

PRE SEK

26 (1998-1999)

2

ISSN 0351-8652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



Gladina olja med segrevanjem postaja vse bolj nagubana. Temperatura olja narašča od slike a proti sliki d.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, leto 1998/99, številka 2, strani 65–128

VSEBINA

MATEMATIKA	Stopnje točk grafov v nalogah (za konec gremo tudi v Portorož) (Sandi Klavžar) 72-78
	O premočrtnem in krožnem gibanju (Ivan Vidav) 86-90
FIZIKA	Skrivljena zrcala (Andrej Likar)..... 66-70
	Električni tok po kovini in elektroni (Janez Strnad) . 98-102
ASTRONOMIJA	O nam najbližji zvezdi – 1. del (Mirjam Galičič) 80-83
	Oko (Marijan Prosén) 104-106
RAČUNALNIŠTVO	Dotikajoči se krogi – rešitev naloge s str. 31 (Martin Juvan) 92-94
NALOGE	Številska križanka (Marija Vencelj)..... 71
	Tombola (Martin Juvan) 102-103
	Nenavadna funkcija (Martin Juvan)..... 108
REŠITVE NALOG	Prav posebno število! Pa je to tudi res? – s str. 13 (Marija Vencelj) 106-107
	Križanka “Tu smo že petindvajset let” – s str. 32 (Marko Bokalič)..... 108
ZANIMIVOSTI,	Kockasti dodekaeder (Tomaž Pisanski) 84-85
	Izvor besede sinus (Matija Lokar)..... 90-91
RAZVEDRILO	Sestavljanke (Boštjan Marinšek) 95
	Križanka “Zlati jubilej DMFA Slovenije” (Marko Bokalič)..... 96-97
NOVICE	Za rešitev Bealovega problema razpisana nagrada v višini 50.000 dolarjev (Roman Drnovšek) 78-79
PISMA BRALCEV	Nekaj bi vam radi povedali (Nevenka Dušak in učenci OŠ Nove Fužine) 83
TEKMOVANJA	Mednarodna matematična olimpiada 1999 (Matjaž Željko) 109
	33. področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 109-115
	18. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)..... 115-118
	Naloge s fizikalnega predtekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 1997/98 (Ciril Dominko) 118-123
	Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce (Matjaž Željko)..... 123-125
	19. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog (Aleš Vavpetič)..... 126-128
NA OVITKU	Arhitektura v neravnem zrcalu (foto Andrej Likar) ... I, IV
	Segrevajoče se olje v ponvi (foto Andrej Likar). K slikam na I, II in IV glej tudi članek na strani 66..... II
	Posnetek Sončeve korone ob popolnem sončnem mrku 24. oktobra 1995. Viden je bil s pasu, ki se je raztezal preko Indije in Tajske (sliki sta iz revije Sky & Teleskope, marec 1996, str. 100. Glej tudi članek na strani 80..... III

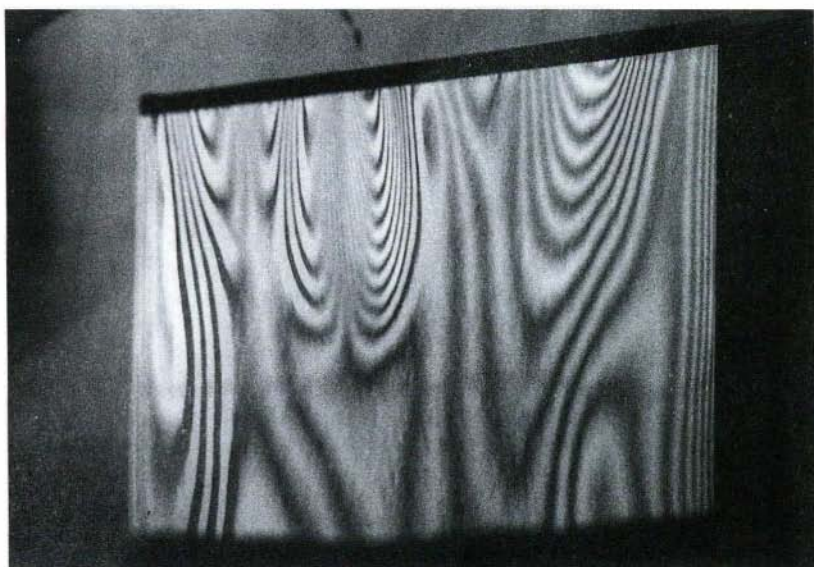
SKRIVLJENA ZRCALA

Moderne stavbe radi obložijo na zunanji strani z velikimi sijajnimi ploščami, ki delujejo kot zrcala. Če opazujemo sliko kakšne sosednje zgradbe v taki zgradbi, vidimo hudo popačeno sliko, ker zrcala niso povsem ravna. Posebej izrazito popačenje vidimo, če opazujemo sliko iz večje oddaljenosti (slike na zunanji strani ovitka). Prav tako hitro opazimo nepravilne oblike v avtomobilski pločevini, plastičnih folijah ali na gladini kake tekočine. Tudi slika na vodni gladini je zaradi valov popačena in nikoli povsem mirna.

S primerjavo prave in zrcalne slike lahko sodimo o ravnosti zrcala. Da ne bodo razmere preveč zapletene, bomo opazovali zrcalo, ki leži vodoravno na mizi. V njem si bomo ogledali sliko okna, zasenčenega z žaluzijami. Svetloba prihaja v prostor skozi množico ozkih vodoravnih špranj v enakih razmikih (slika 1). Špranje so v povsem ravnem zrcalu videti kot množica ravnih svetlih črt. Če opazujemo okno v plastični foliji, pa opazimo prav zapletene vzorce, ki nastanejo zaradi neravne površine (slika 2).



Slika 1. Z žaluzijami zasenčeno okno.



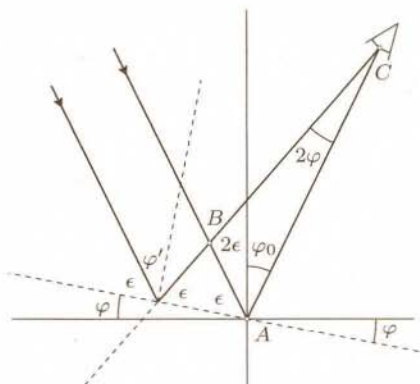
Slika 2. Slika zastrtega okna v neravni plastični foliji za projektorje.

Oglejmo si, kako se spremeni lega slike špranje, če prvotno vodoravno in idealno ravno zrcalo malo zasučemo okrog ene od vodoravnih težiščnih osi. Če ga zasučemo v smeri levo ali desno, da je os vrtenja pravokotna na špranjo, se slika špranje ne premakne. Teh zasukov torej ne bomo mogli opazovati. Če pa ga nagnemo v smeri naprej ali nazaj, da je os vrtenja vzporedna s špranjo, pa se njena slika v zrcalu premakne k opazovalcu ali od njega (slika 3). Premik δ je sorazmeren s kotom zasuka φ in oddaljenostjo opazovalčevih oči od zrcala r :

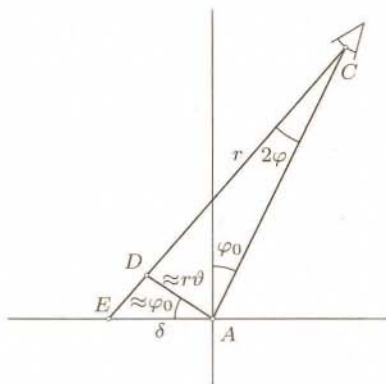
$$\delta = \frac{2r\varphi}{\cos \varphi_0}.$$

Tu je φ_0 vpadni kot, φ pa merimo vadianih.

Enačbo dobimo s privzetkom, da je špranja zelo daleč. Vpadni žarki so potem vzporedni. Po zasuku zrcala za kot φ je zaradi odbojnega zakona kot ϑ v oglišču C enak 2φ , ker je vsota tega kota, kota pri oglišču B , ki je enak 2ϵ , in kota $2\varphi_0$ pri oglišču A enaka 180° . Upoštevamo, da velja še $\epsilon + \varphi + \varphi_0 = 90^\circ$ (slika 3a). Če je kot φ zelo majhen, je daljica AD na sliki 3b približno enaka $r\vartheta$ in premik $\delta \approx \frac{r\vartheta}{\cos \varphi_0}$.



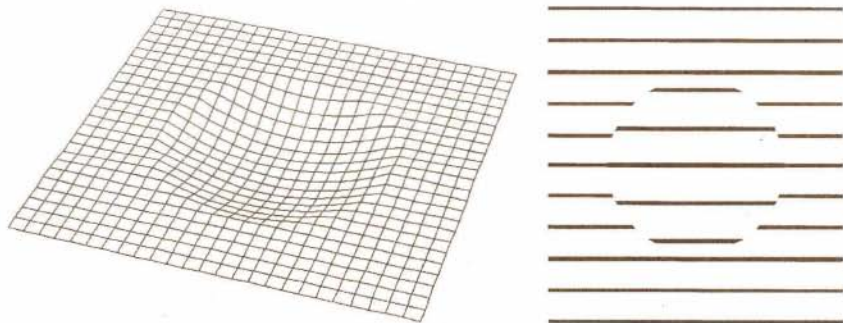
Slika 3a. Skica žarkov v vodoravnem (polne črte) in nagnjenem (črtkane črte) zrcalu.



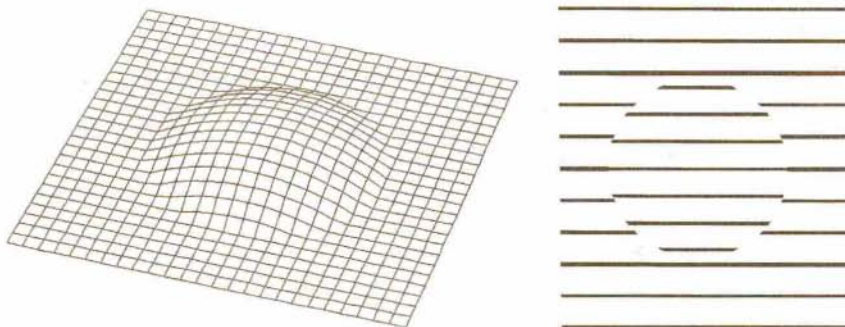
Slika 3b. Skica pri določanju premika slike δ .

Ko z razdalje enega metra opazujemo neravno zrcalo in izmerimo, da je premik δ enak 1 mm, je kot φ v območju $0,5 \cdot 10^{-3}$ radianov. Če so vdolbinice na zrcalu v povprečni razdalji enega centimetra, so globoke približno $5 \mu\text{m}$. Pri tej grobi oceni smo postavili $\cos \varphi_0 = 1$, saj nas zanima le velikostna stopnja globine. Vidimo, da je slika res zelo občutljiv pokazatelj neravnosti odbojne površine.

Z računalniškim programom smo narisali slike okenskih senčil, ki bi jih videli v zrcalih z različnimi površinami. Te opišemo matematično. Program preprosto pregleda množico točk na zrcalu in preveri, če se žarek iz špranje odbije v oko. Točke na zrcalu, kjer se to zgodi, označimo in jih nato izrišemo na računalniškem zaslonu.

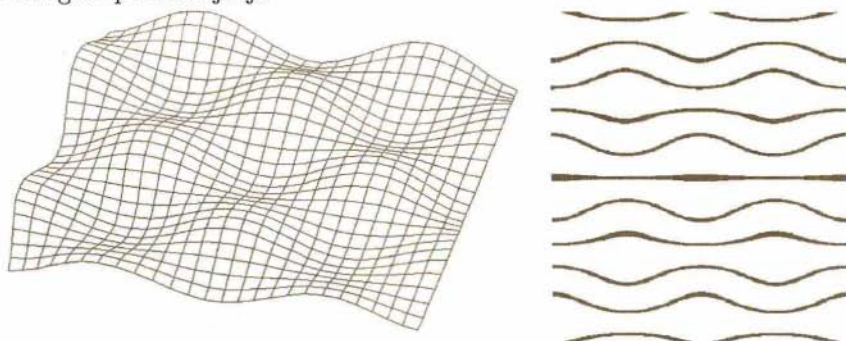


Slika 4. Ravno zrcalo s parabolično jamico in slika okna v njem.

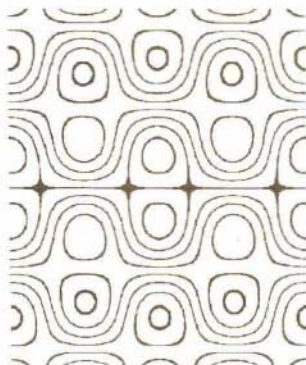


Slika 5. Ravno zrcalo s paraboličnim hribčkom in slika okna v njem.

Najprej imamo v zrcalnih parabolično vdrtno (slika 4), ali parabolični hribček (slika 5). V prvem primeru se razdalje med špranjami povečajo, v drugem pa zmanjšajo.



Slika 6a. Zrcalo z nizkimi grički in dolinami ter slika okna v njem.

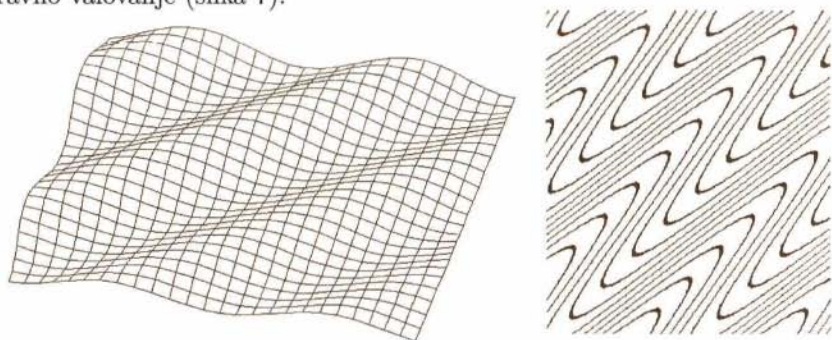


Slika 6b. Slika postane zapletena pri večji višini gričkov.

Potem smo narisali sliko za zrcalo, katerega površino opišemo z enačbo

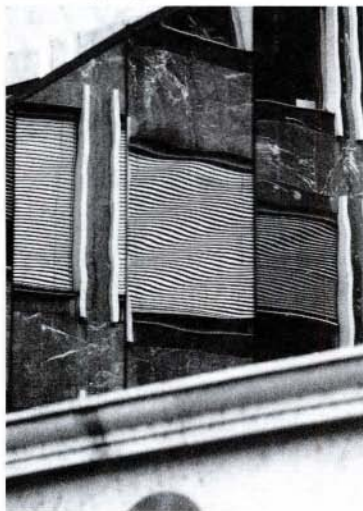
$$z = a \cos px \cos qy,$$

kjer so x , y in z koordinate točke na zrcalu v pravokotnem koordinatnem sistemu. Na sliki 6 je prikazan del zrcala s koordinatama x in y , ki obe ležita v intervalu med -1 in 1. Tu so a , $p = q = 2\pi$ parametri. Slika špranj je pri majhni vrednosti a preprosta, pri večji pa zelo zapletena. Končno smo narisali še sliko špranj, ki jih vidimo v vodni gladini, po kateri potuje ravno valovanje (slika 7).



Slika 7a. Slika špranj v vodni gladini z ravnim potujočim valom.

Zanimiva je slika segrevajočega se olja v ponvi. Površina kaže, da se tvori množica celic, kjer olje kroži od vročega dna na hladnejšo površino (glej slike na II. strani ovitka).



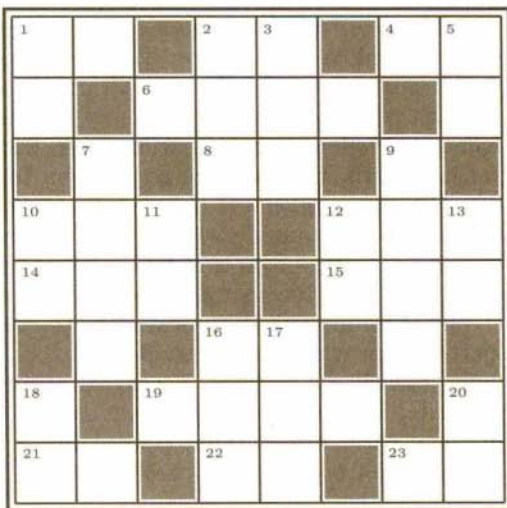
Slika 7b. Valovito zrcalo in žaluzije.

Andrej Likar

ŠTEVILSKA KRIŽANKA

Vodoravno:

- Srednji člen devete vrstice Pascalovega trikotnika.
- Enajsto praštevilo.
- Število robov pri kocki.
- 2^{10} .
- Dolžina (v cm) najkrajše izmed stranic pravokotnega trikotnika, katerega dve stranici merita 24 cm in 26 cm.
- Vrednost izraza $23,1 + 124,4 + 785,3$ na tri mesta natančno.
- $423_{(5)}$ v desetiškem zapisu.
- Središčnica ali mediana števil 129, 140, 128, 131, 133, 139.
- $\frac{7}{12}$ polnega kota, izraženo v stopinjah.
- $4^2 + (-3)^2 + 2$.
- 125 % od 1500.
- $\sqrt{441}$.
- $10\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$.
- Dolžina krožnega loka (v cm), ki pripada središčnemu kotu 60° v krogu z obsegom 96 cm.



Navpično:

- Obseg pravokotnika (v m) s stranicama 1225 cm in 2525 cm.
- $81,27 : 0,27$.
- V stopinjah izražena velikost notranjega kota pravilnega šestkotnika.
- Vsota praštevilskih faktorjev števila 154.
- Prostornina kocke (v cm^3) z robom 11 cm.
- $14_{(10)}$ v dvojiškem zapisu.
- $49_{(11)} + 43_{(11)}$ v enajstiškem številskega sistema.
- Večji del, ki ga dobimo, če število 56 razdelimo v razmerju 3 : 4.
- Število robov šeststrane piramide.
- Dvojna vsota prvih petih naravnih števil.
- Celi del vrednosti izraza $0,19 \times 1480$.
- Aritmetična sredina števil 760, 763, 769, 776, 785, 791.
- Vrednost izraza $c(c-1)$ za $c = -6$.
- Število enakostraničnih trikotnikov s stranico 3, ki natanko in brez prekrivanja pokrijejo enakostranični trikotnik s stranico 12.

Marija Vencelj

STOPNJE TOČK GRAFOV V NALOGAH (za konec gremo tudi v Portorož)

V Preseku in tudi drugje pogosto naletimo na naloge, ki jih lahko prevedemo v jezik teorije grafov. Take naloge so posebej pogoste na mednarodnih matematičnih tekmovanjih mest, ki jih spremlja tudi Presek. Pri nalogah tega tipa nam grafi pomagajo na dva načina. Najprej z njimi nalogo prevedemo v matematični jezik, nato pa z nekaj znanja o grafih in kakšno dobro idejo poskušamo problem tudi rešiti.

Ko sem pregledoval naloge te vrste, sem ugotovil, da jih lahko razdelimo v dve skupini: v skupino nalog o stopnjah točk grafov in skupino preostalih nalog, ki jih tudi lahko rešujemo s pomočjo grafov. Vsaj polovica nalog obravnava stopnje točk in take naloge si bomo ogledali tokrat.

Na tem mestu vabim bralca, da pogleda na konec članka (naloge 7), kjer se odpravimo na portoroško plažo. Če lahko reši zastavljeni problem, zasluži vse čestitke. V vsakem primeru naj se potem vrne nazaj in pregleda, kako rešujemo podobne naloge. Če bo tudi potem portoroški problem ostal pretrd oreh, pa naj bralec pogleda v prihodnjo številko Preseka, kjer bomo objavili rešitev.

