

26 (1998-1999)

1

PRESEK

2

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 15, 1997-98

PRESEK

3

PRESEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 15, 1997-98

PRESEK

PRESEK

PRESEK

25 (1997-1998)

2

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

Za Presekom je že četrto stoletje rednega izhajanja. Da bi zaznamovali ta lepi jubilej, smo prvo številko šestindvajsetega letnika sestavili nekoliko drugače kot običajno. Upamo, da bo zato še posebej všeč našim mlajšim bralcem, ki starejših letnikov Preseka ne poznajo.

Pričujočo številko posvečamo številnim bivšim in sedanjim sodelavcem: ustanoviteljem revije, avtorjem, urednikom, recenzentom in lektorjem, tehničnim sodelavcem, risarjem, ilustratorjem in vsem ostalim, ki so kakorkoli prispevali k temu, da se je do danes nabralo Presekov za kup, visok za "celega človeka". V zahvalo za preteklo delo in kot vzpodbudo za naprej!

Odgovorna urednica



list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, leto 1998/99, številka 1, strani 1–64

VSEBINA

MATEMATIKA	Okrnjena Fibonaccijeva števila (Mitja Rosina)	20-21
FIZIKA	Človeška moč (Janez Strnad)	2-7
ASTRONOMIJA	Lunina kimanja (Marijan Prosén)	26-28
RAČUNALNIŠTVO	Srečna števila z računalnikom (Martin Juvan)	14-17
NALOGE	Prav posebno število! Pa je to tudi res? (Marija Vencelj)	13
	Dotikajoči se krogi (Martin Juvan)	31
ZANIMIVOSTI,	Velikani na Marsu (Vida Kariž Merhar)	40
RAZVEDRILO	Križanka "Tu smo že petindvajset let" (Marko Bokalič)	32-33
NOVICE	Slovenski dijaki na letošnjih olimpiadah iz matematike in fizike	7
TEKMOVANJA	34. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	53-54
	18. državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	54-55
	36. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko)	56-58
	42. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko)	58-60
	19. mednarodno matematično tekmovanje mest – reš. iz XXV/6, str. 378 (Aleš Vavpetič)	61-64
IZ STARIH	ČLANKI	
ŠTEVILK	Množenje na prste (Jože Vrabec)	10-12
	Odkritje pulzarja v ostanku supernove 1987 A (Andrej Čadež) ..	18-19
	Zasukaj premico (Boris Lavrič)	23-25
	Tri modre (Vilko Domajnko)	28-30
	Metoda "ostrega pogleda" v programiranju (Tomi Dolenc)	34-37
	"Breztežno stanje" (Janez Strnad)	38-39
	Obojestranska praštevila (Edvard Kramar)	42-43
	NALOGE	
	Poskusi – premisli – odgovori (Zvonko Trontelj)	13
	Praznični okrasek (Marija Vencelj)	19
	Enake vsote (Boris Lavrič)	31
	Mavrična uganka (Marija Vencelj)	41
	Nenavadna premica (Dušan Repovš)	41
	Kriptaritem z dvema kartama (Peter Petek)	42
	Preprost preizkus – napačna razlaga (Andrej Likar)	44
	Ali znaš pokriti šahovsko desko z dominami? (Egon Zakrajšek) ..	III
	RAZVEDRILO, ZANIMIVOSTI	
	Oda kvadratni enačbi z baladnim priokusom (Tomaž Pisanski) ...	8-9
	Nevarna literatura (Peter Petek)	21-22
	Bistrovidec (Vladimir Batagelj)	22
	REŠITVE NALOG IZ STARIH ŠTEVILK	45-49
	TEKMOVANJA	50-52
NA OVITKU	Presekov srebrni jubilej (I in IV foto Peter Legiša)	I, II, IV

ČLOVEŠKA MOČ

Pojma *dela* in kinetične energije so v fiziki razčistili šele dobrih sto let po drugem Newtonovem zakonu, čeprav je izrek o kinetični energiji neposreden nasledek tega zakona. Vendar so že pred tem razpravljali o delu, ki so ga imenovali napor, moment aktivnosti in še kako drugače. Morda je bil eden od razlogov takratnega povečanega zanimanja za delo tisto delo, ki ga opravi človek med delavnikom. To je mogoče razumeti, ker so v tedanjem času v glavnem izkoriščali delo ljudi in živali. Delo so računali tako, da so silo pomnožili s potjo njenega prijemališča. Pri tem so vsaj za delo teže uporabljali enoto kilogrammeter, kot da bi ne šlo za težo, ampak za maso. Zanimala jih je še *moč*, to je delo na časovno enoto. Tudi to ime se je ustalilo pozneje. Moč so dobili, ko so silo pomnožili s hitrostjo njenega prijemališča.

V 17. stoletju je italijanski fiziolog Giovanni Borelli človeka obravnaval kot sestavo vzvodov in osi. Francoz Antoine Parent si je leta 1702 prizadeval z mehaničnimi enačbami pojasniti delovanje telesa. Že tedaj je privlačilo pozornost vprašanje, kolikšno delo naj bi človek opravil v delavniku, ki je tedaj navadno trajal 10 ur. Tisti, ki so resnično delali, niso računali in tistim, ki so računali, ni bilo treba opravljati te vrste dela. Slednji so posredovali številne podatke, ki so se med seboj znatno razlikovali, a jih – presentljivo – sploh niso poskusili poenotiti.

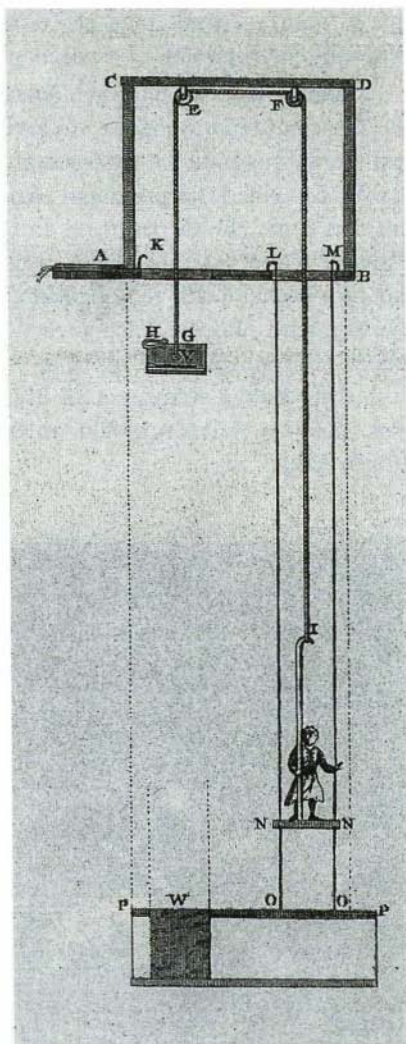
Philippe de La Hire je leta 1699 v poročilih francoske akademije znanosti trdil, da človek lahko deluje na drugo telo v vodoravni smeri s silo, ki ustreza teži 14-kilogramske uteži. V istem zvezku je Guillaume Amon-ton, znan po prispevku k plinskim zakonom, poročal, da je pri brusilcih stekla izmeril malo manjšo silo. Brusilec naj bi s silo, ki ustreza teži 12,5-kilogramske uteži, klado s smirkom potiskal po steklu s hitrostjo 0,49 m/s po deset ur na dan. Ob moči 60 W bi tako v osmih urah opravil delo 1,7 MJ ali 0,50 kWh. Tedaj so za razdaljo uporabljali enoti pariški čevelj (0,325 m) ali angleški čevelj (0,305 m) in za maso funt (0,5 kg). Zmešnjavi se izognemo, če vse podatke preračunamo v naše enote in se omejimo na osemurni delavnik. Pri tem upoštevamo, da je teža enega kilograma enaka 9,8 newtona. 1 MJ, megajoule, je milijon joulov, 1 kWh, kilowattura, pa 1000 W·3600 s, to je 3,6 MJ.

Charles Augustine de Coulomb, ki je izmeril silo med naelektrenima telesoma, je pred dvesto leti objavil obsežno raziskavo o delu človeka. Ugotovil je, da delo razmeroma dobro izkoristi naprava, pri kateri se delavec po stopnicah povzpne v košaro, se z njo spusti in pri tem dvigne breme, malo manjše od svoje teže, se znova povzpne in to ponavlja. Take naprave so pogosto uporabljali (slika 1). Pri eni od njih se je delavec v

15 minutah dvignil za 75 metrov in pri masi 70 kg dosegel moč 86 W. Coulomb najbrž ni poznal podatka Angleža Johna Theophila Desaguiliersa, ki je navedel za moč pri hoji navzgor skoraj dvakrat več, 156 W. Pač pa je zvedel od prijatelja, ki je vodil odpravo na otok Tenerife, da je njegovo moštvo doseglo višino 2923 metrov po hoji, ki je trajala 7 ur in $\frac{3}{4}$. Tako je dobil za moč rezultat 72 W in za osemurno delo 0,58 kWh. Po Badjurovem vodniku po slovenskih vrhovih naj bi se planinec v eni uri povzpел v povprečju za 400 m. Temu ustreza za 70-kilogramskega človeka moč 76 W. Pri osemurni hoji bi planinec opravil delo 0,61 kWh.

Prijatelj Jamesa Watta John Robison je navedel podatke za gugalnici podobno črpalko. Mladenič z maso 68 kg in dodatnim bremenom 15 kg je tekal z ene strani vzvoda na drugo in poganjal črpalko z močjo 151 W. V osmih urah je opravil delo 1,2 kWh. Angleški kaznjenci so poganjali mlin tako, da so v votlem valju hodili na mestu. V šestih urah so se tako dvignili in spustili efektivno za 2630 m. Pri tem bi z močjo 83 W v osmih urah opravili delo 0,66 kWh.

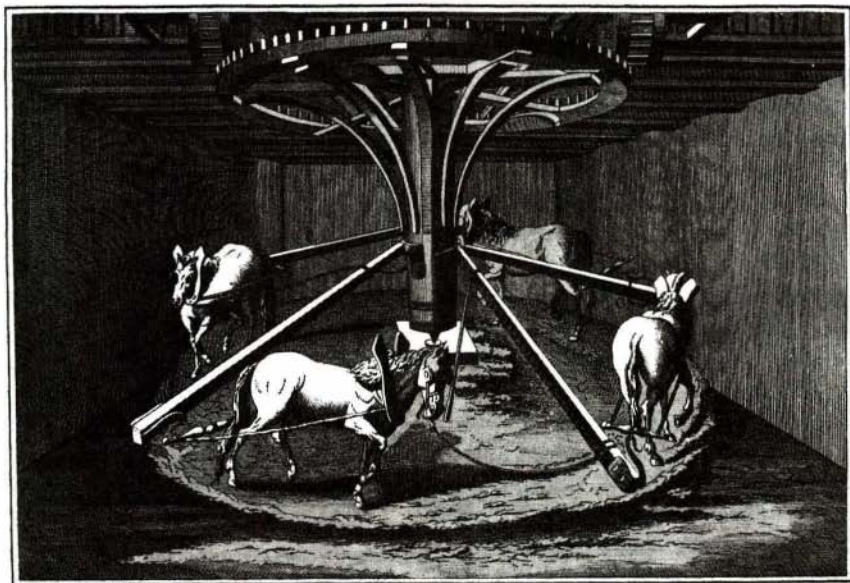
Povprečje starih podatkov za moč človeka od 60 W do 156 W je 100 W, kar bi lahko imenovali *človeška moč*. V osemurnem delavniku bi s to močjo opravili delo 0,8 kWh. Danes večino dela opravijo stroji. Po višji zimski tarifi za električno delo (16 tolarjev/kWh) bi to stalo nekaj manj kot 13 tolarjev, po nižji tarifi



Slika 1. Stara naprava, pri kateri se je delavec vzel po stopnicah na ploščad v višini L, se z njo spustil in dvignil pri tem posodo z vodo z malo manjšo težo od svoje. V višini K se je posoda spraznila in plošča se je spustila sama, ko se je delavec vzpenjal po stopnicah, ki niso narisane.

pa še manj. Zaradi tega sta dandanes človeško delo in človeška moč v uporabljenem pomenu besede nepomembna.

Zanimivo je zasledovati, kako so primerjali človeka s konjem. Že pri La Hiru najdemo podatek, da konj zmore sedemkrat toliko kot človek, in pri Amontonsu, da zmore šestkrat toliko. Drugi so razmerje postavili med 2,5 in 14. Nekdo je predlagal razmerje 5,87, a je upošteval, da konj dela na dan 8 ur, človek pa 10 ur, in tako prišel do efektivnega razmerja 4,6. Angleži so večinoma navajali večje razmerje; brez dlake na jeziku je eden od njih pojasnil, da za enega konja zaleže 5 Angležev, a 7 Francozov ali Nizozemcev. James Watt je za merjenje moči parnih strojev vpeljal kot enoto *konjsko moč*, za katero je veljal dogovor, da ustreza 735 W, dokler je mednarodni sistem enot ni ukinil (slika 2). Noben konj ne more dalj časa delati s tolikšno močjo, zato so Wattovo enoto nehali povezovati z močjo konj.



Slika 2. Stara naprava, ki je izkoriščala potisno silo konj. Po podatkih iz druge roke za tako napravo je J. Watt določil konjsko moč.

V štiridesetih letih prejšnjega stoletja sta nemška zdravnika ob misli na človeka kot stroj razvila *energijski zakon*. Robert Mayer je leta 1842 slutil, da se energija ohrani, čeprav je to povedal z drugimi besedami. Hermann von Helmholtz je najprej raziskoval kemijske reakcije, ki potekajo v človeškem telesu, in prišel do sklepa, da se v bistvu ne razlikujejo od reakcij v neživi naravi. Leta 1847 je podrobno obdelal potencialno energijo in jo postavil v zvezo s kinetično energijo. Tri leta pozneje je Rudolf Clausius zapisal energijski zakon, kot ga uporabljamo v termodinamiki

$$\Delta W_n = Q + A.$$

Sprememba notranje energije je enaka delu in toploti.

Energijski zakon je spremenil pogled na človeško delo. Helmholtz je zapisal: "Večina fiziologov v prejšnjem stoletju in na začetku tega [19. stoletja] je menila, da pojave v živih telesih določa glavni dejavnik, ki so ga imenovali "življenjska sila". [...] Nasprotno pa sedanji rod trdo dela, da bi našel prave vzroke pojavov, ki potekajo v živem telesu. Ne mislijo, da obstaja kaka druga razlika med kemijskimi in mehaničnimi pojavi v živem telesu in zunaj njega, kot tista, ki jo je mogoče pojasniti z bolj zapletenimi okoliščinami. Videli smo, da energijski zakon podpira to misel. Zakon kaže pot, po kateri to temeljno vprašanje lahko rešimo s poskusom." To se je zares zgodilo.

Upoštevajmo zapisani energijski zakon za časovno enoto v stacionarnih okoliščinah:

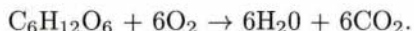
$$P_k = P_Q + P.$$

Telo, v katerem se "notranja energija"¹ pri kemijskih reakcijah v časovni enoti manjša, oddaja toplotni tok in mehanično moč. Vse tri količine P_k , P_q in P so potemtakem negativne.

Oddano mehanično moč P merimo z ergometrom, na primer z izpolnjeno različico sobnega kolesa z merilniki za hitrost, srčni utrip, moč. P_k določimo preko porabe kisika iz zraka, ki ga dihamo. Oddanega toplotnega toka ni treba meriti, ampak ga izračunamo kot razliko $P_q = P_k - P$.

¹ To ni res. Delo bi morali razdeliti na delo tlaka in preostalo delo A ter ugotoviti, da se pri konstantnem tlaku vsota spremembe notranje energije in negativnega dela tlaka ujema s spremembo *entalpije*. P_k je potemtakem zmanjšanje entalpije na časovno enoto. Ker besede entalpija srednješolci ne poznajo, jo nadomestimo z "notranjo energijo". Če se ne spremeni prostornina in je delo tlaka enako nič, postanejo narekovaji odveč.

Porabo kisika raziščimo pri oksidaciji glukoze enega izmed ogljikovih hidratov:



En mol glukoze z maso 180 g porabi 6 molov kisika s prostornino 136 dm^3 pri temperaturi 0°C in navadnem zračnem tlaku ter sprosti 2,87 MJ, to je preračunano na kubični decimeter kisika $2,87 \text{ MJ}/136 = 21 \text{ kJ}$ in na gram glukoze $2,87 \text{ MJ}/180 = 16 \text{ kJ}$. Pri nespremenjeni temperaturi se prostornina ne spremeni znatno, če je voda v kapljevinskem stanju; na začetku in na koncu imamo 6 molov plina. Pri drugih sestavinah hrane dobimo podobne vrednosti, kot kaže prva preglednica.

snov	sprememba "notranje energije" na maso	sprememba "notranje energije" na prostornino kisika
ogljikov hidrat	17 kJ/g	21 kJ/dm ³
beljakovina	18	19
maščoba	39	20

V povprečju smemo računati, da 1 dm^3 porabljenega kisika ustreza 20 kJ. V podrobnosti je poraba kisika odvisna od sestava hrane. Vrhunski športnik lahko v minuti porabi na kilogram mase po 70 cm^3 kisika in se po tem razlikuje od zapečkarja, ki zmore le 4 desetine tega.

Druga preglednica vsebuje nekaj podatkov o tem, kolikšna je poraba kisika na kilogram mase človeka in na minuto in kolikšna oddana mehanična moč.

opravilo	poraba kisika	oddana moč
sprehod, delo doma	$10 \text{ cm}^3/\text{kg}\cdot\text{m}$	230 W
kolesarjenje 16 km/h,		
prso plavanje 1,6 km/h	20	465
nogomet, žaganje drv	25	580
košarka	30	700
dirkač na kolesu 44 km/h	70	1500

Človek lahko razvije zelo veliko moč, na primer 1500 W, a le zelo kratek čas 6 s, moč 750 W zmore 1 minuto, moč 240 W zmore 35 minut in moč 150 W zmore 5 ur. Podatki so približni in prvi zadevajo vrhunske športnike. Tudi ko počivamo in ne oddajamo mehanične moči, oddajamo toplotni tok okoli 80 W.

Po ustaljeni navadi lahko določimo izkoristek človeškega stroja P/P_k . Pri kolesarjenju dosežemo 0,19, pri potiskanju vozila malo manj, pri premetavanju peska z lopato pa veliko manj. James Joule je izkoristek konja ocenil že leta 1864. V 24 urah lahko konj opravi delo 38 MJ in poje 6 kg sena in 6 kg ovsa. Na kilogram hrane odpade tako 3,2 MJ dela. Pri sežigu 1 kg mešanice sena in ovsa v kisiku se sprosti 12,8 MJ toplote, tako da je izkoristek $3,2/12,8 = 0,25$.

Po podatkih za izkoristek sklepamo, da človeško ali živalsko telo ne deluje podobno kot parni stroj, pri katerem je izkoristek odvisen od razlike najvišje temperature in temperature okolice. V takem stroju bi morala biti temperaturna razlika vsaj 75 stopinj, da bi dosegel izkoristek 0,2. Tako visoke temperature telo ne bi preneslo. Delovanje človeškega telesa bolj spominja na galvanski člen, ki mu pogosto dodamo novo snov za elektrodi in elektrolit.

