Vsi zaspani smo tavalili od kopalnice do spalnice. Tudi na samopostrežnem zajtrku smo komaj odpirali usta. Ob devetih sta nam prišla predavat prof. dr. Marko Razpet in njegova žena prof. Nada Razpet.

Zelo zanimivo sta nam razložila delovanje računalniškega programa Cabri. Pred računalniki smo sicer presedeli le polnih šest ur, vendar smo spoznali veliko novosti. Risali smo hiperbole, elipse, parabole, strrafoide ter spoznali pravila dinamične geometrije. Smejali smo se ob risanju Pascalovega polža, možgane pa nam je kravžljaj tudi pravilni petkotnik.

Načrti za popoldne so nam zaradi dežja padli v vodo. V jezero bi padli tudi sami, če bi šli v najhujšem nalivu veslat na Blejski otok. Namesto tega smo šli raje peš okoli jezera in na grad.

Ker nismo bili dovolj utrujeni, smo do poznih ur igrali karte.

Naslednjega dne smo poslušali predavanje o matematičnem modeliranju mag. Zlatana Magajne.

Izračunali smo odboj žogice ter prostornino diedra. Najbolj pa so nas pritegnili detektivski problemi.

Podala vam bom primer naloge: Neki detektiv je s prisluškovanjem ugotovil, da je osumljenec pri hoji napravil 120 korakov v minuti. Naj se sliši še tako neumno, pa vendar je moč iz tega podatka ugotoviti številko osumljenčevega čevlja. Čeprav smo ob nalogi zmajevali z glavo, smo se vseeno lotili dela. Po dolgem premišljevanju ter ob modelu hoje smo le prišli na pravo pot. Za nevedne naj povem: model hoje je neka formula, ki pomaga pri izračunu dolžine noge in koraka. Ne bom je pisala, če pa koga res zanima, se naj pozanima pri Klavdiji.

Sedaj razumete, kako lahko paleontologi izračunajo velikost in hitrost dinosavra, če odkrijejo ohranjeno stopinjo le-tega. Na koncu smo se poigrali tudi z zlaganjem pravilnega osemkotnika in šestkotnika. Vse smo podprli še z računi, kar bi storili tudi čistokrvni matematiki.

Popoldne smo šli veslat na jezero. Sredi vračanja nas je presenetil dež. Malo smo bili mokri, pa kaj zato. Zabavali smo se in to je važno!

Zvečer smo izdelovali plakat, ki je prikazoval naše delo. Tonček pa je tudi napisal kratek članek o našem taboru za internet.

Četrty dan nam je predaval gospod Aleksander Potočnik, organizator te poletne šole. Za odlično pripravo se mu lepo zahvaljujemo. Srečali smo se s pravo teoretično matematiko. Računali smo sisteme linearnih enačb z več neznankami. Pomagali pa smo si z matrikami.

Popoldne smo pešali v Vintgar. Sonce je pripekalo, mi pa smo se potili ob nošenju nahrbtnika, v katerem so bili dežniki. "Ziher" je le "ziher".

Zadnji dan pouka nam je predavala mag. Milena Strnad. Je urednica pri DZS, zato nam je prinesla srednješolske učbenike za matematiko. Bili smo jih zelo veseli. Njena tema je bila Matematika nekoliko drugače in matematični problemi. Razložila nam je lažje algebrske strukture, pa še te so se nam zdele težavne, seveda ne vsem. Nekaj časa smo potrebovali, da smo se navadili na kompozitum, grupoide, vektorske modele ravnine, distributivnostni zakon...

Najbolj pa smo se smejali tejle misli:

Matematika je mučilno orodje in nič več. V starem veku so z njo mučili kristjane, v srednjem veku čarovnice, v novem veku pa srednješolce.

Popoldan smo izdelali še en plakat, ki prikazuje celoten teden na zabaven način. Na njem je kar nekaj smešnega, a skoraj vse je šlo skozi cenzuro. Za zares prelep teden se moramo zahvaliti Klavdiji, ki nam je odgovarjala na naša zahtevna vprašanja in nas prenašala take, kot smo. Hvala.

To je izpis iz Aninega dnevnika, ki je na koncu šole matematike na Bledu prišel v moje roke.

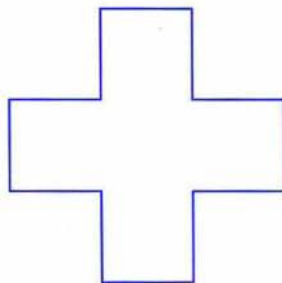
Kot ste sami prebrali, je bil teden zares uspešen. Čeprav se je vse dogajalo med počitnicami, mlade glavice niso počivale niti med popoldanskimi aktivnostmi, saj smo se kar naprej pogovarjali o logiki, matematiki ali pa o fizikalnih problemih. Ko smo se zadnji dan poslavljali, je bilo vsem tesno pri srcu, saj smo postali pravi prijatelji.

V upanju, da bodo tudi v prihodnje tako uspešni, so drug drugemu zaželeli snidenje na matematični olimpiadi.

Klavdija Pintar

IZ PETIH KVADRATOV DVA

Križ na sliki sestavlja pet enakih kvadratov. Z ravnim rezom razrežite križ na dva dela in enega od nastalih kosov spet z ravnim rezom na nova dva dela tako, da boste iz dobljenih treh kosov lahko sestavili dva enaka, drug poleg drugega ležeča kvadrata.



Pri iskanju rešitve si pomagajte z geometrijskim premislekom.

Marija Vencelj

OKROGLO IN KVADRATASTO

Naj bo A poljubna neprazna podmnožica množice naravnih števil. Lahko se zgodi, da noben produkt dveh različnih števil iz množice A ni popolni kvadrat. Taka je na primer množica $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, pa tudi množica vseh praštevil. Po drugi strani pa se lahko zgodi, da je produkt poljubnih dveh števil iz množice A popolni kvadrat. Taki sta na primer množica $\{2, 8, 18, 50, 72, 200\}$ in množica $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ vseh kvadratov naravnih števil. Množicam prve vrste bomo rekli *okrogle*, množicam druge vrste pa *kvadrataste*. Seveda obstajajo tudi množice, ki niso niti okrogle niti kvadrataste (pravzaprav je take množice še najlažje najti).

Zdaj pa k nalogi. Že pri navedenih primerih smo videli, da obstajajo tudi neskončne okrogle in kvadrataste množice. Sprašujem pa vas, koliko elementov imajo po moči največje okrogle in koliko po moči največje kvadrataste podmnožice množice $\{1, 2, \dots, 1998, 1999\}$. Ker zna biti računanje zamudno, vam priporočam uporabo kalkulatorja, pa tudi računalnika se vam ni treba braniti.

Martin Juvan

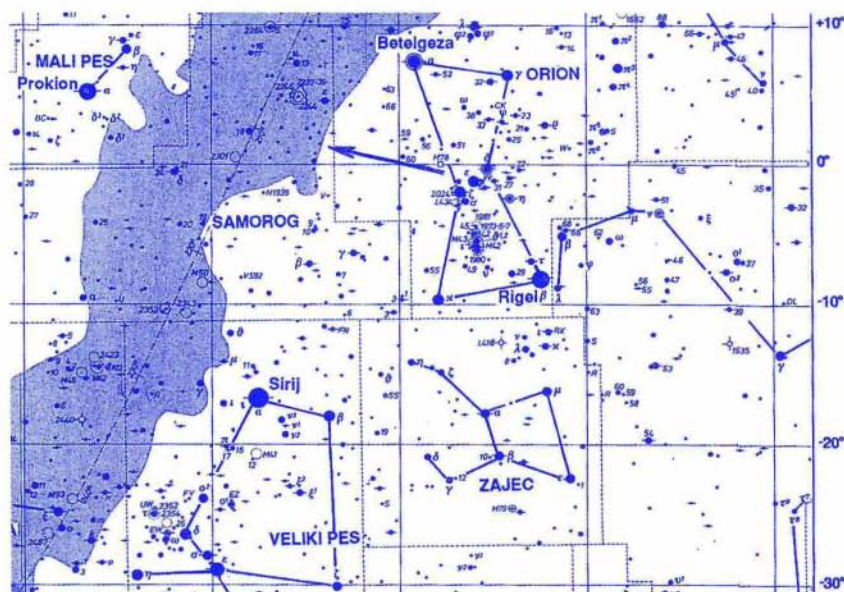
KRIŽANKA “ZIMSKI POJAVI”

					AVTOR MARKO BOKALIČ	DESETINA TONE	OTOK V FRANC. IMENIH	OZKA ODPRTINA ŠPRANJA	ODPRTINA V ZIDU	ZAVEZA ŽIV. V PLU
					VISOK PROZOREN SLOJAST OBLAK					
					VEJJA ELEKTROTEHNIKE					
					REDKA PADAVINA					
	OBREDNA PESEM IZ SVETEGA PISMA	VERNIK, KI POTUJE V VERSKO SREDIŠČE	OBLIKA IMENA ELIZABETA	 HOLMUJ				GRŠKI POTLUJOČI PEVEC, AED		
KRAJ, KJER PEŠCI PREČKAJO CESTO						OGLJIKOVODIK C_8H_{18}	ŽENA BOGA ŠIVE, KALI	NEMŠKI AVTO	ALBERT EINSTEIN KAPLJICE NA TRAVI	JAV. OV. KRAJ LJUB
SAMOSTOJEN PRODOR IGRALCA										
STAR CITROENOV AVTO				NABAVLJALKA ČRKA MED W IN Y						
NOGOM. KLUB IZ RIMA						SUNKOVITO PREMIKANJE BOLNIK				
ČAS, PREDEN SE ZNOČI					SMRKLJA ITALIJANSKI AVTO					
								NEMŠKA REVOLUCIONARKA ZETKIN	MADŽARSKI PLES NATRIJ	
					AKTINIJ		POŽVILO S KOFEINOM	SL. PESNICA (MAJDA) GORSKA UJEDA		
					HRVAŠKI ELEKTROTEHNIK TESLA					GLA. MOJ BA
					BRAZILSKA ZVEZNA DRŽAVA				OBLAČNOST PRI TLEH CINK	
					ZIMSKI TEMPERATURNI OBRAT					
					KRUTA TEKAČKA IZ GRŠKE MITOLOGIJE					

PIŠČE VINO ANINI	GLEDAŠKA IGRA V TREH DELIH	SKUPINA SORODNIH ŽIVALSKIH VRST	PRILOGA K POGODBI	MESTO NA SZ MEHIKE	VRISKANJE	SARAJEVO				
						KALCIJ				
		ZAJCI S KRATKIMI UHLJI					DANSKI FIZIK (HANS CHRISTIAN)	ODPRTA ANTIČNA DVORANA	REKRE- ACIJA	
		UMAZANOST DIMNIKA								
		PRIDOBIL- VALEC OLJA								
VEZ SEC			NEON			NAJVEČJA ŽLEZA				
J PRI LJANI			KENAN EVREN			LUKA V VIETNAMU				PIANIST BERTON- CELJ
					JUNAKINJA					
					KRAŠKA GNJAT					
				PULA		ŽIVAL MOŠ. SPOLA				
				PO VINU ZNANO MESTO NA SICILIJ		SLOVENSKA VOJSKA				
			SKUPEK ŽABUJH JAJC					LEDENA SKORJASTA PLAST SNEGA	MILANO	
			DVOBOJ					LONČENA SKLEDA ZA MLEKO		
					REKVIZIT V ČOLNU LEVSTIKOV JUNAK (MARTIN)					ODLIČEN INDIJSKI ŠAHIST
	ČRTA, KI LOČI OZEMLJI	SUMERSKO MESTO				RESNO ODRSKO DELO				
		TURŠKI ČASTNIK				CHAPLINOVA ŽENA				
SBENI STER							TEMEN TROPSKI LES			
JKA							GROZDASTO SOCVETJE			
					POLNOST					
					OBČINA PRI LJUBLJANI					
			RASTLINA, KI POTRE- BUJE OPORO					ZAHODNO- EVROPSKI VELETOK		
		VELIKA JUŽNOAM. KRATAČA		SORODNIK PO OČETU V STAREM RIMU				NEKD. NIZ HITROSTNI DRSALEC SCHENK		

PREDPES

Zgodba pripoveduje, da velikemu lovcu Orionu pri lovu na divjega nebesnega Bika pomagata Veliki in Mali pes. O obeh psih kroži kar nekaj zgodb. Ene prikazujejo prvega psa bolj krutega, druge pa drugega. Kakorkoli že, nas zanima predvsem ozvezdje Mali pes (Canis Minor) in v njem glavna zvezda (α), imenovana *Prokijon* (slika 1 in 2).