Nekaj besed o grafih

O grafih Presek kar pogosto piše, na primer pred kratkim, ko je bilo govora o varnih poteh in kratkih poteh. Tudi v Presekovi knjižnici najdemo prijetno branje o grafih za začetnike (Bajc, Pisanski: *Najnujnejše o grafih*). Nobene škode pa ne bo, če tudi tu pojasnimo osnovne pojme teorije grafov.

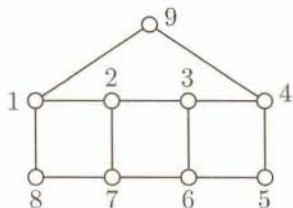
Graf G sestavlja množica točk, ki jo označimo z $V(G)$, in množica povezav, ki jo označimo z $E(G)$. Pri tem je množica $E(G)$ sestavljena iz (neurejenih) parov točk. Točki iz iste povezave imenujemo *sosedi*. Zelo pogosto si pomagamo s sliko grafa, ki jo dobimo takole: Za vsako točko grafa narišemo krožec, med dvema točkama pa potegnemo črto (povezavo), če ti dve točki nastopata kot par v množici $E(G)$. Na primer, če je množica točk grafa G enaka

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

in je množica povezav

$$\begin{aligned} &\{\{1, 2\}, \{1, 8\}, \{1, 9\}, \{2, 3\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \\ &\{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 9\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}\}, \end{aligned}$$

graf G lahko narišemo, kot je prikazano na sliki 1.

Slika 1. Graf G .

Osnovni pojem o grafu, ki ga še potrebujemo, je število povezav, ki izhajajo iz dane točke. Temu številu rečemo *stopnja točke*. Na grafu G s slike 1 so točke 5, 8 in 9 stopnje 2, medtem ko so ostale točke stopnje 3. Dovoljene so tudi točke stopnje 0, torej take, ki nimajo nobenega sosedu. Stopnjo točke u bomo označili z $d(u)$. Dogovorimo se tudi, da naj $|E(G)|$ označuje število vseh povezav grafa G . (V gornjem primeru imamo $|E(G)| = 12$.)

Tale uvodni del zaključimo z naslednjo ugotovitvijo, ki se imenuje *osnovna lema teorije grafov*. Za poljubni graf G z množico točk $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ velja:

$$d(1) + d(2) + \dots + d(n) = 2 \cdot |E(G)|. \quad (1)$$

Osnovna lema teorije grafov torej trdi, da je vsota stopenj točk grafa enaka dvakratniku števila povezav. Res je tako, saj ko seštejemo stopnje vseh točk, vsako povezavo upoštevamo ravno dvakrat. (Preizkusi to sam na gornjem primeru.) Kljub temu, da je osnovna lema teorije grafov dokaj preprosta, je izjemno uporabna. To bomo delno spoznali v nadaljevanju tega članka.

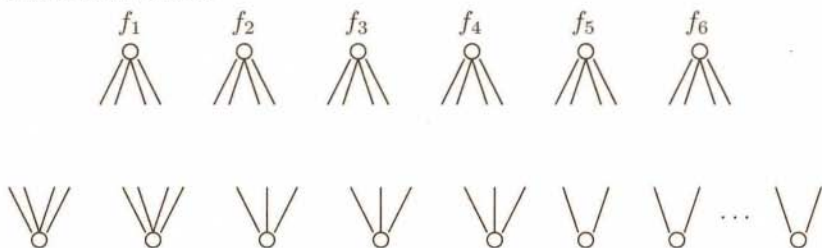
Naloge s stopnjami točk

Naloga 1. (Izbirno tekmovanje za 1. letnik, 1991) V skupini ljudi je vsak poznal liho število ljudi iz te skupine. Dokaži, da je v skupini sodo ljudi.

To je tipična naloga, ki jo s pomočjo osnovne leme teorije grafov uženemo v trenutku. Vsaki osebi priredimo točko grafa, povezave pa naj predstavljajo poznanstva. Predpostavka naloge pravi, da je stopnja vsake točke liho število. Če bi bilo v skupini liho ljudi, potem bi na levi strani enakosti (1) dobili liho število (vsota lihega števila lihich števil je liho število). Ker imamo na desni strani enakosti (1) sodo število, to ni možno, zato mora biti v skupini sodo število ljudi.

Naloga 2. (Izbirno tekmovanje za 1. letnik, 1979) V družbi šestih fantov so tudi dekleta. Dve dekleti poznata vsaka po štiri fante, tri vsaka po tri fante, ostale pa vsaka po dva fanta. Noben fant ne pozna več kot štiri dekleta. Koliko največ je lahko deklet v družbi?

Shematično smo nalogo prikazali na sliki 2, kjer smo z $f_1, f_2, \dots, f_6$ označili šest fantov.



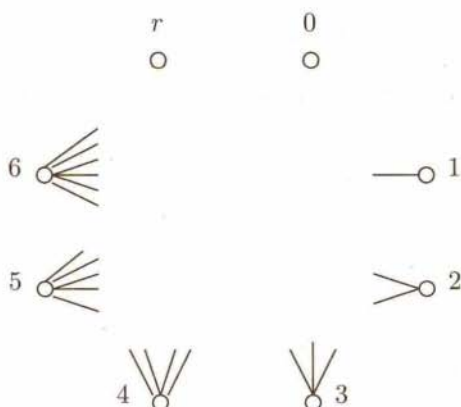
Slika 2. Šest fantov in dekleta.

Največje število deklet bomo imeli v primeru, ko vsak fant pozna po štiri dekleta, ta primer smo tudi prikazali na sliki. Povezav, ki izhajajo iz fantov, je v tem primeru $6 \cdot 4 = 24$. Seveda mora biti tudi število povezav, ki izhajajo iz deklet, enako 24. Pet deklet s štirimi oz. tremi znanci nam da skupaj 17 povezav. Preostane nam še 7 povezav za dekleta z dvema znancema, torej imamo prostora še za tri dekleta. V družbi je torej največ 8 deklet.

Naloga 3. V cirkuški predstavi nastopajo štirje pari klovnov, dva rdeča, dva modra, dva zelena in dva rumena. Med predstavo se na veselje gledalcev zaletavajo med seboj, pri tem pazijo le, da se ne zale-tijo v klovna enake barve. Nekega dne je prvi rdeči klovn po predstavi vprašal vseh preostalih sedem klovnov, v koliko drugih klovnov so se zaleteli med predstavo. Dobil je same različne odgovore. V koliko klovnov se je med predstavo zaletel drugi rdeči klovn?

Na prvi pogled je videti, kot da nalogi manjkajo podatki. Vendar temu ni tako. Sestavimo graf G takole: Njegove točke naj predstavljajo klovne, graf ima torej 8 točk. Dve točki povežimo s povezavo, če sta se ustrezna klovna med predstavo zaletela. Zanima nas torej stopnja točke, ki ustreza drugemu rdečemu klovnu.

Stopnja točke v grafu G je največ 6, saj imamo 8 točk, klovn pa ni sam sebi sosednji in tudi klovnu iste barve ne. Zato so odgovori, ki jih je dobil prvi rdeči klovn, enaki 0, 1, 2, 3, 4, 5 in 6. Označimo ustrezne točke v G kar z 0, 1, 2, 3, 4, 5 in 6, prvega rdečega klovna pa z r (glej sliko 3).



Slika 3. Stopnje klovnov.

Poglejmo klovna stopnje 6. Ta je sosednji vsem klovnom, razen isotobarvnemu. Ta mora biti seveda stopnje 0, saj imajo vsi drugi klovni vsaj enega sosedo. Recimo, da klovna 6 in 0 tvorita modri par. Poglejmo sedaj klovna, ki je odgovoril s 5. Ta klovn ni sosednji 0 niti 1 (saj je njemu sosednji 6). To pomeni, da klovna 5 in 1 tvorita par, recimo zelenega. Z enakim premislekom bo sedaj vsak sam ugotovil, da klovna 4 in 2 tvorita rumeni par. To pa že pomeni, da je klovn 3 drugi rdeči klovn, torej se je zaletel s tremi drugimi klovni.

Naloga 4. (14. mednarodno tekmovanje mest – pomladanski krog, prva skupina, 1992/93) V Petrovem razredu je poleg njega še 25 dijakov. Peter je opazil, da ima vsak izmed teh 25 dijakov različno število prijateljev. Koliko prijateljev ima Peter v tem razredu? Podaj vse možne odgovore.

Ta naloga precej spominja na prejšnjo, klovnovsko, zato bomo rešitev le skicirali, bralec pa naj doda manjkajoče podrobnosti.

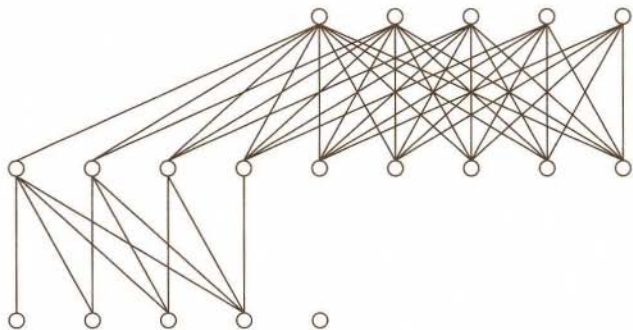
Ker ima ustrezni graf 26 točk, je največja možna stopnja 25. Ločimo dva primera. V prvem primeru predpostavimo, da ima vsak vsaj enega prijatelja, torej da ni točke stopnje 0. Torej, 25 dijakov ima stopnje od 1 do 25. Sedaj kot v nalogi s klovni pridemo do zaključka, da ima Peter 13 prijateljev.

V drugem primeru predpostavimo, da imamo točko stopnje 0. To pomeni, da ima preostalih 24 dijakov stopnjo največ 24, zato so njihove stopnje od 1 do 24. Kot pri klovni zopet sklepamo, da ima Peter v tem primeru 12 prijateljev.

Naloga 5. (18. mednarodno tekmovanje mest – jesenski krog, prva skupina, 1996/97)

- Ali obstaja taka družba 10 deklet in 9 fantov, da so števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, med seboj različna, števila deklet, s katerimi se posamezni fantje poznajo, pa so med seboj enaka?
- Ali obstaja družba 11 deklet in 10 fantov z zgornjo lastnostjo?

Rešitev te naloge najdemo v prvi številki lanskega Preseka. Tu le dodajmo, da (negativni) odgovor na vprašanje b) takoj dobimo z osnovno lemo teorije grafov, ustrezeni graf za (pozitivni) odgovor na vprašanje a) pa je prikazan na sliki 4.



Slika 4. Rešitev naloge 5.

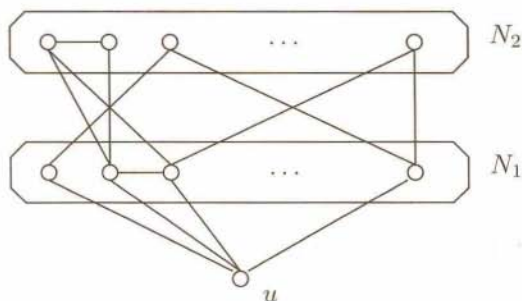
Zadnja naloga, ki jo bomo rešili, je zahtevnejša in primerna za dijake v zaključnih razredih srednje šole. Kdor ne sodi v to skupino, naj nalogo kar preskoči in se loti portoroških plaž.

Naloga 6. (16. mednarodno tekmovanje mest – pomladanski krog, druga skupina, 1994/95) Dokaži, da sta v skupini 50 ljudi vedno dva, ki imata sodo število (lahko tudi 0) skupnih znancev iz skupine.

Kot smo že navajeni, bodo točke grafa za to nalogo predstavljale ljudi in povezave poznanstva.

Najprej opazimo, da ni kaj dokazovati, če obstajata dve točki, ki nimata skupnega soseda (saj imata 0 skupnih sosedov). Predpostavimo torej, da ni dveh takih točk. Zato si graf lahko predstavljamo takole: Vzemimo neko poljubno točko, recimo u . Nato en nivo nad njo narišimo vse njene sosede, še en nivo višje pa vse sosede sosedov, ki jih še nismo narisali

(glej sliko 5). Prvi nivo smo označili z N_1 in drugega z N_2 . Povezave našega grafa torej potekajo med u in N_1 , med N_1 in N_2 ter znotraj N_1 in znotraj N_2 .



Slika 5. Graf poznanstev po nivojih.

Na sliki 5 se pojavijo vse točke našega grafa. Če bi namreč obstajal še en višji nivo, potem točka u ne bi imela skupnega soseda s točkami tretjega nivoja, vendar smo to možnost izključili.

Naj bo v poljubna točka iz N_1 , torej poljubna soseda točke u . Če ima v znotraj N_1 sodo sosedov, je problem rešen, saj imata tedaj u in v sodo število skupnih sosedov. Zato predpostavimo, da ima v liho sosedov v N_1 . Ker je bila v poljubna točka iz N_1 , ima torej vsaka točka iz N_1 liho sosedov v N_1 . Sedaj uporabimo osnovno lemo teorije grafov, iz katere sledi, da je v N_1 sodo število točk. Z drugimi besedami, stopnja točke u je sodo.

Spomnimo se, da je bila u poljubna točka našega grafa, torej smo ugotovili, da so vse točke grafa sode stopnje.

Vzemimo sedaj poljubno točko w iz N_2 . Če ima w sodo sosedov v N_1 , smo opravili, saj imata tedaj u in w sodo skupnih sosedov. Zato predpostavimo, da ima w liho sosedov v N_1 . Ker je v N_1 sodo število točk, ki imajo sodo mnogo sosedov v N_2 , ugotovimo, da mora biti v N_2 sodo število točk. Torej imamo sodo točk v N_1 , sodo točk v N_2 in še točko u , skupaj torej liho število točk. To seveda ni možno, saj ima graf po predpostavki 50 točk. Tako smo prišli v protislovje, ki nam pove, da smo morali v enem prejšnjih korakov izpeljave imeti situacijo z dvema točkama s sodim številom skupnih sosedov.

Pozorni bralec je verjetno opazil, da naloge nismo rešili le za 50 ljudi, ampak za poljubno skupino sodo mnogo ljudi.

Tako. Spoznali smo nekaj tipičnih nalog, ki jih lahko rešimo s pomočjo grafov in stopnjami točk. Za konec pa še obljubljena portoroška naloga.

Naloga 7. Kot gotovo veste, je portoroška plaža sredi poletja zelo zasedena. Vsekakor toliko, da imate, kjerkoli že ste na njej, na razdalji do 10 m še druge obiskovalce. Pokaži, da lahko v takem vrvežu vedno najdemo dve osebi, ki imata enako število obiskovalcev plaže, oddaljenih do 10 m od njiju. Ali trditev velja tudi, če 10 m zamenjamo s 100 m?

Sandi Klavžar

ZA REŠITEV BEALOVEGA PROBLEMA RAZPISANA NAGRADA V VIŠINI 50.000 DOLARJEV

Andrew Beal je ameriški milijonar iz Dallasa. Star je 45 let, ima 5 otrok in je lastnik največje lokalne banke v Dallasu. Zelo ga zanima matematika in njen pomen v družbi. Veliko časa je razmišljal o Fermatovem problemu, o katerem je bilo v Preseku že veliko napisanega. Problem je leta 1994 rešil angleški matematik Andrew Wiles, ki je z zelo zahtevnim dokazom potrdil Fermatovo domnevo, da za poljubno naravno število $n > 2$ enačba

$$x^n + y^n = z^n$$

ni rešljiva v množici naravnih števil. Andrew Beal je še vedno prepričan, da je Fermat poznal relativno enostaven dokaz svoje domneve. Postavil pa je tudi svojo domnevo o rešitvah enačbe

$$x^m + y^n = z^r,$$

ki je podobna Fermatovi enačbi, le da imamo namesto enega samega eksponenta (n) tri (m, n in r). Recimo tej enačbi na kratko Bealova enačba. Če dopuščamo, da je vsaj en eksponent enak 1 ali 2, potem ima Bealova enačba mnogo rešitev. Tudi pri dodatni zahtevi, da so eksponenti različni, je mogoče najti primere: $1^1 + 2^3 = 3^2$, $2^5 + 7^2 = 3^4$ in $7^3 + 13^2 = 2^9$.

Vzemimo sedaj, da so naravna števila m, n in r večja od 2. Tedaj Andrew Beal domneva naslednje:

Če naravna števila x, y in z zadoščajo Bealovi enačbi, potem imajo skupni delitelj (večji od 1).

V enakosti $3^6 + 18^3 = 3^8$ imajo na primer števila 3, 18 in 3 skupni delitelj 3.

Če Bealova domneva drži, potem iz nje takoj sledi Fermatov izrek. Če bi bila Fermatova enačba pri nekem $n \geq 3$ izpolnjena za naravna števila x , y in z , potem bi po deljenju z njihovim največjim skupnim deliteljem dobili trojico naravnih števil, ki bi še vedno ustrezala Fermatovi enačbi, njihov največji skupni delitelj pa bi bil 1. To pa bi bilo v protislovju z Bealovo domnevo.

Zanimanje za Fermatov problem je leta 1906 povečal nemški industrialec Paul Wolfskehl. Le ta je namreč z oporoko zapustil 100.000 takratnih nemških mark Akademiji znanosti v Göttingenu s prošnjo, da ta znesek izroči prvemu, ki bo rešil Fermatov problem. Čeprav je zaradi inflacije nagrada izgubila precej vrednosti, je Andrew Wiles leta 1997 za rešitev Fermatovega problema vseeno dobil okoli 50.000 ameriških dolarjev. Na tej podelitvi Wolfskehlove nagrade se je izkazalo, da je na Akademiji zelo malo znanega o tem, zakaj je Wolfskehl napisal takšno oporoko. Dolgo časa so mislili, da ga je zapustila njegova izvoljenka in je zato razmišljal o samomoru, dokler ni izvedel za Fermatov problem, ki mu je zopet vtil voljo do življenja. Kasnejša poizvedovanja pa so pokazala, da je Paula Wolfskehla, ki je bil samec do svojega 47. leta, njegova družina prisilila v poroko s 53-letno Marie Fröhlich, hčerko davčnega svetovalca. Gospa je bila grozna prepirljivka in je svojemu možu zagrenila preostanek življenja. Wolfskehl jo je zato tako sovražil, da ji ni hotel zapustiti svojega bogastva.

Ker je Bealova domneva tesno povezana s Fermatovim izrekom, ban-
kir Andrew Beal za rešitev svojega problema ponuja nagrado v višini **50.000** dolarjev. Na začetku je sicer ponujal nagrado v višini 5.000 dolarjev, ki bi se vsako leto povečala za 5.000 dolarjev, dokler ne bi dosegla zneska 50.000 dolarjev. Vsakdo, ki misli, da je problem rešil, lahko rešitev pošlje profesorju Danielu Mauldinu v Texas. Le-ta predseduje komisiji treh profesionalnih matematikov, ki bo pregledala prispele rešitve.

Z Bealovo enačbo pri različnih pogojih za števila m , n in r se je ukvarjalo že nekaj matematikov. Radovedni bralec bo več podatkov o tem našel v članku, ki je decembra leta 1997 izšel v matematični reviji *Notices of the American Mathematical Society*. Njegov avtor, profesor Mauldin, presenečeno ugotavlja, da je nekdo, ki se profesionalno ne ukvarja s teorijo števil, postavil hipotezo tako blizu trenutni raziskovalni dejavnosti v teoriji števil. Na osnovi dosedanjih rezultatov je pričakovati, da Bealova domneva drži, vendar jo je mogoče potrditi le z uporabo zelo zahtevnih metod. Morda pa je pot res preprosta. Velja poskusiti!

