

4

25 (1997-1998)

PRE SEK

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE





list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, leto 1997/98, številka 4, strani 193-256

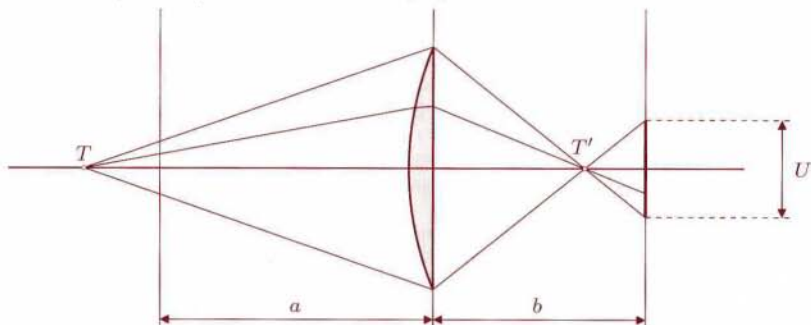
VSEBINA	
MATEMATIKA	Fotografija in matematika, 3. del – Globinska ostrina (Peter Legiša) 194-201
	Mala šola topologije – 4. del (Marija Vencelj) 222-223
	Prvo srečanje s Fibonaccijevimi števili (Sandi Klavžar) 232-237
FIZIKA	Fizika, matematika in Murphyjev zakon (Janez Strnad).... 210-214
	Tek in moč (Andrej Likar) 226-227
ASTRONOMIJA	Meglica in pulzar (Mirjam Galičič) 202-209
	Čuvaj (Marijan Prosén) 228-230
RAČUNALNIŠTVO	Razvoj mikroprocesorjev (Matija Lokar) 216-219
NOVICE	Pogovor s prof. dr. Dušanom Repovšem (Timotej Žohar) .. 219-221
NALOGE	Nekoliko drugačni konstrukcijski nalogi (Marija Vencelj) 209
	Vsak trikotnik je enakokrak (Olga Arnuš) 215
	Rezanje palic (D. M. Milošević, prevod B. Japelj) 230
REŠITVE NALOG	Žepni modeli poliedrov – s str. 154 (Vilko Domajnko) 201
	Produkt in vsoti – s str. 156 (Martin Juvan) 223
	Kako uganemo odstranjeno števko? – s str. 171 (Marija Vencelj) 231
	Križanka "Voščilo za jubilej" – s str. 160 (Marko Bokalič) 231
	Številka križanka – s str. 167 (Marija Vencelj) 239
	Šestkotniške tromine – s str. 156 (Jurij Kovič) 240
	Raztrgani lepak – s str. 171 (Dragoljub M. Milošević) 240
	Grajski labirint – s str. 192 (Iztok Arčon) 240
	Križanka "Področja matematike" (Marko Bokalič) 224-225
ZANIMIVOSTI	Juniper Green – Igra z delitelji in večkratniki (Nataša Vrbancič Kopač) 238-239
RAZVEDRILO	33. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 241-242
TEKMOVANJA	16. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) 242-246
	Naloge z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1996/97 (Ciril Dominko) 247-251
	38. mednarodna matematična olimpiada – rešitvi izbranih nalog (Matjaž Željko) 251-253
	41. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) 253-255
	Izbirni testi za mednarodno matematično olimpiado (Matjaž Željko) 255-256
NA OVITKU	Zelenec je bil slikan s 400 mm objektivom na razdalji 3 m. Kljub doka zaprti zaslonki (zaslonsko število 9.5) je ozadje zelo zabrisano I Cvetoči travnik je bil slikan z goriščnico 280 mm. Čeprav je bila zaslonka zaprta vsaj na 11, globinska ostrina ne sega do najbližjih rastlin (zgoraj). Jesenska slika poplavljenega in poledenelega Barja je bila posneta z goriščnico 20 mm in krožnim polarizatorjem. Pri zaslonskem številu 5.6 sega globinska ostrina od najbližjih točk do neskončnosti (spodaj) II
	Sliki k članku Meglica in pulzar na strani 202 III
	Obe sliki sta posneta z istega mesta s 50 mm objektivom, zgoraj pri $z = 1.4$, spodaj pri $z = 22$. Slike na I, II in IV je posnel Peter Legiša IV

FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA, 3. del – GLOBINSKA OSTRINA

Razmazani krožec

Fotografski objektiv nam (načeloma) napravi ostro sliko predmetne ravnine na ravnino filma. Kako pa je s slikami točk, ki ne leže na predmetni ravnini?

Spet si bomo stvari poenostavili in objektiv nadomestili z eno samo tanko lečo (slika 1) z goriščno razdaljo f .



Slika 1.

Denimo, da imamo objektiv naravnčan tako, da ravnino, ki je za a oddaljena od optičnega središča leče, ostro preslika na film. Če je b razdalja ravnine filma od optičnega središča leče, velja

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Če je $a' > a$ in

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f},$$

je $b' < b$. Ostra slika točke T na sliki 1 torej nastane pred filmom.

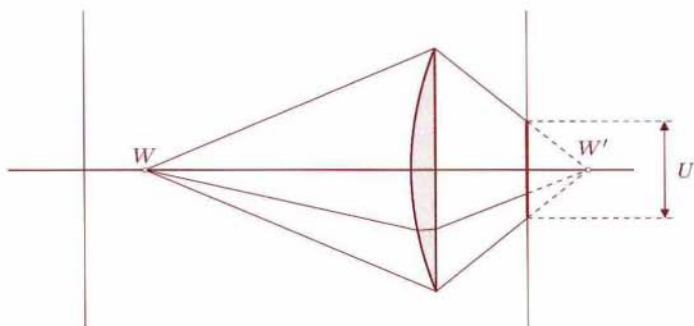
Na samem filmu pa se žarki iz točke T razmažejo po krogu s premerom U . Če je U zelo majhen, tega tudi pri nekajkratni povečavi ne opazimo in se nam slika točke T še zmeraj zdi ostra. Pri maloslikovnem ali Leica (35 mm) formatu meri slička na filmu $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$. Obstaja (ne povsem splošno sprejet) dogovor, da je **največji dovoljeni premer**

razmazanega krožca na filmu enak

$$U_0 = \frac{1}{30} \text{ mm}.$$

Pri petkratni povečavi sličice na filmu (to je na velikost $12 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}$) se nam potem razmazani krožec še zmeraj zdi bolj ali manj kot točka, saj smo ravno na meji ločljivosti človeškega očesa pri gledanju od blizu.

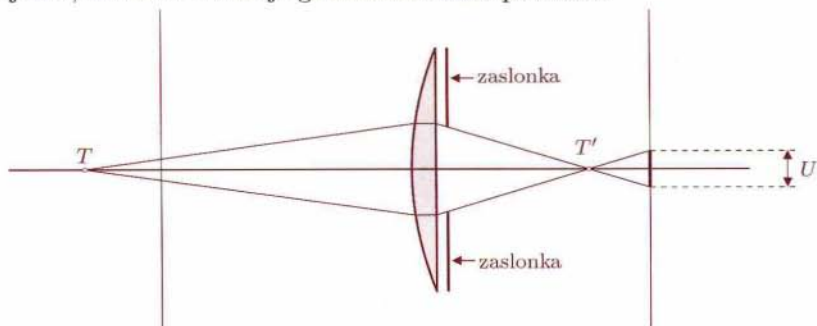
Podobno nam slika manj oddaljene točke W nastane za filmom (slika 2).



Slika 2.

Vidimo torej, da v skladu z našim dogovorom preslika objektiv na film sprejemljivo "ostro" določen del prostora, ki vsebuje predmetno ravnino. Temu delu prostora pravimo *območje globinske ostrine*. Včasih pa s tem pojmom mislimo le na širino tega območja.

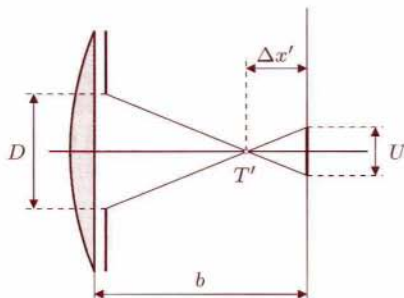
Območje globinske ostrine lahko povečamo, če zapremo zaslonko. Pri bolj zaprti zaslonki se nam bo slika točke T manj razmazala (slika 3), zato je jasno, da se bo območje globinske ostrine povečalo.



Slika 3. Zaslonka prestreže robne žarke.

Tako smo zdaj ugotovili še drugo funkcijo zaslonke. Poleg uravnavanja količine svetlobe, ki prihaja skozi objektiv, vpliva še na območje globinske ostrine. Kratkovidni in daljnovidni ljudje brez očal ali z neustreznimi očali pogosto pripirajo oči. Z zmanjšanjem odprtine si skušajo povečati območje globinske ostrine in doseči, da bi se jim slike oddaljenih predmetov na mrežnici manj razmazale.

Poskusimo zdaj kaj izračunati. Spet se preselimo v stanje na sliki 1, le da z zaslonko. Naj bo D premer odprtine zaslonke (slika 4).



Slika 4.

Naj bo T' ostrá slika točke T in $\Delta x'$ razdalja med T' in filmom. Zaradi podobnosti trikotnikov je

$$\Delta x' : U = (b - \Delta x') : D.$$

Ker je U majhen, je $\Delta x'$ majhen in tako $b - \Delta x' \doteq b$. Upoštevajmo, da je $f/D = z$, kjer je z zaslonsko število, in

$$b = f + x' = f + mf = (1 + m)f,$$

kjer je $m = b/a$ povečava (glejte prvi in drugi članek iz te serije). Od tod je

$$\Delta b = \Delta x' = (1 + m)zU,$$

kjer je U premer razmazanega krožca. Torej je

$$U = \frac{\Delta x'}{(1 + m)z}. \quad (1)$$

Če je $U = U_0 = \frac{1}{30}$ mm, je

$$\Delta b = \Delta x' = (1 + m)zU_0.$$

Efektivno zaslonsko število

Spomnimo se, da smo v prejšnjem članku dokazali, da je osvetljenost slike enaka

$$\frac{\pi}{4} L \frac{1}{((1+m)z)^2},$$

kjer je L svetlost slike in z zaslonsko število, na katero je zaprt naš objektiv.

Definirajmo *efektivno zaslonsko število* z_e kot

$$z_e = (1+m)z,$$

kjer je m povečava. Potem lahko rečemo: Osvetljenost slike je odvisna le od svetlosti originala in efektivnega zaslonskega števila. Natančneje:

Osvetljenost slike je sorazmerna svetlosti originala in obratno sorazmerna kvadratu efektivnega zaslonskega števila z_e .

Ravnokar smo ugotovili:

Pri efektivnem zaslonskem številu z_e sme slika nastati največ

$$z_e U_0$$

stran od filma, da je ostra.

Za oddaljene predmete je $m \doteq 0$ in se tako efektivno zaslonsko število ujema s tistim, ki smo ga naravnali na objektivu.

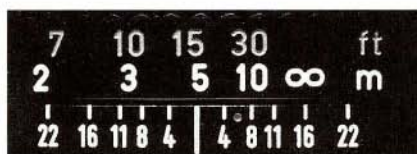
Pri $z_e = 16$ je recimo

$$z_e U_0 = \frac{16}{30} \text{ mm} = \frac{8}{15} \text{ mm}.$$

Denimo, da ostrimo z odmikanjem objektivu od filma po vijačnici. Ugotovimo, kolikšen zasuk odgovarja odmiku za $8/15$ mm. Nato na vsako stran črte, ki označuje oddaljenost, odmerimo ta zasuk in tam napišemo 16 (slika 5). Na ta način smo konstruirali *lestvico za globinsko ostrino* pri zaslonki 16. Če je fotografirani objektiv (z goriščno razdaljo 50 mm) naravn na oddaljenost 3 metre, sega območje globinske ostrine od nekaj manj kot 2 metrov do nekaj manj kot 10 metrov.



Slika 5. Lestvica globinske ostrine za več zaslonских števil.



Slika 6. Takole smo objektiv naravnali na hipergoriščno razdaljo pri zaslonском številu 16.

Hipergoriščna razdalja

Pri danem zaslonском številu z želimo objektiv naravnati na *hipergoriščno razdaljo* H_z , pri kateri bo globinska ostrina segala ravno do neskončnosti.

Ker gre za slikanje oddaljenih predmetov, lahko privzamemo, da je $m = 0$. Objektiv bomo naravnali tako, da bo slika neskončno oddaljene točke ravno še "ostra", se pravi, da bo nastala zU_0 **pred** filmom. Se pravi, izteg x' objektiva bo znašal ravno dovoljenih

$$zU_0.$$

Iz znane enačbe $xx' = f^2$ je ustrezni x enak

$$x = \frac{f^2}{zU_0}$$

in od tod je razdalja med predmetom in filmom $H = x + x' + 2f \doteq x + 2f$.

$$H_z \doteq 2f + \frac{f^2}{zU_0}.$$

Za najbližjo točko, ki bo še ostra, bo slika nastala zU_0 **za** filmom, torej $2zU_0$ za sliko neskončne točke. Ustrezno razdaljo izračunamo kot zgoraj:

$$d \doteq 2f + \frac{f^2}{2zU_0} \doteq \frac{H_z}{2}.$$

Npr. za $f = 50$ mm in $z = 16$ je

$$H_{16} \doteq \left(100 + \frac{2500 \cdot 30}{16} \right) \text{ mm} \doteq 5 \text{ m}.$$

Najbližja še "ostro" upodobljena točka pa bo oddaljena

$$d \doteq \left(100 + \frac{2500}{16} \cdot 15 \right) \text{ mm} \doteq 2'5 \text{ m}.$$

To seveda lahko brez računanja naravnamo, če imamo lestvico globinske ostrine kot na sliki 6.

Za $z = 2'8$ in $f = 50$ mm pa je

$$H \doteq \left(100 + \frac{2500 \cdot 30}{5'6} \right) \text{ mm} \doteq 27 \text{ m}.$$

Območje globinske ostrine bo torej segalo od 13'5 m do ∞ . Za $z = 1'4$ in $f = 50$ mm bo $H \doteq 54$ m in območje globinske ostrine bo segalo od 27 m do ∞ .

Število H se pri danem z povečuje približno s kvadratom goriščne razdalje.

Za $f = 300$ mm in $z = 2'8$ je $H \doteq 960$ m. Globinska ostrina bo segala le od 480 m do ∞ .

Objektiv z odprtino 1 : 2'8 in goriščno razdaljo 300 mm tehta 2–3 kg in stane toliko kot motorno kolo. Velika svetlobna jakost omogoča kratke osvetlitve. Zato lahko fotoreporterji z njim na športnih tekmovanjih posnamejo slike, na katerih je gibanje tekmovalca "zamrznjeno". Ozadje pa je zaradi majhnega območja globinske ostrine zabrisano.

Pri 20 mm (širokokotnem) objektivu in $z = 16$ pa je

$$H = \left(40 + \frac{400 \cdot 30}{16} \right) \text{ mm} \doteq 0'8 \text{ m}.$$

Globinska ostrina pri zaslonki 16 sega od 0'4 m do neskončnosti! S širokokotnim objektivom torej ni problem ostro upodobiti vse od zelo bližnjih predmetov do neskončnosti. Seveda pa bodo oddaljeni predmeti na sliki zelo majhni.

Globinska ostrina pri slikanju iz bližine

Privzeli bomo, da je izteg x' tako velik, da je $\Delta x'$ majhen v primerjavi z x' .

Če se x' poveča, se zaradi enačbe

$$xx' = f^2$$

zmanjša x . Velja:

$$(x - \Delta x)(x' + \Delta x') = f^2.$$

Odštejmo prejšnjo enačbo od zadnje, pa je

$$x\Delta x' - (x' + \Delta x')\Delta x = 0.$$

Po privzetku je $x' + \Delta x' \doteq x'$ in od tod

$$\Delta x = \frac{x}{x'}\Delta x'.$$

Celotno območje globinske ostrine ima širino

$$2\Delta x = 2\frac{x}{x'}\Delta x'.$$

Upoštevajmo, da je $x = m^{-1}f$, $x' = mf$, pa je celotno območje globinske ostrine široko

$$\frac{2}{m^2}(1+m)zU_0 =$$

$$= \frac{2}{m^2} \cdot z_e U_0.$$

Vidimo, da je v tej formuli izginil f . Torej:

Pri slikanju iz bližine je območje globinske ostrine neodvisno od goriščne razdalje f .

Pri $m = 1$ (slika na filmu je naravne velikosti) znaša območje globinske ostrine:

- a) pri $z = 16$ ($z_e = 32$) približno 2 mm;
- b) pri $z = 4$ ($z_e = 8$) približno $\frac{1}{2}$ mm;
- c) pri $z = 32$ ($z_e = 64$) približno 4 mm.

Hrošča, ki je debelejši kot 4 mm, torej pri razmerju 1 : 1 ne moremo v celoti ostrega spraviti na film. Nekateri objektivni sicer omogočajo nastavitve še večjih zaslonskih števil kot 32. Toda pri večanju učinkovitih zaslonskih števil nad 50 pride zmeraj bolj do izraza *uklon* svetlobe, ki kvari kakovost celotne slike.

Ker je pri $m = 1$ efektivno zaslonko število $z_e = 2z$, to pomeni, da osvetljenost slike znaša le četrtno tiste pri slikanju v neskončnosti. Pri zrcalno refleksnih aparatih gledamo skozi objektiv, zato je tudi slika v iskalu pri $m = 1$ občutno temnejša (kar povzroča težave pri ostrenju).

Pri $m = 4$ je $z_e = 5z$. Osvetljenost slike je le še $1/25$ tiste pri slikanju v neskončnosti. Območje globinske ostrine pa meri za $z = 16$ ($z_e = 80$):

$$\frac{2}{16} \cdot \frac{80}{30} \text{ mm} = \frac{1}{3} \text{ mm}.$$

Hkrati lahko ostre dobimo le zelo ploščate detajle na slikovnem polju, ki znaša $6 \text{ mm} \times 9 \text{ mm}$. Fotografiranje pri tako veliki povečavi je težavno celo s specialno opremo, na terenu pa je komajda še mogoče.

Denimo, da slikamo z objektivom z daljšo goriščno v razmerju $m = 0'05 = 1 : 20$. To je lahko portret ali slika lepega grma kot na zadnji strani ovitka. Območje globinske ostrine pri $z = 2'8$ znaša

$$800 \cdot 1'05 \cdot \frac{2'8}{30} \text{ mm} \doteq 8 \text{ cm}.$$

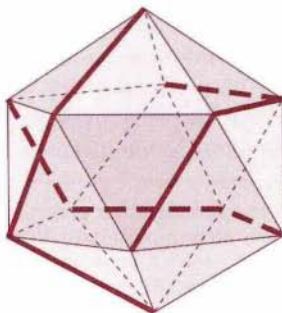
To ni več dovolj, da bi pri portretiranju bil oster ves obraz od nosu do ušes. Mimogrede, običajno izostrimo oči, saj so najpomembnejši del portreta.

Slike, narejene z raznimi objektiv, pa vseeno niso enake. Pri $f = 100 \text{ mm}$ je ustrezeni izteg $x' = mf = 5 \text{ mm}$. Slika zelo oddaljenega ozadja nastane 5 mm od filma. Pri $f = 300 \text{ mm}$ je izteg $x' = 45 \text{ mm}$. Slika zelo oddaljenega ozadja nastane 45 mm stran od filma. Ker je po (1) premer razmazanega krožca sorazmeren $\Delta x'$, je ozadje pri slikanju z daljšo goriščno neprimerno bolj zabrisano.

Peter Legiša

ŽEPNI MODELI POLIEDROV – Rešitev s str. 154

Na desni risbi so nakazani razrezi za žepni model ikozaedra, ki je v prejšnji številki revije ostal za izziv bralcem.