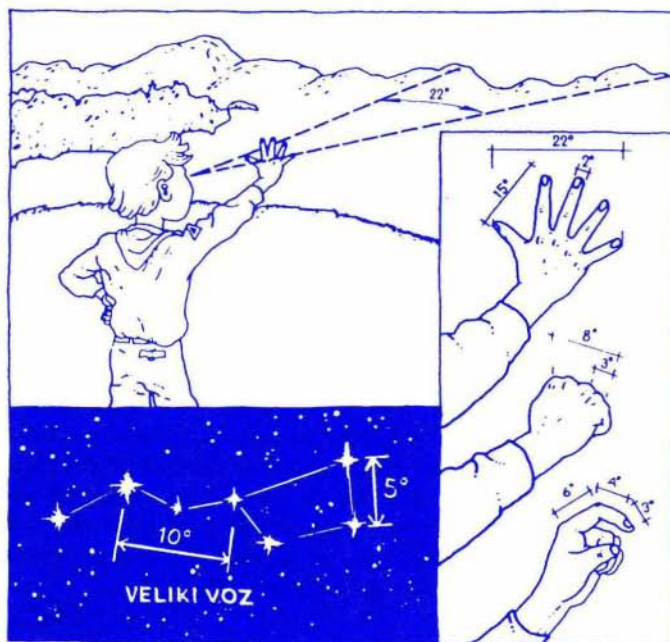
Slika 1. Takole po ozvezdju Orion najdemo Predpsa – zvezdo Prokijon. Najprej si na sliki oglejte zvezdni trikotnik, ki ga sestavljajo Prokijon, Betelgeza in Sirij, nato ga izsledite na nebu in ga opazujte. Ploščino tega trikotnika sicer lahko izračunate kar iz te slike, vendar to naredite raje po opazovanjih zunaj.

Beseda *prokijon* je grškega izvora, *pro* pomeni *pred*, *kijon* pa *pes*. Tako bi tej zvezdi lahko rekli kar *Predpes*, če za Psa označimo zvezdo Sirij, najsvetlejšo zvezdo v ozvezdju Veliki pes in hkrati tudi na nebu. To ime je celo smiselno, saj v resnici Prokijon vzhaja kake pol ure pred Sirijem in torej napoveduje prihod glavne in najbolj bleščeče zvezde na nebo. O tem se lahko prepričate z opazovanjem, lahko pa tudi z zvezdno karto ali računalnikom, vendar svetujem, da vzhod obeh zvezd raje doživite na prostem.

Dobro oblečeni in obuti v jasni noči opazujte zvezde zimskega neba. Potrudite se in naredite vse, da se boste čim prijetneje počutili pod njihovim okriljem. Naj vas opozorim, da se v tem času na nočnem nebu zelo lepo vidi (skoraj enakostranični) zvezdni trikotnik, ki ga sestavljajo zvezde Prokijon, Betelgeza (α Oriona) in Sirij. Sam sem ta "zimski" nebesni trikotnik velikokrat občudoval, zato ga predlagam za opazovanje tudi vam. Vendar bo treba nekaj tudi izmeriti oz. oceniti (slika 3).



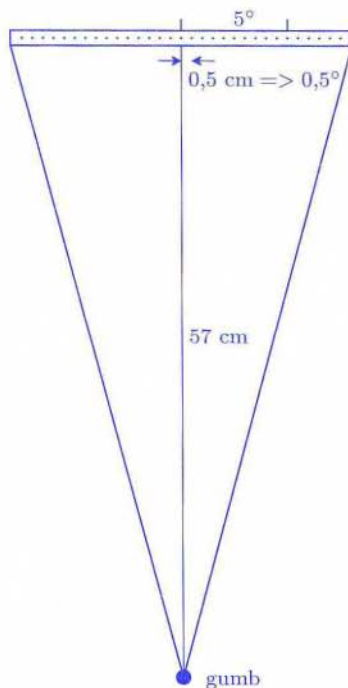
Slika 2. Predpes, narisan na stari zvezdni karti. Predpes je ena najsvetlejših in nam najbližjih zvezd, oddaljen dobrih 11 svetlobnih let.



Slika 3. Ocenjevanje kotov na nebu z iztegnjeno roko. Namig za predlagano opazovanje: Najprej ocenimo dolžine stranic (v kotih), nato pa izračunamo povprečno vrednost stranice a in pri predpostavki, da gre za enakostranični trikotnik, uporabimo formulo $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ za ploščino enakostraničnega trikotnika. Lahko pa uporabimo Heronov obrazec za ploščino trikotnika $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kjer so a, b, c dolžine njegovih stranic in s polovica obsega. Z natančnostjo ne pretiravajmo. [Rezultat: približno 0,5 % celotne nebesne krogle.]

Z iztegnjeno roko ocenite dolžine stranic (kotne razdalje med posameznimi zvezdami) omenjenega nebesnega trikotnika in izračunajte njegovo ploščino. Primerjajte jo s ploščino celotne nebesne krogle, ki meri 4π steradianov oz. 4π kvadratnih radianov, to je $4\pi(180^\circ/\pi)^2 \approx 41\,250$ kvadratnih stopinj (enota *kvadratna stopinja* se zdi res nenavadna, a naj vas ne moti; preprosto jo privzemite, pomeni pa kvadratno ploskvico s stranico 1° na nebu). Prepričan sem, da boste nad rezultatom te naloge zelo presenečeni.

Če želite izmeriti kote na nebu natančneje, lahko izdelate preprosto napravo (slika 4). Na 30 do 35 cm dolgo letvico zabijete žebličke brez glavice v razdaljah 0,5 cm, vsak deseti pa naj bo malo višji od ostalih. Na koncih letvice pričvrstite trdni vrvi (dreto), ki naj se združita v razdalji 57 cm od letvice. Na tem mestu naredite vozel in prišijete gumb.



Slika 4. Preprosta naprava za merjenje kotov na nebu.

Pri opazovanju damo gumb v usta in ga držimo z zobmi, letvico pa primemo z iztegnjenima rokama, da sta vrvi napeti. Ob taki legi letvice ustreza razdalja med žebličkoma kotu $0,5^\circ$. Kot merimo tako, da letvico namestimo v ravnino, ki gre skozi izbrani zvezdi in oko. Letvico nato premikamo malo levo in malo desno, da na vsako od obeh zvezd projiciramo enega od žebličkov. Iz ugotovljene razdalje med žebličkoma določimo kot oz. kotno razdaljo med zvezdama. Kote lahko izmerimo tudi z astronomsko ali križno palico (glej *Presek 19*, 200).

Marijan Prosén

ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 71

Vodoravno: 1. 70, 2. 31, 4. 12, 6. 1024, 8. 10, 10. 933, 12. 113, 14. 132, 15. 210, 16. 27, 19. 1875, 21. 21, 22. 14, 23. 16.

Navpično: 1. 75, 5. 20, 7. 1331, 9. 1110, 18. 42, 20. 16.

Marija Vencelj

[illegible]

NENAVADNA FUNKCIJA – Rešitev s str. 108

Funkcijo F smo definirali rekurzivno z naslednjimi predpisi:

$$F(1) = 1 \quad \text{in} \quad F(2n) = F(n), \quad F(2n+1) = F(n) + F(n+1) \quad \text{za } n \geq 1.$$

Poglejmo, kakšni so odgovori na zastavljena vprašanja.

(a) Sestaviti tabelo vrednosti funkcije F ni težko. Začnemo z 1, nato pa po vrsti določamo nove vrednosti. Če je argument sod, je vrednost funkcije enaka kot pri polovici argumenta, sicer pa je za novo vrednost treba sešteti vrednosti funkcije pri navzdol in navzgor zaokroženi polovici argumenta:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$F(n)$	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Iz tabele lahko opazimo zanimivo lastnost funkcije F : za vsako število $n \geq 1$ je $F(2n+1) = F(2n) + F(2n+2)$. To sploh ni presenetljivo, saj je $F(2n) = F(n)$ in $F(2n+2) = F(n+1)$, tako da je gornja enakost le drugače zapisano rekurzivno pravilo. Iz te enakosti lahko izpeljemo zanimiv način za računanje vrednosti funkcije F . Recimo, da že poznamo vrednosti funkcije F na številih od 2^{k-1} do 2^k , kjer je k neko naravno število. Na primer, vrednosti funkcije F od $2^2 = 4$ do $2^3 = 8$ so

$$1, 3, 2, 3, 1.$$

Potem vrednosti funkcije na številih od 2^k do 2^{k+1} dobimo tako, da v zaporedje vrednosti od 2^{k-1} do 2^k med vsaka zaporedna člena vrinemo še njuno vsoto. Iz zgornjega zaporedja tako dobimo

$$1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1.$$

Postopek lahko zapišemo tudi v obliki "razpredelnice":

1									1	(od 1 do 2)							
1				2					1	(od 2 do 4)							
1		3		2		3			1	(od 4 do 8)							
1	4	3	5	2	5	3	4	1		(od 8 do 16)							
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1	(od 16 do 32)

(b) Izračunajmo vrednost $F(1999)$:

$$\begin{aligned}
 F(1999) &= F(999) + F(1000) = \\
 &= (F(499) + F(500)) + F(500) = F(499) + 2 \cdot F(500) = \\
 &= (F(249) + F(250)) + 2 \cdot F(250) = F(249) + 3 \cdot F(250) = \\
 &= (F(124) + F(125)) + 3 \cdot F(125) = F(124) + 4 \cdot F(125) = \\
 &= F(62) + 4 \cdot (F(62) + F(63)) = 5 \cdot F(62) + 4 \cdot F(63) = \\
 &= 5 \cdot F(31) + 4 \cdot (F(31) + F(32)) = 9 \cdot F(31) + 4 \cdot F(32) = \\
 &= 9 \cdot (F(15) + F(16)) + 4 \cdot F(16) = 9 \cdot F(15) + 13 \cdot F(16).
 \end{aligned}$$

Vrednosti $F(15)$ in $F(16)$ pa lahko že razberemo iz tabele: $F(15) = 4$ in $F(16) = 1$. Tako smo izračunali

$$F(1999) = 9 \cdot F(15) + 13 \cdot F(16) = 9 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 49.$$

(c) Spomnimo se, da je funkcija injektivna, če ima za poljubna različna argumenta vedno tudi različni vrednosti. Povedano nekoliko drugače: če ima funkcija pri dveh številih enako vrednost, potem sta ti dve števili enaki. Torej funkcija F gotovo ni injektivna, saj sta že sliki števil 1 in 2 enaki: $F(1) = F(2) = 1$. Celo več, zlahka se prepričamo, da ima funkcija F vrednost 1 na vsaki potenci števila 2.

