

3

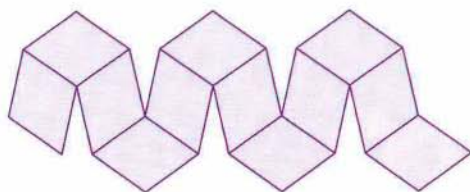
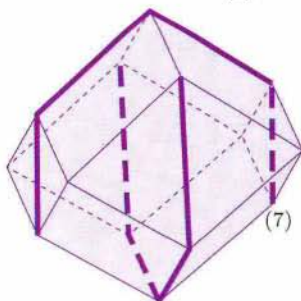
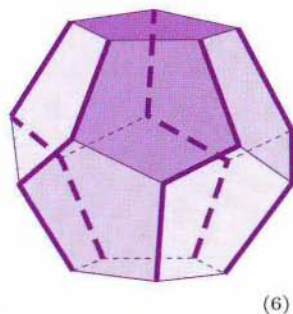
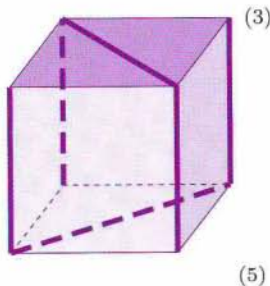
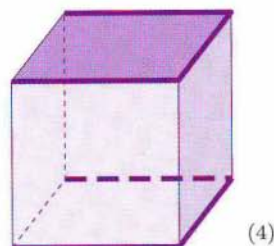
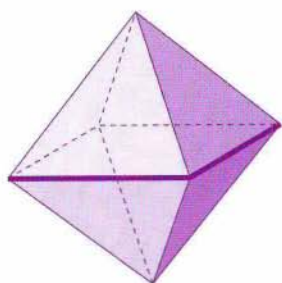
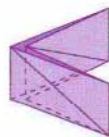
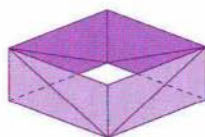
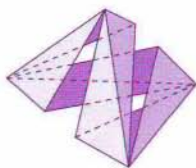
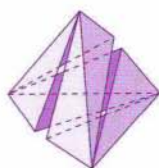
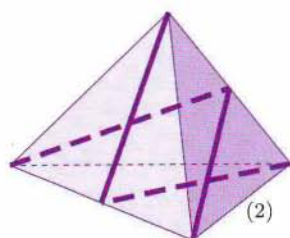
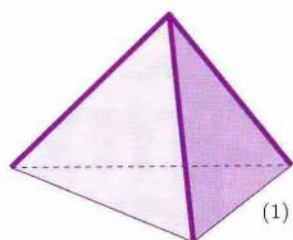
25 (1997-1998)

PRE  
SEK

ISSN 0351-6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

# Slike k članku Žepni modeli poliedrov



# PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
25. letnik, leto 1997/98, številka 3, strani 129–192

## VSEBINA

|                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>MATEMATIKA</b>    | Kako ugotovimo, da je naravno število sestavljeno, preden ga razstavimo? (Ivan Vidav) ..... 130-136                                                                                                                                                                                  |
|                      | Mala šola topologije – 3. del (Marija Vencelj) ..... 144-145                                                                                                                                                                                                                         |
|                      | Vsota geometrijske vrste – po geometrijsko (Marko Razpet) 168-170                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>FIZIKA</b>        | Spust po klancu (Andrej Likar) ..... 138-140                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>ASTRONOMIJA</b>   | O meglici Rakovici – 1. del (Mirjam Galičič) ..... 146-152                                                                                                                                                                                                                           |
|                      | Zajec (Marijan Prosen) ..... 158-159                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>RAČUNALNIŠTVO</b> | F0 0F C7 C8 in procesor Pentium (Martin Juvan, Jože Marinček) ..... 141-143                                                                                                                                                                                                          |
|                      | Praštevski dvojčki in procesor Pentium (Roman Drnovšek) 162-166                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>NOVICE</b>        | 28. fizikalna olimpiada: O, Kanada (Gašper Tkačik) ..... 152-153                                                                                                                                                                                                                     |
|                      | 38. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko) ..... 157                                                                                                                                                                                                                       |
|                      | 28. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko) ..... 159                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>NALOGE</b>        | Šestkotniške tromine (Jurij Kovič) ..... 156                                                                                                                                                                                                                                         |
|                      | Produkt in vsoti (Martin Juvan) ..... 156                                                                                                                                                                                                                                            |
|                      | Številska križanka (Marija Vencelj) ..... 167                                                                                                                                                                                                                                        |
|                      | Kako uganemo odstranjeno števko? (Marija Vencelj) ..... 171                                                                                                                                                                                                                          |
|                      | Raztrgani lepak (D. M. Milošević, priredba M. Vencelj) ..... 171                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>REŠITVE NALOG</b> | Križi – s str. 100 (Martin Juvan) ..... 136-137                                                                                                                                                                                                                                      |
|                      | Konjev skok – s str. 99 (Dragoljub M. Milošević) ..... 137                                                                                                                                                                                                                           |
|                      | Poenostavi – s str. 110 (Marija Vencelj) ..... 170                                                                                                                                                                                                                                   |
|                      | Premisli in odgovori – s str. 101 (Marija Vencelj) ..... 170                                                                                                                                                                                                                         |
|                      | Igra – s str. 75 (D. M. Milošević, prevod B. Japelj) ..... 171                                                                                                                                                                                                                       |
|                      | Gobelin "Motocikel" – s str. 107 (Marko Bokalič) ..... 172                                                                                                                                                                                                                           |
|                      | Križanka "V Cerknem odkrit kip slovenskemu matematiku" – s str. 96 (Marko Bokalič) ..... 172                                                                                                                                                                                         |
| <b>RAZVEDRILO</b>    | Žepni modeli poliedrov (Vilko Domajnko) ..... 154-156, II                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>ZANIMIVOSTI</b>   | Križanka "Voščilo za jubilej" (Marko Bokalič) ..... 160-161                                                                                                                                                                                                                          |
|                      | Grajski labirint (Iztok Arčon) ..... 192, III                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>TEKMOVANJA</b>    | Urnik tekmovanj v letu 1998 (Darjo Felda) ..... 173-175                                                                                                                                                                                                                              |
|                      | 32. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje – rešitve s str. 111 (Aleksander Potočnik) ..... 175-177                                                                                                                                                                         |
|                      | 16. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve s str. 116 (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) ..... 177-180                                                                                                                                                                   |
|                      | Izbirno tekmovanje iz matematike za srednješolce – rešitve s str. 123 (Matjaž Željko) ..... 180-184                                                                                                                                                                                  |
|                      | Rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike v šolskem letu 1996/1997 – s str. 118 (Bojan Golli) ..... 184-191                                                                                                                                                             |
| <b>NA OVITKU</b>     | Posnetek meglice Rakovice, narejen s teleskopom C-14 (premer zrcala 0.36m, f/11) in kamero CCD na Črnem vrhu, 28. februarja 1995. Približno v sredini meglice sta zelo skupaj dve zvezdi. Pulzar je šibkejša od obeh zvezd (posnel H. Mikuž). Glej tudi članek na strani 146 ..... I |
|                      | Žepni modeli poliedrov. Glej prispevek na strani 154 ..... II                                                                                                                                                                                                                        |
|                      | Slika k razvedrilni nalogi Grajski labirint na strani 192 ..... III                                                                                                                                                                                                                  |
|                      | Slovenski olimpijski ekipi na 28. fizikalni in 38. matematični mednarodni olimpiadi. Glej poročila na straneh 152, 157 in 159 ..... IV                                                                                                                                               |

## KAKO UGOTOVIMO, DA JE NARAVNO ŠTEVILO SESTAVLJENO, PREDEN GA RAZSTAVIMO?

### Uvod.

Pred nekaj leti sta Richard Crandall in Christopher Doenias (ZDA) z računalniki dognala, da je dvaindvajseti člen Fermatovega zaporedja  $F_{22}$  sestavljeno število. Do istega rezultata sta skoraj istočasno toda z drugačnim računalniškim programom prišla tudi Vilmar Trevisan in João Carvalho v Braziliji. Ne prvima ne drugima pa ni uspelo najti nobenega faktorja.

Fermatovo zaporedje se glasi

$$F_n = 2^{2^n} + 1. \quad (1)$$

Členi  $F_n$  z indeksom  $n$  izredno hitro naraščajo. Tako se  $F_{22}$  izraža v desetiškem sestavu s številko, ki ima nad milijon števk, in je torej nepredstavljivo veliko. Je največje naravno število, o katerem vemo, da je sestavljeno, ne poznamo pa (še) nobenega njegovega faktorja.

Fermat je domneval, da sestoji zaporedje (1) iz samih praštevil. Za prve štiri člene to res velja:  $F_1 = 5$ ,  $F_2 = 17$ ,  $F_3 = 257$  in  $F_4 = 65\,537$ . Toda že Euler je odkril, da je  $F_5 = 2^{32} + 1$  sestavljeno število, deljivo je namreč s 641. Pozneje so ugotovili, da so sestavljena števila tudi mnogi drugi členi, npr.  $F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}$  itd., praštevila pa niso našli med njimi nobenega več. Zanimivo je, da sta Morehead in Western dognala na začetku tega stoletja, da sta  $F_7$  in  $F_8$  sestavljeni števili, čeprav nista dobila nobenega faktorja. Na prafaktorje so ju razstavili skoraj 70 let pozneje, ko so izdelali boljše metode za razstavljanje in so se pojavili sodobni računalniki. Števili  $F_9$  in  $F_{10}$ , prvo ima v desetiškem sestavu 155 in drugo 309 števk, pa so razstavili na prafaktorje šele pred nekaj leti.

Kakor vemo iz aritmetike, je vsako naravno število bodisi praštevilo bodisi sestavljeno in, če je sestavljeno, se da razstaviti v bistvu na en sam način v produkt praštevil. Obstajajo metode, s katerimi moremo vsako dano število razstaviti na prafaktorje. Najpreprostejši postopek je s poskušanjem: Število  $N$  delimo z zaporednimi naravnimi števili 2, 3 itd. do največjega celega števila, ki ne presega  $\sqrt{N}$ . Če ni z nobenim deljivo, je  $N$  praštevilo, če pa je s katerim izmed navedenih števil deljivo, je najmanjše med njimi (to je prvi delitelj, ki nanj pri tem postopku naletimo), prafaktor  $p$ .  $N$  razstavimo v produkt  $N = p \cdot N_1$  in na drugem faktorju  $N_1$  ponovimo postopek. Metoda s poskušanjem nas sicer privede vselej do cilja, toda je izredno počasna. Veliko truda potrebujemo, da z njo razstavimo nekoliko večje število. Če bi pa hoteli po tej metodi z računalnikom,

ki opravi milijon deljenj na sekundo, razstaviti petdesetmestno število, bi potrebovali v najneugodnejšem primeru tudi nekaj bilijonov let.

