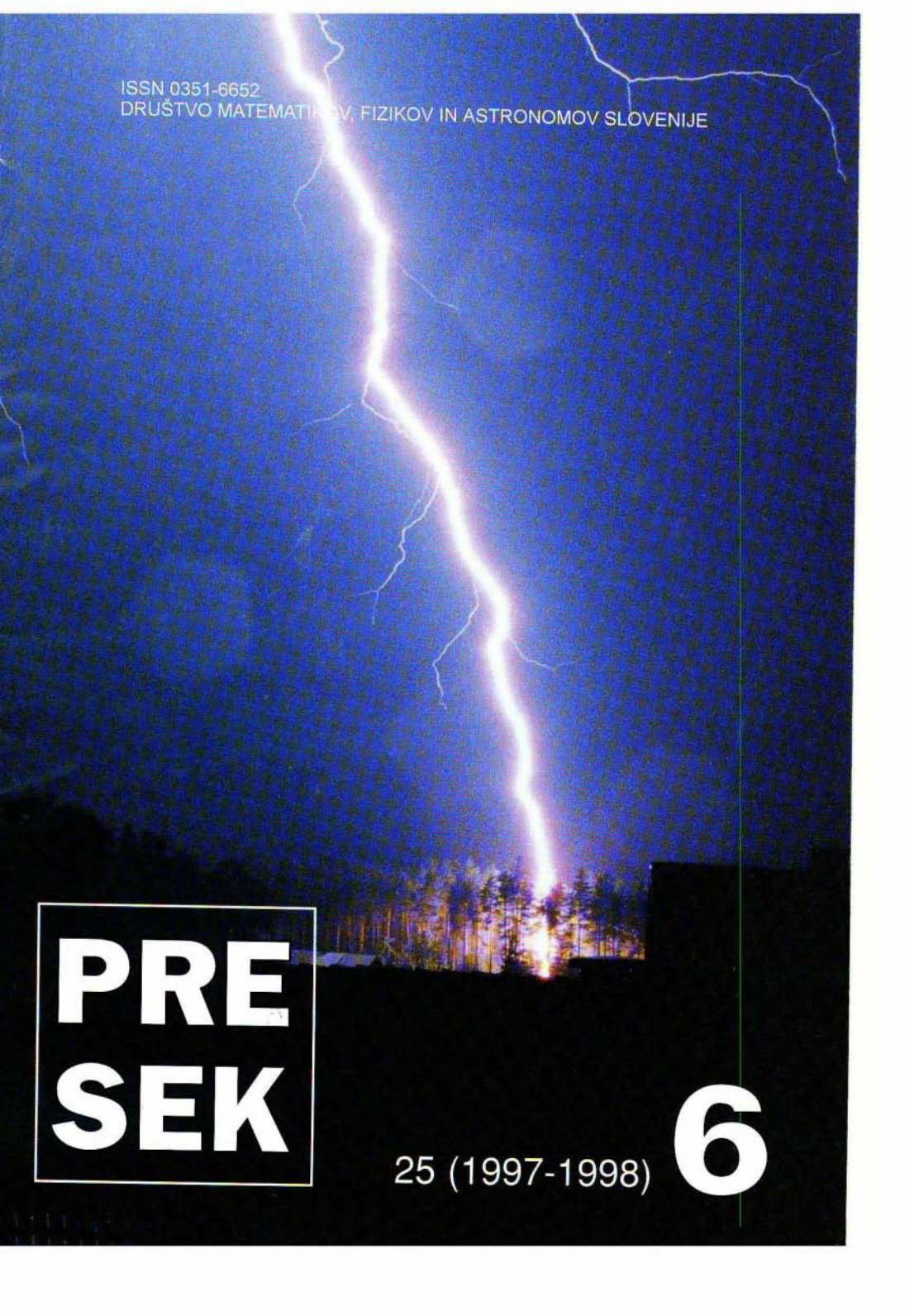




ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

PRE SEK

25 (1997-1998)

6

SADJE

V košari s sadjem je šest banan, štiri pomaranče, tri jabolka, tri hruške in en ananas. Pripraviti želimo obrok, sestavljen iz 6 sadežev, ki bo vseboval tri sadeže ene vrste, dva druge in enega tretje vrste. Na primer, izberemo lahko 3 banane, 2 jabolki in ananas ali pa 3 pomaranče, 2 hruški in 1 banano. Zanima nas, koliko različnih obrokov lahko pripravimo? (Opomba: sadežev enake vrste med seboj ne ločimo; na primer: izmed šestih banan lahko tri banane izberemo na en sam način.) Koliko različnih obrokov pa bi lahko pripravili, če bi moral biti obrok sestavljen iz 7 sadežev, in sicer treh prve in dveh druge in tretje vrste?

*Martin Juvan,
foto Matjaž Vencelj*



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, leto 1997/98, številka 6, strani 321-384

VSEBINA

MATEMATIKA	Rešitve enačbe $x^2 + y^2 = 10^n + y$ v naravnih številih (Ivan Vidav)..... 332-336
	Mala šola topologije - 6. del (Marija Vencelj)..... 348-350
	Še o metodi ploščine (Silva Kmetič)..... 368-370
FIZIKA	Nevihtha - naravni visokonapetostni spektakel (Gregor Bavdek)..... 322-330
	Dvesto let gravitacijske konstante (Janez Strnad) .. 354-359
ASTRONOMIJA	Srce (Marijan Prosén)..... 338-340
	Princeska (Marijan Prosén)..... 364-366
RAČUNALNIŠTVO	Pripomočki za deskanje po Internetu (Aleksander Vesel)..... 342-347
	Praštevilka dežela - s str. 278 (Matija Lokar)..... 360-363
	Ponovno sam sebe - popravek (Iz uredništva)..... 367
NALOGE	Sadje - reš. str. 350 (Martin Juvan)..... II
	Celoštevilka harmonična zaporedja - reš. str. 367 (Ivan Lisac)..... 331
	Enačba s celoštevilsko rešitvijo - reš. str. 363 (Dušan Murovec)..... 331
REŠITVE NALOG	Nihalo na vodilu - s str. 287 (Milan Ambrožič).... 340-341
	Dva satelita - s str. 273 (Majda Lavrič, prir. uredništvo)..... 351
	Lahka številka križanka - s str. 279 (Marija Vencelj) .. 359
	Za iznajdljive - s str. 260 (Dragoljub M. Milošević).... 366
	Krog, krogi - s str. 265 (Martin Juvan)..... 370
	Križanka "Kaj pa vreme?" - s str. 288 (Marko Bokalič)..... 370
	Nekoliko drugačni konstrukcijski nalogi - rešitev 2. naloge s str. 209 (Marija Vencelj)..... 374-375
	Kje obmiruje voz? - s str. 269 (Marija Vencelj) .. 371-373
	Arabski vzorci - s str. 261 (Vilko Domajnko)..... 376-377
ZANIMIVOSTI, RAZVEDRILO	Domača naloga - rešitev s str. 280 (Mojca Lokar) .. 336-337
	Križanka "Ob bližnji 80-letnici našega znanstvenika" - reš. str. 375 (Marko Bokalič)..... 352-353
TEKMOVANJA	19. mednarodno matematično tekmovanje mest (Aleš Vavpetič)..... 378-379
LETNO KAZALO NA OVITKU	 380-384
	Nočna nevihta (foto Gregor Bavdek). Glej tudi prispevek na strani 322..... I, IV
	Hierarhično kazalo "Yahoo!". Slika k članku na strani 342..... III

NEVIHTA – NARAVNI VISOKONAPETOSTNI SPEKTAKEL

Bliža se čas, ko nam bodo soparne in vroče poletne dni popestrili popoldanske nevihte in nalivi. Glasna predstava na nebu gotovo vzbudi zanimanje v slehernem človeku, kaj šele v naravoslovcu.

V prazgodovini je človek strele in bliskanje povezoval z jezo bogov. Stari Grki so sposobnost metanja bliskov pripisovali Zevsu, v kitajski mitologiji pa ima bog groma Lei Tsu celo pomočnico – boginja Tien Mu z dvema zrcalom, ki ju drži v rokah, skrbno usmerja bliske. Tudi predmeti, ki so bili posredno povezani z bliski, npr. zaradi udara strele sprijeti kosi peska, naj bi imeli mistično vrednost. Odvrčali naj bi namreč nadaljnje udare strele; drobcem takšnih kosov, raztopljenim v vodi, pa so azijska plemena pripisovala zdravilno moč.

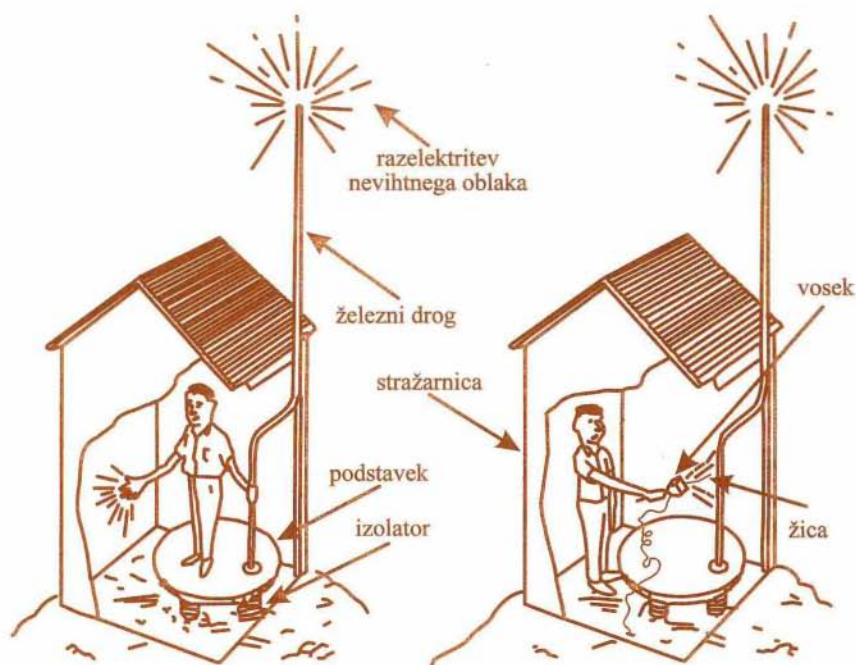
Zgodba o Benjaminu Franklinu

Misel, da ima strela enako naravo kot iskrenje naelektrenih teles, je vznikla šele na začetku 18. stoletja. Preučevanja nevihtnih pojavov se je prvi lotil Benjamin Franklin, danes znan predvsem po izumu strelovoda. Poskusi z leydenskimi steklenicami in ploščatim kondenzatorjem so ga napeljali na misel, da Zemlja in oblaki sestavljajo velik kondenzator. Čeprav se je znanosti aktivno posvečal le sedem let, je Franklin zaslovel s *poskusom z uto* in s *poskusom z zmajem*. Dognal je, da koničasti prevodnik odvaja naboj z naelektrenega telesa hitreje kot topo zaključeni prevodnik.

Da bi ugotovil, ali so nevihtni oblaki naelektreni, si je zamislil poskus z uto: Na vrh hriba je postavil leseno uto, dovolj veliko, da je v njej lahko stal človek na izoliranem podstavku (slika 1). Skozi streho ute je s tega podstavka vodil železni drog, dolg okrog 10 metrov, ki je bil na koncu priostren. Podstavek je med dežjem moral ostati dovolj suh in tako izoliran od okolice, da se je na njem stoječi človek, ki se je z eno roko držal železnega droga, lahko dovolj naelektril. Ob prihodu nevihtnih oblakov nad uto so mu zato iz iztegnjene druge roke švigale iskre.

Če bi se morda komu zdel opisani poskus prenevaren, je ponudil Franklin še varnejšo različico. Človek naj bi stal na tleh ute, v roki pa bi držal voščeno palico, na kateri je pritrjena žica. En konec žice bi bil ozemljen, drugega pa bi približeval železnemu drogu in iz njega izvabljal iskre (slika 1).

Še bolj drzen pa je bil poskus z zmajem (slika 2). Z njim bi se bilo moč še bolj približati nabojnemu oblaku. Navaden otroški zmaj je Franklin navezal na tanko vrv, ki je mokra od dežja seveda prevajala. Na spodnji



Slika 1.

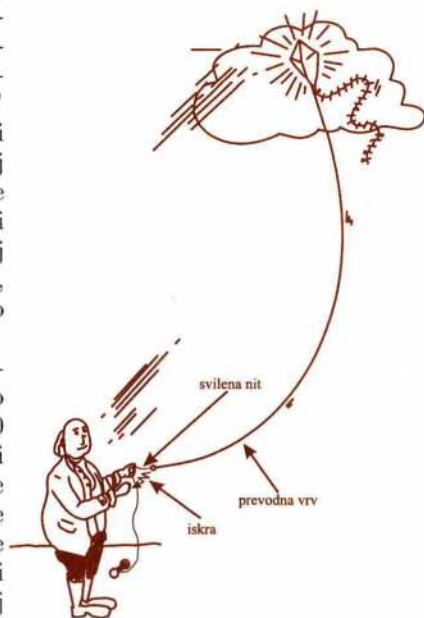
konec te vrvi je privezal nekaj deset centimetrov dolgo svileno nit, ki je dež ne namoči. Tako roka, s katero je pridrževal zmaja, ni prišla v stik z moko vrvjo. Ko se je nad zmajem peljal nevihtni oblak, se je zmaj naelektril. Franklin se je z drugo roko previdno približal koncu mokre vrvi in na roko so mu preskakovale iskre.

Poskusa sta podprla tezo o naboju oblaka ter sorodnost strele s preskokom iskre med električno nabitimi telesi v laboratoriju.

Franklin je spoznal, da sta obe omenjeni pripravi prenašali naboj z oblaka v zemljo, in to na razmeroma varen način. Tako se je rodila ideja strelavoda: na streho visokih zgradb je potrebno pritrditi na zgornjem koncu priostreno kovinsko palico in jo povezati z dobro ozemljenim večjim kosom kovine. Današnji strelavodi se v ničemer ne razlikujejo od Franklinovega. Enega takšnih je Franklin pritrdil tudi na svojo hišo, da je z njim ugotavljal naboj oblakov in spoznal, da so ti v večini primerov negativno nabiti.

Strelovod so hitro sprejeli tudi v Evropi, a so pri razlagi delovanja spregledali nekaj, kar je Franklina zelo motilo. Omenjali so namreč le, da strelovod varno "ujame" strelo ter s tem prepreči škodo, ki bi nastala, če bi strela udarila v kaj drugega, npr. hišo ali drevo. Nihče pa ni omenil, da ima strelovod tudi preventivno vlogo, saj odvaja naboj z oblakov tudi brez preboja (strele), s čimer zmanjšuje možnost, da bi do nastanka strele sploh prišlo.

Lahko bi rekli, da je bil Franklin eden večjih srečnežev, saj je ob vsem igranju z nevihtami leta 1790 umrl naravne smrti. Tudi v Evropi je vzbudil veliko zanimanje za pojave v zvezi z nevihto. Eden prvih, ki se je lotil ponovitve poskusa z uto, je bil ruski fizik Richmann. Žal pa ni imel tolikšne sreče kot Franklin, saj je v kovinski drog njegove ute udarila strela in ga ubila.



Slika 2.

Nastanek nevihtnega oblaka

Satelitski podatki kažejo, da je v vsakem trenutku na Zemlji aktivnih okrog tisoč neviht, večina od njih v majhnih in srednjih geografskih širinah in le redke v polarnih področjih.

Sestavni deli neviht so kumulonimbusi, oblaki, ki nastanejo z močno konvekcijo in ki jih spremljajo sunki vetra ter dež, včasih pa tudi toča ali sneg. Nevihtni oblaki so posledica atmosferske nestabilnosti. Te nastanejo, ko pride hladen zrak v stik s toplim in vlažnim zrakom ter ga izpodrine in dvigne. Nevihte z močnimi vetrovi se tako pojavijo vzdolž hladne fronte, ki pred seboj potiska tople zrak.

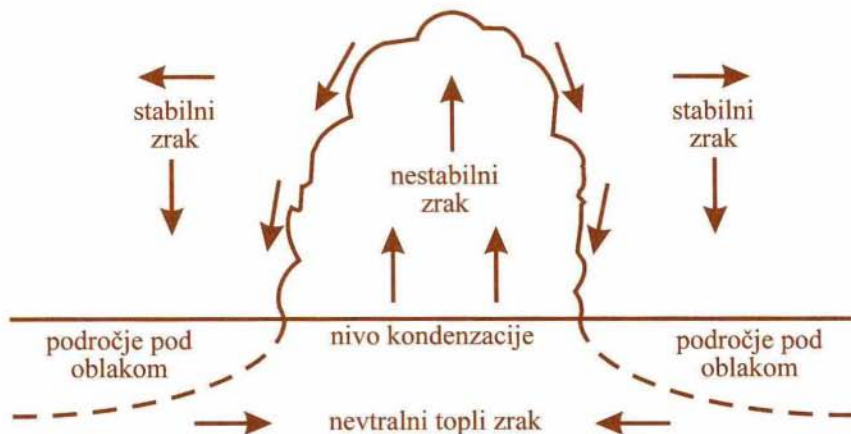
Nevihtni oblaki so kot veliki toplotni stroji, delovna snov v njih pa je vodna para. Oddajajo mehanično delo v obliki vodoravnih in navpičnih vetrov ter električno delo na prostih nabojih, ki povzročajo razelektritve – strele. Poleg tega povzročajo padavine; dež in točo, ki padata z dna, ter sneg, ki pada z vrha oblaka. Prav snežni kristali na vrhu oblaka

nazadnje omogočijo, da se ozračje umiri, in sicer tako, da odbijejo večji del Sončevega sevanja v vesolje, s tem pa onemogočijo nadaljnje segrevanje zemeljskega površja in nastajanje novih oblakov.

Praviloma je koncentracija vodne pare, ki je poleti potrebna za nastanek nevihte, vsaj 7 g pare na kilogram zraka. Pozimi pa so bliske opazili tudi, ko koncentracija pare v zraku ni presegala 4 g na kilogram zraka.

Bliski se redkeje pojavijo v kumulusih, globokih manj kot 3 km, pogostejše pa v večjih, z globino do 20 km. Aktivni nevihtni oblaki vzdolž hladnih front so dolgi od nekaj kilometrov do več sto kilometrov. Temperatura zraka in agregatno stanje vode na dnu in vrhu oblaka ne vplivata bistveno na naelektritev oblaka. Zanimivo je, da ob nastanku oblaka kljub temperaturi nižji od 0°C voda običajno ne zmrzne, ker je zelo čista. Tako ostane podhlajena vse do temperature -40°C , pri kateri šele zmrzne. Povprečna življenjska doba takšnih nevihtnih oblakov je zelo različna – od manj kot ene ure do več dni.

Za naboj oblaka sta pomembna predvsem zadostna količina vodne pare in vertikalna nestabilnost ozračja. Spodnji del ozračja postane nestabilen, če se temperatura zniža za več kot $9,8^{\circ}\text{C}$, ko se dvignemo za en kilometer. Večina energije, ki jo zemeljsko površje prejme od Sonca, segreva spodnje plasti ozračja, kjer se lahko opoldne zrak segreje celo za 1°C v eni sekundi. Gostota toplejših spodnjih slojev postane manjša od višjih, zaradi česar pride do navpičnih vetrov (slika 3). Zračni pritisk z naraščajočo višino pada, zato se dvigajoči zrak razteza in pri tem ohlaja.



Slika 3.

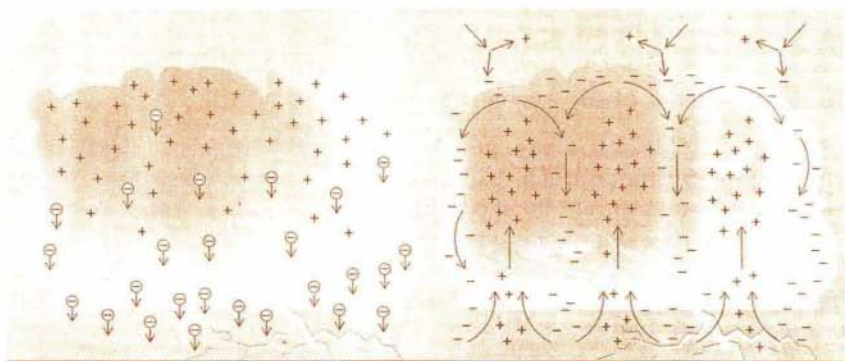
Ko temperatura pade pod rosišče, se na prašnih delcih v zraku pričnejo kondenzirati vodne kapljice, ki tvorijo viden oblak. Od tu naprej rastejo kapljice z nadaljnjo kondenzacijo zelo hitro in kmalu dosežejo velikost $10\text{ }\mu\text{m}$ ter koncentracijo nekaj sto kapljic na kubični centimeter; to pomeni približno 1 do 2 g tekoče vode na kubični meter zraka.