Vilko Domajnko

MEGLICA IN PULZAR

V prejšnji številki Preseka smo pisali o supernovi, ki se je pred skoraj 1000 leti pojavila v ozvezdju Bika, o povezavi sedaj opazljivih (dveh) objektov z davno opazovano supernovo in povedali nekaj malega o lastnostih obeh objektov, meglice Rakovice in pulzarja v njej. Povedali smo tudi, kako objekt M1 najdemo s teleskopom, ter navedli potrebne podatke in iskalni karti. Tokrat bomo povedali nekaj več o fizikalnih dogajanjih v M1. Malo je namreč v astronomiji objektov, ki bi jim bilo posvečenega toliko opazovalnega in raziskovalnega časa, namenjenih toliko strani člankov in knjig, in ki bi prinesli toliko novih spoznanj za astronomijo in fiziko. Nekateri imenujejo M1 kar 'rozetni kamen'¹ astronomije, saj je pravi naravni laboratorij, v katerem poteka obilica raznovrstnih fizikalnih procesov, razmere pa so velikokrat tako ekstremne, da takega 'laboratorija' na Zemlji sploh ni moč narediti.

Meglica

Doslej nismo posebej poudarili, da opisujemo objekt v naši Galaksiji. Leži še bolj na obrobju Galaksije kot naše Osončje in nekoliko pod ravnino Galaksije. Meglica ima podobno kemijsko sestavo, kot je v povprečju v vesolju: pretežno vodik, nekaj helija, zelo malo težjih elementov. In koliko sploh je snovi v meglici? Ocenjujejo, da za kake tri mase Sonca. Meglico sestavljata dve osnovni komponenti. Prva je razredčena snov (plin), ki je nekoč sestavljala zunanje plasti orjaške zvezde. Ta napolnjuje vso meglico in določa njeno okvirno ovalno obliko. Druga so filamenti (vlakna), ki se brez pravega reda vlečejo sem ter tja in dajejo meglici posebej lep videz (glej sliko 1 na predzadnji strani ovitka).

Obe komponenti razkriva optični spekter meglice. (Spekter je graf, ki prikazuje porazdelitev gostote izsevane energije po frekvencah.) Plin seva ti. zvezni ali beli spekter. Od filamentov pa prihajajo posamezne črte, ki so naložene na zveznem spektru. Zvezni spekter meglice Rakovice nastane na poseben način. Zanj ni krivo sevanje atomov pri visoki temperaturi, kot bi pričakovali za običajni plin, pač pa sevanje hitro gibajočih se elektronov v magnetnem polju. Do tega pomembnega spoznanja je v

¹ 'Rozetni kamen' ne pomeni kamna v obliki razcvetele rože, ampak se pridevnik nanaša na egiptovsko mesto Rosetta (angl. pisava), kjer so leta 1799 našli bazaltno ploščo iz 2. stoletja pred našim štetjem, na kateri je bilo vzporedno s hieroglifi isto besedilo zapisano še v dveh drugih pisavah. Ta kamen je bil osnova za razvozlanje hieroglifske kode.

petdesetih letih prišel ruski astrofizik Šklovski. Mehanizem sevanja naj bi po njegovem bilo ti. sinhrotronsko sevanje, o katerem ponavadi govorimo v zvezi s pospeševalniki delcev, sinhrotroni, saj nastaja pri gibanju pospešenih nabitih delcev v magnetnem polju. Njegova ideja, da meglica Rakovica predstavlja laboratorij z ogromnim pospeševalnikom delcev, se je izkazala za pravilno, ko so izmerili, da je svetloba z Rakovice delno polarizirana.

Vemo, da je elektromagnetno sevanje (svetloba) valovanje. Svetloba, ki se odbije na neki površini, je polarizirana v ravnini te površine. (Če nosimo polarizacijska očala, ki ne prepuščajo polariziranih valov, se nam na primer mnogo manj blešči.) Če pa za neko svetlobo ne obstaja ravnina, v kateri pretežno nihajo valovi, potem pravimo, da je nepolarizirana. Med stoodstotno polarizirano in nepolarizirano svetlobo obstajajo še vse vmesne možnosti za delno polarizirano svetlobo. Meritve polarizacije svetlobe z Rakovice sredi petdesetih let na tedaj sovjetskem observatoriju Byurakan v Armeniji in na ameriškem Mount Palomarju so pokazale, da je ta svetloba res delno polarizirana: Elektroni se v magnetnem polju gibajo na določen način in zato izsevani svetlobni valovi nihajo pretežno v določeni ravnini.

S potrditvijo ideje o sinhrotronskem sevanju Rakovice so bili astronomi soočeni z nadvse nenavadnim objektom, s svetlim oblakom, v katerem so 'svetili' elektroni in ne atomi, kot so bili navajeni dotlej. V oblaku so tudi protoni, a ti za fizikalne procese, ki so pri sinhrotronskem sevanju meglice odločilni, niso bistveni. Bistveno pa je, da so astronomi odkrili objekt, ki je bil po agregatnem stanju prav poseben plin, plazma. Običajni plin sestavljajo atomi, ki so električno nevtralni. Za plazmo pa je značilno, da so atomi razbiti na nosilce negativnih nabojev (elektroni) in nosilce pozitivnih nabojev (atomska jedra).

Meglica je ostanek zunanjih plasti zvezde, ki je izbruhnila v supernovo. V trenutku izbruha je te plasti odpihnilo navzven. Astronomi merijo hitrost razširjanja meglice. Ta znaša okrog dve desetinki kotne sekunde na leto ali približno 1500 kilometrov na sekundo. Iz te vrednosti lahko izračunamo, kdaj se je zgodila supernova. Zanimivo je, da z natančnim računom, ki upošteva podatke več kot petdesetih let (doktorsko delo znane ameriške astronomke V. Trimble), pridemo do letnice, ki je za slabih sto let večja od tiste, o kateri poročajo kitajska opazovanja. To pomeni, da se danes meglica razširja hitreje, kot bi se smela, saj bi se moralo začetno širjenje snovi zvezdinih ovojnic sčasoma upočasniti zaradi nariivanja okolišnega medzvezdnega plina. To je možno le, če nekaj v meglici poganja gibanje plinov navzven.

Na podlagi merjenja hitrosti razširjanja meglice lahko ocenimo tudi njeno oddaljenost. Ta je približno 6000 svetlobnih let ($6 \cdot 10^{16}$ kilometrov). In če poznamo oddaljenost, lahko ocenimo, kako svetla je bila supernova leta 1054. Iz starih zapiskov o primerjavah njenega sija so ocenili, da je supernova svetila kot 500 milijonov Sonc! Polariziranost je različna po posameznih delih meglice, pa tudi polariziranost posameznih delov se s časom presenetljivo spreminja. Eno od področij, kjer sta polariziranost in njena spremenljivost posebej izraziti, je osrednji predel. To je okolica obeh zvezd v sredini meglice, od katerih je ena pulzar. Že v šestdesetih letih so na tem področju opazili nekakšne kosme snovi, ki so se s časom spreminjale. Vse je kazalo na to, da tisto nekaj v sredini meglice, kar prispeva k njenemu razširjanju, tudi pljuska v okolišno snov in jo osvetljuje. Sodobna opazovanja s Hubblovim vesoljskim teleskopom so pokazala, da iz pulzarja izhajata v nasprotnih smereh ozka curka (slika 2 na predzadnji strani ovitka), ki ju pretežno tvorijo hitri elektroni. Curka odrivata plin pred seboj in ga narivata v kosme.

Kar vemo o filamentih, so nam razkrile črte, ki jih sevajo tam prisotni atomi. Na njihovi osnovi so ugotovili, da se tako temperatura kot gostota elektronov v filamentih močno spreminjata tako znotraj posameznega filameta kot preko celotne meglice. Filament je kot nekakšna 'ceev', sestavljena iz treh lupin, pri čemer sta v vsaki plasti nekoliko drugačna temperatura in gostota snovnih delcev. Večina izrazitih filamentov je v zunanji tretjini meglice.

Črte, ki prihajajo s filamentov, so povečini takšne, kakršnih v laboratoriju na Zemlji zlepa ne opazimo. Sodijo med ti. 'prepovedane' črte. In kako spektralne črte sploh nastanejo? Elektron v atomu se nahaja v določeni elektronski lupini oziroma ima določeno orbito okrog atoma in s tem določeno energijo, tako kot je to razložila kvantna mehanika. Če atom pridobi ustrezno energijo (npr. ko se vanj zaleti foton ali drug atom), se elektron v njem vzbudi v višje energijsko stanje, v drugo dovoljeno orbito. Odvečne energije se poskuša čimprej znebiti in se vrniti v svoje prejšnje, najbolj ugodno stanje. Odda jo tako, da izseva foton z določeno valovno dolžino. Ta prehod elektrona se zgodi zelo hitro, pravimo mu dovoljeni, saj ga zakoni kvantne mehanike napovedujejo oziroma dovoljujejo. Energija tega fotona ustreza energijski razliki med obema orbitama. Prehod vidimo kot črto v spektru pri določeni valovni dolžini.

Če elektron prejme premalo energije, da bi se preselil v naslednjo višjo dovoljeno orbito, potem bi trajalo zelo dolgo, da bi se odvečne energije znebil z izsevanjem ustreznega fotona. Ker se to zgodi zelo redko oziroma zelo počasi, tako da tega v laboratoriju praktično ne dočakamo, se je za

take prehode ustalilo ime prepovedani. Pri poskusih v laboratoriju, kjer je atomov dovolj, tudi če je plin precej razredčen, bo atom takšen presežek energije raje oddal drugemu atomu s trkom, kot da bi izseval foton. V meglici pa je plin tako zelo redek, da do trkov med atomi prihaja zelo poredko, in preden bi atom uspel srečati drugega in mu oddati odvečno energijo, pride do ti. prepovedanega prehoda. Izseva se torej foton pri valovni dolžini, kakršne v laboratoriju pri tem atomu ne bi pričakovali. Značilno je, da so ravno objekti, kakršna je meglica, redek primer, kjer sploh lahko opazujemo prepovedane prehode. Vidimo, da meglica ni pomembna le za astronomijo, ampak posebne razmere v njej omogočajo spoznanja in meritve, ki so pomembni tudi za fiziko.

Meglica Rakovica seva ne le v optičnem, pač pa tudi v radijskem delu elektromagnetnega spektra, pa preko mikrovalov, infrardeče in ultravijolične svetlobe do visokoenergijskih rentgenskih žarkov. Malo je objektov, ki bi sevali na tako obsežnem intervalu valovnih dolžin. Rakovica je prvi odkriti objekt, ki se ga da opazovati na tako širokem intervalu. Radijsko odkritje Rakovice pripada avstralskim astronomom in sega v leto 1948. Odtlej so radijska opazovanja neprecenljivo prispevala k poznavanju strukture magnetnega polja in porazdelitve elektronov v meglici.

V začetku šestdesetih let so začeli s prvimi rentgenskimi opazovanji. Teh ne moremo izvajati s površja Zemlje, saj varovalni atmosferski oklep žarkov X ne prepusti. Rakovica je prvi rentgenski izvir (in eden od prvih izvirov žarkov gama) zunaj Osončja, ki so ga zaznali in nato povezali s prej znanim optičnim objektom. Visokoenergijska opazovanja so pomembna na primer za določanje hitrosti elektronov v meglici in površinske temperature nevtronskih zvezd.

Pulzar

Kaj pomaga razpihovati meglico, pospešuje elektrone in vpliva na strukturo magnetnega polja v meglici? To vprašanje je dolgo vnemirjalo astronome, dokler niso konec šestdesetih let v sredini meglice odkrili nenavadne zvezde – pulzarja. Majhna, izjemno gosta zvezda se sredi meglice zelo hitro vrti in brizga v meglico vedno nove elektrone, da se lahko vzdržuje sinhrotronsko sevanje meglice.

Pulzar, ki ima oznako NP0532 ali pa PSR 0531+21, odvisno od tega, katerega od pulzarskih katalogov gledate, so odkrili z največjo radijsko anteno na svetu v Arecibu (premer 300 m) novembra 1968. Izmerili so njegovo periodo – 33 milisekund. To je bila še zadnja potrditev, da je objekt v Rakovici, za katerega so že dolgo predvidevali, da mora imeti

neko zvezo s supernovo, zares nevtronska zvezda. Nobena druga vrsta zvezde namreč ni dovolj 'trdna', da bi vzdržala tako hitro vrtenje. Radijski pulzar so identificirali z optičnim januarja 1969 na observatoriju Kitt Peak v ZDA. Nekaj kasneje so Američani opazili isti objekt še v rentgenskih žarkih. Pulzar v meglici Rakovici je v mnogočem poseben, presenetljiv in zato zelo pomemben za astronomijo. Ena njegovih značilnosti, ki ga postavlja na posebno mesto med pulzarji, je ta, da ga lahko opazujemo na izjemno širokem intervalu elektromagnetnega spektra, oblika njegovega pulza pa je enaka pri vseh valovnih dolžinah, od dolgih radijskih valov do visokoenergijskih rentgenskih žarkov in žarkov gama. Druga je njegova starost. S komaj tisoč leti je zdaleč najmlajši pulzar. Sledi mu pulzar v ozvezdju Jadro (Vela), ki pa je kakih šestnajstkrat starejši. Pri tako mladem pulzarju lahko opazujemo pojave, ki so pri starejših že usahnili.

Tisto, kar je pulzarske astronome v začetku posebej presenetilo, je izredna pravilnost in ponovljivost pulzov. Pulzi prihajajo tako točno, da lahko na podlagi današnjih opazovanj za nekaj let vnaprej natančno napovemo, kdaj bo prišel izbrani pulz. Pulzarska ura je primerljiva z najbolj natančnimi urami na Zemlji. Zato seveda ni čudno, da se je pojavila ideja, da bi na osnovi skupine pulzarjev napravili neodvisno uro, ki bi služila kot standard, tako kot je to z atomsko uro.

Vendar pa se frekvenca pulziranja spreminja. Pulzar namreč izgublja svojo rotacijsko energijo, ki jo oddaja meglici. Meglica pravzaprav sveti zato, ker se pulzar upočasnjuje. Hitro se pojavi pomislek, kako naj potem pulzar služi za merjenje časa, če pa se ne vrti enakomerno. To ni nič hudega, saj vemo, kako hitro se ustavlja in tudi ta pojemek radijski astronomi zelo natančno merijo. Frekvenco in časovno spreminjanje frekvence našega pulzarja neprestano merijo na angleškem radijskem observatoriju Jodrell Bank. Pulzarjeva perioda se vsak dan podaljša za 37 nanosekund (0.000000037 sekunde).

Poleg pravilnega spreminjanja pulzarjeve frekvence se sem pa tja, v dveh do treh letih, dogajajo še nenadne pospešitve vrtenja, ki jim pravimo gliči. Po gliči se po nekaj dneh pulzar postopoma umiri. Po kakem mesecu dni se spet vrti s popolnoma tako frekvenco, kot da gliča vmes sploh ne bi bilo. Gliče poskušamo razložiti s primerjavo s potresi na Zemlji. Le da je za pulzar verjetneje, da pride do potresa v trdni notranji nevtronski plasti in ne v trdni zunanji skorji, kot je to pri Zemlji.

Ko že omenjamo sestavne plasti pulzarja, je prav, da jih navedeno vse po vrsti. Začnimo na površju. Pulzarjevo površje je trdna skorja, ki jo sestavljajo težka atomska jedra, med katerimi se podi oblak elektronov, ki so nekoč skupaj s temi jedri tvorili atome. Pod njo je plast supertekočih

nevtronov (tokrat bomo besedo samo zapisali in nič razlagali) in pod njo, kot nekakšen ogromen kristal, trdna plast nevtronov. Čisto znotraj je jedro, kjer je gostota snovi največja. Tu najverjetneje lahko poleg nevtronov pričakujemo še 'juho' raznoraznih sorodnih delcev, ki so težji in predvsem za običajni svet precej tuji. Nosijo imena, kot so Σ , Λ in Δ ; ker so težki, jim vsem skupaj pravimo barioni (nevtron in proton sta najlažja bariona).

Vsekakor se moramo ustaviti tudi ob pulzarjevem magnetnem polju. Njegova gostota na površju zvezde znaša približno 10^8 tesla, kar je zelo veliko. V laboratoriju so polja velikosti nekaj tesla že obravnavana kot zelo močna. Kako more imeti nevtronska zvezda tako močno magnetno polje, se da razumeti. Vemo, da se ohranja količina, ki ji pravimo magnetni pretok. Predstavljajmo si namagneteno snov. Magnetne silnice so 'pripete' na snov. Če stiskamo snov, se stiskajo tudi silnice in magnetno polje je vse močnejše. Za tolikokrat, kot se zmanjša presek snovi, se poveča gostota magnetnega polja. Ali lahko s stiskanjem običajne zvezde pridemo do magnetnega polja pulzarja? Gostota magnetnega polja Sonca je okrog 0.01 T. Njegov radij je 700000 kilometrov. Če bi Sonce skrčili na velikost pulzarja (radij 10 kilometrov), bi se njegov presek (πR^2) zmanjšal za faktor $5 \cdot 10^9$. Tolikokrat se mora v skladu z ohranitvijo magnetnega pretoka povečati gostota magnetnega polja. Prvotnih 0.01 T postane $0.5 \cdot 10^8$ T! Močno pulzarsko magnetno polje torej ni tako hudo presenetljivo in ga smemo pričakovati, če upoštevamo, kako je pulzar nastal.

Imamo torej močno namagneteno zvezdo, ki se hitro vrti. Iz elektrodinamike vemo, da se pri gibanju magneta inducira električno polje. Tudi ob površini pulzarja se inducira električno polje, ki je zelo močno. Nabite delce odtrga s površine, jih pospeši do visokih hitrosti in jih izvrže stran od zvezde. Vendar se ti zaradi magnetnega polja ne morejo gibati kamorkoli, temveč le vzdolž magnetnih silnic. Magnetne silnice pulzarja si lahko predstavljamo podobno, kot smo vajeni risati silnice paličastega magneta. Razlika je predvsem v tem, da so zaradi hitrega vrtenja zvezde tiste silnice, ki izhajajo blizu polov, pretrgane. Vzdolž pretrganih silnic elektroni lahko pobegnejo z zvezde in tako se meglica neprestano polni s svežimi hitrimi elektroni, ki sinhrotronsko sevajo.

Za konec še omenimo, kje pulzi najverjetneje nastajajo. Pulziranje smo že opisali s pomočjo svetilnika. Pulz vidimo vsakokrat, ko se svetilnik zasuka proti nam. To področje je najverjetneje ti. polarna kapa, za kako nogometno igrišče velika površina ob (obeh) magnetnih polih. Tam je magnetno polje zelo močno. Nabiti delci, ki se gibljejo vzdolž silnic, se pospešijo skoraj do svetlobne hitrosti in močno sevajo na obsežnem

intervalu valovnih dolžin, od radijskih valov do žarkov gama. Če bi prišli dovolj blizu pulzarja, bi morda videli ob njegovih polih močno svetlikajočo se kapo.

Hubbllov vesoljski teleskop je videl nevtronsko zvezdo

V sestavku smo večkrat omenjali izraza pulzar in nevtronska zvezda, enkrat enega, drugič drugega. Čas je, da povzamemo njuno povezavo. Nevtronskih zvezd je v naši Galaksiji najbrž nekaj sto milijonov. Večinoma jih ne vidimo, ker so pretemne. Tiste, ki jih vidimo (ki smo jih videli doslej!), vidimo zaradi njihovega pulziranja. Torej so pulzarji (danes je znanih kakih 500) podmnožica nevtronskih zvezd. Vsak pulzar je nevtronska zvezda, ni pa vsaka nevtronska zvezda pulzar. Dejstvu, da pulzarji pulzirajo – svetijo na poseben način, se moramo zahvaliti, da jih lahko opazujemo že trideset let. Nepulzirajoče nevtronske zvezde ne moremo videti. (No, v resnici obstaja še ena podvrsta nevtronskih zvezd, za katere ni nujno, da pulzirajo, a jih vseeno vidimo. Te so članice dvojnih sistemov, pri čemer je druga zvezda velika in masivna. Snov z nje odteka na nevtronsko zvezdo in se dovolj blizu nevtronske zvezde začne svetiti. To svetenje opazujemo v rentgenskih žarkih. Vendar je takih nevtronskih zvezd opaženih precej malo.) Kot že pri toliko drugih primerih v zadnjih letih pa je stvari spet obrnil na glavo Hubbllov vesoljski teleskop. 24. septembra 1997 so z Inštituta Hubblovega vesoljskega teleskopa sporočili še eno veliko novico: Hubbllov vesoljski teleskop videl nevtronsko zvezdo!