Na dejstvu, da ne znamo razstaviti velikih števil v razumnem času na prafaktorje in to niti s sodobnimi računalniki ne, sloni metoda tajnopisa z javnim ključem, ki so jo razvili Rivest, Shamir in Aldeman (metoda RSA). Javni ključ je produkt dveh orjaških praštevil. Tajnopis pa lahko razvozla samo tisti, ki pozna oba faktorja (glej članek M. Vencelj: Šifriranje z javnim ključem, Presek 22, str. 354–357). Avtorji so pred dvajsetimi leti objavili v časopisu Scientific American število s 129 mesti in pozvali bralce, naj kdo izmed njih poskuša razstaviti to število v produkt. Razcep se je posrečil šele leta 1994. Med tem časom so namreč razvili nove metode za razstavljanje, ki so seveda hitrejšje od metode z zaporednim deljenjem. Z njimi je zdaj mogoče razstaviti števila, ki imajo, zapisana v desetiškem sestavu, nekaj nad sto števk. Med drugim se je posrečilo razstaviti  $F_9$  in  $F_{10}$ .

Kako lahko vemo o kakšnem naravnem številu, da je sestavljeno, preden smo ga razstavili? Včasih je to mogoče ugotoviti pri številih, ki se odlikujejo z določenimi lastnostmi, oziroma imajo posebno obliko. Namen tega članka je, da si ogledamo nekaj takih primerov.

1. Vzemimo število 1 000 001. Pišemo ga lahko v obliki

$$1\,000\,001 = 100^3 + 1^3,$$

se pravi kot vsoto dveh kubov. Iz elementarne algebre pa vemo, da se da vsota dveh kubov razstaviti

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Če postavimo  $a = 100$  in  $b = 1$  dobimo razcep  $1\,000\,001 = 101 \cdot 9901$ . Oba faktorja na desni sta praštevil.

Tudi vsota dveh petih, sedmih in splošno dveh poljubnih potenc z enakima lihima eksponentoma se da razstaviti. Tako je npr.  $100\,001 = 10^5 + 1^5 = 11 \cdot 9091$ . V vseh teh primerih vemo, da je število sestavljeno, preden smo ga razstavili, pa tudi faktorja takoj najdemo.

2. Če je naravno število vsota dveh kvadratov, ni vselej sestavljeno. Včasih je praštevilo, kot kaže zgled  $41 = 4^2 + 5^2$ , včasih sestavljeno:  $50 = 1^2 + 7^2 = 2 \cdot 5^2$ . Pri tem velja:

Če je kakšno naravno število izrazljivo na dva različna načina kot vsota dveh kvadratov, je sestavljeno.

Na primer 65 je enako  $1^2 + 8^2$  in  $4^2 + 7^2$ . Število 65 je produkt prafaktorjev 5 in 13,  $65 = 5 \cdot 13$ .

Dokažimo zdaj našo trditev! Denimo, da smo naravno število  $N$  na dva različna načina zapisali kot vsoto dveh kvadratov

$$N = A^2 + B^2 \quad \text{in} \quad N = C^2 + D^2. \quad (2)$$

Tu so  $A, B, C, D$  znana naravna števila in je par  $A, B$  različen od para  $C, D$ . Pri dokazovanju se bomo omejili na primer, ko je  $N$  lih (če je sod, ima faktor 2 in je sestavljeno število). Ugotovili bomo, da je  $N$  produkt dveh takih faktorjev  $U$  in  $V$ , torej  $N = UV$ , ki sta oba izrazljiva z vsoto dveh kvadratov. Privzemimo, da je to res, in postavimo

$$U = a^2 + b^2 \quad \text{in} \quad V = c^2 + d^2. \quad (3)$$

$a, b, c, d$  so cela števila, ki jih za zdaj še ne poznamo. Kako bi jih izračunali?

Preprosta verifikacija pokaže, da veljata identiteti

$$UV = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \quad (4)$$

in

$$UV = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad (4^*)$$

Ker je  $UV = N$ , vidimo, da sta enačbi (2) izpolnjeni, če postavimo

$$\begin{aligned} ac + bd &= A, & ad - bc &= B, \\ ac - bd &= C, & ad + bc &= D. \end{aligned} \quad (5)$$

Poskušajmo iz tega sistema izračunati  $a, b, c$  in  $d$ . S seštevanjem in odštevanjem dobimo produkte

$$ac = \frac{1}{2}(A + C), \quad ad = \frac{1}{2}(B + D), \quad bd = \frac{1}{2}(A - C), \quad bc = \frac{1}{2}(D - B). \quad (6)$$

Ker je  $N$  lih, pove prva enačba (2), da je eno izmed števil  $A$  in  $B$  liho in eno sodo. Isto pove druga enačba (2) o paru  $C, D$ . Naj bosta npr.  $A$  in  $C$  soda ter  $B$  in  $D$  liha. Potem so vse desne strani v (6) cela števila. Ker so tudi  $a, b, c, d$  cela števila, vidimo iz prvih dveh enačb, da je  $a$  skupni delitelj števil  $\frac{1}{2}(A + C)$  in  $\frac{1}{2}(B + D)$ . Vzemimo za  $a$  kar največji skupni delitelj teh dveh števil. Izračunamo ga lahko z Evklidovim algoritmom. Tako dobimo  $a$  in nato iz prvih dveh enačb (6) še  $c$  in  $d$ :

$$c = (A + C)/2a \quad \text{in} \quad d = (B + D)/2a.$$

Ker je  $a$  največji skupni delitelj produktov  $ac$  in  $ad$ , sta si  $c$  in  $d$  tuja. Potem izračunamo  $b$  iz tretje ali četrte enačbe. Obe nam dasta isto vrednost: Iz enačb (2) namreč izhaja, da je  $A^2 - C^2 = D^2 - B^2$  in zato  $(A - C)a/(B + D) = (D - B)a/(A + C)$ . Da je tudi  $b$  celo število, ugotovimo takole:  $b$  je kvocient celih števil  $(A - C)a$  in  $B + D$ . Torej je racionalen in ga lahko zapišemo v obliki okrajšanega ulomka  $b = r/s$ , kjer sta  $r$  in  $s$  celi števili brez skupnega faktorja in je  $s > 0$ . Ker sta produkta  $bd = rd/s$  in  $bc = rc/s$  celi števili, to namreč povesta zadnji enačbi (6), sta števca  $rd$  in  $rc$  v ulomkih na desni deljiva z  $s$ . Toda  $r$  je tuj proti  $s$  in sta potemtakem  $c$  in  $d$  deljiva z  $s$ . Ker sta si tudi  $d$  in  $c$  tuja, pa mora biti imenovalec  $s = 1$  in  $b = r$  celo število.

Pri tako določenih  $a, b, c, d$  veljajo enačbe (6). Če produkte (6) vstavimo v (5), vidimo, da so tudi te enačbe izpolnjene. Ker je  $U = a^2 + b^2$  in  $V = c^2 + d^2$ , pove identiteta (4), da je  $UV = A^2 + B^2 = N$ . Par  $A, B$  je različen od para  $C, D$  in so zato desne strani v (6) različne od nič. To pa pomeni, da so tudi  $a, b, c, d$  različni od nič in, ker so cela števila, je  $U > 1$  ter  $V > 1$ ; razcep  $N = UV$  je pravi. S tem smo dokazali trditev, da je  $N$  sestavljeno število, našli faktorja  $U$  in  $V$ , hkrati pa smo  $U$  in  $V$  izrazili z vsoto dveh kvadratov.

Ker lahko pišemo

$$F_n = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1^2,$$

je vsako Fermatovo število vsota dveh kvadratov. Če bi se nam posrečilo zapisati  $F_n$  še kako drugače kot vsoto dveh kvadratov, bi vedeli, da je sestavljeno število, in tudi razstaviti bi ga znali v produkt dveh faktorjev. Za zgled vzemimo

$$F_5 = (2^{16})^2 + 1^2 = 65\,536^2 + 1,$$

ki ga lahko pišemo tudi v obliki

$$F_5 = 62\,264^2 + 20\,449^2. \quad (7)$$

Zdaj imamo

$$A = 65\,536, \quad B = 1, \quad C = 62\,264, \quad D = 20\,449.$$

Enačbe (6) se tu glasijo

$$ac = 63\,900, \quad ad = 10\,225, \quad bd = 1636, \quad bc = 10\,224. \quad (8)$$

Najprej poiščemo z Evklidovim algoritmom največji skupni delitelj števil 63 900 in 10 225 in dobimo, da je 25. Največji skupni delitelj je enak  $a$ , torej  $a = 25$ . Enačbe (8) zdaj dajo  $c = 2556$ ,  $d = 409$ ,  $b = 4$ . Potemtakem je  $U = 25^2 + 4^2 = 641$  in  $V = 2556^2 + 409^2 = 6\,700\,417$ , torej  $F_5 = 641 \cdot 6\,700\,417$ . Oba faktorja sta praštevili.

Seveda bo kdo vprašal, kako smo našli izrazitev (7)? Odgovor se glasi: s poskušanjem. Vendar je treba priznati, da je s tem poskušanjem kar precej dela. Ker je tu faktor 641 razmeroma majhen, najdemo razcep veliko hitreje, če delimo  $F_5$  z zaporednimi naravnimi števili.

**3.** Obstajajo tudi metode, s katerimi včasih ugotovimo, da je dano število sestavljeno, ne povejo pa te metode, kako priti do kakšnega faktorja. Mali Fermatov izrek iz teorije števil nam na primer da tale kriterij:

**Naj bo  $N$  dano naravno število. Izberimo poljubno celo število  $a$ . Če razlika  $a^N - a$  ni deljiva z  $N$ , je  $N$  sestavljeno število.**

Dokaz najde bralec v knjigi: J. Grasselli, Osnove teorije števil, 1975, na strani 74.