Gostejši suh zrak, ki obkroža oblak, se prične ugrezati zaradi primanjkljaja zraka pri tleh (ta se pod sredino oblaka dviguje zaradi konvekcije). Velikost področja, nad katerim se zrak dviga, meri običajno od 300 do 2000 metrov. Področje, kjer se zrak spušča in obkroža dvigajoči se steber zraka, ima obliko kolobarja in je običajno manjše. Tako nastane znotraj navzgor in zunaj navzdol usmerjeni tok zraka. Na njunem stičišču pride do strižnih sil, ki povzročajo lokalne turbulence, kjer se notranji, z vlago nasičeni zrak, in zunanji hladni zrak premešata. Vлага iz bolj vlažnega zraka pri tem izpari, zaradi česar se mešanica ohladi, to pa povzroči še hitrejšo spuščanje.

Za spodobno nevihto moramo oblake še naelektriti. O tem govorita naslednji hipotezi.

Prva je *padavinska hipoteza*. Večje dežne kaplje, zrna toče in kosmiči snega hitro padejo iz oblaka, medtem ko drobni snežni kristali in fino razpršena voda ostanejo v oblaku. Ob trkih pride do prenosa negativnega naboja z razpršene vode in majhnih kristalov na padajoče kaplje in zrna ledu, pozitivni naboj pa ostane na manjših kristalih, ki se obdržijo v oblaku (slika 4). Na ta način postane zgornji del oblaka pozitivno naelektrjen, spodnji pa negativno. Takšen oblak, s pozitivnim nabojem zgoraj in negativnim spodaj, tvori pozitivni električni dipol.

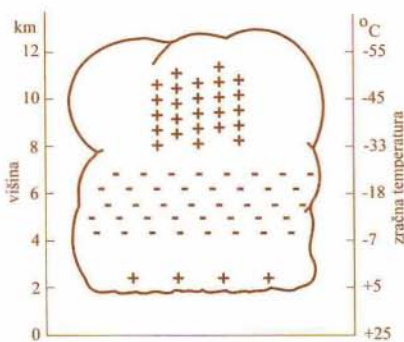
Druga je *konvekcijska hipoteza* in je precej sorodna delovanju Van de Graaffovega generatorja, kjer tekoči trak, na katerega prši naboj s tankih osti, dovaja naboj v notranjost kovinske kroglice. Po konvekcijski hipotezi se oblak "napaja" z nabojem iz dveh ločenih zunanjih virov. Prvi vir so kozmični žarki, ki povzročajo ionizacijo zračnih molekul nad oblakom. Drugi vir pa je močno električno polje nad ostrimi objekti na zemeljski površini, kjer točkovna razelektritev prav tako povzroča ionizacijo zraka. Nastajajo pozitivni ioni, ki jih topel zrak zaradi konvekcije dvigne v oblake, podobno kot gumijasti trak v Van de Graaffovem generatorju (slika 4). V vrhnjem področju oblaka potem ti pozitivni ioni privlačijo negativne, ki so nastali zaradi vpliva kozmičnih žarkov. Negativni ioni vstopijo v oblak ter se hitro oprimejo vodnih kapljic in zrn toče, ki na dnu oblaka tvorijo negativno območje, in zasenčijo pozitivni vrh oblaka.

padavinska
hipotezakonvekcijska
hipoteza

Slika 4.

Z natančnejšimi meritvami so ugotovili, da je osrednje področje oblaka naelektreno negativno, območje nad njim pa pozitivno. Prav na dnu oblaka se nahaja še drugo, manjše področje pozitivnega naboja (slika 5).

Namenimo nekaj besed lastnostim posameznih področij. Osrednje negativno področje je zelo ploščato – visoko je le kak kilometer, medtem ko njegove vodoravne razsežnosti merijo več kilometrov. Nahaja se na višini približno 6 km, kjer je temperatura okrog -15°C . Gornje področje pozitivnega naboja je razpršeno in se lahko razteza tudi do nekaj kilometrov v višino. Spodnje pozitivno nabito področje pa je tako majhno, da je njegovo električno polje večkrat zasenčeno zaradi večjega Zemljinega negativnega naboja.



Slika 5.

Zemlja je proti ozračju negativno nabita z nabojem približno $5 \cdot 10^5$ As. Z nabojem, kakršnega ima Zemlja, bi lahko napolnili približno 10 000 avtomobilskih akumulatorjev. Toliko naboja steče skozi hišno 100 W žarnico v 12 dneh, če je prižgana nepretrgoma. Ta naboj povzroča navzdol proti tlem usmerjeno električno polje z jakostjo okrog

130 V/m. Večina pozitivnega naboja se nahaja v spodnjih delih atmosfere, zaradi česar jakost električnega polja ob lepem vremenu z višino hitro pada. Zgornji del atmosfere ima glede na Zemljo potencial približno 300 kV.

Razelektritev v obliki strele

Kaj se torej z oblakom dogaja potem, ko je nabit? Ko jakost električnega polja na določenem področju okrog oblaka ali znotraj njega preseže prebojno jakost zraka, pride do električnega preboja, ki ga vidimo kot udar strele. V trenutku se pretoči naboj nekaj 10 As. Toliko naboja se pretoči skozi 100 W hišno žarnico v pol minute, to je v 500 000-krat daljšem času. Trenutni tok pri takšnem preboju meri običajno okrog 20 000 A, včasih pa preseže tudi 200 000 A. (Po hišni napeljavi tečejo tokovi do 20 A.) Debelina kanala strele je približno 5 cm in vsebuje večinoma plazmo kisikovih in dušikovih ionov pri temperaturi okrog 25 000°C. Tlak v kanalu doseže nekaj deset barov. Navedene vrednosti za tok, temperaturo in tlak so maksimalne in so dosežene v nekaj mikrosekundah, potem pa zaradi padca toka padejo na polovične vrednosti v približno 50 μ s. Napetost pred prebojem doseže nekaj 100 milijonov voltov. Elektrostatična energija se ob udaru strele spremeni v svetlobo, infrardeče sevanje (ki poskrbi, da se zrak v neposredni bližini kanala strele močno ogreje), ostalo elektromagnetno energijo (ki povzroča radijske motnje) in akustično energijo (grmenje). Zvok se v zraku širi s hitrostjo okrog 340 m/s – ta podatek nam pomaga oceniti oddaljenost strele. Izračunamo jo tako, da izmerimo čas, ki preteče od takrat, ko smo zagledali blisk, do takrat, ko zaslišimo grmenje, in ga pomnožimo s 340 m/s.

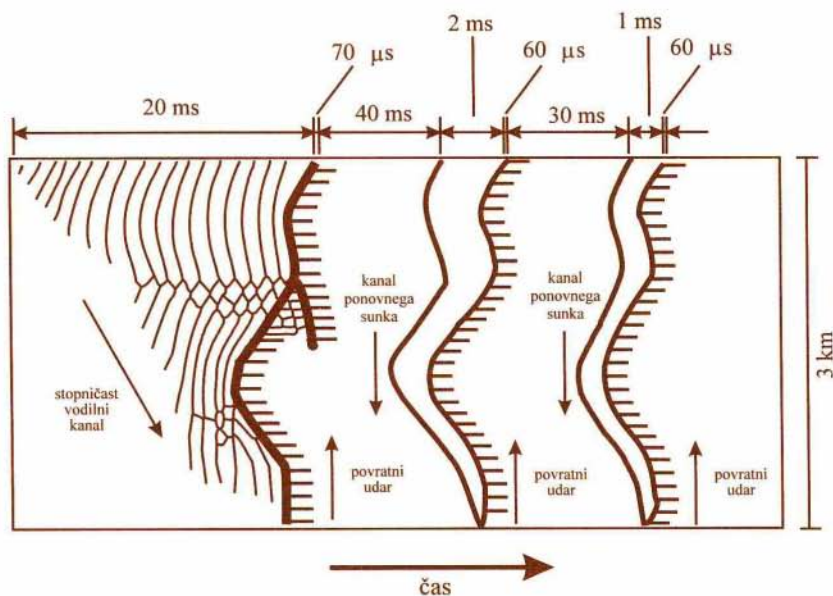
Večina razelektritev v obliki strel se zgodi znotraj oblaka ali med oblaki, manj pa med oblaki in zemljo. Zdi se, da je za slednje odgovorno prav majhno pozitivno naelektreno območje pod velikim negativno nabitim območjem v sredini oblaka.

Oglejmo si časovni potek razelektritve *oblak–zemlja* (slika 6). Če bi bilo moč predvideti, kdaj bo strela udarila, bi časovni potek lahko posneli. Zaslonko fotoaparata bi odprli kakšnih 50 ms pred udarom strele in fotoaparat zelo hitro zavrteli okrog navpične osi.

Na dnu oblaka se najprej pojavi utripajoč stopničast vodilni kanal, usmerjen proti zemlji, ki se vsakih 50 μ s obnovi in podaljša za približno 50 m ter se približuje zemlji. Ta kanal ima premer od 1 do 2 cm in se v času svojega nastanka večkrat razcepi. Skozenj steče tok okrog 100 A in se v približno 20 ms pretoči približno 2 As naboja. Ko se kanal približuje zemlji, se na njej influencira naboj nasprotnega predznaka in električno

polje se povečuje. Ko je vodilni kanal le še kakih 50 m oddaljen od tal, se z zemlje pojavi nov, navzgor usmerjen vodilni kanal. Ko se kanala dotakneta, je oblak kratko sklenjen z zemljo in pride do povratnega udara. Povratni udar pobere večino naboja, ki se je nakopičil v zraku okoli vodilnega kanala. Tedaj med oblakom in zemljo steče maksimalni tok, ki strelo najbolj osvetli. Kanal se osvetli od spodaj navzgor s približno tretjino svetlobne hitrosti ($1 \cdot 10^8$ m/s). To je glavna razelektritev.

Po glavni razelektritvi se v razmaku okrog 40 ms pojavi še več sunkov (ponavadi trije do štirje), ki skupaj trajajo približno 0,2 s. Proti zemlji se po prej nastalem glavnem kanalu poženejo z dvema tretjinama svetlobne hitrosti ($2 \cdot 10^8$ m/s). Kanal se pri teh sunkih ne cepi, v zraku pa odloži kako As več naboja kot prvotni vodilni kanal. Vsakemu posameznemu sunku sledi povratni udar. Na skici so označene približne časovne in prostorske razsežnosti.



Slika 6.

Približno 20% razelektritev oblak–zemlja udari v zemljo na več mestih. To se zgodi zato, ker se kasnejši sunki pojavijo šele po več kot 100 ms, ko je prvotni vodilni kanal že zabrisan, in se zato pojavijo novi.

Podobno, le v obratni smeri, poteka razelektritev *zemlja-oblak*. Razlika je le v tem, da se, ko vodilni kanal doseže spodnje plasti oblaka, ne pojavi povratni udar, ampak se poveča tok in z njim intenziteta svetlobe kanala. Omeniti velja, da so razelektritve v smeri z zemlje proti oblakom bolj pogoste v bližini visokih koničastih zgradb.

In kako ločimo med razelektritvama *oblak-zemlja* in *zemlja-oblak*? Preprosto – pri prvi se strela kot iglice na smreki razrašča navzdol, pri drugi pa navzgor.

Zaščita pred udarom strele

Kadar strela zadene človeka, povzroči opekline in poškodbe tkiva, ne nujno pa tudi smrti. Težji zapleti so prenehanje dihanja in trepetanje ali celo ustavitve srca.

Daleč najboljša obramba pred strelo je varno zavetišče. To je lahko hiša ali notranjost kakršnegakoli kovinskega ogrodja, npr. avta, ki deluje kot Faradayeva kletka. Če nas nevihta ujame na prostem, se postavimo v položaj, ko smo čim nižji in se hkrati s čim manjšo površino dotikamo tal. Prav tako bo verjetnost za udar strele precej manjša, če ne bomo mokri.

Novejše raziskovanje

Pri raziskovanju neviht igrajo dandanes pomembno vlogo simulacije z visokonapetostnimi generatorji v laboratorijih in postopki, s katerimi je mogoče umetno izzvati strela. Eden takih postopkov je izstreljevanje raket, ki za seboj puščajo prevodno sled ali je nanje privezana tanka in lahka žica. Drug način pa temelji na ionizaciji zračne poti od zemlje do oblaka z laserjem (točneje s kombinacijo dveh laserjev: enega, ki deluje v ultravijoličnem, in drugega, ki deluje v vidnem delu spektra).

Potek naelektritve oblaka danes še ni zadovoljivo pojasnjen. Vedenje zračnih mas z različnimi temperaturami je kaotično, zato je spremljanje njihovega gibanja, ob dodatni prisotnosti zračne vlage in električnih nabojev, vse prej kot enostavno. Ko bomo za vse to imeli modele, ki bodo uspešno pojasnjevali zapleteno dogajanje, pa verjetno ne bo več daleč čas, ko bomo lahko energijo strele tudi koristno izrabili.

Za zdaj pa si privoščimo samo ogled veličastne brezplačne predstave, ki jo uprizori narava. Pri tem pa naj nas njena lepota ne zavede toliko, da bi pozabili na njeno moč, ki nas lahko tudi ubije.

Gregor Bavdek

CELOŠTEVILSKA HARMONIČNA ZAPOREDJA

Bodita x in y pozitivni realni števili. Njuna *harmonična sredina* je število

$$\frac{2xy}{x+y}.$$

Zaporedje pozitivnih števil

$$h_0, h_1, h_2, \dots$$

je *harmonično*, če je vsak člen zaporedja harmonična sredina sosednjih členov.

1. Dokaži, da je zaporedje

$$h_0, h_1, h_2, \dots$$

harmonično natanko takrat, ko je zaporedje

$$\frac{1}{h_0}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \dots$$

aritmetično.

2. Poišči vsa celoštevilsko harmonična zaporedja.

Ivan Lisac

ENAČBA S CELOŠTEVILSKO REŠITVIJO

Pred nami je naslednja enačba

$$x^4 + \dots x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots = 0.$$

Dva igralca vpisujeta izmenično cela števila na mesta, označena s pikami. Prvi poskuša doseči, da bi bila končna enačba brez celih rešitev, drugi pa, da bi imela vsaj eno celoštevilsko rešitev. Kateri od igralcev zmaga, če oba igrata po optimalni strategiji?

Dušan Murovec

REŠITVE ENAČBE $x^2 + y^2 = 10^n x + y$ V NARAVNIH ŠTEVILIH

V nekem časopisu za razvedrilo je bilo pred nedavnim postavljeno tole vprašanje: Kako (se pravi, s kakšnimi računskimi operacijami) dobimo iz števil 88 in 33 število 8833? Prav preprosto, bi rekli: številki 88 in 33 damo skupaj, pa je že pred nami 8833. Vendar ta odgovor ne velja. Vsota in produkt sta namreč neodvisna, v katerem sestavu računamo, v desetiškem, dvojiškem ali kakem drugem. Če pa damo skupaj številki, ki predstavljata števili x in y , rezultat ni odvisen samo od x in y temveč tudi od sestava, v katerem sta zapisana x in y . Zato zlepljanje števil ni prava računska operacija.

Odgovor na zgornje vprašanje se je glasil takole: 8833 dobimo, če 88 in 33 kvadriramo in kvadrata seštejemo. Res je

$$88^2 + 33^2 = 7744 + 1089 = 8833.$$

Podobno lastnost imata števili 10 in 1. Tukaj je $10^2 + 1^2 = 101$, vsoto 101 pa dobimo, če staknemo skupaj 10 in 1.

Ali so še drugi taki pari?

Iščemo torej pare naravnih števil x in y , ki se odlikujejo s tole lastnostjo:

(S) Vsota $x^2 + y^2$ je enaka številu, ki ga dobimo, če damo skupaj številki, ki v desetiškem sestavu predstavljata x in y .

Pa vzemimo poljubni naravni števili x in y , zapisani v desetiškem sestavu. Katero število dobimo, če staknemo skupaj številki za x in y (in sicer x na levi, y na desni)? Imenujmo to število z . Denimo, da je y n -mestno število ($n \geq 1$). Razlika $z - y$, zapisana v desetiškem sestavu, ima očitno na koncu n ničel, njene začetne števke pa določajo x . Potemtakem je ta razlika enaka $10^n x$, iskano število z pa je $10^n x + y$. Torej:

Če damo skupaj številki, ki predstavljata naravni števili x in y v desetiškem sestavu, in ima y n mest, dobimo število $10^n x + y$.

Naravni števili x in y , ki sestavljata par z lastnostjo (S), zadoščata potemtakem enačbi

$$x^2 + y^2 = 10^n x + y, \quad (1)$$

se pravi enačbi iz naslova. Rešitev v naravnih številih x , y , n pa določa par z lastnostjo (S) le pri pogoju, da je n število mest, ki jih ima y , zapisan v desetiškem sestavu.

Pri izbranem n pomeni enačba (1) v ravnini, opremljeni s pravokotnim koordinatnim sistemom, krožnico, ki gre skozi izhodišče (točka s koordinatama $x = 0$, $y = 0$ zadošča enačbi). Pomnožimo to enačbo s 4 in jo nato zapišimo v teje ekvivalentni obliki

$$(2x - 10^n)^2 + (2y - 1)^2 = 10^{2n} + 1. \quad (1^*)$$

Iz nje razberemo, da ima središče krožnice (1) koordinati $p = \frac{1}{2} \cdot 10^n$, $q = \frac{1}{2}$. Postavimo

$$X = 2x - 10^n, \quad Y = 2y - 1, \quad (2)$$

pa je pred nami enačba

$$X^2 + Y^2 = 10^{2n} + 1. \quad (3)$$

Če sta x in y naravni števili, sta X in Y celi števili.

Pri danem n je desna stran $10^{2n} + 1$ znano število, in sicer liho. Vse celoštevilске rešitve enačbe (3) najdemo tako, da zapišemo $10^{2n} + 1$ na vse mogoče načine kot vsoto dveh kvadratov celih števil. Naj bo npr.

$$10^{2n} + 1 = A^2 + B^2,$$

kjer sta A in B naravni števili. Eno izmed njiju je sodo, drugo liho. Smemo vzeti, da je A sodo in B liho. Ta razcep nam da 8 rešitev enačbe (3) v celih številih, namreč

$$X = \pm A, \quad Y = \pm B \quad \text{in} \quad X = \pm B, \quad Y = \pm A,$$

kjer lahko vzamemo povsod poljuben znak.

Iz zapisa (2) vidimo, da je X sod in Y lih. Torej moramo postaviti

$$2x - 10^n = \pm A \quad \text{in} \quad 2y - 1 = \pm B.$$

Od tod izračunamo

$$x = \frac{1}{2}(10^n \pm A), \quad y = \frac{1}{2}(1 \pm B). \quad (4)$$

Ker je $A \leq 10^n$, je x naravno število, katerikoli znak vzamemo pri A . Zaradi $B \geq 1$, pa je y naravno število samo pri znaku $+$ pri B . Torej nam da vsak razcep števila $10^{2n} + 1$ na vsoto dveh kvadratov dve rešitvi enačbe (1) v naravnih številih. Dobljeni par x, y pa ima zahtevano lastnost le v primeru, kadar je y n -mestno število.

Ker je $10^{2n} + 1 = (10^n)^2 + 1^2$, lahko vzamemo $A = 10^n$, $B = 1$ (trivialni razcep). Ustrezna rešitev je $x = 10^n$, $y = 1$ (pri trivialnem razcepu je x naravno število (tj. pozitivno celo število) samo pri znaku $+$ na desni). Ker je $y = 1$ enomestno število, ima par $10^n, 1$ lastnost (S) le pri $n = 1$, to je par $x = 10$, $y = 1$, ki smo ga že navedli.

Če želimo dobiti druge pare, moramo najti kak netrivialni razcep števila $10^{2n} + 1$ na vsoto dveh kvadratov. Kdaj tak razcep obstaja? V članku *Kako ugotovimo, da je naravno število sestavljeno, preden ga razstavimo* (Presek, 25 (1997/98), str. 130–136) je bilo dokazano, da je naravno število sestavljeno, če se da vsaj na dva načina zapisati kot vsota dveh kvadratov. Brez dokaza povejmo, da velja v našem primeru tudi obratna trditev: Če $10^{2n} + 1$ ni praštevilo, se da vsaj na dva načina izraziti kot vsota dveh kvadratov. Vsak razcep na dva faktorja določa torej poleg trivialnega tudi netrivialni razcep na vsoto dveh kvadratov.