Roman Drnovšek

O NAM NAJBЛИŽJI ZVEZDI – 1. del

Če ste ob naslovu pomislili na 4.2 svetlobnih let oddaljeno zvezdo α Cen (Alfa Kentavra), ste v zmoti! Nam zares najbližja zvezda je skoraj tristo tisočkrat bliže – to je naše Sonce. Sonce je ena izmed povprečnih in navadnih zvezd, kakršnih je v Galaksiji na milijarde. Vendar pa je ključnega pomena za Zemljane, saj je po srečnem naključju Zemlja na ravno pravi oddaljenosti od Sončeve peči, da ugodna temperatura omogoča življenje na njej. Na kratko in le opisno bomo predstavili nekaj poglavij sodobne solarne astronomije, kakor pravimo delu astronomije, ki se ukvarja s Soncem. Mnogim, ki jih astronomija sicer zanima in privlači, se včasih zdi opazovanje našega Osončja manj zanimivo od na primer galaktične astronomije ali kozmologije. V resnici pa je tudi solarna astronomija še polna nerešenih in nadvse zanimivih vprašanj.

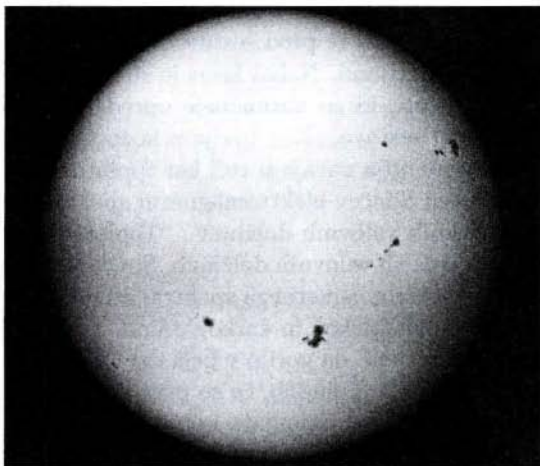
Preden začnemo naštevati še nerešena vprašanja solarne astronomije, navedimo nekaj podatkov in kratek fizikalni opis pojavov, ki potekajo na Soncu in v njem.

Sončeva masa znaša $2 \cdot 10^{30}$ kilogramov ali 333 000 mas Zemlje. Ker je v astronomiji še mnogo tako ali bolj masivnih objektov, se je zdela prav masa Sonca primerna enota, tako da mase drugih objektov skoraj vedno izražamo v masah Sonca (oznaka $M_{\odot}$). Sončev polmer je 700 000 kilometrov, torej 109-krat večji od Zemljinega. Povprečna gostota Sončeve snovi je 1.4 g/cm^3 , snov v sredici pa je več kot stokrat gostejša. Temperatura na Sončevi površini je 5800 K, v sami sredici pa dobrih petnajst milijonov K. Sonce je sestavljeno iz koncentričnih plasti, vendar pa pri zunanjih atmosferskih plasteh ne moremo več govoriti o pravih oblikah krogelne lupine. Centralni del Sonca, sredico, v kateri se vodikovi atomi zlivajo v atome helija, obdaja področje, preko katerega se pri jedrskih reakcijah nastala energija prenaša navzven s sevanjem. To področje, s tujko mu pravimo radiacijska cona, obdaja konvekcijska plast. Sledi tanka fotosfera, le-to pa obdaja kromosfera, ki že predstavlja prvo atmosfersko plast. Zunanji del Sončeve atmosfere je korona, ki prehaja v medzvezdni prostor. Površino Sonca predstavlja zunanji rob fotosfere. Ta v resnici ni trdna, kot je to pri Zemlji, oziroma kot smo za površino teles navajeni. Sonce je v celoti plinasto, gostota plina je največja v središču, v smeri navzven pa se manjša. Tisto, čemur pravimo Sončeva površina, je le meja med ti. optično gostim in optično redkim plinom za vidno svetlobo. Skozi optično redek plin lahko vidimo, skozi optično gostega pa ne, zato se nam meja med obema zdi kot nekakšna trdna površina. Ko gledamo svetlo Sončevo površino, gledamo fotosfero, čudovito Sončevo atmosfero pa lahko opazujemo med sončnim mrkom, ko svetlo Sončevo površino zakrije Luna (slika na III. strani ovitka).

Izvor Sončeve energije so že pred šestdesetimi leti po večini fizikalno pojasnili z jedrskimi reakcijami. Nekaj kasneje so sledili še podrobni modeli o Sončevi notranjosti, ki so natančneje opredelili temperaturo, gostoto, tlak in kemijsko sestavo. Ker ljudje s kožo čutimo Sončevo "toploto", smo namesto energija navajeni reči kar toplota, medtem ko astronomi preučujejo celoten Sončev elektromagnetni spekter in zato govorijo o energiji pri posameznih valovnih dolžinah. "Toplota" predstavlja energijo, izsevano pri infrardečih valovnih dolžinah, Sonce pa danes opazujemo na širokem področju elektromagnetnega spektra, od dolgih radijskih valov pa do kratkih rentgenskih žarkov in žarkov gama. Če bi Sončevo gorivo gorelo tako, kot smo navajeni, da gorijo v peči drva ali premog, bi namreč že zdavnaj ugasnilo. Seveda ni čudno, če so prva ugibanja o tem, kaj gori v "Sončevi peči", kot možnost omenjala ravno to, kemijsko gorenje. Na osnovi te ideje se da oceniti, koliko časa bi lahko Sonce "gorelo" na tak način. Ta čas je bistveno manjši od starosti najstarejših fosilov, najdenih na Zemlji, Zemlja pa mora biti mlajša ali kvečjemu približno tako stara kot je Sonce. Torej mora biti gorenje drugačno, mnogo bolj učinkovito. Pri jedrskih reakcijah se v skladu z znano Einsteinovo enačbo masa pretvarja v energijo, vendar ne v celoti: pri vsaki reakciji se v energijo spremeni 7/10 odstotka mase sodelujočih jeder. Tako se v Soncu vsako sekundo pretvori v energijo štiri milijone ton snovi, kar se sliši veliko, vendar pa je celotna Sončeva masa še mnogo, mnogo večja: v pet milijardah let, kolikor je Sonce staro, se je tako v energijo pretvorilo le nekaj desetlin promila celotne Sončeve mase.

Med zanimivimi pojavi, ki so povezani s Soncem, so najbolj znani tisti, ki jih lahko opazujemo s prostim očesom ali s pomočjo preprostejših optičnih priprav. Tak je na primer sončni mrk. Ker pa je vzrok zanj povsem geometrijske narave (in ne fizikalne), se z njim tu ne bomo ukvarjali.

Ima pa pojavljanje ti. peg na Soncu fizikalno ozadje. Pege so fotosfer-ski pojav in jih z Zemlje vidimo kot temne lise nepravilnih oblik. Povezane so z magnetnim poljem in se pojavljajo v parih: skozi prvo, ki je kot severni magnetni pol, izstopi šop magnetnih silnic v fotosfero, skozi drugo, južni magnetni pol, pa se vanjo vrača. Vzorec peg se s časom spreminja, saj pege trajajo od nekaj ur do nekaj mesecev, nato pa polagoma izginejo. Pegasta podoba Sončevega obraza se spreminja tudi zaradi vrtenja Sonca. Ko pega zaide na enem robu Sonca, potrebuje približno štirinajst dni, da se spet prikaže na drugem robu, če se seveda vmes že ne razgradi. Dolgoletna opazovanja so pokazala, da se maksimalno število peg pojavlja na vsakih enajst let.



Črnobeli posnetek Sončevega diska, narejen s 130 milimetrskim refraktorjem. Na njem so dobro vidne sončne pege.

Na Soncu se dogaja še en zelo zanimiv pojav. Podobno kot se na Zemlji pojavljajo potresi, ki jih merijo seizmologi, se po Soncu širijo zvočni valovi. S temi se ukvarjajo helioseizmologi.¹ Zvočni val se v gostejši snovi širi hitreje kot v redkejši, torej se na poti proti Sončevi notranjosti širi vse hitreje. Zato se odklanja navzven, proti površini. Od nje se odbije nazaj v notranjost in pri tem rahlo zaniha fotosfero. Ti nihaji pa so izjemno majhni, fotosfera zaniha le za kakih 25 metrov, njena temperatura se pri tem spremeni samo za nekaj tisočin Kelvina. Tako majhne spremembe je seveda z oddaljenosti 150 milijonov kilometrov težko opaziti. Astronomi si pomagajo na dva načina: z merjenjem periodičnih Dopplerjevih premikov dobro znanih spektralnih črt in z merjenjem izjemno majhnih, a pravilnih sprememb celotnega Sončevega izseva. (Izsev (izsevana moč) v astronomiji označujemo s črko *L* (angl. *luminosity*) predstavlja na enoto časa izsevano energijo in se meri v Wattih ali J/s.) Sončevih zvočnih nihanj je na milijone, in če bi jim lahko prisluhnili, bi slišali pisano pesem vseh mogočih barv in melodij. Frekvence teh zvočnih nihanj pa so žal "infrabasovske", daleč pod slišnim pragom človeškega ušesa. Manjša kot je frekvenca vala, globlje v notranjost Sonca bo prodrli. Opazovanje zvočnih valov torej nudi astronomom izjemno pomemben način za preučevanje

¹ Helios je v starogrški mitologiji sončni bog, ki se zjutraj vzpenja iz Okeana na nebo z bleščečo sončno vprego, v katero so vpreženi štirje iskri konji, zvečer odhaja spet v Okean. Od tod tudi pride ime za kemijski element helij, katerega so najprej odkrili na Soncu, v spektru Sončeve svetlobe.

Sončeve notranjosti, ki je ne moremo neposredno videti. Širjenje zvočnih valov po snovi je odvisno od njene temperature ter gostote in kemične sestave. Opazovanja izbranega vala tako primerjajo z napovedmi, ki jih za našete količine dajo teoretični modeli o notranjosti Sonca. Tako so sprva z modeli napovedali nižjo hitrost zvočnih valov, kot so jo kasneje izmerili. Na ta način so ugotovili, da je snov v notranjosti optično gostejša, kot so mislili sprva, da torej bolj zaustavlja pretok energije. Z merjenjem zvočnih valov so tudi določili spodnjo mejo konvekcijske plasti. Z zadnjim odstavkom pa smo že posegli v eno od področij sodobne solarne astronomije, saj so natančna merjenja solarnih zvočnih nihanj postala pomemben in obetaven način za iskanje novih spoznanj o Soncu. Za helioseizmologijo je še posebej pomemben ameriški satelitski observatorij SOHO (solarni in heliosferični observatorij), ki so ga izstrelili decembra leta 1995. To je najsodobnejši solarni observatorij doslej, kroži na oddaljenosti približno enega odstotka poti do Sonca, njegova orbita pa je izbrana tako, da lahko opazuje Sonce 24 ur na dan in 365 dni na leto.

Prihodnjiki pa o manj znanih lastnostih Sonca.

Mirjam Galičič

NEKAJ BI VAM RADI POVEDALI

Večkrat z učenci prelistamo Presek in tako smo zasledili tudi članek o dr. Francu Močniku. Ugotovili smo, da o gospodu Močniku vemo zelo malo, in se odločili o njem izvedeti kaj več.

V Šolskem muzeju smo našli obilico gradiva o znanem matematiku, tudi zbirko njegovih del. Težava pa je bila v tem, da so mnoga od njih neprevedena. Zato smo se obrnili še na gospoda Zvonka Perata, ki nam je prijazno ponudil pomoč.

Zbrano in odkrito gradivo nas je vzpodbudilo, da se lotimo pisanja prave raziskovalne naloge. Naslovili smo jo *Kako dr. France Močnik ... in kako danes ...* V njej smo želeli primerjati njegov način poučevanja, izbiro nalog in učbenikov z današnjimi.

Snov sama je zelo obsežna, zato smo se v nalogi omejili na tri poglavja, ki so nam delala največ težav pri učenju. Ob napotkih za izdelavo raziskovalne naloge avtorice Marjane Plukavec in ob zavzetem delu nam je uspelo in nalogo smo uspešno predstavili 17. aprila na Gimnaziji Šentvid.

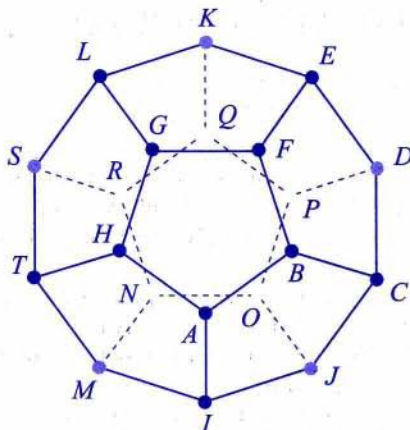
Učenci Nejka, Matej in Siniša so bili krasna ekipa, vsem za vzpodbudo pa naj bodo njihove besede: "Teme, ki se vam zdijo težke in nerazumljive, postanejo lažje in prijetnejše, če se jih lotimo še kako drugače kot pri običajnem pouku."

Nevenka Dušak in učenci OŠ Nove Fužine

KOCKASTI DODEKAEDER

Namen prispevka je opozoriti, da je potrebno razlikovati med geometrijskim telesom in njegovim skeletom: grafom. Medtem ko je telo geometrijski pojem, ki ima *oglišča*, *robove* in *ploskve*, pa je njegov graf le kombinatorični pojem, v katerem postanejo oglišča *točke* (ali *vozlišča*) grafa, robovi pa *povezave* grafa. Medtem ko je mogoče npr. izmeriti dolžino roba telesa, je povezava le oznaka za sosednost točk grafa. Več o grafih najdete v knjižici Drago Bajc, Tomaž Pisanski: *Najnujnejše o grafih*, Ljubljana, DMFAS, 1985.

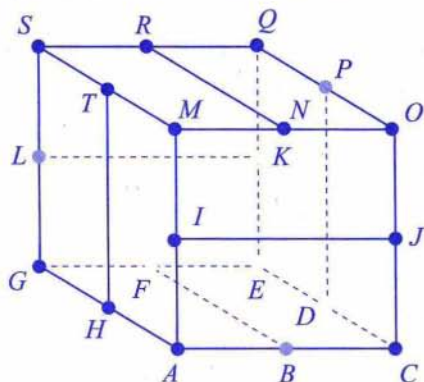
Pravilna telesa so občudovali že v stari Grčiji. O tem govori tudi njihovo poimenovanje, saj jim pravijo tudi *platonška telesa*. Eden matematičnih čudežev, ki se skriva v njih, je simetrija. Simetrije so namreč v nekem smislu največ, kar lahko pričakujemo pri telesih. To ima tudi povsem praktične posledice, npr. v kemiji. Čeprav je število znanih molekul ogromno, njihove simetrije lahko razvrstimo v zelo majhno število predalčkov. Bralec, ki ga tole nematematično govorjenje ne prepriča, se bo moral seznaniti z različnimi zahtevnejšimi matematičnimi pojmi. Najpomembnejši koncept, ki manjka, je pojem *grupe*.



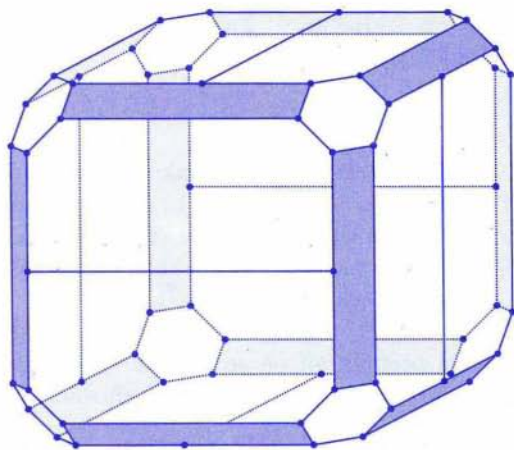
Slika 1. Dodekaeder.

Pravilna telesa so *tetraeder*, *oktaeder*, *heksaeder* - *kocka*, *dodekaeder* in *ikozaeder*. Prve tri dobro poznamo in jih srečamo tudi v šoli. Tetraeder je pravilna tristrana piramida, oktaeder je pravilna štiristrana bipiramida. To pomeni, da ga lahko dobimo tako, da zlepimo vzdolž obeh osnovnih ploskev dve pravilni štiristrani piramidi. O kocki najbrž ni potrebno izgubljati besed.

Na sliki 1 si lahko ogledamo, kako je videti dodekaeder, če ga pogledamo od zgoraj. Naštejemo 20 oglišč, 30 robov in 12 petkotnih lic. Zanimivo pa je, da je mogoče dodekaedru nadeti kockasto obliko (slika 2).



Slika 2. Če graf s slike 1 narišemo drugače, dobimo kockasti dodekaeder.



Slika 3. Skelet tega telesa je graf, ki ga poznamo v kemiji in športu.

Nedavno je Siemion Fajtlowicz, matematik z Univerze v Houstonu, Teksas, na nekem znanstvenem srečanju v ZDA prikazal zanimiv graf (slika 3). Če ga narišemo drugače, dobimo telo, ki ga dobro poznajo navdušeni športniki, v prejšnjem desetletju pa je povzročilo tudi majhno revolucijo v kemiji ogljika.

Tomaž Pisanski

O PREMOČRTNEM IN KROŽNEM GIBANJU

Telo, ki se giblje premočrtno s konstantno hitrostjo, pride v enakih časih enako daleč. Isto velja za telo, ki enakomerno kroži po krogu: v enakih časih opiše enako dolge loke, enaki loki na krogu pa imajo enake tetive. Zato se telo tudi v tem primeru v enakih časih enako oddalji. Ali je še kak drug način gibanja s to lastnostjo?

Pa denimo, da se točkasto telo giblje v ravnini tako, da pride v enakih časih enako daleč. To pomeni: če je v času t_1 v točki T_1 in v času t_2 v T_2 in če je nadalje v času t'_1 v točki T'_1 , v času t'_2 pa v T'_2 , potem je razdalja $\overline{T_1 T'_2}$ enaka razdalji $\overline{T_1 T_2}$, brž ko je razlika časov enaka, to se pravi, brž ko je $t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$.

Zaznamujmo s T_0 lego našega telesa v nekem začetnem času $t = 0$ in s $T(t)$ njegovo lego v poljubnem času t . Tu seveda privzamemo, da telo ne dela skokov. Zato je točka $T(t')$ tako blizu točke $T(t)$, kakor želimo, če je le časovna razlika $t' - t$ dovolj majhna.

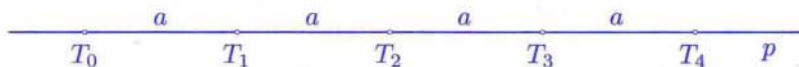
Telo pride čez nekaj časa v neko sosednjo točko $T_2 \neq T_0$ (primer, da telo miruje, seveda izključimo). Zaznamujmo ta čas z 2τ , tako da je $T_2 = T(2\tau)$. Pišimo

$$T(k\tau) = T_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

V času $t = k\tau$ se je potemtakem telo premaknilo iz točke T_0 v T_k . Dobimo zaporedje točk $T_0, T_1, T_2, \dots$. Vse daljice $\overline{T_k T_{k+1}}$ so enako dolge, saj pride telo iz vsake točke T_k v naslednjo T_{k+1} v enakem času τ . Isto velja za daljice $\overline{T_k T_{k+2}}$, ki so tudi vse med seboj skladne (telo se premakne iz T_k v T_{k+2} v času 2τ), skladne so tudi daljice $\overline{T_k T_{k+3}}$ itd.