*Pripomba.* Ta kriterij ne pove nič v primeru, kadar je razlika  $a^N - a$  deljiva z  $N$ : tedaj je lahko  $N$  praštevilo ali sestavljeno število.

Test napravimo tako, da si najprej izberemo  $a$ , npr.  $a = 2$  ali  $a = 3$ , in potem izračunamo  $a^N - a$ . Ker je  $N$  po navadi veliko število, se na prvi pogled zdi, da je ta metoda ugotavljanja praštevilstosti počasnejša od metode s poskušanjem, saj bi opravili deljenje z vsemi števili do  $\sqrt{N}$  verjetno prej, kakor pa izračunali potenco  $a^N$ , ki je pri velikem  $N$  orjaško število. Vendar ta videz vara. Potenco  $a^N$  izračunamo razmeroma hitro z zaporednimi kvadriranjem in si tako prihranimo veliko dela. In ker gre pri testu le za vprašanje deljivosti razlike  $a^N - a$  z  $N$ , se lahko pri računanju omejimo na števila manjša od  $N$ .

Oglejmo si posebni primer, ko je  $N$  oblike  $2^m + 1$ , kjer je eksponent  $m$  sod (če je lih in  $> 1$ , je število  $N$  deljivo s 3 in sestavljeno). Pri Fermatovih številih je  $m = 2^n$ . Sestavimo zaporedje naravnih števil

$$o_0, o_1, o_2, o_3, \dots \quad (9)$$

takole: Naj bo  $o_0 = 3$ . Če smo člen  $o_k$  že našli, ga kvadriramo in kvadrat  $o_k^2$  delimo z  $N$ . Ostanek pri tej delitvi je naslednji člen  $o_{k+1}$ . (Denimo, da je  $N > 9$ . Potem je  $o_1 = o_0^2 = 9$ , ker dobimo ostanek 9, če delimo 9 s številom večjim od 9. Podobno je  $o_2 = 81$ , če je  $N > 81$ .) Zaporedje (9) lahko priredimo vsakemu naravnemu številu  $N > 3$ . Ker so členi  $o_1, o_2, \dots$  ostanki pri deljenju z  $N$ , so vsi manjši od  $N$ .

Iz zgoraj navedenega testa pri  $a = 3$  izpeljemo z uporabo recipročnostnega zakona iz teorije števil tale pogoj za praštevilskost:

**Število  $N = 2^m + 1$  je praštevilo natanko takrat, kadar je člen  $o_{m-1}$  pripadajočega zaporedja (9) enak  $N - 1$ , torej  $o_{m-1} = N - 1 = 2^m$ .**

**Zgledi.**

1. Vzemimo najprej  $m = 4$ , torej  $N = 2^4 + 1 = 17 = F_2$ . Poiskati je treba člen  $o_3$  zaporedja (9). Tu je  $o_1 = 9$ ,  $o_2 = 13$  in  $o_3 = 16 = N - 1$ . Res je  $N = 17$  praštevilo.

2. Pri  $m = 6$  potrebujemo člen  $o_5$ . Zdaj je  $o_1 = 9$ ,  $o_2 = 16$ ,  $o_3 = 61$ ,  $o_4 = 16$  in  $o_5 = 61 \neq 64 = 2^6$ . Število  $N = 2^6 + 1 = 65$  ni praštevilo,  $65 = 5 \cdot 13$ .

Pripomba. Ni težko ugotoviti, da je  $2^m + 1$  praštevilo kvečjemu tedaj, kadar je  $m$  potenca od 2, se pravi  $m = 2^n$ .

3. Pri Fermatovih številih  $F_n$  je eksponent  $m = 2^n$ , ki z  $n$  hitro narašča. Zato se hitro večja število členov zaporedja (9), ki jih je treba izračunati pri tem testu, še hitreje pa raste  $F_n$ . Za število  $F_5$  je  $m = 2^5 = 32$  in moramo izračunati člen  $o_{31}$ , če želimo ugotoviti, da  $F_5$  ni praštevilo (faktorja nam test ne da). Z računanjem je precej dela in spet pridemo hitreje do faktorja 641 z zaporednim deljenjem.

Oglejmo si  $F_{22}$ . To število ima, zapisano v desetiškem sestavu, kakor smo že povedali, nad milijon števk. Ker je tu  $m = 2^{22} = 4\,194\,304$ , moramo izračunati 4 194 303 člene zaporedja (9). Pri določanju ostankov je treba deliti števila z nad milijon mesti. Dela je vsekakor ogromno. Vendar so ga sodobni računalniki zmogli. Potrebovali so okoli  $10^{16}$  osnovnih operacij. Test je pokazal, da je  $F_{22}$  sestavljeno število, seveda pa ni dal nobenega faktorja. Razstaviti  $F_{22}$  na prafaktorje je težja naloga, ki terja neprimerno večji obseg računanja. (Z zaporednim deljenjem ne pridemo nikamor, saj je pri tako velikem številu, kakor je  $F_{22}$ , velika verjetnost, da ima tudi najmanjši prafaktor nad tisoč mest.) Morda se bo razcep posrečil, ko bodo odkrili še boljše metode za razstavljanje in izdelali še hitrejša računalnike.

**Naloge.**

1. Najmanjše naravno število, ki je izrazljivo na dva načina kot vsota dveh četrlih potenc, je 635 318 657. Je namreč

$$635\,318\,657 = 133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4.$$

Razstavi to število na prafaktorje!

2. Z žepnim računalnikom razstavi  $F_6$  na dva faktorja, če veš, da je

$$F_6 = 4\,046\,803\,256^2 + 1\,438\,793\,759^2.$$

3. Naj bo  $N$  sodo število, ki se da na dva različna načina zapisati kot vsota dveh kvadratov:  $N = A^2 + B^2$  in  $N = C^2 + D^2$ . Dokaži, da so v tem primeru bodisi vsa števila  $A, B, C, D$  soda bodisi vsa liha in da sta faktorja  $U$  in  $V$  pripadajoče razcepitve večja od 2.

*Ivan Vidav*

#### Literatura

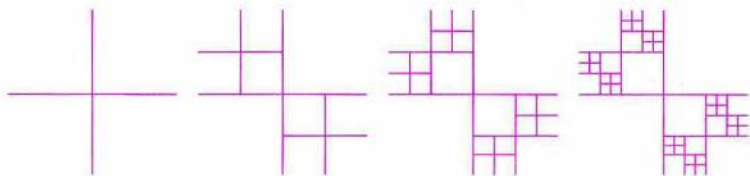
Richard E. Crandall: The Challenge of Large Numbers. Scientific American, Vol. 276, Febr. 1997, str. 58 – 62.

Akademika prof. dr. Ivana Vidava, znanstvenika in vzgojitelja številnih rodov slovenskih matematikov, poznajo Presekovi bralci predvsem kot avtorja zanimivih matematičnih člankov. V kratkem bo naš spoštovani sodelavec praznoval okrogli življenjski jubilej.

Za praznik mu iskreno voščimo!

## KRIŽI – Rešitev s str. 100

V programskem jeziku logo bomo sestavili ukaz `križi :n :d`, ki bo risal like, kot jih vidite na spodnji sliki. Pri tem `:n` določa red lika, `:d` pa širino osnovnega križa.



Pravila, po katerem nastajajo gornji liki, ni težko razbrati. Lik reda 1 je kar običajen križ s kraki dolžine  $:d/2$ . Lik višjega reda je prav tako sestavljen iz križa s kraki dolžine  $:d/2$ , poleg tega pa ima v obeh sodih kvadrantih vrisana še lika za ena nižjega reda, oba zasukana za 90 stopinj in pomanjšana na polovično velikost. Oglejmo si program.

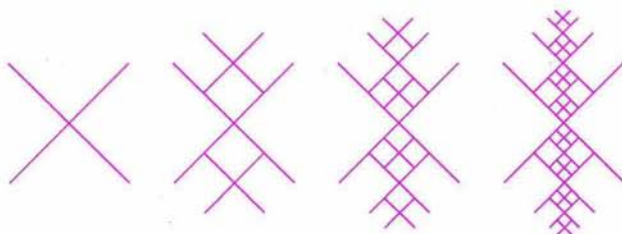
```

TO krizi :n :d
; Nariše križe reda n in širine d.
IF :n<1 [STOP] ;Lik reda 0 je prazen.
REPEAT 4 [FD :d/2 BK :d/2 RT 90] ;osnovni križ
PU ;Premik na sredo 2. kvadranta.
FD :d/4 LT 90 FD :d/4
PD
krizi :n-1 :d/2
PU ;Premik na sredo 4. kvadranta.
BK :d/2 RT 90 BK :d/2 LT 90
PD
krizi :n-1 :d/2
PU ;Vrnitev v izhodišče.
FD :d/4 RT 90 FD :d/4
PD
END

```

V gornjem programu je pravilo za risanje likov še nekoliko poenostavljeno. Če namreč za lik reda 0 vzamemo "prazno" sliko, potem lahko tudi lik reda 1 narišemo na enak način kot like višjih redov.

Podobno kot pri zankah je tudi pri rekurziji koristno, če poiščemo odnose med parametri ali spremenljivkami, ki se ob klicu ohranijo. Tako mnogo lažje premislimo pravilnost programa, v pomoč pa so nam tudi med programiranjem. Za ukaz **krizi** tako velja, da sta položaj in smer želve pred klicem enaka položaju in smeri po klicu.



Če vas je risanje likov s pomočjo rekurzije navdušilo, lahko poskusite nekoliko spremeniti ukaz **krizi**, tako da bo na primer risal like, prikazane na gornji sliki.

*Martin Juvan*

## KONJEV SKOK – Rešitev s str. 99

DETERMINANTA.