Zakaj je bilo doslej nemogoče videti nevtronsko zvezdo? Večino zvezd vidimo zato, ker sevajo svetlobo. Njihovo sevanje opišemo kot sevanje črnega telesa. Če poznamo njeno površinsko temperaturo in velikost površine, vemo, koliko energije zvezda odda v časovni enoti. Sliko zvezde, ki jo naredi optična naprava (leča v očesu; zrcalo teleskopa), 'vidimo', če je v zbranih elektromagnetnih valovih dovolj energije, da povzroči ustrezno reakcijo detektorja (vidnih čutnic v očesu; fotografske plošče, kamere CCD). Pri (optičnih) teleskopih je to odvisno v grobem od velikosti zrcala in vrste detektorja. Oboje skupaj je upoštevano v ti. mejni magnitudi. Zvezdo z mejno magnitudo ravno še lahko vidimo. Povejmo, da je magnituda mera za navidezni sij zvezde. Pri magnitudah si zapomnimo, da večje število pomeni šibkejši objekt in manjše svetlejšega. Najsvetlejši objekti imajo negativno magnitudo (npr. Sonce -26.5 , zvezda Sirij -1.5). Ocenili so, da naj bi imela supernova leta 1054 ob maksimumu magnitudo okrog -5 . S prostim očesom povprečno vidimo zvezde do magnitude 6.5. Z izbranim teleskopom in detektorjem vidimo ustrezno šibkejšo zvezde.

Vrednost teoretične mejne magnitude pokvarijo atmosferske motnje in razni viri umetnega osvetljevanja, zaradi česar ima tudi ozadje (nočno nebo) neko svetlost. Zato pri opazovanjih z zemeljskega površja nikakor ne moremo prekoračiti določene mejne magnitude.

Zdaj pa ocenimo še red velikosti magnitude nevtronske zvezde, ki bi sevala, kot običajno sevali zvezde. Povedali smo že, da je polmer nevtronske zvezde kakih 10 kilometrov. S pomočjo satelitov, ki opazujejo v rentgenski svetlobi, so izmerili, da je površinska temperatura nevtronskih zvezd okrog milijona stopinj. Uporabimo Štefanov zakon, ki opisuje sevanje črnega telesa. Izsev, povezan s površinsko temperaturo, pretvorimo pri znani oddaljenosti zvezde v magnitudo in pridemo do vrednosti, precej preko magnitude 20. Tako šibke objekte s teleskopi z zemeljske površine zelo težko opazimo, še težje izmerimo njihov sij. Lahko pa jih opazi in 'dobro pogleda' Hubblov vesoljski teleskop, ki je dvignjen nad atmosfero.

In tako je vesoljski teleskop pred nekaj meseci zaznal nevtronsko zvezdo z magnitudo 25. Na podlagi tega podatka so astronomi prvič lahko neposredno izmerili velikost nevtronske zvezde. Njen polmer je 14 kilometrov. Razen tega, da je Hubblov vesoljski teleskop našel prvo nevtronsko zvezdo, ki ni pulzar in ni v dvojnem sistemu, je ta dosežek odprl tudi popolnoma nove možnosti za dopolnjevanje teorije nevtronskih zvezd.²

Zanke in uganke o meglici Rakovici in pulzarju v njej še zdaleč niso izčrpane in v naših dveh zgodbah smo se jih le dotaknili. Ne astrofizikom ne teleskopom dela na področju M1 še zlepa ne bo zmanjkalo.

Mirjam Galičič

NEKOLIKO DRUGAČNI KONSTRUKCIJSKI NALOGE

1. V ravnini so podane tri točke A , O in I . Nariši trikotnik z ogliščem A , središčem očrtane krožnice O in središčem včrtane krožnice I .
2. Nariši trikotnik, če so podani: oglišče A , središče očrtane krožnice O in višinska točka V .

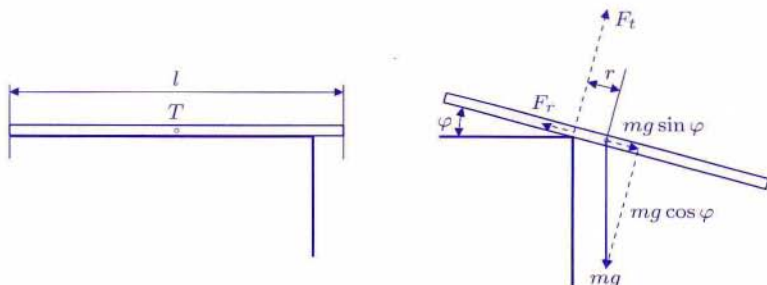
Marija Vencelj

² Podrobnejši tekst in sliko si lahko ogledate na internetu, naslov je <http://oposite.stsci.edu/pubinfo/pr/97/32.html>

FIZIKA, MATEMATIKA IN MURPHYJEV ZAKON

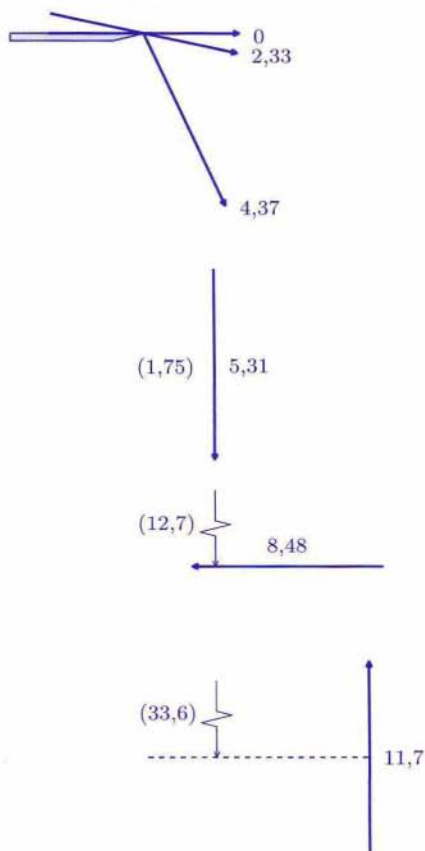
Kapetan Edward Murphy je leta 1949 sodeloval pri poskusih ameriškega vojnega letalstva, pri katerih so raziskovali vpliv nenadnega zaviranja na letalce. Prostovoljci so sedli na nekakšne sani, ki so jih pognale rakete in ki so jih potem na hitro zaustavili. Odziv na pojemek ob zaustavljanju so merili s senzorji na delih telesa. Žice s priključki za pisalnike so speljali v čelado, za katero je načrt naredil kapetan Murphy. Nekega dne, ko se je zdelo, da so izvedli niz poskusov brez napak, pisalne naprave niso nič zapisale. Presenetljivi izid je kapetan Murphy pojasnil s tem, da so bile žice v čeladi napačno zvezane. Tedaj je izjavil: "Če obstaja več možnosti, da nekaj naredimo, in ena od njih pripelje do neželenega izida, jo bo nekdo izbral." Na tiskovni konferenci so izjavo omenili kot dobro izhodišče za razprave o varnosti. Pozneje so ji dali bolj megleno obliko: "Če kaj lahko gre narobe, bo šlo narobe." Ta izjava naj bi veljala tudi v vsakdanjem življenju. Iz nje je nastalo veliko izpeljank, tudi šaljivih. Ali bi lahko nekatere izmed njih imele oporo v zakonih narave ali matematike in tako ne bi bile zgolj razpoloženske oziroma posledica dejstva, da se neprijetni dogodki bolj vtisnejo v spomin kot drugi? Vsaj za tri oblike Murphyjevega zakona je odgovor na vprašanje pritrdilen.

Opečeni kruh. Že v prejšnjem stoletju je pesnik potožil, "da opečeni kruh vselej pade na stran z maslom". Vzemimo namesto kruha poljubno tego telo v obliki ploske pravokotne prizme, na primer ploščo ali knjigo. Če ni pri roki nič drugega, je dobra tudi številka Preseka. Ploščo položimo na vodoravno mizo, tako da je ena izmed stranic osnovne ploskve vzporedna z robom mize. Ploščo počasi potiskamo v smeri druge stranice. Ko težišče plošče pogleda dovolj čez rob mize, se plošča začne vrteti okoli roba mize (slika 1). Potem plošča zdrsne in drsi po robu mize, ki deluje nanjo v nasprotni smeri gibanja s silo trenja. Naposled plošča zgubi stik z mizo in se odtelej enakomerno vrti okoli težiščne osi, ko se težišče giblje po paraboli.



Slika 1. Plošča na mizi pred gibanjem in med njim.

Iz dokaj zapletenih računov izhaja, da plošča pade na vrhno stran, če leži rob mize na intervalu od nekaj manj kot $2l$ do nekaj več kot $30l$ nad tlemi (slika 2). (l je stranica osnovne ploskve, pravokotna na rob mize.) Pri višini mize 70 cm in stranici plošče 10 cm je rob mize $7l$ nad tlemi. Računali smo z izmerjenima podatkom za opečeni kruh: s koeficientom trenja $k = 0,25$ in z začetno ročico $0,0075l$. S trenjem so povezane težave, posebno še pri drsenju po robu mize. Kruh lahko pade z mize, ko stranica ni pravokotna na rob mize. Poleg tega ima lahko tudi začetno hitrost proti robu mize, čeprav to ne vpliva bistveno na izid, dokler hitrost znatno ne preseže 1 m/s. Svoje prispeva tudi zračni upor, ki ga nismo upoštevali. Zato je rezultat zgolj ocena. Toda ocenjeni interval višin je tako velik, da lahko s precejšnjo gotovostjo napovemo, da bo opečeni kruh pri običajnih padcih z navadnih miz zaradi zakonov gibanja padel na namazano stran.



Slika 2. Gibanje plošče, potem ko je zgubila stik z mizo. Račun velja za koeficient trenja $k = 0,25$ in začetno ročico $r_0 = 0,0075l$, ki so ju dala merjenja za opečeni kruh. Razdalje merimo v enotah l , čas pa v enotah $(l/g)^{1/2}$. V časovnem intervalu od 0 do 2,33 se plošča enakomerno pospešeno vrti okoli roba mize, v časovnem intervalu od 2,33 do 4,37 drsi (glej sliko 3), potem pa pada težišče po paraboli in plošča se enakomerno vrti okoli težiščne osi. Globina težišča je navedena v oklepajih na levi, čas pa na desni. Za naš primer velja: $x_2 = 0,22$, $z_2 = -0,44$, $\dot{x}_2 = 0,13$, $\dot{z}_2 = -0,92$, $\varphi_2 = 1,11$, $\dot{\varphi}_2 = 0,50$.

Na ploščo, nagnjeno proti vodoravnici za kot φ , delujeta Zemlja s težo mg navpično navzdol v težišču sredi plošče in miza s silo v točki, v kateri se je dotika. Silo mize razstavimo na komponento v smeri plošče F_r in na komponento F_t v smeri pravokotno na ploščo. Tudi pospešek težišča razstavimo na ustrezni komponenti a_t in a_r . Izrek o gibanju težišča da

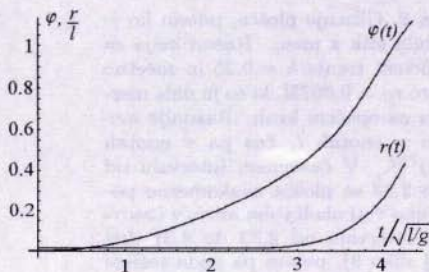
$$mg \cos \varphi - F_t = ma_t, \quad mg \sin \varphi - F_r = ma_r.$$

Uporabimo še izrek o vrtilni količini, ki velja za težiščno os, četudi se ta pospešeno giblje:

$$J\ddot{\varphi} = rF_t.$$

$J = \frac{1}{12}ml^2$ je vztrajnostni moment plošče okoli težiščne osi. Najprej se plošča vrti okoli roba mize kot nepremične osi pri razdalji r_0 od težišča, ne da bi drsela po mizi. Tedaj ne potrebujemo prvih dveh enačb, iz tretje pa izhajajo, da je vrtenje enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom r_0g/l^2 , če je r_0 začetna ročica in zanemarimo r_0^2 v primeri z $\frac{1}{12}l^2$. Plošča začne drseti, ko kot preseže $\varphi_1 = \arctan k$. Tedaj je treba v smeri plošče upoštevati silo trenja, za katero velja $F_r = kF_t$. Enačba se zaplete, ko izrazimo tangентno in radialno komponento pospeška težišča z r in φ in z njunimi odvodi. Z izrekom o vrtilni količini dobimo sistem dveh navadnih diferencialnih enačb, ki ga rešimo z *Mathematico* za poseben primer (slika 3). Izračunamo lego težišča (x_2, z_2) , njegovo hitrost $(\dot{x}_2, \dot{z}_2)$ in kotno hitrost $\dot{\varphi}_2$ pri vrtenju okoli težiščne osi v trenutku, ko plošča zgubi stik z mizo. Os x je vodoravna in os z navpična. Dalje gre brez težav: $x = x_2 + \dot{x}_2t$, $z = z_2 + \dot{z}_2t + \frac{1}{2}gt^2$ ter $\varphi = \varphi_2 + \dot{\varphi}_2t$.

Slika 3. Kot φ in razdalja težišča od roba mize v odvisnosti od časa med drsenjem plošče po mizi za naš primer (slika 2). Z *Mathematico* smo rešili sistem diferencialnih enačb: $\varphi'' = 12r(\cos \varphi - 2\varphi'r')/(12r^2 + 1)$, $r'' = \sin \varphi + \varphi'^2r - k(\cos \varphi - 2\varphi'r')/(12r^2 + 1)$. Enota za razdaljo je l in enota za čas $(l/g)^{1/2}$.



Ne dežuje, ko na sprehod vzamemo dežnik. Ena izmed oblik Murphyjevega zakona trdi, da ne dežuje, ko na podlagi vremenske napovedi vzamemo na sprehod dežnik. Kako je s to trditvijo? Vremenske napo-

vedi angleških meteorologov od sto primerov zadenejo 83-krat in zgrešijo 17-krat. Na drugi strani je po podatkih iz istega vira dež na enournih sprehodih podnevi precej redek, na sto sprehodih samo na 8-ih dežuje, na 92-ih pa ne. Za desettisoč enournih sprehodov ugotovimo, da dežuje na $8 \cdot 83 = 664$ sprehodih, ko je bil dež napovedan, in na $8 \cdot 17 = 136$ sprehodih, ko dež ni bil napovedan. Ne dežuje na $92 \cdot 83 = 7636$ sprehodih, ko dež ni bil napovedan, in na $92 \cdot 17 = 1564$ sprehodih, ko je bil dež napovedan. Od sprehodov ob napovedih dežja je delež sprehodov brez dežja $1564/2228 = 0,70$ več kot dvakrat večji kot delež sprehodov z dežjem $664/2228 = 0,30$. Zares pogosto na sprehodu nismo mokri, ko vzamemo s seboj dežnik, če je napovedan dež. Statistika torej podpira Murphyjev zakon v tej obliki. Najbolje je, če se ne oziramo na vremensko napoved, ko se odločamo, ali bomo vzeli na enourni sprehod dežnik ali ne. Sklep velja za nekoga, ki se odloča samo po vremenski napovedi, in ne za nekoga, ki s pogledom skozi okno ugotovi, kdaj kaže na sprehod vzeti dežnik.

Psihologi vedo povedati, da pri podobnih vprašanjih pogosto pride do napačnih odločitev. Včasih navedejo kot zgled vprašanje: V mestu z dvema podjetjema taksijev je delež zelenih taksijev 0,85 in delež modrih 0,15. Prometno nesrečo, po kateri je voznik pobegnil, je po izjavi očividca povzročil modri taksi. Očividci v 80 primerih od stotih zadenejo barvo taksija, v 20 pa se zmotijo. Kolikšna je verjetnost, da je nesrečo povzročil modri taksi?

Očividec z verjetnostjo $0,85 \cdot 0,20 = 0,17$ zeleni taksi proglasi za modrega in z verjetnostjo $0,15 \cdot 0,80 = 0,12$ pravilno ugotovi modrega. Verjetnost, da je nesrečo povzročil modri taksi, je le $0,12/(0,17 + 0,12) = 0,41$. Marsikdo pri odgovoru spregleda osnovni podatek o deležu modrih in zelenih taksijev in pripiše preveliko težo izjavi očividca. Pojavo pravijo *napaka osnovnih podatkov*.

Nogavice brez para. Ena od oblik Murphyjevega zakona pravi: Če se lahko pojavijo nogavice brez para, se bodo pojavile. Raziščimo trditev. Vzemimo, da imamo v predalu n med seboj različnih parov nogavic. Izgubimo 2s nogavic, naključno izbranih izmed $2n$ nogavic v predalu, ne da bi nas zanimalo, kako je prišlo do izgube. Obdelajmo na začetku najpreprostejši zgled, pri katerem od 2 parov izgubimo 2 nogavici. Nogavice zaznamujemo po vrsti z 1, 2, 3 in 4 in z oklepaji nakažemo pare. Možnosti so:

(1, 2) 2, 3 (3, 4)
 1, 3 2, 4
 1, 4.

Od 6 primerov sta pri dveh nogavici v paru in se pri štirih pojavita nogavici, ki nista par. Razmerje med številom primerov z nogavicama v paru in številom primerov z nogavicama, ki nista par, je $2/4 = 1/2$. Računa ni težko posplošiti na primer, ko imamo n parov in na koncu ostane samo en par. V tem primeru zapišemo možnosti preostalega para podobno kot prej in ugotovimo, da je vseh primerov $n(2n-1)$, primerov z nogavicama v paru je n in primerov z nogavicama brez para $2n(n-1)$. Razmerje obojih je potemtakem $1/2(n-1)$. Pri desetih parih je razmerje $1/18 = 0,056$. Sklepi so uporabni tudi v primeru, če od n parov izgubimo samo dve nogavici, le da je pri tem med preostalimi nogavicami $n-1$ ali $n-2$ parov.

Bolj zapleten je račun z vmesnim številom zgubljenih nogavic. Zanimata nas le skrajna primera, v katerih je največ in najmanj nogavic brez para. V prvem primeru je vsaka od izgubljenih nogavic iz drugega para, v drugem pa izgubimo same pare. Vzemimo, da od desetih parov ($n = 10$) izgubimo 6 nogavic ($2s = 6$). Delež primerov z največjim številom preostalih nogavic brez para, to je 6, je $(16 \cdot 7)/(17 \cdot 19) = 112/323 = 0,35$, delež primerov s tremi zgubljenimi pari pa le $1/(17 \cdot 19) = 1/323 = 0,0031$. Statistika podpira tudi to obliko Murphyjevega zakona. Povedano velja samo za primer, da so vsi pari nogavic med seboj različni, in zgubi pomen, če so vsi pari med seboj enaki. Težavam se lahko v precejšnji meri izognemo, če imamo veliko parov nogavic dveh ali treh vrst.

V splošnem sta deleža najneugodnejših in najugodnejših primerov

$$2^{2s} \binom{n}{2s} : \binom{2n}{2s} \quad \text{in} \quad \binom{n}{s} : \binom{2n}{2s}, \quad 2s \leq n.$$

Binomski simbol $\binom{n}{s} = \binom{n}{n-s}$ pove, na koliko načinov lahko iz množice z n elementi izberemo podmnožico z s elementi.

Z navedenimi vprašanji se je podrobno ukvarjal Robert Matthews, fizik, ki piše o znanosti v angleškem časniku in raziskuje v računalništvu. Oprli smo se na njegove članke: *Tumbling toast*, *Murphy's law and the fundamental constants*, *European Journal of Physics* **16** (1995) 172, *Odd socks: a combinatoric example of Murphy's law*, *Mathematics Today* **32** (1996) 39, *Base-rate errors and raining forecasts*, *Nature* **382** (1996) 766 in *The science of Murphy's law*, *Scientific American* **276** (1997) (4) 72.