Ker je $T_2 \neq T_0$ in $\overline{T_0 T_1} = \overline{T_1 T_2}$, so T_0, T_1 in T_2 različne točke. Ležijo lahko vse tri na isti premici ali pa so oglišča trikotnika, ki je seveda v ravnini, v kateri se giblje telo. Oglejmo si obe možnosti:

(I) T_0, T_1, T_2 so na isti premici, ki jo imenujmo p (slika 1). Očitno je T_1 med T_0 in T_2 . (Samo v tem primeru je namreč $\overline{T_0 T_1} = \overline{T_1 T_2}$.) Kje leži točka T_3 ? Če T_3 ne bi bila na premici p , bi bile točke T_1, T_2, T_3 oglišča pravega trikotnika. Stranice tega trikotnika so $\overline{T_1 T_2} = \overline{T_0 T_1} = a$, $\overline{T_2 T_3} = \overline{T_0 T_1} = a$ in $\overline{T_1 T_3} = \overline{T_0 T_2} = 2a$. Vsota stranic $\overline{T_1 T_2}$ in $\overline{T_2 T_3}$ je $a + a = 2a$, torej je enaka tretji stranici $\overline{T_1 T_3} = 2a$. Toda v pravem trikotniku je vsota dveh stranic vselej večja od tretje stranice. Zato morajo biti oglišča T_1, T_2 in T_3 na isti premici. Torej leži tudi točka T_3 na premici p , in sicer na nasprotni strani točke T_2 kakor T_1 .

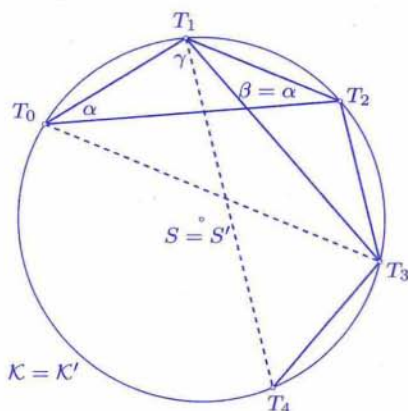


Slika 1.

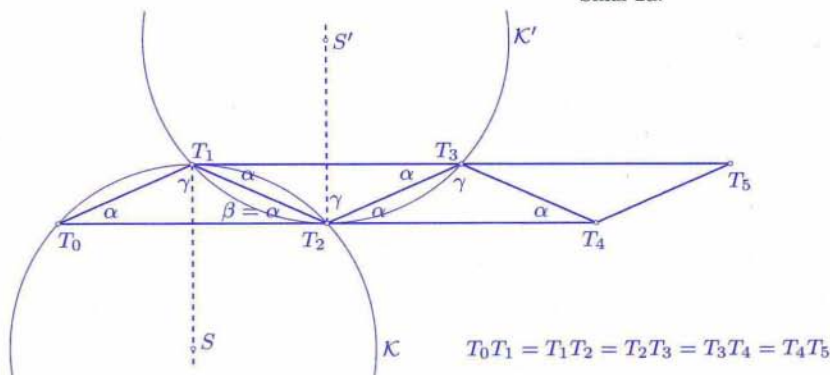
Če izhajamo iz trojke T_1, T_2, T_3 namesto iz trojke T_0, T_1, T_2 , ugotovimo, da je tudi točka T_4 na premici p . Tako nadaljujemo in vidimo, da so v tem primeru vse točke T_k na premici p .

(II) T_0, T_1, T_2 so oglišča trikotnika, in sicer enakokrakega z vrhom v T_1 , ker je $T_0T_1 = T_1T_2$ (sliki 2a in 2b). Naj bodo njegovi koti α, β in γ . Kje leži v tem primeru točka T_3 ? Trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$ sta skladna (ujemata se v vseh stranicah: $T_0T_1 = T_1T_2, T_1T_2 = T_2T_3$ in $T_0T_2 = T_1T_3$), zato imata pripadajoči očrtani krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ enak polmer. Ker gresta obe krožnici skozi točki T_1 in T_2 , imamo spet dve možnosti:

(IIa) Središči S in S' krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ ležita na isti strani stranice T_1T_2 . V tem primeru središči sovpadata in prav tako obe krožnici, torej $S' = S$ in $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. (Središče krožnice, ki je očrtana enakokrakemu trikotniku, leži na isti strani kraka kakor trikotnik. V našem primeru sta torej oba trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$ na isti strani stranice T_1T_2 , kakor kaže slika 2a.) Ker se krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ ujemata, ima štirikotnik $T_0T_1T_2T_3$ očrtano krožnico, namreč $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$.



Slika 2a.



Slika 2b.

(IIb) Središči S in S' sta na nasprotnih straneh stranice T_1T_2 . Isto velja v tem primeru za trikotnika $T_0T_1T_2$ in $T_1T_2T_3$, ki sta tudi na nasprotnih straneh imenovane stranice (slika 2b). Enakokraki trikotnik $T_1T_2T_3$ ima pri vrhu T_2 kot γ , pri T_1 in T_3 pa sta kota enaka $\alpha = \beta$. Zato je štirikotnik $T_0T_2T_3T_1$ paralelogram, nasprotne stranice so v njem vzporedne. Očrtane krožnice ta štirikotnik nima. Krožnici $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ sta namreč tu različni.

Poiščimo zdaj točko T_4 ! Oglejmo si najprej primer (IIa). Ker sta štirikotnika $T_0T_1T_2T_3$ in $T_1T_2T_3T_4$ skladna (ujemata se v vseh stranicah in obeh diagonalah), premore tudi štirikotnik $T_1T_2T_3T_4$ očrtano krožnico. Ta krožnica pa je $\mathcal{K}$, saj gre $\mathcal{K}$ skozi oglišča T_1 , T_2 in T_3 (slika 2a). To pa pomeni, da je tudi točka T_4 na krožnici $\mathcal{K}$. Če tako nadaljujemo, ugotovimo, da ležijo vse točke T_k v primeru (IIa) na krožnici $\mathcal{K}$.

V primeru (IIb) štirikotnik $T_1T_3T_4T_2$ nima očrtane krožnice, ker je skladni štirikotnik $T_0T_2T_3T_1$ nima. Zato ležita trikotnika $T_1T_2T_3$ in $T_2T_3T_4$ na nasprotnih straneh stranice T_2T_3 (slika 2b). Točke T_1 , T_3 , T_4 in T_2 so oglišča paralelograma in je zato stranica T_2T_4 vzporedna stranici T_1T_3 . Ker je tudi stranica T_0T_2 vzporedna stranici T_1T_3 , vidimo, da so v tem primeru točke T_0 , T_2 in T_4 na isti premici.

Vzemimo zdaj zaporedje točk

$$T'_j = T(j \cdot \frac{\tau}{2}), \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Telo pride iz točke T'_j v naslednjo točko T'_{j+1} pri vsakem j v času $\frac{\tau}{2}$. Novo zaporedje vsebuje prejšnje: pri $j = 2k$ je namreč $T'_{2k} = T(2k \cdot \frac{\tau}{2}) = T(k\tau) = T_k$. Glede lege točk T'_j imamo seveda tudi zdaj tri možnosti:

- (I) Vse točke T'_j so na isti premici. To velja potem tudi za točke $T'_{2k} = T_k$, tako da so vse točke T'_j na premici p . Za prvotno zaporedje nastopi torej primer (I).
- (IIa) Vse točke T'_j ležijo na krožnici, ki je očitno krožnica $\mathcal{K}$, na kateri so točke T_k . Torej imamo pri prvotnem zaporedju T_k prav tako primer (IIa).
- Če nastopi za zaporedje T'_j primer (IIb), so točke $T'_0 = T_0$, $T'_2 = T_1$ in $T'_4 = T_2$ na isti premici. To pa pomeni, da nastopi za zaporedje T_k primer (I). Ker smo izčrpali vse možnosti za zaporedje T'_j in se primer (IIb) za prvotno zaporedje pri tem ni pojavil, sklepamo, da primer (IIb) sploh ni mogoč. Tako smo dokazali, da so vse točke T_k prvotnega zaporedja bodisi na premici p bodisi na krožnici $\mathcal{K}$.

Izberimo poljubno naravno število $n \geq 1$ in postavimo

$$T(j \cdot \frac{\tau}{n}) = T_j^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Za vsak n dobimo zaporedje točk $T_0^{(n)}, T_1^{(n)}, \dots$. Kakor za zaporedje T_k dokažemo, da ležijo vse točke teh zaporedij bodisi na premici bodisi na krožnici. Ker je $T_{kn}^{(n)} = T(kn \cdot \frac{\tau}{n}) = T(k\tau) = T_k$, je prvotno zaporedje vsebovano v vsakem izmed naših zaporedij. Če so torej vse točke T_k na premici p , velja isto za vse točke $T_j^{(n)}$ pri poljubnem j in poljubnem n .

Kadar pa ležijo točke T_k na krožnici $\mathcal{K}$, so tudi vse točke $T_j^{(n)}$ na $\mathcal{K}$.

Naj bo t poljuben čas in se vprašajmo, kje je telo ob času t , se pravi, kje leži točka $T(t)$. Denimo, da so vse točke zaporedja T_k na premici p . Izračunajmo kvocient t/τ . Če je racionalen, npr. enak ulomku j/n , je $t = j\tau/n$, točka $T(t) = T(j \cdot \frac{\tau}{n}) = T_j^{(n)}$ pa leži, kakor smo pravkar ugotovili, na premici p . Če kvocient t/τ ni racionalno število, izberimo ulomek j/n , ki se zelo malo razlikuje od tega kvocienta. Potem se $j\tau/n$ zelo malo razlikuje od t . Ker telo ne naredi nobenega skoka, je pripadajoča točka $T_j^{(n)}$ zelo blizu točke $T(t)$. Toda točka $T_j^{(n)}$ je na premici p . To pa pomeni, da so na premici p točke, ki so poljubno blizu točke $T(t)$. To je očitno mogoče le tedaj, kadar je tudi $T(t)$ na p . Torej za vsak t , naj bo kvocient t/τ racionalen ali iracionalen, leži $T(t)$ na premici p . Podobno se prepričamo, da so vse točke $T(t)$ na krožnici $\mathcal{K}$, kadar nastopi za zaporedje T_k primer (IIa) in so vse točke T_k na $\mathcal{K}$. Tako smo dokazali trditev

(A) Če se točkasto telo giblje v ravnini tako, da se v enakih časih enako oddalji, je njegov tir premica ali krožnica.

Torej točka ne more potovati po elipsi tako, da bi prišla v enakih časih vedno enako daleč.

Krožnica je ravninska krivulja, pri kateri imajo enako dolgi loki enako dolge tetive. Ali je še kaka druga krivulja s to lastnostjo?

Pa naj bo K ravninska krivulja (K ni premica), pri kateri pripadajo enakim lokom enake tetive. Če se točkasto telo giblje po tej krivulji s konstantno hitrostjo, opiše v enakih časih enako dolge loke, tem lokom pa pripadajo enako dolge tetive. Zato pride telo v enakih časih enako daleč. Po trditvi (A) je tir K krožnica. Torej:

(B) Krožnica je edina krivulja v ravnini, pri kateri imajo enako dolgi loki enako dolge tetive.

Trditev (A) – kot nalogo jo je postavil David White z Oklahoma State University v časopisu American Math. Monthly, (1997), Problem 10587 – sodi v diferencialno geometrijo in jo lahko dokažemo tudi z njenimi metodami. Vendar v diferencialni geometriji predpostavljamo, da ima točkasto telo v vsakem trenutku natanko določeno hitrost. V zgornjem dokazu nismo privzeli, da hitrost obstaja, temveč samo to, da telo nikoli ne napravi nobenega skoka.

Tu smo obravnavali gibanje v ravnini. Kako je v prostoru? Vijajnica je prostorska krivulja. Opiše jo točka, ki enakomerno kroži po krožnici, krožnica pa se s konstantno hitrostjo premika v smeri, pravokotni na ravnino krožnice. Ni težko dokazati, da pride telo, ki se giblje s konstantno hitrostjo po vijajnici, v enakih časih enako daleč. To pa je tudi edina prostorska krivulja s to lastnostjo. Velja namreč trditev, ki pa je tu ne bomo dokazovali:

(C) Če se točkasto telo giblje v trirazsežnem prostoru tako, da pride v enakih časih enako daleč, je njegov tir bodisi premica bodisi krožnica bodisi vijajnica.

Ivan Vidav

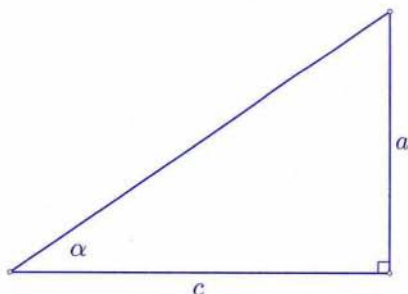
IZVOR BESEDE SINUS

Ste si kdaj zastavili vprašanje, zakaj se npr. logaritmu reče prav logaritem ali od kje izvira besedica *pi*?

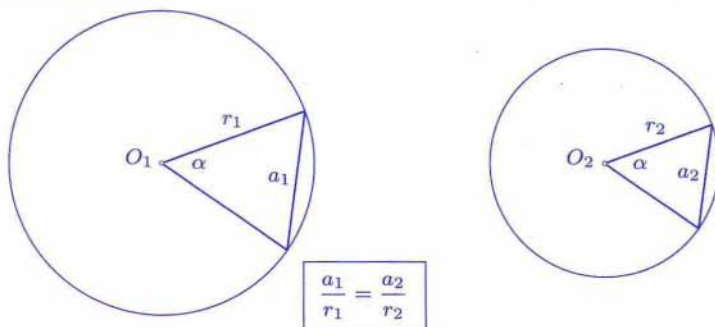
Tokrat si oglejmo, kako je svoje ime dobila funkcija sinus.

Kaj je sinus danega ostrega kota, verjetno veste. To je razmerje med dolžino katete, ki leži v pravokotnem trikotniku nasproti danemu kotu, in dolžino hipotenuze.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



Že pravadni matematiki so ugotovili, da je razmerje med dolžino tetive in polmerom pripadajočega kroga v vseh krožnih izsekih z enakimi središčnimi koti isto.



Od tega spoznanja do današnjega pomena sinusa kota ni daleč. Izkazalo se je, da je pač uporabneje opazovati razmerje med dolžino polovice tetive in polmerom kroga.

In kako je s temi razmerji povezana beseda sinus?

V zahodni svet so predvsem v 12. stoletju za poimenovanje matematičnih pojmov prodrli številna imena, katerih izvor je bil bodisi v antični Grčiji bodisi v arabskem svetu. Teh imen je toliko, da mnogi matematični zgodovinarji imenujejo to stoletje kar stoletje prevodov. Poglejmo, kaj o izvoru besede sinus najdemo v knjigi *A History of Mathematics* avtorjev Carla Boyerja in Ute Merzbach:

“... Zahodna Evropa se je nenadoma začela mnogo bolj zgledovati po arabski matematiki, kot se je kdajkoli po grški geometriji. ... Tako so latinski učenjaki povzeli trigonometrijo, ki je nastopala v arabskih astronomskih delih. Besedo sinus je prvi uporabil Robert Chesterski v svojem latinskem prevodu trigonometrije iz arabščine. Zakaj?

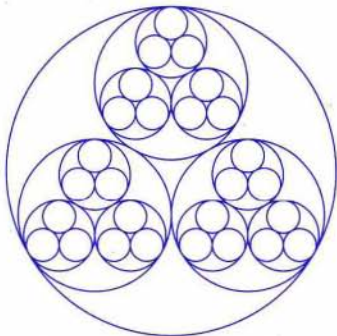
Hindujci so polovici tetive dali ime jiva, Arabci pa so besedo povzeli kot jiba. V arabščini obstaja tudi beseda jaib, ki pomeni zaliv ali vodni rokav. Ko je Robert Chesterski prevajal trigonometrijo iz arabščine, je naletel na besedo jiba. Kaže, da jo je pomotoma zamenjal z besedo jaib (morda zato, ker so bili samoglasniki izpuščeni). Tako je za trigonometrijsko razmerje uporabil besedo sinus, kar je latinski izraz za zaliv ali vodni rokav.”¹

Matija Lokar

¹ V anatomiji je sinus votlina ob zgornjih dihalnih poteh v glavi, kar je vsekakor bližje osnovnemu pomenu besede kot matematični sinus.

DOTIKAJOČI SE KROGI – Rešitev s str. 31

Zanimajo nas “dotikajoči se krogi” (krogi reda 4 so prikazani na spodnji sliki).



Pojasnimo najprej, kako zgradimo kroge reda n . Opis bo induktiven (pri programiranju bomo zato uporabili rekurzijo). Krogi reda n so sestavljeni iz velikega zunanega kroga in treh ustrezno zmanjšanih krogov reda $n - 1$, ki so enakomerno razporejeni v notranjosti velikega kroga. “Dotikajoči se krog” reda 1 je kar en sam krog.

Rešimo najprej matematični del naloge. Naj a_n označuje število krogov, ki sestavljajo kroge reda n . Gornji opis pove, da velja

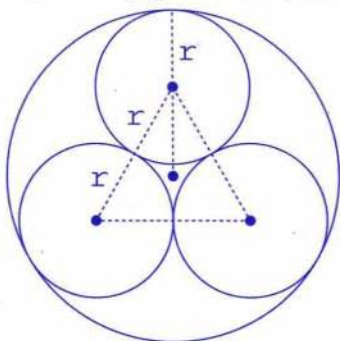
$$a_1 = 1 \quad \text{in} \quad a_{n+1} = 3a_n + 1 \quad (n \geq 1).$$

Prvih nekaj členov zaporedja a_n je torej 1, 4, 13, 40, 121, ... Z metodo “ostrega pogleda” (seveda pa lahko uporabimo tudi kakšno bolj znanstveno metodo; pogledamo lahko razliko dveh zaporednih členov, ...) postavimo domnevo $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$. Matematični rezultati zahtevajo stroge in korektne dokaze, zato bomo svojo domnevo dokazali z matematično indukcijo. Najprej preverimo bazo indukcije, primer $n = 1$. Ker je $\frac{3^1 - 1}{2} = 1 = a_1$, formula za $n = 1$ drži. Dokažimo še indukcijski korak. Naj bo $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ (indukcijska predpostavka). Dokazati moramo, da je $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$. To pa ni težko:

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3 \cdot 3^n - 3 + 2}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Pri tem smo pri prvem enačanju upoštevali rekurzivno zvezo, ki ji zadošča zaporedje a_n , pri drugem enačanju pa indukcijsko predpostavko.

Ostal nam je še računalniški del naloge. Kot bomo videli, bomo tudi za njegovo rešitev potrebovali nekaj znanja matematike, in sicer iz ravninske geometrije. Rešitev bomo napisali v programskem jeziku logo, saj je delo z grafiko v tem jeziku nadvse preprosto. Najprej se moramo odločiti, koliko parametrov bo imel ukaz. En parameter bo gotovo red krogov, ki jih želimo narisati. Ker bomo nalogo reševali rekurzivno, posamezni krogi pa bodo različno veliki, bo drugi parameter polmer zunanjega kroga.



Predno zapišemo program, moramo še ugotoviti, kje so središča in kakšen polmer imajo trije "dotikajoči se krogi" reda $n - 1$, ki skupaj z zunanjim krogom sestavljajo kroge reda n . Takole razmišljajmo: Središča krogov reda $n - 1$ ležijo v ogliščih enakostraničnega trikotnika (glej zgornjo sliko). Dolžina stranice tega trikotnika je enaka premeru krogov reda $n - 1$, njegovo središče (= težišče = višinska točka = ...) pa je v središču krogov reda n . Označimo z R polmer velikega kroga, z r pa polmer kroga, ki obdaja kroge reda $n - 1$. Pri enakostraničnem trikotniku leži središče na tretjini višine, dolžina višine pa je s $\frac{\sqrt{3}}{2}$ pomnožena dolžina stranice. Tako dobimo

$$R = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r \right) + r = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \cdot r$$

oziroma

$$r = (2\sqrt{3} - 3)R \approx 0.464 R.$$

Razdalja med središčem krogov reda n in središčem krogov reda $n - 1$ je enaka $R - r = (4 - 2\sqrt{3})R$.