Zgledi.

Pri $n = 1$ je število $10^2 + 1 = 101$ praštevilo in obstaja zato samo trivialni razcep na vsoto dveh kvadratov.

Pri $n = 2$ je $10^4 + 1 = 73 \cdot 137$, se pravi sestavljeno število. Pripadajoči netrivialni razcep v vsoto dveh kvadratov se glasi $10^4 + 1 = 76^2 + 65^2$, torej $A = 76$, $B = 65$. Po formuli (4) dobimo para $x = 88$, $y = 33$ in $x = 12$, $y = 33$.

Pri $n = 3$ imamo razcep $10^6 + 1 = 101 \cdot 9901$. Oba faktorja na desni sta praštevili. Pripadajoča vsota kvadratov se glasi $10^6 + 1 = 980^2 + 199^2$ in določa para $x = 990$, $y = 100$ ter $x = 10$, $y = 100$.

Nekaj nadaljnjih primerov kaže razpredelnica:

$n = 1$	$x = 10, y = 1:$	$10^2 + 1^2 = 101$
$n = 2$	$x = 12, y = 33:$	$12^2 + 33^2 = 1233$
	$x = 88, y = 33:$	$88^2 + 33^2 = 8833$
$n = 3$	$x = 10, y = 100:$	$10^2 + 100^2 = 10100$
	$x = 990, y = 100:$	$990^2 + 100^2 = 990100$
$n = 4$	$x = 588, y = 2353:$	$588^2 + 2353^2 = 5882353$
	$x = 9412, y = 2353:$	$9412^2 + 2353^2 = 94122353$
$n = 6$	$x = 116788, y = 321168:$	$116788^2 + 321168^2 = 117688321168$
	$x = 883212, y = 321168:$	$883212^2 + 321168^2 = 883213321168$
	$x = 123288, y = 328768:$	$123288^2 + 328768^2 = 123288328768$
	$x = 876712, y = 328768:$	$876712^2 + 328768^2 = 876712328768$

Kadar je n deljiv s kakim lihim faktorjem, je $10^{2n} + 1$ vselej sestavljeno število. Naj bo npr. $n = kr$, kjer sta k in r naravni števili in r lih. Iz formule

$$a^r + b^r = (a + b)(a^{r-1} - a^{r-2}b + \dots + b^{r-1}),$$

ki velja za vsak lih eksponent r , dobimo, če vstavimo $a = 10^{2k}$ in $b = 1$, razcep

$$10^{2kr} + 1 = (10^{2k} + 1)((10^{2k})^{r-1} - (10^{2k})^{r-2} + \dots + 1).$$

Torej ima $10^{2n} + 1 = 10^{2kr} + 1$ faktor $10^{2k} + 1$. Posebej, kadar je n lih, lahko vzamemo $r = n$, $k = 1$. Število $10^{2n} + 1$ je v tem primeru deljivo s 101. Enačba (1) ima zato pri lihem n poleg rešitve $x = 10^n$, $y = 1$ vsaj še dve nadaljnji rešitvi v naravnih številih. Toda če je $n > 3$, ni pri faktorju 101 nikoli več izpolnjen dodatni pogoj, da je pripadajoči y n -mestno število.

Ugotovili smo, da premore enačba (1) za neskončno mnogo n rešitve x, y v naravnih številih. S tem seveda ni rečeno, da obstaja neskončno parov z lastnostjo (S). Vsak bralec pa se lahko sam prepriča, da sestavljata števili

$$x = \frac{64 \cdot 10^n + 24}{73} \quad \text{in} \quad y = \frac{24 \cdot 10^n + 9}{73}$$

par z lastnostjo (S), če je eksponent n oblike $8k + 2$, kjer je k poljubno nenegativno celo število. Torej je takih parov neskončno.

Kaj lahko povemo o paru x, y , ki je rešitev enačbe (1) pri nekem n , toda y ni n -mestno število? Iz (1*) razberemo, da je $2y - 1 < 10^n$, torej $y \leq \frac{1}{2} \cdot 10^n$. Zato ima y v desetiškem sestavu kvečjemu n mest. Je torej k -mestno število, pri čemer je $k \leq n$. Kadar je $k < n$, dobimo vsoto kvadratov $x^2 + y^2$ tako, da med številki za x in y vrinemo $n - k$ ničel.

V zgledu, navedenem na začetku, imata števili 88 in 33 obe števki enaki. Če postavimo dodatni pogoj, da morajo biti v desetiškem zapisu vse številke števila x med seboj enake in da mora isto veljati tudi za y , pa je $x = 88$ in $y = 33$ edini par s to lastnostjo.

Ivan Vidav

DOMAČA NALOGA – Rešitev s str. 280

- a) Posvetimo se prvi ključavnici. Kombinacijo lahko sestavlja 5, 6 ali 7 znakov.

Če jo sestavlja 5 znakov, morajo biti to same številke. Takih možnosti je 10^5 .

Če je sestavljena iz šestih znakov, jo lahko sestavlja 6 števk (10^6 možnosti) ali pa 5 števk in ena črka. Ker lahko stoji katerakoli od petih črk na kateremkoli od šestih mest, je drugih možnosti $6 \cdot 5 \cdot 10^5$.

Če je kombinacija sestavljena iz sedmih znakov, so to lahko ali same številke ali 6 števk in ena črka ali pa 5 števk in dve črki.

Tako imamo za prvo ključavnico

$$10^5 + 10^6 + 6 \cdot 5 \cdot 10^5 + 10^7 + 7 \cdot 5 \cdot 10^6 + 21 \cdot 5^2 \cdot 10^5$$

možnosti.

Za drugo ključavnico imamo eno možnost manj kot za prvo, saj ne sme imeti enake kombinacije kot prva. Za vsako naslednjo imamo še po eno možnost manj kot za prejšnjo. Torej je možnih

$$7 \cdot (10^5 + 10^6 + 6 \cdot 5 \cdot 10^5 + 10^7 + 7 \cdot 5 \cdot 10^6 + 21 \cdot 5^2 \cdot 10^5) - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6$$

kombinacij. To je 711199979 kombinacij.

- b) Če tipka Scully eno kombinacijo 5 sekund, bi potrebovala za odpiranje treh ključavnic približno 48,33 let. Seveda le, če bi res tipkala, ne pa skrbela za svoje nohte. Mulder, ki tipka eno kombinacijo 4 sekunde, bi preostale štiri ključavnice odklepal kar 51,55 let.

- c) Seveda bi glavna igralca nadaljevanke prekršila pogodbo, četudi bi tipkala bistveno hitreje. Za toliko kombinacij bi ob predpostavki, da za vsako potrebujemo eno samo sekundo, potrebovali 22,55 let.
- d) Pravzaprav to, da je ena kombinacija znana, agentoma ne pomaga kaj dosti. Pri vsaki ključavnici bi pač kot prvo kombinacijo vtipkala Napierovo konstanto, dokler ne bi naletela na ključavnico, ki jo ta kombinacija odpira. Še vedno pa bi ostalo

$$6 \cdot (10^5 + 10^6 + 6 \cdot 5 \cdot 10^5 + 10^7 + 7 \cdot 5 \cdot 10^6 + 21 \cdot 5^2 \cdot 10^5) - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 + 1$$

kombinacij, kar je približno 610 milijonov. Če bi agenta, ki drug drugemu ne zaupata prav posebno, tipkala skupaj (eden bi le narekoval in preverjal zapisano) in bi za vsako kombinacijo potrebovala 5 sekund, bi odpirala ključavnice kar 96,65 let!

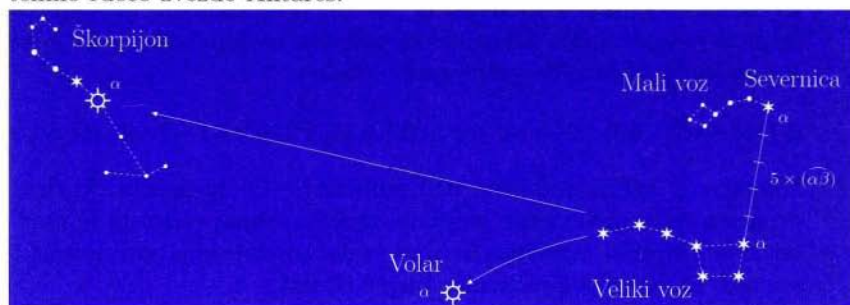
- e) Hm, na to vprašanje pa je malce težje odgovoriti. Seveda lahko enostavno privzamemo, da povečevanje procesorske moči zanemarimo in da vsaka operacija računalnika pomeni preizkušeno kombinacijo. Ob takih predpostavkah so vse ključavnice odklenjene prej kot v 6 minutah.

Toda v Dosjehih X se zadev nikoli ne lotevajo tako preprosto. Zato premislimo! Ker ne vemo, koliko časa bi Fox potreboval, da bi se na pozabljeni računalnik sploh spomnil, označimo s t_0 čas, ko agenta kombinacije vtipkavata ročno. Ker računalnik sploh ni lahek, bi potreboval Fox še t_1 časa, da bi ga privlekel v rudnik. Scully bi s spraševanjem, ali je to res potrebno in zakaj in če ni ona dovolj dobra že brez računalnika, prispevala še t_2 časa. No, potem ko zanemarimo dejstvo, da v jašku ni ustrezne električne vtičnice, da se zato Mulder odpelje do oddaljene vasi po kabel, s katerim napelje elektriko iz bližnje kantine (pri tem strga in umaže svoj slavni plašč), lahko nastavimo ustrezne enačbe. Pri tem ugotovimo, da sploh ne vemo, kakšna je zveza med številom operacij računalnika in številom kombinacij ter kako se natančno spreminja procesorska moč računalnika. Zato dobimo na koncu strašansko zapleteno enačbo. V njej upoštevamo še to, da se začne DeeperBlue po z_1 sekundah kujati, češ da se s tako enostavnimi problemi ne bo ukvarjal. Iz protesta začne sam s seboj igrati šah in porabi za to p_1 svoje procesorske moči.

No, po zapletenem računu pridemo do odgovora, ki je 42. 42 česa? To pa je že drugo vprašanje.

SRCE

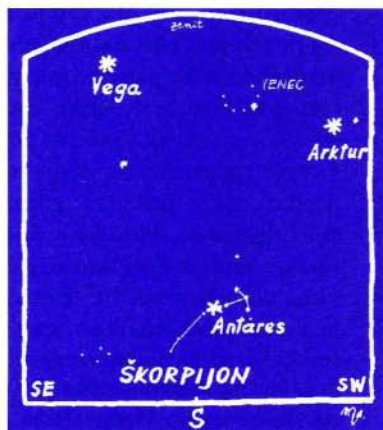
Ko se pomlad prevesi v poletje, se pri nas nad južni del obzorja v večernih urah najvišje povzpne značilno ozvezdje *Škorpijan* s svojo najsvetlejšo temno rdečo zvezdo *Antares*.



Slika 1. Takole po Velikem vozu izsledimo zvezdo Antares – Srce Škorpijona (α). Omenimo, da je Antares ena od redkih zvezd, ki so ji določili zorni kot ($0,04''$) in nato premer (800 premerov Sonca) s pomočjo Luninega zakritja. Luna na svoji navidezni poti stalno zakriva (okultira) zvezde. Astronomi so opazili, da svetloba zakritih zvezd ne izgine v trenutku, kar pomeni, da so zvezde telesa končnih razsežnosti in ne točkasta svetila. To, da Luna zakrije zvezde, pa je tudi eden od osnovnih dokazov, da so zvezde od Zemlje bolj oddaljene kot Luna.

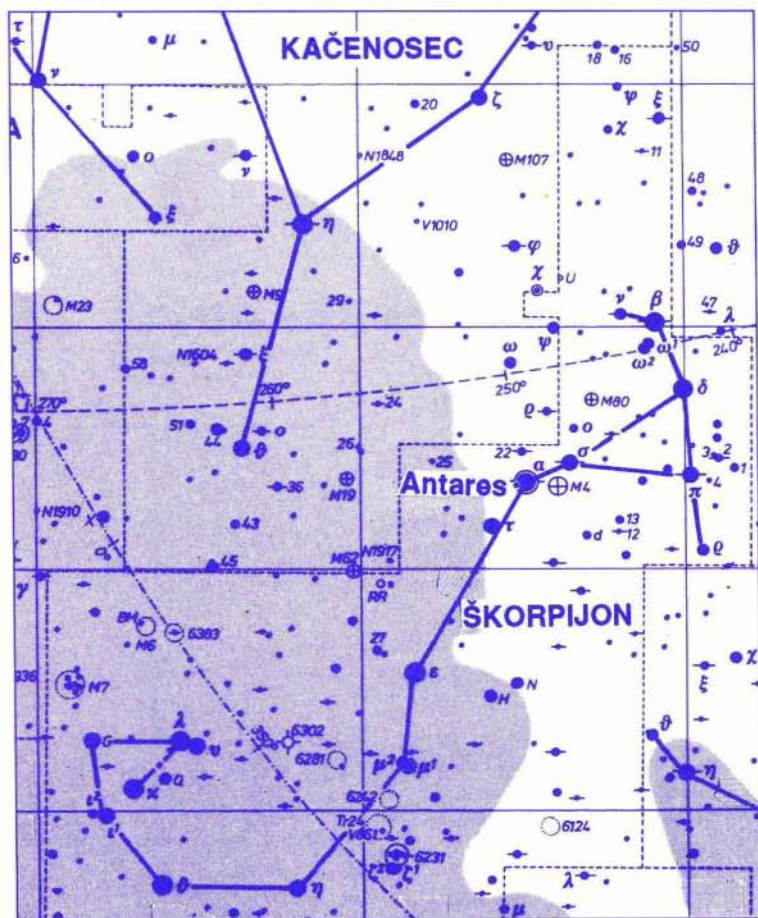
Ozvezdje Škorpijan tesno povezujejo z ozvezdjem Orion. Nikoli nista istočasno na nebu. Škorpijan je tipično poletno ozvezdje, Orion pa zimsko. Po starogrški zgodbi je škorpijan nekoč pičil Oriona v peto in veliki lovec je umrl. Po smrti je bil Orion povzdignjen kot ozvezdje na nebo, prav tako pa tudi škorpijan. Da ne bi Škorpijan ponovno pičil Oriona, ali pa da se ne bi Orion mogel maščevati nad živalco, ki ga je pogubila, so ju postavili tako zelo daleč narazen na nebo, da se ne moreta nikdar videti, kaj šele drug drugemu približati.

Arabci so Škorpijonu rekli Al'Akrab, Antaresu pa Kalb Al'Akrab (Kalbalakrab), kar pomeni *Srce Škorpijona*, saj zvezda



Slika 2. Ozvezdje Škorpijan je pri nas vidno zvečer od junija do avgusta nizko na južnem delu neba. To skico zvezdnega neba uporabite v praksi. Obrnete se proti jugu in jo dvignete predse. Nato s preslikavo skice na nebo poiščete ozvezdja oziroma zvezde.

zares leži v osrčju ozvezdja. Stari narodi so Škorpiona na splošno prikazovali kot krutega ubijalca, ki je varoval nebesna vrata, skozi katera je lahko zašlo le Sonce. S svojim strupenim repom bi pičil vsakega, ki bi se pojavil v bližini varovanega nebesnega predela. Vsi so se ga bali, razen Kačenosca, ki so ga na starih zvezdnih kartah prikazovali celo tako, da v rokah drži škorpiona in ne kače, kot ga prikazujejo danes. Seveda Kačenosec ni nihče drug kot sam bog zdravilstva Eskulap, ki je poleg zdravljenja bolnih znal celo oživiti mrtve.



Slika 3. Nebesni objekti, ki jih z daljnogledom lahko opazujete v ozvezdju Škorpion. Pomagajte si še s kakim astronomskim učbenikom ali priročnikom, računalniškim astronomskim programom ali s podatki na Internetu.

Vzorec zvezd Škorpionovega repa spominja na trnek in narodi južnega Pacifika ga poznajo kot Manijev trnek. Mani, legendarni polinezijski junak, je nekoč ukradel najljubši trnek svojih bratov. Po nesreči se mu je zataknil za dno oceana. Potopil se je, da bi ga poskušal sneti. Vlekel je in se trudil, dokler ga ni končno premaknil. Ko pa ga je privlekel navzgor, je ugotovil, da je ujel otok, poraščen s travo, drevjem, in da so na njem hribčki in celo ljudje, ki so opravljali vsakodnevna opravila. Ponosen na svoj izredni ulov, je izvlekel svoj trnek in ga zagnal visoko na nebo, kjer se je ujel in sedaj oblikuje ozvezdje Trnek. Ujetemu otoku rečejo domorodci Manijeva riba, nam pa je znan kot Nova Zelandija.

Predlagam, da v temni noči izsledite in občudujete ozvezdje Škorpion in v njem njegovo Srce – rdečo zvezdo Antares. Nato vzemite daljnogled in v tem ozvezdju poiščite še druge nebesne objekte (zvezdne kopice in meglice), jih natančno opazujte, kakšnega od njih pa poskusite tudi narisati.

Marijan Prosen

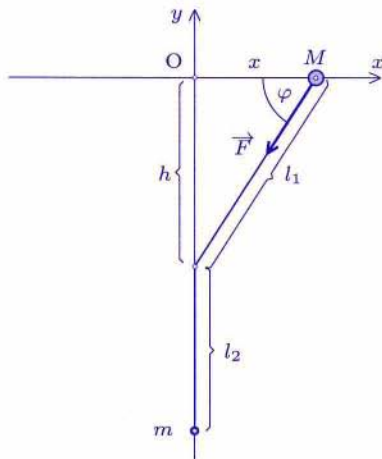
NIHALO NA VODILU – Rešitev s str. 287

Izberimo koordinatni sistem za nihalo in najprej poiščimo, kolikšna sila deluje na prvo kroglico (slika 1). Označimo trenutni odmik prve kroglice od ravnovesne lege z x . Na kroglico deluje poleg vodila še vrstica s silo $\vec{F}$. Velikost te sile je pri majhnem razmerju mas $\frac{m}{M}$ približno enaka teži druge kroglice mg . Vodilo dopušča gibanje prve kroglice samo v vodoravni smeri, zato upoštevamo le komponento sile vrvice v tej smeri: $F_x = -F \cos \varphi$, kjer je φ kot med vodilom in vrstico.

Za prvo kroglico je po Newtonovem zakonu:

$$Ma = -F \cos \varphi = -mg \cos \varphi,$$

kjer je a pospešek. Upoštevajmo izraz za kotno funkcijo $\cos \varphi = \frac{x}{l_1} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$. Dolžino l_1 poševnega dela vrvice smo dobili s Pitagorovim



Slika 1. Koordinatni sistem nihala.

izrekom. Tedaj je pospešek

$$a = -\frac{mgx}{M\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Pri majhnem skrajnem odmiku (amplitudi) x_0 so majhni vsi odmiki x , zato jih zanemarimo pod korenem v zgornjem izrazu. Pospešek je tedaj enak:

$$a = -\frac{mgx}{Mh}.$$

Pospešek je premo sorazmeren z odklikom in kaže proti ravnovesni legi. To velja za harmonično nihanje s frekvenco $\omega = \sqrt{\frac{mg}{Mh}}$. Ker je v času 0 odklik največji in enak x_0 , pride v poštev enačba za odklik: $x = x_0 \cos \omega t$.

Poiščimo še enačbo gibanja druge kroglice. Naj bo dolžina vrvice l . Poševni del vrvice ima trenutno dolžino l_1 , navpični del pa l_2 (slika 1). Pri tem velja $l = l_1 + l_2$. Koordinata y druge kroglice je enaka $y = -(h + l_2) = -(h + l - l_1) = -(h + l - \sqrt{h^2 + x^2})$. Če spet upoštevamo, da je x majhen v primerjavi s h , dobimo približen izraz za koren $\sqrt{h^2 + x^2} \approx h + \frac{x^2}{2h}$. Bralec se lahko prepriča o tem s kvadriranjem desne strani ocene. Dobil bo tri člene, od katerih lahko enega zanemari. Nadaljujmo: $y = -(h + l - (h + \frac{x^2}{2h})) = -l + \frac{x^2}{2h}$. Vstavimo časovno odvisnost koordinate prve kroglice $x = x_0 \cos \omega t$ in upoštevajmo zvezo $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t)$, pa smo pri koncu:

$$y = -l + \frac{x_0^2 \cos^2 \omega t}{2h}$$

$$y = (-l + \frac{x_0^2}{4h}) + \frac{x_0^2}{4h} \cos 2\omega t.$$

Druga kroglica res niha harmonično z dvakrat večjo frekvenco kot prva. Amplituda tega nihanja je $\frac{x_0^2}{4h}$, srednja lega pa je $-l + \frac{x_0^2}{4h}$.