Morda na podobnost s parnim strojem napelje podatek o sežigni toploti. Zares spremembo "notranje energije" pri oksidaciji navadno izmerimo pri sežigu v kisiku. Toda človeškemu ali živalskemu telesu hrane ni treba najprej sežgati in potem nastalo toploto izkoristiti, kot jo izkoristi parni stroj. Pač pa v mišicah poteka pet vrst dokaj zapletenih kemijskih reakcij. Pri treh od njih se ob razgradnji snovi v telesu in ob razgradnji hrane energija sprošča. Pri preostalih dveh pa na novo nastaneta snovi, ki sta se prej razgradili, za kar se porabi energija, sproščena ob razgradnji hrane. Precejšen del sproščene energije se porabi za delo pri krčenju mišic in nastane precej manj toplote kot ob sežigu v kisiku.

Janez Strnad

SLOVENSKI DIJAKI NA LETOŠNJIH OLIMPIADAH IZ MATEMATIKE IN FIZIKE

Letošnji mednarodni tekmovanji mladih iz matematike in fizike sta priredili dve otoški državi. Z 29. fizikalne olimpiade na Islandiji sta Matija Mazi in Martin Zadnik prinesla pohvali, na Tajvanu pa je na 39. matematični olimpiadi Tadej Starčič osvojil bronasto medaljo, Ajda Skarlovnik in Matjaž Titan pa sta prejela pohvali.

Udeležencem, predvsem pa nagrajencem obeh olimpiad čestitamo.

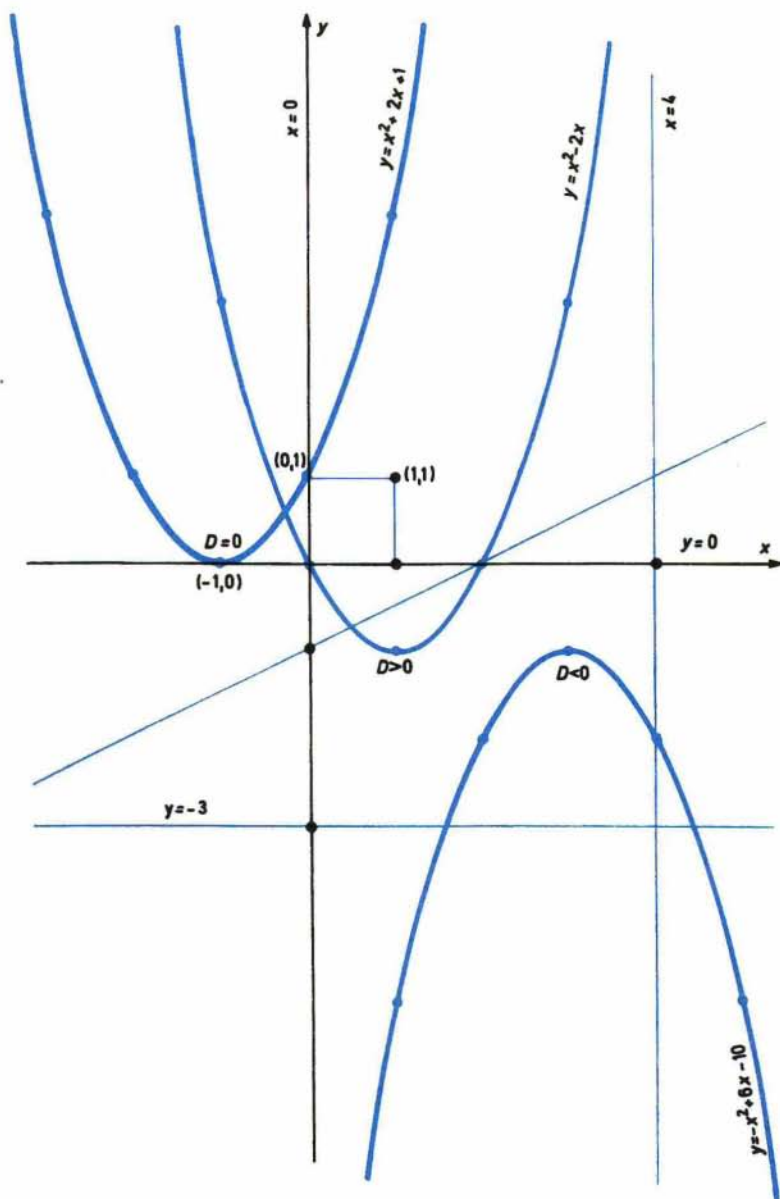
ODA KVADRATNI ENAČBI Z BALADNIM PRIKUSOM

Kdor s kvadratno se enačbo skuša,
tole pesem naj posluša!
Lepa je enačba $ax^2 + bx + c = 0$
znanka.
 a , b , c poznamo, x neznanka.
O, algebra ljuba mamka,
brž z rešitvijo postreži
in razčleni,
kdaj korena sta enaka,
kdaj realna, spet kompleksna;
brž z rešitvijo postreži,
o, algebra ljuba mamka!
In rešitev je že znana
 $x = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$,
a v njej D diskriminanta
vsa rešitvi je predana.
Z ničlo D se neizprosno
v boj junaški brez predsodka
vrže nadvse ponosno!
In se skušata izrodka,
kdo močnejši je, kdo večji!
V začetku boja sta enaka $D = 0$
Rešitev $x = -b / (2a)$
tam sameva!
Vendar, glej ga spaka!
 D uspeva; $D > 0$
In rešitev kar razpade
kakor Pegam na dva kosa,
ko ga Lambergar napade.
Tu korena sta realna,
nebojgljena, samosvoja
in vsa tuja.
O, usoda, ti si kalna!

Glej!!??!
Boj ni končan!
 D omaguje! $D \rightarrow 0$
Korena vedno bolj sta skupaj,
za hip sta eno... $D = 0$
je res že vse zgubljeno?
Nikoli, človek, ne obupaj!
Ko nič (0) je razuzdana
diskriminanto poteptala $D < 0$
iz R oba korene
zletela sta zravnana.
O, ~~kas~~^{nebis}, kompleksna ti ravnina!
V njej mir svoj prepotrebni
korena bosta žila.
Obdaja sinja ju modrina.
Tako sta konjugiranost dobila,
popolnost, da le malo takih,
ju loči premica realna
nikoli več ne bosta se združila.
In kaj zdaj to?
Je sploh mogoče!?
Enačba joče!
 a sabotira, $a \rightarrow 0$
enačba umira
 a se izniči, $a = 0$
in jo zmaliči ...

Prelepa ti kvadratna
enačbica preudarna,
usoda je zavratna.
Odslej boš linearna
 $bx + c = 0$

Tomaž Pisanski

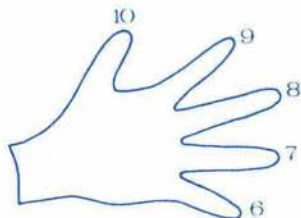


MNOŽENJE NA PRSTE

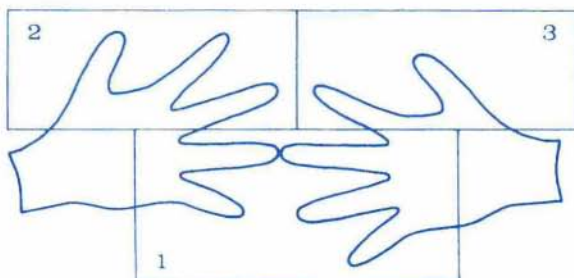
Ne bom vas vprašal, ali znate seštevati na prste. Tako dolgo je že, odkar ste se tega naučili, da ste že pozabili, kako je bilo, ko še niste znali. Ali pa znate tudi množiti na prste? Seveda, boste rekli, saj je množenje (vsaj množenje naravnih števil) le seštevanje več enakih sumandov. Na primer: $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$; in ta račun je kaj lahko napraviti na prste. Toda v mislih imam drugačno tehniko množenja. Od prej omenjene še loči predvsem v treh stvareh: hitrejša je, privede nas malo dlje kot do 10 in še daleč ni tako "sama po sebi razumljiva", kot je seštevanje na prste. Gotovo se vsakomur zdi, da bi seštevanje na prste sam odkril, če se ga ne bi bil naučil od drugih. Za metodo množenja, ki jo name-ravam opisati, pa česa takega najbrž ne boste trdili. Seveda pa je moral tudi to metodo nekdo odkriti. Kdo je to bil, ni znano, kajti metoda je stara že več tisočletij. V starih časih je bila splošno znana in baje se je ponekod ohranila prav do današnjih dni.

Pa naj bo dovolj uvoda, pre-idimo k stvari. Privzeli bomo, da znamo na pamet poštevanko do 5, in pokazali, kako na prste zmnožimo dve izmed števil 6,7,8, 9,10 (za ta račun bomo potrebovali v resnici le poštevanko do 4).

Vsakemu prstu na roki prire-dimo eno od števil med 6 in 10; mezinu 6, prstancu 7, sredincu 8, kazalcu 9, palcu 10.



Množenje bomo razložili na primeru. Recimo, da hočemo izračunati, koliko je $7 \cdot 8$. Položimo obe roki predse z dlanmi obrnjenimi proti sebi. Staknimo prstanec leve roke (predstavljač števil 7) s sredincem desne roke (števil 8); sicer pa naj se prsti ne dotikajo. Mislimo si vse prste razdeljene v tri skupine (glej sliko):

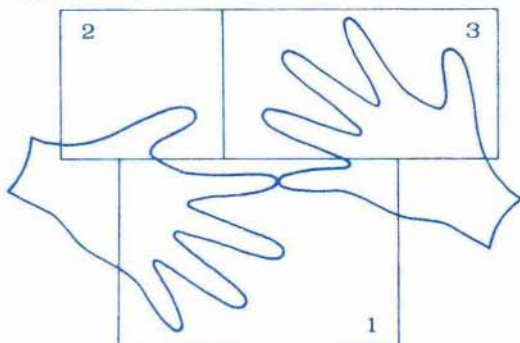


v prvi skupini naj bosta prsta, ki se dotikata, in vsi prsti pod njima; v drugi skupini prsti leve roke nad dotikajočima se prstoma; in v tretji skupini prsti desne roke nad dotikajočima se prstoma. Produkt, ki ga iščemo, je zdaj enak

$$(\text{število prstov v 1.skupini}) \times 10 + (\text{število prstov v 2.skupini}) \times (\text{število prstov v 3.skupini});$$

v našem primeru torej $7 \cdot 8 = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 2 = 56$.

Preprosto, kajne? Z malo vaje se lahko človek tako izuri, da vidi rezultat v trenutku. Toda, ali res pride vedno pravi rezultat? Poizkusimo še 9·6:



$$9 \cdot 6 = 5 \cdot 10 + 1 \cdot 4 = 54$$

Zdaj najbrž že verjamete v pravilnost te metode (čeprav sicer veste, da z dvema primeroma ni mogoče dokazati pravilnost kake splošne trditve). Če pa kdo še dvomi, naj sam preizkusi vse možne primere. Gotovo ste tudi že ugotovili, da vam ta računska metoda življenja ne bo kdo ve kako olajšala; saj najbrž obvladate poštevanke do 10. Zabavna je pa le!

Za marsikoga bi bila s tem stvar opravljena. Za nas pa še ne sme biti. Ne spodobi se za Presek, da se ne bi na koncu vprašali,

od kod pravilnost te čarobne metode. No, odgovor je takle: metodo utemeljuje enačba, ki velja, kot se prav lahko sami prepričate, za poljubni števili x in y :

$$(5+x)(5+y) = 10(x+y) + (5-x)(5-y)$$

Takoj bomo pokazali zvezo med to enačbo in našo računsko metodo. Za x in y si moramo izbrati taki števili, da bo na levi strani enačbe stal prav produkt, ki ga želimo izračunati; v našem primeru 7.8 bi torej vzeli $x=2$, $y=3$. Na desni strani enačbe je

$x+y$ = število prstov v 1.skupini

$5-x$ = število prstov v 2.skupini

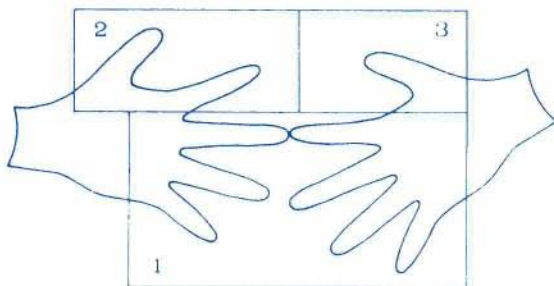
$5-y$ = število prstov v 3.skupini

Tako je stvar jasna!

Seveda pa je zgornja enačba še vedno pravilna, če število 5 nadomestimo s poljubnim drugim številom. Za vsako število a velja torej

$$(a+x)(a+y) = 2a(x+y) + (a-x)(a-y)$$

Od tod lahko dobimo nova računška pravila. Na primer, če obvladamo pošteevanko do 9, lahko dve števili med 11 in 15 zmnožimo podobno kot prej, le da zdaj upoštevamo relacijo, ki jo dobimo, če vstavimo v zadnjo enačbo $a=10$. Izračunajmo za primer $13 \cdot 14$:



$$13 \cdot 14 = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 6 = 182$$

Podobno lahko množimo poljubni dve števili med 16 in 20, če poznamo produkt vsakih dveh števil med 10 in 14; v zgornji enačbi moramo vzeti $a=15$. In tako naprej.

Po knjigi: N.A.Court, *Mathematics in Fun and in Earnest*.

Jože Vrabec

PRAV POSEBNO ŠTEVILO! PA JE TO TUDI RES?

Šestmestno število

142857

ima presenetljivo lastnost: Če ga pomnožimo z 2, 3, 4, 5 ali 6, dobimo zapored šestmestna števila

285714, 428571, 571428, 714285, 857142,

ki se vsa zapišejo z natanko istimi števki kot prvotno število. Še več! Vrstni red števk je v vseh šestih številih enak, če privzamemo, da zadnji števk v številu sledi njegova prva števk (množenje z 2, 3, 4, 5 ali 6 torej samo ciklično permutira števk števil 142857).

- Je število 142857 nekakšen 'slučajni čudež' med števili ali obstaja kakšna aritmetična razlaga za opisano lastnost?
- Ali ima še kakšno število podobno lastnost (to je, da množenja z nekaj zaporednimi začetnimi naravnimi števili samo ciklično permutirajo števk števil)?

Marija Vencelj

**POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI**

V prazen plastičen kozarec ali v jogurtov lonček položi surovo jajce. Nato postavi kozarec z jajcem pod vodovodno pipo in jo počasi vse bolj in bolj odpiraj. Ker bo voda pričela teči čez rob kozarca, je najprimerneje, da delaš ta poskus kar v umivalniku. Pojav, ki ga boš opazil med poskusom, bo najbolj izrazit, če je iztok vode iz pipe oddaljen od vrha plastičnega kozarca za kakšnih 10 do 15 cm. Lahko si pomagaš tako, da podaljšaš pi po z gumijasto ali s kako drugo cevjo.

Dobro opazuj in nato opiši pojav ter ga poskusi razložiti.

Odgovore pošljite uredništvu Preseka pod oznako PPO do 10. oktobra 1979. Avtorji treh najboljših odgovorov prejmejo knjižne nagrade.

Zvonko Trontelj

PRESEK 7 (1979/80), številka 1

SREČNA ŠTEVILA Z RAČUNALNIKOM

V predzadnji številki lanskega letnika Preseka nas je profesor Grasselli "poskušal" prepričati, da je število 13 srečno (glej prispevek J. Grasselli, Nesrečno število 13 je srečno, Presek 25 (97/98), str. 258–260). O tem, ali mu je to uspelo ali ne, ne bomo razpravljali, pogledali pa bomo, kako lahko s pomočjo računalnika rešimo nalogo, ki jo je zastavil na koncu prispevka. Predlagal je, da poiščemo vsa srečna števila do 1000.

Predno pa se lotimo naloge, se spomnimo, kako sploh pridemo do srečnih števil. Začnemo z zaporedjem vseh naravnih števil

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, ...

Na prvem koraku iz zaporedja odvržemo vsa soda števila. Ostane zaporedje

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, ...

Na drugem koraku v (že zmanjšanem) zaporedju pogledamo drugo število, to je 3, in iz zaporedja odvržemo vsako tretje število. Ostane

1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, ...

Na tretjem koraku pogledamo tretji element trenutnega zaporedja, to je 7, in iz zaporedja odvržemo vsak sedmi člen. Ostane

1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 27, ...

Gotovo ste uganili nadaljevanje. Na četrtem koraku pogledamo četrti člen, ta je enak 9, in izločimo vsako deveto število. Nato sledi peti korak, pa šesti itn. Števila, ki "preživijo" prav vse korake, imenujemo *srečna*.

Postopek, ki smo ga opisali, imenujemo *Ulamovo rešeto*. Močno spominja na znano Eratostenovo rešeto, s katerim lahko določimo praštevila do neke vnaprej izbrane meje. Prepričan sem, da ste program za iskanje praštevil z Eratostenovim rešetom že kdaj napisali, saj gre za programerski izziv, s katerim se v mladosti sreča vsak "resen" programer. Ulamovo rešeto je sicer podobno, a vendarle nekoliko drugačno. Pri Eratostenovem rešetu je odločitev o tem, ali bomo število izločili ali ne, odvisna od ostanka pri deljenju, pri Ulamovem rešetu pa je kriterij mesto števila v že zmanjšanem zaporedju. Zato bo program za sejanje z Ulamovim rešetom malce bolj zapleten kot program za sejanje z Eratostenovim rešetom.

Program bomo zapisali v programskem jeziku pascal. Števila, ki so kandidati za srečna števila, bomo v programu hranili v tabeli **tab**. Ker bomo prvi korak sejanja opravili kar sami, bomo na začetku v tabelo vpisali liha števila. Pri tem bodo indeksi v tabeli tekli od 1 do 500, vrednost **tab[i]** pa bo $2 \cdot i - 1$. V spremenljivki **n** bomo ves čas hranili podatek, koliko kandidatov za srečna števila je še v tabeli **tab**. Na začetku bo **n** enako 500 (toliko je lihih števil do 1000). S števcem **k** bomo šeli korake. Začetna vrednost bo enaka 2.

Jedro programa bo zanka **while**. V vsaki ponovitvi zanke bomo opravili en (**k**-ti) korak sejanja. Zanko bomo ponavljali toliko časa, dokler bo **k**-ti element tabele (tega bomo hranili tudi v spremenljivki **d**) manjši ali enak **n**. Vemo, da nadaljnji koraki ne morejo več izločiti števil iz tabele, saj je v tabeli premalo števil. V vsaki ponovitvi zanke bomo iz tabele odstranili števila, ki so na mestih **d**, $2 \cdot d$, $3 \cdot d$, ... To storimo tako, da števila, ki so na mestih $d + 1$, $d + 2$, ..., $2 \cdot d - 1$ pomaknemo za eno mesto v levo (v tabeli smo pred njimi odstranili eno število, in sicer tisto na mestu **d**), števila na mestih $2 \cdot d + 1$, ..., $3 \cdot d - 1$ za dve mesti v levo itn. Premikanje izvedemo v zanki **for**, pri čemer bomo poleg števca zanke, tega bomo označili z **j**, uporabili še pomožni števec **i**. Ko **j** teče od vrednosti $d + 1$ do **n**, vsakič pogledamo, ali je deljiv z **d**. Če je deljiv, ne storimo ničesar (pripadajoči element tabele tako preskočimo in ga s tem izločimo). Kadar pa **j** ni deljiv z **d**, pripadajoči element tabele **tab** premaknemo za nekaj mest naprej. Kam ga moramo prestaviti, nam pove števec **i**. Vsakič, ko premaknemo kak element, ta števec povečamo za ena. Kadar pa elementa ne premaknemo, to pa je vsakič, ko je **j** deljiv z **d**, števec **i** dodatno zaostane še za eno mesto za števcem **j**. Začetna vrednost števca **i** bo **d** (na tem mestu v tabeli **tab** nastane prva "luknja", ki jo je treba zapolniti). Po koncu zanke **for** seveda ne smemo pozabiti na popravek vrednosti spremenljivke **n** in na pripravo spremenljivk **k** in **d** za novi korak izločanja.

program SrečnaŠtevila;

{ Poišče srečna števila do konstante meja. }

const

meja = 1000;

vel = (meja + 1) div 2; { 500 }

var

tab: **array** [1..vel] **of** integer; { tabela s kandidati }

n: integer; { koliko kandidatov je še v tabeli }

k: integer; { števec korakov }

d, i, j: integer;

```

begin
  { Zaporedje lihih naravnih števil do konstante meja. }
  for i:=1 to vel do tab[i] := 2 * i - 1;
  n := vel; { Po prvem koraku ostane toliko kandidatov. }
  k := 2;
  d := tab[k];
  while d <= n do begin
    i := d; { indeks prvega števila, ki ga odvržemo }
    for j:=d + 1 to n do
      if j mod d <> 0 then begin
        tab[i] := tab[j];
        i := i + 1;
      end;
    n := i - 1; { toliko kandidatov je "preživel" k-ti korak }
    k := k + 1; { priprava na naslednji korak }
    d := tab[k];
  end; { while }
  { Izpis srečnih števil. }
  for i:=1 to n do write(tab[i]:5);
  writeln;
end.