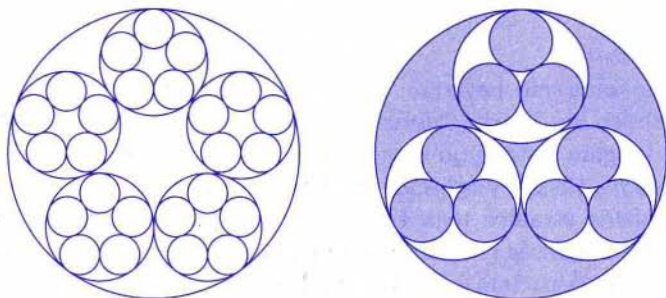
Tako, pripravili smo vse potrebno za zapis ukaza za risanje "dotikajočih se krogov".

```

TO dkrogi :n :R
  IF :n<1 [STOP]
  CIRCLE :R      ;baza rekurzije
  IF :n>1 [
    REPEAT 3 [
      PU FD (4 - 2*SQRT 3)*:R PD
      dkrogi :n-1 (-3 + 2*SQRT 3)*:R ;rekurzivni klic
      PU BK (4 - 2*SQRT 3)*:R PD
      RT 120
    ]
  ]
END

```

Morda vas je med branjem gornjega programa zaskrbelo, da ne deluje pravilno, saj smo le pri prvem rekurzivnem klicu usmerjeni navzgor (enako kot na začetku klica), pri drugem in tretjem pa smo zasukani za 120° v desno oziroma v levo. No, to v resnici ni nobena napaka, saj se lik, ki ga rišemo, ne spremeni, če ga zasukamo za 120° v eno ali v drugo smer.



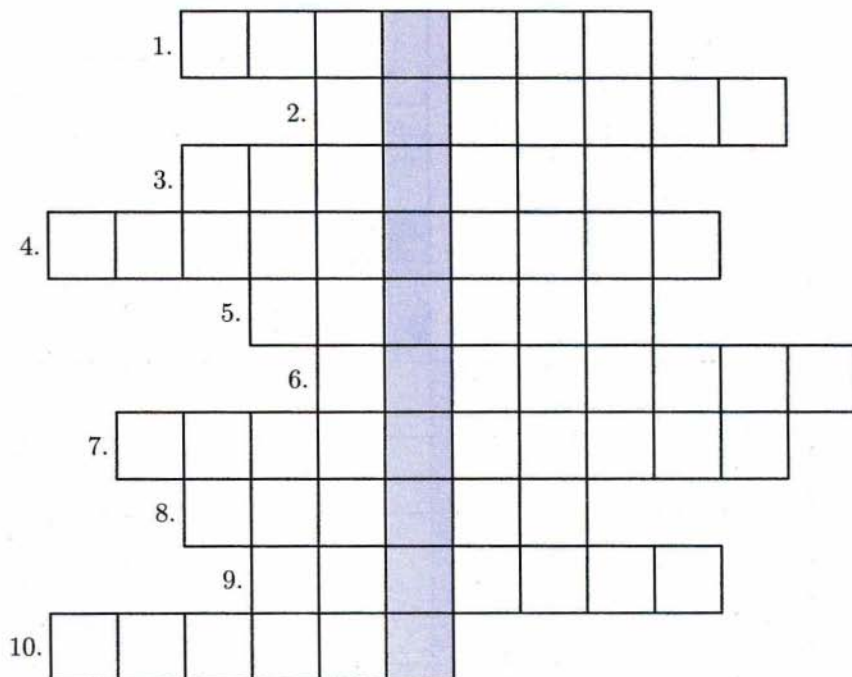
Če se vam je naloga, ki smo jo rešili, zdela prelahka, pa lahko predstavljeno rešitev še dopolnite. Vpeljete lahko dodatni parameter, ki bo povedal, koliko manjših krogov je treba vstaviti v večji krog (naša rešitev vstavlja 3 kroge, na levem delu zgornje slike pa je prikazan lik reda 3, ki ga dobimo, če vstavljamo po 5 krogov). Da vam olajšam delo, vam prišepnem, da sta pri vstavljanju k krogov polmer manjšega kroga r in polmer velikega kroga R povezana s formulo

$$r = R \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \sin(180^\circ/k)}\right).$$

Vgradite lahko tudi možnost senčenja, primer je prikazan na desnem delu zgornje slike.

Martin Juvan

SESTAVLJANKA



1. Neomejena ravna črta.
2. Ravna črta, omejena na obeh straneh.
3. Pripomoček pri matematiki.
4. Kako imenujemo točke, ki ležijo na isti premici?
5. ...?... naloga
6. Premica, ki se dotika krožnice.
7. 2, 3, 7, 11 in 13 so?
8. Daljica, ki ima krajišči na krožnici?
9. Premica, ki seka krožnico.
10. Razdalja od nosilke stranice do nasprotnega oglišča.

Kaj dobite v obarvanem stolpcu?

Boštjan Marinšek, učenec OŠ Zreče

KRIŽANKA “ZLATI JUBILEJ DMFA SLOVENIJE”

50-letnica društva, ki izdaja Presek					 SREDSTVO ZA VZHAJANJE TESTA		MOČNA ČEVLIAR- SKA NIT	SPODNJE OKONČINE	DIVAN	 HUŠA JEŽA MATEMATIK VIDAV	S
					UMIRJANJE DIVJIH ŽIVALI						
					MUZEJSKI PROSTOR DMFA						
					MRAČNOST						
AVTOR MARKO BOKALIČ	ANTILOPA Z DOLGIMI ROGOVI	SATIRIČNO DELO BALA HMEĽJA	▼	▼					NEPOOPI- SAN AVTOR		
GOSTO- VANJE						PLATINA	KOSITER AM. SKLA- DATELJ (CHARLES)		MATERJA, TVARINA		SKUPINA LJUDSTEV ISTE BARVE KOŽE
TEKOČINA Z RAZTO- PLJENO SNOVJO											LITERA- TURA, KI JO IZDAJA DMFA (SPLOŠNO)
ILIRIZEM										POVRŠIN. POŠKODBE OD JEDKE TEKOČINE	SPOLNI VIŠEK
KOKO- DAKANJE						REDKA KOVINA (Eu) MESTO V ITALIJI					
DRUŽBENI SLOJ LJUDI					ROMAN SAVNIK				MOJZESOV BRAT		
					EHOLOT				VEZNIK		
MEDSE- BOJNA MERJENJA DIAKOV V ZNANJU, KI JIH ORGANI- ZIRA DMFA	SLOVENSKI ARHEOLOG (IVAN)	TOK ZA OČALA ALI PISALA	ZOPRNA ŽUŽELKA 1. KRŠČAN, ZAKRAMENT				INCIDENT SPLAVARSKI DROG S KAVLJEM				
ŽAREČ METEOR									GR. PIŠEC BASNI		
									NOSILEC KOLESA		
PIONIR SLOV. LETALSTVA (EDVARD)							ODEBE- LJENI DEL NEČESA				
GLASBILO KANT- AVTORJEV							IZOBRAŽE- VALNA DEJAVNOST DRUŠTVA				

ELEKTRIČNI TOK PO KOVINI IN ELEKTRONI

V eni od prejšnjih številčk smo v Preseku že pisali o naboju in toku po kovini (bakru). Izhajali smo iz predstave o negativni tekočini in pozitivni trdnini. Čeprav je ta starinska predstava morda delovala okorno, je omogočila, da smo vsaj okvirno razumeli nekatere pojave in izračunali nekaj zanimivih količin. Vendar ta predstava ni zadovoljiva. Vemo namreč, da je snov zgrajena iz atomov. Atome sestavljajo pozitivno naelektrena jedra in negativni elektroni. Iz atoma nastane pozitiven ion, ko odda elektron. Negativno tekočino sestavljajo torej elektroni in pozitivno trdnino ioni.

Ali naj si pri električnem toku po kovini predstavljamo zvezno, to je neomejeno deljivo, negativno tekočino ali elektrone? Podobno vprašanje se pojavi pri toku vode po cevi. Ali naj si pri vodnem toku predstavljamo zvezno snov ali molekule, kako se prerivajo po cevi? Pogosto je dovolj, če privzamemo, da je snov zvezna, in si molekul ni treba predstavljati. Seveda pa na molekule pri toku ne moremo čisto pozabiti, ko pa vemo, da vode ne moremo neomejeno deliti. Nekaterih pojavov pri toku vode po cevi pa tudi z molekulami ni lahko pojasniti. Podobno je tudi pri električnem toku po kovini pogosto dovolj, če naboj privzamemo za zveznega, in si elektronov ni treba predstavljati. Tako smo ravnali v prejšnjem zapisu. Na elektrone in ione pa ne moremo čisto pozabiti, ko vemo, da električnega naboja ne moremo neomejeno deliti. Tudi nekaterih pojavov pri električnem toku v kovini ni lahko pojasniti z elektroni in ioni.

V atomski sliki tok opišemo z gibanjem naelektrenih delcev, ki jih v tej zvezi imenujemo *nosilci naboja*. Ker pri električnem toku v kovini snov ne potuje, privzamemo, da so nosilci naboja enega znaka, in to elektroni. Če bi potovali ioni, bi opazili elektrolizo. S tem se sklada izid Tolmanovega poskusa z zaviranjem vodnika, ki smo ga že omenili. V atomski sliki je pomemben podatek število elektronov N . Število ionov v dani prostornini se ujema s številom elektronov. Naboj elektronov je $-e = -Ne_0$, če je $-e_0$ naboj elektrona. Ustrezna masa elektronov je Nm_0 , če je m_0 masa elektrona. Iz Tolmanovega merjenja sledi

$$\frac{e_0}{m_0} = \frac{Ne_0}{Nm_0} = \frac{e}{m_s} = 1,5 \cdot 10^{11} \frac{\text{As}}{\text{kg}}.$$

Specifični naboj elektrona, kot imenujemo kvocient absolutne vrednosti naboja elektrona in njegove mase, je pred sto enim letom pri poskusih s katodnimi žarki določil Joseph John Thomson. Danes bi rekli, da je meril odklon curka hitrih elektronov v električnem in magnetnem polju v

vakuumu. S takšnim merjenjem dobimo natančnejši podatek za specifični naboj elektrona $1,76 \cdot 10^{11}$ As/kg.

V prejšnjem zapisu smo upoštevali, da se pri elektrolizi skozi raztopino kisline, baze ali soli pretoči *Faradayev naboj* $e_F = 96 \cdot 10^6$ As, ko se na elektrodi izloči kilomol enovalentnega elementa. Zdaj Faradayev naboj $e_F = N_A e_0$ izrazimo z Avogadrovim številom $N_A = 6,0 \cdot 10^{26}$, to je s številom delcev v kilomolu. S tem nabojem in s specifičnim nabojem dobimo absolutno vrednost naboja in maso elektrona

$$e_0 = \frac{e_F}{N_A} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}, \quad m_0 = \frac{M}{N_A} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

Ni prostega delca z manjšo absolutno vrednostjo naboja, zato imenujemo e_0 *osnovni naboj*.

Pozitivna trdnina miruje, negativna tekočina pa se po vodniku giblje, če vzpostavimo med njegovi krajišči napetost. V atomski sliki si ne moremo predstavljati, da elektroni v vodniku mirujejo, četudi ni napetosti med njegovima krajiščema. Ne moremo namreč doseči, da bi imel elektron kinetično energijo 0. Za prvo silo ocenimo povprečno kinetično energijo elektrona s $6 \cdot 10^{-21}$ joula. Kvadratni koren iz dvojne povprečne kinetične energije, deljene z maso, dá mero za povprečno velikost hitrosti. Z zapisanim podatkom jo ocenimo na 100 km/s.

Povprečna kinetična energija molekule v enoatomnem plinu je

$$\frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Pri tem je $\langle v^2 \rangle$ povprečje kvadrata hitrosti molekul, T absolutna temperatura in $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K = R/N_A Boltzmannova konstanta. R je splošna plinska konstanta. Pri sobni temperaturi dobimo za povprečno kinetično energijo $6 \cdot 10^{-21}$ J. Če uporabimo enačbo za elektrone, je mera za njihovo povprečno velikost hitrosti $(\langle v^2 \rangle)^{1/2} = (3kT/m_0)^{1/2} = (3RT/M_s)^{1/2}$.

Enačbo uporabimo tudi za ione z vsaj 1800-krat večjo maso in ugotovimo, da je njihova povprečna velikost hitrosti $(3RT/M)^{1/2}$ vsaj $\sqrt{1800}$ -krat, to je približno štiridesetkrat, manjša.

V kovini se gibanje elektronov po naravi razlikuje od gibanja ionov. Ioni so vezani na svoje ravnovesne lege v kristalu in se od njih ne oddaljijo,

se pravi, da okoli njih nihajo. Povprečne komponente njihove hitrosti v treh, med seboj pravokotnih smereh so enake nič. Elektroni pa niso vezani na ravnovesne lege in se neurejeno gibljejo po kristalu, podobno kot molekule plina po posodi. Toda tudi za elektrone so povprečne komponente hitrosti v treh, med seboj pravokotnih smereh enake nič, če na odseku vodnika ni napetosti. Elektroni v kovini ne potujejo, če na odseku vodnika ni napetosti. Ko priključimo na odsek vodnika napetost, postane povprečna komponenta hitrosti v smeri od negativnega krajišča vodnika do pozitivnega krajišča različna od nič. Za to komponento smo zadnjič naračunali $\frac{3}{4}$ mm/s. To je zelo malo v primeri s hitrostjo 100 km/s.

Zamislimo si čebelji panj, v katerem letajo čebele sem in tja s povprečno velikostjo hitrosti 1 m/s. Povprečne komponente hitrosti v treh, med seboj pravokotnih smereh so enake nič. Potem naložimo panj na voziček in ga odpeljemo. Komponenta hitrosti čebel v smeri vožnje je različna od nič in enaka hitrosti vozička, komponenti v smereh pravokotno na smer vožnje pa sta še naprej enaki nič. Voziček bi se gibal s stomilijonino povprečne velikosti hitrosti čebel, to je okoli 3 decimetre na leto. Tolikšna bi bila povprečna komponenta hitrosti elektronov, če bi čebele ustrezale elektronom.

Baker je na 29. mestu periodne preglednice, se pravi, da ima nemoten atom bakra 29 elektronov. Ko odtrgamo najšibkeje vezani elektron od atoma, preostane ion z enim pozitivnim osnovnim nabojem, ki vsebuje 29 pozitivnih osnovnih nabojev v jedru in 28 elektronov in ki niha okoli ravnovesne lege v kristalu. 29. elektron vsakega atoma prispeva k prevajanju naboja. Tem elektronom, ki so torej nosilci naboja, pravimo *prevodniški elektroni*.

S prevodniškimi elektroni in ioni opišimo naelektren ploščati kondenzator. Na plošči, ki je zvezana s pozitivnim priključkom, se pojavi primanjkljaj prevodniških elektronov in na njej prevlada naboj pozitivnih ionov. Na negativni plošči se pojavi enako velik presežek prevodniških elektronov in njihov naboj prevlada naboj ionov. Na ploščah s ploščino po 100 cm^2 v razmiku 1 mm se pri napetosti 1000 V nabereta naboja okoli 10^{-8} As in -10^{-8} As. Če vzamemo, da sta plošči debeli po 0,1 mm, je naboj vseh prevodniških elektronov v vsaki od njiju $1,4 \cdot 10^4$ As. Potemtakem se je samo vsak bilijonti prevodniški elektron s pozitivne plošče preselil na negativno ploščo.

Skozi presek S vodnika se pretoči v času t naboj prevodniških elektronov z absolutno vrednostjo $e = e_0(N/V)V = e_0(N/V)Svt$. Iz te zveze izhaja za tok $I = e/t$ na enoto preseka

$$\frac{I}{S} = \frac{(e/t)}{S} = e_0 \frac{N}{V} v,$$

če je v komponenta povprečne hitrosti prevodniških elektronov od negativnega k pozitivnemu priključku vodnika. N/V je gostota nosilcev naboja, v našem primeru prevodniških elektronov. Enačbo dobimo tudi, če v ustrezno enačbo za negativno tekočino vstavimo gostoto naboja prevodniških elektronov: $\rho_e = e_0(N/V)$. Pri tem je N/V gostota (števila) prevodniških elektronov. Iz zapisane enačbe brez težav izračunamo navedeno komponento povprečne hitrosti, če za ploskovno gostoto toka vstavimo $I/S = 10^7 \text{ A/m}^2$ in izenačimo gostoto prevodniških elektronov z gostoto atomov bakra $N_a/V = N_A m/VM = N_A \rho_s/M$. Pri tem je gostota bakra $\rho_s = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ in masa kilomola bakra $M = 63,5 \text{ kg}$. Za gostoto atomov v bakru in gostoto prevodniških elektronov dobimo s temi podatki $N/V = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Enačbo razvijemo dalje. Upoštevamo, da je komponenta povprečne hitrosti tem večja, čim večja je napetost U med krajiščema vodnika in čim manjša je dolžina vodnika l , torej $v = \beta U/l$. Sorazmernostni koeficient $\beta = lv/U$ z enoto m^2/Vs je giblјivost prevodniških elektronov. Napetost med krajiščema vodnika pa je po Ohmovem zakonu sorazmerna s tokom: $U = RI$. Sorazmernostni koeficient je upor R , ki je tem večji, čim večja je dolžina vodnika l in čim manjši je njegov presek S , torej $R = \zeta l/S$. Sorazmernostni koeficient $\zeta = RS/l$ z enoto Ωm ali $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$ je specifični upor. Vse to upoštevamo na desni strani zapisane enačbe

$$I/S = e_0(N/V)\beta U/l = e_0(N/V)\beta \zeta I/S$$

in izrazimo obratno vrednost specifičnega upora ali *električno prevodnost*

$$\frac{1}{\zeta} = e_0 \beta \frac{N}{V}.$$

Prevodnost je tem večja, čim večji je naboj, čim večja je giblјivost in čim večja je gostota nosilcev naboja. Z enačbo lahko izračunamo giblјivost, če poznamo specifični upor in gostoto nosilcev naboja. S podatkom za specifični upor bakra pri sobni temperaturi $\zeta = 0,017 \Omega\text{mm}^2/\text{m} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ in prejšnjim podatkom za gostoto nosilcev naboja dobimo za giblјivost prevodniških elektronov v bakru $\beta = 0,004 \text{ m}^2/\text{Vs}$.

Z atomsko sliko podrobneje opišemo električni tok po kovinah, kakršni sta baker in srebro, kot s sliko z zveznima električnima snovema. Vendar ima naša preprosta inačica atomske slike precej pomanjkljivosti. Omenimo glavne.

Baker je v nekaterih spojinah enovalenten in v drugih dvovalenten. Zato nas ne preseneti, da je prevodniških elektronov v njem nekoliko več kot atomov, in sicer pride na atom bakra v povprečju $1\frac{1}{3}$ prevodniškega elektrona. V tem primeru tretjina ionov bakra nosi po dva pozitivna osnovna naboja. Zaradi tega je gibljivost prevodniških elektronov v bakru $3,2 \text{ m}^2/\text{Vs}$, to je $\frac{3}{4}$ vrednosti, ki smo jo izračunali prej. Podobno je v srebru.