Če bi amplituda nihanja prve kroglice x_0 ne bila veliko manjša od h , bi nihanje ne bilo harmonično. Še veliko bolj zapletena bi bila obravnava gibanja kroglic, če bi bila masa m primerljiva z maso M . V nasprotnem primeru, ko je višina h enaka nič, tako da je del vrvice nad cevko vodoraven, je obravnava preprostejša, ker je gibanje obeh kroglic enakomerno pospešeno.

Milan Ambrožič

PRIPOMOČKI ZA DESKANJE PO INTERNETU

Nastanek Interneta

Za začetek je treba poseči več kot trideset let nazaj v Združene države Amerike. To je bilo obdobje *hladne vojne* oziroma stalnih napetosti med tedanjima velesilama. To je bil čas, ko računalniki še zdaleč niso bili tako razširjeni kot sedaj. Privoščile so si jih lahko samo večje raziskovalne ustanove, velika podjetja in nekateri državni organi, predvsem vojska. Računalnike so takrat že povezovali v *računalniška omrežja*, v njih pa so prevladovali vojaški računalniki.

Hladna vojna je silila sodelujoče v priprave na morebitni resni izbruh sovražnosti. Mednje je sodilo tudi preučevanje posledic jedrskega napada na ZDA. Pri tem so ugotovili, da bi uničenje nekaj velikih ameriških računalniških središč povsem ohromilo računalniške komunikacije. V želji po rešitvi tega problema so obstoječe centralizirano omrežje postopoma preoblikovali. V novo nastalo omrežje so bili enakopravno vključeni računalniki in manjša omrežja ameriškega obrambnega ministrstva ter nekaterih raziskovalnih ustanov. Taka zasnova je omogočala delovanje omrežja tudi ob nenadnem izpadu večjega števila računalnikov ali računalniških povezav. Raziskovalcem, ki so novo omrežje razvijali, je bilo verjetno bolj ali manj vseeno, kaj se bo zgodilo z omrežjem po jedrskem uničenju, a vojaki očitno razmišljajo drugače in znanstveniki so to uspeli izkoristiti. Za znanstvenike je bilo pomembno, da so povezani računalniki omogočali boljšo izrabo računalniških zmogljivosti, hiter in zanesljiv prenos podatkov med njimi in pošiljanje elektronskih sporočil oziroma *elektronsko pošto*. Nastalo omrežje so leta 1969 poimenovali ARPANET in iz njega je zrasel današnji Internet.

Osemdeseta leta so v takratno Sovjetsko zvezo prinesla perestrojko in s tem tudi dolgo pričakovano otoplitev med velesilama. Leta 1986 je nadzor nad omrežjem ARPANET dobila civilna znanstvena organizacija NSF (National Science Foundation). Za znanstvenike je, v nasprotju z vojaki, izredno zanimiva izmenjava informacij in idej. Zato so začeli podpirati povezovanje raziskovalnih, kasneje pa tudi komercialnih organizacij v omrežje, ki je kmalu dobilo globalne razsežnosti in povežalo večino razvitega sveta.

Uporabniki Interneta so se hitro navadili, da so lahko v nekaj minutah dosegli znanca na drugem koncu sveta z elektronsko pošto. Marsikoga je pritegnila izmenjava mnenj na elektronskih konferencah, spet druge (predvsem mlajše uporabnike) pa elektronski klepet z vrstniki po svetu. Kljub globalni razširjenosti pa so do začetka devetdesetih let Internet uporabljali predvsem raziskovalci in šolajoča se mladina.

Leta 1989 so za pomembno novost poskrbeli Evropejci. Zanimivo je, da ta ni prišla z računalniške ustanove, temveč z Evropskega centra za fiziko delcev (CERN) v Ženevi. Tamkajšnje raziskovalce (anekdota pravi, da predvsem starejše profesorje) je motila množica različnih *protokolov* oziroma načinov sporazumevanja med računalniki. Razvili so protokol HTTP. Novi protokol je bil namenjen prenosu *hiperbese*dil. Hiperbesedilo je datoteka, ki poleg navadnega besedila vsebuje še posebej označene besede. Te predstavljajo povezave, prek katerih se lahko preselimo na druge datoteke poljubne vsebine (hiperbesedilo, slika, zvočni zapis itd.). Za oblikovanje hiperbesedil so razvili poseben jezik in ga poimenovali HTML.

Prednosti novega načina predstavitve in prenosa podatkov so kmalu spoznali tudi na drugih raziskovalnih ustanovah in v nekaterih računalniških podjetjih. Na računalnikih, povezanih v Internet, so uporabnikom začeli ponujati datoteke, napisane v jeziku HTML in dosegljive s protokolom HTTP. Nastal je *Svetovni splet* ali *Splet* (angleški izraz je World Wide Web ali krajše WWW).

Sprehajanje ali *deskanje* po spletnih datotekah oziroma *spletnih straneh* je bilo dokaj okorno, dokler ni leta 1993 študent z univerze v Illinoisu napisal svoj program za deskanje po Spletu ali *spletni brskalnik*. Poimenoval ga je Mosaic, njegova poglobljena prednost v primerjavi s sodobniki pa je bila, da je deloval v grafičnem načinu in je omogočal deskanje s pomočjo miške. Tako je postal Splet dostopen najširšemu krogu ljudi, tudi tistim, ki se z računalništvom poklicno ali kako drugače podrobneje ne ukvarjajo. Ocenjujejo, da je danes v Internet vključenih že več deset milijonov računalnikov, kakšna desetina od teh pa ponuja skupaj okoli 50 milijonov spletnih strani.

Ogromno število spletnih strani seveda pomeni tudi veliko količino bolj ali manj zanimivih informacij. Žal ta razbohotenost pomeni tudi težave pri njihovem iskanju in obvladovanju. Dodatno težavo predstavlja decentralizirana, skoraj anarhična zasnova Interneta. Spletne strani so po obliki zelo heterogene, mnogo je podvajanj in prekrivanj informacij. Splet v marsičem spominja na živ organizem, saj se spletne strani ves čas spreminjajo, vsak dan pa nastane na tisoče novih in ugasne nekaj starih spletnih strani. Brez nedavno razvitih orodij za iskanje in razvrščanje spletnih informacij bi bila zato uporabnost Svetovnega spleta precej omejena.

Orodja za iskanje po Spletu lahko razdelimo v tri skupine:

1. spletna iskala,
2. hierarhična kazala,
3. spletna meta iskala.

Spletna iskala

Namen spletnega iskala je zbrati podatke o spletnih straneh v kazalo in omogočiti uporabnikom Spleta iskanje po teh kazalih. V kazalu so shranjeni deli spletnih strani oziroma *ključne besede*. Za izdelavo kazal se uporabljajo posebni programi, ki noč in dan preiskujejo Splet in z zbranimi podatki zagotavljajo aktualnost kazala. Ti programi se imenujejo *roboti* ali *pajki*. Prvi tak program je bil Lycos (njegov spletni naslov je <http://www.lycos.com>), ki je dobil ime po neki vrsti pajka. Tako kazalo lahko potem uporabniki Interneta ali *deskarji* preiskujejo s posebnimi, v ta namen razvitimi programi. Običajno ali enostavno iskanje poteka tako, da uporabnik v spletno iskalo vnese zaporedje ključnih besed, za katero domneva, da ga bo pripeljalo do željene informacije oziroma iskane spletne strani. Rezultat iskanja je seznam spletnih strani (oziroma njihovih naslovov), ki vsebujejo katero od vnesenih besed.

Kot primer si pogledjmo iskanje spletnih strani, ki vsebujejo podatke o znanem francoskem matematiku (bil je tudi eden od začetnikov računalništva) Blaiseu Pascalu. Pri enostavnem načinu iskanja bi najverjetneje vnesli zaporedje:

`blaise pascal`.

Pozoren bralec je verjetno opazil, da v zaporedju, v nasprotju s prapopisom, nismo uporabili velikih začetnic. S tem smo zahtevali, da iskalo poišče spletno stran, ki vsebujejo vsaj eno od ključnih besed, napisanih v kakršnikoli kombinaciji malih in velikih črk. Nekatera spletna iskala namreč ločijo velike in male črke. Če v vneseni ključni besedi uporabimo vsaj eno veliko črko, bo takšno spletno iskalo poiskalo samo tiste strani, ki vsebujejo besede, ki se popolnoma ujemajo z vneseno. Ker ni nobene pravila o uporabi velikih in malih črk v spletnih straneh, je v večini primerov varneje uporabiti samo male črke.

Zelo znani spletni iskali sta še AltaVista (<http://altavista.digital.com>) in Excite (<http://www.excite.com>). Za svoje delovanje potrebujejo spletna iskala zelo močno aparaturno opremo. AltaVista je v času, ko nastaja ta prispevek, opremljena s triindvajsetimi zelo zmogljivimi računalniki AlphaServer in AlphaStation. Šestnajst od teh je posebej dobro opremljenih: vsak ima dvanajst procesorjev in 8 GB hitrega pomnilnika, za shranjevanje kazal pa uporabljajo več diskov s kapaciteto 300 GB. Za primerjavo dodajmo, da pomnilniške kapacitete enega od teh računalnikov ustrezajo skupnim pomnilniškim kapacitetam 500 srednje zmogljivih osebnih računalnikov.

Hitrost pa ni edino merilo za kvaliteto spletnega iskala. Pomembni dejavniki kvalitete so še:

1. pogostost obnavljanja podatkov v kazalu,
2. število spletnih strani, zajetih v kazalu ter
3. iskalne metode, vgrajene v spletno iskalo.

Bežno si oglejmo le najpomembnejše iskalne metode. Večina spletnih iskal omogoča uporabo predpon $+$ in $-$, s katerima lahko izrecno zahtevamo ali izključimo besede (oziroma besedne zveze). Tako postane iskanje natančnejše. Pri tem je treba paziti, da med predpono in besedo ne vpišemo presledka. Prej omenjeno iskanje podatkov o Blaiseu Pascalu ne bilo posebej uspešno, saj bi poleg iskanih podatkov o slavnem matematiku med drugim našli še množico spletnih strani, na katerih se nadobudni programerji hvalijo, kakšne neverjetne programe v programskem jeziku pascal so napisali. Število nepotrebnih spletnih strani bi lahko zmanjšali, če bi v spletno iskalo vnesli izraz

`+blaise+pascal`,

s katerim zahtevamo, da najdena spletna stran vsebuje obe ključni besedi. Še bolj bi število najdenih spletnih strani skrčili z izrazom

`+blaise+pascal-"programming language"`,

saj bi na ta način izključili strani, ki vsebujejo podatke, povezane s programskim jezikom pascal. Omenimo, da smo z narekovaji zahtevali tako imenovano *bližino* oziroma iskanje besedne zveze. Tako smo v zadnjem opisanem primeru izključili tiste strani, pri katerih besedi **programming** in **language** stojita zaporedoma.

Seveda je lahko takšno omejevanje števila najdenih spletnih strani tudi dvorezno. Hitro se nam namreč lahko zgodi, da je najdenih strani premalo in da iskalo kakšno od zanimivih spletnih strani spregleda. Način iskanja je zato potrebno čim bolj prilagoditi cilju iskanja. Če iščemo čisto določeno informacijo, npr. rojstni datum Blaisea Pascala, je smiselno iskanje čim bolj omejiti. Včasih pa nas zanimajo vse informacije o neki tematiki, npr. življenje in delo Blaisea Pascala. V tem primeru moramo paziti, da iskanje zastavimo širše in da katere od zanimivih strani ne spregledamo.

Mnoga spletna iskala poznajo tudi zahtevnejše načine iskanja. Tako lahko v AltaVisti iskanje omejimo na posamezne dele spletnih dokumentov. Iščemo lahko npr. samo med besedami iz naslovov ali pa med imeni slik v spletnih straneh. Strokovnjaki, ki skrbijo za spletno iskalo Excite, pa so razvili *koncept inteligentnega iskanja* ICE, ki omogoča, da se iskanje razširi tudi na tiste spletne strani, ki sicer ne vsebujejo nobene od vnesenih ključnih besed, vsebujejo pa besede, ki so z njimi pomensko povezane.

Hierarhična kazala

Podobno kot pri spletnih iskalih so tudi tukaj podatki o spletnih straneh shranjeni v kazalu. Od spletnih iskal pa se razlikujejo v dveh pomembnih značilnostih:

- podatki o spletnih straneh so hierarhično organizirani,
- razvijajo in vzdržujejo jih ljudje oziroma posebne skupine strokovnjakov.

Hierarhična organiziranost pomeni, da so vse zajete spletne strani razdeljene v več velikih področij. V priljubljenem hierarhičnem kazalu Yahoo! (<http://www.yahoo.com>) so to: umetnost in humanistika, gospodarstvo, računalniki in Internet, izobraževanje, razvedrilo, država, zdravje, novice in občila, rekreacija in šport, imeniki, regije, znanost, družbene vede ter družba in kultura (slika na III. strani ovitka). Našteta področja se delijo na manjša, ta na še manjša itd. Zaradi take organiziranosti je iskanje informacij ponavadi enostavnejše. Podatke o Blaiseu Pascalu lahko najdemo tako, da na področju **znanost** izberemo podpodročje **matematika**, tam pa podpodročje **matematiki** (v času, ko je nastajal ta prispevek, je ena od dveh spletnih strani, ki ju najdemo na opisani način, že ugasnila, kar dobro ponazarja hitro spreminjanje Svetovnega spleta).

Ker za oblikovanje in vzdrževanje hierarhičnih kazal ne skrbijo računalniški programi, vsebujejo precej manj spletnih strani kot kazala spletnih iskal. Njihova pomembna prednost pa je, da so vsebovane spletne strani skrbno izbrane in razvrščene. Posebne skupine strokovnjakov odločajo o tem, katera spletna stran bo izbrana, in o tem, na katerem mestu v hierarhičnem kazalu bo prisotna. Zaradi tega so hierarhična kazala zelo priljubljena, tako da so jih začeli vgrajevati tudi v nekatera spletna iskala (npr. v Excite in Lycos).

Omenimo še, da je v hierarhično kazalo Yahoo! vgrajena dodatna pomoč uporabniku, program MyYahoo!. Ta spada v novo vrsto programov, pisanih za Internet, ki jih imenujemo *agenti*. Agenti so "inteligentni" vmesniki, ki nudijo deskarjem posebne storitve. Sposobni so se prilagajati določenemu okolju in z njim komunicirati. Gre za področje računalništva, ki se šele razvija. Današnji agenti nudijo pomoč pri delu z elektronsko pošto, pri navezovanju stikov med deskarji, pri pridobivanju in filtriranju informacij s Spleta itd. MyYahoo! omogoča, da uporabnik

vnese svoje osebne podatke in izbere področja, ki ga zanimajo. Na podlagi teh podatkov program ustvari posebno spletno stran, ki se dnevno spreminja glede na tiste novosti s Spleta, za katere program presodi, da bi uporabnika lahko zanimale.

Spletna meta iskala

Kot smo že povedali, se spletna iskala med seboj razlikujejo. Zato ni presenetljivo, da najdemo dve različni spletni iskali za isto zaporedje vnesenih ključnih besed običajno dva različna seznama spletnih strani. Če želimo popolnejšo informacijo o stvari, ki nas zanima, moramo torej uporabiti obe spletni iskali. Več spletnih iskal uporabimo, več spletnih strani najdemo in popolnejša je dobljena informacija.

Takšno večkratno iskanje je seveda dolgočasno, vzame pa lahko tudi zelo veliko časa. Spletna meta iskala so pravzaprav orodja, ki to težaško delo naredijo namesto nas. To so posebni programi, ki za iskanje uporabljajo več "tujih" spletnih iskal in zato nimajo lastnega kazala spletnih strani. Rezultat iskanja je spet seznam najdenih spletnih strani, narejen z združitvijo seznamov, ki jih priskrbijo uporabljena spletna iskala. Primer spletnega meta iskala je MetaCrawler (<http://www.metacrawler.com>), ki si pri delu pomaga z devetimi spletnimi iskali.

Pogled v prihodnost

Napovedovanje je v računalništvu silno neprijetna naloga. Ne bomo pa se dosti zmotili, če napovemo, da bo šel razvoj predvsem v smeri večje "inteligence" iskalnih orodij. Že omenjeni agenti in koncept inteligentnega iskanja so verjetno le predhodnica orodij, ki bodo uporabniku omogočala, da bo lažje izluščil čim več uporabnih informacij.

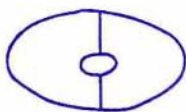
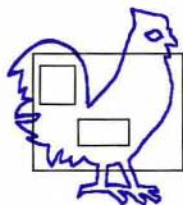
Drug pristop k boljšemu obvladovanju Spleta pa je večja specializacija iskalnih orodij. Ker morajo specializirana iskala obvladovati le manjši del Spleta, so tako zbrani podatki običajno kvalitetnejši, pa tudi iskanje željene informacije je enostavnejše. Danes že obstajajo specializirana iskala, ki so namenjena iskanju podatkov o programski opremi, kompaktnih ploščah, knjižnih izdajah, revijah itd. Pojavljajo pa se tudi iskala, ki so namenjena iskanju podatkov v posameznih državah in regijah (npr. Mat'Kurja na naslovu <http://www.ijs.si/slo> za iskanje po slovenskem delu Spleta).

Aleksander Vesel

MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 6. del

Barvanje parcel

Prerišite naslednje risbe in jih pobarvajte. Pri tem naj bo posamezna parcela pobarvana z eno samo barvo, dve sosednji parceli, to je parceli, ki ju loči skupni lok, pa vedno z različnima barvama. **Ne pozabite na zunanost risbe!** Parceli, ki imata skupno kakšno izhodišče, ne pa tudi loka, nista sosednji in ju torej lahko pobarvamo z isto barvo.



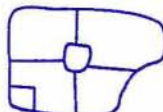
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

1. Pri delu **poskusite uporabiti čim manj barv**. Koliko barv ste potrebovali za posamezni primer? Kdo je risbo (d) pobarval z najmanj barvami? In kdo risbo (e)?
2. Sami narišite risbo, za barvanje katere potrebujemo:
 - (a) samo dve barvi,
 - (b) vsaj tri barve,
 - (c) vsaj štiri barve.
3. Ali znate narisati risbo, za barvanje katere potrebujemo vsaj pet barv?
4. Narišite risbo z osmimi parcelami, ki jo lahko pobarvamo samo s tremi barvami.
5. Narišite več krožnic s polmeri okrog 5 cm. V prvo vrišite eno tetivo, v drugo dve, v tretjo tri tetive, itd. Tetive izbirajte tako, da boste vsakokrat dobili znotraj krožnice čim večje število parcel.



(a)



(b)

Koliko parcel je na posameznem koraku? Koliko najmanj barv potrebujete za vsako barvanje (samo notranjosti krožnice)? Kaj opazite?

Kratka zgodovina problema štirih barv

Leta 1852 je mladi angleški matematik Francis Guthrie ob barvanju zemljevida angleških grofij prišel na misel, da se morda da vsak zemljevid, narisana na ravnini, pobarvati samo s štirimi barvami. Pri tem je zahteval, podobno kot v zgornjih nalogah mi, da sta dve sosednji državi pobarvani z različnima barvama.

Da obstajajo zemljevidi, za katere potrebujemo štiri barve, ste lahko sami ugotovili, če ste rešili nalogo 2(c). To je vedel že Guthrie. Za dokaz, da štiri barve res vedno zadoščajo, pa je bilo potrebnih nadaljnjih 124 let.

Oglejmo si najpomembnejše delne uspehe. Najprej je Guthriejevemu sodobniku, velikemu angleškemu matematiku de Morganu uspelo dokazati, da na nobeni risbi ne more biti pet parcel v položaju, v katerem bi vsaka mejila s preostalimi štirimi. Nato je leta 1879 odvetnik Alfred Bray Kempe objavil 'dokaz' izreka štirih barv, v katerem je po enajstih letih matematik Percy John Heawood našel napako. Na osnovi Kempejeve ideje je Heawood dokazal, da za barvanje zemljevidov zadošča pet barv. Ni pa mu uspelo dokazati pravilnosti domneve štirih barv, čeprav se je z njo ukvarjal še polnih 60 let.