*Dragoljub M. Milošević*

## SPUST PO KLANCU

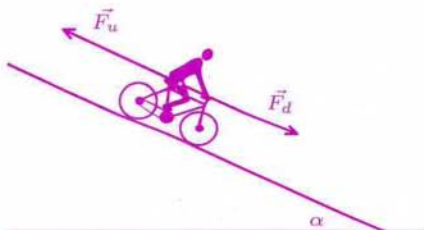
Oče in sin sta se peljala s kolesi. Sin je predlagal naslednji poskus: "Peljiva se po klanecu navzdol, kolikor naju samo nese, in opazujva, kdo bo hitrejši. Hitrejši od naju ima boljše kolo z manj trenja." Izkazalo se je, da je bil hitrejši oče. "Vidiš," je dejal sin, "tvoje kolo je boljše, verjetno zato, ker je starejše in zato bolje utečeno." Očetu sklep ni bil všeč. "Zamenjajva kolesi," je predlagal. Dirko sta ponovila na naslednjem klanecu in spet je bil hitrejši oče. "Če ne bi bilo trenja, bi bila oba enako hitra, kljub temu da je očetova masa večja od moje," je sklepal sin. "Tako je učil že Galileo Galilei. Če je trenje sorazmerno z maso, kar smo slišali v šoli, bi ob enakih koeficientih trenja morala biti spet enako hitra." "Pozabil si na zračni upor. Pri vožnji sva bila oba sklonjena naprej, da je bil upor čim manjši. Sila trenja je neodvisna od hitrosti, zračni upor pa s hitrostjo močno narašča. Na trenje lahko v najinem primeru kar pozabiš, saj je zanemarljivo v primeri z zračnim uporom. Zmagal sem preprosto zato, ker imam večjo maso."

Oglejmo si, kako masa kolesarja vpliva na njegovo hitrost. Razmere pri poskusu bomo močno poenostavili. Privzeli bomo klanec z enakim nagibom  $\alpha$  in določili le končno hitrost kolesarja, ko je sila teže vzdolž klanca enaka uporu. Zapletenim razmeram ob pospeševanju se bomo tako izognili. Silo upora  $F_u$  izračunamo iz enačbe

$$F_u = \frac{1}{2} S c_u \rho v^2,$$

kjer je  $S$  čelni presek kolesarja,  $c_u$  pa koeficient, ki odraža vrtnčenje zraka za telesom in je odvisen predvsem od njegove oblike. Privzeli bomo, da imata oče in sin enaka koeficienta, saj je njuna oblika zelo podobna. Z  $\rho$  smo označili gostoto zraka,  $v$  pa hitrost telesa v zraku. Kolesarja žene po klanecu navzdol dinamična komponenta teže  $F_d$ , to je komponenta, ki je vzporedna s klanecem in jo izračunamo iz  $F_d = mg \sin \alpha$ . Ko se hitrost kolesarjev ne spreminja več, sta sili  $F_d$  in  $F_u$  v ravnovesju (glej sliko 1). Takrat velja  $F_d = F_u$  ali

$$mg \sin \alpha = \frac{1}{2} S \rho c_u v^2.$$



Slika 1. Spust po klanecu. Ko se hitrost ne spreminja več, je sila upora  $F_u$  enaka komponenti sile teže vzdolž klanca  $F_d$ .

Iz te enačbe dobimo hitrost

$$v = \sqrt{\frac{2gm \sin \alpha}{\rho c_u S}}.$$

Označimo z  $v_o$  očetovo hitrost, z  $v_s$  pa sinovo. Razmerje njunih hitrosti je potem

$$\frac{v_o}{v_s} = \sqrt{\frac{m_o/S_o}{m_s/S_s}}.$$

Spet smo količine, ki se nanašajo na očeta, označili z indeksom  $o$ , sinove pa z  $s$ . Razmerje količnikov  $m/S$  lahko izrazimo le z maso  $m$ , če privzamemo, da je oče po obliki le povečan sin. Razmerje njunih višin naj bo  $r$ . Privzamemo, da so v istem razmerju tudi njuni glavi, roke, noge, obseg pasu, širina ramen... Razmerje njunih mas je potem enako  $r^3$ , razmerje čelnih presekov pa  $r^2$ . (Tako je pri vseh podobnih telesih. Pomislimo na dve kocki iz iste snovi, katerih robova sta v razmerju  $r$ ,  $r = \frac{a_1}{a_2}$ . Njuni prostornini, in s tem masi, sta v razmerju  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{(ra_2)^3}{a_2^3} = r^3$ , ploščini kvadratov pa v razmerju  $r^2$ .) Privzamemo torej

$$\frac{m_o}{m_s} = r^3$$

in

$$\frac{S_o}{S_s} = r^2 = \left(\frac{m_o}{m_s}\right)^{2/3}.$$

Razmerje hitrosti  $\frac{v_o}{v_s}$  je potem

$$\frac{v_o}{v_s} = \left(\frac{m_o}{m_s}\right)^{1/6}.$$

Vidimo, da imajo telesa z večjo maso res večjo končno hitrost. Razmerje hitrosti je enako šestemu korenu iz razmerja mas, kar je za razmerja mas blizu 1 približno linearna odvisnost. Prikladno jo zapišemo kot

$$\frac{v_o}{v_s} \approx 1 + \frac{\Delta m}{6m_s},$$

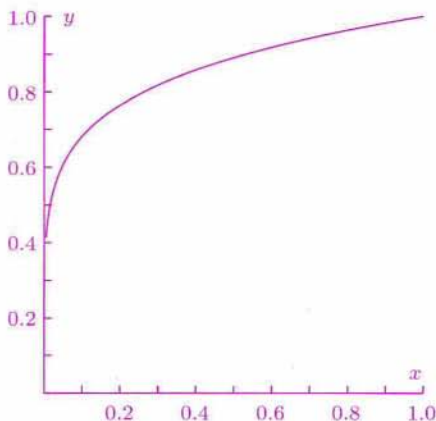
kjer smo z  $\Delta m$  označili razliko mas  $\Delta m = m_o - m_s$ . Odvisnost razberemo z grafa na sliki 2. Oglejmo si tale primer: Denimo, da je masa  $m_o = 110$  kg in  $m_s = 65$  kg. Masi koles (po 15 kg) smo všteli. Razmerje hitrosti je pri teh podatkih

$$\frac{v_o}{v_s} = \left( \frac{110 \text{ kg}}{65 \text{ kg}} \right)^{1/6} = 1,092.$$

Če vozi sin s hitrostjo 40 km/h, je očetova hitrost 43,7 km/h, kar brez težav opazimo.

Ob tem razmišljanju se spomnimo zgodbe o poskusih, ki naj bi jih izvajal Galileo Galilei na poševnem stolpu v Pisi. Zvemo, da je s stolpa metal različno težke krogle in opazil, da padejo vse

hkrati spuščene krogle istočasno na tla. Če bi bile vse krogle iz enake snovi, na primer iz železa, bi zaradi zračnega upora večje, in zato tudi težje krogle, prehitale manjše. Še večje razlike v hitrosti pa bi imele krogle iz različnih snovi. Enako veliki krogli, ena iz lesa, druga iz svinca, bi imeli zelo različni hitrosti. V tem primeru bi bilo razmerje hitrosti enako kvadratnemu korenu iz razmerja mas. Še večje razmerje pa bi dobili, če bi bila lesena krogla manjša od svinčene. Bolje bi se poskus posrečil z leseno kroglo in z od nje večjo, votlo svinčeno kroglo. Takih krogel pa Galileo zanesljivo ni imel. Zelo verjetno je, da Galilei teh poskusov ni naredil. Do zakona, da padajo vsa telesa v brezračnem prostoru z enakim pospeškom, se je dokopal z logičnim sklepanjem. Razmišljal je takole. "Denimo, da ima Aristotel prav; telo z večjo maso pada hitreje od telesa z manjšo. Mislimo si sedaj novo telo, zgrajeno iz teh dveh, ki ju povezuje lahka vrstica. Ker ima telo še večjo maso, bi moralo padati hitreje kot posamezno telo zase. To pa je protislovno, saj lažje telo pri padanju gotovo zavira telo z večjo maso. Vsa telesa torej padajo z enakim pospeškom, ne glede na svojo maso." Ta sklep so pozneje potrdila natančna opazovanja padanja v brezračnem prostoru.



Slika 2. Odvisnost razmerja hitrosti dveh teles  $y = \frac{v_o}{v_s}$  od razmerja mas  $x = \frac{m_o}{m_s}$  podaja funkcija  $y = x^{1/6}$ . Prikazana je odvisnost za razmerje  $x$  med 0 in 1, saj lahko vedno izberemo masi  $m_o$  in  $m_s$  tako, da je njuno razmerje manjše od 1.

## F0 0F C7 C8 IN PROCESOR PENTIUM

Proizvajalec mikroprocesorjev in drugih elektronskih komponent družba Intel iz Santa Clare, Kalifornija, ZDA, s svojimi izdelki iz družine Pentium res nima sreče. Pred tremi leti je njegov ugled močno načelo odkritje, da mikroprocesor Pentium količnikov nekaterih parov realnih števil ne izračuna tako natančno, kot bi jih moral. (Članek o matematičnem ozadju odkritja te napake si lahko preberete v tej številki Preseka.) Napaka in predvsem ravnanje Intela ob njenem razkritju sta kupce procesorjev Pentium tako razburila, da je morala družba brezplačno zamenjati vse procesorje z napako. Zaradi zamenjave je nastalo več kot 450 milijonov dolarjev stroškov, taki stroški pa so velik zalogaj tudi za tako veliko podjetje, kot je Intel.

Precej bolj neopazno je maja lani minilo razkritje še ene napake, povezane s predstavitvijo realnih števil v premični piki. Nasledniki procesorjev Pentium, procesorji Pentium Pro in Pentium II, namreč včasih pri pretvarjanju realnih števil v cela "pozabijo" postaviti zastavico za prekoračitev obsega.

V začetku novembra so se novice o procesorjih Pentium spet pojavile tudi v medijih, ki običajno ne poročajo o računalniških dogajanjih. In to za Intel niso bile dobre novice. Kaže, da se je prvo sporočilo o novi napaki v delovanju procesorja Pentium pojavilo 6. novembra. Pošiljatelj je želel ostati anonimen, zato je kot svoj elektronski naslov navedel `noname@noname.com`, sporočilo pa je bilo poslano prek omrežja University of Texas. Dan kasneje je bila na internetu že kopica dodatnih sporočil o napaki, možnih razlogih zanjo, ugibanj o tem, kako bo ravnal Intel itn. Pri Intelu so reagirali umirjeno, njegovi strokovnjaki pa so si vzeli nekaj dni za premislek, predno so uradno "potrdili" (beri: priznali krivdo za) obstoj napake. Vesti o novih težavah s procesorjem Pentium so se hitro pojavile tudi v vseh pomembnejših sredstvih javnega obveščanja. Tako je na primer časnik Delo 13. novembra na prvi strani objavil krajši prispevek o dogodkih, povezanih z odkritjem napake.