```

Pravijo, da je znanje čim več različnih jezikov v življenju zelo pomembno. No, morda pri tem res niso mišljeni programski jeziki, a vseeno poskusimo gornjo rešitev zapisati še v programskem jeziku C.

Čeprav sta tako pascal kot C postopkovna programska jezika, pa je med njima vseeno kar nekaj razlik. Omenimo samo nekatere, ki bodo vplivale na zapis našega programa. V C-ju konstante običajno definiramo s pomočjo predprocesorjevega ukaza `#define`. C tudi loči male in velike črke, v navadi pa je, da s predprocesorjem definirane simbole pišemo z velikimi črkami. Tako bosta `meja` in `vel` postali `MEJA` in `VEL`. Zanka `for` je v C-ju precej splošnejša kot v pascalu in pravzaprav ustreza pascalski zanki `while` (skupaj z inicializacijo spremenljivk). Namesto operatorjev `mod` in `div` iz pascala imamo v C-ju operatorja `%` in `/` (operator `/` pomeni celoštevilsko deljenje le tedaj, kadar sta oba operanda celoštevilski izrazi; če je vsaj eden od operandov realno število, potem se tudi deljenje izvede v realnem). Za prirejanje namesto `:=` uporabljamo `=`, v pogojih pa za primerjanje namesto pascalskih `=` in `<>` uporabljamo `==` in `!=`. Ena od bolj zoprnih lastnosti C-ja je, da se v tabelah elementi vedno začno z indeksom 0. To bo vplivalo tudi na zapis našega programa. Pri inicializaciji tabele `tab` bo števec `i` tekkel od 0 do 499, element `tab[i]` pa bo na začetku dobil

vrednost $2 \cdot i + 1$. Tudi pri izločanju števil bomo morali narediti ustrezni premik indeksov, saj d -ti element zaporedja ne bo več `tab[d]`, ampak `tab[d - 1]`. Tako bomo izločali elemente z indeksi $d - 1, 2 \cdot d - 1, \dots$. Tudi števec korakov k bo imel za ena manjšo vrednost. Z uporabo operatorja `++` bomo zapis programa v C-ju še nekoliko "zgostili". Vrednost izraza `ime++` je (stara) vrednost spremenljivke `ime`, "stranski" učinek pa, da se vrednost te spremenljivke poveča za ena.

```
#include <stdio.h>

/* Poišče srečna števila do konstante MEJA. */

#define MEJA 1000
#define VEL ((MEJA + 1) / 2) /* 500 */

int main(void)
{
    int tab[VEL]; /* tabela s kandidati */
    int n; /* koliko kandidatov je še v tabeli */
    int k; /* števec korakov */
    int d, i, j;

    /* Zaporedje lihih naravnih števil do konstante meja. */
    for (i = 0; i < VEL; i++) tab[i] = 2 * i + 1;
    n = VEL; /* Po prvem koraku ostane toliko kandidatov. */
    for (k = 1, d = tab[k]; d <= n; k++, d = tab[k]) {
        i = d - 1; /* indeks prvega števila, ki ga odvržemo */
        for (j = d; j < n; j++)
            if (j % d != d - 1) tab[i++] = tab[j];
        n = i; /* toliko kandidatov je preživel k-ti korak */
    }
    /* Izpis srečnih števil. */
    for (i = 0; i < n; i++) printf("%5d", tab[i]);
    printf("\n");

    return 0;
}
```

Naj tudi sam zaključim z nalogo. Ugotovite, katero je bilo (oziroma bo) zadnje "srečno" leto v tem tisočletju in katero bo prvo "srečno" leto v prihodnjem tisočletju. Z majhno spremembo enega od gornjih programov tega ne bo težko storiti.

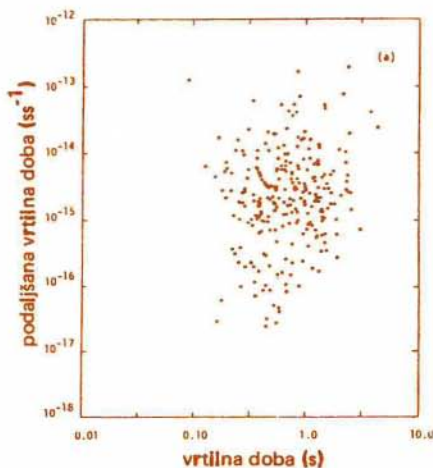
Martin Juvan

ODKRITJE PULZARJA V OSTANKU SUPERNOVE 1987 A

Astronomi, ki so opazovali na štiri metrskem daljnogledu mednarodnega observatorija pri Cerro Tololu v Čilu, so 18. januarja 1989 odkrili pulzar v ostanku supernove v Magellanovem oblaku. Njeno eksplozijo opazujejo od februarja 1987 (glej Presek letnik 16, št. 1). Iz približno sedmih ur opazovanja so ugotovili, da utripa pulzar s frekvenco $1968,629 \text{ s}^{-1}$. Hitrosti, s katero se zmanjšuje ta frekvenca, pa še niso izmerili. Sij pulzarja v vidnem področju se je med sedemurnim opazovanjem spreminjal med 18. in 19. magnitudo. Če upoštevamo razdaljo do pulzarja, to pomeni, da seva v vidnem področju približno stokrat več kot Sonce. Prav verjetno je, da je pri tem pulzarju vidno sevanje le majhen del vse oddane energije za razliko od Sonca, kjer predstavlja vidno sevanje približno 30 odstotkov vse oddane energije. Frekvenca pulzarja je izredno visoka. Zato še vedno preverjajo, če niso morda zamenjali vmesnega pulza za ponovitev osnovnega. Taka pomota bi pripisala pulzarju dvojno frekvenco. Ponoven poskus opazovanja z 2,5 metrskim daljnogledom v Las Campanasu dne 31. januarja 1989 ni uspel. Daljnogled bi mogel zaznati pulzar, če bi imel sij 20. magnitud, kar pa je 2,5 krat manj od najšibkejšega sija 19^m izmerjenega pri Cerro Tololu.

Prvo odkritje rojstva pulzarja je za astronome zelo vesel dogodek. Saj so tak pojav že nekaj let napovedovali kot možen, nihče pa ni mogel predvideti, da ga bomo opazovali že tako kmalu. Zato si bom kljub skupim podatkom privoščil nekaj komentarjev.

Pulzarje poznamo že dobrih dvajset let (odkriti 1967). Kmalu po odkritju se je uveljavila hipoteza, da so pulzarji nevtronske zvezde, ki ostanejo po eksploziji supernove (glej Presek letnik 3, št. 4). Mnogi pojavi so kazali na obstoj močnih magnetnih polj na pulzarjih, zato ni bilo težko pojasniti radijskega utripanja z elektromagnetnim vplivom hitro vrtečega se magneta na okolno snov. Magnetno zaviranje vrtenja se opazi kot upočasnjevanje pulzarja in ta pojav so pri pulzarjih tudi v resnici opazili. Na sliki iz leta 1985 so zbrani rezultati meritev za 256 pulzarjev v diagramu vrtilna doba (s) — podaljš-



zultati meritev za 256 pulzarjev v diagramu vrtilna doba (s) — podaljš-

vanje vrtilne dobe v sekundi ($s \cdot s^{-1}$). Iz tega diagrama je razvidna določena korelacija (statistična zveza) med vrtilno dobo pulzarja in hitrostjo podaljševanja te dobe. Pulzarjem, ki se hitro vrtijo, se vrtilna doba v splošnem mnogo hitreje podaljšuje kot počasnejšim pulzarjem. To lahko tudi pričakujemo, če pomislimo, da raste navor magnetnega zaviranja z visoko potenco hitrosti vrtenja. Vidimo pa tudi, da zveza ni enolična, kar verjetno kaže, da jakost magnetnega polja ni enaka za vse pulzarje.

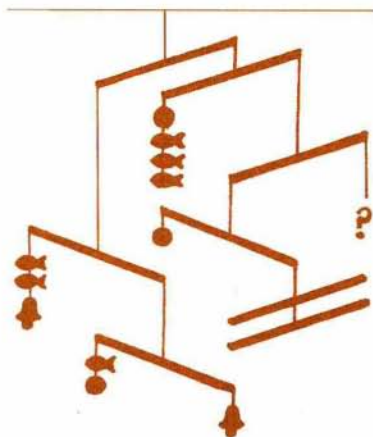
Na žalost, novega pulzarja še ne moremo vrisati v diagram na sliki, ker še niso izmerili daljšanja vrtilne dobe (za to je potreben daljši čas opazovanja). Vendar nam že sam podatek o njegovi vrtilni dobi (to je $1/\text{frekvenca} \sim 500 \mu s$) namiguje, da ta pulzar precej odstopa od skupine dosedaj znanih. Po hitrosti vrtenja bi ga raje uvrstili v drugo vrsto med tako imenovane milisekundne pulzarje: nekatere njihove predstavnike so odkrili pred približno tremi leti. Vendar pa nastanek najnovejšega pulzarja ni v skladu s predstavami o naravi milisekundnih pulzarjev. Ti naj bi po mnenju astronomov imeli tako velike hitrosti zato, ker so v tesnem paru s še eno zvezdo, ki jim stalno dodaja snov. Tirna vrtilna količina vpadajoče snovi, ki je velika, naj bi se tako prelivala v vrtilno količino pulzarja. Za tak mehanizem je na novo odkritem pulzarju malo prostora. Zato lahko s precejšnjo gotovostjo pričakujemo, da bo novi pulzar precej spremenil našo sliko o naravi teh nenavadnih zvezd.

Andrej Čadež

PRESEK 17 (1989/90), številka 2

PRAZNIČNI OKRASEK

Izpod stropa sobe visi kovinski okrasek iz prečk, ribic, krogel in zvončkov. Kateri dve različni stvari, ki visita na mestu, označenem z vprašajem, držita sistem v ravnotežju? Pri tem je teža vrvic zanemarljiva, ne pa tudi teža prečk.



Marija Vencelj

PRESEK 17 (1989/90), številka 2

OKRKNJENA FIBONACCIJEVA ŠTEVILA

V četrti številki Preseka (25.letnik, 1997/98, str.232) vas je Sandi Klavžar ponovno seznanil z zaporedjem Fibonaccijevih števil. Dobimo ga z *rekurzivno formulo* $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ ali preprosteje – naslednji člen zaporedja dobimo tako, da seštejemo prejšnja dva člena. Če začnemo s $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$, dobimo zaporedje

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

Kot vidimo, zaporedje hitro "zbezlja".

Dosti bolj krotka zaporedja dobimo, če vsakič upoštevamo le zadnjo števko:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0,
 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0,
 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0,
 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0,
 (1, 1, 2, ...)

Če začnemo z drugačno vrednostjo F_1 in F_2 , pa dobimo

2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, (2, 2, 4, ...)

ali

1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, (1, 3, 4, ...)

ali

2, 6, 8, 4, (2, 6, 8, ...)

ali

5, 5, 0, (5, 5, 0, ...)

ali

0, (0, 0, 0, ...).

Takoj opazimo, da so zaporedja *periodična*. To hitro razumemo. Iz dveh zaporednih števil enolično sledi naslednje število in potem vsa naslednja. Ker je različnih dvojic enomestnih števil le 100, pridemo prej ali slej do dvojice, ki smo jo že imeli in od tam dalje se cikel ponovi.

Vidimo, da ne nastane samo en cikel, ampak jih je kar šest. Njihove dolžine so 60, 20, 12, 4, 3, 1. Vsota dolžin je seveda 100, ker se mora zvrstiti sto dvojic, vsaka samo po enkrat.

Da ne more nastati samo en cikel, sledi iz naslednjega razmisleka: Če seštejemo dve lihi števili, dobimo sodo število, liho+sodo da liho, sodo+liho spet liho, liho+liho pa spet sodo število. Torej si sledijo v zaporedju po dve lihi števili in eno sodo. Če cikel sploh vsebuje liha števila, jih je dvakrat toliko kot sodih. Če bi bil cikel en sam, bi moral vsebovati 50 lihih in 50 sodih števil, kar po prejšnjem ni mogoče.

Če množimo števila v prvem zaporedju z 2, dobimo drugo zaporedje (ki porabi precej "odvečnih" sodih števil). To zaporedje ima krajšo periodo. Množenje prvega zaporedja s 5 pa nam da peto zaporedje (ki porabi "odvečne" petke, saj je prvo zaporedje izkoristilo dvakrat manj petk kot ostalih lihih števil). Zaporedje z začetkom 0, 0 ima najkrajšo periodo. Ostaneta še dva cikla, tretji in četrti, z začetkoma 1, 3 in 2, 6.

Okrnjena Fibonaccijeva števila smo pravzaprav vpeljali z *rekurzivno formulo*

$$G_n = \text{mod}([G_{n-2} + G_{n-1}], j), \quad j = 10.$$

Pri tem smo z $\text{mod}(N, j)$ označili ostanek, ki ga dobimo, če število N delimo z j . V našem primeru je vsota $[G_{n-2} + G_{n-1}]$ vedno manjša od $2j$, in torej to vsoto bodisi pustimo pri miru bodisi ji odštejemo j , če dosega ali presega j .

Bralce vabim, da poiščejo zaporedja okrnjenih Fibonaccijevih števil še za module $j = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$

Ugotovite za vsak j , koliko ciklov dobite in kakšni so! Računate lahko "peš", problem pa je zelo primeren tudi za računalnik, saj vam operacije mod ne bo težko sprogramirati, vkolikor že ni vgrajena v vaš računalnik.

Mitja Rosina

NEVARNA LITERATURA

Matematik E. Schmidt je bil doma v Tartuju na Estonskem, delal pa je v glay nem v Berlinu. Ko se je nekoč v začetku stoletja – torej še za časa carizma v Rusiji – vračal domov, je imel med drugimi knjigami tudi delo iz teorije množic. Vestni uradniki, ki so pazili na meji, da ne bi prišle v Rusijo kakšne prekucuške ideje, so v tej knjigi na več mestih opazili izraz "moč množice". To jim je zvenelo tako prevratniško, da so knjigo na mestu zaplenili.

Schmidt je omenil to dogodivščino kolegu matematiku C. Caratheodoryju, ki je tudi delal v Berlinu, bil je Grk po rodu, Grčija pa je bila tiste čase še pod turškim otomanskim imperijem.

"Nekaj podobnega se je zgodilo tudi meni," je rekel Caratheodory. "Ko sem šel na obisk k sorodnikom v Grčijo, sem imel med prtljago tudi neko francosko knjigo o mehaniki. V knjigi je bil omenjen stroj, ki napravi 50 vrtljajev v minuti (*cinquante révolutions per minute*). Turški uradniki so mi jo ročno zaplenili, saj bi petdeset *revolucij* na minuto zamajalo še tako trdno državo."

Peter Petek

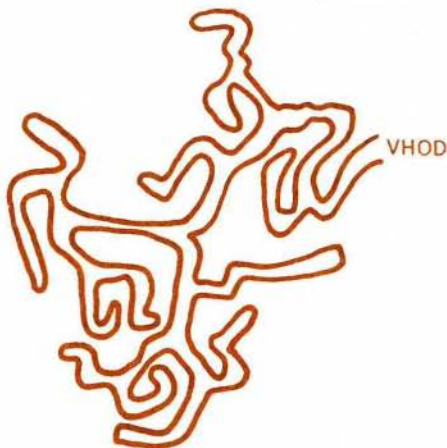
PRESEK 12 (1984/85), številka 1



BISTROVIDEO

Poleti 1981 je obiskal Ljubljano prof. T.D. Parsons s Penn State University, ZDA. Eno izmed njegovih predavanj je bilo posvečeno problemu 'ubežnikov in zasledovalcev'. Pri tem je omenil tole nalogo:

Ravbar Hitri Jaka se je skrnil pred žandarji v podzemsko jamo, katere načrt prikazuje slika:



Najmanj koliko žandarjev je potrebnih, da bodo lahko zagotovo ulovili ravbarja Jako, če vemo, da so žandarji počasnejši?

Vladimir Batagelj

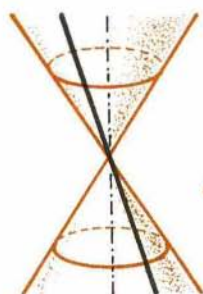
PRESEK 9 (1981/82), številka 3

ZASUKAJ PREMICO

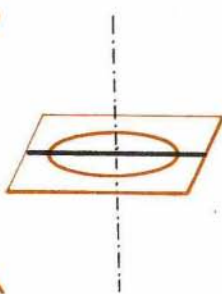
Kakšno ploskev opiše premica, ko jo sučemo okoli dane osi? Nekaj posebnih položajev premice zlahka obvladamo:

- Premica seka os vrtenja.
- Premica je vzporedna osi vrtenja.

V obeh primerih premica in os ležita na skupni ravnini, zato iskano rotacijsko ploskev takoj prepoznamo:



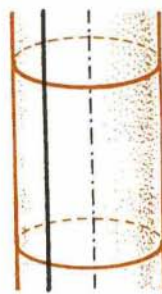
A
plašč neomejenega
dvojnega stožca



A
ravnina



A, B
premica



B
plašč neomejenega
valja

Drugače je pri splošnem položaju premice, ki ga nismo zajeli v a) ali b).

- Premica in os vrtenja sta mimobežni.

Tu si bomo pomagali z ravnino, ki bo šla skozi os vrtenja, in si ogledali presek iskane rotacijske ploskve s to ravnino. Dobljena presečna krivulja namreč pri vrtenju okoli osi opiše ploskev, ki si jo želimo ogledati.