S surjektivnostjo bo nekaj več dela. Funkcija bo surjektivna, če za vsako naravno število k najdemo vsaj eno naravno število ℓ , tako da bo $F(\ell) = k$. Poglejmo še enkrat razpredelnico, v kateri so zapisane vrednosti funkcije F . Opazimo lahko, da so predzadnji elementi v posameznih vrsticah po vrsti enaki 1, 2, 3, 4 in 5. Domnevamo torej, da za vsako naravno število k velja $F(2^k - 1) = k$. Domnevo seveda dokažemo z indukcijo. Bazo indukcije smo že preverili v tabeli, indukcijski korak s k na $k + 1$ pa sledi iz

$$F(2^{k+1} - 1) = F(2^k - 1) + F(2^k) = k + 1.$$

Vzamemo torej lahko $\ell = 2^k - 1$. Podobno velja tudi $F(2^{k-1} + 1) = k$ za $k \geq 1$.

(d) Še enkrat si oglejmo razpredelnico z vrednostmi funkcije F . Največja vrednost v prvi vrstici je 1, v drugi vrstici je največje število 2, v tretji 3, v četrti 5, v peti pa 8. To pa so ravno začetni členi Fibonaccijevega

zaporedja. Z nekaj smelosti postavimo domnevo, da je za vsako naravno število n , ki je manjše ali enako 2^k , vrednost funkcije $F(n)$ manjša ali enaka f_{k+1} . Pri tem smo s f_i označili i -to Fibonaccijevo število. (Ponovimo: Fibonaccijevo zaporedje je definirano rekurzivno z bazo $f_1 = f_2 = 1$ in rekurzivno formulo $f_{i+1} = f_i + f_{i-1}$, $i \geq 2$.) Domneva je sicer smela, dokaz z matematično indukcijo (po indeksu k) pa ni prav nič težak. Baza indukcije bosta tokrat dve vrednosti, $k = 1$ in $k = 2$. Ker je $F(1) = F(2) = F(4) = 1 = f_2$ in $F(3) = 2 = f_3$, ocena za ti dve vrednosti velja. Pokažimo še indukcijski korak. Predpostavimo, da ocena velja za števili $k-2$ in $k-1$. Pokazati želimo, da za vsako število n , ki ni večje od 2^k , velja $F(n) \leq f_{k+1}$. Glede na parnost števila n ločimo dve možnosti. Če je število n sodo, $n = 2m$, potem po indukcijski predpostavki velja $F(n) = F(m) \leq f_k \leq f_{k+1}$, saj je $m \leq 2^{k-1}$. Če pa je število n liho, $n = 2m+1$, potem je $F(n) = F(m) + F(m+1)$. Tokrat je $m+1 \leq 2^{k-1}$. Eno od števil m , $m+1$ je sodo, označimo ga z m' . Ker je $F(m') = F(\frac{m'}{2})$ in $\frac{m'}{2} \leq 2^{k-2}$, po indukcijski predpostavki za $k-2$ velja $F(m') \leq f_{k-1}$. Torej lahko ocenimo

$$\begin{aligned} F(n) &= F(m) + F(m+1) \leq \\ &\leq \max\{F(m), F(m+1)\} + F(m') \leq f_k + f_{k-1} = f_{k+1}, \end{aligned}$$

to pa smo tudi želeli dokazati.

Ker je $2^{11} = 2048 > 1999$, smo tako dokazali, da je $F(n) \leq f_{12} = 144$ tudi za vsa števila $n \leq 1999$. Poiskati moramo le še število $n \leq 1999$, za katero je $F(n) = 144$. Če pogledamo v razpredelnico, lahko opazimo, da se v k -ti vrstici število f_{k+1} pojavi dvakrat, enkrat v prvi in enkrat v drugi polovici. Izjema je le število $f_3 = 2$ v drugi vrstici, ki nastopi le enkrat, in sicer na sredini. Označimo z a_k vrednost argumenta funkcije F , ki ustreza prvi pojavitvi vrednosti f_{k+1} v k -ti vrstici razpredelnice, b_k pa naj označuje zadnjo pojavitev. Iz razpredelnice razberemo vrednosti

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 11, a_5 = 21$$

in

$$b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 7, b_4 = 13, b_5 = 27.$$

Zaslutimo lahko, da za $k \geq 1$ zaporedji a_k in b_k zadoščata zvezama

$$a_{k+1} = 2a_k - (-1)^k \quad \text{in} \quad b_{k+1} = 2b_k + (-1)^k,$$

za $k \geq 2$ pa tudi zvezi

$$a_{k+1} = a_k + 2a_{k-1} \quad \text{oziroma} \quad b_{k+1} = b_k + 2b_{k-1}.$$

Z indukcijo se hitro prepričamo, da je $F(a_k) = F(b_k) = f_{k+1}$. Poglejmo induksijski korak s $k-1$ in k na $k+1$ za zaporedje a_k (dokaz za števila b_k je enak):

$$\begin{aligned} F(a_{k+1}) &= F(a_k + 2a_{k-1}) = F(a_k) + F(2a_{k-1}) = \\ &= F(a_k) + F(a_{k-1}) = f_{k+1} + f_k = f_{k+2}. \end{aligned}$$

V računu smo pri drugem enačaju v prvi vrstici upoštevali, da sta a_k in $2a_{k-1}$ sosednji števili, saj iz rekurzivne zveze za zaporedje a_k sledi, da je njuna razlika enaka $(-1)^k$. Z dodatnim razmislekom lahko tudi pokažemo, da sta a_k in b_k edini števili med 2^{k-1} in 2^k , za kateri ima funkcija F vrednost f_{k+1} .

Če obe gornji rekurzivni zvezi razrešimo, dobimo

$$a_k = \frac{4 \cdot 2^k + 2 \cdot (-1)^k}{6} \quad \text{in} \quad b_k = \frac{5 \cdot 2^k - 2 \cdot (-1)^k}{6}.$$

Iščemo števili a_{11} in b_{11} . Dobimo ju iz gornjih formul (lahko pa tudi z večkratno uporabo rekurzivne zveze):

$$a_{11} = 1365 \quad \text{in} \quad b_{11} = 1707.$$

To sta torej tisti števili do 1999, pri katerih funkcija F zavzame največjo vrednost.

Martin Juvan

STOPNJE TOČK GRAFOV V NALOGAH – Rešitev portoroške naloge s str. 78

Točke grafa naj predstavljajo kopalce na portoroški plaži, dve točki pa povežimo s povezavo, če sta ustrezna kopalca med seboj oddaljena do 10 m. Po predpostavki naloge (namreč, da kjerkoli že ste na plaži, imate na razdalji do 10 m še druge obiskovalce) je stopnja vsake točke vsaj 1. Če je vseh kopalcev n , je seveda stopnja poljubne točke kvečjemu $n-1$. Torej imamo n točk s stopnjami med 1 in $n-1$, zato morata biti vsaj dve stopnji enaki. Z drugimi besedami, vedno najdemo dve osebi, ki imata enako število obiskovalcev plaže, oddaljenih do 10 m od njiju. Seveda velja enak sklep tudi za 100 m.

Sandi Klavžar

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1999

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko	19. marec
		področno	17. april
		državno	15. maj
	srednja	šolsko izbirno državno olimpiada	19. marec 10. april 15. in 16. maj 10. do 22. julij
fizika	osnovna	šolsko	do 13. marca
		področno	27. marec
		državno	8. maj
	srednja	področno državno olimpiada	27. marec 17. april julij
logika	osnovna	šolsko	24. september
		izbirno	16. oktober
		državno	13. november
	srednja	izbirno	16. oktober
		državno	13. november
	študenti	državno	13. november
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	2. oktober
računalništvo	osnovna	šolsko	22. marec
		področno	1. april
		državno	24. april
	srednja	državno	23. in 24. april

Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Podatke najdete na Internetu (<http://www2.arnes.si/~osljbj1/dmfa/prav.html>). Pojasnila lahko dobite pri g. Aleksandru Potočniku na OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10, Ljubljana, telefon (061)-443-074 ali (061)-442-900 oziroma na elektronskem naslovu "aleksander.potocnik@guest.arnes.si".

Matematika – srednja šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Naj še posebej poudarimo, da tudi v šolskem letu 1998/99 že potekajo celoletne priprave na mednarodno matematično olimpiado, ki bo julija 1999 v Bukarešti (Romunija). Teh se udeležujejo dijaki, ki so jih predlagali bodisi člani *Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli* bodisi učitelji-mentorji ali pa so se prijavili sami. Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Prvi izbirni test bo 22. januarja 1999, drugi pa 23. aprila 1999. Podrobnejše informacije dajeta g. Darjo Felda, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-17-68-233 ali (061)-17-68-234 in g. Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061)-17-66-500, dobite pa jih tudi po elektronski pošti na naslovu "math.comp@fmf.uni-lj.si". Koledar aktivnosti je ob vsakem času dostopen po Internetu:

URL: "www.fmf.uni-lj.si/~mathcomp/koledar.html".

Fizika – osnovna šola

Tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. V februarju bomo na šole poslali razpis tekmovanj. Dodatne informacije dobite pri ge. Jelki Sakelšek, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (061)-444-401 ali (061)-444-181.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavniciami poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. Cirilu Dominku na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (061)-13-19-293.

Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v reviji *Logika & Razvedrilna matematika*.

Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanja na predmetni stopnji osnovne šole, dijaki srednjih šol in študentje. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, Ljubljana. Druge informacije daje ga. Mija Kordež na ZOTKS, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

Računalništvo – osnovna šola

Razpis tekmovanja je bil skupaj z obvestilom in prijavnico že poslan na šole. Informacije najdete na Internetu (<http://www2.arnes.si/~ljzotks2>), dobite jih tudi pri ge. Miji Kordež, ZOTKS – Svet za politehnično in delovno vzgojo ter izobraževanje, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487, elektronska pošta "mija.kordez@guest.arnes.si".

Računalništvo – srednja šola

I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **10. aprila** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali. Podrobnejša pojasnila daje g. B. Sotošek na istem naslovu.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskimi seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **10. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni raspored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Informacije dobite pri ZOTKS – Komisija za računalništvo, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

Darjo Felda

33. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 109

6. razred

Sklop A

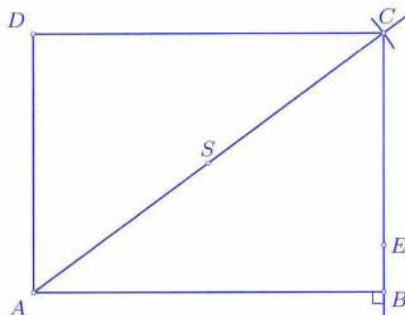
naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	B	Č	D	B	A	D	C	Č

Sklop B

B1 V eni minuti se napolni z vodo $\frac{1}{20}$ prazne kadi, izteče pa $\frac{1}{30}$ vode, ki napolni kad. Po eni minuti je torej v kadi $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$ kadi vode, po 48 minutah pa $48 \cdot \frac{1}{60} = \frac{4}{5}$. Voda zato še ni tekla čez rob.