Več kot osem nadaljnjih desetletij je veliko matematikov, pa tudi ljubiteljev, raziskovalo problem štirih barv. V ta namen so razvili številne matematične metode, ki so obogatile tudi druga področja matematike. Sčasoma je postalo jasno, da je število primerov, ki bi jih bilo potrebno proučiti, izredno veliko. Prvi, ki je pomislil, da bi se dalo problema lotiti z uporabo računalnika, je bil nemški matematik Heinrich Heesch. Njegovo delovanje v tej smeri je omogočilo, da sta leta 1976 ameriška matematika Kenneth Appel in Wolfgang Haken računalniško dokazala, da **je domneva štirih barv pravilna**. Kot zanimivost povejmo še, da sta svoj program, ki se je 'učil' tudi sam, pognala v začetku leta 1976 in po šestih mesecih, junija istega leta, pričakala odgovor.

Kaj pa zunanost?

Zlahka uvidimo, da je za izrek štirih barv vseeno, ali barvamo samo notranjost risbe ali tudi njeno zunanost. Za zunanost res ne potrebujemo dodatne barve: Notranjost risbe obdamo z enostavno sklenjeno krivuljo, ki vsa poteka po zunanosti risbe. Tako dobimo zaključeno območje, ki ima eno parcelo več kot prvotna risba, ki pa ga po našem izreku lahko pravilno pobarvamo s štirimi barvami. Nato samo še razširimo barvo dodane parcele na vso zunanost risbe.

Igra barvanja

Po tem, kar smo izvedeli o barvanju s štirimi barvami, je gotovo zanimiva naslednja igra za dva igralca:

Prvi igralec nariše parcelo. Drugi igralec parcelo pobarva in doda novo parcelo. Nato prvi igralec pobarva drugo parcelo in spet doda novo, itd. Pri tem morata paziti, da nobeni sosednji parceli nista enako pobarvani. Igra je končana, ko je eden od igralcev prisiljen uporabiti peto barvo. Ta igralec igro tudi izgubi.

Marija Vencelj

SADJE – Rešitev z II. strani ovitka

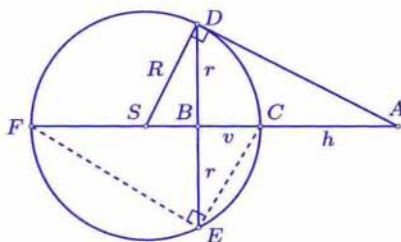
Izberimo najprej tri sadeže iste vrste. Vzamemo lahko banane, pomaranče, jabolka ali hruške. Imamo torej 4 možnosti. Nato izberimo dva sadeža druge vrste. Zopet lahko izbiramo med bananami, pomarančami, jabolki in hruškami, pri čemer pa ne smemo izbrati iste vrste sadežev kot pri prvem izbiranju. Imamo torej 3 možnosti. Pri izbiri zadnjega sadeža moramo le paziti, da ni iste vrste kot že izbrani sadeži. Ker je v košari pet vrst sadežev, dve vrsti pa smo že izbrali, nam za zadnjo izbiro ostanejo 3 možnosti. Pripravimo lahko torej $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ različnih obrokov.

Ko sestavljamo obrok iz 7 sadežev, izbira prve skupine sadežev poteka enako kot v prejšnjem primeru. Zopet imamo 4 možnosti. Pri nadaljnjih izbirah pa moramo biti previdni. Ananasa sploh ne moremo vključiti v obrok, saj nimamo dveh ananasov, pa tudi vrstni red izbir obeh parov sadežev ni pomemben. Enak obrok dobimo, če najprej izberemo tri banane, nato pa dve jabolki in nazadnje še dve hruški ali pa če najprej vzamemo tri banane, nato dve hruški, nazadnje pa še dve jabolki. Prvi par lahko izberemo na 3, drugega pa na 2 načina, ker pa vrstni red izbir ni pomemben, moramo število izbir še deliti z 2. Pripravimo lahko torej $4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 12$ različnih obrokov.

Martin Juvan

DVA SATELITA – Rešitev s str. 273

S satelita se vidi v danem trenutku krogelna kapica, ki jo omejujejo tangente s satelita na Zemljo. Označimo z R polmer Zemlje, z r in v polmer in višino krogelne kapice ter s h oddaljenost satelita od površja Zemlje. V enem obhodu opišejo vse krogelne kapice krogelni pas z višino $H = 2r$ (slika 1).



Slika 1.

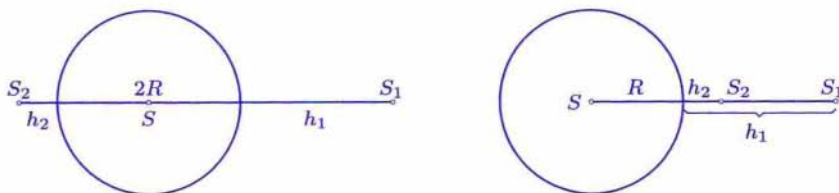
Kako visoko leti satelit, če se z njega v posameznem trenutku vidi m -ti del površine, vidne pri enem obhodu?

Iz $P_{\text{kap}} = \frac{P_{\text{pas}}}{m}$ sledi $2\pi Rv = \frac{2\pi RH}{m}$ in od tod $v = \frac{2r}{m}$.

Izraz za v vstavimo v zvezo $r^2 = v(2R-v)$ (višinski izrek za $\triangle CEF$), od koder sledi $r = \frac{4mR}{m^2+4}$ (dodatno dobljena vrednost $r = 0$ ne pride v poštev) in $v = \frac{8R}{m^2+4}$.

Z vstavljanjem vrednosti za v in r v $r^2 = (v+h)(R-v)$ (višinski izrek za $\triangle ADS$) dobimo iskano višino satelita nad Zemljo $h = \frac{8R}{m^2-4}$. Za $m = 2$ izraz ne obstaja; le z neskončno oddaljenega satelita bi se videlo pol Zemljine površine.

Če za naša satelita vstavimo $m_1 = 6$ in $m_2 = 12$, dobimo, da sta za $h_1 = \frac{R}{4}$ in $h_2 = \frac{2R}{35}$ oddaljena od Zemljinega površja. S slike 2 razberemo, da sta največja in najmanjša razdalja med satelitoma enaki $h_1 + h_2 + 2R = \frac{323}{140}R \approx 15500$ km in $h_1 - h_2 = \frac{27}{140}R \approx 1300$ km.



Slika 2.

Majda Lavrič, prir. uredništvo Preseka

STVENIKA”

LETA 1987 UMRLA AM. IGRALKA (MARY)	ZAZNAVA S PRSTI		MOČNA TELESNA ŽELJA	ANDREJ JEMEC	JUBILAN- TOVO ROJSTNO MESTO	SREBRN GRŠKI NOVEC	NAVPIČNO GIBANJE ZRAKA V DIMNIKU	NACE JUNKAR	V PROSTEM ČASU JE (BIL) TUDI	POMEMBNA VEJA MATE- MATIKE	UČITELJEVA MIZA
A		NASAD SADNEGA DREVJA	S	A	D	O	V	N	J	A	K
S		MESTO KJER ŽIVI IN DELA INDIJSKO GOVEDO	L	J	U	B	L	J	A	N	A
T	I	Z	A	SVETO- PISEMSKI OČAK				ZMAGA PRI SAHU	M	A	T
L	P	PRIZORIŠČE DRESURJE V CIRKUŠU	NJORKA	BIVŠI DIRKAČ LAUDA	N	O	E	ANGLEŠKO PIVO	A	L	E
R	AMERIŠKO BREKALO		A	N			KORIST ZNESEK NA BANKOVCU	T	R	I	U
OGROM- NOST	PRA- KANTON V SVICI		R	I	IGRALEC MINNEO		V		ZENICA	Z	E
E	DELA: KI JIH JE NAPISAL ZA POUK FIZIKE	ELVIRA KRALJ MORSKA RIBA	E	K	FILMSKI SNEMALEC	IZDELO- VALEC KOVINSKIH OKRASKOV	S		S	A	R
			N	I		KONICA ŽENSKO IME	O	B	T	STREŽNIK NA LETALU	PODROČJE NJEGOVEGA DELA V FIZIKI
U	Č	K	A	VUOLČAST POLDRAG KAMEN PESTNER	A		T		I	S	
			SLOVENSKA IGRALKA (BERNARDA)		H		A	8^2+6^2	S	T	O
M	E	T	KATRAN NAJBOLJŠA SOLSKA OCENA				RUSKO MESTO OB REKI URAL	KRATKO ŽENSKO OGRAJALO	K	E	
		PORTUGAL- SKO PRI- STANIŠČE POTOMEČ						VLADIMIR LAMUT			
								KRAJŠA OBLIKA IMENA RONALD			
TOK NE				RUSKA VESLOJSKA POSTAJA RADIJ	M			BIVŠI INDIJSKI PREMIER POSTOJNA	R	A	
SK	I	T	R	A	N	S	P	O	R	T	
		N	ORJAŠKA JUŽNO- AMERIŠKA KACA		N			O	N	D	

DVESTO LET GRAVITACIJSKE KONSTANTE

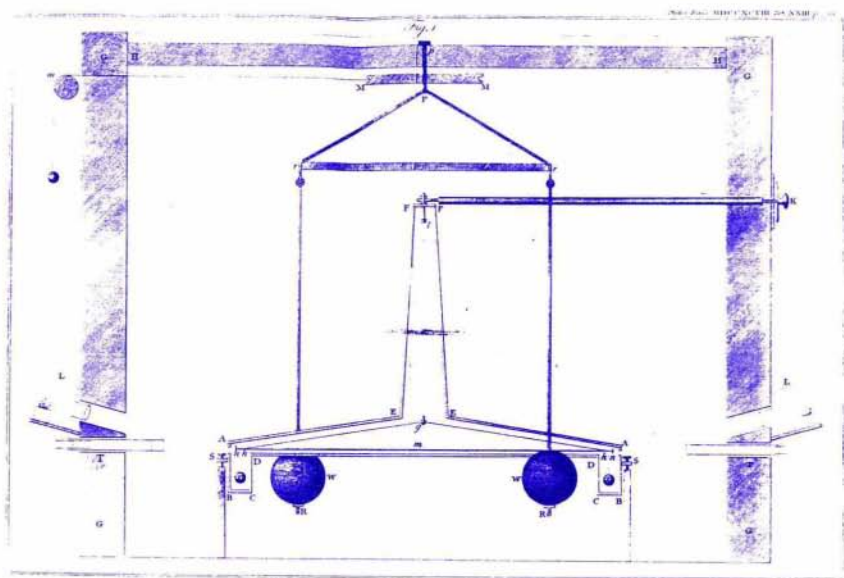
Gravitacijski zakon je leta 1687 objavil Isaac Newton, ne da bi navedel sorazmernostni koeficient. *Newtonov gravitacijski zakon* je samo zagotovil, da je privlačna sila med telesoma sorazmerna z maso prvega in maso drugega telesa ter obratno sorazmerna s kvadratom razdalje: $F \propto m_1 m_2 / r^2$. Telesi z masama m_1 in m_2 sta zelo majhni v primeri z njuno oddaljenostjo r ali pa sta krogelno simetrični in je potrebno upoštevati razdaljo med njunima središčema. Newton je s svojim zakonom, čeprav ni poznal sorazmernostnega koeficienta, uspešno obdelal veliko pojavov, med njimi gibanje planetov okoli Sonca, plimovanje ter precesijo in nutacijo zemeljske osi. Vedel je sicer, kako bi bilo sorazmernostni koeficient moč določiti, a gravitacijska sila med telesoma v laboratoriju je tako šibka, da je z razpoložljivimi napravami ni mogel izmeriti.

Pozneje so izdelali občutljive *torzijske tehtnice*. Na tanko žičko so obesili prečko in merili kot, za katerega se je prečka zavrtela okoli navpične osi, ko so na prečko delovali z navorom. Zasuk je bil sorazmeren z navorom. Pravi mojster pri delu s torzijsko tehtnico je bil Charles Augustin Coulomb (1736 do 1806), ki je okoli leta 1780 z njo raziskal silo trenja in delovanje zemeljskega magnetnega polja na magnetnico. Za to je dobil nagrado, ki jo je razpisala francoska akademija znanosti. Deset let pozneje je Coulomb s torzijsko tehtnico izmeril silo med naelektrenima kroglicama v odvisnosti od razdalje in prišel do zakona, ki ga imenujemo po njem. *Coulombov zakon* je podoben gravitacijskemu, le da v njem električni naboj stopi na mesto mase. Tudi Coulomb pri svojem merjenju ni določil sorazmernostnega koeficienta, ki ustreza gravitacijski konstanti.

Na misel, da bi občutljivo torzijsko tehtnico uporabil za merjenje gravitacijske sile med telesoma v laboratoriju, je prišel že okoli leta 1768 angleški naravoslovec John Michell (1724 do 1793). Izdelal je tudi merilno napravo, a prehitela ga je smrt. Michellovo napravo je nazadnje dobil Henry Cavendish in se lotil merenj, med katerimi je napravo predelal (slika 1). Z vrsto skrbnih merenj mu je uspelo določiti gostoto Zemlje, o čemer je leta 1798 poročal v razpravi *Poskusi za določitev gostote Zemlje* v Kraljevi družbi, angleški akademiji znanosti, in jo objavil v njenem glasilu (slika 2). Gravitacijske konstante ni posebej navedel, a vrednost, ki je izhajala iz njegovih merenj, se ni znatno razlikovala od današnje

$$\kappa = (6,67259 \pm 0,00085) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2.$$

Gravitacijska konstanta je od vseh splošnih konstant izmerjena z najslabšo natančnostjo, kar kaže navedena nenatančnost pri merjenju. Z gravitacij-



Slika 1. Risba Cavendisheve naprave iz leta 1798. Torzijsko tehtnico so lesene stene GHG ščitile pred vetrom. Na približno 1 m dolgi žički lm je visela vodoravna tanka bakrena prečka hmh z dolžino $l = 1,86$ m s svinčenima kroglicama x,x na krajiščih. Cavendish je omenil, da je pri prvih poskusih uporabil posrebreno bakreno žičko s premerom 0,2 mm. Toda njen koeficient D je bil premajhen, ker sta se kroglici toliko odklonili, da sta zadeli v ohišje iz mahagonija ABCDDCBAEFFEA. Zato je uporabil drugo nitko z večjim koeficientom D , a ni omenil, za kakšno nitko je šlo. Svinčeni krogli R,R z maso po $m_2 = 158$ kg sta bili toga vpeti z lesenimi drogovi rR, rr, rPr in rR. Težišči krogel sta bili v enaki višini kot težišči kroglic in z vrtenjem škripca MM je bilo mogoče približati krogli kroglicama s te ali z druge strani, ne da bi se bilo treba približati tehtnici. Lego prečke s kroglicama je opazoval z daljnogledoma T,T na slonokoščeni skali z enoto 1,25 mm, ki sta jo osvetljevala svetilki L,L. Na kroglico je bila pritrjen del enake skale, tako da je bilo mogoče meriti še premike za stotino te enote.

sko konstanto zapišemo gravitacijski zakon

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

V zakon vstavimo težo uteži z maso m_1 na površju Zemlje $F = m_1 g$. Pri tem sta $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ pospešek prostega padanja in $r = 6380 \text{ km}$ radij Zemlje. Iz zakona izračunamo maso Zemlje

$$m_2 = \frac{gr^2}{\kappa} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

[469]

**XXI. Experiments to determine the Density of the Earth. By
Henry Cavendish, Esq. F.R.S. and A.S.**

Read June 21, 1798.

MANY years ago, the late Rev. JOHN MICHELL, of this Society, contrived a method of determining the density of the earth, by rendering sensible the attraction of small quantities of matter; but, as he was engaged in other pursuits, he did not complete the apparatus till a short time before his death, and did not live to make any experiments with it. After his death, the

Slika 2. Začetek Cavendishevega članka v Poročilih Kraljeve družbe iz leta 1798.

Z njo dobimo gostoto Zemlje

$$\frac{m_2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Newton je v *Principih* zapisal: "Verjetno je količina vse snovi Zemlje pet ali šestkrat večja, kot če bi jo sestavljala voda." Če bi zaupal tej svoji oceni za gostoto Zemlje, bi lahko z nakazanim računom v obrnjeni smeri 111 let pred Cavendishem vsaj približno določil gravitacijsko konstanto.

Henry Cavendish (slika 3) je bil član premožne angleške družine. Že njegov oče je naredil nekaj pomembnih poskusov v elektriki. Rojen je bil leta 1731 v Nici, kjer je zaradi šibkega zdravja živel njegova mati. Umrli je dve leti po Henryjevem rojstvu. Študiral je na univerzi v Cambridgeu in po tedanji plemiški navadi študija ni končal. Bil je izreden eksperimentator, pa tudi pravi čudak. Nenavadno se je oblačil,



Slika 3. Henry Cavendish (1731 do 1810).

ječljaj, da ga je bilo težko razumeti, in se izogibal družbe, posebno ženske. Trdili so, da je "izrekel v svojem življenju manj besed kot kdorkoli, vključno z molčečimi menihi". Leta 1760 je postal član Kraljeve družbe. Sam je kril stroške svojega raziskovanja, živel zelo skromno in leta 1810, ko je v Londonu umrl, zapustil premoženje, vredno več kot milijon funtov. Neki fizik je tedaj rekel, da je bil Cavendish "najbogatejši od vseh učenih mož in najbrž najbolj učen od vseh bogatašev".

Leta 1765 je Cavendish meril specifične in talilne toplote trdnin in delal poskuse v kemiji. Leta 1766 je poslal Kraljevi družbi razpravo o plinih, ki se jih je navadil loviti nad vodo. "Gorljivi zrak" – pozneje so ga imenovali vodik – je nastal, ko je kovino polil s kislino. Opisal je tudi "fiksirani zrak", to je ogljikov dioksid. Med seboj je primerjal gostoto plinov in ugotovil, da ima vodik nenavadno majhno gostoto, zaradi česar mu je pripisoval nenavadne lastnosti. Cavendish je tudi ponovil poskuse Josepha Priestleya in opazil roso, ki je nastala pri gorenju vodika in ki jo je Priestley prezrl. Zanj je ugotovil, da je voda in odtlej voda ni več veljala za element. To je približno ob istem času ugotovil tudi James Watt. Prišlo je do dolgotrajnega spora o prvenstvu, ki je bil dodatno zapleten zaradi tedanje navade, da so lahko pisci in uredniki spreminjali članke v tisku. Spor so zgladili, ko so Watta izvolili v Kraljevo družbo.

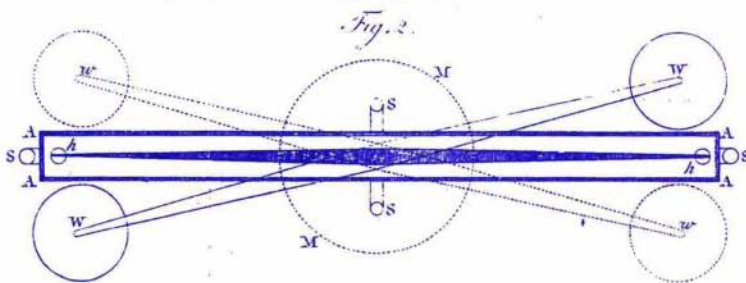
Z električno iskro v zraku je Cavendish spojil dušik in kisik ter dobil leta 1795 dušikovo kislino, ko je spojino raztopil v vodi. Nazadnje je ostal mehurček plina s prostornino, manjšo od stotine prvotne prostornine, na katerega iskra ni delovala. To je bil zlahtni plin argon in drugi zlahtni plini, kot so spoznali sto let pozneje. Dotlej je Cavendishevo odkritje zatonilo v pozabo.

Cavendish je nerad objavljaj, o svojih električnih raziskovanjih je objavil le težko razumljiv članek leta 1771. William Thomson, lord Kelvin je naletel na njegovo neobjavljeno delo, v katerem je opisal tudi merjenje kapacitete kondenzatorjev. James Clerk Maxwell je poskrbel za objavo Cavendishevih *Električnih raziskovanj* leta 1879. Med deli, ki so bila tedaj prvič objavljena, je bil opis poskusov, pri katerih si je Cavendish prizadeval izmeriti influencirani naboj v notranjosti naelektrene kovinske krogle. Ugotovil je, da je ta naboj enak nič, in po tem sklepal, "da morata biti električni privlak in odboj obratno sorazmerna s kvadratom razdalje". Meril je kapaciteto kondenzatorjev in upošteval vpliv snovi. Zanimalo ga je tudi prevajanje elektrike in ugotovil je, da ima nasičena raztopina kamene soli 560-tisočkrat večji upor od železa z enako obliko. Znani *Cavendishev laboratorij* v Cambridgeu, katerega prvi ravnatelj je bil Maxwell

in na katerem je delovalo lepo število znanih angleških fizikov, ima ime po članu Cavendisheve družine, ki je kot kancler leta 1871 univerzi podaril več tisoč funtov.