In za kakšno napako sploh gre? Poenostavljeno jo lahko razložimo takole. Procesorji iz družine Pentium poznajo ukaz `CMPXCHG8B`, ki primerja vsebino para registrov s 64-bitno vrednostjo v pomnilniku in glede na izid primerjave opravi ustrezno zamenjavo vsebin (`CMP`  $\equiv$  compare, `XCHG`  $\equiv$  exchange, `8B`  $\equiv$  8 zlogov = 64 bitov). Ker je ukaz "zapleten", pri uporabi pa večkrat želimo, da se celotni ukaz izvede brez prekinitev, ki jih povzročajo zunanji signali, mu lahko dodamo še posebno predpono (`lock`), ki zagotovi, da njegovo izvajanje ne bo prekinjeno. Do težav pride, ko zgoraj omenjeni ukaz izvedemo v "zaklenjenem" načinu, kot operand

pa uporabimo enega od registrov. Ker imajo Pentiumovi registri le 32 in ne 64 bitov, med izvajanjem ukaza pride do napake. To ni še nič hudega, saj procesor med izvajanjem ukazov večkrat ugotovi, da ti niso pravilno sestavljeni. Procesor tako opozori na napako in poskuša izvesti poseben podprogram (*error handler*), ki naj bi poskrbel za "odpravo" napake. Ker pa je ukaz izveden v "zaklenjenem" načinu, procesor po prekinitvi izvajanja ukaza omenjenega podprograma ne more izvesti, zato se "obesi". V življenje ga obudi le ponoven zagon računalnika (zadošča pritisk na gumb Reset).

Uradno Intelovo poimenovanje napake je "Invalid Operand with Locked Compare Exchange 8Byte (CMPXCHG8B) Instruction Erratum". Napaka je značilna le za procesorje Pentium, medtem ko starejši (npr. 486) in novejši procesorji (Pentium Pro, Pentium II), zaradi drugačne arhitekture, na kodo, ki povzroči napako, reagirajo pravilno (pokličejo podprogram za "odpravo" napake, nadaljnje ukrepanje pa je odvisno od operacijskega sistema). Napaka za običajnega uporabnika ne predstavlja večje nevarnosti, saj uporabniški programi resnih programerskih hiš ne vsebujejo zlobne oblike ukaza CMPXCHG8B. Pa tudi če do napake pride (recimo, da nam nekdo uspe "podtakniti" pokvarjeno kodo), izgubimo le podatke, ki so se ob nastopu napake nahajali v pomnilniku (niso pa še bili shranjeni na disk). Ker pa vsi vemo, da je redno shranjevanje opravljenega dela ena od osnov varnega dela z osebnim računalnikom, nas taka napaka ne more presenetiti. Napaka je bolj nevarna za večuporabniške računalnike (in za strežnike), saj jo lahko povzroči prav vsak "zloben" uporabnik z možnostjo izvedbe lastne kode, pri čemer ni treba, da ima tak uporabnik tudi kakšne dodatne privilegije.

Približno teden dni po odkritju napake so pri Intelu predstavili svoje predloge za njeno odpravo. Njihovi inženirji so se potrudili in izdelali načrt za programsko odpravo napake. Zavedali so se namreč, da bi pri popravku na nivoju strojne opreme razočarani kupci v velikem številu zahtevali zamenjavo procesorjev, stroški tako številnih zamenjav pa bi lahko resno ogrozili uspešno poslovanje družbe. Pri Intelu so tako pripravili splošna navodila za izdelovalce operacijskih sistemov, vsak izdelovalec pa je zadolžen za izdelavo popravka za svoj operacijski sistem. Intelova rešitev je precej zvita in temelji na nekaterih posebnostih procesorja Pentium. Nekoliko presenetljivo je tudi, da je tako resno napako v strojni opremi mogoče odpraviti kar s spremembo programske opreme, še bolj nenavadno pa je, da programska rešitev praktično ne upočasni delovanja računalnika.

In kako lahko sami preverite, ali imate "pristni" Pentium? Če uporabljate Microsoftov operacijski sistem (MS DOS ali katero od različic Oken),

si lahko pomagata z vgrajenim ukazom `debug`. Ukaz poženete iz ukazne vrstice in vtipkate podčrtano besedilo, vsako vrstico pa zaključite s pritiskom na tipko `Enter` (namesto vprašajev bo operacijski sistem izpisal šestnajstiške naslove, ki za nas niso pomembni):

```
C:\> debug
-a100                                Vpisovanje ukazov v zbirniku.
????:0100 db f0 0f c7 c8              Usodni ukaz.
????:0104 ret
????:0105
-g                                Poženemo vpisani program.
```

Pri kodi ukaza lahko namesto `c8` vpišete tudi eno od vrednosti `c9`, `ca`, ..., `cf` (gre za šestnajstiške vrednosti, ki določajo različne registre kot operande ukaza). Če imate običajni Pentium, bo računalnik "zamrznil". Če pa delate z drugačnim procesorjem, bo odziv odvisen od operacijskega sistema. V Oknih 95/NT boste dobili obvestilo o napačnem ukazu, okno z ukazno vrstico pa se bo zaprlo. V MS DOS-u pa bo računalnik najverjetneje "obvisel", tipkovnica pa se bo še vedno odzivala. Običajno boste ponovni zagon lahko dosegli že s kombinacijo tipk `Control+Alt+Delete`. Drugi način, s katerim boste verjetno tudi izzvali napako, je, da prevedete in poženete spodnji enovrstični program v C-ju:

```
unsigned char main[] = { 0xf0, 0x0f, 0xc7, 0xc8 };
```

Tudi proizvajalci strojne opreme počasi postajajo podobni izdelovalcem programske opreme. Slednji so nas že pred časom "navadili" na izdelke z napakami in kopico pomanjkljivosti ter na njihovo nikoli dokončano "razhroščevanje". Zdi se, da se nam sčasoma nekaj podobnega obeta tudi pri strojni opremi za osebne računalnike.

Če radi križarite po internetu, potem si lahko uradne Intelove razlage križev in težav s procesorjem Pentium preberete na naslovu

<http://support.intel.com>,

zamolčana dejstva pa boste našli na naslovu

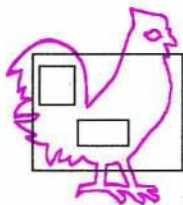
<http://www.x86.org>.

Da ne bo pomote, ločil na koncu obeh naslovov vam ni treba odtipkati.

*Martin Juvan, Jože Marinček*

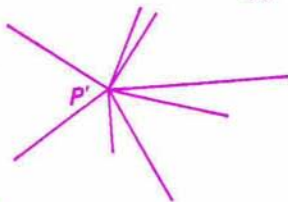
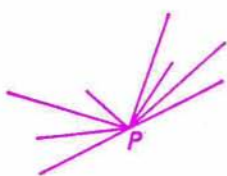
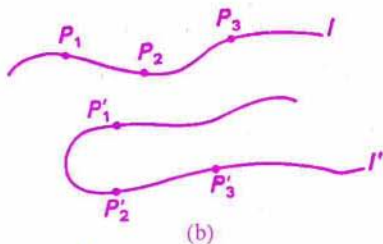
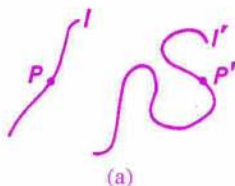
## MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 3. del

V prejšnjih številkah Preseka smo izvedeli, kaj so topološke preslikave in kaj topološke lastnosti ter spoznali pojem izhodišča in stopnje izhodišča.



Naslednji primeri opisujejo tri pomembne topološke lastnosti. Na posamezni sliki je par topološko enakovrednih krivulj. S črticami so opremljene oznake točk in krivulj, v katere so se topološko preslikali ustrezni originali. Velja:

- Če leži točka  $P$  na krivulji  $l$ , leži  $P'$  na krivulji  $l'$ .
- Če leže točke  $P_1, P_2, P_3$ , v tem vrstnem redu, na krivulji  $l$ , potem leže njihove slike na  $l'$  v vrstnem redu  $P'_1, P'_2, P'_3$ .
- Če iz točke  $P$  vodi  $n$  poti, potem tudi iz  $P'$  vodi  $n$  poti. Na sliki ima vsako od izhodišč  $P$  in  $P'$  stopnjo 8.



(c)

Pomudimo se še ob nalogi 7, zastavljeni v 2. delu naše topološke nanizanke. Poskusili naj bi narisati nekaj krivulj s predpisanimi števili izhodišč danih stopenj. Zagotovo niste mogli narisati krivulje s tremi izhodišči stopnje 3 (naloge (c)) in krivulje s po enim izhodiščem stopenj 1, 3 in 5 (naloge (e)). Velja namreč:

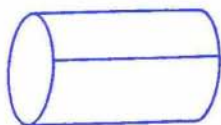
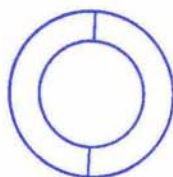
**Ni krivulje, ki bi imela liho mnogo izhodišč lihih stopenj.**

Res: Vsaka pot, ki izhaja iz nekega izhodišča, se na drugi strani konča v nekem izhodišču (ki je lahko tudi začetno); to pomeni, da vsaka

pot izhaja ali iz dveh izhodišč ali dvakrat iz istega izhodišča. Od tod sledi, da je za vsako krivuljo vsota stopenj vseh izhodišč **sodo** število, kar je pri lihem številu izhodišč lihe stopnje nemogoče.

## Loki in parcele

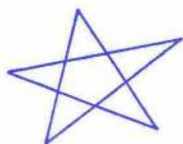
Pot, ki povezuje dve izhodišči, bomo imenovali **lok**. Področju, omejenemu z loki, bomo rekli **parcela** (v notranjosti parcele ne poteka noben lok). Parcela je tudi področje zunaj risbe. Risbi na naslednji sliki imata po 4 izhodišča, 6 lokov in 4 parcele. (Izhodišč stopnje 2 nismo šteli zraven. Zakaj ne?)



Oglejte si še naslednje risbe. Za vsako določite število izhodišč ( $I$ ), število lokov ( $L$ ) in število parcel ( $P$ ). Rezultate uredite v tabelo.



(a)



(b)



(c)



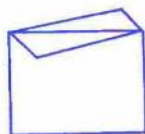
(d)



(e)



(f)



(g)



(h)

Primerjajte števila, zapisana v tabeli. Ali opazite kakšno zakonitost? Če se vam zdi, da ste jo odkrili (res obstaja!), narišite še sami nekaj risb in preverite, ali opažena lastnost velja tudi zanje.