B2 Prvi trgovec ima 50 % od 20 kg + 40 % od 30 kg = 10 kg + 12 kg = 22 kg orehovih jedrc, drugi trgovec pa 45 % od 49 kg = 22,05 kg, torej več kot prvi.

B3 Ogljišče A prezrcalimo čez točko S v oglišče C . Narišemo poltrak CE in pravokotnico iz oglišča A na poltrak CE . Presečišče je oglišče B . Trikotnik $\triangle ABC$ dopolnimo v pravokotnik $ABCD$.



7. razred

Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	B	D	C	B	Č	A	Č	C

Sklop B

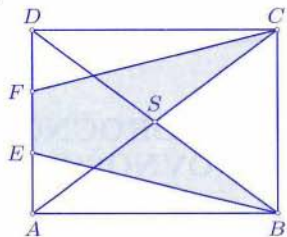
B1 Vrednost izraza je 1.

B2 a) Ana je invalidom namenila 2,5 % svoje nagrade, Bine 2,7 %, Cita pa 2,4 %.

b) Cita je za invalide podarila 24000 SIT.

B3 a) $p_{EBSCF} = p_{ABCD} - 2 \cdot p_{ABE} - p_{BSC}$,
 $p_{ABCD} = 3072 \text{ cm}^2$, $p_{ABE} = 512 \text{ cm}^2$
in $p_{BSC} = 768 \text{ cm}^2$, zato je $p_{EBSCF} = 1280 \text{ cm}^2$.

b) $\frac{p_{EBSCF}}{p_{ABCD}} = \frac{5}{12}$.



8. razred

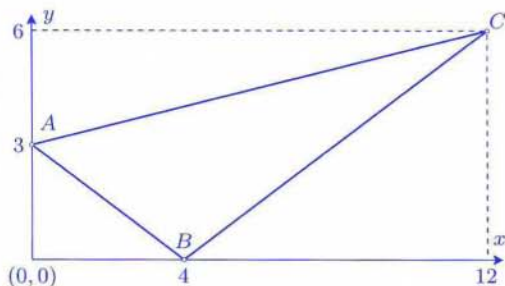
Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	C	Č	B	D	A	B	C	D

Sklop B

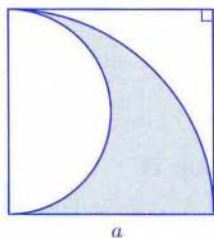
B1 Za predlog je glasovalo $\frac{x}{3} + 13$ občanov, proti $\frac{x}{4}$ občanov, vzdržalo se jih je 17. Enačba $\frac{x}{3} + 13 + \frac{x}{4} + 17 = x$ ima rešitev $x = 72$, kar pomeni, da je bilo prisotnih 72 občanov. Za predlog je glasovalo 37 občanov, torej več kot polovica.

B2 $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,
 $\overline{BC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$,
 $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17}$, $o = 15 + 3\sqrt{17}$.
 $p = 12 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{8 \cdot 6}{2} -$
 $- \frac{3 \cdot 12}{2} = 72 - 48 = 24$.



B3 Ker je $o = \frac{2\pi \cdot \frac{a}{2}}{2} + \frac{2\pi a}{4} + a$, je $a = 10$ dm. Zato

$$\text{je } p = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{100\pi}{8} \doteq 39,25 \text{ dm}^2.$$



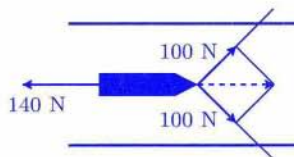
Aleksander Potočnik

18. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 115

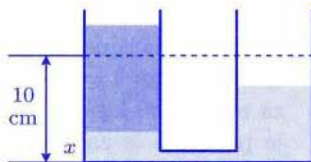
7. razred

- Po 30 minutah smo v $2,40 \text{ dm}^3$ vode zamešali $30 \cdot 20 \text{ g} = 600 \text{ g}$ soli, skupna masa mešanice je $2400 \text{ g} + 600 \text{ g} = 3000 \text{ g}$. Prostornino določimo s sklepanjem: iz podatka za $1,00 \text{ dm}^3$ vode in 250 g soli preračunamo na $2,4 \text{ dm}^3$ vode in $250 \text{ g} \cdot 2,4 = 600 \text{ g}$ soli, prostornina je torej $1,09 \cdot 2,40 \text{ dm}^3 = 2,6 \text{ dm}^3$. Na koncu izračunamo gostoto mešanice: $\rho = 3,0 \text{ kg} / 2,6 \text{ dm}^3 = 1,15 \text{ kg/dm}^3$.

- 2.a) Ko grafično seštejemo vlečni sili, dobimo kvadrat in vsota je diagonalna kvadrata, $R = 100 \text{ N}\sqrt{2}$. Ker je vsota sil enaka 0, deluje voda na čoln v nasprotni smeri s silo 140 N.



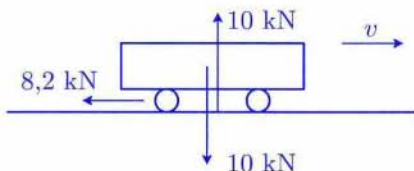
- b) Sila vode na čoln se ni spremenila, v desno deluje še sila motorja. Vsota teh dveh sil je 90 N. Zato je vsota obeh vlečnih sil tudi enaka 90 N. Ker je paralelogram, ki ga ti sili določata, kvadrat z diagonalo 90 N, je posamezna sila $90 \text{ N}/\sqrt{2} = 64 \text{ N}$. Mitja in Miha vlečeta vsak s silo 64 N.
- 3.a) Ker ima voda večjo specifično težo in je ob dnu posode z vodo večji tlak, steče voda v posodo z oljem.
- b) Tlaka ob dnu posod sta enaka: $\sigma_0 h + \sigma_v x = \sigma_v (h - x)$. Velja namreč: kolikor se zniža višina v desni, za toliko se zviša višina v levi posodi. Iz enačbe izračunamo spremembo višine $x = (\sigma_v h - \sigma_0 h) / 2\sigma_v = 10 \text{ cm} \cdot 2/20 = 1 \text{ cm}$. Končni višini sta $10 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ v desni in $10 \text{ cm} + 1 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$ v levi posodi.



- 4.a) Iz prvega primera vidimo, da je zunanji zračni tlak $p_z = 103,0 \text{ kPa}$. V drugem primeru je nad levim in desnim krakom tlak še vedno p_z , v srednjem kraku pa je nekoliko višji tlak p . Račun za levo U cev pokaže: $p - p_z = \sigma_v \Delta h_v = 10000 \text{ N/m}^3 \cdot (48 - 18) \text{ cm} = 3,0 \text{ kPa}$. V drugem primeru kaže barometer 106,0 kPa.
- b) Račun za desno U cev $p - p_z = \sigma_0 \Delta h_0$ da višinsko razliko olja $\Delta h_0 = (p - p_z) / \sigma_0 = 0,35 \text{ m}$. Višina d je torej $15 \text{ cm} + 35 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$.
5. Prostornina nosilca je $V = m/\rho = 3,70 \text{ m}^3$. Vrv je napeta s silo, ki je enaka razliki teže in vzgona: $F_{\text{vrvi}} = 100000 \text{ N} - 37000 \text{ N} = 63000 \text{ N}$. Dvigalo opravi delo $A = F \cdot s = 63000 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = 630 \text{ kJ}$.

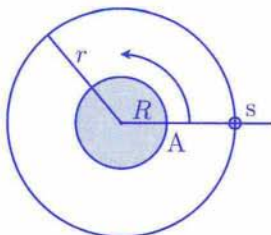
8. razred

- 1.a) Med zaviranjem bo avto prevozil pot $s = v_{\text{sr}} \cdot t = 13,9 \text{ m/s} \cdot 3,4 \text{ s} = 47 \text{ m}$.
- b) Na avto med zaviranjem delujeta teža ter sila ceste poševno nazaj, ki pa jo navadno razstavimo na pravokotno silo podlage navpično navzgor in silo trenja. Rezultanta vseh sil je enaka sili trenja

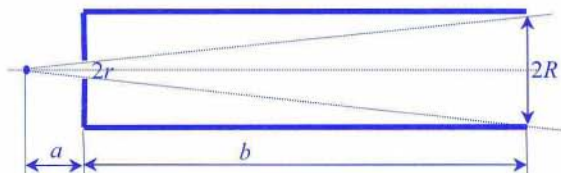


$F_{tr} = ma = 1000 \text{ kg} \cdot 8,2 \text{ m/s}^2 = 8,2 \text{ kN}$. Pojemek pri zaviranju je namreč $a = v_0/t = (27,8 \text{ m/s})/3,4 \text{ s} = 8,2 \text{ m/s}^2$.

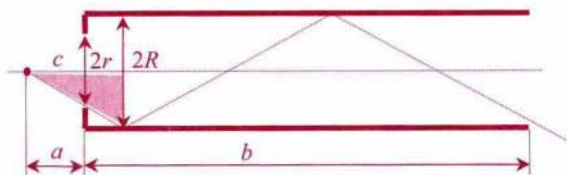
2. V šestih urah točka A na Zemlji prepotuje kot 90° , satelit pa v tem času opiše polni krog in še 90° . Njegova pot je potem $s = 2\pi r + 2\pi r/4 = 10\pi r/4$. Ker je $s = vt$, dobimo $r = 4vt/10\pi = 14600 \text{ km}$. Kroži torej na višini $14600 \text{ km} - 6400 \text{ km} = 8200 \text{ km}$.



- 3.a) Na skici izmerimo, da se je skakalec spustil za 34 mm , kar na skakalnici ustreza višini $h = 68 \text{ m}$. Potencialna energija se mu je tako zmanjšala za $mgh = 80 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 68 \text{ m} = 54,4 \text{ kJ}$. Kinetična energija se mu je povečala le za $mv^2/2 = 26,7 \text{ kJ}$, torej je bilo delo zaviralnih sil $-54,4 \text{ kJ} + 26,7 \text{ kJ} = -27,7 \text{ kJ}$.
- b) Če bi se mu vsa potencialna energija pretvorila v kinetično, bi veljala enačba $mv^2/2 = mgh$, od koder sledi, da bi imel hitrost $v = \sqrt{2gh} = 36,9 \text{ m/s} = 133 \text{ km/h}$.
- 4.a) Da dobimo napetost 12 V , zaporedno povežemo 10 baterij, ki lahko $1,0 \text{ ure}$ poganjajo tok $0,80 \text{ A}$. Ker teče skozi žarnico $5 \text{ W}/12 \text{ V} = 0,42 \text{ A}$, se baterije ne sprazni. Potrebujemo 10 baterij.
- b) Skozi žarnico teče tok $45 \text{ W}/12 \text{ V} = 3,75 \text{ A}$. Ker ena veja z 10 zaporedno vezanimi baterijami poganja $1,0 \text{ ure}$ tok $0,8 \text{ A}$, potrebujemo $3,75 \text{ A}/0,8 \text{ A} = 4,7$ oziroma 5 vzporedno vezanih vej. Potrebujemo torej 50 baterij.
- Če prazne baterije med poskusom zamenjujemo, se posamič priključena veja sprazni po $0,8 \text{ Ah}/3,75 \text{ A} = 0,213 \text{ h}$. Ker je $1 \text{ h}/0,213 \text{ h} = 4,7$, je potrebno 5-krat uporabiti polne baterije, in spet potrebujemo 50 baterij.
- 5.a) Iz slike in podobnih trikotnikov sledi $2r/a = 2R/(a+b)$, $2r = 2Ra/(a+b) = 2,6 \text{ cm}$.