Ponovimo glavne korake Cavendishevega računa. Po tedanji navadi ni zapisal veliko enačb, v glavnem je sklepal z besedami in uporabljal sorazmerje.

Najprej krogli z maso po $m_2 = 159$ kg približamo kroglicama z ene strani in z daljnogledom določimo na skali ravnovesno lego prečke (slika 4). Nato krogli približamo kroglicama z druge strani in z daljnogledom določimo novo ravnovesno lego prečke ter ugotovimo, da je zasukana za 5,88 delov skale. Enemu delu skale ustreza ločno merjeni kot $1/766$, tako da ustreza polovici od 5,88 delov skale ločno merjeni kot $\varphi = 3,84 \cdot 10^{-3}$. Za ta kot se zaradi gravitacijskih sil krogel na kroglici zasučje prečka iz ravnovesne lege, v kateri krogel ni v bližini ali pa sta postavljeni simetrično glede na prečko. Središči krogle in kroglice sta v razmiku $r = 0,23$ m. Navor dvojice gravitacijskih sil je $D\varphi = Fl$ in gravitacijska sila je $F = D\varphi/l$. Iz gravitacijskega zakona sledi za gravitacijsko konstanto $\kappa = r^2 F/m_1 m_2 = r^2 D\varphi/l m_1 m_2$.



Slika 4. Legi kroglic in prečke pri Cavendishevem poskusu v prvi skrajni ravnovesni legi krogel WW in v drugi skrajni ravnovesni legi ww. V obeh legah navor dvojice gravitacijskih sil $l \cdot \kappa m_1 m_2 / r^2$ uravnovesi navor žice $D\varphi$. Upoštevali smo, da je zveznica hW (in hw) nagnjena proti prečki za manj kot 90° , delovanje nasprotnih krogel na kroglico $(l \cdot \kappa m_1 m_2 / r^2) [1 - r^3 / (l^2 + r^2)^{3/2}]$ pa je bilo zanemarljivo.

Za nihajni čas prečke izmerimo $t_0 = 14$ minut in z njim izrazimo koeficient žičke D pri torziji, ker velja $t_0^2 = 4\pi^2 J/D$, če je J vztrajnostni moment prečke s kroglicama. K vztrajnostnemu momentu prispevata kroglici $2m_1(\frac{1}{2}l)^2$, prispevek prečke je zanemarljiv. Izraz za D vstavimo v

prejšnjo enačbo in dobimo

$$\kappa = \frac{2\pi^2 l r^2 \varphi}{m_2 t_0^2} = 6,69 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Čeprav Cavendish gravitacijske konstante ni navedel neposredno, je za gostoto Zemlje kot povprečje večjega števila poskusov, ki so dali nekoliko različne izide, dobil 5,48-kratno gostoto vode.

Cavendish je poskus izpeljal tako skrbno, da še danes zbuja spoštovanje. Raziskal je vse mogoče vzroke neželenih motenj. Da ne bi motil veter, je prečko z žičko in vzvodom zaprl v ohišje iz mahagonija. Izračunal je gravitacijsko silo mahagonija na kroglici in se prepričal, da gre le za majhno motnjo. Motila je tudi temperaturna razlika, ki je povzročala tok zraka. Cavendish je poskusil oceniti njen vpliv in je pri poskusu segrel kroglo ter meril zasuk prečke pri različnih temperaturah krogle. Njeno temperaturo je ugotavljal s termometrom, ki ga je vstavil v luknjo v krogli. Naposled je namestil vso napravo v prostoru, katerega temperatura se je kolikor mogoče malo spreminjala.

Sorazmernostni koeficient v Coulombovem zakonu je bilo mogoče določiti šele potem, ko so vpeljali enoto za naboj. Najprej so jo vpeljali prav preko Coulombove sile. Enaka naboja z 1 *absolutno elektrostatično enoto naboja* se v razmiku 1 cm privlačita ali odbijata s silo 1 dine, to je 10^{-5} N. Kolikšna bi bila "absolutna enota mase", če bi jo določili z gravitacijskim zakonom? Telesi s tolikšno maso bi se v razmiku 1 cm privlačili s silo 10^{-5} N. Iz gravitacijskega zakona sledi z $m_1 = m_2$ za absolutno enoto mase $m_1 = (10^{-9}/6,7 \cdot 10^{-11})^{1/2} \text{ kg} = 3,87 \text{ kg}$. Kroglici bi se lahko kvečjemu dotikali in ne bi mogli imeti večjega radija kot $\frac{1}{2}$ cm. Morali bi torej imeti gostoto $3,87 \text{ kg}/\frac{4}{3}\pi(5 \cdot 10^{-3})^3 \text{ m}^3 = 7,4 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^3$. Nobena snov se tolikšni gostoti niti ne približa, zato ne bi bilo mogoče neposredno izmeriti gravitacijske sile med telesoma z absolutno enoto mase.

Janez Strnad

LAHKA ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 279

Vodoravno: 2. 730, 5. 58, 7. 26, 8. 11, 10. 18, 11. 7, 12. 156, 13. 1, 14. 27, 15. 99, 17. 64, 19. 15, 21. 225.

Navpično: 1. 25, 4. 36, 17. 67, 18. 12, 20. 50.

Marija Vencelj

PRAŠTEVILSKA DEŽELA – Rešitev s str. 278

Ideja rešitve je preprosta: število, zapisano v praštevilskem sistemu, najprej preberemo in predelamo v običajni zapis, odštejemo 1 in zmanjšano število zopet predelamo nazaj v praštevilski sistem. Poglejmo si posamezne korake nekoliko natančneje.

Najprej preberemo vhodni podatek. To je predstavitev števila v praštevilskem sistemu. Ta predstavitev je sestavljena iz zaporedja parov števil. Prvi element para je praštevilo, drugi pa pripadajoči eksponent. Iz te predstavitve sestavimo običajni zapis števila:

```
število = 1
dokler ni konca parov "praštevilo, eksponent", ponavljaj
  preberi p, e
  dokler je e <> 0, ponavljaj
    število = število * p
    e = e - 1
  do sem
do sem
```

Prebrano število zmanjšamo za ena in zmanjšano število predstavimo v praštevilskem sistemu. Imamo dve možnosti. Prva je, da je dobljeno število že praštevilo. Če pa to ni res, potem ga deli vsaj eno praštevilo, ki je manjše ali enako $\sqrt{32767} < 182$. Zato je smotno, da si pripravimo tabelo vseh praštevil do 181. Teh je 42: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181.

Nato po vrsti (od največjega praštevila proti najmanjšemu) preizkušamo, kolikokrat izbrano praštevilo deli naše število, in če ga deli, praštevilo in ustrezeni eksponent izpišemo. Preizkušanje s trenutnim praštevilo `pra[i]` poteka takole:

```
eksponent = 0
dokler je število > 1 in pra[i] deli število, ponavljaj
  število = število / pra[i]
  eksponent = eksponent + 1
do sem
če je eksponent > 0, izpiši pra[i] in eksponent
```

Ko število zdelimo z vsemi praštevili iz pripravljene tabele praštevil, dobimo ostanek, ki je bodisi praštevilo bodisi je enak 1. Če je praštevilo, ga moramo tudi izpisati, in sicer z eksponentom 1.

Zgornje korake sestavimo v rešitev, zapisano v programskem jeziku C:

```
#include <stdio.h>

short int pra[42] = { /* tabela praštevil do sqrt(32767) < 182 */
    2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
    53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109,
    113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181
};

int main(void)
{
    int s = 1; /* Število, katerega praštevilski zapis preberemo */
    int p, e;
    int i, eksp;

    printf("\n\nVnesi predstavitev števila v obliki p e:\n");
    for (;;) { /* branje praštevilske predstavitve števila */
        printf(" p e (konec 0 0) ");
        scanf("%d %d", &p, &e); /* praštevilo, eksponent */
        if (p == 0) break;
        while (e-->0) s *= p; /* Sestavljamo število. */
    } /* for */

    s--; /* Zanima nas s - 1. */

    /* Pogledamo, katera praštevila sestavljajo s. */
    for (i = 41; i >= 0; i--) {
        if (s == 1) break; /* Če smo s že razstavili, končamo. */
        if (pra[i] > s) continue; /* premajhno praštevilo */
        /* Izračunamo eksponent, s katerim nastopa praštevilo. */
        for (eksp = 0; s > 1 && s % pra[i] == 0; eksp++) s /= pra[i];
        if (eksp > 0) /* Izpišemo del praštevilskega zapisa. */
            printf("%d %d ", pra[i], eksp);
    } /* for */

    if (s > 1) printf("%d 1", s); /* Če je ostanek praštevilo, ... */
    printf("\n");
    return 0;
}
```

Gornja rešitev ni najlepša. Praštevila v praštevilskem zapisu rezultata namreč niso vedno izpisana (padajoče) urejeno po velikosti. Kadar je ostanek praštevilo, je to zagotovo največje praštevilo v iskanem zapisu, gornja rešitev pa ga izpiše na koncu. Če želimo doseči urejen izpis, praštevil in pripadajočih eksponentov ne smemo izpisovati sproti, saj bo izpis odvisen od ostanka, ki ga izvemo šele na koncu. Ker je "originalna" formulacija naloge zahtevala urejeni izpis, so si v "uradni" rešitvi, ki jo opremljeno z našimi komentarji predstavljamo v nadaljevanju, pomagali s tabelo, v katero shranimo naračunana praštevila in eksponente ter jo izpišemo šele

potem, ko poskrbimo za morebitni izpis ostanka. Take in podobne "komplikacije", povezane s predpisano obliko vhodnih podatkov in izpisom rezultatov, naredijo rešitev daljšo in seveda zamudnejšo za programiranje, pa tudi možnost napak se precej poveča.

```
#include <stdio.h>

short int prime[42] = { /* tabela praštevil do sqrt(32767) < 182 */
    2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
    53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109,
    113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181
};

int main(void)
{
    FILE *f = fopen("primelnd.in", "rt"); /* predpisani vhodna */
    FILE *g = fopen("primelnd.out", "wt"); /* in izhodna datoteka */
    int go;

    /* Na vhodni datoteki je lahko več praštevilskih zapisov,
       vsak v svoji vrsti. V zadnji vrsti je število 0. */
    for (go = 1; go; ) { /* do konca podatkov */
        int s = 1; /* število, katerega zapis preberemo */
        int cis[16], exp[16]; /* praštevila in eksponenti v zapisu */
        int m = 0; /* števec praštevil v zapisu */
        int prvý = 1, i;

        for (;;) { /* branje predstavitve števila */
            int p, e;
            char nl;
            /* Preberemo praštevilo, eksponent, znak. */
            fscanf(f, "%d %d%c", &p, &e, &nl);
            if (prvý && (p == 0)) { /* 0 na začetku vrste */
                go = 0; /* Konec praštevilskih zapisov, */
                break; /* prebrali smo zadnjo ničlo. */
            }
            prvý = 0;
            while (e--) s *= p; /* Sestavljamo število. */
            if (nl == '\n' || nl == '\r')
                break; /* Ko smo na koncu vrste, je konec podatkov. */
        } /* branje predstavitve */
        if (!go) break; /* Končamo glavno zanko. */

        s--; /* Zanima nas s - 1. */

        /* Pogledamo, katera praštevila sestavljajo s. */
        for (i = 41; i >= 0; i--) {
            int cnt = 0;
            if (s == 1) break; /* Če smo s že razstavili, končamo. */
            if (prime[i] > s) continue; /* premajhno praštevilo */

```

```

/* Izračunamo eksponent, s katerim nastopa praštevilo. */
while (s > 1 && s % prime[i] == 0)
{ s /= prime[i]; cnt++; }
if (cnt > 0) /* Shranimo izračunana prafaktor in eksponent. */
{ cis[m] = prime[i]; exp[m++] = cnt; }
} /* izračun zapisa */

if (s > 1) /* Ostanek je praštevilo, večje od 181. */
fprintf(g, "%d %d%s", s, 1, (m > 0) ? " " : "");
for (i=0; i<m; i++) /* izpis praštevilskega zapisa */
fprintf(g, "%d %d%s", cis[i], exp[i], (i < m - 1) ? " " : "");
fprintf(g, "\n");
}
fclose(g);
fclose(f);
return 0;
}

```

Kot zanimivost omenimo še, da je sta tabeli `cis` in `exp`, v kateri shranjujemo praštevilski zapis, kar precej preveliki (velikost 16 je bila morda izbrana zato, ker so vsa števila, s katerimi računamo, manjša od $2^{16} = 65536$). Ker pa je že produkt prvih sedmih praštevil enak 510510 (produkt prvih šestih je 30030), nobeno od obravnavanih števil ne more imeti več kot 6 različnih prafaktorjev. Zadoščali bi torej tabeli s šestimi elementi.

Matija Lokar

ENAAČBA S CELOŠTEVILSKO REŠITVIJO – Rešitev s str. 331

Drugi igralec lahko vedno zmaga. Poskuša doseči, da bi imela končna enačba

$$x^4 + sx^3 + tx^2 + ux + v = 0$$

rešitev $x = 1$. Tedaj je $1 + s + t + u + v = 0$. Iz te enačbe lahko drugi igralec (na četrtem koraku, ki je njegov) iz prejšnjih treh vpisanih celih koeficientov izračuna četrtega, ki je tudi cel.

Dušan Murovec

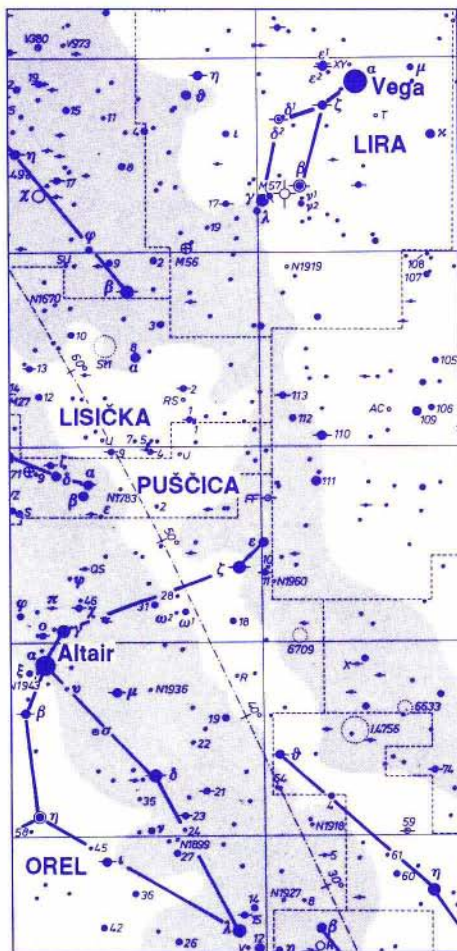
PRINCESKA

Sredi poletnih noči je prevladujoča zvezda na nebu kot briljant bleščeča Vega v ozvezdju Lira (slika 1). V tem času je najsvetlejša zvezda, čeprav ji je po siju skoraj enakovredna zvezda Arktur v ozvezdju Volar, ki pa se je že močno pomaknila nizko na zahodni del neba in se zato njena svetloba izgublja v debelejši plasti ozračja.



Slika 1. Takole po Velikem vozu izsledimo vodilno zvezdo (α) v ozvezdju Lira, Princesko – Vego. Več podatkov o Vegi najdemo v računalniških programih za astronomijo ali na Internetu.

Slika 2. Ozvezdje Lira; za prosto oko dvojno zvezdo Epsilon (ϵ) hitro najdemo. Vsaka posamezna zvezda ϵ_1 in ϵ_2 te dvojne zvezde je spet dvojna zvezda, kar ugotovimo, če opazujemo z močnejšim daljnogledom (kotni razmik med zvezdama pri dvojni zvezdi ϵ_1 je okoli 3", pri ϵ_2 pa okoli 2"). Med zvezdama Beta (β) in Gama (γ) Lire leži znana planetarna meglica M 57, vidna že s 6 do 8 centimetrskim daljnogledom kot majčken svetel obročast kolobarček. Gre za plinasto lupino, ostanek v davni preteklosti razletele zvezde.



O Vegi pripoveduje zgodba z Daljnega vzhoda. Pooseblja lepo princesko, boginjo tkalstva, ki se je poročila z ljubljnim pastirjem. Imela sta se tako neskončno rada, da sta kljub opozorilom poglavarja neba in zemlje popolnoma zanemarila svoje dolžnosti. Zato se je njuna ljubezen klavrno končala. Bogovi so ju postavili na nebo daleč narazen, vsakega na svojo stran dolge in široke zvezdne reke, ki ji rečemo Rimska cesta. Tam od takrat nemoteno opravljata svoje delo, *Princeska – Vega* v ozvezdju Lira, *Pastir – Atair* pa v ozvezdju Orel (slika 2).

Mi, za razliko od vzhodnjakov, poznamo Princesko kot sijočo zvezdo Vega v Liri, to je ozvezdju, ki ga zvezdne karte navadno prikazujejo kot harfo (slika 3). Tudi grška zgodba o Liri govori o žalostni usodi velike ljubezni med Orfejem in Evridiko. Orfej je igral na liro nepreosljlivo in nepozabno lepo. Ko mu je zaradi kačjega pika umrla lepa žena, je bil nepopisno žalosten. S svojim božanskim brenkanjem in petjem je uspel priti v prepovedan podzemski svet do samega boga podzemlja, neizprosnega in trdosrčnega Hada. Upal je, da bo tam našel Evridiko in jo pripeljal nazaj na zemljo. Hada je pregovoril, da je Evridiki dovolil oditi. Vendar je Had postavil pogoj, da se Orfej med potjo ne sme ozreti na Evridiko, ki mu bo sledila. Toda tik pred prihodom na zunanji svet, je Orfej le pogledal nazaj, hoteč se prepričati, če mu Evridika res sledi. Takrat jo je izgubil za vedno.

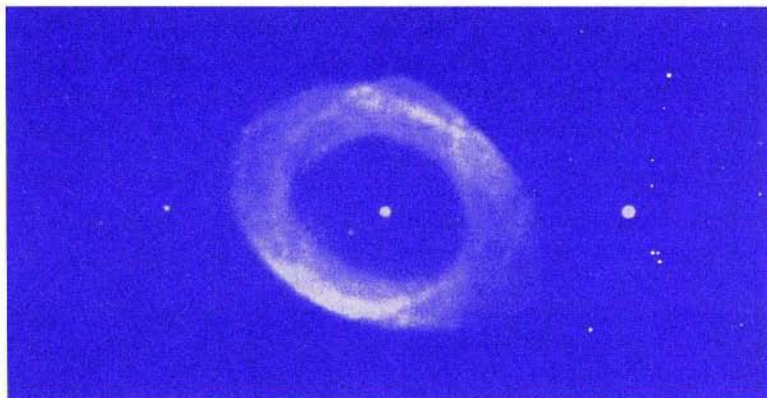
Ozvezdje Lira ni znano le zaradi številnih zgodb in svetle zvezde Vege – Princeske v njem. Zanimivo je tudi za opazovalce dvojnih zvezd. V njem lahko opazujete slavno “dvojno – dvojno” zvezdo *Epsilon* (ϵ) *Lire* (slika 2 in 3).

Predlagam, da se jasnega poletnega večera odpravite v odmaknjen in miren kraj s čim manj svetlobe, se sprostite, umirite, zlezete v spalno vrečo, se udobno uležete v travo ali na klop in opazujete zvezdo *Epsilon* *Lire*. Z lovskim daljnogledom jo vidimo kot širok par šibkih zvezd, raz-



Slika 3. Podoba ozvezdja Lira iz starejšega zvezdnega atlasa (17. stol.). Stara ljudstva so v tem ozvezdju videla tudi jastreba. Arabci so Vego imenovali An'Nasr al'Vaki – Padajoči orel. Iz zadnjega dela te besede je nastalo ime Vega. *Epsilon* *Lire* leži v vratu tega orla.

maknjenih med seboj za 3,5' (kotnih minut). Če imate zelo dober vid, ob dobrih pogojih vidljivosti zvezdici ločite celo s prostim očesom, saj je ločljivost normalnega človeškega očesa nekako od 2' do 3'.