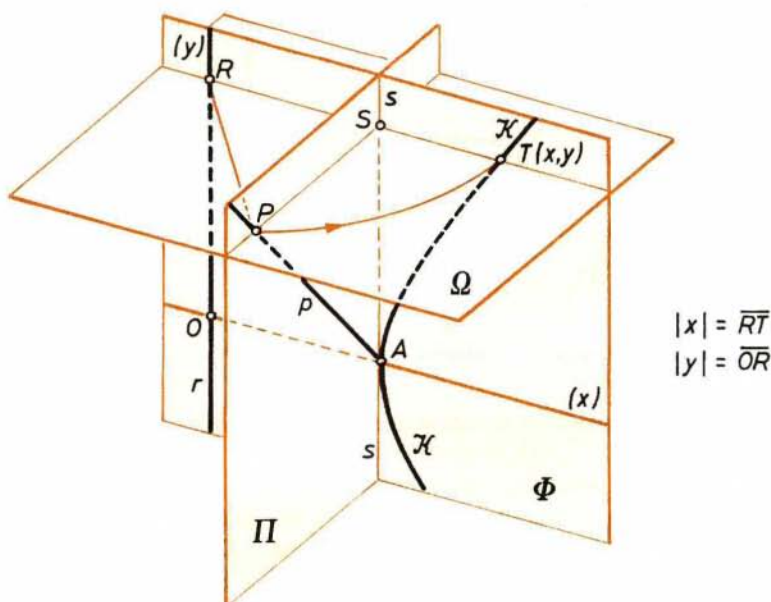
Označimo s p premico, ki jo bomo zavrteli okoli osi r . Položimo skozi p ravnino Π , ki je vzporedna r . Pri konstrukciji te ravnine si lahko pomagamo z ugotovitvijo, da na njej ležijo vse vzporednice z r , ki sekajo p . Nato pravokotno na Π postavimo ravnino Φ , ki vsebuje r ; premico, vzdolž katere se sekata Π in Φ , pa označimo s s . Na s leži prebodišče A premice p z ravnino Φ . Na to ravnino vpeljemo pravokotni koordinatni sistem, katerega ordinato os naj nosi premica r , abscisna os pa naj teče skozi A in seka r v koordinatnem izhodišču O . Označimo z $a = \overline{OA}$ razdaljo med točkama O in A .

Brez težav lahko vidimo, da sta A in O najbližje ležeči točki premic p in r in je tako a razdalja med p in r .

Zdaj določimo enačbo krivulje K , v kateri rotacijska ploskev seka ravnino

Φ . Seveda bomo enačbo zapisali v koordinatnem sistemu, s katerim smo opremili ravnino Φ . Pravokotno na r postavimo poljubno ravnino Ω . Ta naj seka premice p , r , s zaporedoma v točkah P , R in S . Razmerje dolžin $\overline{PS}$ in $\overline{AS}$ zaradi lege P na premici p ni odvisno od izbire ravnine Ω , zato postavimo $k = \overline{PS}/\overline{AS}$. Z zasukom točke P okoli osi r naj P preide v točko $T(x, y)$ krivulje K , ki leži na Φ .

Poglejmo na sliko.



Upoštevajmo tudi, da velja $\overline{TR} = \overline{PR}$ in da je trikotnik PRS pravokoten. Dobimo

$$x^2 = \overline{TR}^2 = \overline{PR}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{RS}^2 = (k\overline{AS})^2 + \overline{OA}^2 = k^2 y^2 + a^2$$

torej je krivulja K v izbranem koordinatnem sistemu na Φ dana z enačbo $x^2 - k^2 y^2 = a^2$. Potemtakem je K hiperbola, iskana ploskev je dobljena z rotacijo te hiperbole okrog premice r in jo zato imenujemo (enodelni) rotacijski hiperboloid.

S tem smo odgovorili na uvodno vprašanje, prispevek pa sklenim z nekaj opombami in vprašanji za radovednega bralca:

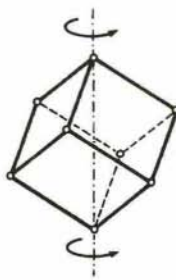
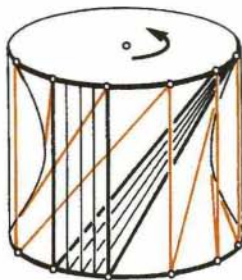
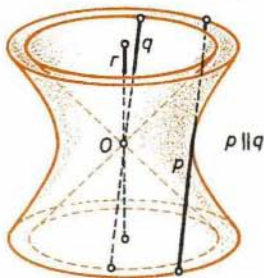
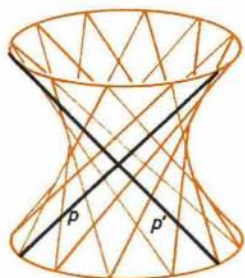
1. Pot, ki naj se pripeljala do rotacijskega hiperboloida, pove, da je le-ta sestavljen iz samih premic (je premonosna ploskev). Poleg premic, ki jih dobimo z vrtenjem p okoli r , ležijo na njem tudi premice, ki jih dobimo z vrtenjem zrcalne slike p' premice p glede na Φ okoli osi r . Glej sliko.

2. Pri izpeljavi enačbe krivulje K smo brez besed privzeli, da premica p ni pravokotna na ravnino Φ . Kakšna je rotacijska ploskev, ki jo opiše p , če je p pravokotna na Φ ?

3. Zadržimo se še nekoliko pri opisani konstrukciji. Naj bo q vzporednica s p in naj vsebuje točko O . Zasukajmo q okrog r , tako da obleži na ravnini Φ . Dokaži, da smo dobili asimptoto hiperbole K . Dvojni stožec, ki ga opiše q pri vrtenju okoli r , imenujemo *asimptotični stožec* rotacijskega hiperboloida.

4. Plašč pokončnega valja z višino v naj sestavljajo napete elastične nitke, vzporedne osi valja in pritrjene na robova osnovnih ploskev valja - krogov s polmerom r . Če zasučemo eno od osnovnih ploskev, torej krog, za pravi kot okrog središča, plašč valja preide v del rotacijskega hiperboloida. Kolikšen je kot ob vrhu osnega preseka njegovega asimptotičnega stožča?

5. Kakšno telo opiše kocka pri vrtenju okoli svoje glavne diagonale?



Boris Lavrič

PRESEK 18 (1990/91), številka 3

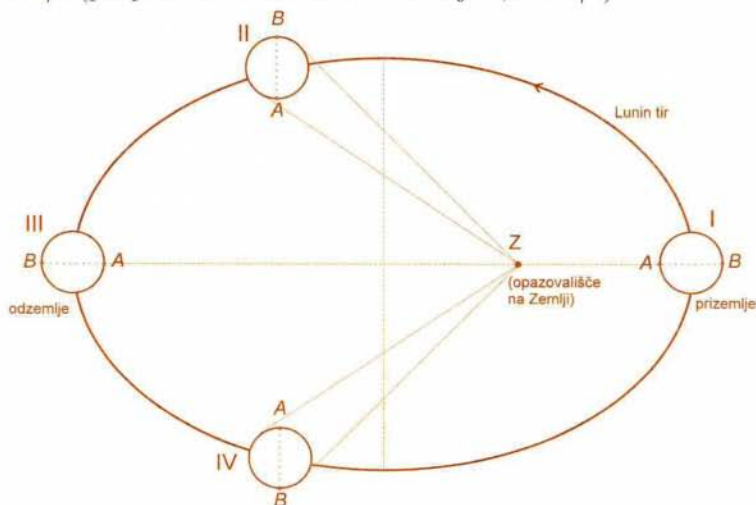
LUNINA KIMANJA

V šoli in tudi v običajnem vsakdanu pogovor večkrat nanese na Luno in posebno na to, da kaže Luna Zemlji vedno isto polovico (poluto, stran; pesniško obraz, lice). To drži. Zelo natančna opazovanja pa pokažejo, da je stvar le bolj zapletena.

Luna kroži okrog Zemlje. Obkroži jo v enem zvezdnem ali siderskem mesecu, to je v $27\frac{1}{3}$ dneva. V istem času se Luna tudi enkrat zavrti okrog svoje vrtilne osi. Rečemo, da sta obhodni čas in vrtilni čas Lune enaka.

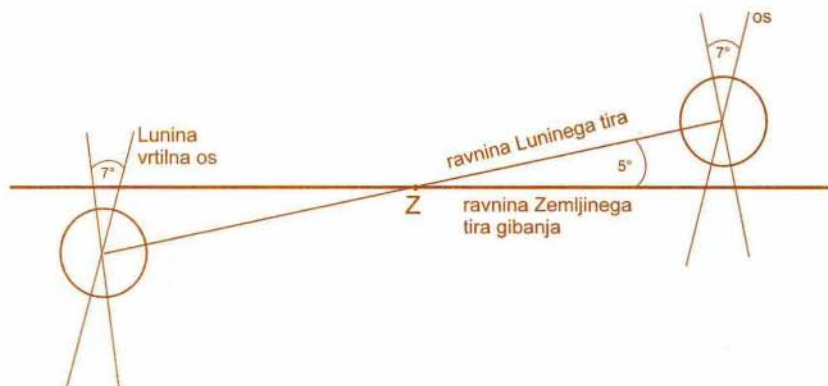
Če bi se Luna gibala okrog Zemlje natančno po krožnici s središčem v središču Zemlje, bi kazala opazovalcu na Zemlji res vseskozi isto polovico.

Luna pa se giblje okrog Zemlje po elipsi. Zemlja ne leži v središču elipse, ampak v enem njenih gorišč (slika 1). Ko je Luna na svojem tiru v legi I, je Zemlji najbližja (ta točka tira se imenuje *prizemlje* ali *perigej*), ko pa je v legi III, je od nje najdlje (*odzemlje* ali *apogej*). Po drugem Keplerjevem zakonu (poglej v kak astronomski učbenik) se giblje Luna v prizemlju z največjo hitrostjo 1,09 km/s, v odzemlju pa z najmanjšo 0,97 km/s (povprečna hitrost na vsem tiru je 1,02 km/s).

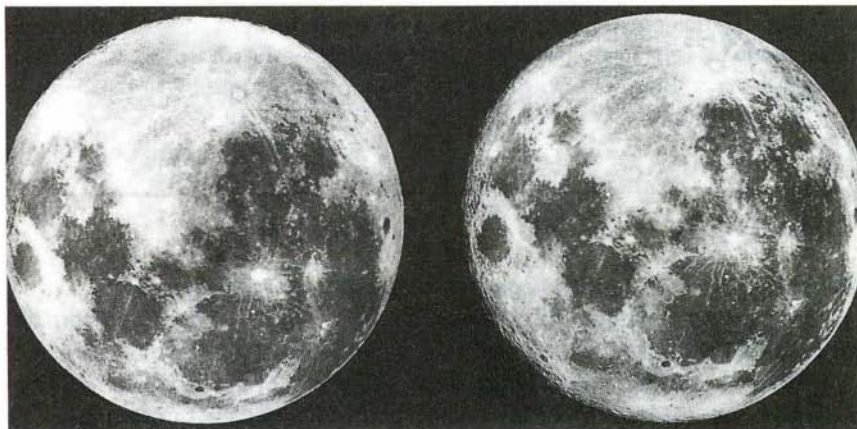


Slika 1. K razlagi Luninega kimanja ali libracije levo-desno: Zaradi lažjega razumevanja je sploščenost elipse prikazana pretirano. Vrisane so štiri Lunine lege na četrt meseca (vsakih 6,83 dni). Zemlja je namenoma narisana kot točka Z, ki pravzaprav predstavlja opazovališče.

Luna se torej giblje okrog Zemlje neenakomerno, vendar pa se (skoraj) enakomerno vrti okrog svoje vrtilne osi.



Slika 2. Lunino kimanje gor-dol.



Slika 3. Polna Luna, fotografirana v različnih dnevih. Pri pozornem pregledu fotografij opazimo posledico Luninih libracij – periodičnega prikimavanja in odkimavanja Lune okrog ravnovesne lege zaradi: gibanja Lune po eliptičnem tiru (libracija v dolžini – kimanje levo-desno); naklona Luninega ekvatorja proti ravnini tira, ki je spet naklonjen k ravnini Zemljinega gibanja okrog Sonca (libracija v širini – kimanje gor-dol); majhnih nepravilnosti v vrtenju Lune kot posledice nepravilne oblike (fizična libracija) idr. Zato v daljšem obdobju vidimo več kot polovico, to je okoli 3/5 Luninega površja.

V legi I vidi opazovalec *Z* na Zemlji točko *A* v središču Lune na videzne ploskvice ali, kot večkrat rečemo, diska. V prvi četrtini meseca prepotuje Luna več kot $\frac{1}{4}$ oboda elipse, saj je ob prizemlju njena hitrost največja. V tem času se Luna zavrti okrog svoje vrtilne osi za 90° .

V legi II opazovalec točke A ne vidi več v središču diska, ampak od njega nekoliko levo. Ob desnem Luninem robu se mu odkrijejo področja, ki prej niso bila vidna.

V legi III čez pol meseca spet vidi točko A v središču diska. V bližini odzemlja se Luna giblje počasneje. Zato naredi v tretji četrtini meseca krajši lok do lege IV, ko je z Zemlje vidna točka A nekoliko desno od središča diska, ob levem Luninem robu pa postanejo vidna prej nevidna področja.

Luna se giblje po tiru, ki je enkrat nad ravnino ekvatorja, drugič pod njo. Ko je Luna najvišje nad nebesnim ekvatorjem, vidimo nova področja ob njenem spodnjem robu, ko je najnižje pod ekvatorjem, pa nova področja ob zgornjem robu.

Tem ponavljajočim se pojavom rečemo *Lunine libracije* ali *nihanja* oz. *kimanja*, saj jih je več. Slika 1 natančneje pojasnjuje le eno – libracijo v dolžini. Lunine libracije so odkrili v 17. stoletju poljski astronom Hevelij in Italijana Riccioli in Galilei.

Zaradi libracij je z Zemlje vidne več kot polovico Lune, ali natančno 59% njenega celotnega površja. Po zaslugi vesoljskih sond, ki so tudi fotografirale z Zemlje nevidno stran Lune, pa poznamo skoraj celotno Lunino površje.

Marijan Prosen

TRI MODRE

Za začetek si najprej le bežno ogledimo tri *modre* iz precej davnih časov.

Prve *modre* se je domislil Kitajec *Gonsung Long*, ki je živel približno 200 let pred našim štetjem, za časa vladavine dinastije Zhou (beri: Ču). Takole gre:

”Vzemi za laket dolgo palico in jo slehernega dne prelomi na pol. Naslednjega dne boš dal na pol le še njeno polovičko, nato le še četrtino, ... Pa vendarle palice na tak način nikdar ne bo zmanjkalo. Niti čez desettisoč generacij ne, ki bi morebiti nadaljevale z lomljenjem ostankov te palice.”

Druga *modra* prihaja iz glave starega Grka *Zenona*, ki jo je domislil približno kakšnih 200 let pred življenjem Gonsung Longa. Pravi pa takole:

”Recimo, da bi rad šel po ravni črti od točke A do točke B . Da bi prišel do B , moram najprej prehoditi polovico razdalje med A in B . Recimo – razdaljo $\overline{AB}_1$. In – da bi prišel do B_1 , moram najprej priti do B_2 , ki leži na polovici poti med A in B_1 . To lahko kar naprej ponavljam. Zmeraj je pač treba prehoditi najprej polovico poti pred seboj. In v okviru takšnega razmišljanja je seveda precej jasno, da se sploh nikdar ne bom premaknil z mesta v točki A . Sleherno gibanje je torej nemogoče!”

Tretja *modra* je zelo blizu druge. Le nekaj desetletij pred Zenonom jo je povedal *Demokrit*. Tudi on je bil iz Grčije.

"Vzemi jabolko in ga prereži na pol. Nato razpolovi dobljeno polovičko. Zatem razpolovi preostalo četrtno jabolka; zatem razpolavljaš spet in spet. Dokler gre. Povej, največ kolikokrat ti bo uspelo razpolavljati jabolko na tak način?"

Pa poglejmo, koliko je skupnega v teh treh domislicah in v čem se med seboj razhajajo.

Gonsung Long pravi tole:

Polovica palice in še njena četrtna in še njena osmina in še njena šestnajstina in še ... — to vse skupaj (kar so ostanki pri lomljenju palice na slehernem izmed korakov) je zagotovo manj od začetne ene cele palice. Pa če še tako dolgo lomim in kopičim ostanke. Torej

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \longrightarrow 1 \\ \text{ali} \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Tak zapis pomeni, da se vsota na levi sicer zares "zelo zelo" približa vrednosti 1, vendar je pa žal nikdar ne doseže. Zmeraj ji vsaj še malo manjka.

Gonsung Long pravi, da niti desettisoč členov v tej vsoti ni dovolj, da bi bila njena vrednost 1. Dovolj bi jih bilo kvečjemu neskončno (?) mnogo. Vsi pa vemo, da je to (neskončno) zelo zelo zelo daleč!

Zenon pa o istem problemu modruje iz natanko nasprotne strani. In sicer pravi takole:

"Res je, da z lahkoto prehodim polovičko razdalje med *A* in *B*. Ničkolikokrat sem jo že! Res je, da z lahkoto prehodim tudi njeno četrtno, pa njeno osmino, njeno šestnajstino, ... Vse to gre prav zlahka. Toda — prvi korak, tisti, prvi! Njega ne zmorem storiti. Pa saj ne, da bi bil predolg, o, ne! Prej obratno, zelo kratek bi naj bil! Toda — ne vem, kdaj ga naj storim. Brž, ko se odločim — sedaj!, spoznam, da bi že prej, še pred tem, moral storiti tistega za polovico krajšega. In še pred njim tistega ..."

Torej drži, da bi naj bila vsota vseh teh njegovih premikov

$$\dots + \frac{\overline{AB}}{32} + \frac{\overline{AB}}{16} + \frac{\overline{AB}}{8} + \frac{\overline{AB}}{4} + \frac{\overline{AB}}{2}$$

kar ves premik od A do B

$$\dots + \frac{\overline{AB}}{2^5} + \frac{\overline{AB}}{2^4} + \frac{\overline{AB}}{2^3} + \frac{\overline{AB}}{2^2} + \frac{\overline{AB}}{2} \longrightarrow \overline{AB}$$

če ... — če bi le bil sposoben poiskati začetek.

No, sedaj pa je že jasno. Vidimo, da je Zenonova vsota povsem identična z Gonsung Longovo, le da je njen zapis zrcalen. To pa že pomeni, da oba možakarja trdita pravzaprav eno in isto! Gonsung Long pravi, da se v njegovi vsoti na levi strani ne da priti do konca in da je zatoj treba kar v neskončnost. Zenon pa, da se v njegovi vsoti na levi ne da stopiti na začetek. Treba bi bilo začeti v neskončnosti. To pa je zares težko, seveda!

Vendar pa zaplet, ki je nastal, navidez prav presenetljivo "neproblematično" razvozla Demokrit.

Na prvi pogled se zdi Demokritov problem skorajda povsem enak Gonsung Longovemu. Razlika je le v tem, da Demokrit razpolavlja jabolko, Gonsung Long pa palico. Toda! Demokrit pravi, da lahko (jabolko) razpolavljam le tako dolgo, dokler ne pridem do delca, ki je nedeljiv. Do atoma torej! In pri njej se ves ta postopek razpolavljanja seveda ustavi.

Mimogrede — z nekaj srednješolske matematične spretnosti se da brž izračunati, da noben Demokrit ne bi mogel jabolka razpoloviti več kakor 90-krat. Več o tem najdete v članku (2).

Sklep:

Pri branju tega članka bi morda kak bralec prav zlahka zašel v nevarne miselne vode, češ — "Zdaj pa zares ne vem več, kje ima ta svet rep in kje glavo! Očitno, da je na njem prav vse mogoče ... kakor kaže modrovanje teh treh iz davnih časov. Vsak po svoje pač modruje ..."

Izrek: No, no, saj tako hudo pa spet ni!

Dokaz: Kajti, če bi bilo resnično vse mogoče, potem bi bilo mogoče tudi to, da bi si nekdo izmislil reč, ki si je ni mogoče izmisliti. Takšne reči si pa seveda ni mogoče izmisliti, saj si je vendar ni mogoče izmisliti! Več kakor jasno! Potemtakem torej ne drži, da bi bilo na tem svetu prav zares vse mogoče.