- b) Na dolžini $a + b$ je 5 trikotnikov s kateto c , oziroma $c = (a + b)/5 = 22$ cm. Iz podobnih trikotnikov dobimo rešitev: $2r/a = 2R/c$, $2r = 2Ra/c = 13,1$ cm.



- c) Največje število odbojev dobimo, če povsem odpremo sprednjo steno, $2r = 24$ cm. Med dvema zaporednima odbojema je širina cevi $2a = 24$ cm, skupaj je 5 odbojev.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1997/98 – s str. 118

Objavljamo rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 28. marca 1998. Besedila nalog smo objavili v letošnji 2. številki Preseka. (Zaradi boljše kontrole podajamo numerične vrednosti rezultatov na eno mesto bolj natančno, kot bi bilo sicer fizikalno smiselno.)

Skupina A

- Podatki:** $T = 50$ N, $\sigma_{Al} = 27$ kN/m³, $\sigma_v = 10$ kN/m³, $V_v = \frac{1}{2}V_0$.
Ko krogla plava, vzgon uravnovesi njeno težo: $V_v\sigma_v = T$. Od tod dobimo volumen krogle $V_0 = 2V_v = 2T/\sigma_v = 10$ dm³. Težo lahko zapišemo tudi kot $V_{Al}\sigma_{Al}$, če z V_{Al} označimo del volumna krogle, ki ga napolnjuje aluminij, torej $V_{Al} = T/\sigma_{Al} = 1,85$ dm³. Volumen votlega dela je potem $V = V_0 - V_{Al} = 8,15$ dm³.
- Podatki:** $T_d = 300$ N, $T_m = 700$ N, $k_d = 0,30$.
Silo, s katero pritiska človek na desko v navpični smeri, označimo z F . Tla delujejo na desko v navpični smeri s silo, ki je nasprotno enaka teži deske in sili, s katero potiska človek, $F_0 = F + F_d$. Največja sila, s katero lahko desko potiska naprej, je enaka največji možni sili lepenja med desko in stopali $k_m F$, če s k_m označimo koeficient lepenja med desko in stopalom. Ta sila mora biti v mejnem primeru nasprotno enaka največji sili lepenja med desko in tlemi, $k_d F_0 = k_d (F + T_d)$,

torej $k_m F \geq k_d(F + F_d)$. Za koeficient lepenja med stopalom in desko mora torej veljati

$$k_m \geq k_d \left(1 + \frac{T_d}{F} \right).$$

Najmanjši je takrat, ko je sila F največja, torej kar enaka teži človeka; za mejni k_m dobimo 0,43.

- 3a. Podatki: $T = 1000$ N, $a = 1,0$ m, $b = 5,0$ m, $l = 1,0$ m, $h = 0,5$ m. Sile označimo takole (glej sliko pri besedilu naloge): navpično komponento, s katero vzvod deluje na drog, z F_2 , vodoravno z F_3 ; navpično komponento sile podlage na drog z F_1 in vodoravno z F_l . Kamen deluje na vzvod le s silo v navpični smeri. (Sile, s katerimi deluje drog na vzvod, so seveda nasprotno enake tistim, s katerimi vzvod deluje na drog.) Silo, s katero potiskamo na vzvod, razdelimo na dve komponenti: vodoravno $\frac{1}{2}F$ in navpično $\frac{\sqrt{3}}{2}F$. Zapišimo potrebne pogoje za ravnovesje vzvoda: ravnovesje sil v vodoravni smeri zahteva $F_3 = \frac{1}{2}F$, saj sila kamna nima vodoravne komponente, ravnovesje navorov glede na os v kamnu pa zahteva $aF_2 = b\frac{\sqrt{3}}{2}F$.

- a) Ravnovesje navorov na drog zapišemo za os v krajišču, ki se dotika tal:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} l T = \frac{\sqrt{3}}{2} l F_2 + \frac{1}{2} l F_3 = \frac{3}{4} \frac{b}{a} l F + \frac{1}{4} l F, \text{ od tod } F = \frac{\sqrt{3}}{16} T = 108 \text{ N.}$$

- b) Pogoja za ravnovesje sil na drog zahteva v navpični smeri $F_1 = T - F_2$ in v vodoravni $F_l = F_3$. Koeficient lepenja mora biti najmanj

$$k_l = \frac{F_l}{F_1} = \frac{\frac{1}{2}F}{T - \frac{b}{a}\frac{\sqrt{3}}{2}F} = \frac{\sqrt{3}}{17} = 0,10.$$

- 3b. Podatki: $v_p/v_t = 3/2$, $\Delta t = 20$ min, $t'_t = 2,0$ min, $s = 57$ km.

Čase označimo takole: čas pospeševanja (enak času zaviranja) tovarnega vlaka t'_t in potniškega vlaka t'_p ; čas vožnje z enakomerno hitrostjo tovarnega vlaka t_t in potniškega t_p .

- a) Ker oba vlaka pospešujeta z enakima pospeškoma, je razmerje časov pospeševanja enako razmerju končnih hitrosti, torej $3/2$, in je $t'_p = \frac{3}{2}t'_t$. Enako razmerje velja pri zaviranju. Pot pri enakomerno pospešenem gibanju je $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt$, če je v končna hitrost. Ker je pojemek po velikosti enak pospešku, dobimo enak rezultat tudi pri enakomernem zaviranju do hitrosti 0, le da je tedaj v začetna hitrost. Pot, ki jo napravi tovorni vlak med postajama, je potemtakem kar

$v_t(t'_t + t_t)$ in je enaka poti, ki jo napravi potniški vlak $v_p(t'_p + t_p) = \frac{3}{2}v_t(t'_p + t_p)$. Upoštevamo $t_p = t_t - \Delta t$ in $t'_p = \frac{3}{2}t'_t$ ter dobimo

$$\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}t'_t + t_t - \Delta t \right) = t'_t + t_t, \quad t_t = 3\Delta t - \frac{5}{2}t'_t = 55 \text{ min.}$$

- b) Končno hitrost dobimo iz poti tovornega vlaka (glej izpeljavo pri a)):
 $v_t = s/(t'_t + t_t)$, pospešek pa je enak

$$a = \frac{v_t}{t'_t} = \frac{s}{t'_t(t'_t + t_t)} = 0,14 \text{ m/s}^2.$$

Skupina B

1. Podatki: $l = 2,0 \text{ m}$, $h = 4,0 \text{ m}$, $\varphi = 30^\circ$.
 Gibanje koščka ledu od trenutka, ko zapusti rob strehe, opišemo z enačbama za poševni met. Pri tem os y usmerimo navpično navzdol:

$$h = v_0 \sin \varphi t + \frac{1}{2}gt^2, \quad l = v_0 \cos \varphi t.$$

Iz druge enačbe izrazimo t in dobimo

$$v_0^2 = \frac{gl^2}{2 \cos^2 \varphi (h - l \operatorname{tg} \varphi)}.$$

Pot na strehi s , dobimo iz enačb za gibanje po klancu (pospešek je enak $a = g \sin \varphi$):

$$s = \frac{1}{2}g \sin \varphi t^2 = \frac{v_0^2}{2g \sin \varphi} = \frac{l^2}{4 \sin \varphi \cos^2 \varphi (h - l \operatorname{tg} \varphi)} = 0,94 \text{ m}.$$

2. Podatki: $m_v = 100 \text{ kg}$, $m_f = 50 \text{ kg}$, $m_s = 40 \text{ kg}$, $v_1 = 5,0 \text{ m/s}$, $v_2 = 4,0 \text{ m/s}$.

Ker je pri metu s prvega vozička sila pravokotna na smer gibanja, se komponenti gibalnih količin v smeri gibanja, tako prvega fanta in vozička kot skale, ne spremenita, prav tako ne komponente hitrosti, in velja $v'_1 = v_1$. Hitrost prvega vozička se torej ne spremeni.

Ohranja se tudi komponenta skupne gibalne količine v smeri gibanja za celoten sistem fantov, vozičkov in skale:

$$(m_v + m_f + m_s)v_1 + (m_v + m_f)v_2 = (m_v + m_f)v_1 + (m_v + m_f + m_s)v'_2,$$

pri čemer smo že upoštevali, da se hitrost prvega vozička in fanta ne spremeni. Hitrost drugega vozička z drugim fantom in skalo je potem

$$v'_2 = \frac{m_s v_1 + (m_v + m_f) v_2}{m_v + m_f + m_s} = 4,2 \text{ m/s}.$$

3. Podatki: $r = 50 \text{ cm}$, $\varphi = 30^\circ$.

- a) Najmanjša hitrost je kar hitrost, ki je potrebna, da plošček doseže višino $h = r$, torej $v_{\min} = \sqrt{2gr} = 3,13 \text{ m/s}$.
- b) Ko plošček doseže luknjico, se mora še dotikati podlage, torej mora biti radialna komponenta teže ploščka, $mg \cos \varphi$, večja od produkta mase in radialnega pospeška. V mejnem primeru velja $mg \cos \varphi = mv^2/r$. Ker ni trenja, dobimo začetno hitrost iz izreka o ohranitvi vsote kinetične in potencialne energije:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh', \quad h' = r \cos \varphi.$$

Največja hitrost je

$$v_{\max} = \sqrt{3gr \cos \varphi} = 3,57 \text{ m/s}.$$

- c) Naloga nima rešitve, če je $v_{\max} < v_{\min}$, torej ko je $\cos \varphi < 2/3$, $\varphi > 48^\circ$.

Skupina C

1. Podatki: $r = 10 \text{ cm}$, $U = 1,0 \text{ V}$, $\rho_1 = 10 \text{ } \Omega/\text{m}$, $\rho_2 = 40 \text{ } \Omega/\text{m}$, $\rho_3 = 20 \text{ } \Omega/\text{m}$, $\rho_4 = 50 \text{ } \Omega/\text{m}$.

- a) Ob pol petih je kazalec ravno na sredini drugega odseka; nadomestni upor vezja je enak

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{s\rho_1 + \frac{1}{2}s\rho_2} + \frac{1}{\frac{1}{2}s\rho_2 + s\rho_3 + s\rho_4}, \quad s = \frac{\pi r}{2}.$$

Dobimo $I = U/R = 0,28 \text{ A}$.

- b) Razmislimo najprej, kako moramo razrezati žico z uporom a na dva dela z uporoma x in $a - x$, da bo skupni upor vzporedno vezanih odsekov največji. Velja

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right)^{-1} = \frac{x(a-x)}{a} = \frac{1}{a} \left(xa - x^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 \right) = \\ &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{4}a^2 - \left(x - \frac{1}{2}a \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Izraz je največji pri $x = \frac{1}{2}a$.

Tok je najmanjši, ko deli kazalec obod ure tako, da je upor odsekov med kazalcem in točko A enak; to pa je ravno ob pol osmih.

2. Podatki: $l = 100$ cm, $h = 50$ cm, $p_0 = 100$ kPa, $\rho = 13,6$ kg/dm³.

Ko postavimo cevko v navpični položaj, se tlak zraka nad živim srebrom zmanjša na $p_0 - \rho g x$, če z x označimo višino živosrebrnega stolpca v cevki. Volumen zraka se pri tem poveča z $l - h$ na $l - x$. Ker se temperatura ne spremeni, velja Boylov zakon:

$$p_0(l - h) = (p_0 - \rho g x)(l - x).$$

Dobimo kvadratno enačbo $\rho g x^2 - (p_0 + \rho g l)x + p_0 h = 0$ z rešitvama

$$x_{1,2} = \frac{p_0 + \rho g l \pm \sqrt{(p_0 + \rho g l)^2 - 4\rho g p_0 h}}{2\rho g}.$$

Smiselna je rešitev z negativnim predznakom pred korenem, $x = 25$ cm.