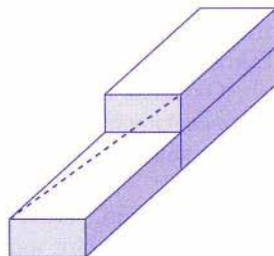
Slika 4. Planetarna meglica M 57 v Liri, posneta z zelo zmogljivim daljnogledom.

Opazovanje se zdi res preprosto, da pa bo še uspešno, se bo treba kar precej potruditi. Predvsem morate izslediti zvezdo Epsilon Lire. Pa dosti sreče z opazovanjem.

Marijan Prosén

ZA IZNAJDLJIVE – Rešitev s str. 260

S kupa poberemo tri opeke, jih zložimo, kot kaže slika, in izmerimo črtkano označeno razdaljo.



Dragoljub M. Milošević

PONOVNO SAM SEBE – Popravek

V prispevku "Ponovno sam sebe", ki je bil objavljen na tretji strani ovitka v prejšnji številki Preseka, nam jo je zagodel tiskarski škrt. Izkoristil je stisko s prostorom in v objavljenem programu "pohrustal" dve prazni vrstici. Prva bi morala biti za prvo vrstico programa, druga pa pred vrstico `int main(void)`. Izpis, ki ga naredi program, tako ni povsem enak objavljenemu programu (izpis vsebuje dve prazni vrstici, ki ju v objavljenem programu ni, pa bi tam morali biti). Bralcem se za napako opravičujemo, hkrati pa smo prepričani, da ste napako odkrili in odpravili že sami.

Uredništvo

CELOŠTEVILSKA HARMONIČNA ZAPOREDJA – Rešitev s str. 331

1. Naj bo zaporedje $h_0, h_1, h_2, \dots$ harmonično. To je res natanko takrat, ko je

$$h_i = \frac{2h_{i-1}h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}},$$

za vsak naraven i . Enakost lahko zapišemo tudi takole:

$$\frac{1}{h_i} = \frac{h_{i-1} + h_{i+1}}{2h_{i-1}h_{i+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_{i-1}} \right),$$

torej je člen $\frac{1}{h_i}$ aritmetična sredina členov $\frac{1}{h_{i-1}}$ in $\frac{1}{h_{i+1}}$, zaporedje $\frac{1}{h_0}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \dots$ je torej res aritmetično.

2. Naj bo harmonično zaporedje $h_0, h_1, h_2, \dots$ celoštevilsko. Potem so členi zaporedja $\frac{1}{h_0}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \dots$ vsebovani v množici $\{\frac{1}{n} \mid n \text{ naravno število}\}$, ki pa je omejena. Vsako omejeno aritmetično zaporedje pa je konstantno. Zato je konstantno tudi zaporedje $h_0, h_1, h_2, \dots$. Vsa iskana celoštevilsko harmonična zaporedja so torej oblike

$$a, a, a, \dots,$$

kjer je a poljubno naravno število.

Ivan Lisac

ŠE O METODI PLOŠČINE

V 4. številki lanskega letnika Preseka smo prikazali, kako lahko z metodo ploščine rešimo nekatere naloge. Oglejmo si jih še nekaj!

Najprej dokažimo dve neenakosti:

1. Naj bosta a in b dolžini katet, c dolžina hipotenuze in v dolžina višine na hipotenuzo pravokotnega trikotnika. Potem velja $c + v > a + b$. Dokaži!

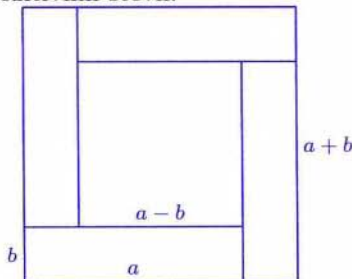
Ker imamo pravokotni trikotnik, pričnemo s Pitagorovim izrekom $c^2 = a^2 + b^2$. Desno stran dopolnimo do popolnega kvadrata in zagotovimo, da se enakost ohrani. Dobimo enačbo $c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$. Na levi strani te enačbe upoštevamo, da je $ab = cv$ (ploščina pravokotnega trikotnika!), torej dobimo $c^2 + 2cv = (a + b)^2$. Nato dopolnimo še levo stran do popolnega kvadrata, kar nam da enačbo $c^2 + 2cv + v^2 = (a + b)^2 + v^2$ oziroma $(c + v)^2 = (a + b)^2 + v^2$. Če v tej enakosti odštejemo pozitivno število v^2 na desni strani, preide v neenakost $(c + v)^2 > (a + b)^2$. Ker je koren monotona funkcija in sta izraza $c + v$ in $a + b$ pozitivna, se neenakost pri korenjenju ohrani. Sledi $c + v > a + b$.

2. Dokaži, da za vsak par pozitivnih števil a , b velja neenakost

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Ob tej znani neenakosti se je tudi težko spomniti na metodo ploščine. Morda nas na geometrijo spominja desna stran neenakosti, kjer je zapisana geometrijska sredina dveh pozitivnih števil.

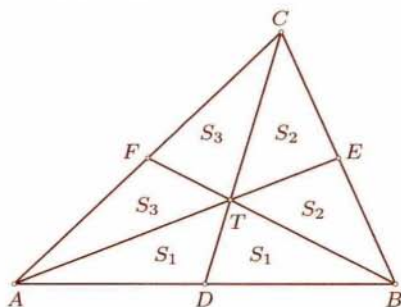
S slike, ki spominja na enega izmed dokazov Pitagorovega izreka, razberemo zvezo $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab \geq 4ab$. Njen začetek in konec dasta po korenjenju željeno neenakost $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.



Skupaj si pogledjmo še nalogi, v katerih uporabimo izrek: Trikotniki z enakimi osnovnicami in enakimi višinami na te osnovnice imajo enako ploščino.

1. Dokaži, da razdelijo težiščnice trikotnik na 6 ploščinsko enakih trikotnikov.

Na sliki najdemo tri pare trikotnikov. Trikotnika v paru imata za osnovnico vsak polovico pripadajoče stranice in enaki višini. Zato sta ploščinsko enaka, kar je upoštevano že pri oznakah na sliki.



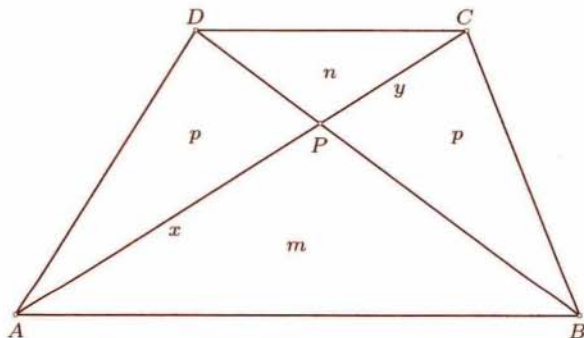
Nato upoštevamo, da imata iz enakega razloga enako ploščino trikotnika ADC in DBC ter ABF in FCB . Torej dobimo enačbi

$$S_1 + 2S_3 = S_1 + 2S_2 \quad \text{in} \quad S_3 + 2S_1 = S_3 + 2S_2.$$

Iz prve sledi $S_3 = S_2$, iz druge $S_2 = S_1$.

2. Diagonali poljubnega trapeza delita trapez na štiri trikotnike. Ploščini trikotnikov nad osnovnicama trapeza sta m in n . Izračunaj ploščino trapeza.

Izberimo oznake kot na sliki. Trikotnika ABC in ABD imata enaki osnovnici in enaki višini na ti osnovnici, zato sta njuni ploščini enaki.



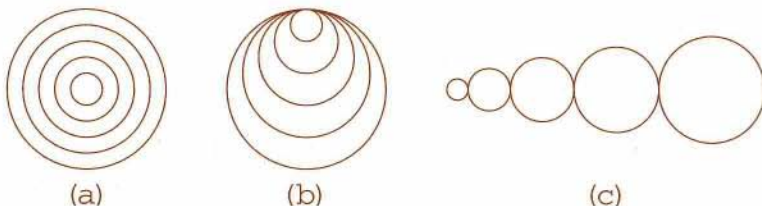
S slike sledi zveza med ploščinami $S(ABC) = m + S(BCP) = m + S(APD) = S(ABD)$.

Torej imata trikotnika BCP in APD enako ploščino, ki jo označimo s p . Daljico AP označimo z x in daljico PC z y . Vemo tudi, da sta ploščini trikotnikov APD in PCD v razmerju pripadajočih osnovnic (izrek pod točko 3 v prvem članku s tem naslovom), torej $\frac{p}{n} = \frac{x}{y}$.

Enak zaključek velja za ploščini trikotnikov ABP in BCP , kar da podobno enačbo $\frac{m}{p} = \frac{x}{y}$.
 Sklepamo, da je $\frac{m}{p} = \frac{p}{n}$, torej je $p = \sqrt{mn}$. Iskana ploščina trapeza pa je enaka $S = m + n + 2\sqrt{mn}$.

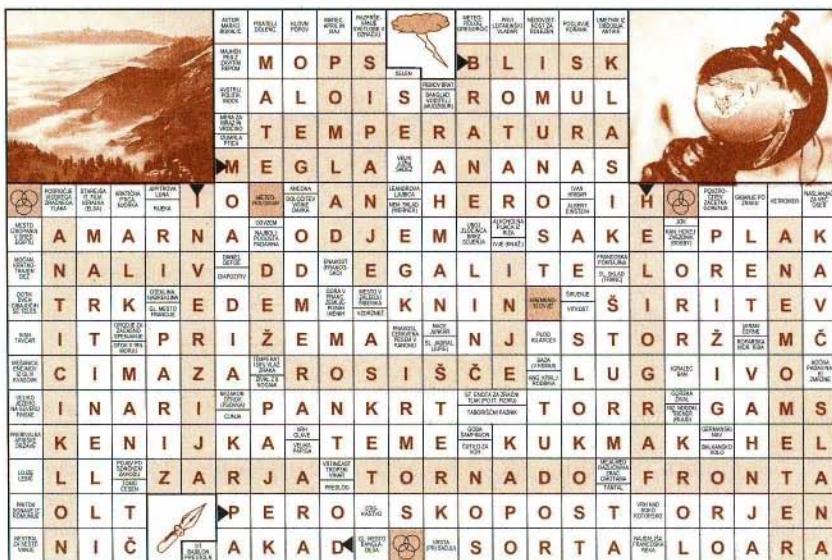
Silva Kmetič

KROGI, KROGI – Rešitev s str. 265



Martin Juvan

KRIŽANKA “KAJ PA VREME” – Rešitev s str. 288



KJE OBMIRUJE VOZEL? – Rešitev s str. 269

S preprostim premislekom lahko pridemo do matematičnega modela naloge.

Ravnovesni položaj vozla ustreza stanju najmanjše potencialne energije sistema uteži. Ker so uteži enako težke, je ta najmanjša, kadar je skupna dolžina tistih delov vrvic, ki so pod desko, največja. Navedeni pogoj je očitno izpolnjen, ko je vozec v taki točki, da je skupna dolžina delov vrvic, ki so nad mizo, najmanjša. Če z A, B, C označimo točke, kjer so na mizi luknjice, ločimo dva primera:

1. Točke A, B in C leže na isti premici. Primerjava razdalj takoj pokaže, da se ustavi vozec v tisti od teh treh točk, ki leži med ostalima dvema.
2. Točke A, B in C ne leže na isti premici. Tedaj je pred nami lep matematični problem:

V trikotniku ABC določi točko P tako, da bo vsota njenih oddaljenosti od oglišč A, B, C čim manjša.

Naloga sodi med slavne probleme francoskega matematika Fermata, ki je živel v 17. stoletju. Imenuje se Fermatov problem za Torricelija po italijanskem fiziku, ki mu je Fermat po tedanji navadi nalogo zastavil.

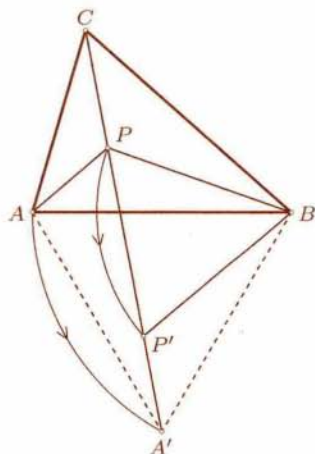
V matematični literaturi najdemo veliko različnih rešitev zastavljene naloge. Zelo lepa se mi zdi elementarna rešitev, ki jo je leta 1929 objavil nemški matematik J. E. Hofmann. Oglejmo si jo!

Naj bo najprej P poljubna točka v notranjosti trikotnika. Povežimo jo z oglišči A, B in C in zavrtimo trikotnik ABP okrog oglišča B za kot 60° iz trikotnika ABC ven. Točki, v kateri pri tem preideta P in A , označimo s P' in A' , kot na sliki 1.

Legajo točke A' je odvisna le od točk A in B in je za vse izbire točke P ista.

Ker je $\overline{BA} = \overline{BA'}$ in je $\angle ABA' = 60^\circ$, je trikotnik ABA' enakostraničen. Podobno ugotovimo, da je tudi trikotnik BPP' enakostraničen. Zato $\overline{PB} = \overline{PP'}$. Velja še $\overline{PA} = \overline{P'A'}$, saj smo $P'A'$ dobili z zasukom iz PA . Tako dobimo za vsoto oddaljenosti poljubne točke P od oglišč trikotnika ABC zvezo

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{A'P'} + \overline{P'P} + \overline{PC}.$$



Slika 1.

Desna stran te enakosti pomeni dolžino lomljenke med točkama A' in C , ki je v splošnem lomljena v točkah P in P' .

Iščemo torej tako točko P , pri kateri bo ta lomljenka najkrajša, ko bo torej popolnoma ravna (na sliki 1 je narisana že kar ta primer). Ker je trikotnik BPP' enakostraničen, je $\sphericalangle BPP' = \sphericalangle BP'P = 60^\circ$. Sledi

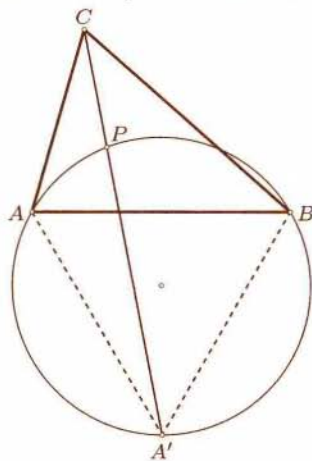
$$\sphericalangle BPC = 180^\circ - \sphericalangle BPP' = 120^\circ$$

in

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle A'P'B = 180^\circ - \sphericalangle PP'B = 120^\circ.$$

Iskana točka P , za katero je vsota $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ minimalna, je torej točka, iz katere vidimo vsako od stranic trikotnika ABC pod kotom 120° . (To sledi tudi iz ravnovesja sil, vendar smo po naši poti dobili več podatkov o točki P .)

Če enakostraničnemu trikotniku $AA'B$ očrtamo krožnico, leže točke, iz katerih vidimo stranico AB pod kotom 120° , na krajšem od obeh krožnih lokov nad tetivo AB . Zato poteka Hofmannova konstrukcija točke P takole: Nad eno od stranic trikotnika, denimo AB , konstruiramo navzven enakostranični trikotnik in mu očrtamo krožnico. Nato povežemo med seboj tisti oglišči enakostraničnega in prvotnega trikotnika, ki sta različni od A in B . Točka P je presečišče te spojnice in enakostraničnemu trikotniku očrtane krožnice (slika 2).



Slika 2.

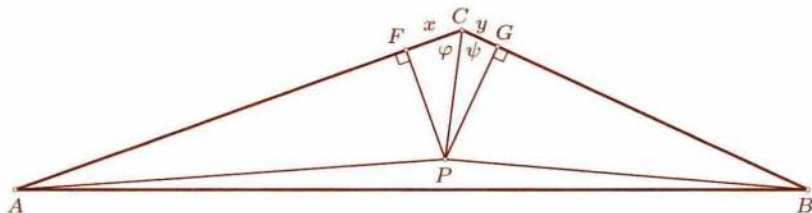
Konstrukcija točke P ni možna, če je kakšen od trikotnikovih kotov večji od 120° . Točka, katere vsota oddaljenosti od trikotnikovih oglišč je najmanjša, pa kljub temu obstaja. Če je $\sphericalangle ACB = \gamma > 120^\circ$, je iskana točka kar oglišče C takega trikotnika.

Velja celo

$$\overline{AC} + \overline{BC} < \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP},$$

za vsako točko $P \neq C$, ne gleda na to, kje v ravnini trikotnika ABC se P nahaja.

Dokaz neenakosti samo ilustrirajmo za primer, ko je lega točke P glede na trikotnik ABC taka kot na sliki 3, s katere so razvidne tudi posamezne oznake.



Slika 3.

Velja

$$x = \overline{CP} \cos \varphi, \quad y = \overline{CP} \cos \psi \quad \text{in} \quad \varphi + \psi = \gamma.$$

Od tod dobimo oceno

$$\begin{aligned} x + y &= \overline{CP}(\cos \varphi + \cos \psi) = \\ &= 2\overline{CP} \cdot \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2} < 2\overline{CP} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} < \overline{CP}, \end{aligned}$$

ker je $60^\circ < \frac{\gamma}{2} < 90^\circ$ in zato $0 < \cos \frac{\gamma}{2} < \frac{1}{2}$.

Iz te ocene in zvez

$$\overline{AC} = \overline{AF} + x \quad \text{ter} \quad \overline{BC} = \overline{BG} + y$$

sledi

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AF} + \overline{BG} + x + y < \overline{AF} + \overline{BG} + \overline{CP}.$$

$\overline{AF}$ in $\overline{BG}$ sta kateti v pravokotnih trikotnikih APF in BPG in torej krajši od hipotenuz $\overline{AP}$ in $\overline{BP}$. Sledi

$$\overline{AC} + \overline{BC} < \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP},$$

kar smo želeli dokazati.

Marija Vencelj

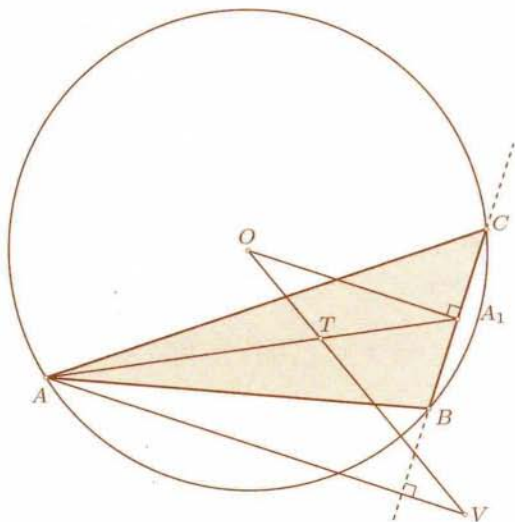
NEKOLIKO DRUGAČNI KONSTRUKCIJSKI NALOGI – Rešitev 2. naloge s str. 209

V 4. številki Preseka smo vam zastavili naslednjo nalogo:

Nariši trikotnik, če so podani: oglišče A , središče očrtane krožnice O in višinska točka V .

Obstaja več različnih rešitev naloge. Oglejmo si tako, ki ne zahteva veliko geometrijskega znanja.

Seveda je krožnica s središčem v O in s polmerom $\overline{OA}$ iskanemu trikotniku očrtana krožnica. Vemo tudi, da leže v vsakem trikotniku središče očrtane krožnice O , težišče T in višinska točka V na isti (Eulerjevi) premici. Pri tem leži T vedno na daljici OV tako, da jo tretjini, natančneje $\overline{OT} = \frac{1}{2}\overline{TV}$. Težišče T tretjini tudi težiščnico AA_1 , tako da je $\overline{A_1T} = \frac{1}{2}\overline{TA}$ (slika).



Zato sta trikotnika ATV in A_1TO podobna, torej je tudi $\overline{OA_1} = \frac{1}{2}\overline{AV}$ in $OA_1 \parallel AV$.

Sledeč tej analizi zlahka konstruiramo točko A_1 . Daljico OV razdelimo na tri enake dele; težišče T je delilna točka, ki je bližje O . Narišemo premico skozi točki A in T ter skozi točko O vzporednico premici AV . Njuno presečišče je točka A_1 .

ARABSKI VZORCI – Rešitev s str. 261

Označimo z o_n obseg lika, sestavljenega iz dveh koncentričnih n -kotnikov s stranico dolžine a .