Marija Vencelj

## O MEGLICI RAKOVICI

Pred devetimi stoletji je na nebu eksplodirala zvezda. Triindvajset dni je bila vidna celo podnevi, ob sončni svetlobi, kar dve leti pa jo je bilo moč opaziti na nočnem nebu. Po katastrofalni zvezdini 'smrti' najdemo blizu lege nekdanje masivne zvezde dva razločljiva preostanka: meglico – razsežno vlaknasto (filamentno) lupino razredčene snovi, ki je nekoč sestavljala zunanje plasti zvezde, ter pulzar – nepredstavljivo gosto in za zvezdne pojme zelo majhno zvezdo, ki se izredno hitro vrti okrog svoje osi. Danes oba objekta poznamo pod skupnim imenom M1 (prvi objekt v Messierovem katalogu megličastih objektov), meglico pa lahko opazujemo že z manjšim teleskopom.

### Silna eksplozija zvezde. Kako vemo, kaj se je zgodilo pred tisoč leti?

Bilo je neke poletne noči leta 1054, ko so dvorni kitajski astrologi, kot navadno, potrpežljivo opazovali nebo. Približno dve uri po polnoči so v ozvezdju Bika, med njegovimi rogovi, opazili novo zvezdo, svetlejšo od vseh drugih, svetlejšo celo od Jupitra in Venere. Astrologe sta preplavila vznemirjenje in zmeda. Le kaj bi nenadna pojavitev svetle zvezde utegnila pomeniti?

Čez dva meseca je Yang Wei-te, častitljivi astrolog, poročal svojemu vladarju o pojavu in pomenu gostujoče zvezde, ki naj bi bila obdana z rumeno svetlobo. Glede na medsebojno lego nove zvezde in Lune ob ščipu je ugotovil naslednje: V deželi obstaja oseba izjemne modrosti in kreposti. Predlagal je še, da se pomembna novica preda uradnikom, ki beležijo zgodovino. Zdi se, da je astrolog prebrisano izkoristil pojav zvezde v svoj prid, še posebej, ker je bila rumena barva uradna barva vladajoče dinastije. Ne glede na to pa nam ta zgodovinski zapis daje tudi pomembne astronomske podatke. Iz njih razberemo, da je bila zvezda triindvajset dni vidna podnevi, po svetlosti pa jo primerjajo z Venero. Po več kot letu dni je zvezda postopoma izginila. Ponoči se jo je s prostim očesom dalo videti kar 653 dni. Tudi lega zvezde v ozvezdju Bika je dobro opisana. Ohranjeni podatki so omogočili povezavo sodobno odkritega objekta z davnim pojavom izjemno svetle zvezde.

Dodati moramo še, da so pojav leta 1054 opazovali tudi japonski astrologi. Zanimivo pa je, da ni virov, ki bi poročali o kakršnemkoli opazovanju supernove leta 1054 na področju Evrope. Mračni srednji vek je brste znanosti in poskuse spoznavanja narave z opazovanjem očitno uspel temeljito zadušiti. Pač pa so na področju Amerike našli kar nekaj risb na

skalah, kjer je upodobljena svetla zvezda poleg Lune, in nekateri menijo, da gre za stara indijanska pričevanja o opazovanju supernove. Drugi pa spet dvomijo v avtentičnost in dejanski čas nastanka teh risb (slika 1).



Slika 1. Risba, ki so jo leta 1972 našli arheologi z univerze New Mexico v Chaco Canyonu na severozahodu New Mexica. Poleg Luninega krajca in zvezde ob njem vidimo še odtis dlani – morda umetnikov podpis. Kraj je bil svet za tam prebivajoče Indijance, kot svetišče pa so ga uporabljali od desetega do dvanajstega stoletja. V državi New Mexico so arheologi odkrili še nekaj podobnih slikarij. (Slika je vzeta iz knjige S. Milтона: *The Crab Nebula*.)

## Bila je supernova

Za pojasnjevanje dogodka iz leta 1054 so bili začetni kandidati komet, nova in supernova. Komet so na podlagi zgodovinskih zapisov o opazovanjih hitro izločili. Pri novi gre za izbruh zvezde, kjer le-ta postane precej bolj svetla, kot je bila prej, vendar pa je povečanje svetlosti manjše kot pri supernovah. Do nov prihaja v dvojnih sistemih, kjer se snov pretaka od enega člana na drugega. Ko je pretok takšen, da ena od zvezd ne more več ostati stabilna, pride ob posebnih pogojih do izbruha. Nove se od supernov razlikujejo tudi po načinu, kako njihova svetlost pred izbruhom narašča in kako po izbruhu pada s časom. Raziskovalci so si danes tako enotni, da je leta 1054 v ozvezdju Bika eksplodirala supernova.

Do eksplozij supernove prihaja pri zvezdah, ki so precej bolj masivne kot naše Sonce. Za takšno zvezdo je značilno, da proti koncu svojega življenja proizvaja vedno manj energije. Zvezda se ob vse manjšem 'kurjenju' jedrskega goriva ohlaja, obenem pa se manjša tudi pritisk v njej. Ščasoma se plinski pritisk tako zmanjša, da ne more več nasprotovati lastni gravitacijski sili zvezde in zvezdina sredica se sesede pod lastno težo, pride do takoimenovane implozije. Zaradi slednje se v zunanjih zvezdinih plasteh sprožijo nuklearne eksplozije, ki povzročijo, da atmosferske plasti zvezde odpihne stran. Za kratek čas je celotna energija, ki se sprošča pri tem burnem dogajanju, enaka izsevu milijonov Sonc. Zvezda, ki je bila prej s prostim očesom komaj opazna ali celo nevidna, nenadoma zasveti svetleje od sicer najsvetlejših zvezd. Ker pa so supernove precej redke – v naši Galaksiji naj bi opazili v povprečju po eno na tristo let – le redki uspejo videti sam pojav supernove. Imamo pa včasih možnost opazovati ostanke po eksploziji supernove, ki so posebej karakteristični. Odpihnjene zunanje plasti zvezde vidimo kot meglico, preostala gosta sredica pa je – seveda, če jo opazimo – nevtronska zvezda. Ime je povezano z njeno pretežno sestavino, z nevtroni.

Med modernimi astronomi je bil Edwin Hubble tisti, ki je leta 1928 prvi povezal objekt M1 in dogodek iz leta 1054. Sicer pa je sodobni zahodni svet meglico Rakovico opazil po iznajdbi teleskopa v začetku sedemnajstega stoletja. Odkril jo je leta 1731 angleški amaterski astronom John Bevis, svoje odkritje pa sporočil Francozu Charlesu Messieru, ki je objekt leta 1784 uvrstil v svoj znani katalog razsežnih megličastih objektov, Messierov katalog. V njem so vsi objekti označeni s črko M in zaporedno številko vnosa v katalog. Ime meglica Rakovica pa je objekt dobil leta 1844, saj oblika meglice spominja na rakovico. S tedanjimi teleskopi so že razločili njeno vlaknasto zgradbo, opazili pa so tudi, da na področju Rakovice sicer je nekaj zvezd, vendar pa bistveno manj kot na področjih drugih razsežnih objektov, ki so jih tedaj imeli za posebno vrsto meglic, danes pa jim pravimo zvezdne kopice. Do nadaljnjih odkritij o Rakovici je prišlo v začetku devetnajstega stoletja z vpeljavo astronomske fotografije in spektroskopije. Med leti 1910 in 1920 je V. M. Slipher z observatorija Lovell (Arizona, ZDA) opazil, da so emisijske črte v spektru Rakovice razcepljene. Namesto da bi bila pri izbrani valovni dolžini ena črta, sta bili po dve, ena pri malo manjši, druga pri malo večji valovni dolžini. Leta 1921 sta astronomi C. O. Lampland z observatorija Lovell in J. C. Duncan z observatorija Mount Wilson opazila, da se meglica razširja. Hitrost razširjanja so izmerili in nato ocenili, da se je razširjanje začelo pred približno 900 leti, kar je samo še potrdilo povezavo med pojavom svetle zvezde leta 1054 in sedanjo meglico Rakovico. Na podlagi megličinega razširjanja so pojasnili tudi pojav razcepa emisijskih črt.

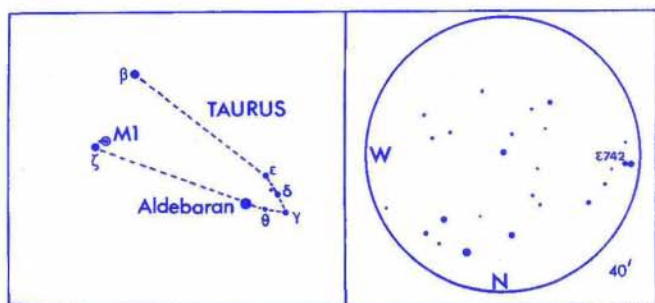
## Kako najdemo Rakovico s teleskopom

Spomnimo se, da je Messier opazoval megličaste objekte v času, ko so bili teleskopi še precej enostavni in majhni. Tako je pravzaprav dandanes že skoraj vsak manjši amaterski teleskop primerljiv z opremo, kakršno je imel Messier. Meglico Rakovico bomo zato lahko opazovali s šolskim ali kakim drugim amaterskim teleskopom, v lepi noči jo vidimo celo z običajnim lovskim daljnogledom. Ne smemo pa seveda pričakovati, da nam bo pogled skozi okular majhnega teleskopa odkril podrobnosti, na primer filamente, kakršne vidimo na sliki na naslovnici, posneti z 0.36-metrskim teleskopom C-14 in kamero CCD na Črnem vrhu. (Slika je sestavljena iz treh posnetkov v rdečem, zelenem in modrem filtru, zato so barve na sliki prave. Ekspozicijski časi so 5 minut v modrem, 3 minute v zelenem in 2 minuti v rdečem filtru.)