3. Podatki: $U_0 = 200,0$ V, $e = 2,0 \cdot 10^{-11}$ As, $\beta_- = 2,0$ m²/Vs, $\beta_+ = 5,0 \cdot 10^{-3}$ m²/Vs, $S = 100$ cm², $d = 10$ mm, $s = 1,0$ mm.

- a) Na koncu dosežejo pozitivni delci negativno ploščo kondenzatorja, negativni pa pozitivno. Naboj na kondenzatorju se zmanjša za e , napetost pa za $\Delta U = ed/(\epsilon_0 S) = 2,3$ V.
- b) Delci le malo zmotijo polje kondenzatorja, tako da lahko pri računu hitrosti vzamemo kar električno poljsko jakost v nemotenem kondenzatorju $E_0 = U/d = 2,0 \cdot 10^4$ V/m. Hitrosti delcev so $v_- = \beta_- E_0 = 4,0 \cdot 10^4$ m/s in $v_+ = \beta_+ E_0 = 1,0 \cdot 10^2$ m/s. Negativni delci dospejo do pozitivne plošče v času $t_1 = (d - s)/v_- = 0,225$ μ s, pozitivni pa do negativne v času $t_2 = s/v_+ = 10$ μ s.
- c) Med pozitivno in negativno zaveso delcev nastane dodatno polje z jakostjo $E_1 = e/(\epsilon_0 S) = 2,3 \cdot 10^2$ V/m, ki ima nasprotno smer kot polje v kondenzatorju. Ko negativni delci v času $t_1 = 0,225$ μ s zadenejo pozitivno ploščo, se napetost na ploščah zmanjša za $\Delta U_1 = E_1(v_- + v_+)t_1 = 2,07$ V, ko pa v času $t_2 = 10$ μ s dosežejo negativno ploščo še pozitivni delci, pa se napetost zmanjša na končno vrednost $U_0 - \Delta U = 197,7$ V.

Skupina D

1. Podatki: $l = 0,25$ m, $\Delta T = 55$ K, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ K $^{-1}$, $\delta t = 1,0$ s.
Palica se podaljša za $\Delta l = \alpha \Delta T l$ in težišče sistema se premakne za

$$r^* = \frac{-\frac{1}{2}lm + \frac{1}{2}(l + \Delta l)m}{4m} = \frac{\alpha \Delta T l}{8},$$

če z m označimo maso ene palice. Zaradi tega se pojavi navor $M = 4mgr^*$, ki v času δt spremeni vrtilno količino sistema z 0 na $J\omega$; pri tem je vztrajnostni moment štirih palic okoli krajišča enak $J = 4 \cdot \frac{1}{3}ml^2$.

$$4 \frac{ml^2}{3} \omega = M \delta t, \quad \omega = \frac{3\alpha \Delta T g \delta t}{8l} = 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Postopek je upravičen, če je čas delovanja navora zelo kratek v primerjavi z časom enega obrata

$$\frac{\delta t}{t_0} = \frac{\omega \delta t}{2\pi} \approx 10^{-6},$$

kar je v našem primeru izpolnjeno.

2. Podatki: $P = 1000$ W, $\zeta = 9,8 \cdot 10^{-8}$ Ω m, $t_0 = 0,25$ s, $\rho = 7,9 \cdot 10^3$ kg/m 3 .

Najprej določimo ravnovesno lego, ko odbojna sila med vodnikoma uravnovesi težo vodnika:

$$IlB = Il \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} = mg,$$

kjer smo z S označili prečni presek vodnika in z r_0 ravnovesno razdaljo med vodnikoma.

Če se razdalja zmanjša za x , se pojavi od nič različna rezultanta sil, ki kaže proti ravnovesni legi in je enaka

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi(r_0 - x)} - mg = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r_0} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right) - mg = \frac{mg}{r_0} x,$$

pri čemer smo si pomagali z enačbo za ravnovesno lego in z zvezo, ki velja za majhne odmike x ($x/r_0 \ll 1$):

$$\frac{1}{r_0 - x} = \frac{1}{r_0 \left(1 - \frac{x}{r_0}\right)} \approx \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right).$$

Sila je torej sorazmerna odmiku od ravnovesne lege, tako kot pri nihalu na vijačno vzmet: $F = kx$, $k = mg/r_0$, in kaže proti ravnovesni legi. Iz zveze za krožno frekvenco nihala, $\omega^2 = k/m$, dobimo $r_0 = g/\omega^2 = t_0^2 g/(4\pi^2) = 1,55 \text{ cm}$.

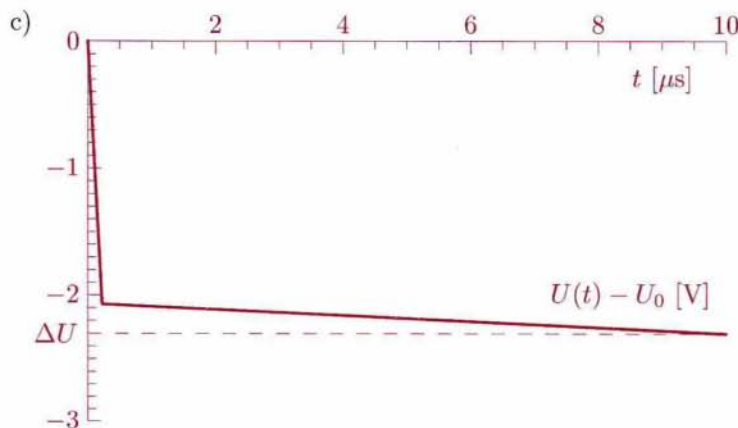
Če z R označimo upor enega vodnika, lahko moč, ki se troši, zapišemo kot $P = 2RI^2 = 2\zeta l I^2/S$, I^2 izrazimo iz enačbe za ravnovesno lego, masa enega vodnika je $m = Sl\rho$. Dobimo

$$P = \frac{2\zeta l}{S} \cdot \frac{2\pi r_0 Sl\rho g}{\mu_0 l}, \quad l = \frac{\mu_0 P}{4\pi\zeta\rho g r_0} = \frac{\pi\mu_0 P}{\zeta\rho g^2 t_0^2} = 0,85 \text{ m}.$$

3. Podatki: $U_0 = 200,0 \text{ V}$, $e = 2,0 \cdot 10^{-11} \text{ As}$, $\beta_- = 2,0 \text{ m}^2/\text{Vs}$, $\beta_+ = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$, $S = 100 \text{ cm}^2$, $d = 10 \text{ mm}$, $s = 1,0 \text{ mm}$.

a) (Glej rešitev 3 a) v skupini C.)

b) (Glej rešitev 3 b) in c) v skupini C.)



d) Če z x označimo razdaljo od negativne plošče, mora veljati:

$$\frac{x}{d-x} = \frac{v_+}{v_-} = \frac{\beta_+}{\beta_-}, \quad x = \frac{\beta_+}{\beta_- + \beta_+} d = 25 \mu\text{m}.$$

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE – Rešitve s str. 123

I/1. Med enomestnimi števili ni takih, ki bi bila enaka enajstkratniku vsote svojih števk. Poglejmo, kako je pri dvomestnih številih. Če sta x in y števki, bi moralo veljati $10x + y = 11(x + y)$ oziroma $x + 10y = 0$, kar pa ni mogoče.

Naj bo $\overline{xyz}$ trimestno število. Tedaj iz $100x + 10y + z = 11(x + y + z)$ dobimo $89x = y + 10z$, od koder takoj sledi $x = 1$, $y = 9$ in $z = 8$.

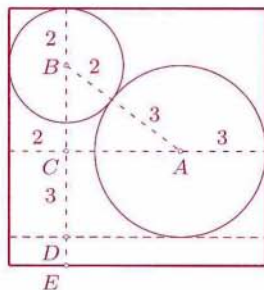
Nazadnje dokažimo, da nobeno štiri ali večmestno število ne more biti enako enajstkratniku vsote svojih števk. Že pri štirimestnem številu $\overline{xyzv}$ je $1000x + 100y + 10z + v$ enako vsaj 1000, število $11(x + y + z + v)$ pa ne presega 396, saj je vsota števk največ 36. Edina rešitev je torej število 198.

I/2. Število 2^n da pri deljenju s 3 ostane 2, če je n liho število, in ostane 1, če je n sodo število. Torej je

$$19 \cdot 98 \cdot 2^{19+98} - 1 = (3 \cdot 6 + 1) \cdot (3 \cdot 32 + 2) \cdot (3k + 2) - 1 = 3k' + 4 - 1 = 3(k' + 1),$$

kjer sta k in k' naravni števili.

I/3. Privzemimo oznake s slike. Ker je papir širok 9 cm, je $|CA| = 4$, zato je $|CB| = 3$ in $|DE| = 1$. Meta lahko odreže trak, ki ni širši od 1 cm.



I/4. (a) Če je n sodo število, je bilo v vsaki vrstici enako belih in črnih polj. Ker je tudi vrstic sodo mnogo, bo imela nova šahovnica enako modrih in belih polj. Če pa je n liho število, je Janezek pobarval modro vsa bela polja v zadnjem stolpcu, vsa bela polja v zadnji vrstici pa je pustil nedotaknjena. Zadnje polje v zadnji vrstici je seveda črno. V zadnji vrstici in zadnjem stolpcu je torej enako modrih in belih polj, po že dokazanem pa sta na preostali $(n-1) \times (n-1)$ šahovnici števili modrih in belih polj enaki.

(b) Ker je v obeh primerih število modrih polj (recimo m) enako številu belih, je preostalih $n^2 - 2m$ polj črnih. Ker sta števili $n^2 - 2m$ in n enake parnosti, smo dokazali tudi točko (b).

II/1. Dokažimo trditev s protislovjem. Če obstaja kakšna rešitev zastavljene enačbe, obstaja tudi takšna, pri kateri je največ eno od števil x , y ali z sodo. Res: Če sta dve od teh števil sodi, mora biti takšno tudi tretje. Potem lahko postavimo $x = 2x'$, $y = 2y'$ in $z = 2z'$ ter si ogledamo enačbo $x'^2 + y'^2 = z'^2 = (x'y')^2$, kjer je $x' < x$, $y' < y$ in $z' < z$.

Če sta števili x in y lihi, da število $(xy)^2$ pri deljenju s 4 ostane 1, število $x^2 + y^2 + z^2$ pa 2 ali 3, glede na parnost števila z .

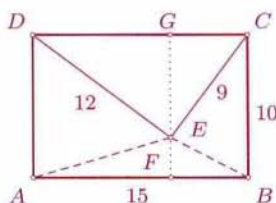
Če pa je eno od števil x in y sodo, drugo pa liho, je liho tudi število z . Število $x^2 + y^2 + z^2$ da pri deljenju s 4 ostane 2, število $(xy)^2$ pa da ostane 0.

II/2. Neenakost preoblikujemo v $|a+b+|a-b|-2c| < a+b-|a-b|$, od koder sledi

$$-(a+b-|a-b|) < a+b+|a-b|-2c < a+b-|a-b|.$$

Iz leve neenakosti sledi $2a+2b-2c > 0$ oz. $a+b > c$. Iz desne neenakosti pa $2|a-b|-2c < 0$, kar pomeni $-c < a-b < c$ oz. $a+c > b$ in $b+c > a$.