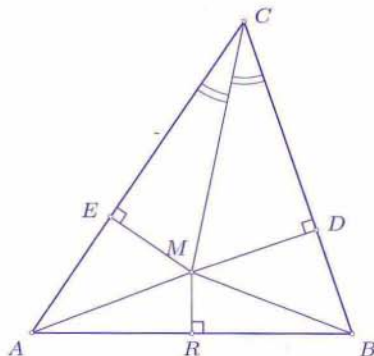
Janez Strnad

VSAK TRIKOTNIK JE ENAKOKRAK

Preden bomo dokazali trditev, zapisano v naslovu, ponovimo izreke o skladnosti trikotnikov. Dva trikotnika sta skladna, če se ujemata

1. v vseh treh stranicah (SSS),
2. v dveh stranicah in kotu, ki ga stranici oklepata (SKS),
3. v stranici in njej priležnih kotih (KSK),
4. v dveh stranicah in kotu, ki leži večji stranici nasproti (SSK).

Naj bo ABC poljuben trikotnik. Narišimo simetralo ene stranice in simetralo njej nasprotnega kota (na primer simetralo stranice c in simetralo kota γ). Označimo z R razpolovišče stranice AB , M naj bo sečišče simetral. E in D naj bosta nožišči pravokotnic iz točke M na stranici AC in BC (slika).



- Ker leži M na simetrali kota γ , je $MD = ME$. Pravokotna trikotnika $\triangle CME$ in $\triangle CMD$ se torej ujemata v hipotenuzi MC in katetah EM in MD . Zato sta skladna (SSK) in je

$$EC = DC.$$

- M leži tudi na simetrali stranice AB , zato je $AM = BM$. Trikotnika $\triangle AME$ in $\triangle BMD$ se torej ujemata v hipotenuzah AM in BM ter katetah EM in MD in sta zato skladna (SSK). Sledi

$$AE = BD.$$

- Iz $AC = AE + EC = BD + DC = BC$ torej sledi, da je poljuben trikotnik enakokrak.

Kje je napaka v sklepanju?

Olga Arnuš

RAZVOJ MIKROPROCESORJEV

Leta 1996 je minilo četrto stoletje od izdelave prvega splošnonamenskega mikroprocesorja. V teh 25 letih so se procesorji izredno razvili. Kako silovit napredek se je zgodil, pove tudi podatek, da imajo današnji procesorji na praktično enaki površini 2500-krat več tranzistorjev (osnovnih gradnikov), kot so jih imeli na začetku. In ker več tranzistorjev pomeni tudi "pametnejše" procesorje in s tem računalnike, ni čudno, da so računalniške igrice postale tako priljubljene, da nekateri nogomet rajši igrajo na računalniku kot pa na travniku za hišo.

Preden si ogledamo, kako so se mikroprocesorji razvijali, se spomnimo, kaj sploh je mikroprocesor. Mikroprocesor je integrirano vezje na majhni silikonski ploščici, ki vsebuje tisoče ali milijone drobnih stikal, tranzistorjev. Ti ležijo vzdolž mikroskopskih povezav, ki so izdelane iz superfinih sledi aluminija. S temi vezji je mogoče obdelovati podatke po določenih vzorcih, ki jih lahko sprogramiramo. Ker procesor deluje tem hitreje, čim večja je hitrost, s katero lahko preklaplja stikalca, je pomembna tudi frekvenca, s katero deluje mikroprocesor.

Danes je ena glavnih nalog mikroprocesorjev, da so možgani osebnega računalnika. Vendar pa računalniki niso edine naprave, v katerih srečamo mikroprocesorje. Najdemo jih tudi v semaforjih, avtomobilih, telefonih in številnih drugih napravah.

Oglejmo si nekaj najbolj važnih mejnikov na poti od prvega mikroprocesorja do danes.

1971 Intel 4004 Strokovnjaki podjetja Intel Ted Hoff, Stan Mazor in Federico Faggin so ob pomoči Masatoshija Shima iz Busicoma razvili prvi splošnonamenski mikroprocesor, Intel 4004. Sestavljen je bil iz 2300 tranzistorjev v 4-bitni arhitekturi. Znal je izvesti 45 osnovnih ukazov in je deloval s frekvenco pod 1 MHz. Ta procesor je dejansko spremenil svet.

1972 Intel 8008 Procesor Intel 8008 je imel 3500 tranzistorjev in je bil prvi 8-bitni mikroprocesor. Vgrajeni ukazi za delo z 8-bitnimi podatki so procesorju omogočili enostavnejšo in hitrejšo obdelavo alfanumeričnih podatkov.

1974 Intel 8080 Srce prvega mikroračunalnika Altair, ki ga je izdelalo podjetje MITS, je bil Intel 8080, procesor s frekvenco delovanja 2 MHz in sestavljen iz 6000 tranzistorjev. V tistem času se je pojavilo tudi majhno podjetje, MicroSoft, ki sta ga ustanovila Bill Gates in Paul Allen. Napisali so tolmač za programski jezik BASIC za ta računalnik.

1974 Motorola 6800 Motorola 6800 s 4000 tranzistorji je bil 8-bitni mikroprocesor, ki so ga večinoma uporabljali v različnih avtomatih in manjših poslovnih računalnikih. Leta 1978 so pri nas v Sloveniji v podjetju Iskra naredili računalnik ID 1680, osnovan na tem procesorju.

1975 Zilog Z80 Faggin in Shima, dva od očetov prvega mikroprocesorja, sta tega leta pripravila precej izboljšano različico procesorja Intel 8080. 8-bitni procesor je sestavljalo 8500 tranzistorjev. Deloval je s frekenco 2.5 MHz. Za ta procesor je bil razvit operacijski sistem CP/M, prvi standardni mikroprocesorski operacijski sistem. Tudi ta procesor je povzročil manjšo revolucijo, saj je zaradi dokaj nizke cene omogočil pojav osebnih računalnikov. V Sloveniji je ta procesor najbolj poznan iz Sinclairjevih računalnikov ZX 81 in Spectrum, ki so bili pred 15 leti izjemno popularni. To je bil tudi procesor v računalnikih Iskra Delta Partner, ki smo jih na Fakulteti za matematiko in fiziko (takrat je to bila še Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo) uporabljali še v drugi polovici osemdesetih let.

1976 MOS Technologies 6502 Kot se je iz Intelovega procesorja 8080 razvil Z80, tako je podjetje MOS Technologies na osnovi procesorja Motorola 6800 izdelalo procesor 6502. Ta je bil sestavljen iz približno 9000 tranzistorjev. Ker je procesor omogočal hitro izvajanje različnih grafičnih operacij, je bil uporabljen v številnih osebnih in hišnih računalnikih. Med njimi je zagotovo najbolj znamenit Apple II. Pri nas pa je ta procesor znan kot srce najhujšega Spectrumovega tekmeca, računalnika Commodore 64.

1978 Intel 8086 Procesor Intel 8086 je bil 16-bitni čip s približno 29000 tranzistorji. Uvedel je nabor ukazov, znan pod imenom x86. Ta nabor (seveda nekoliko razširjen) še danes uporablja večina procesorjev v osebnih računalnikih.

1979 Intel 8088 Intelov procesor 8088 je bil zasnovan na procesorju 8086. Pravzaprav je bil nekakšna "oskubljena" (in seveda cenejša) različica slednjega, saj je imel le 8 in ne 16-bitno vodilo. To ožje vodilo je omogočilo uporabo tudi cenejših drugih sestavnih delov. Zato ga je IBM izbral kot procesor za neposrednega prednika današnjih PC računalnikov – IBM PC XT. Ta čip je povzročil pojav operacijskega sistema DOS in programov, kot je Lotus 1-2-3.

1979 Motorola 68000 Motorolin procesor 68000 z novim 32-bitnim naborom ukazov je bil osnova kar za nekaj zgodnjih izvedb operacijskega

sistema Unix. Važneje je, da so ga pri Applu izbrali za računalnik Lisa in kasneje tudi za računalnik Macintosh, ki je bil prvi uspešen računalnik z grafičnim uporabniškim vmesnikom (saj veste: okna, miška, ikone in podobno). Procesor je sestavljalo približno 68000 tranzistorjev.

1982 Intel286 Leta 1982 je Intel predstavil procesor 286. Srečali smo ga lahko v računalnikih IBM PC AT. Njegovih 134000 tranzistorjev je delovalo s frekvencami od 8 do 12 MHz. Procesor je lahko naslavljal do 16 MB pomnilnika, saj je imel 24-bitno naslovno vodilo.

1985 Intel386 Njegova 32-bitna zgradba z več kot četrta milijona tranzistorjev (275000, če smo bolj natančni) in 4 GB naslovnega prostora sta omogočila, da so grafični operacijski sistemi, kot sta OS/2 in MS Windows, počasi postali uporabni.

1986 MIPS R2000 Veliko strokovnjakov s področja mikroprocesorjev je bilo prepričanih, da so osnovni ukazi, ki so jih znali izvajati takratni procesorji, preobširni in prezapleteni. Zaradi tega naj bi se izvajali prepočasi. Na površje je prišla ideja, da bi bil nabor ukazov mikroprocesorja sestavljen iz enostavnih ukazov, ki bi se zaradi svoje enostavnosti lahko zelo hitro izvajali. Takim procesorjem pravimo procesorji RISC (Reduced Instruction Set Computer). Podjetje MIPS je leta 1986 prvo poslalo na trg tako zasnovan mikroprocesor.

1989 Intel486 Intel je procesorju 386 dodal enoto za računanje s premično piko, predpomnilnik in še nekaj izboljšav. Tako je nastal procesor z 1.2 milijona tranzistorji, ki v svoji 66 MHz različici še vedno poganja številne osebne računalnike.

1993 Intel Pentium Štiri leta so bila dovolj, da se je število tranzistorjev več kot podvojilo. 3.1 milijona tranzistorjev, možnost hkratnega izvajanja dveh ukazov, delovanje s frekvencami tudi do 200 MHz in še cel kup izboljšav je pripomoglo k temu, da je to trenutno najbolj popularen procesor za računalnike PC, predvsem tiste za osebno rabo.

1993 IBM/Motorola PowerPC 601 Čeprav sprva uporabljani le v visoko zmogljivih delovnih postajah, so tudi procesorji RISC počasi prišli v uporabo v računalnikih za vsakogar. IBM in Motorola sta skupaj razvila procesor PowerPC 601, ki so ga (skupaj z nasledniki) uporabili pri Applu za računalnike Power Macintosh.

1995 Intel Pentium Pro Sestavlja ga kar 5.5 milijona tranzistorjev. Trenutno je namenjen zlasti močnejšim računalnikom, ki nadzirajo delovanje omrežij in hranijo datoteke in programe številnih uporabnikov.

1997 Intel Pentium II Trenutno najmočnejši Intelov procesor. Sestavlja ga kar 7.5 milijona tranzistorjev, deluje pa tudi s frekvenco 300 MHz.



Matija Lokar

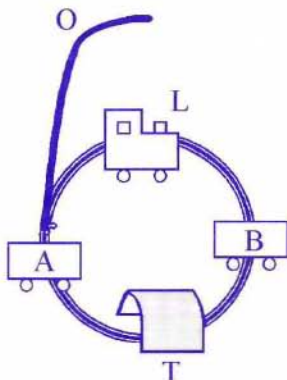
POGOVOR S PROF. DR. DUŠANOM REPOVŠEM

Med prejemniki Državne nagrade za znanost za leto 1997 je tudi matematik dr. Dušan Repovš, redni profesor na Univerzi v Ljubljani. Profesor Repovš je v preteklih letih doma in v tujini prejel več priznanj za svoje raziskave v topologiji, kjer sodi med vidnejše specialiste na svetu. Poleg raziskovalnega dela se ukvarja tudi s poučevanjem. Na Pedagoški fakulteti v Ljubljani predava študentom matematike in fizike, t.j. bodočim učiteljem teh predmetov. Njegovi študentje smo ga obiskali in za bralce Preseka zapisali pogovor z njim.

Ste se že v osnovni šoli posebej zanimali za matematiko in fiziko?

Pravzaprav se nisem. V osemletki sem imel za oba predmeta več različnih učiteljev, pa razen enega ni nihče organiziral matematičnega ali fizikalnega krožka. Le na tekmovanju za Vegova priznanja so nas včasih poslali. Vseeno pa lahko bralcem Preseka zastavim eno izmed zanimivejših nalog z osnovnošolskih tekmovanj, ki ne zahteva posebnega znanja – le kanček bistrumnosti.

1. naloga: Na sliki vidimo lokomotivo in dva vozička. S pomočjo lokomotive zamenjajte oba vozička. Lokomotiva lahko vozička bodisi vleče bodisi potiska. Skozi predor sme le lokomotiva. Na koncu mora lokomotiva spet stati na svojem starem mestu.



Kako pa je bilo z vašim zanimanjem za matematiko v srednji šoli?

Tudi v srednji šoli sprva nisem posvečal dosti časa ne matematiki ne fiziki, saj sem bil vpisan v intenzivni jezikovni oddelek na gimnaziji Poljane. Po končanem drugem letniku pa sem se vseeno odločil, da se prepisem na gimnazijo Bežigrad, v intenzivno matematični oddelek, da bi se lahko naučil več matematike in naravoslovja.

Kako so vam dovolili prepis z ene gimnazije na drugo, glede na precejšnje razlike v učnih programih?

Konec šolskega leta sem se oglasil pri profesorju Ivanu Štalcu, ki je takrat na bežigrajski gimnaziji poučeval matematiko. Povedal mi je, kaj sem dolžan predelati do jeseni, če se želim prepisati v njegov oddelek. In tako sem se preko vsega poletja intenzivno posvečal predvsem matematiki. Konec avgusta sem ponovno obiskal profesorja Štalca. Ko me je vprašal, če sem predelal vso snov, sem pritrdil in pokazal na sveženj zvezkov s poletnimi zapiski. Nič jih ni gledal niti me ni spraševal. Samo nasmejal se je in dejal: "No, pa pridi k nam." Tako sem postal njegov dijak in obe leti šolanja pri njem sva se odlično razumela.

Ste v gimnaziji imeli kakšen krožek?

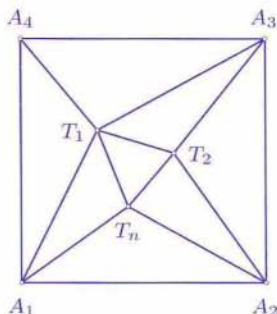
S sošolcem Ivanom Kodermanom, ki se je kasneje tudi odločil za študij matematike, sva vodila matematični krožek. Fizikalnega je organiziral kar naš profesor za fiziko dr. Marjan Hribar, ki je tedaj začel svoje delo na univerzi in ki danes predava didaktiko fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Udeležba je bila kar dobra in seveda smo se vsako leto udeleževali tekmovanj z obeh področij. Poleg tega pa smo v zadnjem letniku srednje šole pomagali profesorju Štalcu, da je izdal prvi natis svoje zbirke nalog za 4. letnik. Vsak teden nam je prinašal rokopis,

sam sem ga stipkal na matrice in v tiskarni razmnožil, sošolci pa so ga raznosili po vsej šoli.

Se tudi iz srednješolskih let še spomnite kakšne zanimive naloge?

Seveda, povedal bom kar dve in vabim bralce Preseka, da jih poskušajo rešiti na več načinov:

2. naloga: V kvadratu vzemite poljubnih n točk in jih medsebojno (ter z vsemi štirimi oglišči kvadrata) povežite tako, da dobite same trikotnike, pri tem pa se nobeni dve povezavi ne smeta sekati (razen v ogliščih). Dokažite, da število trikotnikov, ki pri tem nastanejo, ni odvisno od načina povezovanja, in ga izračunajte.



3. naloga: Na nekem kongresu se zbere n udeležencev, kjer je n poljubno naravno število. Dokažite, da sta med njimi vsaj dva, ki se poznata z enakim številom udeležencev kongresa.

Kdaj pa ste se dokončno odločili za študij matematike?

Po končani gimnaziji sem se vpisal na tedanjo Fakulteto za naravoslovje in tehnologijo, tako na Oddelek za fiziko kot tudi na Oddelek za matematiko, saj sta me zanimali obe področji. Šele v drugi polovici leta sem se dokončno odločil, da bom izbral matematični program – predvsem zaradi blestečih predavanj profesorja Nika Prijatelja iz Teorije množic in splošne topologije.

Kdaj pa ste se odločili za specialno področje – topologijo?

Pravzaprav deloma že na predavanjih profesorja Prijatelja, dokončno pa leto kasneje, ko sem poslušal izbrana poglavja iz algebrske topologije pri profesorju Jožetu Vrabcu. Potem pa je šlo vse po ustaljeni poti: diploma, pot v ZDA, kjer sem opravil magistririj in doktorat, in povratek domov – na ljubljansko univerzo.

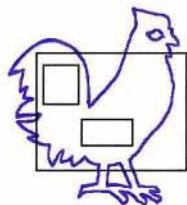
Imate še kaj stika s šolsko matematiko?

Včasih sem veliko pisal za Presek – bil sem tudi v prvem uredniškem odboru. Potem pa sem imel čedalje manj časa, saj mi je študij matematike zasedel ves prosti čas – in tako je še danes. Seveda pa imam posredno še vedno stik s šolo, ko vzgajam bodoče učitelje matematike in fizike na Pedagoški fakulteti.

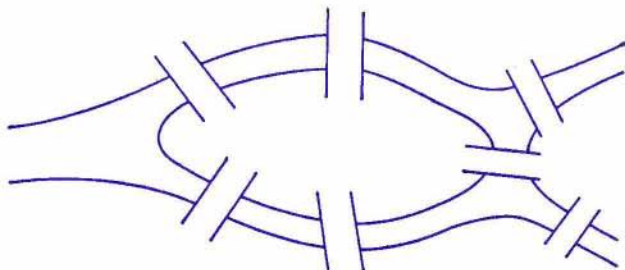
Timotej Žohar

MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 4. del

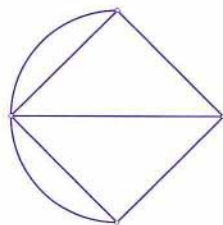
Z eno potezo



Ko je veliki švicarski matematik Leonard Euler na povabilo ruske carice Katarine Velike živel in delal na ruskem dvoru, se je srečal tudi z vprašanjem, znanim kot **problem königsberških mostov**. Mesto Königsberg, današnji Kaliningrad, leži ob reki Pregel, ki se izliva v Baltik. Reka obliva v mestu dva otoka, ki ju med seboj in z bregovoma reke povezuje sedem mostov, kot kaže naslednja skica. Vprašanje se glasi: **Ali se da sprehoditi preko vseh sedmih königsberških mostov tako, da prečkamo vsak most natanko enkrat?**



Euler je nalogo rešil tako, da je namesto zgornje skice opazoval krivuljo, narisano na desni. Krivulja ima štiri izhodišča, ki predstavljajo otoka in oba bregova reke. Posamezni loki, ki izhodišča povezujejo, pomenijo ustrezne mostove. Königsberški problem tako preide v naslednje vprašanje:

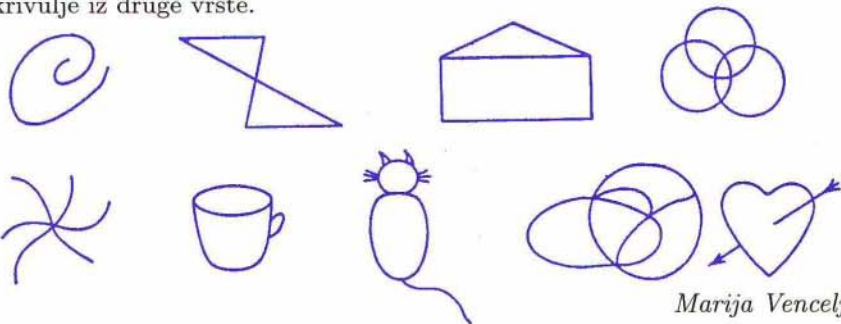


Ali lahko krivuljo desno zgoraj **narišemo z eno samo potezo**, to je, z enim samim potegljajem svinčnika, ne da bi svinčnik dvignili od risbe in ne da bi kakšen lok prešli dvakrat? Lahko pa gremo večkrat skozi isto izhodišče.

— — —

Poskusite odgovoriti na to vprašanje. Še prej pa premislite, kdaj neke krivulje zanesljivo ne bo moč narisati z eno samo potezo, četudi je krivulja povezana, torej sestoji iz enega samega kosa. (Napotek: Za posamezno krivuljo opazujte število izhodišč lihe stopnje!)