Med opazovanjem z očesom in fotografijo namreč obstaja bistvena razlika. Fotografska plošča ali njen sodobnik, kamera CCD, s katero je bila posneta slika na naslovnici, imata prednost, da zbirata fotone dalj časa. Posnetek na naši sliki je tako nastajal nekaj minut; če bi ekspozicijo končali denimo po dvajsetih sekundah, bi bila slika precej slabša. Če pa gledamo z očesom v okular teleskopa 2 minuti ali dvajset sekund, v prvem primeru ne bomo videli kaj bistveno več ali drugače kot v drugem, saj naše oko ne zna 'shranjevati' fotonov. Zato ne smemo biti razočarani nad tistim, kar bomo videli. Za velik uspeh lahko štejemo že to, če bomo meglico uspeli relativno hitro ujeti v zorno polje svojega teleskopa!

Meglica Rakovica obsega po površini približno  $1/4$  Lunine ploskve ob ščipu. To nam služi za predstavo, kako velik objekt lahko pričakujemo. Najprimernejši čas za opazovanje je sredina decembra, še vedno primeren pa čas od pozne jeseni do zgodnje pomladi. Pomagali si bomo seveda z iskalnimi kartami. Najprej si na karti oglejmo, kje leži ozvezdje Bika. (Za to je primerna npr. vrtljiva karta ali pa karta, kakršno najdemo za vsak mesec v sredini astronomskih revij, na primer v slovenski reviji Spika ali v ameriškem Sky and Telescope.) Najprej bomo poiskali najsvetlejšo zvezdo Bika,  $\alpha$ , ki nosi ime Aldebaran, nato bikove rogove: zvezdi  $\beta$  (svetlejša od obeh) in  $\zeta$ . M1 leži na petini poti od  $\beta$  do  $\zeta$ , natančneje:  $1^\circ$  (1 ločno stopinjo) severno in  $1^\circ$  zahodno od  $\zeta$ . Iskalna karta, potrebna za opazovanje z manjšim teleskopom, je prikazana na sliki 2.

V vsakem primeru pa za opazovanje izberite jasno in čisto brez-mesečno noč. 'Čisto' pomeni brez meglic in s čim manj vlage v zraku, tako da se nam atmosfera zdi prav 'prozorna'. Najbolje je biti na deželi, vsekakor pa stran od luči javne razsvetljave. Poleg tega je za uspešno opazovanje potrebno vsaj pol ure prilagajati oči na temo.



Slika 2. Na levi je prikazana lega M1 ob zvezdi  $\zeta$  v ozvezdju Bika. M1 leži  $1^\circ$  severno in  $1^\circ$  zahodno od  $\zeta$ . Na desni je polje s premerom  $40'$  (ločnih minut). M1 leži  $\frac{1}{2}^\circ$  zahodno od označene zvezde  $\epsilon 742$ .

Ker pa dandanes tudi avtomatski teleskopi niso nobena redkost, povejmo še koordinate. Ker je meglica razsežen objekt, bomo zapisali koordinate pulzarja, ki leži približno v sredini meglice. Za obdobje 2000 sta koordinati: rektascenzija  $\alpha = 5^{\text{h}} 34,5^{\text{m}}$  in deklinacija  $\delta = 22^\circ 0,9'$ .

### Mežikaj, mežikaj, zvezdica mala, prav rad bi vedel, kako si nastala!

Konec letošnjega leta mineva trideset let, odkar so odkrili pulzarje. Pulzarji so zvezde, ki pulzirajo – od tod njihovo ime. V enakomernih časovnih presledkih namreč od njih zaznavamo pulze elektromagnetnega valovanja. Pri večini pulzarjev gre za valovne dolžine s področja radijskih valov, to je t.i. nizkoenergijsko elektromagnetno sevanje. Nekateri pulzarji pa sevajo tudi pri višjih energijah, npr. v vidnem delu spektra ali celo v rentgenskih žarkih in žarkih  $\gamma$ .

Pulzarje sta leta 1967 odkrila Angleža Bell in Hewish. Radijska antena angleškega observatorija Jodrell Bank je zaznala periodičen signal, ki je bil tako pravilen ('lep'), da so odkritje sprva ohranili v tajnosti, saj je bila ena od idej tudi ta, da morda kaka izvenzemeljska civilizacija poskuša vzpostaviti stik z nami. Pa z idejo o malih zelenih možicah, ki bi jih nekateri tako radi videli, spet ni bilo nič. Izkazalo se je, da gre le za pulze elektromagnetnega valovanja, ki jih oddaja vrteča se zvezda. Ker je oddajnik usmerjen (zvezda pulzira v smeri svojega magnetnega polja) in se vrti – predstavljajmo si vrteči se svetilnik na morju – vidimo pulz (svetlobo s svetilnika) vsakokrat, ko se le-ta obrne proti nam.

Kmalu je postalo jasno, da morajo pulzarji soditi med nevtronske zvezde, ki jih je leta 1932 napovedal veliki ruski teoretični fizik L. Landau, leta 1935 pa sta W. Baade in F. Zwicky zapisala, da bi nevtronske zvezde lahko nastale po eksploziji masivnih zvezd, supernov. Ko so ugotovili, da je za pulziranje odgovorno hitro vrtenje zvezde, so namreč znali tudi oceniti, kako trdna mora biti snov pulzarja, da zdrži tako hitro vrtenje. Pokazalo se je, da so dovolj trdne le zvezde, ki jih je Landau poimenoval nevtronske zvezde. Vemo, da je običajna snov sestavljena iz atomov. Pretežni del mase atoma se nahaja v njegovem jedru. Prostor okrog jedra je v glavnem prazen, v njem najdemo le nekaj elektronov. Ogromne sile bi bile potrebne, če bi hoteli atom stisniti, zrušiti njegove elektronske lupine. Prav to pa se je dogajalo z atomi pri nastajanju nevtronske zvezde. Snov se je stiskala, da so se vdale elektronske lupine. Nato so se elektroni združili s protoni v nevtrone. Nevtronska zvezda je kot ogromno atomsko jedro, le da v njem v glavnem ni protonov, ampak samo nevtroni.

Pulzar v meglici Rakovici so odkrili leta 1968. Dolgo časa je bil s periodo vrtenja 33 milisekund (0.033 sekunde) najhitrejši znani predstavnik svoje vrste, danes pa poznamo že kar lepo število t.i. milisekundnih pulzarjev, torej takih, katerih rotacijska perioda je približno ena milisekunda.

Pa pogledjmo še nekaj številskih vrednosti za fizikalne količine, povezane z nevtronsko zvezdo. Najprej povejmo, da je tipična masa nevtronske zvezde 1.4 mase Sonca, to je  $1.4 \times 2 \cdot 10^{30}$  kg. Tipičen polmer nevtronske zvezde je 12 kilometrov. Zgoraj smo zapisali, da se pulzar vrti zelo hitro. Kolikšna je obodna hitrost na površini pulzarja? Pulzar se vrti okrog svoje telesne osi. Predstavljajmo si ga kot kroglico, skozi katero prebomo slamico, nato pa kroglico zavrtimo okrog slamice. Ker poznamo periodo pulziranja  $T$ , poznamo tudi vrtilno frekvenco:  $\nu = 1/T$ . Kotna hitrost  $\omega$  je enaka  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ . Obodna hitrost  $v$  pri radiju  $r$  (oddaljenost od osi vrtenja) je enaka  $v(r) = \omega r$ . Na površini zvezde z radijem  $R$  je torej  $v(R) = 2\pi R/T$ . Če v zadnjo zvezo vstavimo omenjena  $R$  in  $T$ , dobimo vrednost 2300 km/s. Težko si predstavljamo Mount Everest, nasajen na primerno 'slamico', ki se vrti s tako hitrostjo!

Omenili smo tudi, da so nevtronske zvezde izredno goste. Pa izračunajmo gostoto njihove snovi. Predstavljamo si, da je zvezda krogla. (Zaradi hitrega vrtenja je v resnici sploščena krogla – elipsoid, vendar bomo tudi s kroglo dobili dovolj dobro oceno.) Gostoto snovi dobimo tako, da maso delimo s prostornino:  $\rho = M/V = M/(4\pi R^3/3)$ . Z zgornjimi podatki dobimo za nevtronsko zvezdo gostoto  $3.9 \cdot 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>. Spomnimo se, da je gostota vode 1 g/cm<sup>3</sup>. Nevtronska zvezda je torej kar  $10^{14}$ -krat (stotisoč milijard-krat) gostejša od vode!

### Prihodnjič ...

To, kar smo povedali doslej, je le majhen delček tistega, kar danes že vemo o objektu M1. V eni od prihodnjih številčk Preseka bomo povedali še kaj o fizikalnih dogajanjih v meglici in o pulzarju. Če koga v zvezi z obravnavano temo kaj posebej zanima, lahko svoja vprašanja ali pripombe sporoči uredništvu Preseka.

*Mirjam Galičič*

## 28. FIZIKALNA OLIMPIADA: O, KANADA

Trije poleti te pripeljejo iz Ljubljane v Sudbury v Kanadi. Trije poleti pomenijo tri najmanj enourne procedure na letališčih, najmanj tri obroke hrane na letalih in polet čez lužo, ki smo ga nekateri doživeli prvič. Da prehod med časovnimi pasovi ne bi bil preveč stresen in da nam ne bi skisal možgan, napolnjenih s formulami in postopki za izračun napak, je bil pred letom v Sudbury predviden tridnevni postanek v Torontu. En dan je bil rezerviran za ogled Niagarskih slapov, ki so dobro uro vožnje oddaljeni od Toronta.

Ob ogledu Toronta – posebej CN stolpa, najvišje zgradbe na svetu, kjer je del tal v višini 400 metrov narejen iz stekla, in nekega 150 let starega gradiča, ki bi pri nas veljal za podrtijo, tam pa ima že skoraj antično vrednost – se čudite gromozanskim razsežnostim avtomobilov, strogim hitrostnim omejitvam, razsipnostjo z urbanim prostorom, po koncu ogleda pa še nenavadnim straniščem na vrtinec, z umivalnikom z eno pipo, kjer s kotnim pospeškom določate, ali bo tekla hladna ali topla voda, in ostalimi izumi novega sveta. Vendar mesto ima svoj čar! Ravno ko smo ga začeli spoznavati, je prišel čas za odhod v Sudbury.