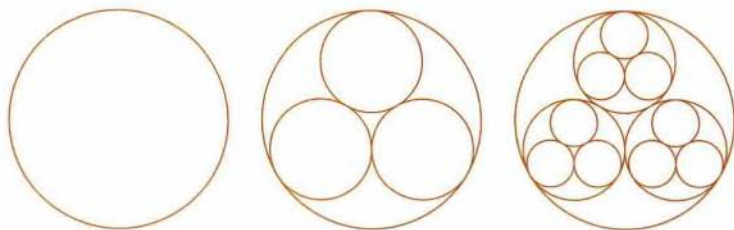
Vilko Domajnko

Literatura:

- (1) Li Yan, Du Shiran, *Chinese Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1987, str. 21
- (2) Tomaž Fortuna, *Demokritovo jabolko*, Presek, 3 (1975/76), št. 4, str. 177
- (3) Dirk J. Struik: *Kratka zgodovina matematike*, DZS Ljubljana, 1978, str. 53

DOTIKAJOČI SE KROGI

Morda vam je pogled zastal na spodnjih slikah “dotikajočih se krogov”.



Vabim vas, da poskušate razbrati pravilo, po katerem so sestavljeni zgornji liki, in napisati računalniški program, ki bo narisal “dotikajoče se kroge” še višjih redov (krogi na zgornji sliki so redov 1, 2 in 3). Če pa so vam ljubši matematični izzivi, izračunajte, iz koliko krogov so sestavljeni “dotikajoči se krogi” reda n (iz zgornje slike razberemo, da so krogi reda 1 sestavljeni iz enega kroga, krogi reda 2 iz štirih, krogi reda 3 pa iz trinajstih krogov).

Martin Juvan

ENAKE VSOTE

Kartončki so opremljeni s števkami od 1 do 9 in zloženi v tri stolpce, kot kaže slika spodaj levo. Prestavite tri kartončke tako, da bodo stolpci ostali na svojih mestih, vsota števil pa bo v vseh treh stolpcih enaka.

Seveda je šlo delo gladko od rok, zato enako nalogo opravite še s kartončki, ki jih kaže slika spodaj na desni.

1	2	4
6	3	8
7	5	9
14	10	21

1	2	3
4	5	6
8	7	9
13	14	18

Boris Lavrič

PRESEK 18 (1990/91), številka 3

KRIŽANKA “TU SMO ŽE PETINDVAJSET LET”

					DEL NASELJA ŠMARJE PRI GROSUPLJEM	PRIHOD V PROSTOR Z NAMENOM BIVANJA	ŠPORTNIK TEKAČ	ČEBELJI SAMEC	REKRE- NAS TUHI	
					POVAB- LJENEC NA OHČETI					SL. FIZI (JOZEF PETNI D CEVLJ)
					?					
					POLOTOK V JUŽNI GRČLI					
					PODOLGOVAT KOS LESA S PRAVOKOTNIM PREREZOM					
					NASILNA SKUPINA					
GLASBENA USPEŠNICA				TITAN	SENČEN PROSTOR					
OLIVER TWIST				GLASBENI INTERVAL						
PTICA PEVKA				GRČ V JE- RUZALEMU						
STALNE RUBRIKE NA OSENČENIH POLJIH	IZRAZNI GIB Z RAMENI	ŠUMNIK IN SIČNIK ENA IZMED BOGINJ ERINJ		PEVEC FLUSER VERNIK V DUŠO STVARI		GRODNJ SANI Z POČKODI SMUČAR				
MAŠČOBNA PLAST NA POVRŠINI MLEKA					NAOČNIKI					
ORGANSKE SPOJINE S KARBONIL- NO SKUPINO					ZVEZDA V ORLU (PASTIR)	STRUP V TOBAKU				
OVRATNI NAKIT NA VRVICI						MEHKO USNJE IZ KOŽ. DIVJADI	ŠKOTSKI IGRALEC (DAVID) RDEČA BAR- VA KART			
?							NEM. SKL. (WERNE FIN. MES TURKU)			
IVO JAN		2. OSEBA EDNINE AMERCU		VELIKA PAPIGA KAREL ERBEN		PIANIST BERTON- CELJ IVAN KUŠČER				
VZPETINA V LJUBLJANI										
	LJUBITELJ, NEPROFE- SIONALEC				ČUTILO ZA VID					

AC, CENTER V STAJANJU V NJSKI GOJINI	ZVOK DOLOČENE VIŠINE	UPOKOJENI PROFESOR, KI OHRANI NAZIV	?	ANTON JEGLIČ	SISTEM SPOZNANJ, VEDA	NAJVEČJI DESNI PRITOK VOLGE, DOLG 1478 km	AMERIŠKI TENISAČ (MARTIN)	ODPRITINA V ZIDU	?	AVTOR MARKO BOKALIČ
K () EL A						KOPNINA, OBDANA Z VODO				DRVARSKI DROG ZA PLAVLJENJE LESA
						REČICA V KRANJU				
						?				
				PISARNIŠKI USLUŽBE- NEC						
				NACE SIMONČIČ						
	SLAP SAVINJE POD OKRESLJEM					BENEŠKI VLADAR				OGLJIKO- VODIK C_2H_6
	NEZNANKA V ENACBI				KITAJSKI POLITIK ENLAJ					
	VODENJE VOJSKO- VANJA				PEČENA JED			ALBERT EINSTEIN	?	
				MEHKA MLADA DLAKA			TRINITRO- TOLUOL			
				ČISTILNO SREDSTVO			JEZERO IN VULKAN NA FILIPINIH			
TUKAJ			UREJENA ZBIRKA VIN							
LAHKA PRIPRAVA NA TRNKU			KRAK REKE MENAM							
DA I. OV. JA						LJUDSTVO V GANI				
						STRUPENA KAČA				
		ZLITINA Z ŽIVIM SREBROM								
		JUŽNOAM. INDIJANEC							FILISTEJSKI VELIKAN	SLOV. KOROSKI PEŠNIK (FRAN)
				VEČJA JADRNIČA, ŠKUNER	?					
				MAJHEN SESALEC						
			SL. FILMSKI REŽISER (IGOR)				GOVEJA ŽIVAL			
			SRBSKI KNJIŽEVNIK (DANILO)				AMER. ASTRONOM (GEORGE)			
AD. RI) TO			BANJA			AM. FIZIK (EDWIN)				
						ST. PLOŠČ. MERA				
		MRŠENJE LAS								
		URBAN JARNIK								
ŠPANSKI KRALJ CARLOS					TEŽEK CESTNI STROJ					
ŽITARICA					SOL OLINE KISLINE					

METODA "OSTREGA POGLEDA" V PROGRAMIRANJU

Metodo "ostrega pogleda" uporabljamo v vseh vejah znanosti, pa tudi na drugih področjih, ki ustvarjajo probleme. Opis metode je zelo preprost. Zastavljeni problem najprej dobro definiramo in po možnosti kam zapišemo. Nato se ostro zagledamo v njegovo definicijo. Ko ostrina pogleda doseže določeno stopnjo, se nam posveti rešitev. ★

Danes si bomo ogledali dva problema. Za oba obstajata preprosti rešitvi po načelu "kar mi najprej pade na pamet" ali "z glavo skozi zid". Vendar so taki postopki po pravilu potratni, kar bomo ugotovili z oceno časovne zahtevnosti (pojem časovne zahtevnosti smo že spoznali v Preseku XIV/2). Potem si bomo problem ostro ogledali in sestavili kratka, elegantna in predvsem učinkovita postopka za njuno reševanje. Poskusite z reševanjem tudi sami, še preden preberete prvo rešitev!

Naloga 1. Tabela a z n elementi krožno premakni v levo za k mest. Če je npr. $n = 10$, $k = 3$ in tabela a

A B C D E F G H I J

je po končani operaciji tabela a takale:

D E F G H I J A B C

Pri reševanju ne smemo uporabljati dodatnih tabel.

Rešitev, ki se je dokaj hitro spomnimo, je naslednja: napišemo del programa, ki tabelo krožno premakne za eno mesto v levo, nato pa ga uporabimo k -krat na isti tabeli.

```
for j := 1 to k do begin
  pom := a [ 1 ];
  for i := 2 to n do a [ i - 1 ] := a [ i ];
  a [ n ] := pom;
end;
```

Brez težav analize lahko ugotovimo, da je število korakov (stavkov, ki se izvršijo) v tem programu približno $k * n$. Ker k ni fiksna, vzamemo kar njegovo povprečno velikost $n/2$. Število korakov je torej neka kvadratna funkcija (polinom) spremenljivke n . Tako ocenimo, da je čas izvajanja programa sorazmeren kvadratu števila podatkov, kar zapišemo kot $O(n^2)$. To pomeni, da program za

★ Metoda je seveda zasnovana optimistično. Kot bomo spoznali v eni od naslednjih števil Preseka, samo od rešitve toliko dlje, kolikor bolj gledamo naravnost vanjo.

obdelavo dvakrat večjega števila podatkov porabi štirikrat več časa. Radi bi našli hitrejši postopek, pri katerem bi čas rasel sorazmerno s količino podatkov.

Zato se ostro zazremo v problem in opazimo naslednje. Vzemimo podprogram *Obrni*, ki zrcali poljuben podvektor tabele *a* (npr. ABC → CBA). Najprej zrcalimo prvi del tabele (od prvega do *k*-tega elementa), nato ostanek, na koncu celotno tabelo. In glej! Krožni premik je opravljen. Oglejmo si na prejšnjem primeru, kako to poteka.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Obrni (1, k);	C	B	A	D	E	F	G	H	I	J
Obrni (k + 1, n);	C	B	A	J	I	H	G	F	E	D
Obrni (1, n);	D	E	F	G	H	I	J	A	B	C

Tudi podprogram *Obrni* ne dela težav.

```

procedure Obrni (prvi, zadnji : integer);
var i : integer; pom : char;
begin
    for i := prvi to (prvi+zadnji-1) div 2 do begin {zamenjaj}
        pom := a [ i ]; a [ i ] := zadnji-i+1; a [ zadnji-i+1 ] := pom;
    end;
end; { Obrni }

```

Poskusi ugotoviti, kakšna je časovna verjetnost tega postopka!

Naloga 2. Dana je tabela *a* velikosti *n*, ki vsebuje celoštevilčne vrednosti. Poišči največjo vsoto, ki jo lahko dobimo s seštevanjem členov nekega strnjene podzaporedja v tej tabeli. Če je torej vhodna tabela

55 -14 -100 11 13 -17 8 44 -16 2

je rešitev vsota elementov $a[4] \dots a[8]$, to je 59. Problem je seveda povsem preprost, če v tabeli ni negativnih števil, saj je iskano število kar vsota vseh elementov tabele. Težave nastanejo, ko naletimo na negativno število – se ga splača vključiti v podzaporedje? Privzemimo, da je iskana vsota enaka 0, če v tabeli nastopajo le negativna števila.

Seveda lahko takoj zapišemo "butn-verzijo" programa: za vsak par indeksov *levi* in *desni* ($1 \leq \text{levi} \leq \text{desni} \leq n$) izračunamo vsoto $a[\text{levi}..\text{desni}]$ in pogledamo, če je večja od doslej največje vsote. Ustrezni del programa v pascalu je kratek in lahko razumljiv:

```

maxVsota := 0;
for levi := 1 to n do
  for desni := levi to n do begin
    vsota := 0;
    for i := levi to desni do vsota := vsota + a [ i ]
    { zdaj je to vsota podzaporedja a [ levi..desni ] }
    if vsota > maxVsota then maxVsota := vsota;
  end;
write ('Iskana vsota je ', maxVsota);

```

Vendar pa je ta postopek časovno zelo potraten, kar bomo takoj ugotovili. Iz programa lahko razberemo, da se zunanja zanka "obrne" ravno n -krat, pri tem pa se vsakič $(n - levi)$ -krat izvede druga zanka. Torej je število izvajanj notranjega sklopa stavkov (med **begin** in **end**) približno $n^2/2$, torej $O(n^2)$, sam sklop pa zahteva zase $O(n)$ časa (notranja zanka v njem ima največ n korakov). Tako smo ugotovili, da celotni postopek potrebuje za izračun rezultata $O(n^3)$ korakov. To pa pomeni, da se število korakov programa — in s tem čas izvajanja — poveča tisočkrat, če vhodno tabelo desetkrat podaljšamo, ali drugače: če bi kak računalnik opravil s tabelo desetih elementov v npr. 10 milisekundah (kar je zmerna hitrost), bi za tisoč elementov potreboval skoraj tri ure!

Torej se zazrimo zopet v problem.

Zgornji postopek se očitno da izboljšati. Delnih vsot ni treba računati vsakič na novo, saj lahko vsoto zaporedja $a [levi..desni]$ izračunamo tako, da vsoti elementov $a [levi..desni-1]$ prištejemo še vrednost $a [desni]$. Tako smo se znebili notranje zanke in zmanjšali število vseh operacij na $O(n^2)$.

```

maxVsota := 0;
for levi := 1 to n do
  vsota := 0;
  for desni := levi to n do begin
    vsota := vsota + a [ i ];
    { zdaj je ta vsota podzaporedja a [ levi..desni ] }
    if vsota > maxVsota then maxVsota := vsota;
  end;
write ('Iskana vsota je ', maxVsota);

```

Dobljeni programček je že prav simpatičen in smo z njim lahko kar zadovoljni. Vendar pa nam žilica ne da miru. Ali bi postopek lahko še pospešili?

Razmišljamo takole: če poznamo rešitev za tabelo $a [1..i - 1]$, kako bi

dobili rešitev za razširjeno tabelo $a[1..i]$? Ta pristop je pogosto uporaben, kadar imamo opravka s tabelami. Za naš primer velja naslednje: podzaporedje z maksimalno vsoto v tabeli z i elementi lahko vsebuje novi (i -ti) element ali pa ne. Zato ves čas spremljamo dve spremenljivki: *maxDoslej* pove, koliko znaša rezultat za že obdelani kos tabele, *maxDesni* pa je največja vsota takega podzaporedja, ki vsebuje skrajni desni element tega kosa. To si lahko ogledamo na primeru:

1 2 3 -10 1 2 ?

maxDoslej = 6, *maxDesni* = 3

Ko tabelo razširimo, se vrednosti *maxDesni* poveča za vrednost novega elementa (razen če bi tako postala negativna – v tem primeru dobi v skladu z našim dogovorom vrednost 0). Če je s tem postala večja od *maxDoslej*, popravimo tudi to spremenljivko. Ko dosežemo konec tabele, je *maxDoslej* iskani rezultat. Zapis programa je zelo kratek:

```
maxDoslej := 0;
maxDesni := 0;
for i := 1 to n do begin
    maxDesni := maxDesni + a[i];
    if maxDesni < 0 then maxDesni := 0;
    if maxDesni > maxDoslej then maxDoslej := maxDesni;
end;
write('Iskana vsota je ', maxDoslej);
```

Iz programa lahko hitro razberemo, koliko časa porabi: edina zanka se obrne natanko n -krat, znotraj nje pa ni stavkov, katerih izvršitev bi bila odvisna od števila podatkov. Maksimalni čas izvajanja programa je torej $O(n)$.

Kaj smo z izboljšavo postopka pridobili razen očitne "elegance" programa? Oglejmo si to na nekoliko pretiranem primeru. Če gornji postopek razumemo, lahko s papirjem in svinčnikom izračunamo rezultat za tabelo z desetiimi elementi v približno eni minuti. Za sto elementov bi potrebovali deset minut, za tisoč pa uro in štirideset minut – če bi imeli potrpežljivost računovodje. In že smo prehiteli računalnik, ki računa po prvotnem postopku! Pa tudi za 10000 elementov bi naš pridni računovodja potreboval le 17 ur ali dva zelo delovna dneva, medtem ko bi se računalnik mučil več kot tri mesece! Se pa že splača malo "ostreje pogledati" problem, mar ne?

Tomi Dolenc

PRESEK 15 (1987/88), številka 4

“BREZTEŽNO STANJE”

Kamen, ki ga spustimo z okna, prosto pada. Ni težko izračunati, kolikšen čas pada, če poznamo višino okna nad tlemi in zanemarimo zračni upor. Uporabimo pač enačbo za *enakomerno pospešeno gibanje*. Tudi drugi kamen, ki ga spustimo z okna, prosto pada, enako kot pada prvi. Ko spustimo z okna oba kamna, oba enako padata in oba hkrati zadeneta tla, če smo ju spustili sočasno. Kamen glede na drugi kamen med padanjem miruje. Če bi človek, ki prosto pada, iz rok spustil kamen, bi oba, človek in kamen, padala enako hitro. Če bi bila tedaj človek in kamen v zaprtem prostoru, bi človek lahko mislil, da mirujeta (ali se gibljeta premo enakomerno) daleč od vseh drugih teles. Na to ugotovitev se opira *Einsteinova splošna teorija relativnosti*.

Ta teorija gravitacije, v kateri lahko vidimo izpopolnitev Newtonovega gravitacijskega zakona, je sicer zelo zapletena. Kot vidimo, pa enega od njenih dveh osnovnih načel ni težko razumeti. To načelo povemo lahko na več načinov. *Načelo o univerzalnosti prostega padanja* pravi, da padajo v določeni točki vsa telesa z enakim pospeškom, ki ni odvisen od njihove sestave. *Načelo o ekvivalentnosti* pravi, da se težka masa, ki meri odziv telesa na gravitacijo drugih teles, na primer na težo na površju zemlje, ujema z vztrajnostno maso, ki meri upor telesa proti pospeševanju. Za prosto padajočo skupino teles veljajo enaki zakoni fizike kot za skupino teles, ki je tako daleč od vseh drugih teles, da ni treba upoštevati njihovega delovanja. Učinek gravitacije in učinek pospešenega gibanja se izravna.

Albert Einstein je pripovedoval, da je leta 1907 sedel v stolu v bernskem patentnem uradu, ko se mu je nenadoma utrnila misel: “Če nekdo prosto pada, ne čuti svoje teže.” Pozneje jo je imenoval “najsrečnejša misel svojega življenja”. Za opazovalca, ki prosto pada, v njegovi neposredni okolici ni učinkov gravitacije. Če vrže nekaj teles, ta glede nanj mirujejo ali se gibljejo premo enakomerno. Opazovalec ima pravico reči, da miruje.

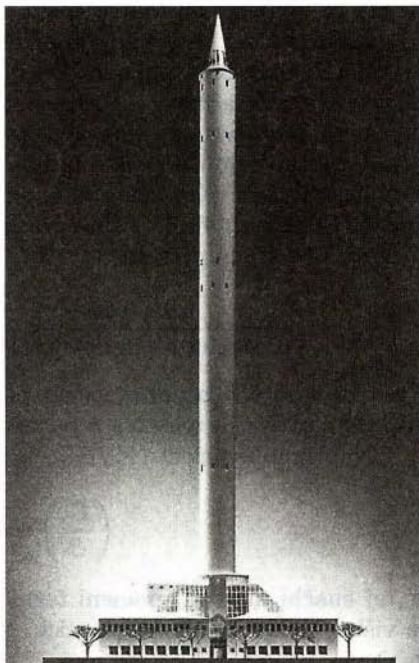
Gravitacijsko polje obstaja samo relativno, podobno kot obstaja pri indukciji električno polje samo za opazovalca, ki se giblje glede na magnet.