Za pomoč je v naslednjih dveh vrstah narisanih nekaj krivulj. Z eno samo potezo lahko narišemo vsako krivuljo iz prve vrste, pa nobene krivulje iz druge vrste.



Marija Vencelj

PRODUKT IN VSOTI – Rešitev s str. 156

Število 1998 smo zapisali kot produkt od 1 večjih naravnih števil,

$$1998 = n_1 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Zanima nas, kolikšna je najmanjša in največja možna vrednost vsote $n_1 + \dots + n_k$. Enice so v produktu prepovedane zato, da največja vsota ne more postati poljubno velika.

Določimo najprej najmanjšo vsoto. Če je kateri od faktorjev sestavljeno število, recimo $n_i = a \cdot b$, $a, b > 1$, potem v produktu n_i zamenjamo s faktorjema a in b . Vrednost produkta se ne spremeni, vsota faktorjev pa se kvečjemu zmanjša, saj za $a, b \geq 2$ velja

$$ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1) \geq 1$$

oziroma

$$a + b \leq ab.$$

Pri tem enakost velja le za $a = b = 2$. Najmanjšo vsoto faktorjev torej dosežemo, če so vsi faktorji praštevila. Za število 1998 je to razcep

$$1998 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$$

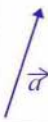
z vsoto $2 + 3 + 3 + 3 + 37 = 48$.

Zgornja neenakost nam tudi pove, da največjo vsoto faktorjev dobimo, če vzamemo en sam faktor. Največja vsota je torej 1998, dobimo pa jo pri trivialnem razcepu $1998 = 1998$.

Martin Juvan

KRIŽANKA “PODROČJA MATEMATIKE”

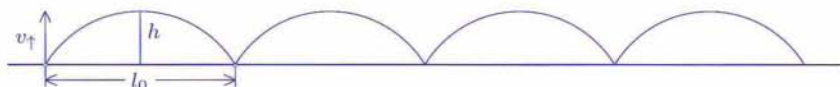
AVTOR MARKO BOKALIC	KAPA PRI GORENSKI ŽENSKI NAR. NOSI	BRAZILSKA DENARNA ENOTA	PREBIVALKE EVROP. OTOSKE DRŽAVE	REDKO MOSKO IME	ŽUPAN V FRANC. OKOLJU	ZAVOD. USTANOVA (IZ FRANC.)	TUNIZIJA	DELEC Z ELEKTR. NABOJEM	LESNI PREMOG	SLIKARJEVA DELAVNICA	VEJE MATEMATIKE NA OSENCENIH POLJIH
?											?
?											NIKO PRILATELJ
HAZARDNA IGRA S KARTAMI							FR. FIZIK (JOSEF) ANG. DRAMATIK (HAROLD)				
ČLAN AGROPOPA KLINAR					BREZ POSEBNO-STI			LOUZE LEBIC PAPEŽEVO POKRIVALO			ERNEST HEMINGWAY
	VPRAŠAJ NAMESTO OPISA	OTOK SZ OD ZADRA		NIKEJI	NAJLAŽJA KOVINA						ZAGREB
	?				TURŠKO POKRIVALO						
	OPOLDANSKI POČITEK										
	?										?
LUKNJIČAVA TVORBA V PANJU	▼			DOLOČILO GIBANJA					◀	SL. KOŠAR. SODNIK (IZTOK) REVEŽ	LETOVIŠČE V JUŽNI DALMACIJI BANČNI PREDAL
VLADIMIR LAMUT			SOPRANISTKA RADOVAN	DIŠEČI DODATEK	ZNAMKA FR. PREPROG CHARLES IVES						BOS. PISAT. (ABDULAH) GL. MESTO FILIPINOV
DIPLOMAT GOLOB						KRIŽANEC MED CRNIM RIBEZOM IN KOSMULJO	ZADRUŽA V CARSKI RUSIJI	NAZIV SVETLO USNJE (FRANC.)			
?											
ŠPANSKA REKA, KI TEČE NA VZHOD					UMETNO VLAKNO						LOCO CITATO SMUČI
HRIB NAD LJUBLJANSKIM BARJEM					?						
Lev Nikolajevič Tolstoj:	▶				PREBIVALKA GRŠKE POKRAJINE						
? Karenina		ANTON TRSTENJAK			ANGLEŠKO PIVO				ZRAK (ANG.)		

DEL OBRAZA	PLOD S TRDO LUPINO	GALIJ	HUMORISTKA PUTRIH	GRIČ, HRIB, KOLJ	ZADNIJAK		VERCELLI	PISATELJICA PEROCI	JELEN IZ ARKTICNIH PREDLOV AMERIKE	?	SLOV. IGRALEC (MARKO)	FRANC. FILOZOF (ERNEST)
												
						AVSTRALSKI TEKAC (RON)						
						?						
		NAGLASNI ZNAK, OSTRIVEC					STAROGR. PESNIK					
							RIMSKI CESAR					
		RUSKA ATLETINJA BIKOVA	BOLGAR. SOPRANISTKA FILIPOVA	POGRINJEK				OTROŠKA DEJAVNOST				
				MATEMATIK VAKSELI								
IT. MESTO ZAHODNO OD ANCONE	NOVINARKA SENICA				OLGA REMS			SEDEŽ NEMŠKE VLADE				
	PREBIVALCI ROMUNSKSE SOSEDE				IRIDIJ			PAPIRNATA KAPA				
											ŠKOTSKI OVČAR	KMET, KI UPRAVLJA PLUG
								ORGAN VIDA				
					TIBE-TANSKO GOVEDO			POMOR. MORUJA				
								VEČJA JADRNICNA				
					TUJE ŽEN. IME							
					NEAPELJI (ORIG.)							
ANTON ASKERC			IGRALEC SEVER	NOVO MESTO			OZEK KONEC KOPNEGA, KI ŠTRLI V MORJE					
DEL CERKVA-NE OPREME				RAZLIČNA VOKALA			ŠPORTNI REKVIZIT					
		IGRALEC CONNERY					BUKOV PLOD				BORILNI ŠPORT	GRŠKI JUNAK
							IGRALKA MINNELI					
		?										
		NAPUŠČ										
				OŽGANOST					SLOV. IGRALEC (BORIS)			
				100 m ²								
	?								KANT-AVTOR SMOLAR			
	ŽENSKA, KI PERE							PRESEK	PIVO STARIH SLOVANOV			

TEK IN MOČ

Izkušnje kažejo, da je za hiter tek potrebna velika moč. Tekalci na kratke proge dosegajo največje hitrosti. Vsi po vrsti imajo izjemno razvite mišice na nogah. Tudi v živalskem svetu so hitri tekači močne živali, spomnimo se konj in divjih mačk. Kako sta pri teku povezana hitrost in mehanična moč, ki jo živali in človek lahko razvijejo? Odgovor na to vprašanje gotovo ni preprost, saj je tek zapleteno gibanje. Ker pa nam gre le za grobe ocene, se poenostavitev ne bomo prehudo bali.

Pri razmišljanju bomo najprej odmislili zračni upor, saj vemo, da je tek naporen tudi pri hitrostih, kjer zračnega upora praktično ne čutimo. Bistvena sila, ki jo moramo pri počasnem teku premagovati, je teža. Tek je namreč zaporedje skokov, pri katerih se tekač odriva naprej in navzgor (slika 1). Pri pristanku skoraj vso kinetično energijo zaradi hitrosti navzdol izgubi z zaviranjem, na njen račun se grejejo mišice. Neznaten del energije, ki se naloži v prožnostno energijo copat in podlage, bomo zanemarili. Pri ponovnem odrivu mišice odrinejo telo navzgor in pri tem opravijo delo.



Slika 1. Tek je zaporedje skokov z višino h in dolžino l_0 . Navpično komponento hitrosti tik po skoku smo označili z $v_{\uparrow}$.

Ni težko izračunati povprečne moči tekača zaradi poskakovanja navzgor. Dobimo jo tako, da delo mišic pri potiskanju navzgor delimo s časom med skokoma. Pri računu je pomembna le navpična komponenta hitrosti $v_{\uparrow}$ tik po skoku. Delo mišic je enako kinetični energiji telesa $A = W_k = \frac{1}{2}mv_{\uparrow}^2$, zato je povprečna moč

$$P = W_k/t = \frac{1}{2}mv_{\uparrow}^2/t = \frac{1}{4}mgv_{\uparrow}.$$

V zadnji vrstici smo upoštevali, da je čas med dvema dotikoma tal $t = 2v_{\uparrow}/g$, kar dobimo iz enačbe za čas dviganja $gt_d = v_{\uparrow}$ in $t = 2t_d$. Čas spuščanja je namreč enak času dviganja, oba časa skupaj pa sta ravno enaka celotnemu času, ko je telo v zraku. Enačba za moč jasno pove, da bomo porabili najmanjšo moč takrat, ko bo navpična komponenta hitrosti tik po odrivu $v_{\uparrow}$ enaka nič. Takšen "tek" pa zmorejo le vozila s

kolesi. Pogostost skokov $\nu = 1/t = g/2v_{\uparrow}$ se namreč tedaj, ko gre navpična komponenta hitrosti $v_{\uparrow}$ proti nič, večja preko vseh meja. Pri teku pa je pogostost ν omejena, saj je povezana z gibanjem nog: v enem nihaju nog naredimo dva poskoka, torej velja $2\nu_n = \nu$. Pri teku na sto metrov je $\nu = 5 \text{ s}^{-1}$, zato je moč 80 kg težkega atleta, ki je potrebna za premagovanje teže, enaka $P = m \frac{g^2}{8\nu} = 200 \text{ W}$.

Naslednji porabnik moči so noge, ki jih moramo med tekom premikati. Iz skrajne lege jih moramo najprej pospešiti do maksimalne hitrosti, ko se dotaknejo tal, nato pa jih spet zavirati. Pri zaviranju tudi tokrat izgubimo kinetično energijo, na njen račun se segrejejo mišice. Potem moramo nogo v zraku potegniti v nasprotno stran in jo spet zavirati, da doseže skrajno lego naprej. To pa se dogaja pri skrčeni nogi, hitrost noge je pri povratku bistveno manjša, zato bomo ta del cikla zanemarili. Nekaj malega pri zaviranju in pospeševanju opravi tudi teža, a bomo njen prispevek prav tako zanemarili. Celotni cikel se zgodi v času $2t$, težišče noge pa moramo pospešiti od mirovanja do največje hitrosti, ko ima stopalo hitrost v , gledano v opazovalnem sistemu, v katerem tekač miruje. Tu smo z v označili hitrost tekača v vodoravni smeri. Ker velja enako za drugo nogo, je delo mišic enako $A = 2W_k$. Gibanje nog je zapleteno, a ne bomo hudo zgrešili, če upoštevamo, da se giblje le del noge od kolena navzdol. Tako je izraz za največjo kinetično energijo hitro pri roki: $W_k = m(\frac{3}{4}v)^2/2$. Moč pa je enaka $P = \frac{2W_k}{2t} = \frac{9}{32}mv^2\nu = 168 \text{ W}$. Maso spodnjega dela noge smo ocenili na 3 kg. Zaradi zanemaritev vzemimo, da je ta moč 200 W.

Na tekača deluje še zračni upor. Moč zaradi upora je $P = F_u v$, kjer je F_u sila upora. Določimo jo iz enačbe za kvadratni zakon upora $F_u = \frac{1}{2}\rho v^2 c_u S$, kjer je ρ gostota zraka, S ploščina največjega profila telesa, c_u pa koeficient, ki je odvisen od oblike gibajočega se telesa. Za človeško telo vzamemo $S = 0,7 \text{ m}^2$, $c_u = 0,8$ in dobimo $P = 340 \text{ W}$.

Celotna moč, ki jo mora razviti tekač na kratke proge, je torej 740 W. Ta ocena pa je spodnja meja, saj smo za hitrost privzeli 10 ms^{-1} , kar je približna vrednost za povprečno hitrost teka na sto metrov. Po začetnem pospeševanju je hitrost 12 ms^{-1} , kar za moč pri premagovanju upora da že blizu 600 W. Nismo upoštevali ne gibanja rok ne začetnega pospeševanja. Ocene moči so posebno za gibanje nog in premagovanje zračnega upora precej negotove. Vidimo pa, da je tek na kratke proge res le za izjemno močne atlete, ki lahko delajo deset sekund z močjo blizu enega kilovata.

ČUVAJ

Pomlad je blizu. Noči so manj hladne, pogoji za opazovanje zvezdnega neba pa vse primernejši.

Tokrat bi vas rad navdušil za opazovanje ene najsvetlejših zvezd, ki jo z lahkoto najdemo na nebu, če le poznamo Veliki voz. Ob pomladnih večerih leži Veliki voz nad našo glavo tako, da njegovo oje gleda proti vzhodu. To lego Voza lahko s pridom uporabimo za orientacijo na zemljišču (slika 1).



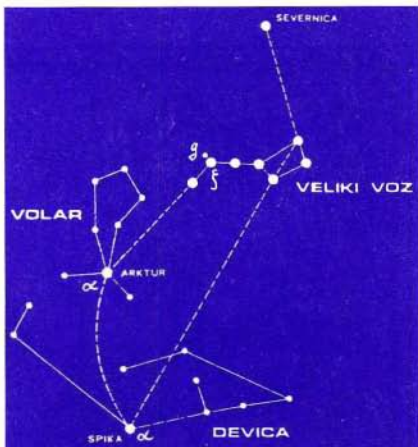
Slika 1. Spomladi zvečer leži Veliki voz nad našo glavo in njegovo oje kaže proti vzhodu. Ilustracija Marte Kotar iz knjižice Marijana in Stane Prosén: *Male zgodbe o Velikem vozu* (Math, 1996).

Predlagam, da si vzamete nekaj časa in zvečer pogledate nad glavo ter poiščete Veliki voz. Iztegnjeno desno roko usmerite proti ojesu Voza in z njo potujete v loku rahlo desno navzdol za približno dve dolžini ojesa. Naleteli boste na zelo svetlo zvezdo, ki ji namenjamo te vrstice. To je zvezda *Arktur* ali *Čuvaj medveda* (slika 2).

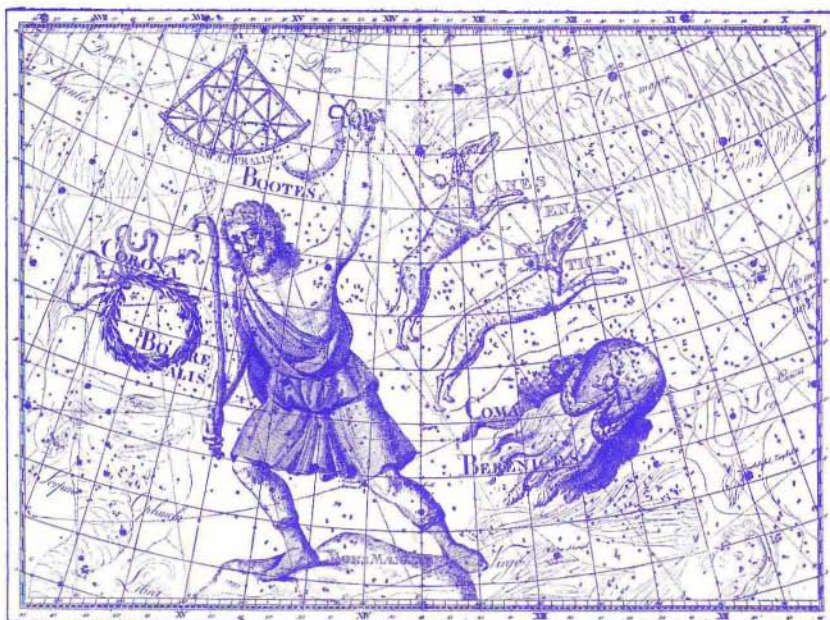
Arktur je glavna zvezda ozvezdja *Volar*. Zakaj je dobila tako ime? V starih časih so najsvetlejšo zvezdo kakega ozvezdja enačili kar s samim ozvezdjem. Tako tudi v našem primeru. Po neki zgodbi je *Volar* (*Arktur*) potreboval *Lovska psa* (tudi ozvezdje), ki sta mu pomagala *čuvati Velikega medveda*, da ne bi ušel s sicer trdno začrtane, vendar že kar utrujajoče in dolgočasne poti pri enakomernem kroženju okrog *Severnice* (natančneje okrog severnega nebesnega pola). To nebesno kroženje Velikega medveda je zelo pomembno. Vsaka lega Medveda na tej poti namreč ponoči pomaga ljudem najti zvezdo *Severnico*, s tem pa smer proti severu, da se na svojem potovanju ne izgubijo. Če pa bi Medved skrenil s svoje poti, severa ne bi bilo več mogoče tako hitro in zanesljivo poiskati (slika 3).

O tem, kako je *Volar* prišel na nebo, govori druga zgodba. V njej je *Volar* mladenič, ki ga je brat oropal vsega, kar bi moral podedovati. Da bi se obdržal kot kmet, je izumil plug in tako postal eden največjih dobrotnikov človeštva. *Demetra*, grška boginja poljedeljstva, plodnosti in vsega, kar raste, je bila nad tem izumom tako navdušena, da je prosila vrhovnega poglavarja bogov, vsemogočnega *Zevsa*, naj počasti mladeniča in ga postavi na nebo, skupaj z njegovim plugom in voli. *Nebesni plug* z voli pa je znana podoba zvezd Velikega voza, katerega štiri zvezde predstavljajo plug, ostale tri v ročaju pa vole, ki ga vlečejo.

Sedaj pa od zgodbe k dejanju. Pojdite zvečer ven in izsledite zvezdo *Arktur*. Prvi večer jo samo občudujte. Pokažite jo tudi drugim, ki je še ne poznajo. Nato jo opazujte vsak deseti večer ob isti uri, vse tja do maja ali junija. Zabeležite, kaj opazite. Poskusite pojasniti, zakaj se je to zgodilo. (Odgovor najdete v knjižici *Astronomska opazovanja*, Presek 5 (1978), št. 5.)



Slika 2. Takole po Velikem vozu izsledimo zvezdo *Arktur* (in nadalje še zvezdo *Spiko* v ozvezdju *Devica*).



Slika 3. Podoba ozvezdja Volar (Bootes) z Lovskima psoma (Canes Venatici) na stari zvezdni karti kar sama zase pripoveduje zgodbo o Čuvaju nebesnega Velikega medveda (Ursa major).

Z opazovanjem še ugotovite, kdaj Arktur vzide in kdaj zaide, na primer v nočeh 15. 2., 1. 3., 15. 3., 1. 4., 15. 4. itn. Izračunajte, koliko časa je nad obzorjem. Ali je Arktur kdaj nad vašo glavo?

Čeprav se zdijo predlagana opazovanja otročje lahka, vam zagotavljam, da jih ne boste opravili z levo roko. In lepo zvezdno nebo vam želim!

Marijan Prosén

REZANJE PALIC

Kovač reže enako debele kovinske palice na 25 cm dolge kose in sicer razreže 4 palice, dolge po 4 metre, v 45 minutah. V kolikšnem času bo, če dela enako hitro, razrezal 4 palice dolžine 9 metrov?