Brez posebnega truda, zadošča že uporaba Pitagorovega izreka, dobimo:

$$o_3 = 4a, \quad o_4 = 8(2 - \sqrt{2})a, \quad o_6 = 24(2 - \sqrt{3})a.$$

Nekoliko podrobneje si oglejmo rešitev za $n = 5$. Izhajajmo iz znane povezave med polmerom kroga r in stranico temu krogu včrtanega pravičnega petkotnika a :

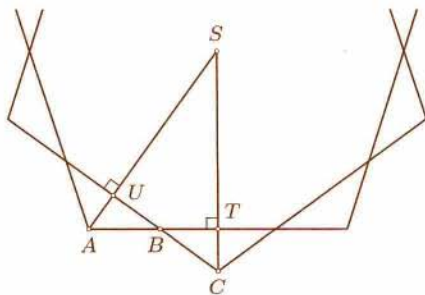
$$a = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Na desni risbi upoštevajmo podobnost trikotnikov $\triangle BCT$ in $\triangle SCU$:

$$|BC| : |TC| = |SC| : |UC|.$$

Od tod dobimo:

$$|BC| = \frac{2r}{a} \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \right).$$



Izrazimo r z a in uredimo izraz:

$$|BC| = \frac{4 - \sqrt{2(3 + \sqrt{5})}}{5 - \sqrt{5}} \cdot a.$$

Naposled se potrudimo še do obsega celotnega lika:

$$o_5 = 20 \cdot |BC|.$$

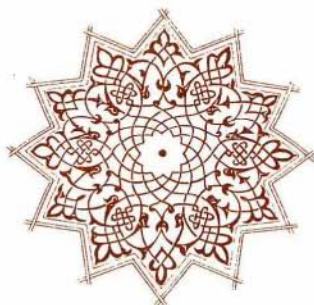
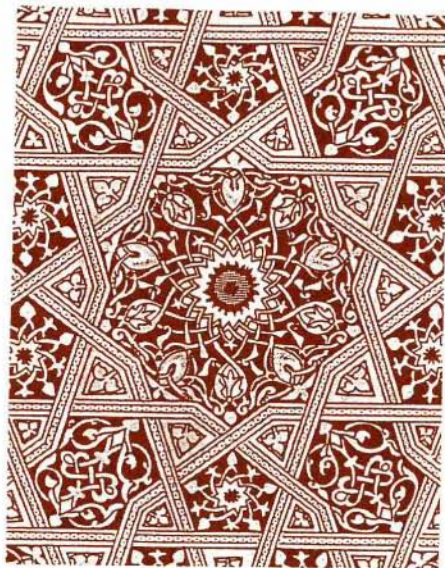
Na podoben način dobimo rešitev tudi za par koncentričnih pravičnih osemkotnikov:

$$o_8 = 32a \left(2 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{20 + 14\sqrt{2}}}{2} \right).$$

V splošnem, za par poljubnih koncentričnih pravih n -kotnikov, pa moramo pri računanju obsega uporabiti tudi kotne funkcije. Ker je pot do rezultata malodane enaka kot za par petkotnikov, navedimo le rezultat:

$$o_n = \frac{2na}{1 + \sin \frac{(n-2) \cdot 90^\circ}{n}}.$$

Zaključimo z nekaj lepimi arabskimi vzorci:



Vilko Domajnko

19. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST

Na lanskoletnem 18. mednarodnem tekmovanju mest so naši tekmovalci prejeli 5 pohval: Saša Fratina, Matija Mazi (oba Gimnazija Bežigrad), Martin Knapič (Gimnazija Šentvid), Martin Milanič (Gimnazija Koper) in Andrej Vodopivec (Gimnazija Celje).

Z novim šolskim letom se je začel tudi nov cikel tekmovanja mest. Na jesenskem krogu letošnjega tekmovanja mest so v lažjem sklopu nalog tekmovalci reševali naslednje naloge:

Prva skupina

- Po stoječih tekočih stopnicah se človek hitreje premika navzdol kot navzgor. Kaj je hitreje: vzpon in spust po stopnicah, ki se premikajo navzgor, ali vzpon in spust po stopnicah, ki se premikajo navzdol? (Predpostavimo, da so vse hitrosti konstantne, da sta hitrosti dviganja in spuščanja tekočih stopnic enaki in da je relativna hitrost premikanja človeka glede na stopnice vedno večja od hitrosti stopnic.)
- Pokaži, da ima enačba $x^2 + y^2 - z^2 = 1997$ neskončno mnogo rešitev v množici celih števil.
- V kvadratu $ABCD$ ležita točka K na stranici BC in točka M na stranici CD tako, da daljica AM razpolavlja kot $\angle KAD$. Pokaži, da je dolžina daljice AK enaka vsoti dolžin daljic DM in BK .
- a) Koliko je najmanjše število premic, ki sekajo vsa polja na šahovski plošči velikosti 3×3 ? Nariši tak primer in pokaži, da manjše število premic ne zadošča. (Premica seka polje šahovnice, če gre skozi neko notranjo točko tega polja.)
b) Reši enak problem za šahovsko tablo velikosti 4×4 .

Druga skupina

- a) Koliko je najmanjše število premic, ki sekajo vsa polja na šahovski plošči velikosti 3×3 ? Nariši tak primer in pokaži, da manjše število premic ne zadošča. (Premica seka polje šahovnice, če gre skozi neko notranjo točko tega polja.)
b) Reši enak problem za šahovsko tablo velikosti 4×4 .
- Naj bosta a in b stranici nekega trikotnika. Kolikšna je lahko dolžina tretje stranice c , da točki, kjer se vrtana in pričrtana krožnica dotikata stranice c , razdelita stranico c na tri enake dele? (Pričrtana krožnica se dotika stranice c in nosilk stranic a in b .)

3. Pokaži, da ima enačba

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6$$

neskončno mnogo rešitev v množici celih števil.

4. Koliko je največje število skakačev, ki jih lahko postavimo na šahovsko ploščo velikosti 5×5 , da se nobena dva izmed njih med seboj ne napadata? Pokaži, da je taka postavitev le ena.

V težjem sklopu nalog jesenskega kroga so tekmovalci reševali šest nalog. Objavljamo po dve za vsako skupino:

Prva skupina

1. Zaporedje $\{x_n\}$ je definirano na naslednji način:

$$x_1 = 19; \quad x_2 = 97; \quad x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

- Pokaži, da je neki člen zaporedja enak 0, in določi indeks tega člena.
2. Vsako stranico enakostraničnega trikotnika razdelimo na 10 enakih delov. Daljice, ki so vzporedne stranicam trikotnika in imajo krajišča v delilnih točkah, razdelijo prvoten trikotnik na 100 manjših trikotnikov oziroma "celic". Celice med dvema sosednjima vzporednima daljicama tvorijo "trak". Največ koliko celic lahko izberemo, da nobeni dve izmed njih ne bosta ležali na istem traku v nobeni od treh smeri?

Druga skupina

1. Zmnožimo vse izraze oblike

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{100}$$

(z vsemi možnimi kombinacijami predznakov, " $\pm$ " je "+" ali "-"). Pokaži, da je rezultat:

- a) celo število,
 - b) popolni kvadrat.
2. Dima je iznašel skrivno kodo, s katero vsako črko zamenja z neko besedo, ki ima največ 10 črk. Kodo imenujemo "dobra", če lahko odkodiramo vsako zakodirano besedo na en sam način. Serjozha je (s pomočjo računalnika) preveril, da se vsako besedo, ki je zakodirana v Dimovi kodi in nima več kot 10000 črk, moč odkodirati na en sam način. Ali od tod sledi, da je Dimova koda dobra? (Upoštevajte, da sta Dima in Serjozha Rusa in da ima cirilica 33 črk! Beseda je vsako zaporedje črk, ne glede, ali ima kakšen pomen ali ne.)

Aleš Vavpetič

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje — 25. letnik, leto 1997/98, številke 1–6, strani 1–384

MATEMATIKA

Mala šola topologije – 1. del (Marija Vencelj)	2-6
Pitagorov izrek iz trapeza (Marko Razpet)	7
O številih $11 \dots 1$ (Jože Grasselli)	20–23
Fotografija in matematika, 2. del – zaslona in ekspozicija (Peter Legiša)	66–75
Mala šola topologije – 2. del (Marija Vencelj)	76–77
Zidovi brez razpok (Tatjana Juranji)	92–95
Kako ugotovimo, da je naravno število sestavljeno, preden ga razstavimo? (Ivan Vidav)	130–136
Mala šola topologije – 3. del (Marija Vencelj)	144–145
Vsota geometrijske vrste – po geometrijsko (Marko Razpet)	168–170
Fotografija in matematika, 3. del – globinska ostrina (Peter Legiša) ...	194–201
Mala šola topologije – 4. del (Marija Vencelj)	222–223
Prvo srečanje s Fibonaccijevimi števili (Sandi Klavžar)	232–237
Nesrečno število 13 je srečno (Jože Grasselli)	258–260
Mala šola topologije – 5. del (Marija Vencelj)	274–276
Kvadratno kolo, verižnica in traktrisa (Marko in Nada Razpet)	294–299
Rešitev enačbe $x^2 + y^2 = 10^n + y$ v naravnih številih (Ivan Vidav) ...	332–336
Mala šola topologije – 6. del (Marija Vencelj)	348–350
Še o metodi ploščine (Silva Kmetič)	368–370

FIZIKA

Sto let katodne cevi (Janez Strnad)	8–12
Ali je vredno pobrati kovanec? (Andrej Likar)	102
Živalski žiroskop (Andrej Likar)	108–110
Spust po klancu (Andrej Likar)	138–140
Fizika, matematika in Murphyjev zakon (Janez Strnad)	210–214
Tek in moč (Andrej Likar)	226–227
Merjenje časovnih intervalov (Andrej Likar)	262–265
Sončeve melodije (Zoran Arsov)	270–273
Električni tok po kovini (Janez Strnad)	282–287
Nevihla – naravni visokonapetostni spektakel (Gregor Bavdek)	322–330
Dvesto let gravitacijske konstante (Janez Strnad)	354–359

ASTRONOMIJA

Sencomer (Marijan Prosén)	16-19
Planeti okrog drugih sonc (Mirjam Galičič)	34-38
Čudovita (Marijan Prosén)	78-82
O meglici Rakovici (Mirjam Galičič)	146-152
Zajec (Marijan Prosén)	158-159
Meglica in pulzar (Mirjam Galičič)	202-209
Čuvaj (Marijan Prosén)	228-230
Razlika med sinodskim in siderskim mesecem (Karel Šmigoc)	266-269
Srce (Marijan Prosén)	338-340
Princeska (Marijan Prosén)	364-366

RAČUNALNIŠTVO

Varne poti in kratke poti (Sandi Klavžar)	24-31
Križi – reš. str. 136 (Martin Juvan)	100
F0 0F C7 C8 in procesor Pentium (Martin Juvan, Jože Marinček)	141-143
Praštevilski dvojčki in procesor Pentium (Roman Drnovšek)	162-166
Razvoj mikroprocesorjev (Matija Lokar)	216-219
Praštevilsko dežela – reš. str. 360 (Matija Lokar)	278
ACM in mednarodno tekmovanje iz programiranja (Matija Lokar)	290
Ponovno sam sebe (Martin Juvan)	III
Pripomočki za deskanje po Internetu (Aleksander Vesel)	342-347
Ponovno sam sebe - popravek (Iz uredništva)	367

NOVICE

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass – ob stoletnici smrti (Anita Močnik)	13-15
Franč Močnik – odkrit doprni kip (Zvonko Perat)	43-47
Petdeset let piona (Janez Strnad)	86-91
28. fizikalna olimpiada: O, Kanada (Gašper Tkačik)	152-153
38. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko)	157
28. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	159
Pogovor s prof. dr. Dušanom Repovšem (Timotej Žohar)	219-221

NOVE KNJIGE

Zbirka Sigma 1997 (Matjaž Omladič)	106-107
--	---------

PISMA BRALCEV

Enakostranični trikotnik na rdeče-modri ravnini (Martin Zadnik)	276-278
--	---------

NALOGE

Vsota in produkta – reš. str. 102 (Martin Juvan).....	12
Na gugalnici – reš. str. 105 (Marija Vencelj)	15
Hitro kvadriranje števil, ki se končujejo s števk 5 – reš. str. 82 (Marija Vencelj)	31
Naloga k članku Planeti okrog drugih sonc (Marian Prosén)	39
Kubi števk – reš. str. 98 (Martin Juvan)	39
Številka križanka – reš. str. 91 (Dragoljub M. Milošević, prevod Marija Vencelj)	40-41
Razkrinkajmo Davida Coperfielda – reš. str. 104 (Matej Mencinger)	42
Metanje kocke – reš. str. 84 (Martin Juvan)	47
Igra – reš. str. 171 (D. M. Milošević, prevod B. Japelj).....	75
Konjev skok – reš. str. 137 (D. M. Milošević, prevod B. Japelj)	99
Premisli in odgovori – reš. str. 170 (Marija Vencelj).....	101
Poenostavi – reš. str. 170 (Marija Vencelj)	110
Šestkotniške tromine – reš. str. 240 (Jurij Kovič)	156
Produkt in vsoti – reš. str. 223 (Martin Juvan)	156
Številka križanka – reš. str. 239 (Marija Vencelj).....	167
Kako uganemo odstranjeno števk? – reš. str. 231 (Marija Vencelj)	171
Raztrgani lepak – reš. str. 240 (D. M. Milošević, priredba M. Vencelj)....	171
Nekoliko drugačni konstrukcijski nalogi – reš. str. 291 in 374 (Marija Vencelj)	209
Vsak trikotnik je enakokrak – reš. str. 281 (Olga Arnuš)	215
Rezanje palic – reš. str. 290 (D. M. Milošević, prevod B. Japelj)	230
Za iznajdljive – reš. str. 366 (Dragoljub M. Milošević)	260
Arabski vzorci – reš. str. 376 (Vilko Domajnko)	261
Krogi, krogi – reš. str. 370 (Martin Juvan)	265
Kje obmiruje voz? – reš. str. 371 (Marija Vencelj).....	269
Dva satelita – reš. str. 351 (Majda Lavrič).....	273
Lahka številka križanka – reš. str. 359 (Marija Vencelj)	279
Nihalo na vodilu – reš. str. 340 (Milan Ambrožič).....	287
Sadje – reš. str. 350 (Martin Juvan)	II
Celoštevilka harmonična zaporedja – reš. str. 367 (Ivan Lisac).....	331
Enačba s celoštevilsko rešitvijo – reš. str. 363 (Dušan Murovec).....	331

REŠITVE NALOG

Rešitve nalog, zastavljenih v pogovoru s prof. Dušanom Repovšem (Timotej Žohar).....	300
---	-----

TEKMOVANJA

33. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	48-50
17. državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	50-51
41. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko)	52-54
35. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko)	54-57
18. mednarodno matematično tekmovanje mest – rešitve iz XXIV, P-6, str. 378 (Aleš Vavpetič)	57-62
18. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog – reš. str. 125 (Aleš Vavpetič)	62-63
Mednarodna matematična olimpiada 1998 (Matjaž Željko)	111
32. Področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje – reš. str. 175 (Aleksander Potočnik)	111-115
16. Področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 177 (Mirko Cvahte, Zlatko Bradač)	116-118
Naloge s predtekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1996/97 (Ciril Dominko)	118-123
Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce – reš. str. 180 (Matjaž Željko)	123-125
Urniki tekmovanj v letu 1998 (Darjo Felda)	173-175
Rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1996/1997 – s str. 118 (Bojan Golli)	184-191
33. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – reš. str. 301 (Aleksander Potočnik)	241-242
16. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 303 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte)	242-246
Naloge z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1996/97 (Ciril Dominko)	247-251
38. mednarodna matematična olimpiada – rešitvi izbranih nalog (Matjaž Željko)	251-253
41. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – reš. str. 306 (Matjaž Željko)	253-255
Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado – reš. str. 317 (Matjaž Željko)	255-256
Rešitve nalog z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1996/97 – s str. 247 (Bojan Golli)	311-317
19. mednarodno matematično tekmovanje mest (Aleš Vavpetič)	378-379

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

Temeljnost (Marija Vencelj)	23
Križanka "Fizikalne vede" – reš. str. 101 (Marko Bokalič)	32-33
Dokazal si je (Vilko Domajnko)	41
Križanka "V Cerknem odkrit kip slovenskemu matematiku" – reš. str. 172 (Marko Bokalič)	96-97
Hitrost v geometriji (Vilko Domajnko)	100
Gobelin "Motocikel" – reš. str. 172 (Marko Bokalič)	107
Žepni modeli poliedrov – reš. str. 201 (Vilko Domajnko)	154-156, II
Križanka "Voščilo za jubilej" – reš. str. 231 (Marko Bokalič)	160-161
Grajski labirint – reš. str. 240 (Iztok Arčon)	192, III
Križanka "Področja matematike" – reš. str. 293 (Marko Bokalič)	224-225
Juniper Green – Igra z delitelji in večkratniki (Nataša Vrbancič Kopač)	238-239
Domača naloga – reš. str. 336 (Mojca Lokar)	280-281
Križanka "Kaj pa vreme?" – reš. str. 370 (Marko Bokalič)	288-289
Križanka "Ob bližnji 80-letnici našega znanstvenika" – reš. str. 375 (Marko Bokalič)	352-353

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, šolsko leto 1997/98, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1997/98 je za posamezne naročnike **1.620 SIT**, za skupinska naročila šol **1.350 SIT**, posamezna številka **324 SIT**, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1354

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Yahoo! Games
chess, bridge, hearts...

win 2 tickets and \$5,000
to tour the globe! [click here now!](#)
[theglobe.com](#)

[Oscar® Winners](#)

Search [options](#)

Yahoo! Online - \$14.95 a month Internet access - [sign up today](#)

[Yellow Pages](#) - [People Search](#) - [Maps](#) - [Classifieds](#) - [Personals](#) - [Chat](#) - [Email Shopping](#) - [My Yahoo!](#) - [News](#) - [Sports](#) - [Weather](#) - [Stock Quotes](#) - [more...](#)

- **Arts and Humanities**
[Architecture](#), [Photography](#), [Literature](#)...
- **Business and Economy [Xtra!]**
[Companies](#), [Finance](#), [Employment](#)...
- **Computers and Internet [Xtra!]**
[Internet](#), [WWW](#), [Software](#), [Multimedia](#)...
- **Education**
[Universities](#), [K-12](#), [College Entrance](#)...
- **Entertainment [Xtra!]**
[Cool Links](#), [Movies](#), [Music](#), [Humor](#)...
- **Government**
[Military](#), [Politics \[Xtra!\]](#), [Law](#), [Taxes](#)...
- **Health [Xtra!]**
[Medicine](#), [Drugs](#), [Diseases](#), [Fitness](#)...
- **News and Media [Xtra!]**
[Current Events](#), [Magazines](#), [TV](#), [Newspapers](#)...
- **Recreation and Sports [Xtra!]**
[Sports](#), [Games](#), [Travel](#), [Autos](#), [Outdoors](#)...
- **Reference**
[Libraries](#), [Dictionaries](#), [Phone Numbers](#)...
- **Regional**
[Countries](#), [Regions](#), [U.S. States](#)...
- **Science**
[CS](#), [Biology](#), [Astronomy](#), [Engineering](#)...
- **Social Science**
[Anthropology](#), [Sociology](#), [Economics](#)...
- **Society and Culture**
[People](#), [Environment](#), [Religion](#)...

[What's New](#) - [Weekly Picks](#) - [Today's Web Events](#) - [Yahoo! Internet Life](#) - [Message Boards](#)
[Yahoo!igans!](#) - [Seniors' Guide](#) - [Apply for a Yahoo! Visa Card](#) - [Yahoo! Gear](#) - [3D Stock Viewer](#)

World Yahoos [Australia & NZ](#) - [Canada](#) - [Denmark](#) - [France](#) - [Germany](#) - [Japan](#) - [Korea](#)
[Norway](#) - [SE Asia](#) - [Sweden](#) - [UK & Ireland](#)

Yahoo! Metros [Atlanta](#) - [Austin](#) - [Boston](#) - [Chicago](#) - [Dallas / Fort Worth](#) - [Los Angeles](#)
Get Local [Miami](#) - [Minneapolis / St. Paul](#) - [New York](#) - [S.F. Bay](#) - [Seattle](#) - [Wash D.C.](#)

Smart Shopping with

[How to Suggest a Site](#) - [Company Info](#) - [Privacy Policy](#) - [Contributors](#) - [Yahoo! How-To](#)