Gibanja elektronov v kovini ne moremo opisati tako, kot opišemo gibanje molekul plina v posodi, in povprečne kinetične energije prevodniškega elektrona ne izračunati z enačbo za molekulo v plinu. Gibanje elektronov moramo opisati v osnovi drugače in upoštevati, da niti dveh prevodniških elektronov ne moremo medsebojno razločiti. Povprečna kinetična energija prevodniškega elektrona je skoraj neodvisna od temperature in več kot stokrat večja od navedene. Zato je povprečna velikost hitrosti več kot desetkrat večja od navedene.

V tej sliki ni lahko pojasniti električnega upora kovine. Po periodičnem kristalu brez napak bi se prevodniški elektroni gibal brez upora. Upor je posledica neurejenega nihanja ionov in nepravilnosti, na primer nečistoč.

Kovina	ρ_s	M	N_a/V	N/V	β
baker	$8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	63,5 kg	$8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$	$11,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$	$0,0032 \text{ m}^2/\text{Vs}$
srebro	$10,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	107,8 kg	$5,8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$	$7,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$	$0,0052 \text{ m}^2/\text{Vs}$

Nekaj podatkov za baker in srebro: gostota snovi ρ_s , masa kilomola M , gostota atomov N_a/V , gostota prevodniških elektronov N/V in gibljivost β .

Janez Strnad

TOMBOLA

Mali Martin se je odločil, da bo za svoj rojstni dan povabil nekaj prijateljev, jih primerno pogostil in priredil preprosto tombolo. Tombolo si je zamislil takole. Vsak udeleženec dobi tablico, na kateri so po vrsti v treh vrsticah po tri napisana števila od 1 do 9. V vsaki vrstici je eno od števil obkroženo (glej sliko na naslednji strani, na kateri so prikazane 3 izmed 27 možnih tablic).

①	2	3
4	⑤	6
7	8	⑨

①	2	3
4	⑤	6
⑦	8	9

1	②	3
4	⑤	6
7	⑧	9

Martin bo iz vrečke z devetimi žetoni, na katerih so napisana števila od 1 do 9, na slepo vlekkel žeton za žetonom in vsakič naznanil izvlečeno številko. Glavno nagrado bo dobil tisti igralec, ki bo imel prvi izvlečene vse tri obkrožene številke.

In tu pride do težave. Martin ima na voljo le dve glavni nagradi, opazil pa je, da se lahko zgodi, da na istem koraku več igralcev konča igro. Na primer, če v igri nastopajo trije igralci s tablicami z gornje slike in po vrsti izvlečemo številke 7, 9, 8, 1, 2, 5, potem imamo kar tri zmagovalce, pri zaporedju 5, 7, 9, 1 sta zmagovalca dva, pri zaporedju 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 pa en sam.

Martin bi rad povabil čim več prijateljev, hkrati pa želi preprečiti, da bi v tomboli lahko zmagala več kot dva igralca. Zato ne sme povabiti preveč prijateljev, hkrati pa mora "pametno" izbrati obkrožena števila na tablicah. Svetuj mu, koliko prijateljev sme povabiti in kako naj izbere tablice, da bo tombolo lahko uspešno izvedel.

Martin Juvan

NEVIHTA – NARAVNI VISOKONAPETOSTNI SPEKTAKEL

(Popravek k članku iz 6. številke lanskega letnika)

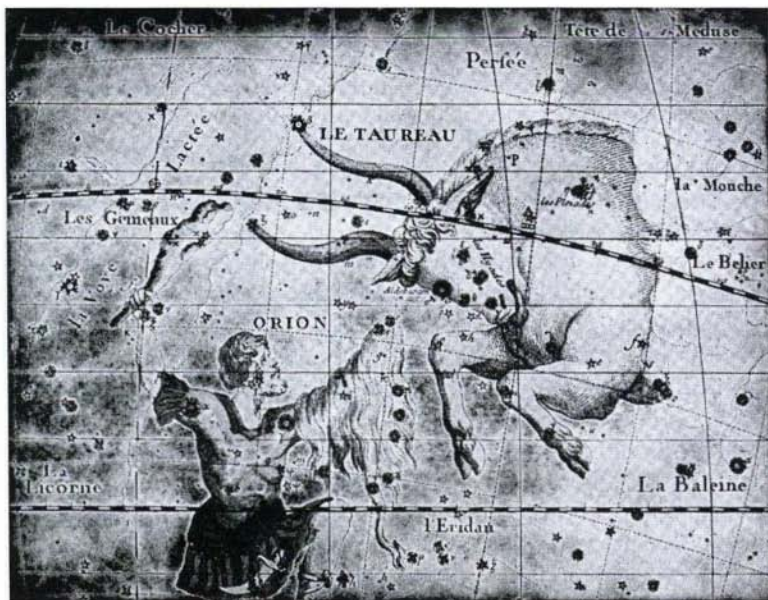
V članku je bilo zapisano, da bi z nabojem, ki ga ima Zemlja proti ozračju ($5 \cdot 10^5$ As), lahko napolnili okrog 10 000 avtomobilskih akumulatorjev. Pozorni bralci ste gotovo že sami opazili napako: s tolikšnim nabojem bi lahko napolnili le bore 3 avtomobilske akumulatorje.

Če je imel kdo že izdelan načrt, kako bi lahko s polnjenjem akumulatorjev na Zemljin naboj obogatel, ga moram razočarati: S poslom ne bo nič!

Gregor Bavdek

OKO

V jasnih jesenskih večerih in nočeh skoraj ne moremo prezreti svetle oranžne zvezde, ki sveti v ozvezdju Bika. Včasih so ji rekli (Veliko) *Bikovo oko*, danes pa jo poznamo pod imenom Aldebaran (sliki 1 in 2).

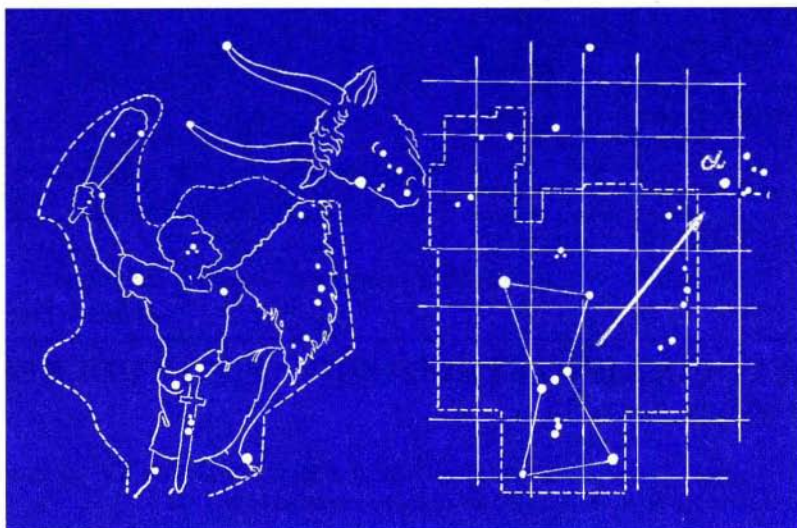


Slika 1. Ozvezdji Orion in Bik (iz Flamsteedovega *Zvezdnega atlasa*, 1776). Dobro je vidna glava Bika in na njej *Oko* – zvezda Aldebaran.

Aldebaran je glavna zvezda v Biku in leži v enem od obeh krakov Hijad, znamenite razsute zvezdne kopice (Presek, 24, str. 92). Aldebaran je beseda arabskega izvora in pomeni tisti, ki zasleduje. Zvezdi bi lahko rekli kar *Zasledovalka*. Samo ime zvezdi kar pristaja, saj se res zdi, kakor da iz noči v noč na nebu zasleduje Sedem sester, sedem drobnih zvezd, zbranih v zvezdni kopici Plejade (Presek, 22, str. 62).

Vzemite si malo več časa in nekaj jasnih noči opazujte zvezde Bika, še posebej zvezdo Aldebaran. Poskusite opazovati sij (to je z očesom zaznana svetlobo) te zvezde, oziroma ugotoviti, kako se ji le-ta spreminja. Izbrati je treba idealno jasno temno noč, torej brez mesečine.

Sij najprej opazujete, ko je Aldebaran nizko na vzhodnem delu neba (zvezda se dviguje), nato v najvišji legi na jugu, potem pa, ko je že nizko na zahodnem delu neba.



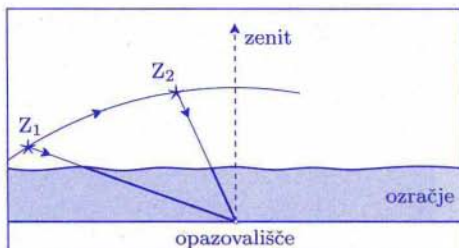
Slika 2. Takole s pomočjo Koscev v ozvezdju Orion najlaže izsledimo Aldebaran (α Bika) – 70 svetlobnih let oddaljeno orjakinjo, ki je okoli 25-krat večja od Sonca, v vesoljski prostor pa oddaja svetlobo za 150 Sonc.

Opazujete s prostim očesom tako, da sij Aldebarana primerjate s sijem svetlejše Kapele (glavne zvezde v ozvezdju Voznik), ki je ta čas dovolj visoko, da ima zanesljivo stalen sij. Svoje ugotovitve poskusite tudi zapisati. (Pomagate si lahko z naslednjo tabelo.)

Datum	vzhodno nebo pod 15°	jug okoli 60°	zahodno nebo pod 15°	Opombe
15.10.	dosti šibkejši	in tako dalje	...	
30.10.	...			
...				

Nedvomno boste ugotovili, da zvezda tem šibkeje sveti, čim bliže je obzorju. Tedaj tudi bolj migota (scintilira), saj gre njena svetloba skozi daljšo pot in ob zemeljskem površju tudi bolj nemirne plasti ozračja kot pri višji legi. Ob kulminaciji, ko je zvezda najvišje nad obzorjem na jugu, pa je njen sij največji.

Slika 3. Narisan je del navidezne poti zvezde vzhajalke nad obzorjem. Kadar je zvezda nizko nad obzorjem (lega Z_1), naredi njena svetloba skozi ozračje daljšo pot do opazovališča, kot če je visoko (lega Z_2). V prvem primeru svetloba bolj oslabi in pretrpi več sprememb kot v drugem, zato je sij zvezde v prvem primeru manjši (šibkejši) kot v drugem.



Prepričajte se o tem. Naj vam prišepnem: naloga je zahtevna.

Marijan Prosén

PRAV POSEBNO ŠTEVILO! PA JE TO TUDI RES? – Rešitev s str. 13

a) Naloga opozarja na zanimivo lastnost števila 142 857: Če to število pomnožimo z 2, 3, 4, 5 ali 6, so dobljeni produkti števila

$$285\,714, 428\,571, 571\,428, 714\,285, 857\,142,$$

ki jih dobimo tudi s ciklično permutacijo števk števila 142 857. Kako to?

Če pomnožimo število 142 857 še s 7, dobimo število, ki se zapiše s samimi devetkami:

$$7 \cdot 142\,857 = 999\,999.$$

Od tod sledi koristen podatek o danem številu:

$$142\,857 = \frac{999\,999}{7} \approx \frac{1\,000\,000}{7}.$$

Po deljenju z 1 000 000 dobimo

$$\frac{1}{7} \approx 0,142857,$$

kar je verjetno dober decimalni približek ulomka $\frac{1}{7}$, saj smo v premisleku le 999 999 nadomestili z 1 000 000.

Za primerjavo poiščimo še natančni decimalni zapis ulomka $\frac{1}{7}$. Dobimo:

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}.$$

S črto nad števki, ki stoje za decimalno vejico, smo poudarili, da se te številke v zapisu periodično ponavljajo.

S tem je skrivnostnosti okrog števila 142 857 konec. Njegova (v nalogi predstavljena) nenavadna lastnost je nenadoma povsem naravna, če na število gledamo kot na periodo decimalnega zapisa ulomka $\frac{1}{7}$.

Izpišimo nekaj zaporednih korakov decimalnega razvoja ulomka $\frac{1}{7}$:

$$1 : 7 = 0,142857 \dots$$

$$\begin{array}{r} \underline{10} \\ 30 \\ \underline{20} \\ 60 \\ \underline{40} \\ 50 \\ \underline{10} \\ \dots \end{array}$$

V razvoju se pri deljenjih zapored pojavijo ostanki 1, 3, 2, 6, 4, 5 in nato spet 1, kar pomeni začetek nove periode. Vsakega teh ostankov moramo pomnožiti z 10 in deliti s 7, da dobimo kot količnik novo števk zapis. Tako se pojavijo zapored količniki 1, 4, 2, 8, 5, 7,

Iz postopka takoj vidimo, da ima decimalni razvoj ulomka $\frac{3}{7}$ periodo 428571, ulomek $\frac{2}{7}$ ima periodo 285714, $\frac{6}{7}$ periodo 857142 itd. Po drugi strani je ulomek $\frac{2}{7}$ dvakratnik ulomka $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$ njegov trikratnik, $\frac{6}{7}$ šestkratnik itd.

S tem pa je nenavadna lastnost števila 142 857 pojasnjena.

b) Iz povedanega lahko tudi sklepamo, da ima nenavadno lastnost, ki smo jo opazili pri številu 142857, vsako $(p-1)$ -mestno število, ki je perioda decimalnega zapisa ulomka $\frac{1}{p}$, kjer je p praštevilo. Praštevilo zato, ker bi sicer nekatere od ulomkov $\frac{k}{p}$, $k < p$, lahko še okrajšali in bi njihova perioda ne bila $(p-1)$ -mestna.

Najmanjše praštevilo s to lastnostjo je 7, ki smo ga srečali v zgornjem primeru. Sledita 17 in 19. Decimalni zapis ulomka $\frac{1}{17}$ ima šestnajstmestno periodo

$$0588235294117647.$$

Sami se prepričajte, da množenja s števili od 2 do 16 samo ciklično permutirajo številke te periode. Če pa periodo pomnožimo s 17, dobimo same devetke.

Povejmo še, da obstaja neskončno mnogo praštevil p z lastnostjo, da je njihova perioda $(p-1)$ -mestno število, in torej neskončno mnogo števil z nenavadno lastnostjo, ki smo jo opazili pri številu 142 857.

Marija Vencelj

NENAVADNA FUNKCIJA

Funkcija, označili jo bomo z F , ki slika iz naravnih v naravna števila, naj bo podana rekurzivno z naslednjimi predpisi: baza rekurzije je predpis

$$F(1) = 1,$$

za $n \geq 1$ pri sodih vrednostih argumenta uporabimo predpis

$$F(2n) = F(n),$$

pri lihih vrednostih argumenta pa predpis

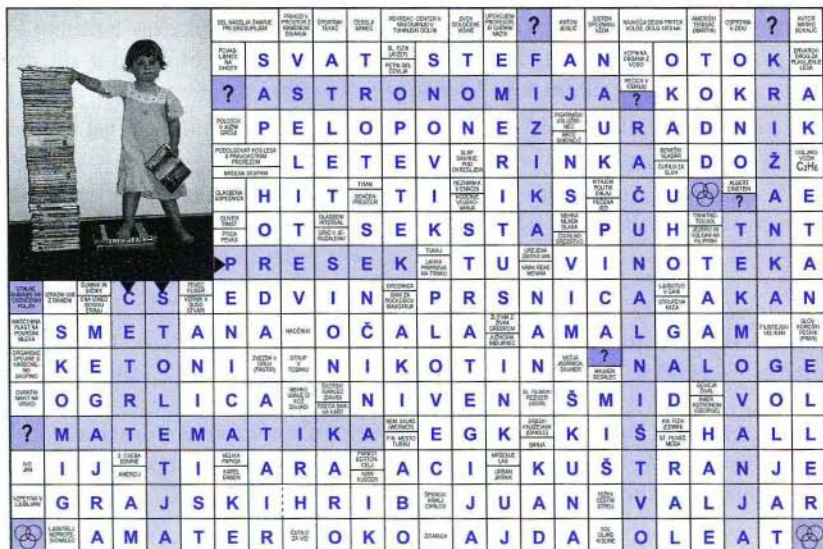
$$F(2n+1) = F(n) + F(n+1).$$

Poskusite razrešiti naslednje naloge:

- Sestavite tabelo vrednosti funkcije F za števila od 1 do 16.
- Koliko je $F(1999)$?
- Ali je funkcija F injektivna? Ali je morda surjektivna?
- Kakšna je največja vrednost, ki jo funkcija F zavzame na številih od 1 do 1999?

Martin Juvan

KRIŽANKA “TU SMO ŽE PETINDVAJSET LET” – Rešitev s str. 32



MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA 1999

V šolskem letu 1998/99 bo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organiziralo letošnje priprave na mednarodno matematično olimpiado, ki bo julija 1999 v Romuniji. Na pripravah, ki bodo potekale enkrat mesečno, bodo kandidati ob reševanju nalog olimpijskega tipa obdelali tudi pripadajočo teorijo.

Olimpijska ekipa bo v letu 1999 izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Vsak od izbirnih testov in državno tekmovanje bodo pri izboru enakovredno upoštevani.

Prvi izbirni test bo 22. januarja 1999, drugi 23. aprila 1999, državno tekmovanje pa predvidoma 15. in 16. maja 1999. Podrobnejše informacije dijaki dobijo pri svojem mentorju oz. profesorju matematike ter na naslovu:

`math.comp@fmf.uni-lj.si`.

Koledar aktivnosti je dostopen na Internetu:

`http://www.fmf.uni-lj.si/~mathcomp/koledar.html`.

Informacije pa lahko dobite tudi pri spodaj podpisanim, na Fakulteti za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061) 1766-622.

Matjaž Željko

33. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

Potem ko je 20. marca 1998 približno 40000 učencev od 2. do 8. razreda na šolskem tekmovanju za bronasto Vegovo priznanje reševalo naloge Evropskega matematičnega kenguruja, se je 18. aprila 1998 na področnem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje 1653 šestšolcev, 1582 sedmošolcev in 1598 osmošolcev. Osvojilo ga je 563 učencev 6. razreda, 471 učencev 7. razreda in 498 učencev 8. razreda. Tudi letos so učenci reševali naloge v dveh sklopih. Prvih osem nalog je bilo izbirnega tipa z obkrožanjem ustreznega odgovora, nato pa še tri "klasične" naloge. Poglejmo si naloge, ki jih je pod predsedstvom prof. Terezije Uran izbrala državna tekmovalna komisija.

6. razred

- A1** Tina in Petra tehtata skupaj 106 kg, Tina in Daša 104 kg, Petra in Daša pa 110 kg. Koliko tehtajo vse tri skupaj?

(A) 320 kg (B) 160 kg (C) 158 kg (Č) 150 kg (D) 148 kg

- A2** Ob koncu šolske ure je na tabli ostal zapisan preizkus deljenja z dvomestnim številom. Med odmorom je nagačivec spremenil zapis. Tri različne številke (cifre) je nadomestil z znaki, in sicer takole:

$$6 \star 3 = 19 \cdot \diamond 4 + 1 \otimes$$

Kolikšna je vsota zbranih števk?

(A) 19 (B) 18 (C) 17 (Č) 16 (D) 15

- A3** Steklenica s sokom stane 100 tolarjev. Sok je za 90 tolarjev dražji od prazne steklenice. Koliko stane sok?

(A) 5 SIT (B) 10 SIT (C) 80 SIT (Č) 900 SIT (D) 95 SIT

- A4** Božo je za rojstni dan dobil čokolado in takoj pojedel polovico. Vsak gost, ki je prišel, je pojedel polovico preostalega kosa čokolade. Kolikšen del čokolade je ostal po prihodu petih gostov?