II/3. Označimo z F in G pravokotni projekciji točke E na stranici AB in CD . Zaradi $9^2 + 12^2 = 15^2$ je trikotnik DEC pravokoten s pravim kotom pri E in $|EG| = \frac{|DE||EC|}{|CD|} = \frac{36}{5}$. Po Evklidovem izreku je $|CG| = \frac{|CE|^2}{|CD|} = \frac{27}{5}$ in $|DG| = \frac{|DE|^2}{|CD|} = \frac{48}{5}$. Ker je $|EF| = |BC| - |EG| = \frac{14}{5}$, izračunamo še



$$|AE| = \sqrt{|AF|^2 + |FE|^2} = 10 \quad \text{in} \quad |BE| = \sqrt{|FB|^2 + |FE|^2} = \sqrt{37}.$$

II/4. (a) Zagotovo ni prebral 999999, ker bi pred 9000 kilometri števec pokazal 990999 in vsota števk ne bi bila ista.

Pri vsaki izbiri para števk (a, b) , kjer a pomeni desetstisočice in b tisočice, se vsota števk tega števila ne bo spremenila, če ga bomo povečali za 9000, če je le $a < 9$ in $b \neq 0$. Ob nespremenjenih drugih števkih namreč pogledamo dvomestno število $\overline{ab} = 10a + b$, ki mu dodamo 9: $10a + b + 9 = 10(a+1) + (b-1)$. Dobimo torej dvomestno število z enako vsoto števk. Res imata npr. 001000 in 010000 enako vsoto števk in razliko 9000.

Če hočemo zadostiti tudi pogoju, da vsota števk med enim in drugim stanjem na števcu nikoli ni bila višja, moramo na mestih enic, desetic in stotic vsekakor imeti 9 ter izbrati $a = 0$, $b = 9$. Vsote števk števil, ki

ležijo med številoma 009999 in 018999, so namreč manjše od vsote števk pri teh dveh mejnih primerih.

Tistega dne je torej Janezek prebral 018999, jasno pa je, da je bila po 1000 naslednjih kilometrih vsota števk prvič večja, števec je namreč pokazal 019999.

III/1. Recimo, da je $n = kl$ sestavljeno število. Potem je

$$b^{kl} - 1 = (b^k - 1)(b^{k(l-1)} + b^{k(l-2)} + \dots + 1).$$

Ker je

$$\overbrace{11 \dots 1}^{n \text{ enic}}_{(b)} = \frac{b^{kl} - 1}{b - 1} = \frac{b^k - 1}{b - 1} \cdot (b^{k(l-1)} + b^{k(l-2)} + \dots + 1),$$

to število ni praštevilo.

III/2. Razcepimo polinom $p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$. Potem je

$$\begin{aligned} p(n) p(n+1) &= (n - \alpha)(n - \beta)(n + 1 - \alpha)(n + 1 - \beta) = \\ &= (n - \alpha)(n - \beta + 1)(n - \beta)(n - \alpha + 1) = \\ &= (n(n - \beta) + n - \alpha(n - \beta) - \alpha) \cdot \\ &\quad \cdot (n(n - \alpha) + n - \beta(n - \alpha) - \beta) = \\ &= (m - \alpha)(m - \beta) = p(m). \end{aligned}$$

Z m smo označili število $n^2 - n(\alpha + \beta) + \alpha\beta + n$, ki je po Vietovih formulah enako $n^2 + na + b + n$, zato je to število celo.

III/3. Privzemimo oznake s slike. Po sinusnem izreku je

$$\frac{x}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{\sin \varphi} \quad \text{in} \quad \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin(\pi - \varphi)}.$$

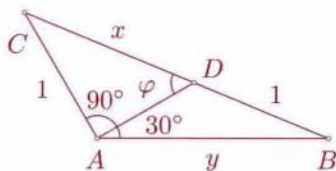
Sledi $y = \frac{2}{x}$. Po kosinusnem izreku je

$$(1 + x)^2 = 1^2 + y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y \cdot \cos 120^\circ,$$

od koder z upoštevanjem $y = \frac{2}{x}$ dobimo enačbo

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = (x + 2)(x^3 - 2) = 0,$$

ki ima edino pozitivno rešitev $x = \sqrt[3]{2}$.



III/4. Dodelimo vsaki osebi število med 1 in 11, ki pove, za koliko mest v levo se mora presesti, da pride na svoje pravo mesto. Ker je oseb 12, različnih dodeljenih števil pa le 11, iskano krožno presedanje res obstaja.

IV/1. Recimo, da taka naravna števila obstajajo. Tedaj velja $l > 3$ in zato enačbo lahko preoblikujemo v $n^2 = m^3(m^{l-3} - 1)$. Od tod sledi, da m deli število n , torej $n = n_1 m$ za neko naravno število n_1 . Tedaj velja $n_1^2 = m(m^{l-3} - 1)$. Število $m(m^{l-3} - 1)$ je popolni kvadrat in števili m in $m^{l-3} - 1$ sta si tuji, zato je tudi m popolni kvadrat. Torej obstaja naravno število m_1 , da je $m = m_1^2$. Od tod dobimo $n_1^2 = m_1^2(m_1^{2(l-3)} - 1)$. Torej m_1 deli n_1 , zato je $n_1 = n_2 m_1$ in tako je $n_2^2 = m_1^{2(l-3)} - 1$. Enačbo preoblikujemo in dobimo $(n_2 - m_1^{l-3})(n_2 + m_1^{l-3}) = -1$, kar pa ni možno.

IV/2. Označimo z $a \pmod{10}$ ostanek števila a pri deljenju z 10. Potem je

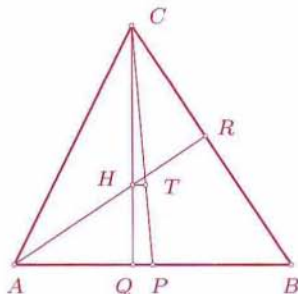
$$a_{n+1} = 19a_n + 98 \equiv 9a_n + 8 \pmod{10} \text{ in}$$

$$a_{n+2} = 9(9a_n + 8) + 8 = 81a_n + 80 \equiv a_n \pmod{10}.$$

Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots$ je torej periodično s periodo 2, zato je $0.a_1 a_2 a_3 \dots$ res racionalno število.

IV/3. Označimo s P razpolovišče stranice AB , s Q nožišče višine na stranico AB in z R nožišče višine na stranico BC . Ker sta si trikotnika CHT in CQP podobna, težišče pa deli težiščnico v razmerju 1 : 2, je $\frac{|QH|}{|QC|} = \frac{|PT|}{|PC|} = \frac{1}{3}$. Torej je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|QC|}{|AQ|} = 3 \frac{|QH|}{|AQ|}.$$



Ker pa sta si podobna tudi trikotnika ABR

in AHQ , je $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \angle AHQ = \frac{|AQ|}{|QH|}$ in zato je res $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 3$.

Opomba. Trditev velja tudi v drugo smer. Iz predpostavke $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 3$, podobno kot zgoraj, sklepamo $|QH| = \frac{1}{3}|QC|$, od koder sledi, da vzporednica stranici AB skozi točko H vsebuje tudi točko T .

IV/4. Vsak vojščak ima na sulici največ 5 rdečih peres. Za $0 \leq k \leq 5$ lahko razporedimo k rdečih peres na sulico na $\binom{10-k}{k}$ različnih načinov. Res: Za $k \geq 1$ mora imeti $k - 1$ rdečih peres poleg še eno zlatorumeno pero, na preostalih $9 - (k - 1)$ mest pa lahko razporedimo preostalih

$(9 - k) - (k - 1)$ zlatorumenih peres na $\binom{9-(k-1)}{(9-k)-(k-1)} = \binom{10-k}{10-2k} = \binom{10-k}{k}$ različnih načinov. Vseh različno okrašenih sulic je torej največ

$$\sum_{k=0}^5 \binom{10-k}{k} = \binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3} + \binom{6}{4} + \binom{5}{5} = 89 < 90,$$

kar pomeni, da vsi vojščaki ne morejo imeti različno okrašenih sulic.

Matjaž Željko

19. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – pomladanski krog – Rešitve s str. 126

Prva skupina

1. Da. Oglejmo si naslednji primer. Tanja je sama sestavila dve besedi, Vanja pa je sama sestavila štiri besede. Anja in Tanja sta sestavili šest enakih besed, Anja in Vanja pa tri.
2. Pri pravokotnem premiku kralj spremeni barvo polja, na katerem stoji, pri diagonalnem pa jo ohranja. Ker se kralj vrne na začetno polje, je sodo mnogokrat zamenjal barvo polja. Torej se je diagonalno premaknil sodo mnogokrat, saj je skupno število premikov sodo.
3. Ker središči daljic AD in BC ležita na daljici MN , velja $pl(MAN) = pl(MDN)$ in $pl(MBN) = pl(MCN)$. Če seštejemo enakosti, dobimo $pl(ABN) = pl(CDM)$. Torej velja

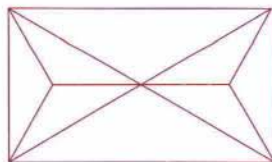
$$\frac{\overline{OM}}{\overline{AB}} = \frac{pl(OMN)}{pl(ABN)} = \frac{pl(OMN)}{pl(CDM)} = \frac{\overline{ON}}{\overline{CD}}.$$

Tako je $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

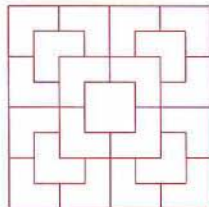
4. Naj bo S_n vsota produktov števk n -mestnih števil. Z indukcijo bomo pokazali, da je $S_n = 45^n$. Pri $n = 1$ velja $S_1 = 1 + \dots + 9 = 45$. Oglejmo si $(n + 1)$ -mestna števila, ki imajo prvo števko k . Vsota produktov števk takih števil je $k \cdot S_n$. Torej je $S_{n+1} = (1 + \dots + 9)S_n = 45^{n+1}$.
5. Ostržek ne laže. Naj bo ABC trikotnik s dolžinami stranic $\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{2}$ in $\overline{AB} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Naj bosta H in K taki točki na stranici BC , da je daljica AH pravokotna na BC in $\overline{CK} = 2 - \sqrt{2}$. Razrežimo trikotnik ABC na trikotnike ABH , AHK in AKC . Vidimo, da lahko poljubna dva od teh sestavimo v nov enakokraki trikotnik.

Druga skupina

1. Ostržek ne laže. Osem enakokrakih trikotnikov s koti 30° , 30° in 120° lahko zložimo v pravokotnik, kot kaže slika.



2. Glej rešitev naloge 4 za prvo skupino.
3. Za vsako barvo obstajajo vsaj tri polja, ki so te barve. Torej je največje možno število barv $\lceil \frac{64}{3} \rceil = 21$. Šahovnico lahko pobarvamo z 21 barvami, kot kaže slika. Polja znotraj enega lika so pobarvana enako.