V Preseku ne moremo dalje zasledovati splošne teorije relativnosti. Lahko pa nekaj povemo o gibanju teles v prosto padajočem laboratoriju. V tem laboratoriju, pa naj prosto pada kot dvigalo, ki se je pokvarilo, kot letalo, ki so mu prenehali delovati motorji (glej Presek 15 (1987/88) 369), ali kot umetni satelit, prosta telesa mirujejo, ker padajo z enakim pospeškom kot laboratorij. Navado imamo reči, da so telesa v tem laboratoriju v *breztežnem stanju*. Pri tem moramo biti previdni: ne smemo trditi, da je pospešek teles glede na laboratorij natančno enak nič. Zaradi upora in trenja padajočega

dvigala, zaradi upora letala ali zaradi gravitacije med telesi laboratorija, lahko dosežemo milijonino ali nekaj milijonin zemeljskega težnega pospeška. Zato raje govorimo o *mikrogravitaciji*.

Umetnih satelitov si ne more privoščiti vsakdo. Prosto padajoči laboratorij "kot pokvarjeno dvigalo" je dosti cenejši. Toda laboratorij je treba prej ali slej zavreti in čas izvajanja poskusov je omejen (kot na letalu z ugasnjenimi motorji).

Zanimiva raziskovalna ustanova Center za uporabno vesoljsko tehnologijo in mikrogravitacijo deluje od leta 1985 v Bremnu v ZR Nemčiji. Njegov del je 144 metrov visoki stolp. V stolpu je 110 metrov visoka cev s premerom 3,5 metra, iz katere močne črpalke v poldrugi uri izsesajo zrak do tlaka stotisočine milibara. Tako bo mogoče v cevi narediti na dan tri poskuse, pri katerih bo posebej oblikovana posoda okoli 4,7 sekund prosto padala. Telesa v njej se bodo glede na posodo gibala nepospešeno, po domače – doseгла bodo breztežno stanje. Natančneje moramo reči, da bo njihov pospešek glede na posodo manjši od milijonine do stotisočine pospeška prostega padanja. V posodi so nameščeni računalniki in naprave za merjenje in zapisovanje podatkov.



Poskusom je namenjena notranjost posode s premerom 40 centimetrov in višino 2 metra, ki lahko sprejme naprave z maso do 200 kilogramov. Potem, ko posodo na vrhu sprožijo, prosto pada. Na dnu stolpa se zaustavi v 8 metrov visokem prostoru z drobnim polistirenskim prahom.

Med padanjem posode nameravajo proučevati vprašanja hidrodinamike, fizike zgorevanja in materiale v breztežnem stanju. To je povezano z izbiro najugodnejših možnosti pri vesoljskih poletih. Naprava naj bi začela delovati ob koncu prejšnjega leta. Pozneje mislijo podvojiti čas trajanja poskusov tako, da bodo posodo z napravami izstrelili z dna stolpa do vrha, od koder bo prosto padala do dna.

Janez Strnad

PRESEK 17 (1989/90), številka 5

VELIKANI NA MARSU

Ob pristanku Pathfinderja na Marsu smo o tem planetu veliko slišali. Veliko je bilo tudi ugibanj o tem, ali obstaja na njem kakšna oblika življenja ali ne. V tovrstna ugibanja se na tem mestu ne bomo spuščali, pogledjmo pa le, kako veliki bi bili Marsovci, če bi imeli enako konstitucijo in enake snovne lastnosti kot Zemljani. Seveda bomo predpostavili tudi, da so pogoji za življenje na Marsu enaki kot na Zemlji.

Mars si torej predstavljajmo kot pomanjšano Zemljo. Njegov premer je namreč enak 0,54 polmera Zemlje, težni pospešek na površini Marsa pa je petina Zemljinega. Razmislimo še, od česa je odvisna višina povprečnega Zemljana oz. povprečnega Marsovca. Noge so tiste, ki morajo nositi celotno težo telesa. Če bi bila teža človeka prevelika, bi se mu noge zlomile, če pa bi bila premajhna, bi imel človek povsem drugačno konstitucijo. Sklepamo, da je višina povprečnega človeka sorazmerna razmerju njegove teže F_g in preseka S :

$$\frac{\text{teža telesa}}{\text{preseki nosilnih delov telesa}} = \frac{F_g}{S} = \frac{\rho g h S}{S} = \rho g h. \quad (1)$$

Pri tem smo s h označili višino povprečnega Zemljana, z ρ povprečno gostoto človeškega telesa, z g pa težni pospešek na površini Zemlje.

Napišimo kvocient $(F_g/S)_m$ še za Marsovčka:

$$\left(\frac{F_g}{S}\right)_m = \rho g_m h_m. \quad (2)$$

V tej enačbi nam g_m pomeni težni pospešek na površini Marsa, h_m pa je višina povprečnega Marsovčka. Višina h_m pa je tisti podatek, ki nas zanima.

Predpostavili smo, da imata Zemljan in Marsovček enako mejo trdnosti, torej sta kvocienta F_g/S za oba enaka. Zato dobimo, ko izenačimo enačbi (1) in (2), za višino Marsovčka izraz:

$$h_m = \frac{g}{g_m} h. \quad (3)$$

V to enačbo vstavimo $g = 10 \text{ m/s}^2$ in $g_m = 2 \text{ m/s}^2$ ter dobimo oceno za višino povprečnega Marsovčka $h_m = 5h$. Če je višina povprečnega Zemljana 170 cm, bi bil povprečni Marsovček visok kar 850 cm.

Z Marsovčki oz. kar Marsovci torej ne bi bilo dobro igrati košarke!

Vida Kariž Merhar

MAVRIČNA UGANKA

Zadnjega šolskega dne opoldne sta se s spričevaloma v torbah skupaj vračala iz šole Špela in Janez. Nenadoma je skozi dež posijalo sonce. Janez je vzkliknil: "Glej, mavrica!" "Lažeš!" je odvrnila Špela in se ni niti ozrla. – Kako je Špela vedela, da jo hoče Janez potegniti?

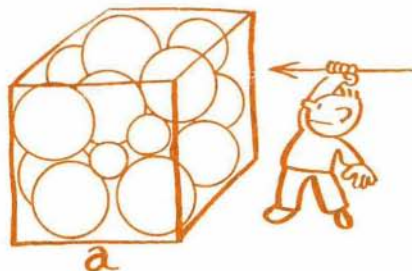
Marija Vencelj



PRESEK 17 (1989/90), številka 2

NENAVADNA PREMICA*

Znotraj kocke z robom a se nahaja nekaj krogel s skupno površino S , ki je večja od na^2 . Dokaži, da obstaja premica, ki seka vsaj $\left[\frac{n}{4}\right] + 1$ teh krogel in je pravokotna na eno stransko ploskev. (Oglati oklepaj $[x]$ pomeni največje celo število, ki ne presega realnega števila x .)



* Prispevek je ilustriral *Božo Kos*

Dušan Repovš

PRESEK 7 (1979/80), številka 2

KRIPTARITEM Z DVEMA KARTAMA

V kriptaritmu — skrivnostnem računu — pomeni ista črka vedno isto številko, različne črke različne številke. Kaj se skriva za zapisom

$$AS^S = FANT$$

Rešitve nam pošljite do 1. 4. z oznako "za PIR".

Peter Petek

PRESEK 12 (1984/85), številka 3

OBOJESTRANSKA PRAŠTEVILA *

Praštevílo je naravno število, večje od 1, ki jedeljivo le z 1 in s samim seboj. Taka števila so na primer 2, 7, 41 in 173. *Obojestransko praštevílo* pa imenujmo praštevílo, ki ostane praštevílo, tudi če ga zapišemo v obratnem vrstnem redu. Na primer število 13 je že tako, saj je tudi 31 praštevílo.

Izkaže se, da je takih števil kar precej. Očitno so vsa enomestna praštevíla, to je 2, 3, 5 in 7, obojestranska praštevíla. Dvomestnih takih števil je devet, tromestnih pa kar 43, med štiri- in večmestnimi pa jih je še mnogo več. Za zgled jih zapišimo še nekaj: 11, 13, 101, 393, 337, 769, 1283, 39397 in tako dalje. Večmestna obojestranska praštevíla se lahko začenjajo le s števili 1, 3, 7 ali 9. Zakaj?

Nekatera med omenjenimi števili imajo še eno lepo lastnost, namreč ne spremenijo se, četudi jih zapišemo v obratnem vrstnem redu, imenujmo jih *simetrična praštevíla*. Taka števila so na primer 11, 101 in 383. Tudi simetričnih praštevil je veliko. Edino dvomestno tako število je 11, tromestnih simetričnih praštevil je 15, petmestnih 93, medtem ko štirimestnega simetričnega praštevíla ni nobenega. Slednje je sicer malo presenetljivo, vendar bomo dokazali splošno ugotovitev: *Razen števila 11 ni nobenega simetričnega praštevíla zapisanega s sodim številom decimalnih mest.*

* Če je komu všeč, lahko taka števila imenuje *olivetšarp* praštevíla.

Preden bomo to ugotovili, dokažimo, da je vsako število oblike $10^{2m-1} + 1$, $m = 1, 2, \dots$ deljivo z 11. Uporabimo matematično indukcijo (glej Presek V/2). Za $m = 1$ je to očitno res, naj bo $10^{2m-1} + 1 = 11k$, $k \in \mathbb{N}$ in si oglejmo, kaj dobimo, če m zamenjamo z $m + 1$: $10^{2(m+1)-1} + 1 = 10^2(10^{2m-1} + 1) - 99 = 10^2 \cdot 11k - 99$. To število pa je zopet deljivo z 11. Oglejmo si sedaj desetiški zapis simetričnega $2n$ -mestnega števila

$$N = a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1 = a_1 \cdot 10^{2n-1} + a_2 \cdot 10^{2n-2} + \dots + a_n \cdot 10^n + a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1$$

Zapišimo zgornji izraz malo drugače

$$N = a_1(10^{2n-1} + 1) + 10a_2(10^{2n-3} + 1) + \dots + 10^{n-1}a_n(10^1 + 1)$$

Ker so po dokaznem vsa števila v oklepajih deljiva z 11, je tudi število N deljivo z 11 in torej ne more biti praštevilo, razen seveda, če je $N = 11$.

Iz obojestranskih praštevil lahko poskusimo sestavljati kvadratne sheme z lastnostjo, da kakorkoli preberemo število v njih, vedno dobimo praštevilo. Primer take sheme, sestavljene iz dvo-mestnih števil, je

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{array}$$

Kakorkoli preberemo število v njej, vodoravno, navpično ali po diagonali v kakršnikoli smeri, vedno dobimo praštevilo. Primer takega kvadrata, sestavljenega iz štirimestnih praštevil, je tudi

$$\begin{array}{cccc} 3 & 7 & 1 & 9 \\ 9 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \end{array}$$

Nasploh pa je kar težko najti kvadratno shemo števil s tako lepimi lastnostmi. Nekoliko lažje je najti kvadratno shemo praštevil, če zahtevamo, da je število praštevilo le v primeru, ko ga preberemo po vrstici ali stolpcu v poljubni smeri. Poskusiti najti sam kakšnega od teh!

Edvard Kramar

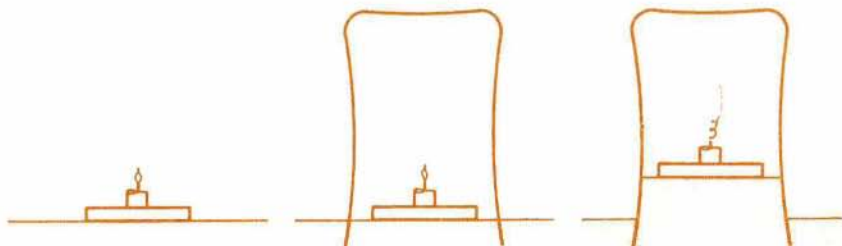

POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI
PREPROST POSKUS - NAPAČNA RAZLAGA

Če pot naredimo eksperiment, ki ga najdemo opisanega v starejših učbenikih kemije. V umivalnik nalijemo vodo. Na vodo položimo kos lesa - ladjico, nanjo pa navpično pritrdimo krajšo svečo. Najlažje jo prilepimo s kapljajočim parafinom, ko jo prižgemo. Večji kozarec (mogoče tak za vlaganje zelenjave) nato poveznemo na ladjico s svečo in sicer tako, da potopimo rob kozarca v vodo. Tako zapremo dostop svežemu zraku v kozarec. Sveča porabi ves kisik, ki je bil v zraku, in ugasne. Ker v poveznjenem kozarcu ni več kisika, ga nadomesti voda iz umivalnika. Res se vodna gladina v kozarcu dvigne in sicer za približno $1/5$ dela prostornine kozarca. Ker je v zraku približno 20 volumskih odstotkov kisika, sklepajo iz tega, da s tem poskusom lepo prikažemo kolikšen prostorninski del kisika je v zraku.

Razlaga, ki smo jo dali, je hudo sumljiva. Bralce pozivamo, naj poiščejo šibke točke naše razlage. Izmislijo naj si poskuse, ki bodo podpirali njihove argumente. Kako pa bi morali narediti tak poskus, da bi bil še vedno preprost, a "čist", se pravi brez napačnih trditev?

Odgovore pošljite najkasneje do 1. avgusta letos. Najpopolnejše odgovore bomo nagradili.

Andrej Likar



REŠITVE NALOG IZ STARIH ŠTEVILK

POSKUSI – PREMISLI – ODGOVORI

Deset bralcev nam je poslalo opis poskusa, ki smo vam ga zastavili v 1. letošnji številki Preseka. Osmim se je poskus posrečil in vsi ste ga prav opisali. Malo težje je bilo razložiti poskus in še najbolj smo bili zadovoljni z odgovorom Damjana Kobala iz gimnazije v Ajdovščini. Knjižno nagrado Leksikon Čan karjeve založbe - Fizika bo prejel po pošti.

Zakaj se v kozarcu dvigne in ostane v tem položaju sveže, surovo jajce, na katerega teče primeren curek vode iz vodovodne pipe? Upoštevati moramo sledeče:

- *Oblika jajca.* Vodni tok se na vrhu jajca razdeli in obliva jajce.
- *Oblika kozarca.* Tudi oblika kozarca pomaga pri usmerjanju vodnega toka. Zanimivo je, da poskus ne uspe v veliki posodi.
- *Vodnemu toku ob jajcu najlaže sledimo, če s pipeto vnesemo v vodo par kapljic barvila (tudi običajno črnilo je dobro).* Ko je vodni tok iz pipe stalen, - pravimo, da smo dosegli stacionarno stanje - obstane jajce v pokončni legi. Opazimo tudi, da je tok vode ob jajcu največkrat nesimetričen glede na navpično os in jajce je pomaknjeno proti robu kozarca. Vodni tok se stisne med jajce in kozarec, zato je tam hitrost vode večja kot ob drugih delih jajca. Po Bernoullijevi enačbi je v zoženem prostoru med jajcem in kozarcem tlak manjši kot drugod v okolici jajca. Sile zaradi tlačnih razlik uravnovesijo majhno razliko med težo jajca in vzgonom. Gostota svežega, surovega jajca je samo malo večja od gostote vode. Jajce tako ostane na površju, del ga celo gleda iz vode.

Zvonko Trontelj

PRESEK 7 (1979/80), številka 3

PRAZNIČNI OKRASEK

Krogla in ribica.

Marija Vencelj

PRESEK 17 (1989/90), številka 2

ENAKE VSOTE

Leva naloga: Sedmico iz prvega stolpca nadomestite z osmico, le-to pa z dvojko. Namesto dvojke postavite sedmico.

Desna naloga: Šestico v tretjem stolpcu nadomestite s štirico, le-to s sedmico, namesto sedmice pa postavite primerno obrnjen kartonček s šestico - torej z devetico.

Boris Lavrič

PRESEK 18 (1990/91), številka 6

MAVRIČNA UGANKA

Po imenih sodeč hodita sošolca v šolo nekje v Sloveniji, ki leži vsa med 45^0 in 47^0 severne zemljepisne širine. Zadnji šolski dan je v drugi polovici junija, takrat pa je na tej zemljepisni širini opoldne sonce tako visoko na nebu, da bi bila vsa mavrica pod obzorjem. Špela je videla, kako visoko je sonce, in ker bere Presek, takoj vedela, da mavrice ne more videti.*

Marija Vencelj

PRESEK 17 (1989/90), številka 2

NENAVADNA PREMICA

Vzemimo nasprotno, da taka premica ne obstaja. Projiciramo vse krogle na eno od stranskih ploskev kocke. Potem je vsaka točka te ploskve prekrita z največ

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 - 1 = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$$

projekcijami, ker bi v nasprotnem primeru v eni izmed točk na tej stranski ploskvi obstajala normala, ki bi sekala vsaj

$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1$ kroglo, kar pa bi bilo se-vé v nasprotju z našo predpostavko.

* V 2. številki 17. letnika Preseka izvemo v članku Marije Vencelj: Glej, mavrica!, da mavrice ne moremo videti, če je sonce več kot 42^0 nad obzorjem.

To pa pomeni, da je vsota vseh ploščin projekcij, torej ploščin na vseh velikih krogov (glavnih krogov) teh krogel

$P \leq \left[\frac{n}{4}\right] a^2$. Ker je površina krogle 4 krat večja od ploščine njenega glavnega kroga, je res

$$S \leq 4 \left[\frac{n}{4}\right] a^2 \leq 4 \cdot \frac{n}{4} \cdot a^2 = na^2$$

kar pa je v očitnem protislovju s predpostavko, da ta površina presega na^2 . Torej iskana normala vedno obstaja - vedno lahko najdemo premico z zahtevano lastnostjo.

Dušan Repovš

PRESEK 7 (1979/80), številka 2

Kriptaritem z dvema kartama

Objavljamo rešitev, ki jo je poslala Martina Knapp:

Največje število, ki ga potenciramo in še dobimo štirimestno število, je 21^3 . Potenčni eksponent mora biti večji od 1, torej je lahko 2 ali 3. Ostanje nam še naslednje možnosti:

$$12^2, 32^2, 42^2, 52^2, 62^2, 72^2, 82^2, 92^2, 13^3$$

Če te vrednosti izračunamo, $12^2 = 144$, $32^2 = 1024$, $42^2 = 1764$, $52^2 = 2704$, $62^2 = 3844$, $72^2 = 5184$, $82^2 = 6724$, $92^2 = 8464$ in $13^3 = 2197$, vidimo, da le število 13^3 ustreza kriptaritmu.

PRESEK 13 (1985/86), številka 1

PREPROST POSKUS - NAPACNA RAZLAGA

Na vprašanje, ki smo vam ga zastavili v 4. številki lanskega letnika Preseka, smo prejeli tri odgovore. Pravilno sta razumela vprašanje in nanj odgovorila Aleš Jesenšek iz Litije in Matija Drobnič iz Ljubljane. Zaradi izčrpnosti skoraj v celoti objavljamo Alešev odgovor.

"Sprememba prostornine, ki jo običajno opazujemo pri opisanem poskusu je predvsem posledica raztezanja in krčenja zraka. Pri gorenju sveče se sprošča toplota, ki povzroči, da nam zrak zaradi raztezanja uhaja iz kozarca. Ko plamen ugasne, se zrak ohladi in voda napolni preostalo prostornino. Izid poskusa je odvisen od tega, koliko vročega zraka zajamemo, ko pokrijemo svečo in od tega koliko zraka uide iz kozarca zaradi segrevanja med pokrivanjem. Najbolj se dvigne voda, če pokrijemo svečo počasi, da se zrak v čaši počeno segreje. Skoraj nič pa, če jo potisnemo pod kozarec, ki je že na pol v vodi. Pri gorenju sveče nastajata namreč ogljikov dioksid in voda. Ogljikov dioksid skoraj povsem nadomesti porabljeni kisik, voda pa se kondenzira. Vodna gladina se zato dvigne le za malenkost. Če hočemo pokazati porabo kisika v kozarcu, moramo oksidirati snov, ki pri reakciji ne oddaja plinov.