(A) $\frac{1}{128}$ (B) $\frac{1}{64}$ (C) $\frac{1}{32}$ (Č) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{5}$

- A5** Koliko šestmestnih števil, ki jih lahko zapišeš s števki (ciframi) 4, 5, 6, 7, 8 in 9 (vsako števko v zapisu števila uporabiš enkrat), je deljivih z 9?

(A) 0 (B) 6 (C) 24 (Č) 120 (D) 720

- A6** Za koliko se poveča vsota ulomkov $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{7}$, če oba števca in oba imenovalca petkrat povečamo?

(A) za 5 (B) petkrat (C) za eno petino

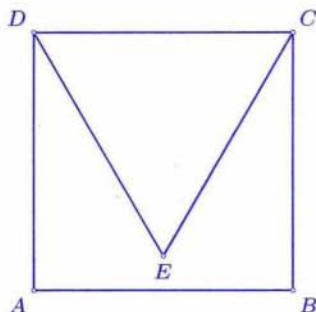
(Č) za 25 (D) vsota se ne spremeni

A7 Za katero vrednost spremenljivke x velja enakost $\frac{x}{10^5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{125}$?

- (A) 16 (B) 80 (C) 160 (Č) 180 (D) 200

A8 V notranjosti kvadrata $ABCD$ leži točka E , tako da je $\overline{ED} = \overline{EC} = \overline{CD}$. Kolikšna je velikost kota $\sphericalangle EBC$?

- (A) 30° (B) 45° (C) 60°
(Č) 75° (D) 90°



B1 Raztreseni učitelj je odprl vodovodno pipo nad kadjo in pozabil začepiti odtok. Prazna kad bi se napolnila z vodo, ki priteka skozi to pipo, v 20 minutah, polna kad pa bi se izpraznila v 30 minutah. Učitelj se je po 48 minutah spomnil, da kadi ni začepil. Ali je tedaj voda že tekla čez rob kadi? Utemelji z računom.

B2 Dva trgovca se ne moreta sporazumeti, čigavi orehi dajo več jedrc. Prvi ima 20 kg orehov, in sicer takih, ki dajo 50 % jedrc, in 30 kg takih, ki dajo 40 % jedrc. Drugi ima le take orehe, ki dajo 45 % jedrc, vendar jih ima en kilogram manj kot prvi. Premisli in z računom pomagaj razrešiti, kateri trgovec ima v zalogi več orehovitih jedrc.

B3 Načrtaj (na tem listu) pravokotnik $ABCD$, če poznaš oglišče A , presečišče diagonal S in točko E , ki leži na stranici BC med ogliščema B in C .



7. razred

- A1 V matematičnem krožku je 12 fantov in 8 deklet. Vsak dan se v krožek vključita še dve dekleti in en fant. Kolikšno je skupno število članov krožka, ko je deklet toliko kot fantov?

(A) 40 (B) 32 (C) 28 (Č) 24 (D) 16

- A2 V vreči je pomešanih 20 črnih (pol levih in pol desnih) in 20 belih (pol levih in pol desnih) rokavic. Najmanj koliko rokavic moraš izvleči, da boš zagotovo dobil en par rokavic enake barve?

(A) 3 (B) 10 (C) 11 (Č) 20 (D) 21

- A3 Presek dveh skladnih enakostraničnih trikotnikov **ne more** biti:

(A) enakostranični trikotnik (B) romb (C) kvadrat
(Č) paralelogram (D) pravilni šestkotnik

- A4 Kolikšna je vrednost izraza $\sqrt{8\sqrt{4}}$?

(A) $\sqrt{10}$ (B) 4 (C) $\sqrt{32}$ (Č) $\sqrt{12}$ (D) 16

- A5 Kako se spremeni količnik, če deljenec povečamo za 20 %, delitelj pa zmanjšamo za 20 %?

(A) se ne spremeni (B) poveča se za 20 % (C) zmanjša se za 20 %
(Č) poveča se za 50 % (D) zmanjša se za 50 %

- A6 S katerim najmanjšim naravnim številom moramo pomnožiti število 2520, da bo produkt kvadrat naravnega števila?

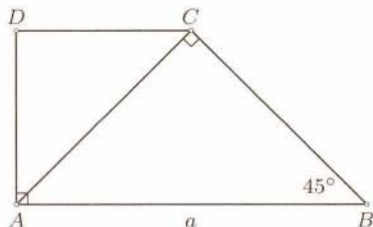
(A) 70 (B) 63 (C) 49 (Č) 7 (D) 5

- A7 Če je $\frac{1}{x}$ povprečje (aritmetična sredina) ulomkov $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{6}$, kolikšen je x ?

(A) $\frac{5}{12}$ (B) 5 (C) $\frac{12}{5}$ (Č) $\frac{24}{5}$ (D) $\frac{5}{24}$

- A8** Kolikšna je ploščina pravokotnega trapeza $ABCD$, izražena z a ?

- (A) $\frac{1}{2}a^2$ (B) $\frac{2}{3}a^2$ (C) $\frac{3}{8}a^2$
 (Č) $\frac{4}{3}a^2$ (D) $\frac{3}{2}a^2$



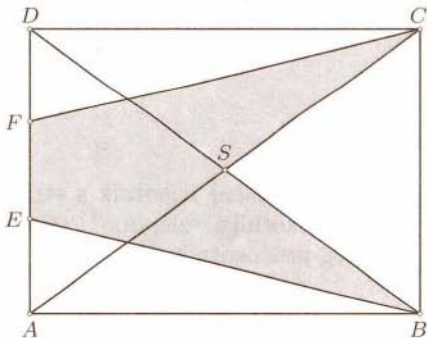
- B1** Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{1}{0,25} \cdot \left(4^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{0,5} \right)^3 : (-2)^4 - \left(1\frac{1}{4} \right)^2 : \left(2 - \frac{3}{2^2} \right) \right) =$$

- B2** Umetniki Ana, Bine in Cita so prejeli denarne nagrade za življenjsko delo. Del svojih nagrad so podarili, kot je prikazano v preglednici:

	Ana	Bine	Cita
del celotne nagrade, namenjen <i>darilom</i>	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	30 %
del zneska za <i>darila</i> , namenjen dobrodelnim ustanovam	$\frac{1}{4}$	40 %	$\frac{1}{10}$
del zneska za dobrodelne ustanove, namenjen invalidom	20 %	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

- a) Koliko odstotkov svoje celotne nagrade je vsak od treh dobitnikov namenil invalidom?
- b) Koliko tolarjev je za invalide podarila Cita, če je njena nagrada znašala en milijon tolarjev?
- B3** Pravokotniku $ABCD$ je vrisan petkotnik $EBSCF$, kot kaže slika. $\overline{AB} = 64$ cm, $\overline{AD} = 48$ cm, $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FD}$
- a) Izračunaj ploščino petkotnika $EBSCF$.
- b) Kolikšen del ploščine pravokotnika je ploščina petkotnika?



8. razred

A1 V trgovini so ceno izdelka najprej zvišali za 50 %, nato pa novo ceno zmanjšali za 50 %. Trгоvec je izračunal, da je izdelek sedaj za 50 tolarjev cenejši, kot je bil na začetku. Koliko je izdelek stal na začetku?

- (A) 100 SIT (B) 150 SIT (C) 200 SIT (Č) 400 SIT (D) 6250 SIT

A2 Ulomki $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{27}{4}$ si sledijo po nekem pravilu. Obkroži naslednjega.

- (A) $\frac{64}{5}$ (B) $\frac{64}{25}$ (C) $\frac{256}{25}$ (Č) $\frac{256}{5}$ (D) $\frac{125}{16}$

A3 Želimo, da bo vrednost izraza $\sqrt{1998 \cdot x}$ naravno število. Kateri je najmanjši ustrezeni x ?

- (A) 1998 (B) 222 (C) 37 (Č) 3 (D) 2

A4 Kolikšna je vrednost izraza $\frac{\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2}$?

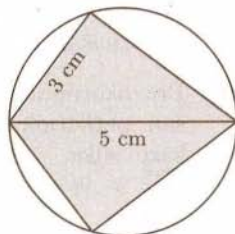
- (A) 4 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{8}$ (Č) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

A5 Kolikšna je vrednost izraza $a + c^{a-b}$, če je $a = 3$, $b = -3$ in $c = -2$?

- (A) 67 (B) 4 (C) 3 (Č) 1 (D) -61

A6 Kolikšna je ploščina osenčenega deltoida?

- (A) 10 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 15 cm^2
(Č) 16 cm^2 (D) 20 cm^2



A7 Enakostranični trikotnik s stranico a prerežemo po težiščnici. Oba dela trikotnika "zlepimo", tako da dobimo pravokotnik. Kolikšen je obseg pravokotnika?

- (A) $3a$ (B) $(a + \sqrt{3})a$ (C) $a + a\sqrt{3}$ (Č) $a\sqrt{3}$ (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

- A8** Iz kocke z robom a izrežemo manjšo kocko z robom $\frac{a}{2}$. Kolikšna je prostornina nastalega telesa?

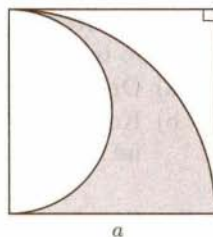
(A) $\frac{1}{2}a^3$ (B) $\frac{3}{4}a^3$ (C) $\left(\frac{a}{2}\right)^3$ (Č) $\left(a - \frac{a}{2}\right)^3$ (D) $\frac{7}{8}a^3$

- B1** Občani so se odločili, da bodo glasovali o predlogu za ureditev parka. Za predlog je glasovalo 13 občanov več kot tretjina vseh prisotnih. Proti je glasovala četrtnina prisotnih. 17 občanov se je glasovanja vzdržalo. Ali je bila večina prisotnih občanov za predlog?

- B2** Točke $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ in $C(12, 6)$ so oglišča trikotnika $\triangle ABC$.

- Trikotnik nariši v koordinatni ravnini.
- Izračunaj obseg trikotnika $\triangle ABC$.
- Izračunaj ploščino trikotnika $\triangle ABC$.

- B3** Pobarvani lik na sliki ima obseg $10(\pi+1)$ dm. Kolikšna je ploščina tega lika?



Aleksander Potočnik

18. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

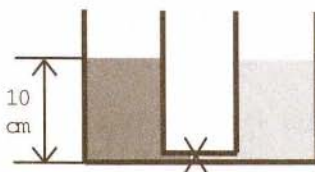
7. razred

- V posodo vlijemo najprej $2,40 \text{ dm}^3$ vode, nato pa začnemo enakomerno dodajati sol, in sicer vsako minuto 20 g. Kolikšna bo gostota mešanice čez 30 minut? (Če zmešamo $1,00 \text{ dm}^3$ vode in 250 g soli, je prostornina mešanice $1,09 \text{ dm}^3$.)
- Mitja in Miha, vsak na svojem bregu potoka, enakomerno vlečeta z vrvema čoln po potoku navzgor. Kot med vrvema je 90° , vsak pa vleče s silo 100 N.

- a) Nariši tlorisno sliko (pogled od zgoraj) in vriši vse sile, ki delujejo na čoln. Pripiši velikosti sil. Velikosti sil lahko določiš z načrtovanjem.
- b) Čez čas uspe Mojca, ki je na čolnu, pognati motor, ki potiska čoln z dodatno silo 50 N v smeri vožnje. Hitrost čolna se pri tem ne spremeni, torej vlečeta Mitja in Miha z manjšima silama. S kolikšnima silama vlečeta fanta v tem primeru? Kot med silama se ni spremenil.

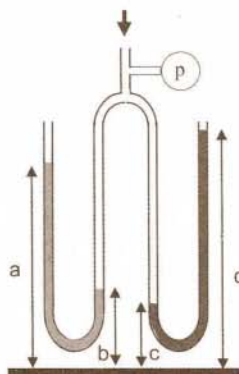
Pri premem in enakomernem gibanju telesa velja, da je vsota sil, ki delujejo na telo, enaka nič.

3. Dve enaki posodi povežemo s tanko cevko z zaprtim ventilom. V levo posodo nalijemo 10 cm visoko olje s specifično težo $8,0 \text{ N/dm}^3$, v desno pa vodo s specifično težo 10 N/dm^3 do enake višine.



- a) Opiši, kaj se zgodi, ko ventil odpremo.
- b) Kolikšni sta končni višini kapljev in v posodah? Voda in olje se ne mešata.

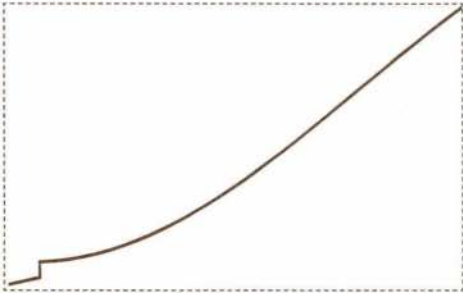
4. Dve U cevi povežemo, kot kaže slika, in na vrhu priključimo barometer. V levem kraku je voda, v desnem pa olje s specifično težo 8500 N/m^3 . Najprej so vse tri cevi na vrhu odprte, merilnik pa kaže $103,0 \text{ kPa}$. Nato v srednjo cev narahlo pihnemo, kot kaže puščica, ter cev na vrhu zapremo. Kapljevini se postavita približno tako, kot kaže slika. Ko izmerimo višine v krakih, dobimo $a = 48 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$ in $c = 15 \text{ cm}$.



- a) Koliko kaže barometer v tem primeru?
- b) Izračunaj, kolikšna je višina d !

5. Na dnu jezera z globino 30 m leži betonski nosilec z maso 10,0 ton. Potapljači pritrdijo nosilec na vrh dvigala, ki nato nosilec počasi enakomerno dviguje. Koliko dela opravi dvigalo, ko dvigne nosilec od dna za 10,0 metrov? Gostota betona je 2700 kg/m^3 . Pri premem in enakomernem gibanju telesa je vsota vseh sil, ki delujejo na telo, enaka nič.

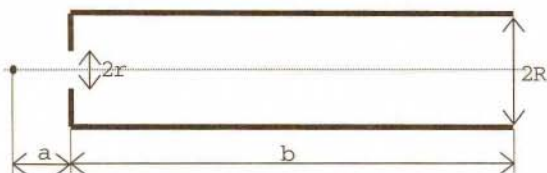
8.razred

1. V znani TV reklami povedo podatek, da se Renault Megane pri hitrosti 100 km/h na ravni suhi cesti ustavi v 3,4 sekunde od trenutka, ko voznik pritisne na zavoro.
 - a) Kolikšno pot prevozi avtomobil med zaviranjem?
 - b) Nariši vse sile, ki delujejo na avtomobil med zaviranjem, in jih izračunaj. Masa vozila je 1000 kg. Sila upora zraka med zaviranjem je zanemarljivo majhna.
2. Satelit enakomerno kroži natančno nad ekvatorjem (v ekvatorialni ravnini) v isti smeri, kot se vrti Zemlja. Nad določeno točko na Zemlji se pojavi vsakih 6 ur. Hitrost satelita glede na središče Zemlje je 19100 km/h. Na kolikšni višini nad ekvatorjem kroži satelit? Polmer Zemlje je 6400 km.
3. Na sliki je profil zaletišča 130 metrske planiške skakalnice v merilu 1 : 2000, na kateri je bil letošnji finale svetovnega pokala. Skakalci, ki imajo skupaj s smučmi maso okrog 80 kg, so na odskočni mizi dosegali hitrosti okrog 93 km/h.
 - a) Kolikšno je bilo delo zaviralnih sil trenja in upora zraka pri gibanju do odskočne mize?
 - b) Kolikšno hitrost bi imel skakalec na odskočni mizi, če ne bi bilo zaviralnih sil trenja in upora zraka?
4. Z avtomobilsko žarnico bi radi svetili 1,0 ure. Najmanj koliko polnih akumulatorskih baterij z oznako 1,2 V/800 mAh potrebujemo:
 - a) če uporabimo parkirno žarnico z napisom 12 V/5 W?
 - b) če uporabimo žarometno žarnico 12 V/45 W? Pri tem smeš med poskusom prazne baterije zamenjevati s polnimi.

Za oba primera ali opiši ali skiciraj vezje. Predpostavi, da je napetost baterije 1,2 V, dokler se baterija čisto ne sprazni, nato je napetost 0.

5. Pred okroglo cev, ki ima notranjost posrebreno, da deluje kot zrcalo, postavimo majhno žarnico, kot kaže slika. V središču stene, ki je obrnjena proti žarnici, izvrtamo okroglo luknjo, drugi konec cevi je odprt. Največ kolikšen je lahko premer luknje $2r$, da bodo v izstopnem curku žarki, ki se:

- niti enkrat ne odbijejo od notranje stene cevi?
- odbijejo od notranje stene največ dvakrat?
- odbijejo največkrat? Koliko je odbojev v tem primeru?



Notranji premer cevi $2R = 24$ cm, cev je dolga $b = 98$ cm, žarnica je oddaljena za $a = 12$ cm.

Nariši skici poskusov a) in b).

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

NALOGE S FIZIKALNEGA PREDTEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE V ŠOLSKEM LETU 1997/98

Naloge je 28. marca 1998 reševalo okrog 1000 dijakov iz 53 srednjih šol. V skupini A sta bili dve različici nalog, ki pa sta se razlikovali samo v tretji nalogi. Tekmovalec je tako reševal samo eno izmed nalog 3a in 3b.

Skupina A

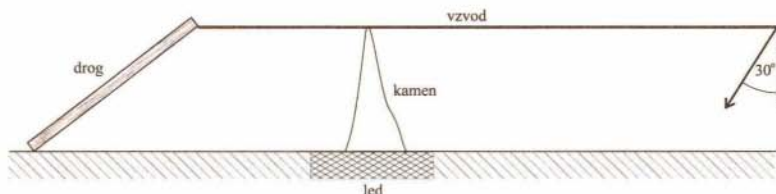
- Ko stehamo votlo aluminijasto kroglo na tehtnici, ta pokaže 50 N. Kroglo damo v vodo in opazimo, da se potopi do polovice. Kolikšen je volumen votlega dela krogle? Specifična teža aluminija je 27 kN/m^3 , vode pa 10 kN/m^3 . Vzgon v zraku je zanemarljivo majhen.
- Na hrapavih tleh leži deska s težo 300 N. Človek s težo 700 N jo poskuša premakniti tako, da eno stopalo položi na desko in stopalo potiska vzdolž deske, medtem pa je z drugo nogo oprt na bližnji zid.

Koeficient lepenja med desko in podlago je 0,30. Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med stopalom in desko, da človek uspe premakniti desko na tak način?

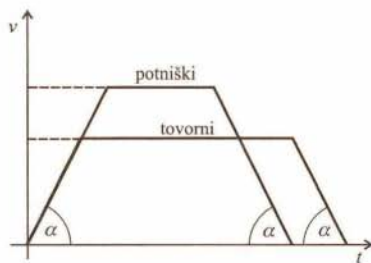
- 3a. Z levim krajiščem lahkega tankega vodoravnega vzvoda, ki je podprt s 50 cm visokim kamnom, držimo 1000 N težak in 100 cm dolg drog v narisanim položaju. Levi krak vzvoda meri 1,0 m, desni pa 5,0 m. Na desno krajišče vzvoda delujemo s silo pod kotom 30° , kot je narisano na sliki. Kamen stoji na ledu, med ostalimi stičišči pa je lepenje dovolj veliko, da ne pride do zdrsa.

- S kolikšno silo moramo delovati na desno krajišče vzvoda?
- Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med tlemi in drogom, da bo sistem v ravnovesju?

Nalogo najenostavneje rešiš, če sile razdeliš na vodoravne in navpične komponente. Pri sili kamna na vzvod (ali nasprotni) bodi pozoren na smer sile, ker med kamnom in ledom ni lepenja in se kamen ne sme premakniti.