Dragoljub M. Milošević, prevod Barbara Japelj

KAKO UGANEMO ODSTRANJENO ŠTEVKO? – Rešitev s str. 171

Ana je zanesljivo strategijo za rešitev naloge našla v zelo stari knjigi zabavne matematike. Z njo je odstranjeno števko v Mihovem številu odkrila takole:

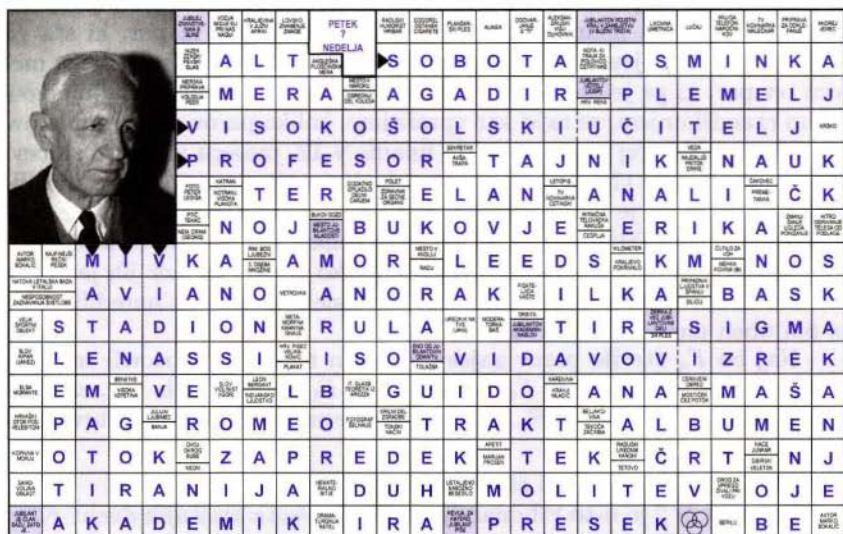
Seštela je števke števila, ki ji ga je Miha napisal na listek. Nato je poiskala ostanek pri deljenju dobljene vsote s številom 9. Odstranjeno števko je dobila, če je ta ostanek odštela od 9. (Računanje je pospešila tako, da je pri seštevanju opuščala števke 9 in pare števk z vsoto 9.)

Primer: Naj bo začetno število 4735 892 006 in 2 004 589 673 število z enakimi, a premetanimi števki. Razlika obeh števil je enaka 2 731 302 333. Če v razliki opustimo npr. števko 1, dobimo število 273 302 333 z vsoto števk 26. Če 26 delimo z 9, dobimo ostanek 8. Res je odstranjena števka enaka $9 - 8 = 1$.

In zakaj je strategija zanesljiva? Sedaj, ko jo poznamo, na to vprašanje pravzaprav ni več težko odgovoriti. Premislite!

Marija Vencelj

KRIŽANKA “VOŠČILO ZA JUBILEJ” – Rešitev s str. 160



PRVO SREČANJE S FIBONACCIJEVIMI ŠTEVILI

Verjetno marsikdo med vami že pozna Fibonaccijeva števila, saj tudi Presek pogosto piše o njih. Tako sta v lanskem letniku izšla dva računalniško obarvana prispevka o izračunavanju posplošenih Fibonaccijevih števil. Gotovo pa so med bralci tudi taki, ki Fibonaccijevih števil še niso srečali. Predvsem njim je namenjen ta prispevek, kar pa seveda še ne pomeni, da ni primeren tudi za poznavalce. V matematiki je namreč tako, da je zelo koristno, če isto strukturo spoznamo z različnih vidikov. Pogosto se nam namreč dozdeva, da neki pojem dobro razumemo, pa se kasneje izkaže, da smo v resnici ta pojem razumeli le delno ali površno.

Zakaj se ta števila imenujejo Fibonaccijeva

Zgodba se začne leta 1202, ko je Leonardo iz Pise, bolj znan po psevdonimu Fibonacci, napisal knjigo *Liber Abacci* in v njej zastavil sloviti problem o zajcih. Pravzaprav je ohranjena le druga izdaja knjige iz leta 1228. Kakorkoli že, vprašanje je naslednje:

Par zajcev, ki je star vsaj dva meseca, vsak mesec skoti en par zajcev. Koliko parov zajcev imamo po enem letu, če začnemo z enim parom na novo skotenih zajcev?

V prvem mesecu imamo torej en par zajcev. V drugem mesecu imamo še vedno samo ta par, saj zajca iz para še nista dopolnila dveh mesecev. V tretjem mesecu imamo nato dva para: začetni par in par, ki sta ga skotila. V naslednjem mesecu imamo tri pare: tista dva iz prejšnjega meseca ter par, ki ga je skotil začetni par. Namesto da sedaj nadaljujemo s takim razmišljanjem, se rajši kar vprašajmo, koliko parov zajcev imamo v 12. mesecu. Najprej ugotovimo, da imamo v 12. mesecu vse pare zajcev, ki smo jih imeli v 11. mesecu (saj v nalogi ni nobenega pogoja o umrljivosti). Koliko pa je novih parov? Vsak par, ki je dopolnil dva meseca, je skotil en par. Takih parov pa je ravno toliko, kot je bilo vseh parov v 10. mesecu. Torej, v 12. mesecu imamo toliko parov, kolikor jih je bilo v 10. in v 11. mesecu skupaj. Celo več, razmislek, ki smo ga naredili, velja za poljuben mesec in ne le za dvanajstega.

Naj bo F_n število parov zajcev v n -tem mesecu. Ugotovili smo, da je $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ in $F_{12} = F_{11} + F_{10}$. Celo več, za vsak $n > 2$ velja $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Fibonaccijeva števila so torej števila, ki so definirana takole:

Prvi dve Fibonaccijevi števili sta enaki 1: $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$.

Za vse $n > 2$ je n -to Fibonaccijevo število vsota prejšnjih dveh: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Pravimo, da so Fibonaccijeva števila podana z *rekurzivno formulo*. Prvih nekaj Fibonaccijevih števil je:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \dots$$

Vidimo torej, da imamo v 12. mesecu 144 parov zajcev, po 12. mesecu pa jih je že 233. Skratka, množijo se kot zajci.

Kje še najdemo Fibonaccijeva števila

Seštevamo z enicami in dvojkami

Za poljubno naravno število n se vprašajmo, na koliko različnih načinov ga lahko zapišemo kot vsoto samih enic in dvojk. Na primer, število 5 lahko zapišemo na naslednjih 8 načinov:

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 2$$

$$5 = 1 + 1 + 2 + 1$$

$$5 = 1 + 2 + 1 + 1$$

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$5 = 1 + 2 + 2$$

$$5 = 2 + 1 + 2$$

$$5 = 2 + 2 + 1$$

Označimo število zapisov števila n z a_n . Gornji primer torej pravi $a_5 = 8$. Bralec naj sedaj poskusi zapisati vse načine za število 6, mi pa zapišimo vse načine za števila do 5:

$$1 = 1 \quad (a_1 = 1),$$

$$2 = 1 + 1 = 2 \quad (a_2 = 2),$$

$$3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 \quad (a_3 = 3),$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 \quad (a_4 = 5)$$

Število načinov po vrsti je torej 1, 2, 3, 5, 8, 13; slednje naj bi bralec preizkusil sam. To pa je, z izjemo manjkajočega prvega Fibonaccijevega števila F_1 , prav prvih nekaj Fibonaccijevih števil. Dokažimo, da to velja tudi v splošnem.

Poglejmo si vse zapise števila n z enicami in dvojkami. Razdelimo zapise v dve skupini: na tiste zapise, ki se začnejo z 1, in na tiste, ki se začnejo z 2. Zapisov, ki se začnejo z 1, je prav toliko, kot je zapisov števila $n-1$, kar sprevidimo z odstranitvijo začetnih enic. In dalje, zapisov, ki se začnejo z 2, je prav toliko, kot zapisov števila $n-2$. Torej imamo zvezo $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ker je $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$, lahko zaključimo, da je število zapisov števila n z enicami in dvojkami enako F_{n+1} , na kratko $a_n = F_{n+1}$.

Hodimo po stopnicah

Stopnišče je sestavljeno iz n stopnic. Na koliko različnih načinov se lahko povzpne do vrha, če na vsakem koraku prestopimo eno ali dve stopnici?

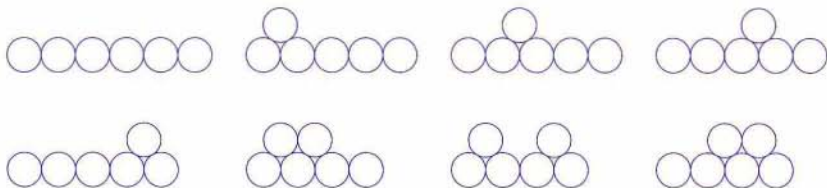
Naj b_n označuje iskano število. Očitno velja $b_1 = 1$ in $b_2 = 2$. Če smo na prvem koraku prestopili eno stopnico, imamo b_{n-1} načinov do prihoda na vrh, če pa smo na prvem koraku prestopili dve stopnici, imamo do konca b_{n-2} možnosti. Torej, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ in zopet lahko zaključimo, da je $b_n = F_{n+1}$.

Dodajmo k temu primeru, da ga nam pravzaprav ni bilo potrebno reševati. Dovolj bi bilo uporabiti enega najljubših trikov matematikov: problem prevedemo na že znani, rešeni primer. Vsak naj sam premisli, da je problem s stopnicami pravzaprav samo preoblečen problem z vsotami iz enic in dvojk.



Zlagamo kovance

Imamo n enakih kovancev. Zanima nas, na koliko različnih načinov lahko kovance zložimo drugega ob drugega v eno ali dve vrsti. Pri tem mora veljati, da sta pod kovancem v zgornji vrsti vedno dva kovanca v spodnji vrsti. Na sliki 1 imamo prikazanih vseh 8 načinov, kako lahko zložimo 6 kovancev.



Slika 1. Šest kovancev v dve vrsti

S c_n označimo število načinov, na katere lahko zložimo n kovancev v dve vrsti. Slika 1 nam torej pove, da je $c_6 = 8$. Vsak bo sam brez težav preveril, da je $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 3$ in $c_5 = 5$. Začetek zaporedja števil c_n se torej ujema s Fibonaccijevimi števili F_n . V resnici za vsak n velja $c_n = F_n$. Tega tu ne bomo dokazali, omenimo pa, da je ta lastnost Fibonaccijevih števil v tesni zvezi s slavnim Pascalovim trikotnikom.

Štejemo debele množice

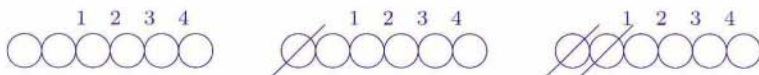
Končno množico naravnih števil imenujemo *debela*, če je vsak njen element vsaj tako veliko število, kot ima množica elementov. Na primer, množici $\{4, 7, 12, 99\}$ in $\{3, 4, 5\}$ sta debeli, medtem ko množici $\{1, 2\}$ in $\{2, 99, 100\}$ nista debeli. Dogovorimo se tudi, da prazno množico obravnavamo kot debelo množico.

Z d_n označimo število debelih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Na primer, $d_4 = 8$, saj ima množica $\{1, 2, 3, 4\}$ naslednje debele podmnožice:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \text{ in } \{3, 4\}.$$

Verjetno ne bo nihče posebej presenečen, če kar povem, da je $d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 5$, $d_4 = 8$ (kot že vemo) in $d_5 = 13$. Kot vse kaže, velja $d_n = F_{n+2}$. Kako pa bi to dokazali?

Morda bo najlažje tako, da prevedemo problem debelih množic na zlaganje kovancev v dve vrsti. Idejo, kako to naredimo, razložimo kar na primeru za d_4 . Vzemimo šest kovancev ($4 + 2$, tj. $n + 2$), jih postavimo v vrsto in v zgornjo vrsto od drugega mesta dalje zapišimo števila od 1 do 4 (glej sliko 2). Postavitev vseh šestih kovancev v vrsto ustreza prazni množici. Nato prečrtajmo prvi kovanec, ki ga moramo zato postaviti v gornjo vrsto na označena mesta. Če to naredimo na vse možne načine, dobimo množice $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ in $\{4\}$. Nazadnje prečrtajmo prva dva kovanca. Na vse možne načine ju postavimo v gornjo vrsto, kar nam da še množice $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ in $\{3, 4\}$. Torej smo ugotovili, da je $d_4 = c_6 = F_6$. Razmislek, ki smo ga naredili za ta primer, lahko brez težav ponovimo za poljuben n , torej res velja $d_n = F_{n+2}$.



Slika 2. Z debelih množic do zlaganja kovancev

Nekaj preprostih lastnosti Fibonaccijevih števil

Seštejmo nekaj prvih Fibonaccijevih števil:

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 2 = 4$$

$$1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$

Če dobljene vsote dobro pogledamo, opazimo, da dobivamo za ena zmanjšana Fibonaccijeva števila. Dokažimo, da to velja za vse n . Upoštevajmo, da je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, oziroma $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$. Zato imamo:

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Sedaj seštejmo leve strani in desne strani gornjih enakosti. Na levi dobimo $F_1 + F_2 + \dots + F_n$, torej izraz, ki nas zanima. Na desni strani pa se skoraj vsi členi paroma odštejejo, ostane nam le $F_{n+2} - F_2$. Ker je $F_2 = 1$, smo tako pokazali:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Na podoben način, kot smo dokazali zadnjo enakost, lahko dokažemo tudi naslednje lastnosti Fibonaccijevih števil. Bralca vabim, da jih poskuša pokazati sam.

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Npr.: $1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 = 144$.

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Npr.: $1 + 3 + 8 + 21 + 55 = 88 = 89 - 1.$

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1.$$

Npr.: $1 - 1 + 2 - 3 + 5 - 8 + 13 - 21 + 34 - 55 = -33 = -34 + 1.$

Sedaj pa seštejmo še kvadrate prvih n Fibonaccijevih števil. Upoštevajmo, da velja

$$F_n^2 = F_n F_n = F_n (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$$

in zapišimo:

$$F_1^2 = 1 = F_1 F_2$$

$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_2 F_1$$

$$F_3^2 = F_3 F_4 - F_3 F_2$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1}^2 = F_{n-1} F_n - F_{n-1} F_{n-2}$$

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$$

Seštejemo leve in desne strani pa dobimo

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Npr.: $1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 = 273 = 13 \cdot 21.$

Podobnih identitet s Fibonaccijevimi števili je še zelo veliko, vendar naj omenjene za prvo srečanje s temi števili zadoščajo.

Članek smo začeli s problemom o razmnoževanju zajcev. Resnici na ljubo povejmo, da Fibonaccijeva števila nimajo kakega posebnega pomena pri vzreji zajcev, med drugim tudi zato ne, ker problem zanemarja umrljivost. Po drugi strani pa so Fibonaccijeva števila izjemno pomembna v matematiki, saj obstaja posebna veja matematike, ki se ukvarja samo s problemi, povezanimi s temi števili.

Sandi Klavžar

JUNIPER GREEN – IGRA Z DELITELJI IN VEČKRATNIKI

Oglejmo si igro s števili, ki si jo je izmislil Richard Porteous, da bi pomagal otrokom pri učenju množenja in deljenja števil. Poimenoval jo je Juniper Green, po šoli, na kateri poučuje. Igra je enostavna, pa kljub temu zabavna, poučna in izzivalna.

Za igranje Juniper Green potrebujete sto kartic s števkami od 1 do 100. Položite jih po vrsti na mizo tako, da so vse obrnjene navzgor in razporejene v deset vrst po deset kartic. Takšna razporeditev omogoča dober pregled nad karticami.

Pravila igre so naslednja:

1. Dva igralca drug za drugim pobirata kartice z mize. Kartice, ki jo vzamemo, ne smemo več uporabiti.
2. Vsako število, ki ga vzamemo, mora biti ali delitelj ali večkratnik števila, ki ga je vzel nasprotni igralec.
3. Igralec, ki ne more vzeti nobene kartice več, izgubi.

Da je igra smiselna, moramo dodati še eno pravilo. Problem namreč nastopi, če prvi igralec v prvi potezi vzame praštevilo, ki je večje od 50. Recimo, da Anja igra proti Marku. Naj Anja začne igro in vzame praštevilo 97. Marko lahko vzame samo število 1. Zdaj Anja vzame drugo veliko praštevilo 89 in Marko izgubi. Da preprečimo takšen potek igre, dodamo še naslednje pravilo:

4. Prvo število, ki ga vzamemo, mora biti sodo.

Četudi igro začnemo s sodim številom, velika praštevila še vedno pogosto igrajo odločilno vlogo. Če eden od igralcev vzame število 1, lahko nasprotnik igro takoj dobi, tako da izbere veliko praštevilo, recimo 97 (97 je zagotovo na razpolago, saj ga lahko vzamemo le, če nasprotni igralec pred tem vzame število 1).

Iskanje strategije za igro s sto števili prepustimo bralcem, natančneje pa si oglejmo preprostejšo igro s samo štiridesetimi števili (otroci, ki se šele učijo množiti in deliti, lahko uporabijo tudi samo dvajset kartic). Nekatero otvoritveno potezo hitro pripeljejo do izgubljene igre, tako kot v naslednjem primeru:

poteza	Anja	Marko
1	38	
2		19
3	1	
4		37
5	izgubi	

Podobno velja za otvoritveno potezo s številom 34. Tudi nekaterim drugim številom se je na začetku igre boljše izogniti. Recimo, da Anja na začetku vzame število 5. Marko nato vzame število 25. Anja mora vzeti število 1 in izgubi.

Nekatere otvoritvene poteze pa nasprotno vedno pripeljejo do zmage. Denimo, da Anja začne s številom 22. Marko lahko nato vzame števili 11 ali 2. Potek igre za oba primera kaže naslednja tabela:

poteza	1. primer		2. primer	
	Anja	Marko	Anja	Marko
1	22			
2		11		2
3	33		26	
4		1		13
5	21		39	
6		7		3
7	35		21	
8		5		7
9	25		35	
10		izgubi		5
11			25	
12				izgubi

Druga možnost je, da začne Anja s številom 26. V tem primeru lahko Marko vzame števili 13 ali 2, kar ga spet prej ali slej pripelje do izgubljene igre.

Za zabavo lahko poiščete še druge zmagovalne strategije. Če je s štiridesetimi števili preveč enostavno, razširite igro na sto kartic, lahko pa tudi na tisoč. Morda pa bo kdo odkril celo splošno strategijo za n kartic?

Nataša Vrbančič Kopač

Literatura:

I. Stewart: *Juniper Green*, Scientific American, marec 1997.

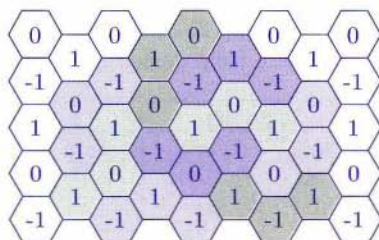
ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 167

Vodoravno: 1. 12, 3. 3, 4. 97, 6. 108, 8. 690, 9. 21, 10. 49, 11. 7, 12. 4, 13. 15, 15. 13, 17. 144, 18. 242, 20. 20, 21. 5, 22. 37.

Marija Vencelj

ŠESTKOTNIŠKE TROMINE – Rešitev s str. 156

Vzorec "potopimo" v ravnino, razdeljeno na šestkotnike, ki jih oštevilčimo takole:



Tedaj je skupna vsota števil na poljih, ki jih pokrije tromina tipa a enaka 0. Prav tako je enaka nič skupna vsota števil na poljih, ki jih pokrije tromina tipa b.

Ker skupna vsota števil na poljih našega šestkotniškega vzorca ni enaka nič, sledi, da ga ni mogoče sestaviti le s trominami tipov a in b.

Da pa je mogoče naš vzorec sestaviti iz tromin tipa c, je razvidno iz načina, kako je ta vzorec pobarvan.

Jurij Kovič

RAZTRGANI LEPAK – Rešitev s str. 171

Ne. Po vsakem trganju se namreč število kosov poveča za sodo število. (Zakaj?) Ker imamo na začetku en kos, je na koncu trganja skupno število kosov liho. Kosov torej ne more biti 1998.

Dragoljub M. Milošević

GRAJSKI LABIRINT – Rešitev s str. 192

(1,3), (1,5), (4,5), (4,6), (4,9), (7,9), (8,9), (8, CILJ).

Par števil v oklepaju označuje trenutni položaj obeh svinčnikov v labirintu. Odebeljeno je označena številka sobe, ki jo moraš izbrati pri naslednji potezi.

Iztok Arčon

33. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

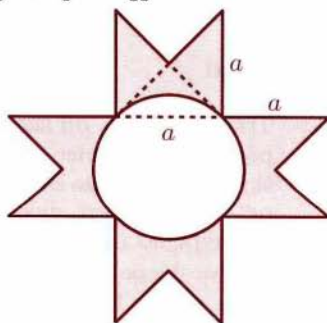
V soboto, 17. maja 1997, se je 218 sedmošolcev in 326 osmošolcev, ki so se na občinskem tekmovanju najbolje odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Novi Gorici in Novem mestu na državnem tekmovanju slovenskih osnovnošolcev v znanju matematike.