Podvomil pa sem, da bi mogla sveča pod kozarcem porabiti ves kisik."

Aleš predlaga naprej, da bi v kozarcu poskusili z oksidacijo železne volne. Predlaga, da bi jo zažgali s pomočjo električnega toka iz baterije. Na žalost ne pove, ali je ta poskus naredil. Prav gotovo pa bi lahko z železno volno pokazali porabo kisika, če bi jo pustili nekaj dni ovlaženo v kozarcu. Pri počasnem rjavenju bi volna posrkala ves kisik iz zraka.

Aleš ima prav, ko dvomi, da bi lahko sveča posrkala iz zraka ves kisik. Gorenje je buren pojav, ki pa brž zamre, ko je kisika premalo.

Še boljše bi bilo, da bi svečo prižgali pod poveznjenim kozarcem na električni način. Okoli stenja navijemo tanko žičko iz cekasa ali iz železne volne in jo priključimo na baterijo. (Opomba uredništva)

Matija je poskusil z oksidacijo volframa v kozarcu. V ta namen je uporabil avtomobilsko žarnico, ki ji je razbil stekleno bučko in jo priključil na transformator. Na žalost mu poskus ni uspel zaradi "tehničnih" težav.

Alešu in Matiji se zahvaljujemo za izčrpna odgovora. V priznanje bosta dobila knjigo V.L.Ginzburga: Sodobni problemi fizike in astrofizike.

Bralce vabimo, da nam še poročajo o ponovitvah in variantah opisanih poskusov.

** Sveča je iz parafina, ki ga sestavljajo normalni alkani C_nH_{2n+2} z velikim številom ogljikovih atomov ($n = 20$ do 30). Včasih je dodan še čebelji vosek in razni strjevalci kot npr. stearinska kislina. Pri popolnem gorenju molekule C_nH_{2n+2} dobimo n molekul CO_2 in $(n+1)$ molekul H_2O , pri tem pa se porabi $(3n+1)/2$ molekul O_2 . Molekule vode se kondenzirajo, molekule CO_2 pa ostanejo v plinu. Delni tlak CO_2 je $2n/(3n+1)$ delnega tlaka O_2 , ki se je porabil pri gorenju. V idealnem primeru bi se torej zmanjšala prostornina zraka v posodi za $(n+1)/(3n+1)$ del napovedane $1/5$, kar je pri velikem n za približno $1/15$ kot je pravilno ugotovil Matija Drobnič.

Naloga, ki vam jo zastavljamo tokrat, pa je takale:

Prav gotovo ste se poleti večkrat jezili nad oljnatimi madeži, ki so jih na morski gladini pustili motorni čolni. Priznati pa morate, da so ti madeži olja prav lepih barv. Podoben pojav lahko opazujete tudi po dežju, ko je ob robu ceste polno luž, prekritih z oljnatimi madeži. Ali opazite kakšno razliko, če opazujete luže stoje ali pa če ob njih počepnete?

Doma naredite podoben poskus z milnico. Najlažje je, če uporabite kar kupljen lonček milnice za "spuščanje mehurčkov" s plastičnim okvirčkom vred. Pomočite okvirček v milnico in ga podrite v navpični legi, da dobite na zgornji strani okvirčka zelo tanko plast milnice. Osvetlite milnično opno z močno žarnico in ugotovite, kakšna je videti v odbiti svetlobi!

Podobne poskuse si lahko zamislite tudi sami. O vseh opazovanjih nam pišite in jih poskušajte tudi razložiti. Povprašajte tudi starše in učitelje. Odgovore nam pošljite do 1. decembra 1981. Najboljše bomo nagradili.

Marjan Hribar
Metka Luzar Vlady

SAMOSTOJNA SLOVENIJA NA FIZIKALNIH IN MATEMATIČNIH OLIMPIADAH

33. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA V MOSKVI

Mednarodna matematična olimpiada je bila organizirana v Moskvi. Udeležilo se je 65 držav. Slovenija ni bila povabljen. Ruska federacija, ki je po razpadu Sovjetske zveze prevzela organizacijo matematične olimpiade, se je sklicevala na dejstvo, da pravno nasledstvo Jugoslavije še ni rešeno, zato se Slovenija obravnava kot država, ki se hoče na novo vključiti. Pravilnik pa določa, da se iz take države prvo leto povabi samo opazovalca. Tekmovalci lahko sicer sodelujejo že prvo leto, vendar tekmujejo izven konkurence in na lastne stroške. Ker sem na 32. matematični olimpiadi na Švedskem osvojil bronasto kolajno, smo poskušali najti način, da bi se lahko udeležil tekmovanja. Ugotovili smo, da lahko sodelujem kot gost kake druge države, ki nima kompletne ekipe. Švicarski ekipi smo predlagali, da me vzamejo medse, kar so z navdušenjem sprejeli.

Tomaž Cedilnik

PRESEK 20 (1992/93), številka 5

XXIII. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Mednarodno tekmovanje srednješolcev v znanju fizike je bilo lani v mestu Espoo na Finskem. Udeležila sta se ga tudi dva dijaka iz Slovenije, Krešimir Macan in Tadej Mali s SNŠ v Ljubljani in vodja ekipe Bojan Golli. Čeprav so se naši dijaki udeleževali tega pomembnega tekmovanja že od druge olimpiade naprej, nastop Slovenije kot samostojne ekipe ni bil samoumeven, saj država organizatorica vabi nove države po lastni presoji. Ker so se gostitelji še dobro spominjali uspešno organizirane olimpiade v Portorožu leta 1985, s povabilom ni bilo težav. Slovenija je sedaj postala stalna udeleženka olimpiad, saj statut pravi, da morajo organizatorji naslednjih tekmovanj obvezno povabiti vse udeležence predhodnih olimpiad. Letos bomo zato lahko nastopili na olimpiadi v ZDA, ki bo v začetku julija. ...

PRESEK 20 (1992/93), številka 6

USPEH NAŠIH OLIMPIJCEV V WILLIAMSBURGU IN ISTANBULU

Ob podpori Ministrstev za znanost in tehnologijo ter za šolstvo in šport sta se letos lahko udeležili fizikalne olimpiade v Williamsburgu v ZDA in matematične v Istanbulu v Turčiji tudi petčlanski slovenski reprezentanci. Na tekmovanju sta obe ekipi dosegli lep uspeh. Vsaka se je vrnila s po dvema bronastima kolajnama in s po eno pohvalo.

Podrobnejše poročilo bodo pripravili udeleženci obeh olimpiad za eno kasnejših števil.

PRESEK 21 (1993/94), številka 1

25. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Po dodatnem izbirnem tekmovanju so se na letošnjo olimpiado iz fizike, ki je bila v Pekingu (Kitajska) od 11. do 19. julija, uvrstili: Arpad BRÜMEN, Gimnazija Murska Sobota; Matjaž VENCELJ, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jure VRHOVNIK, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Primož KUŠAR, Srednješolski center Ptuj - gimnazija; Metka DEMŠAR, Gimnazija Šentvid Ljubljana.

Dobili so eno pohvalo in dve posebni bronasti medalji: eno za teoretični in eno za eksperimentalni del tekmovanja.

PRESEK 22 (1994/95), številka 1

POROČILO S 35. MEDNARODNE MATEMATIČNE OLIMPIADE V HONG KONGU

Na letošnji matematični olimpiadi je bila najuspešnejša ekipa ZDA, ki je osvojila vse možne točke (in seveda šest zlatih odličij), slovenska ekipa pa se je vrnila domov s tremi pohvalami. Prejeli so jih: Jernej BARBIČ, Iztok KAVKLER, in Primož MORAVEC. Po razglasitvi rezultatov nas je čakalo še zadnje dejanje 35. MMO: slavnostna večerja (v kitajskem slogu), kjer se je v kruti praksi izkazala za resnično naslednja trditev:

*Dve tangenti (beri: palčki) ne določata natanko lege krogle
(beri: okrogle drevesne gobe) v prostoru.*

PRESEK 22 (1994/95), številka 3

LEPI USPEHI SLOVENSКИH DIJAKOV NA OLIMPIADAH IZ MATEMATIKE, FIZIKE IN RAČUNALNIŠTVA

Z računalniške olimpiade na Nizozemskem je naša srednješolska ekipa prinesla dve srebrni in eno bronasto medaljo, na fizikalni v Avstraliji so tekmovalci dobili eno bronasto in eno pohvalo, matematiki pa so v Kanadi dosegli tri pohvale.

PRESEK 23 (1995/96), številka 1

ZNOVA BLESTEČI USPEHI NAŠIH DIJAKOV NA OLIMPIADAH IZ MATEMATIKE IN FIZIKE

Slovenski dijaki so se na olimpiadah iz matematike in fizike letos spet imenitno odrezali.

Na 27. mednarodni fizikalni olimpiadi, ki je potekala v Oslu na Norveškem, je Klemen Žagar (Gimnazija Šentvid, Ljubljana) osvojil srebrno medaljo, Miha Vuk bronasto medaljo, Anže Slosar in Peter Jeglič (vsi trije so dijaki Gimnazije Bežigrad v Ljubljani) pa sta dobila pohvali.

S 37. mednarodne matematične olimpiade v Bombayu v Indiji pa je naša ekipa prinesla dve bronasti medalji. Osvojila sta ju Igor Klep s Srednješolskega centra Ptuj in Matjaž Konvalinka z Gimnazije Bežigrad.

PRESEK 24 (1996/97), številka 1

38. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Po določilih *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija izbrala ekipo, ki je zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Argentini. V ekipo so se uvrstili: Matjaž Konvalinka, Matija Mazi, Martin Milanič, Tadej Starčič, Matjaž Titan in Andrej Vodopivec.

Domov so prinesli dve bronasti medalji in dve pohvali.

PRESEK 25 (1997/98), številka 1

28. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Po izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo so se na letošnjo 28. mednarodno olimpiado iz fizike, ki je potekala med 13. in 21. julijem v mestu Sudbury, Kanada, uvrstili: Igor Verstovšek, Miloš Jeftič, Matej Marinč in Gašper Tkačik, vsi iz Gimnazije Bežigrad Ljubljana, ter Matej Horvat iz II. gimnazije Maribor.

Domov so prinesli eno bronasto medaljo in tri pohvale.

PRESEK 25 (1997/98), številka 1

34. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši sedmošolci in osmošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 16. maja 1998, pomerili v šestih regijah na državnem tekmovanju za Zlato Vegovo priznanje. Nanj se po veljavnem pravilniku uvrsti do 0,5% vseh sedmošolcev in do 1% vseh osmošolcev s posameznega področja.

REGIJA	7. razred	8. razred
Ljubljana	83	134
Maribor	40	70
Celje	25	41
Koper	18	21
Nova Gorica	14	18
Novo mesto	18	32
SKUPAJ	198	316

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem

7. razred

I. nagrada

Gašper Žerovnik, OŠ Medvode, Medvode.

II. nagrada

Žiga Novšak, OŠ Boštanj, Boštanj;
Maja Furek, OŠ Martina Konšaka, Maribor.

III. nagrada

Domen Rovšček, OŠ Franceta Bevka, Tolmin;
Ivo List, OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana;
Andrej Matiacic, OŠ Srečka Kosovela, Prosek, Italija.

8. razred**I. nagrada**

Klemen Šivic, OŠ Dr. Ivana Korošca, Borovnica;
Tonček Gradišek, OŠ Dr. Vita Kraigherja, Ljubljana;
Mojca Jazbec, OŠ Komen, Komen;
Matic Glavan, OŠ Marjana Nemca, Radeče;
Matija Perne, OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka;
Ana Šinkovec, OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka;
Aleš Frece, OŠ Slivnica pri Celju;
Tjaša Stepišnik Perdih, OŠ Šmarje pri Jelšah;
Mojca Lakner, OŠ Vič, Ljubljana;
Maja Ropret, OŠ Žirovnica.

II. nagrada

Neja Nastran, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka.

III. nagrada

David Danev, OŠ Gustava Šiliha, Velenje.

Aleksander Potočnik

18. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA ZLATA STEFANOVA PRIZNANJA

Oddelek za fiziko Pedagoške fakultete v Mariboru in Društvo matematikov, fizikov in astronomov sta bila organizatorja tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Mariboru se je 9. maja 1998 pomerilo 35 ekip iz 7. razredov in 36 ekip iz 8. razredov. Tekmovalci so reševali tri teoretične in dve eksperimentalni nalogi. Naloge za področna in državno tekmovanje so pripravili učitelji Pedagoške fakultete Maribor, pri organizaciji pa je sodelovala Jelka Sakelšek.

Pred državnim tekmovanjem so bila 4. aprila 1998 področna tekmovanja v devetih mestih, kjer so tekmovanja organizirali in vodili: Mateja Šumej (Šentjur), Franc Pogorelčnik (Radlje ob Dravi), Mirko Cvahte in Zlatko Bradač (Maribor), Loredana Sabaz – Deranja in Aljoša Žerjal (Koper), Milojka Frank (Nova Gorica), Mojca Mur in Karla Krajnik (Poljane), Edo Dečko (Murska Sobota), Milena Košak (Novo mesto) ter Vesna Harej in Jelka Sakelšek (Ljubljana).

Sodelovalo je 356 ekip iz 7. razredov in 383 ekip iz 8. razredov, skupaj 1478 učencev. Tekmovalci so na področnih tekmovanjih reševali 5 teoretičnih nalog.

Na državnem tekmovanju so Zlata Stefanova priznanja prejeli:

Šola	Tekmovalca (ki)
7. razred	
OŠ Oskarja Kovačiča, Ljubljana	Ivo List, Miha Veršnjak
OŠ Karla Destovnika – Kajuha, Ljubljana	Gorazd Gotovac, Boštjan Čeh
OŠ Gornji Petrovci	Daniel Grah, Tina Kerčmar
OŠ Ledina, Ljubljana	Borut Likar, Žiga Vavpotič
OŠ Toneta Čufarja, Maribor	Katja Šiling, Jernej Pirš
OŠ Tabor, Logatec	Gasper Žejn, Simon Merlak
OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana	Tilen Thaler, Janez Zorman
OŠ Davorin Jenko, Cerklje	Nuša Dremelj, Janja Zaplotnik
OŠ Naklo	Andreja Pavlin, Margareta Ciglič
OŠ Frana Erjavca, Nova Gorica	Petra Šinigoj, Rok Prislan
OŠ Dr. Franceta Prešerna, Ribnica	Aleš Lampe, Nejc Nadler
OŠ Narodnega heroja Rajka, Dol pri Hrastniku	Tadej Borovšak, Marko Polak
OŠ Ljudski vrt, Ptuj	Tine Ačimovič, Marko Ferme
8. razred	
OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka	Matija Perne, Luka Strasner
OŠ Narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana	Urša Tičar, Jure Merčun
OŠ Dušana Bordona, Koper	Ana Antončič, Matjaž Boži
OŠ Toma Brejca, Kamnik	Rok Ručigaj, Martin Pregl
OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka	Maja Bratuž, Blaž Hribernik
OŠ Rače	Matevž Kmetec, Boštjan Ferlič
OŠ Dr. Ivana Korošca, Borovnica	Klemen Šivic, Simon Vrhovec
I. OŠ Lendava	Sebastjan Somi, Dušan Markovič
OŠ Ivanjковci	Boštjan Kosec, Mitja Mar
OŠ Frana Kocbeka, Gornji Grad	Andraž Drčar, Lucija Ročnik
OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana	Klemen Slavič, Andrej Lajovic
OŠ Dol pri Ljubljani	Matevž Bokalič, Jernej Jalovec
OŠ Lenart	Mitja Krajnc, Robi Rajšp

Zlato priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 71 od 100 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 74 od 100 možnih točk. Tekmovalkam in tekmovalcem čestitamo za dosežene rezultate.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

36. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Podobno kot v prejšnjih letih je tudi letos potekalo tekmovanje srednješolcev iz fizike v štirih skupinah A, B, C in D, razdeljenih po snovi, in v treh stopnjah.

Prve stopnje – regijskega tekmovanja – se je udeležilo okrog 1000 dijakov iz 53 srednjih šol. Tekmovanje je potekalo 28. marca 1998 istočasno na osmih srednjih šolah po vsej Sloveniji. Organizirale so ga naslednje srednje šole: Gimnazija Šentvid Ljubljana, Gimnazija Vič Ljubljana, Šolski center Ptuj – gimnazija, Šolski center Velenje – gimnazija, Srednja šola Jesenice, Šolski center Nova Gorica, Srednja pomorska šola Portorož in Srednja šola za elektrotehniko in gostinstvo Zagorje ob Savi. Tekmovalne komisije, sestavljene iz profesorjev fizike s sodelujočih šol, so popravile izdelke in predložile tekmovalce za državno tekmovanje iz posamezne regije.

Državno tekmovanje je bilo 18. aprila. Po predlogu regijskih komisij se ga je v skupini A udeležilo 45 tekmovalcev, v skupini B 33, v skupini C 26 in v skupini D 21. Skupaj 125 tekmovalcev iz 37 srednjih šol.

Organizator državnega tekmovanja je bila Gimnazija Škofja Loka. Poleg izvedbe tekmovanja so organizatorji pripravili tudi program za mentorje in tekmovalce. Tako so si mentorji, medtem ko so njihovi tekmovalci reševali naloge, ogledali Selško dolino, po koncu reševanja nalog pa so si tekmovalci ogledali zgodovinske in kulturne znamenitosti Škofje Loke.

Tekmovanje je izvedla tekmovalna komisija DMFA Slovenije, stroške tekmovanja pa sta krila Ministrstvo za šolstvo in šport in organizator državnega tekmovanja. Pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov so pomagali študenti Fakultete za matematiko in fiziko. Na razglasitvi rezultatov, ki ji je prisostvoval tudi minister za šolstvo in šport dr. Slavko Gaber, je komisija podelila 7 prvih nagrad, 13 drugih, 16 tretjih in 31 pohval.

Podeljene nagrade in pohvale

Skupina A

I. nagrada

Andraž Hubad, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Andrej Košmrlj, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Mate Car, Gimnazija Murska Sobota.

II. nagrada

Gregor Tavčar, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Mitja Centrih, Šolski center Celje – gimnazija Lava; Andrej Muhič, Gimnazija Novo mesto; Aleš Česen, Gimnazija Kranj.

III. nagrada

Uroš Leskovšek, Šolski center Celje – gimnazija Lava; Dragan Simeonov, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Maruša Koser, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jernej Kukovič, Šolski center Celje – gimnazija Lava.

Pohvala

Tomaž Grušovnik, I. gimnazija Maribor; Davorin Lešnik, Šolski center Ptuj – gimnazija; Peter Skube, Srednja šola Črnomelj; Marko Ušaj, Škofijska gimnazija Vipava; Žiga Dremelj, Gimnazija Kranj; Franja Pajk, Gimnazija Škofja Loka; Jakob Tomše, Gimnazija Vič Ljubljana; Damjan Golob, Gimnazija Novo mesto; Iztok Drobnič, Šolski center Brežice; Viktor Vrhunc, Gimnazija Kranj.

Skupina B**I. nagrada**

Matej Kanduč, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana; Irena Majcen, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

II. nagrada

Iztok Pižorn, I. gimnazija v Celju.

III. nagrada

Toni Kočevár, Šolski center Novo mesto; Stanislav Pišek, Šolski center Ptuj – gimnazija; David Štular, Gimnazija Kranj.