- 3b. Med postajama A in B vozita potniški in tovorni vlak. Na sliki je graf hitrosti v odvisnosti od časa za oba vlaka, ko vozita med postajama A in B. Hitrost potniškega vlaka je med enakomernim gibanjem 1,5-krat tolikšna kot hitrost tovornega vlaka, tovorni vlak pa vozi s konstantno hitrostjo 20 minut dlje kot potniški vlak. Čas pospeševanja tovornega vlaka, ko zapušča postajo A, je 2,0 minuti.



- Kako dolgo vozi tovorni vlak enakomerno?
- Razdalja med postajama A in B je 57 km. Kolikšen je pospešek vlakov?

Skupina B

- Na strehi hiše, ki je glede na vodoravnico nagnjena pod kotom 30° , se odkrha košček ledu in pade na tla v vodoravni razdalji 200 cm od roba strehe. Rob strehe je na višini 4,0 m od tal. Kolikšno pot opravi košček ledu po strehi, preden doseže rob? Težnostni pospešek je $9,8 \text{ m/s}^2$.
- Po dveh vzporednih tirih se v enakih vozičkih peljeta v isti smeri dva fanta. Masa vozička je 100 kg, masa posameznega fanta 50 kg. Prvi fant se pelje s hitrostjo $5,0 \text{ m/s}$, drugi pa s hitrostjo $4,0 \text{ m/s}$. Ko prvi fant dohiti drugega, vrže v smeri, pravokotno glede na svoj voziček, v drugi voziček skalo z maso 40 kg. Kolikšna je hitrost prvega in kolikšna hitrost drugega vozička potem?
- Pri zimski različici mini golfa igramo s ploščkom (majhna ploščica) na terenu, pokritem z ledom. Oblika terena je prikazana na sliki. Levi breg hribočka je položen, na desni pa se hribček zaključí s profilom krožnega loka četrtnine kroga, katerega polmer je 50 cm. Na tem delu je pod kotom $\varphi = 30^\circ$ proti vertikali tudi luknjica. S skrajne leve, kjer je teren položen, pošljamo plošček in poskušamo zadeti luknjico.
 - Najmanj kolikšna je lahko začetna hitrost ploščka, da spreten igralec zadene luknjico?
 - Največ kolikšna je lahko začetna hitrost ploščka, da spreten igralec zadene luknjico?
 - Pri kolikšnih kotih φ pa igralec sploh ne more zadeti luknjice?

Težni pospešek je $9,8 \text{ m/s}^2$, trenje med ploščkom in ledom je zanemarljivo majhno.

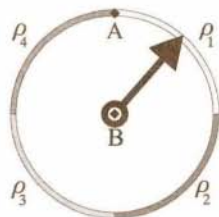


Skupina C

- Neznanci so ob 14.00 uri nastavili tempirano bombo s sprožilcem na posebej prirejeno uro. Obod ure je sestavljen iz štirih, med seboj povezanih enako dolgih lokov, ki pa so iz materialov z različnimi vrednostmi upora na dolžinsko enoto: $\rho_1 = 10 \text{ } \Omega/\text{m}$, $\rho_2 = 40 \text{ } \Omega/\text{m}$,

$\rho_3 = 20 \, \Omega/\text{m}$, $\rho_4 = 50 \, \Omega/\text{m}$ (glej sliko). Prevoden kazalec z zanemarljivim uporom drsi po obodu ure. Polmer ure je 10 cm. V točkah A in B je ura priključena na napetost 1,0 V.

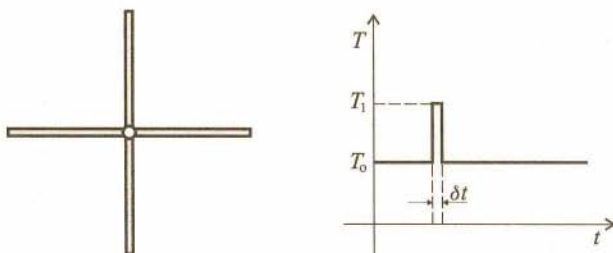
- Kolikšen tok bo tekkel med točkama A in B ob 16.30 uri?
- Bomba se sproži v trenutku, ko teče med točkama A in B najmanjši tok. Ob kateri uri se bo to zgodilo?



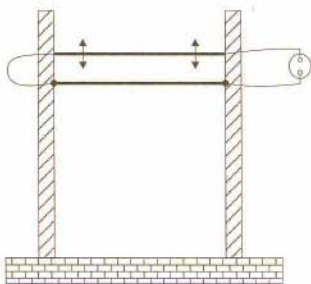
- 100 cm dolga, na obeh straneh odprta cevka, je v vodoravnem položaju do polovice napolnjena z živim srebrom. S palcem zapremo cevko na tistem krajišču, kjer ni živega srebra, in jo obrnemo v navpični položaj, da izteče nekaj živega srebra. Kolikšen stolpec živega srebra ostane v cevki? Normalni zračni tlak je 100 kPa, gostota živega srebra $13,6 \, \text{kg}/\text{dm}^3$, težnostni pospešek pa $9,8 \, \text{m}/\text{s}^2$. Površinska napetost je zanemarljivo majhna, temperatura zraka v cevki pa ves čas konstantna.
- Skozi izoliran ploščati kondenzator (ploščina posamezne plošče je $100 \, \text{cm}^2$, razdalja med ploščama pa 10 mm), na katerem je napetost $U_0 = 200,0 \, \text{V}$, prileti vzporedno s ploščama curek delcev α . Curek ima obliko lista papirja enake velikosti, kot je velikost plošč. Ob preletu delci α ionizirajo zrak, tako da za njimi ostane zavesa elektronov in pozitivno nabitih ionov. Pari elektron-ion nastanejo sočasno in so enakomerno porazdeljeni v ravnini, vzporedni s ploščama kondenzatorja. Celoten naboj delcev enega predznaka je $e = 2,0 \cdot 10^{-11} \, \text{As}$. Nastali ioni in elektroni se v polju kondenzatorja v zelo kratkem času pospešijo do končne hitrosti, nakar se gibljejo enakomerno. Hitrost enakomernega gibanja je sorazmerna z jakostjo električnega polja, $v_{\pm} = \beta_{\pm} E$, kjer je $\beta_{-} = 2,0 \, \text{m}^2/\text{Vs}$ sorazmernostni koeficient za elektrone in $\beta_{+} = 5,0 \cdot 10^{-3} \, \text{m}^2/\text{Vs}$ sorazmernostni koeficient za pozitivne ione.
 - Obe vrsti nabojev čez določen čas zadenejo plošči kondenzatorja. Kolikšna je potem sprememba napetosti na kondenzatorju?
 - Curek delcev α prileti v kondenzator 1,0 mm vstran od negativne plošče. Kolikšen je čas potovanja ionov oziroma elektronov do plošč?
 - Kolikšen je padec napetosti, ko hitrejši delci zadenejo ploščo?

Skupina D

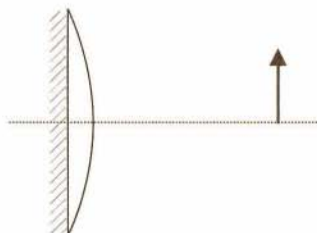
1. Štiri tanke palčke z dolžinami po $l = 25$ cm so povezane v križ, ki je prosto vrtljiv okoli vodoravne osi skozi središče (glej sliko). Eno od vodoravnih palčk hitro segrejemo s temperature okolice $T_0 = 295$ K na temperaturo $T_1 = 350$ K in takoj nato hitro ohladimo nazaj na temperaturo okolice. Približen potek temperature palčke kaže slika; čas trajanja $\delta t = 1,0$ s. Palčke so med seboj toplotno izolirane. S kolikšno kotno hitrostjo se vrti križ takoj po tem? Temperaturni koeficient dolžinskega raztezka snovi, iz katere so palčke, je $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Težni pospešek je $9,8 \text{ m/s}^2$.



2. Glasbeno navdahnjeni fizik sklence narediti prav posebno napravo, ki mu bo dajala takt. Napravo sestavi s pomočjo nizko-napetostnega vira z močjo 1000 W in dveh tankih, enako dolgih prevodnih jeklenih palic. Palici sta nameščeni, kot prikazuje skica: spodnja je na obeh krajiščih fiksno vpeta v stojali iz izolatorja, zgornja pa se lahko po vodilih iz izolatorja prosto premika le v navpični smeri tako, da je vedno neposredno nad zgornjo palico. Palici in izvir so povezani v električni krog z žicami, ki imajo zanemarljivo majhen upor. Ko je krog sklenjen, zgornja palica lebdi nad spodnjo. Napravo poženemo tako, da rahlo sunemo zgornjo palico in ta začne nihati. Kolikšna mora biti skupna dolžina jeklenih palic, da bo nihajni čas zgornje palice $0,25 \text{ s}$? Gostota jekla je 7900 kg/m^3 , specifični upor pa $9,8 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$. Težni pospešek je $9,8 \text{ m/s}^2$. Za x mnogo manjši od 1 velja $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.



3. Glej besedilo naloge 3 v skupini C. Vprašanja pa so naslednja:
- Obe vrsti nabojev čez določen čas zadeneata plošči kondenzatorja. Kolikšna je potem sprememba napetosti na kondenzatorju?
 - Curek delcev α prileti v kondenzator 1,0 mm vstran od negativne plošče. Kolikšen je čas potovanja ionov oziroma elektronov do plošč? Kolikšen je padec napetosti, ko hitrejši delci zadenejo ploščo?
 - Nariši graf padca napetosti na kondenzatorju v odvisnosti od časa od trenutka, ko so nastali pari ion-elektron.
 - Koliko naj bo oddaljeno mesto nastanka ionov in elektronov od negativne plošče, da ne bo preloma v časovnem poteku napetosti na kondenzatorju?
4. Plankonveksni leči z goriščno razdaljo 10 cm posrebrimo ravno stran. Predmet postavimo 15 cm pred lečo. Z risanjem poteka značilnih žarkov skonstruiraj sliko predmeta. Na kateri razdalji od leče nastane slika predmeta?



Ciril Dominko

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Tekmovanje je potekalo v soboto, 14. aprila 1998. Tekmovalci so se sprijeli z naslednjimi nalogami:

Prvi letnik

- Poišči vsa naravna števila, ki so enaka enajstkratniku vsote svojih števk.
- Dokaži, da je število $19 \cdot 98 \cdot 2^{19+98} - 1$ deljivo s 3.

3. Meta je prestavljala kozarca valjaste oblike z zunanjima premeroma 4 in 6 cm po papirju kvadratne oblike s stranico 9 cm. Če kozarca primerno postavi, lahko vzdolž ene stranice papirnatega kvadrata odreže pravokoten trak, pa bosta kozarca še zmeraj na papirju. Kolikšna je največja širina traku, ki ga lahko odreže?
4. Na črno-beli šahovnici velikosti $n \times n$ je prvo polje v prvi vrstici pobarvano črno. Janezek je v vsaki sodi vrstici vsa bela polja pobarval modro. Dokaži naslednji trditvi o tako pobarvani šahovnici:
 - a) Šahovnica ima enako število belih in modrih polj.
 - b) Šahovnica ima sodo mnogo črnih polj natanko tedaj, ko je n sodo število.

Drugi letnik

1. Pokaži, da enačba $x^2 + y^2 + z^2 = (xy)^2$ nima rešitev v naravnih številih.
2. Za pozitivna realna števila a , b in c velja:

$$a + b - |a - b| - |a + b + |a - b| - 2c| > 0.$$

Dokaži, da so a , b in c dolžine stranic nekega trikotnika.

3. Dan je pravokotnik $ABCD$ z dolžinama stranic $|AB| = 15$ in $|BC| = 10$. V notranjosti pravokotnika leži taka točka E , da je $|DE| = 12$ in $|CE| = 9$. Izračunaj razdalji $|AE|$ in $|BE|$.
4. Janezek je, ko so doma kupili nov avto, na števcu kilometrov prebral 000052. Nato je ob vsakem prevoženem kilometru izračunal vsoto števk, ki jih je pokazal števec. Nekega dne je prvič ugotovil, da vsota števk še nikoli ni bila višja in da je bila že pred 9000 kilometri prav tolikšna. Kaj je tistega dne prebral na števcu? Čez koliko prevoženih kilometrov je bila vsota števk na števcu prvič večja od takratne?

Tretji letnik

1. Naj bosta $b > 1$ in $n > 1$ taki naravni števili, da je število $\overbrace{11 \dots 1}^{n \text{ enic}}_{(b)}$, zapisano v številskem sistemu z osnovo b , praštevilo. Dokaži, da je tudi n praštevilo.

2. Dana je kvadratna funkcija $p(x) = x^2 + ax + b$, kjer sta a in b poljubni celi števili. Pokaži, da za vsako celo število n obstaja tako celo število m , da je

$$p(n)p(n+1) = p(m).$$

3. Na stranici BC trikotnika ABC je izbrana takšna točka D , da je $|BD| = |AC| = 1$ in $\sphericalangle BAD = \frac{1}{3}\sphericalangle DAC = 30^\circ$. Izračunaj dolžino daljice CD .
4. Dvanajst oseb se je usedlo k pojedini za okroglo mizo, vendar se noben od njih ni usedel na mesto, ki mu ga je bil določil gostitelj. Dokaži, da se lahko krožno presedejo tako, da bosta vsaj dve osebi sedeli na pravih mestih.

Četrty letnik

1. Pokaži, da ne obstajajo naravna števila l , m in n , ki zadoščajo enačbi $n^2 + m^3 = m^l$.
2. Naj bo $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ poljubno število. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ označimo z a_{n+1} zadnjo števko števila $19a_n + 98$ v desetiškem zapisu. Dokaži, da je $0.a_1a_2a_3\dots$ racionalno število.
3. Naj bo H višinska točka in T težišče takega ostrokotnega trikotnika ABC , v katerem je daljica HT vzporedna stranici AB . Dokaži, da je $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 3$, kjer smo z α označili notranji kot pri oglišču A in z β notranji kot pri oglišču B .
4. Neko pleme ima 90 vojščakov in vsak izmed njih ima sulico, okrašeno z devetimi rdečimi ali zlatorumenimi peresi rajske ptice. Peresa so na vsako sulico pritrjena zaporedoma in nobeni dve rdeči peresi nista sosednji.
Ali imajo lahko vsi vojščaki različno okrašene sulice?

Matjaž Željko

19. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – pomladanski krog

V marcu je potekal pomladanski krog 19. tekmovanja mest. Dijaki prvih in drugih letnikov so tekmovali v prvi skupini, ostali pa v drugi. Izdelek vsakega tekmovalca je bil ocenjen z največjo možno vsoto točk iz treh nalog. V prvem delu so imeli dijaki na izbiro naslednje naloge:

Prva skupina

1. Anja, Tanja in Vanja so sestavljale besede iz dane množice črk. Anja jih je sestavila največ, Vanja pa najmanj. Sestavljanje pa so nato točkovale takole: beseda, ki sta jo našli dve dekleti, je štela 1 točko, beseda, ki jo je sestavila le ena, je štela 2 točki. Besede, skupne vsem trem, so prečrtale. Ali je možno, da je Vanja zbrala največ točk, Anja pa najmanj? (3 točke)
2. Šahovski kralj obhodi celotno šahovnico 8×8 tako, da obiše vsako polje natanko enkrat in se na koncu vrne na začetno polje. Dokaži, da se je sodo mnogokrat premaknil diagonalno. (3 točke)
3. Naj bosta AB in CD daljici, ki ležita na različnih krakih kota z vrhom v O . Točka A naj leži med O in B , točka C pa med O in D . Premica skozi središči daljic AD in BC seka krak kota, na katerem je AB , v točki M , in krak kota, na katerem je CD , v točki N . Dokaži, da je $\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{CD}$. (3 točke)
4. Za vsako trimestno število zapišemo produkt njegovih števk (če je kakšna izmed števk 0, je produkt 0). Kolikšna je vsota vseh tako dobljenih produktov? (4 točke)
5. Ostržek trdi, da zna razdeliti enakokraki trikotnik na tri take trikotnike, da lahko poljubna dva od teh sestavi v nov enakokraki trikotnik. Ali laže? (5 točk)

Druga skupina

1. Ostržek trdi, da lahko nekaj nepravokotnih medsebojno podobnih trikotnikov sestavi v pravokotnik. Ali mu verjameš? (Nekateri od trikotnikov so lahko tudi skladni.) (3 točke)

2. Za vsako štirimestno število zapišemo produkt njegovih števk (če je kakšna izmed števk 0, je produkt 0). Kolikšna je vsota vseh tako dobljenih produktov? (3 točke)
3. S koliko največ barvami lahko pobarvamo šahovnico 8×8 tako, da je vsako polje sosednje z vsaj dvema poljema, ki sta enake barve kot to polje? (Vsako polje je pobarvano le z eno barvo.) (3 točke)
4. Za neka pozitivna števila A , B , C in D ima sistem enačb

$$x^2 + y^2 = A$$

$$|x| + |y| = B$$

m rešitev, sistem enačb

$$x^2 + y^2 + z^2 = C$$

$$|x| + |y| + |z| = D$$

pa n rešitev. Pri tem velja $m > n > 1$. Poišči m in n . (4 točke)

5. V kot včrtamo krožnico s središčem O . Prezrcalimo točko O preko enega od krakov kota in zrcalno sliko označimo z A . Tangenti na krožnico, ki gresta skozi A , sekata drugi krak kota v točkah B in C . Pokaži, da leži središče trikotniku ABC očrtane krožnice na simetrali prvotnega kota. (5 točk)

V drugem delu pomladanskega kroga so tekmovalci reševali sedem nalog. Objavljamo po dve za vsako skupino:

Prva skupina

1. Šest igralnih kock obesimo na togo žico tako, da vsako kocko preluknjamo skozi nasprotni stranski ploskvi. Vsako kocko lahko vrtimo neodvisno od ostalih. Pokaži, da lahko kocke zavrtimo tako, da bo šestmestno število, ki ga dobimo na vrhu, ko žico s kockami vodoravno položimo na mizo, deljivo s sedem. (Stranske ploskve igralne kocke so oštevilčene od 1 do 6 tako, da je vsota števil na nasprotnih ploskvah vedno enaka 7.) (4 točke)

2. Kvadrat razdelimo na 25 kvadratkov. Tem kvadratom narišemo nekaj diagonal tako, da nobeni dve narisani diagonali nimata skupne točke (niti krajišča). Koliko največ diagonal lahko narišemo na tak način? (7 točk)

Druga skupina

1. Kvadrat z dolžino stranice 1 razdelimo na pravokotnike. V vsakem takem pravokotniku izberemo eno od krajših stranic (če je pravokotnik kvadrat, izberemo poljubno stranico). Dokaži, da je vsota dolžin vseh izbranih stranic najmanj 1. (4 točke)
2. V notranjosti konveksnega štirikotnika $ABCD$ leži takšna točka M , da sta AMB in CMD enakokraka trikotnika s kotom 120° pri vrhu M . Pokaži, da obstaja taka točka N , da sta trikotnika BNC in DNA enakostranična. (5 točk)

Aleš Vavpetič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, šolsko leto 1998/99, številka 2, strani 65 – 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1998/99 je za posamezne naročnike **1.800 SIT**, za skupinska naročila šol **1.500 SIT**, posamezna številka **360 SIT**, za tujino 50 DEM (25 ECU), devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1367

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

Posnetek Sončeve korone ob zadnjem popolnem sončnem mrku. Viden je bil 24. oktobra 1995, in sicer s pasu, ki se je raztezal preko Indije in Tajske.