Zlato Vegovo priznanje je osvojilo 74 sedmošolcev in 116 osmošolcev, prejeli pa so ga sedmošolci, ki so osvojili vsaj 15 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 19 od 25 možnih točk.

Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

7. razred

1. Pokaži, da je razlika potenc 3^{1997} in 3^{1993} večkratnik števila 16.
2. V sušilnico za sadje so pripeljali 100 kg svežih sliv. Po oceni strokovnjakov je bila stopnja vlažnosti teh sliv 90 odstotna. Slive so sušili nekaj dni, nato so jih stehali. Ugotovili so, da tehtajo 50 kg. S sušenjem so nadaljevali toliko časa, da so osušene slive tehtale petkrat manj kot sveže.
 - a) Kolikšna je bila stopnja vlažnosti sliv, ko so tehtale 50 kg?
 - b) Kolikšna je bila stopnja vlažnosti osušenih sliv na koncu sušenja?
 - c) Koliko kilogramov suhe snovi so vsebovale slive na koncu sušenja?
3. Kateri celi števili n ustrezata neenačbi $\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{22}{33}$?
4. Obseg in ploščino osenčenega dela "zvezde" izrazi z a .



5. V 120 cm dolg, pol metra širok in 8 dm globok akvarij, ki ima obliko kvadra, dolijemo 6 litrov vode. Koliko več stene je mokre?

8. razred

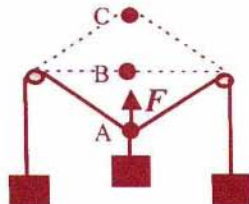
1. Določi b tako, da bosta imeli enačbi $\frac{x}{b+1} = 1$ in $\frac{\frac{3x^2}{4} + 2x - 9\frac{1}{4}}{3} = \frac{(x+4)^2 - 7}{4}$ isto množico rešitev.
2. Občina je namenila 105 000 tolarjev za ureditev petih parkov. Stroški ureditve prvih treh parkov so bili v razmerju 3 : 4 : 5, četrtega in petega pa 2 : 3. Ureditev zadnjih dveh parkov je stala $\frac{2}{5}$ zneska, ki so ga porabili za ureditev prvih treh.
Koliko je stala ureditev posameznega parka?
3. V koordinatnem sistemu upodobi množico vseh točk (x, y) , katerih koordinati ustrezata pogoju $7^{x+y} = 7^{x+2} \cdot 7^{2x+1}$.
4. Dan je kvadrat $ABCD$ z 8 cm dolgo stranico. Točka E je središče (razpolovišče) stranice BC . Na stranici AB je točka F , ki je enako oddaljena od točke E in oglišča D .
Izračunaj razdaljo točke F od oglišča A .
5. Iz 628 dm^3 staljene kovine so izdelali 157 km žice kvadratnega prereza. Žico so navili v eni plasti na valjaste tuljave premera 1 m in dolžine 2,5 m, tako da so ovoji drug ob drugem in se ne prekrivajo.
Koliko tuljav so navili?

Aleksander Potočnik

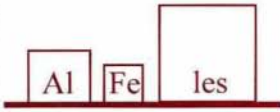
16. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

7. razred

1. Tri enake uteži, od katerih vsaka tehta 10 N, povežemo z vrvico in obesimo preko dveh škripcev, kot kaže slika. Na vozel, kjer je pripeta srednja utež, delujemo še z dodatno silo F navpično navzgor. Poševno narisani deli vrvice oklepajo z vodoravnico kot 30° , razdalja AC je 1,0 m, razdalja med škripcema je 1,73 m.

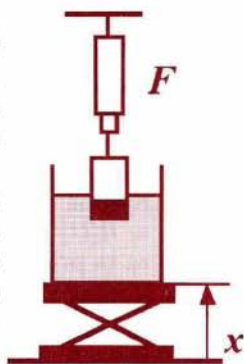


- a) Nariši vse sile, ki delujejo na vozel, ko ta miruje v točki A, v točki B oziroma v točki C. Za vsako točko nariši posebno sliko.

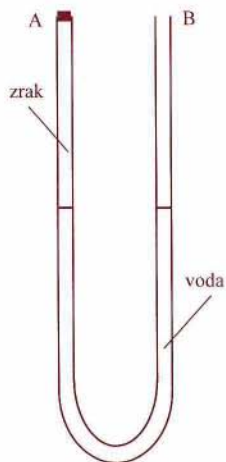
- b) Kolikšna je sila F , ko je vozec v točki A , točki B oziroma v točki C ? Pomagaj si z načrtovanjem.
- c) Izračunaj še skupno spremembo potencialne energije vseh treh uteži pri premiku vozla iz točke A v točko B in pri premiku iz točke A v točko C .
2. Na mizi so tri kocke. Prva, z robom 0,72 dm, je iz aluminija ($\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ kg/dm}^3$), druga, z robom 0,505 dm, iz železa ($\rho_{\text{Fe}} = 7,8 \text{ kg/dm}^3$) in tretja, z robom 1,1 dm, iz lesa ($\rho_{\text{les}} = 0,75 \text{ kg/dm}^3$).
- 
- a) Izračunaj mase kock.
- b) Kocke postavimo drugo na drugo v obliki stolpa tako, da bo **opravljeno delo najmanjše**. V kakšnem vrstnem redu so kocke postavljene? Nariši skico. Oznake kock naj bodo Al, Fe in les.
- c) Delo tudi izračunaj.
3. Moko brisačo smo vzeli iz pralnega stroja, jo stehali in dobili maso 350 g. Nato smo jo obesili na balkon, da se je posušila, jo ponovno stehali, masa suhe brisače je bila 200 g. Temperatura brisače pred sušenjem je bila okrog 20°C in tudi temperatura zraka je bila približno enaka. Izračunaj, koliko toplote je prejela brisača med sušenjem. Pri tem predpostavimo, da se izparilna toplota vode pri 20°C ne razlikuje mnogo od izparilne toplote pri temperaturi vrelišča. Manjkajoče podatke poišči v učbeniku.

Eksperimentalni nalogi

4. Na silomeru visi manjša čaša, kot kaže slika. Z dvigovanjem mizice, na kateri je večja čaša z vodo, se bo sila, ki jo kaže silomer, spreminjala. Razišči odvisnost te sile od višine mizice x in na priloženi milimetrski papir nariši diagram $F = F(x)$. Meri v obe smeri. Najprej mizico dviguj, dokler voda ne steče v manjšo čašo, nato pa mizico še spuščaj do začetne višine. Med spuščanjem je manjša čaša polna. Iz diagrama lahko odčitash težo vode, ki je napolnila manjšo čašo. Na diagramu to označi in težo te vode kar na diagram tudi zapiši.



5. Želimo ugotoviti, kako se spreminja prostornina zraka v zaprti cevi v odvisnosti od tlaka. Zato naredimo poskus: V 3 m dolgo plastično prozorno cev, z notranjim presekom $0,50 \text{ cm}^2$, nalijemo toliko vode, da je v kraku A višina zraka približno 50 cm, nato pa ta krak neprodušno zapremo z zamaškom, kot kaže slika. Krak B dvigujemo in merimo prostornino zraka v kraku A.

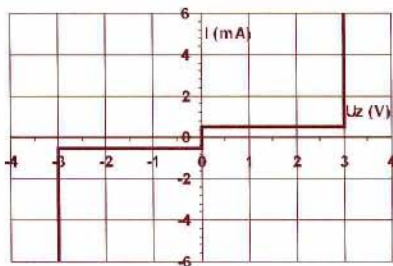


- Zapiši formulo, po kateri izračunamo tlak zraka v kraku A, ko je gladina vode v kraku B za višino h višja od gladine v kraku A.
- Sestavi tabelo s tremi kolonami. V prvi naj bo prostornina zraka v kraku A, v drugi tlak tega zraka in v tretji zmnožek prostornine in tlaka. Zato dvigaj krak B in pri petih različnih višinskih razlikah med gladinama (30 cm, 60 cm, 90 cm, 120 cm, 150 cm) meri prostornino zraka v kraku A.
- Kakšno zakonitost lahko ugotoviš iz svojih merenj? Zaradi neatančnosti pri merjenjih so možna manjša odstopanja.

Opozorilo: Kraka B ne smeš spustiti na tla, ker ti lahko izteče voda.
 Pripor: plastična cev z vodo, stojalo, merilni trak 2 m.

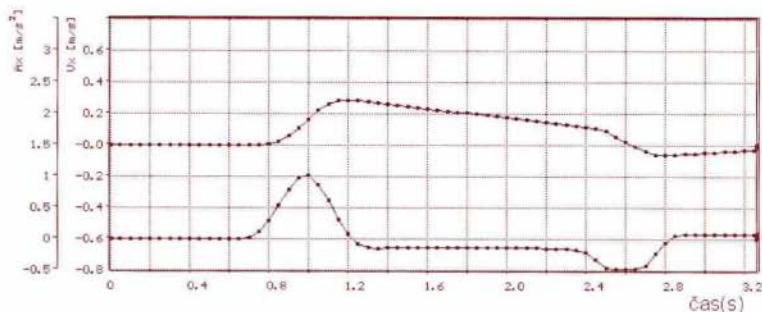
8. razred

1. Če zaporedno povežemo dve Zenerjevi diodi in izmerimo $I = I(U_Z)$, dobimo diagram, kot kaže slika.



- Nariši diagram $R = R(U_Z)$ za takšno vezavo.
 - Nato zaporedno k diodama dodamo upornik za $2,0 \text{ k}\Omega$. Kar na isti diagram $R = R(U_Z)$ nariši krivuljo še za ta primer. U_Z je napetost na obeh Zenerjevih diodah.
2. Dva vodnika iz železne žice, vsak je dolg 1,00 m, zvežemo zaporedno in za 1,00 sekunde priklopimo na napetost 2,5 V. Presek prvega vodnika je $1,00 \text{ mm}^2$, drugega pa $0,25 \text{ mm}^2$. V tej sekundi se debelejši vodnik segreje za 0,70 K. Gostota železa je $7,8 \text{ g/cm}^3$, manjkajoče podatke pa poišči v učbeniku.

- a) Koliko električnega dela je v eni sekundi prejel debelejši in koliko tanjši vodnik?
- b) Za koliko se je v eni sekundi segrel tanjši vodnik?
3. Na vodoravni tračnici smo postavili vagonček z maso 100 g in ga z roko sunili v vodoravni smeri od leve proti desni. Na začetku in na koncu tračnic je bila navpična pregrada, da vagonček ni mogel pasti s tračnic. Na vagončku je bil pritrjen ultrazvočni oddajnik. Računalniški merilni sistem je hkrati meril hitrost in pospešek vagončka v odvisnosti od časa, računalnik pa je potem obe odvisnosti narisal na skupni diagram (glej sliko). Hitrost in pospešek sta narisana tako, da pozitivna vrednost na diagramu pomeni pri gibanju vozička smer v desno, negativna vrednost pa nasprotno smer.



- a) V največ dveh vrsticah opiši, kaj se je dogajalo z vagončkom potem, ko smo ga sunili!
- b) Katera krivulja (spodnja, zgornja) predstavlja hitrost in katera pospešek?
- c) Približno nariši sile, ki so so delovale na vagonček v času 0,7 s do 1,2 s.
- d) Kaj se je dogajalo z vagončkom v času 2,4 s do 2,8 s?
- e) Približno izračunaj, kolikšno pot je prepotoval vagonček v času 1,2 s do 2,4 s.
- f) Približno izračunaj, kolikšna je bila sila trenja na vagonček.
- g) Približno izračunaj, kolikšna je bila največja sila roke na vagonček.

Eksperimentalni nalogi

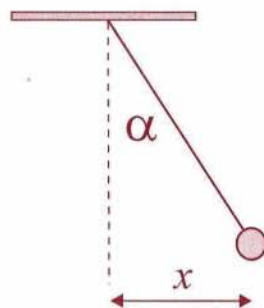
4. V "črni" škatli s štirimi priključki, ki so označeni z 1, 2, 3, 4, in s stikalom so vgrajeni štirje enaki uporniki. Enak upornik je priložen k vaji. Z merjenjem z digitalnim ohmmetrom ugotovi, kako so uporniki

in stikalo v škatli povezani. Nariši vezje, ki je v škatli! Ohmmeter pokaže upor med priključkoma. Majhna odstopanja, manjša kot 5 %, te naj ne motijo, ker so posledica napak upornikov in instrumenta. Stikalo je vklopljeno, ko je tipka pritisnjena, sicer je stikalo izklopljeno. Škatle ne smeš odpreti!

Za bralce Preseka navajamo možne meritve: $R_{\text{priložen}} = 1,0 \text{ k}\Omega$, $R_{12} = 1,0 \text{ k}\Omega$, $R_{24} = 1,0 \text{ k}\Omega$, $R_{34} = 0,5 \text{ k}\Omega$ in $R_{13} = 2,5 \text{ k}\Omega$, vse pri izklopljenem stikalu. Pri vklopljenem stikalu je $R_{14} = 0$.

5. Naredil boš nekaj poskusov z nitnim nihalom. Dolžina nihala, to je razdalja od osi vrtenja do težišča uteži, je 40 cm, masa uteži pa 53 g.

- a) Izmeri nihajni čas nihala pri amplitudah 15° , 45° in 75° ter nariši diagram: nihajni čas v odvisnosti od amplitude. Nihajni čas je čas, v katerem nihalo pride iz npr. skrajne desne lege nazaj v isto lego, amplituda pa je največji odklon. Razmisli, kako boš meril, saj je ročno merjenje časov okrog ene sekunde zelo nenatančno. Pri vsakem kotu napravi vsaj dve meritvi.



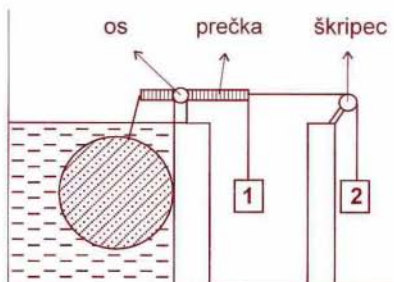
- b) Zaradi nihanja ima nihalo dodatno energijo, ki se spreminja iz kinetične v potencialno in obratno. Med enim nihajem se ta energija skoraj nič ne spremeni, v daljšem času pa se zmanjšuje. Nihalo odkloni za kot 30° in izmeri, v približno kolikšnem času pade energija nihanja na polovico začetne vrednosti. Namig: Pri nihalu lahko precej bolj natančno kot višinske razlike izmerimo odmike od navpičnice (na sliki x). Zato na priloženo polo nariši del krožnice, po kateri se giblje kroglica, in na sliki izmeri potrebna odmika od navpičnice. Nato s kazalnima palicama nastavi izmerjena odmika in izmeri zahtevani čas. Meriš lahko tudi kako drugače, vendar moraš natančno opisati in utemeljiti postopek merjenja. Risbo na poli moraš oddati. Pri risanju dela krožnice si pomagaj z ravnilom, ki ima dve luknjici v razdalji 40 cm. Pribor: nihalo, stoparica, 2 kazalni palici, ravnilo, geotrikotnik, svinčnik, milimetrski papir, pola papirja.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

NALOGE Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1996/97

Skupina A

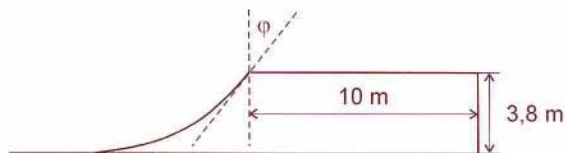
1. Avtomobili z dolžino 4,0 m enakomerno vozijo po ravni enopasovni cesti s hitrostjo 72 km/h. Prehitevanje je na tej cesti prepovedano, avtomobili pa vozijo v enakih konstantnih medsebojnih razdaljah, večjih od varnostne razdalje. S postajališča se vključuje v promet avtobus s pospeškom $2,0 \text{ m/s}^2$. V kolikšnih najmanjših medsebojnih razdaljah lahko vozijo avtomobili, če se avtobus vključi v promet med dvema avtomobiloma, ki sta v enaki medsebojni razdalji kot vsi ostali, pri čemer vozita v koloni z nespremenjeno hitrostjo. Dolžina avtobusa je 15 m, njegova končna hitrost pa tolikšna kot hitrost avtomobilov, to je 72 km/h. Zaradi varnosti na cesti se vozila med seboj ne smejo približati na razdaljo, manjšo od 10 m. Prečni del poti avtobusa pri zavijanju s postajališča je zanemarljivo majhen.
2. Telovadna ponjava je raztegljivo platno v obliki kvadrata s stranico 3,0 m, ki je vpeto vzdolž dveh stranic. Ponjava stoji na močnih, 50 cm visokih stojalih. Ko ni obremenjena, je platno popolnoma nenapeto in ravno. Prožnost ponjave izmerimo tako, da vzamemo 10 cm širok in 3,0 m dolg trak iz enakega platna in ga obremenimo v vzdolžni smeri. Ugotovimo, da je raztezek sorazmeren s silo in da se trak raztegne za 1,0 cm, ko ga obremenimo s silo 23 N. Največ koliko telovadcev s povprečno težo 700 N se lahko postavi po sredi ponjave v ravno vrsto, vzporedno s stranicama, kjer je platno vpeto, da se ponjava ravno še ne bo dotaknila tal?
3. Železno kroglo s polmerom 5,0 cm pritrdimo s 3,0 cm dolgo vrvico na prečko, kot kaže slika, in potopimo v vodo. Med kroglo in steno posode ni trenja. Prečka je vrtljivo vpeta na nosilec v osi. Levi krak prečke je dolg 1,0 cm, desni pa 2,0 cm. Na krajišču desnega kraka je obešena utež 1, z vodoravno vrvico pa je na



to krajišče preko škripca privezana utež 2. Kolikšni sta teži obeh uteži, če je prečka v vodoravnem položaju in je sila v osi v navpični smeri. Specifična teža vode je 10 kN/m^3 , železa pa 78 kN/m^3 .

Skupina B

1. Kaskader želi z motorjem preskočiti oviro (prikazano na sliki), ki je pritrjena na tla. Začetni del ovire je oblikovan v obliki odskočne rampe. Kaskader se z ugasnjenim motorjem približuje oviri s hitrostjo 72 km/h . Kolikšen mora biti kot φ , da bo ravno še preskočil oviro? Trenje in upor zraka zanemari.



2. Na tekmovanju v veslanju na mirni vodi vesla tekmovalec s konstantno močjo 400 W . S kolikšno hitrostjo pluje čoln? Tekmovalec vesla z dvema vesloma.

Na telo, ki se giblje s hitrostjo v glede na tekočino, deluje v nasprotni smeri gibanja tekočina s silo $F = kv^2$ (kvadratni zakon upora), kjer je k koeficient upora, odvisen od oblike in razsežnosti telesa ter gostote tekočine. Koeficient k je za športni čoln $0,90 \text{ N s}^2/\text{m}^2$, za eno veslo pa $4,5 \text{ N s}^2/\text{m}^2$.

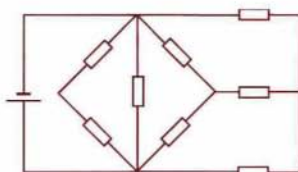
Privzemi, da je čas med dvema veslajema, ko tekmovalec nastavlja vesli za naslednji veslaj, zanemarljivo majhen.

3. V zabaviščnem parku je postavljen prav poseben vrtiljak. Sestavljen je iz navpičnega vijaka, na katerega je simetrično nataknjena lahka deska z dolžino $3,0 \text{ m}$ z navojem v sredini. Otroka se vsedeta vsak na svoje krajišče deske. Pod njuno težo se začne deska brez trenja vrteti po vijaku navzdol. Vijak je visok $1,5 \text{ m}$ in ima na celotni višini 3 navoje. S kakšno navpično komponento hitrosti se otroka z nogami dotakneta tal, če segajo njuna stopala 50 cm pod desko, na kateri sedita? Kolikšna pa je tedaj celotna velikost hitrosti?
4. *Balinčki*, s katerimi se igrajo otroci, so majhni diski. En balinček je na tleh na oddaljenosti $5,0 \text{ m}$ od igralca. Igralec mora svoj balinček vreči tako, da bo prišel čim bližje tistemu na tleh. S kolikšno najmanjšo hitrostjo ga mora vreči v vodoravni smeri z višine 50 cm nad tlemi, da bo ravno zadel onega na tleh? Pri padcu balinčka na tla je trk

neprožen. Balinček lahko po tleh samo drsi, koeficient trenja med balinčkom in tlemi je 0,30.