Pohvala

Luka Jalen, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Andraž Tori, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Tomaž Weiss, II. gimnazija Maribor; Lovro Žiberna, II. gimnazija Maribor; Andrej Klobčar, Šolski center Novo mesto; Nejc Košnik, Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje; Jure Maglica, Gimnazija Celje – center; Beno Polanec, II. gimnazija Maribor; Žiga Virk, Gimnazija Vič Ljubljana; Matej Močnik, Tehniški šolski center Nova Gorica; Bogdan Pregelj, Tehniški šolski center Nova Gorica; Izidor Sabotin, Gimnazija Murska Sobota.

Skupina C**I. nagrada**

Primož Buh, Gimnazija Šentvid Ljubljana.

II. nagrada

Vasilij Centrih, Šolski center Celje – gimnazija Lava; Marko Kežmah, II. gimnazija Maribor; Gregor Jerše, Gimnazija Kranj; Matej Perkuš, Gimnazija Ravne na Koroškem.

III. nagrada

Dušan Jan, Gimnazija Tolmin; Robert Kulovec, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Mitja Perko, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jure Potočnik, Gimnazija Kranj; Matej Rizman, II. gimnazija Maribor; Anže Zupanc, Šolski center Celje – gimnazija Lava.

Pohvala

Miran Bürmen, Gimnazija Murska Sobota; Urban Simončič, Šolski center Novo mesto; Andrej Kavčič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jovan Lončar, Tehniški šolski center Nova Gorica.

Skupina D**I. nagrada**

Klemen Naveršnik, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

II. nagrada

Andrej Grubišič, II. gimnazija Maribor; Martin Zadnik, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana; Natan Osterman, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matija Mazi, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

III. nagrada

Blaž Zupančič, Šolski center Brežice; Matija Gams, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Janko Boltar, Gimnazija Koper.

Pohvala

Andrej Pukšič, Šolski center Celje – gimnazija Lava; Gregor Resman, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Martin Knapič, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Aleš Štimec, Šolski center Brežice; Aleš Štampfl, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana.

Izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo je bilo 22. maja na Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko. Udeležilo se ga je 10 najboljših tekmovalcev iz skupine D z državnega tekmovanja. Na letošnjo 29. mednarodno olimpiado iz fizike, ki je potekala med 2. in 10. julijem v Reykjaviku, glavnem mestu Islandije, so se uvrstili: Martin Zadnik, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana, Klemen Naveršnik, Matija Mazi, Natan Osterman, vsi z Gimnazije Bežigrad Ljubljana, in Blaž Zupančič, Šolski center Brežice.

Ciril Dominko

42. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 16. maja 1998 se je 163 dijakov z 48 gimnazij in srednjih šol v prostorih Gimnazije Tolmin spopadlo z nalogami na 42. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije, popoldne pa so se podali na izlet v kobarški in tolminski muzej.

Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade in pohvale:

Prvi letnik**Prva nagrada**

Mojca Miklavc, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Davorin Lešnik, Šolski center – gimnazija Ptuj; Matija Pretnar, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Druga nagrada

Matej Kocjan, Šolski center Novo mesto.

Tretja nagrada

Tina Šantl–Temkiv, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Miha Papler, Gimnazija Kranj; Gregor Karer, Šolski center Nova Gorica; Andrej Košmrlj, Gimnazija Bežigrad Ljubljana, Franja Pajk, Gimnazija Škofja Loka.

Pohvala

Martin Lukan, Tehniški šolski center Nova Gorica; Andrej Muhič, Gimnazija Novo mesto; Eva Rejec, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Vita Stajnko, Gimnazija Frana Miklošiča Ljutomer; Jurij Dreo, Šolski center Brežice – gimnazija Brežice; Bojan Fratina, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Sergej Omladič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matija Ukmar, Srednja šola Postojna; Eva Milošev, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Rok Strniša, Gimnazija Ledina Ljubljana; Katja Švara, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Tadej Beočanin, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Janko Klemenšek, Gimnazija Velenje; Janez Krajnc, Šolski center Celje – gimnazija Lava; Borut Vaupotič, III. gimnazija Maribor.

Drugi letnik**Druga nagrada**

Irena Majcen, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Sašo Jelenčič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matjaž Urlep, Šolski center Celje – gimnazija Lava.

Tretja nagrada

Matevž Plankl, Gimnazija Celje-Center; Sunil Sah, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Jaka Hajnšek, Šolski center Celje – gimnazija Lava.

Pohvala

Simon Mlekuž, Gimnazija Tolmin; Anže Žagar, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Dragan Zdovc, Gimnazija Frana Miklošiča Ljutomer; Aleksandra Bergant, Šolski center Rudolfa Maistra Kamnik; Matej Kanduč, Srednja vzgojiteljska šola in gimnazija Ljubljana; Jolanda Timošek, Šolski center Slovenj Gradec – gimnazija; Iztok Grilc, Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje; Grega Hribar, Gimnazija Kranj; Matic Novak, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Rok Orel, Gimnazija Vič Ljubljana; Maja Tomšič, Srednja šola Postojna.

Tretji letnik**Prva nagrada**

Jure Kališnik, Šolski center Celje – gimnazija Lava; Samo Juretič, Gimnazija Nova Gorica; Ajda Skarlovnik, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Druga nagrada

Gregor Jerše, Gimnazija Kranj; Primož Lukšič, Gimnazija in ekonomska srednja šola, Trbovlje; Tomaž Weiss, II. gimnazija Maribor.

Tretja nagrada

Dušan Jan, Gimnazija Tolmin; Mateja Škrlec, Gimnazija Frana Miklošiča Ljutomer.

Pohvala

Gorazd Karer, Šolski center Nova Gorica; Nenad Kos, I. gimnazija Maribor; Peter Varga, Dvojezična srednja šola Lendava; Maja Jeromel, II. gimnazija Maribor; Urška Bokal, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Miran Bürmen, Gimnazija Murska Sobota; Luka Devjak, Gimnazija Ledina Ljubljana.

Četrty letnik**Prva nagrada**

Matija Mazi, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Druga nagrada

Tadej Starčič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Matjaž Titan, Gimnazija Murska Sobota.

Tretja nagrada

Martin Milanič, Gimnazija Koper; Matej Rizman, II. gimnazija Maribor; Primož Berlič, Gimnazija Ledina Ljubljana; Gregor Učman, Gimnazija Poljane Ljubljana; Blaž Zupančič, Šolski center Brežice – gimnazija Brežice.

Pohvala

Martin Knapič, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Hana Hollan, Šolski center Brežice – gimnazija Brežice; Tomaž Kosem, Šolski center Celje – gimnazija Lava; Andrej Perne, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Damir Podlesek, Gimnazija Murska Sobota; Janko Boltar, Gimnazija Koper; Aleš Justin, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Andrej Pukšič, Šolski center Celje – gimnazija Lava.

Po določilih *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja izbrala ekipo, ki bo zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi na Tajvanu. V ekipo so se uvrstili: Dušan Jan, Jure Kališnik, Martin Milanič, Ajda Skarlovnik, Tadej Starčič in Matjaž Titan.

Matjaž Željko

19. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Rešitve iz XXV, P-6, str. 378

Rešitve nalog prvega dela Prva skupina

1. Naj bosta d in u hitrosti človeka, ko se premika navzdol in navzgor, ter e hitrost stopnic. Naj bo l dolžina stopnic. Tedaj je čas vzpona in spusta po stopnicah, ki se premikajo navzgor, enak

$$\frac{l}{u+e} + \frac{l}{d-e} = l \frac{d+u}{(u+e)(d-e)},$$

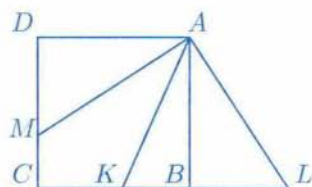
čas vzpona in spusta po stopnicah, ki se premikajo navzdol, pa

$$\frac{l}{u-e} + \frac{l}{d+e} = l \frac{d+u}{(u-e)(d+e)}.$$

Ker je $d > u$, je $(d+e)(u-e) = du - e^2 + ue - de < du - e^2 - ue + de = (d-e)(u+e)$. Torej bo vzpon in spust hitrejši po dvigajočih se stopnicah.

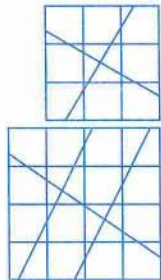
2. Enačbo preoblikujemo v $(y-z)(y+z) = 1997 - x^2$. Naj bo $x = 2t$, $y - z = 1$ in $y + z = 1997 - 4t^2$. Od tod dobimo $2y = 1998 - 4t^2$ in $2z = 1996 - 4t^2$. Torej je $x = 2t$, $y = 999 - 2t^2$ in $z = 998 - 2t^2$ rešitev enačbe za vsako celo število t .

3. Naj leži točka L na nosilki stranice BC tako, da je $\overline{BL} = \overline{DM}$. Trikotnika ABL in ADM sta skladna. Zato velja $\sphericalangle KAL = \sphericalangle BAL + \sphericalangle KAB = \sphericalangle DAM + \sphericalangle KAB = \sphericalangle MAK + \sphericalangle KAB = \sphericalangle AMD = \sphericalangle ALK$. Tako je trikotnik KAL enakokrak, zato je $\overline{AK} = \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KB} + \overline{DM}$.



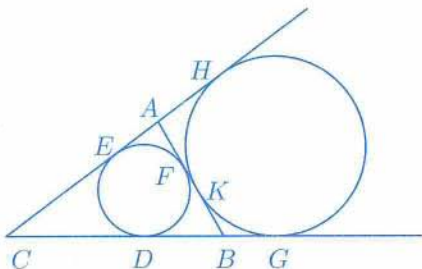
4. Pokažimo, da vsaka premica seka največ $m + n - 1$ polj šahovnice velikosti $m \times n$. Plošča je razdeljena z $m - 1$ navpičnimi daljicami ter $n - 1$ vodoravnimi daljicami, torej skupaj $m + n - 2$ daljicami. Ko premica preide iz enega polja v drugo, seka eno izmed $m + n - 2$ daljic. Ker vsako daljico lahko seka največ enkrat, pomeni, da seka največ $m + n - 1$ polj.

- a) Na plošči velikosti 3×3 vsaka premica seka največ 5 polj, zato potrebujemo vsaj dve premici, ki sekata vsa polja. Slika kaže primer, kako to naredimo z dvema premicama.
- b) Na plošči velikosti 4×4 vsaka premica seka največ 7 polj, zato potrebujemo vsaj tri premice, ki sekajo vsa polja. Slika kaže primer, kako to naredimo s tremi premicami.



Druga skupina

- Glej rešitev naloge 4 iz prve skupine.
- Če velja $a = b$, se včrtana in pričrtana krožnica dotikata stranice c v njenem razpolovišču. Torej lahko predpostavimo, da je $a > b$. Naj se včrtan krog dotika stranice a v točki D , stranice b v točki E in stranice c v točki F . Potem je $a - b = (\overline{BD} + \overline{CD}) - (\overline{AE} + \overline{CE}) = \overline{BD} - \overline{AE} = \overline{BF} - \overline{AF} = \frac{c}{3}$. Naj bo G dotikališče pričrtane krožnice z nosilko a , H njeno dotikališče z nosilko b ter K dotikališče s c . Tedaj je $\overline{AK} - \overline{BK} = \overline{AH} - \overline{BG} = (\overline{CH} - \overline{CA}) - (\overline{CG} - \overline{CB}) = \overline{CB} - \overline{CA} = a - b = \frac{c}{3}$. Torej mora za stranice trikotnika veljati enakost $c = 3(b - a)$.



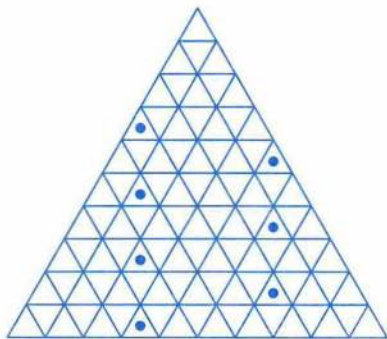
- Preoblikujemo enačbo in dobimo $6 = (x - y)(x - z)(y - z)$. Za vsako celo število t je $x = t + 3$, $y = t + 1$ ter $z = t$ rešitev zgornje enačbe.
- Skakač lahko obišče vseh 25 polj šahovnice 5×5 tako, da na vsako polje skoči natanko enkrat. Spodnja slika prikazuje tak sprehod. Če želimo, da se dva skakača ne bosta napadala, stoji na dveh zaporedno obiskanih poljih največ en skakač. Torej lahko na tablo postavimo največ 13 skakačev. Če želimo imeti na šahovnici 13 skakačev, jih moramo postaviti na polja z lihimi števili. Torej je postavitev le ena.

7	20	25	14	5
18	13	6	9	24
21	8	19	4	15
12	17	2	23	10
1	22	11	16	3

Rešitve nalog drugega dela

Prva skupina

- Velja $x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+1}x_n - 1$. Pri $x_k = 0$ je $x_{k-1}x_{k-2} = 1$. Potem je $x_{k-2}x_{k-3} = 2$. Od tod sledi, da je $x_2x_1 = k - 2$, kar pomeni, da je $k - 2 = 19 \cdot 97 = 1843$. Torej je $k = 1845$.
- Vsaka celica leži na natanko treh trakovih, zato lahko njen položaj opišemo s koordinatami (a, b, c) , kjer velja $1 \leq a, b, c \leq 10$ in je $c = a + b$ ali $c = a + b - 1$. Celice $(1,4,4)$, $(2,7,8)$, $(3,3,5)$, $(4,6,9)$, $(5,2,6)$, $(6,5,10)$ in $(7,1,7)$ zadoščajo pogojem naloge (glej sliko). Recimo, da lahko izberemo osem celic, ki zadoščajo pogojem naloge. Tedaj obstajajo vsaj tri izmed njih, katerih prva koordinata je večja od 5. Vsaka od teh celic ima drugo koordinato 1, 2, 3, 4 ali 5. Prav tako obstajajo vsaj tri celice, ki imajo tretjo koordinato manjšo od 6. Tudi te celice imajo drugo koordinato 1, 2, 3, 4 ali 5. To bi pomenilo, da obstaja celica, ki ima prvo koordinato večjo kot 5 in tretjo manjšo kot 6. Take celice ni, zato je največje število celic, ki jih lahko izberemo, 7.



Druga skupina

- Glej točko b).
 - Dovolj je pokazati, da je produkt števil $1 \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{100}$ celo število, saj je to število enako produktu števil $-1 \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{100}$. Naj bo p polinom v 99 spremenljivkah $x_1, \dots, x_{99}$, ki je enak produktu vseh polinomov oblike $1 \pm x_1 \pm \dots \pm x_{99}$. Če spremenljivko x_i zamenjamo z $-x_i$, dobimo isto vrednost. Torej v polinomu p ne obstaja člen, ki bi vseboval x_i z lihim eksponentom. Zato v vseh členih polinoma p vse spremenljivke nastopajo z sodimi eksponenti. Od tod sledi, da je $p(\sqrt{2}, \dots, \sqrt{100})$ celo število.
- Odgovor je pritrdilen. Pri kodiranju vsaki črki priredimo neko besedo. Imenujmo te besede bazične besede. Recimo, da Dimova koda ni dobra. Tedaj obstajata dve različni zaporedji S_1 in S_2 bazičnih besed, ki dasta isti niz črk S . Naj bo S najkrajši niz, ki ima to lastnost. Tedaj je dolžina niza S vsaj 10001. Zaporedje S_2 vsebuje vsaj 1001 bazičnih besed. Vsakemu začetku bazične besede v S_2 , recimo i -ti

črki v S , priredimo bazično besedo v S_1 , v kateri stoji ta i -ta črka niza S , dodatno pa še njeno pozicijo v prirejeni bazični besedi. Ker ima abeceda 33 črk, ki jih je Dima zakodiral z največ 10-črkovnimi besedami, v S_2 pa je najmanj 1001 bazična beseda, obstajata taki števili t_1 in t_2 ($t_1 < t_2$), da velja:

- Črka na mestu t_1 v S je enaka črki na mestu t_2 v S , obe sta del dveh pojavitev iste bazične besede in se nahajata na isti poziciji v obeh pojavitvah te besede v S_1 .
- S črkama na mestih t_1 in t_2 se v S_2 začne bazična beseda.

Iz niza S izrežemo vse črke od t_1 do $t_2 - 1$. Tako smo dobili dva krajša niza; preostanek naj bo S' , izrezani del pa S'' (analogno s črticami označimo razdelitvi teh nizov na bazične besede: S'_1, S'_2 in S''_1, S''_2). Če je bila pozicija t_1 -ve črke v bazični besedi zaporedja S_1 različna od 1, potem sta S'_1 in S'_2 različni zaporedji bazičnih besed, ki dajeta isti niz črk S' . Če je bila pozicija t_1 -ve črke v bazični besedi zaporedja S_1 enaka 1 in sta S'_1 in S'_2 enaki zaporedji bazičnih besed, pa morata biti S''_1 in S''_2 različni zaporedji bazičnih besed, ki spet dajeta isti niz črk S'' .

V vsakem primeru torej najdemo krajši niz, ki ga lahko razdelimo na različni zaporedji bazičnih besed, kar je v protislovju s predpostavko, da je S najkrajši niz s to lastnostjo.

Aleš Vavpetič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
26. letnik, šolsko leto 1998/99, številka 1, strani 1 – 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1998/99 je za posamezne naročnike **1.800 SIT**, za skupinska naročila šol **1.500 SIT**, posamezna številka **360 SIT**, za tujino 50 DEM (25 ECU), devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1358

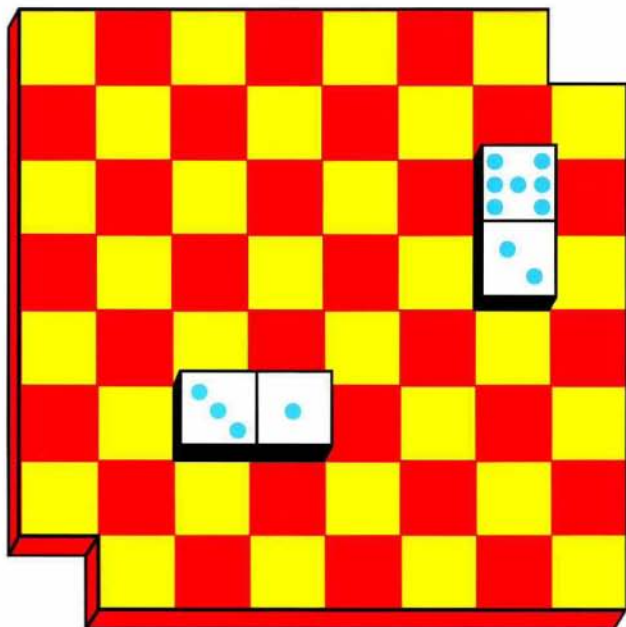
Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana



BISTROVIDEOC

ALI ZNAŠ POKRITI ŠAHOVSKO DESKO Z DOMINAMI ?

Šahovski deski odžagaš dve polji na dveh nasprotnih vogalih, tako kot kaže slika. Z enaintridesetimi dominami, od katerih vsaka pokrije točno dve polji, pokrij tako obrezano šahovnico.



PRESEK 2 (1974/75), številka 1

Rešitev

Obrezani šahovnici manjkata dve črni polji. Ker vsaka domina vedno pokrije eno belo in eno črno polje, neodvisno od tega, kako jo postavimo, obrezana šahovnica pa ima dvaintrideset belih in trideset črnih polj, naloga nima rešitve.

Egon Zakrajšek

PRESEK 2 (1974/75), številka 2