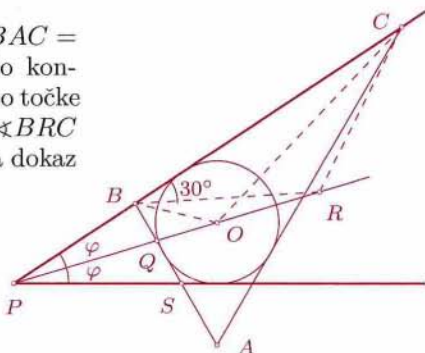
4. Če je $AB = 0$, ima prvi sistem le eno rešitev, t.j. $(x, y) = (0, 0)$. Ker je $m > n > 1$, ta možnost odpade. Torej je $AB \neq 0$, zato so rešitve prvega sistema enačb presečišča krožnice in kvadrata s skupnim središčem. Torej je lahko m največ 8. Podobno kot prej ugotovimo, da je $CD \neq 0$. Rešitve drugega sistema so presečišča sfere in pravilnega oktaedra. Presek je lahko prazna množica, množica z neskončno mnogo elementi in množica s 6 elementi (ko je sfera očrtana oktaedru). Torej je $m = 8$ in $n = 6$.

5. Označimo točke P , B in C , kot kaže slika. Tangenti iz točke A na dano krožnico oklepata kot 60° , zato je dovolj dokazati, da obstaja takšna točka R na simetrali danega kota, za katero je BRC enakokrak trikotnik s kotoma 30° pri osnovnici BC . Vse točke, iz katerih vidimo daljico BC pod kotom $60^\circ = \frac{\angle BRC}{2}$, namreč ležijo na krožnici, ki gre skozi točki B in C in ima središče v točki R .

Naj bo torej R takšna točka na simetrali danega kota, za katero je $\angle RBC = 30^\circ$. Točka R obstaja, če je le podani kot manjši od 60° . Slednje po predpostavki naloge drži, saj bi v nasprotnem ena od tangent iz točke A na dano krožnico sploh ne sekala enega od krakov kota.

Označimo presečišče daljic AB in OP s Q , daljica AQ pa naj seka krak kota v točki S . Potem je $\angle ABC = \angle SPB + \angle PSB = 60^\circ + 2\varphi$ in $\angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ + \varphi$. Ker je $\angle BQO = \angle SQP = 180^\circ - \varphi - 60^\circ = 120^\circ - \varphi$, je $\angle POB = 30^\circ$.

Ker pa je $\sphericalangle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 120^\circ$, je $\sphericalangle ROC = 30^\circ$. Po konstrukciji je $\sphericalangle RBC = 30^\circ$, zato so točke O, R, C in B konciklične. Kot $\sphericalangle BRC$ torej meri 120° , kar je dovolj za dokaz naše trditve.



Rešitve drugega dela pomladanskega kroga

Prva skupina

1. Vsaka kocka ima tri pare nasprotnih stranic: 1 in 6, 2 in 5 ter 3 in 4. Natanko en par se ne more pojaviti na vrhu, saj skozi njega poteka žica. Če izberemo dve kocki, obstaja par nasprotnih stranic, ki se lahko pojavi pri obeh kockah na vrhu. Število 7 deli število 1001. Na prvi in četrti kocki postavimo isto število, prav tako na drugi in peti ter na tretji in šesti. Tako dobljeno število je deljivo s 1001, in zato tudi s 7.
2. Kvadrat lahko gledamo kot polje 6×6 točk, kjer vsaka točka leži v oglišču kakega kvadrata. Vsaka diagonalna vsebuje dve točki, zato je največ $18 = \frac{6 \cdot 6}{2}$ diagonal. Če bi bile vse točke na neki stranici večjega kvadrata krajišča kake diagonale, bi se vsaj dve izmed njih sekali. Torej na vsaki stranici večjega kvadrata vsaj ena točka ni krajišče nobene diagonale. Tako vsaj dve točki nista krajišči nobene diagonale. Torej obstaja največ 17 daljic. Da bi lahko tvorili 17 diagonal, morata biti neuporabljeni točki nasprotni oglišči največjega kvadrata. Če je oglišče večjega kvadrata krajišče diagonale, so vse diagonale, ki imajo krajišče na stranici, ki vsebuje to oglišče, vzporedne. Tako nam ostane (poleg dveh nasprotnih oglišč) še kvadrat 4×4 . V njem pa ne moremo uporabiti vseh točk. Torej je diagonal največ 16. Slika prikazuje, kako lahko postavimo 16 diagonal.



Druga skupina

1. Če projekcije vseh vodoravnih izbranih stranic na vodoravno stranico kvadrata pokrijejo celo stranico kvadrata, je dolžina izbranih stranic vsaj 1. Podobno velja za navpične stranice. Recimo, da obstaja točka

A na vodoravni stranici kvadrata, ki je projekcija vodoravnih izbranih stranic ne pokrije. Naj bo B točka, ki je projekcija navpičnih izbranih stranic ne pokrije. Naj bo X točka v kvadratu, ki se s projekcijama preslika na točki A in B . Točka X leži v nekem pravokotniku in izbrana stranica tega pravokotnika, ko jo projiciramo na stranico kvadrata, pokrije bodisi točko A bodisi točko B . Torej res vsaj ena projekcija (vodoravna ali navpična) pokrije eno od stranic kvadrata.

2. Naj bo $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tedaj je $\omega^2 - \omega + 1 = 0$ in $\omega^3 + 1 = 0$. Naj štirikotnik $ABCD$ leži v kompleksni ravnini, naj bo M koordinatno izhodišče in naj bosta oglišči A in C predstavljeni s številoma a in c . Oglišče B dobimo, če A zavrtimo okrog točke M za 120° . Torej je B predstavljeno s številom $a\omega^2$. Podobno dobimo, da je oglišče D predstavljeno s številom $c\omega^2$. Točka, ki jo dobimo, ko točko C zavrtimo okrog točke B za 60° , je predstavljena s številom $\omega(c - a\omega^2) + a\omega^2 = cw + a(1 + \omega^2) = (c + a)\omega$. Podobno dobimo, da je točka, ki jo dobimo, ko oglišče A zavrtimo za 60° okrog točke D , predstavljena s številom $(a + c)\omega$. Točko, ki je predstavljena s številom $(a + c)\omega$, označimo z N . Tedaj sta trikotnika BNC in DNA enakostranična.

Aleš Vavpetič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

26. letnik, šolsko leto 1998/99, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1998/99 je za posamezne naročnike **1.800 SIT**, za skupinska naročila šol **1.500 SIT**, posamezna številka **360 SIT**, za tujino 50 DEM (25 ECU), devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

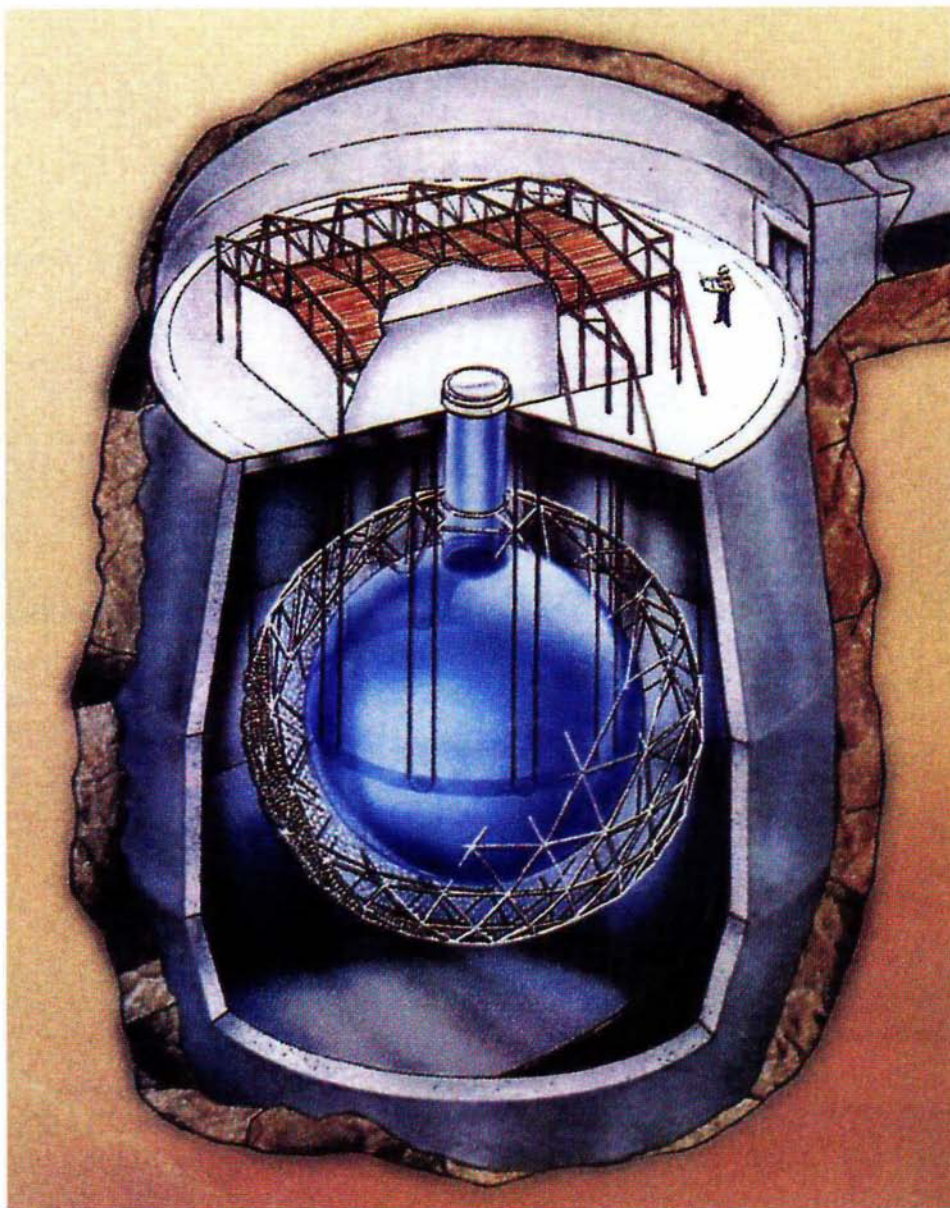
Založilo DMFA – založništvo

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1373

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Ilustracija nevtrinskega observatorija Sudbury (Kanada), ki naj bi kmalu začel z delovanjem. Osrednja posoda bo vsebovala tisoč ton težke vode, to je vode, v kateri je v jedru vodikovega atoma poleg protona še en nevtron. V tem observatoriju naj bi se dalo "prešteti" nevtrine vseh treh vrst. Okrog posode s težko vodo bo nameščenih deset tisoč fotopomnoževalk, ki bodo detektirale fotone, sproščene v reakciji med nevtrini in težko vodo. Naokrog bo sedem tisoč ton običajne vode, ki bo poskrbela za zaščito pred sevanjem okoliških skal, celoten kompleks pa bo več kot kilometer in pol pod zemeljsko površino, tako da se bodo v snovi nad detektorjem absorbirali kozmični žarki, ki bi sicer lahko prožili lažne alarme.



Slovenska matematična olimpijska reprezentanca po podelitvi nagrad 20. julija 1998 v Taipeiju (Tajvan). Na sliki (od leve proti desni): Matjaž Željko, Matjaž Titan, Jure Kališnik, Martin Milanič, Dušan Jan, Ajda Skarlovnik, Tadej Starčič, Gregor Dolinar in Darjo Felda.

(Foto Matjaž Željko)



Ekipa Slovenije na 29. mednarodni fizikalni olimpiadi na Islandiji. Z leve proti desni: Ciril Dominko (vodja), Martin Zadnik, Klemen Naveršnik, Matija Mazi, Blaž Zupančič, Natan Osterman, Bojan Golli (vodja).

(Foto Ciril Dominko)