Skupina C

1. V vezju na sliki je gonilna napetost baterije 3,0 V, notranji upor baterije pa je zanemarljivo majhen. Vsi uporniki so enaki med seboj, upor posameznega je $100\ \Omega$. Kolikšen tok teče skozi baterijo?



2. V zaprti toplotno izolirani posodi z zelo veliko prostornino in s poševnimi stenami (glej skico) je deska z maso $5,0\ \text{kg}$, ploščino $1,0\ \text{m}^2$ in specifično toploto $390\ \text{J/kgK}$. Prostornina posode pod desko, kjer je zrak, je $300\ \text{l}$. Na začetku zapira deska pod sabo toliko zraka pri temperaturi 20°C , da je sila deske na stene posode ravno enaka nič. Nad desko je vakuum. Desko hitro segrejemo na 100°C . Koliko zraka uide izpod deske po dolgem času? Specifična toplota zraka pri konstantnem volumnu je $720\ \text{J/kgK}$, kilomolska masa pa $29\ \text{kg}$.



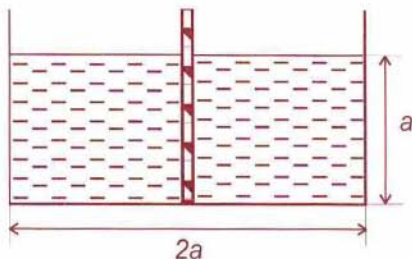
3. Votlo kovinsko kroglico z maso $1,0\ \text{g}$ in premerom $10\ \text{mm}$ nabijemo z nabojem $30\ \text{nAs}$ in staknemo s podobno kroglico z dvakrat večjim premerom in štirikrat večjo maso, na kateri prej ni bilo naboja. Kroglici z lahkima nitkama z dolžinama po $1,0\ \text{m}$ obesimo na skupno obesišče. Kolikšna je ravnovesna razdalja med kroglicama? Influenčna konstanta je $8,9 \cdot 10^{-12}\ \text{As/Vm}$. Lahko pričakuješ, da je iskana razdalja precej manjša od dolžine nitk; prav tako lahko privzameš, da je naboj na površju kroglic enakomerno razmazan. Pri majhnih kotih velja $\tan \varphi \approx \sin \varphi$.
4. Prebivalci Iške vasi se odločijo, da bodo za svoje potrebe zgradili manjši *magnetohidrodinamični generator*. Za generator uporabijo cev s pravokotnim presekom; vodoravni stranici sta dve vzporedni kovinski plošči v medsebojni razdalji $50\ \text{cm}$. Po cevi teče s hitrostjo $60\ \text{m/s}$ ohlajen elektrolit s specifičnim uporom $0,52\ \Omega\text{m}$. Cev je v celoti napolnjena z elektrolitom. Z močnim supraprevodnim magnetom ustvarijo vodoravno magnetno polje z gostoto $5,0\ \text{T}$, ki je pravokotno na smer toka elektrolita.
 - a) Pokaži, da je napetost med kovinskima ploščama neobremenjenega generatorja enaka $U = lvB$, kjer je l razmik med ploščama, v hitrost elektrolita in B gostota magnetnega polja.

- b) Kolikšna naj bo površina kovinske plošče, da bo največja možna moč, ki jo lahko odda generator porabnikom v vasi, enaka 80 kW? Kolikšna je v tem primeru napetost med priključkoma generatorja?

Koristiti ti utegne podatek, da doseže funkcija $f(x) = x + \frac{a}{x}$ svoj minimum pri $x = \sqrt{a}$.

Skupina D

1. V sredini posode v obliki kvadra imamo tanek lahek bat (glej sliko), ki se lahko brez trenja giblje v vodoravni smeri. Voda v posodi sega do višine a . Oцени, s kolikšno frekvenco zaniha bat pri majhnih odmikih od ravnovesne lege? Predpostavi, da je nihanje harmonično. Namig: Iz

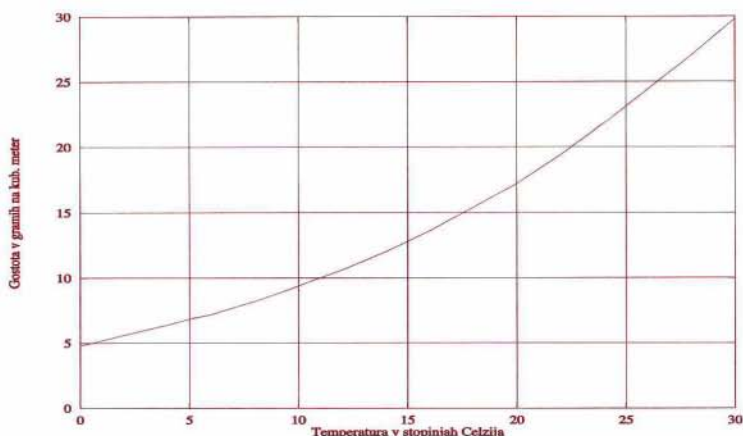


energijskega izreka izrazi hitrost nekega "povprečnega" dela vode skozi ravnovesno lego.

2. Zemljina atmosfera se zelo približa modelu adiabatne atmosfere, pri katerem se pri vertikalnem dviganju zrak adiabatno ohlaja, kar pomeni, da ne izmenjuje toplote z okolišnjim zrakom. Pri dviganju dela zraka z maso m se tedaj ohranja vsota entalpije, $H = mc_p T$, in potencialne energije.

- a) Izračunaj, za koliko pade temperatura zraka v takšni atmosferi na vsak kilometer višinske razlike.
- b) V sončnem poletnem dnevu je pri tleh temperatura zraka 30°C in absolutna vlažnost 11 g/m^3 . Iz priloženega grafa grafično oceni višino, na kateri začnejo pri vertikalnem dviganju zraka nastajati konvektivni oblaki, tako imenovani *Cumulus Congestus*.

Vlažen zrak je mešanica čistega zraka in vodne pare. Količino vodne pare podamo z *absolutno vlažnostjo*, ki je kar gostota vodne pare v zraku. Če pri določeni temperaturi gostota vodne pare doseže neko mejno gostoto, imenovano *delna gostota nasičene vodne pare*, se začne vodna para kondenzirati. Delna gostota nasičene vodne pare narašča s temperaturo; odvisnost kaže priloženi graf.



Kilomolska masa zraka je 29 kg, razmerje specifičnih toplot $\kappa = 7/5$, specifična toplota zraka pri konstantnem tlaku pa se izraža kot $c_p = \kappa/(\kappa - 1) \cdot R/M$. (Vlaga v zraku zanemarljivo malo spremeni kilomolsko maso zraka.) Splošna plinska konstanta je 8300 J/K.

3. Glej nalogo 4 skupine C.

Ciril Dominko

38. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA – Rešitvi izbranih nalog

1. (a) Naj bo $n > 1$ takšno celo število, za katero obstaja srebrna matrika. Za $i = 1, 2, \dots, n$ poimenujmo unijo i -te vrstice in i -tega stolpca i -ti križ. Ker je $n > 1$, obstaja število $a \in S$, ki se ne pojavi na diagonalni matrike. Vsaka pojavitev števila a je vsebovana v natanko dveh križih in v vsakem od teh dveh križev se pojavi natanko enkrat. (Npr. število v i -ti vrstici in j -tem stolpcu leži v i -tem in j -tem križu.) Ker mora število a ležati v vsakem križu, lahko množico vseh križev (teh je n) porazdelimo v skupine po dva križa, ki ju povezuje izvendiagonalna pojavitev števila a . Število n je torej sodo, kar pomeni, da za $n = 1997$ srebrna matrika ne obstaja.

(b) Za $n = 1$ srebrna matrika očitno obstaja. Pokažimo, da lahko s pomočjo srebrne matrike razsežnosti $n \times n$ konstruiramo srebrno matriko

razsežnosti $2n \times 2n$. Naj bo torej $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ srebrna matrika razsežnosti $n \times n$. Označimo

$$A' = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix},$$

kjer je

$$B = [b_{ij}]_{i,j=1}^n, \quad b_{ij} = a_{ij} + 2n$$

in

$$C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n, \quad c_{ij} = \begin{cases} 2n; & \text{če je } i = j, \\ b_{ij}; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zlahka pokažemo, da je A' res srebrna matrika.

Torej lahko za vsak $k \in \mathbb{N}_0$ induktivno konstruiramo srebrno matriko razsežnosti $2^k \times 2^k$.

Opomba. Dokazati je možno, da srebrne matrike obstajajo za vsa soda števila n .

2. Naj števili $a, b \in \mathbb{N}$ zadoščata enačbi $a^{b^2} = b^a$. Označimo z $d = (a, b)$ njun največji skupni delitelj. Potem je $a = du$ in $b = dv$, kjer sta si števili u in v tuji. Tedaj je gornja enačba ekvivalentna enačbi

$$(du)^{dv^2} = (dv)^u. \quad (1)$$

Ločimo tri možnosti:

- $dv^2 = u$. Iz enačbe (1) potem sledi $u = v$ in zato $u = v = 1$, saj sta si števili u in v tuji. Torej je $d = 1$ in od tod $a = b = 1$.
- $dv^2 > u$. Enačbo (1) preoblikujemo v

$$d^{dv^2-u} \cdot u^{dv^2} = v^u.$$

Število u^{dv^2} torej deli število v^u . Ker sta si števili u in v tuji, je $u = 1$. Gornja enačba postane

$$d^{dv^2-1} = v. \quad (2)$$

Če je $d = 1$, je tudi $v = 1$. Slednje zaradi predpostavke $dv^2 > u$ ni možno. Za $d \geq 2$ pa zaradi neenakosti

$$d^{dv^2-1} \geq 2^{2v^2-1} \geq 2^{2v-1} > v,$$

ki jo z indukcijo zlahka preverimo, enačba (2) nima ustreznih rešitev.

- $dv^2 < u$. Potem je $d < u$ in enačbo (1) lahko preoblikujemo v

$$u^{dv^2} = d^{u-dv^2} \cdot v^u.$$

Podobno kot v prejšnjem primeru sklepamo, da je $v = 1$, in zato

$$u^d = d^{u-d}.$$

Ker je $d < u$, mora v eksponentih veljati $u - d > d$.

Naj bodo p poljubno praštevilo, ki deli d , in $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ največji celi števili, za kateri $p^\alpha \mid d$ in $p^\beta \mid u$. Potem je $\beta d = \alpha(u - d)$ in od tod $\alpha < \beta$. Število u je torej deljivo z d , zato lahko pišemo $u = kd$, $k \in \mathbb{N}$. Gornjo enačbo potem preoblikujemo v

$$k = d^{k-2}.$$

Ker je $u > 2d$, mora biti $k \geq 3$.

Za $k = 3$ dobimo rešitev $d = 3$, $u = 9$ in od tod $a = 27$ in $b = 3$.

Za $k = 4$ dobimo rešitev $d = 2$, $u = 8$ in od tod $a = 16$ in $b = 2$.

Za $k \geq 5$ pa velja $d^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$, zato drugih rešitev ni.

Vse rešitve enačbe $a^{b^2} = b^a$ so torej pari $(1, 1)$, $(16, 2)$ in $(27, 3)$.

Matjaž Željko

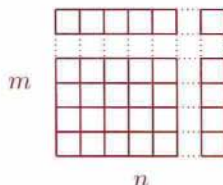
41. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Poročilo s tekmovanja smo objavili v prvi letošnji številki Preseka, sedaj objavljamo še naloge:

Prvi letnik

- Naj bo k naravno število. Dokaži:
 - Če je $k = m + 2mn + n$, kjer sta m in n naravni števili, je število $2k + 1$ sestavljeno.
 - Če je število $2k + 1$ sestavljeno, obstajata naravni števili m in n , da velja $k = m + 2mn + n$.
- Naj bo a celo število, p pa praštevilo, ki deli števili $5a - 1$ in $a - 10$. Dokaži, da je tudi število $a - 3$ deljivo s p .
- Naj bo MN poljubna tetiva krožnice s premerom AB , A' in B' pa pravokotni projekciji točk A in B na nosilko tetive MN . Dokaži, da je $|MA'| = |B'N|$.

4. Janezek sestavlja mrežo $m \times n$ iz kotnih elementov oblike $\sqsubset$. Vsak krak je dolg eno enoto, elementi se lahko stikajo samo v ogliščih mreže (glej sliko), kraki pa se ne smejo prekrivati. Za katera naravna števila m in n mu bo mrežo uspelo sestaviti?



Drugi letnik

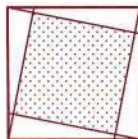
1. Naj za realna števila a , b , c in d velja

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2.$$

Pokaži, da potem velja tudi

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4.$$

2. Vsako stranico kvadrata razdelimo na n enakih delov in delilno točko, ki je najbližja enemu od krajišč stranice, povežemo z ustreznim ogliščem tako, kot vidimo na sliki. Kolikšen del prvotnega kvadrata pokrije osenčeni kvadrat?



3. Naj bosta C in D različni točki na polkrožnici s premerom AB . Premici AC in BD naj se sekata v točki E , premici AD in BC pa v točki F . Dokaži, da ležijo razpolovišča X , Y in Z daljic AB , CD in EF na isti premici.
4. Izmed naravnih števil od vključno 1 do vključno 1997 poljubno izberemo 1001 število. Dokaži, da med izbranimi števili obstajata vsaj dve, ki se razlikujeta za natančno 4.

Tretji letnik

1. Dani sta taki naravni števili m in n , obe večji ali enaki 2, da število $m + n - 1$ deli $m^2 + n^2 - 1$. Dokaži, da število $m + n - 1$ ni praštevilo.
2. Določi vsa naravna števila n , za katera obstaja polinom p stopnje n s celimi koeficienti, ki v n različnih celoštevilskih točkah zavzame vrednost n , v točki 0 pa zavzame vrednost 0.
3. Naj bo $ABCD$ konveksni štirikotnik, v katerem je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACD$ in $|AC| = |CD| = |DB|$. Dokaži, da je $\frac{|CX|}{|BX|} - \frac{|AX|}{|DX|} = 1$, kjer smo z X označili presečišče diagonal AC in BD .
4. V nekem podjetju nobena dva delavca ne opravljata enako zahtevnega dela in nobena dva ne prejmeta enake plače. Vsak delavec je dal dve izjavi:

- (a) Niti 12 delavcev nima bolj zahtevnega dela.
 (b) Vsaj 30 delavcev prejema višjo plačo.

Koliko je zaposlenih v podjetju, če veš, da nekateri delavci vedno govorijo resnico, drugi pa vedno lažejo?

Četrty letnik

- Mitja si je zamislil dve enakomestni praštevili, a in b . Števili je zapisal eno poleg drugega in tako dobil število c . Ko je od števila c odštel produkt števil a in b , je dobil rezultat 154. Določi število c .
- Fibonaccijevo zaporedje je podano z začetnima členoma $f_1 = f_2 = 1$ in rekurzivnim predpisom $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \in \mathbb{N}$.
 (a) Pokaži, da je število f_{1005} deljivo z 10.
 (b) Pokaži, da število f_{1005} ni deljivo s 100.
- Disjunktni krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčema v točkah O_1 in O_2 ležita na istem bregu premice p in se je dotikata zaporedoma v točkah A_1 in A_2 . Daljica O_1O_2 seka krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ zaporedoma v točkah B_1 in B_2 . Dokaži, da se premici A_1B_1 in A_2B_2 sekata pravokotno.
- Na listu papirja je napisan izraz

$$* 3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1.$$

Alenka in Barbara izmenoma zamenjujeta po enega izmed znakov $*$ bodisi s $+$ bodisi z $-$. Ali lahko Barbara, ki je na potezi druga, doseže, da bo po zadnji (šesti) potezi vrednost izraza deljiva s 7?

Matjaž Željko

IZBIRNI TESTI ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO

Za uvrstitev v ekipo, ki je zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi, so se kandidati pomerili tudi na dveh izbirnih testih. Prvi test je bil 24. januarja, drugi pa 24. aprila 1997.

Prvi izbirni test

- Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ naj se od zunaj dotikata v točki A , od znotraj pa naj se dotikata krožnice $\mathcal{K}$ v točkah A_1 in A_2 . Skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki poteka skozi A , seka krožnico $\mathcal{K}$ v dveh točkah – eno od njiju označimo s P . Premica PA_1 seka krožnico $\mathcal{K}_1$ še v točki B_1 , premica PA_2 pa seka krožnico $\mathcal{K}_2$ še v točki B_2 . Dokaži, da je premica B_1B_2 skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$.

2. Poišči vse polinome p z realnimi koeficienti, da bo

$$x p(x) p(1-x) + x^3 + 100 \geq 0 \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

3. Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_n$ različne točke na krožnici, $n \geq 2$. Določi število različnih barvanj teh točk s p barvami ($p \geq 2$), če naj bosta vsaki dve sosednji točki različno obarvani.

Drugi izbirni test

1. Naj bo P poljubna točka v notranjosti enakostraničnega trikotnika ABC . Premice AP , BP in CP naj sekajo stranice BC , CA in AB zaporedoma v točkah A_1 , B_1 in C_1 . Dokaži, da je

$$|A_1B_1| \cdot |B_1C_1| \cdot |C_1A_1| \geq |A_1B| \cdot |B_1C| \cdot |C_1A|.$$

2. Vsako točko celoštevilске mreže z $n \times n$ oglišči pobarvamo modro ali rdeče tako, da ima vsak enotski kvadrat z oglišči v točkah mreže natančno dve modri oglišči. Na koliko različnih načinov lahko mrežo pobarvamo?
3. Naj bo p praštevilo in a naravno število. Dokaži: če je

$$2^p + 3^p = a^n$$

za neko naravno število n , je $n = 1$.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

25. letnik, šolsko leto 1997/98, številka 4, strani 193 – 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domažnjak, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Prodružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1997/98 je za posamezne naročnike **1.620 SIT**, za skupinska naročila šol **1.350 SIT**, posamezna številka **324 SIT**, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

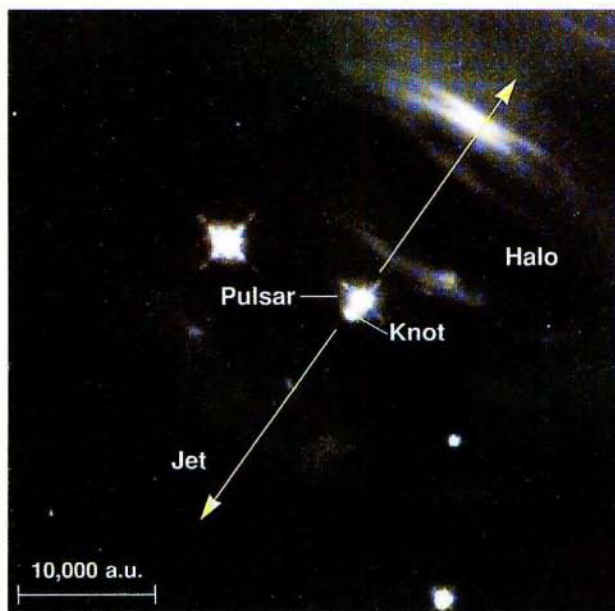
Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1998 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1340

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



Slika 1. M1, posneta z 2.2-metrskim teleskopom Univerze na Havajih, na observatoriju Mauna Kea na Havajih. Slika je sestavljena iz posnetkov v različnih barvah (podobno kot posnetek na naslovnici prejšnjega Preseka). Svetli filamenti so rožnate barve, zelenkasta svetloba je sinhrotronskega izvora in prikazuje področje razredčenega plina, v sredini slike je pulzar: od obeh zvezd spodnja, desno.



Slika 2. Pogled na pulzar od blizu. V smereh, ki sta na sliki označeni s puščicama, s pulzarja izhajata curka, ki odrivata okolišno snov. Svetel vozle (knot), ki je tudi označen na sliki, je verjetno nekakšen udarni val v enem od curkov. (Obe sliki sta iz ameriške revije Sky & Telescope, January 1995.)