Tam smo se nastanili v prostorih Laurentian University in še pred formalno otvoritvijo smo ugotavljali, od kod prihajajo katere ekipe, z nekaterimi (predvsem našimi južnimi sosedi) pa smo že navezali prijateljske stike. Da smo na tujem, so naši želodci spoznali pri prvem "olimpijskem" obroku: hrana je bila precej dolgočasna, ne poznajo juhe, zahteve po dnevnih kalorijah pa so zadovoljene v glavnem pri zajtrku – a saj nismo prišli na kulinarčni izlet. Otvoritev je potekala kot po maslu, saj so Kanadčani kot Američani znani po dobri organizaciji: prej so pripravili generalko (na srečo, sicer bi mojster protokola namesto Slovenija rekel Slovena). Kmalu po tem je stopila v veljavo odredba o ločitvi tekmovalcev in spremljevalcev, ki so jo pridno izvrševali – čeprav še danes mislim, da bi bil prenosni

računalnik s PCMCIA navadnim ali celularnim modemom dovolj za tiste s pokvarjenimi nameni, saj smo imeli tekmovalci prost dostop do interneta. Napočil je prvi dan tekmovanja: eksperiment. Pet ur časa, da premerimo histerezo bimorfa (spoj dveh piezoelektričnih snovi, ki se upogne, če ga priključimo na napetost), določimo neznane koeficiente v nekaj enačbah in za konec izmerimo še kapaciteto bimorfa. Očarani od lanskega zelo natančnega eksperimenta, ki smo ga spoznali na pripravah, smo bili tokrat kar malo razočarani, saj so bile napake celo reda 20 – 50 %.

Sledil je prijeten oddih, a pred očmi nam je stalo opozorilo, da naše delo še ni končano. Omeniti moram, da dnevi v Sudburyju nikakor niso bili dolgočasni: vsaka ekipa je en večer preživela pri kanadski družini – mi pri Slovencih, ki jih v Kanadi živi kar precej. Ogledali smo si Science North, moderno izvedbo Münchenskega tehničnega muzeja, bili smo v IMAX kinu (Zakaj ne snemajo vseh filmov v tej tehniki?), rudar nemškega porekla nam je v angleščini z vzorčnim nemškim naglasom razkazal nikljev rudnik, po katerem je Sudbury znan. Nato so prišli na svoj račun še modelarji in posrečeno izstrelili nekaj raket ter gozdarji – pomislite na gozdne površine Kanade in jasno vam bo, zakaj so nekakšna narodna značilnost. Gozdarji so uprizorili pravo tekmovanje v gozdarskih veščinah, ki jih je več, kot se zdi na prvi pogled.

Teoretični del tekmovanja je prekinil radoživost naše ekipe. Strukturiranost prve naloge se vedno bolj uveljavlja, tokrat je bil poudarek na razmerjih. Nadalje so nas izmučili z atomiko (naloge se je vrtela okrog empirične formule, ki povezuje število in vrsto nukleonov z vezavno energijo v jedru), za posledek pa so pripravili model letala, kjer je bilo potrebno upoštevati tudi upor zraka. Prve točke so bile hitro na voljo in s spremljevalcema je bilo potrebno pripraviti strategijo za zagovor naših izdelkov, razložiti jima še nekaj nejasnosti. Nekako smo vsi pričakovali, da bosta čudežno zvišala naše točke, a pri fiziki si človek utemeljitev pač ne more kar izmišljevati... Sedaž, ko je bil glavni cilj našega potovanja izpolnjen, smo poprijeli po palicah za biljard in prepustili odgovornost tistima pravima fizikoma v naši skupini.

Končni rezultat je bil tak, da je naša ekipa osvojila bronasto medaljo in tri pohvale, nadaljujoč tradicijo slovenskih ekip, ki so zgrešile višjo uvrstitev le za las. Kljub temu je skupni rezultat kar dober. Tako smo se veseli udeležili končne slovesnosti podelitve medalj in pohval.

Po že preizkušeni vaji z letališkimi in carinskimi postopki smo po dveh tednih Kanade pristali na Brniku.

*Gašper Tkačik*

## ŽEPNI MODELI POLIEDROV

Kdor je že kdaj izdelal papirnati model poliedra, bo prav gotovo vedel, kako krhke so ponavadi te "stvarce" in s kakšno previdnostjo jih zato jemljemo v roke. Pravim ljubiteljem papirnatih modelov pa bi se najbrž malodane zameglilo pred očmi ob misli, da bi utegnil kdo takšne modele spraviti kar v žep.

Pa pogledjmo, da je tudi v tem primeru vendarle možno, da ostane volk sit in koza cela. Oglejmo si torej žepne modele poliedrov, ki vsaj v grobem zadoščajo estetskimi in drugim standardom za običajne papirnate modele. Za *žepni model* poliedra zahtevamo naslednje:

- s prepogibanjem papirja ga je mogoče zložiti tako, da so njegove ploskve vzporedne druga z drugo (kar pomeni, da ga lahko "nepoškodovanega" spravimo tudi v žep),
- prepogibi pri zlaganju modela smejo teči kvečjemu vzdolž robov poliedra (noben pregib torej ne seka nobene stranske ploskve modela).

V nadaljevanju bomo ločili med *osnovnim* in *žepnim* modelom posameznega poliedra. Osnovni model poliedra naj bo tisti, ki ga imamo običajno v mislih in je narejen iz papirja s pomočjo poliedrove mreže, sestavljene iz njegovih stranskih ploskev.

Najprej poskusimo izdelati žepne modele petih pravilnih poliedrov: tetraedra, oktaedra, kocke, dodekaedra in ikozaedra. Pri vseh opisih se bomo sklicevali na risbe na drugi strani ovitka.

Vzemimo osnovni model tetraedra. Na dva načina ga lahko razrežemo v žepni model. Na risbi sta oba predloga. Model (1) zlahka zložimo v kup trikotnikov ter spravimo v žep. Precej bolj presenetljiva rešitev problema je model (2). Ta razpade iz osnovnega modela v sklenjen papirnati trak, ki ga s prepogibi po robovih zložimo v kup pravokotnikov (in "spravimo v žep").

Seveda je smiselno od slehernega žepnega modela pričakovati, da bo bolj ali manj funkcionalen tudi kot model v običajnem smislu (kot osnovni model). V tem pogledu se izkaže, da je model (2) neprimerno stabilnejši od modela (1). Nasploh je pojem *stabilnosti* žepnega modela eden glavnih kriterijev za to, da model sprejmemo ali zavrzemo kot dober žepni model.

Očitno k večji stabilnosti modela (2) v primerjavi z modelom (1) prispevajo ohranjeni robovi osnovnega modela. To lastnost si velja zapomniti, saj se pri konstruiranju žepnih modelov ohranjanje robov osnovnega modela izkaže kot izredno pomembno, kar zadeva prav stabilnost.

Do žepnega modela oktaedra pridemo preprosto, saj sta na osnovnem modelu zanj potrebna le dva reza (3). Oba tečeta vzdolž para sosednjih

robov. Tak žepni model je zaradi majhnega števila rezov na osnovnem modelu seveda tudi zelo stabilen. V žep ga spravimo kot kupček trikotnikov, zloženih drug vrh drugega.

Pri žepnem modelu kocke pa je potrebno nekoliko več previdnosti. Problem je namreč v tem, da je njen izredno preprosti model (4) vse preveč nestabilen. Do stabilnejšega modela (5) pridemo z rezi čez ploskve osnovnega modela, podobno kakor pri tetraedru. Osnovni model s tem razpade v sklenjen "nalomljeni" trak in s pregibi po robovih ga zlahka zložimo v kup kvadratov in trikotnikov. Očitno je, od kod boljša stabilnost tega modela: v primerjavi z modelom (4) je (5) nastal z enakim številom rezov osnovnega modela, obenem pa ima ohranjenih tudi več robov.

Do konstrukcije žepnega modela (5) lahko pridemo na različne načine. Zamislimo si, denimo, kocki včrtan tetraeder, ki ima oglišča v ogliščih kocke. Če je model takšnega tetraedra prožen, tako da ga lahko "napihnemo" do te mere, da se njegove ploskve pritisnejo ob ploskve kocke, se bodo razrezi modela (2) ujeli z razrezi modela (5).

Preostaneta še konstrukciji žepnih modelov dodekaedra in ikozaedra, ki pa povzročata nekoliko več preglavic. Kako, denimo, razrezati osnovni model dodekaedra, da bo razpadel v žepni model? Ker se v vsakem oglišču dodekaedra srečajo po trije robovi, mora skozi vsako oglišče osnovnega modela teči vsaj en rez. Kajti treh ploskev, ki imajo skupno oglišče, pri tem pa čez nobenega od robov, ki se v njem stikajo, ne teče rez, ni mogoče zložiti v kup vzporednih ploskev.

To je lepo vidno pri vseh omenjenih žepnih modelih tetraedra in kocke, pri katerih se v vsakem oglišču stikajo po trije robovi. Vsak od teh žepnih modelov ima v vsakem oglišču vsaj en rez. Povsem drugače pa je pri oktaedru, kjer se v vsakem oglišču stikajo po štirje robovi in kjer za žepni model očitno ni treba z rezom v vsako oglišče.

Ker ima dodekaeder 20 oglišč, je potrebnih za njegov žepni model najmanj 10 rezov med posameznimi pari oglišč. Premislek tudi pokaže, da je smiselno ubirati zgolj reze po robovih. Sam sem našel kar nekaj različnih žepnih modelov dodekaedra, žal pa jih je bila velika večina močno nestabilnih in jih je bilo praktično nemogoče obdržati v obliki osnovnega modela. Model (6) se med vsemi, kar sem jih izdelal, odlikuje z največjo stabilnostjo. Naj dodamo, da je potrebno kar precej spretnosti, da ga zložimo v kupček petkotnikov.

Ob tem se kar samo od sebe zastavlja vprašanje, ali je model (6) že najboljši med žepnimi modeli dodekaedra. Ali ne obstaja morda model z manj kakor 15 rezi na osnovnem modelu in z večjo stabilnostjo? Morda bo problem zamikal koga od bralcev – in utegne se zgoditi, da dobimo novega dodekaedrskega rekorderja.

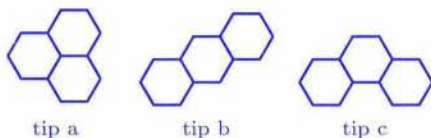
Za domačo zabavo naj ostane tudi izdelava žepnega modela ikozaedra.

Seveda pa ni nujno, da se pri izdelavi žepnih modelov omejimo le na peterico pravih teles. Poskusite raziskati, kako je z žepnimi modeli še drugih poliedrov. Za pogum na koncu dodajamo lepo uspeli žepni model rombičnega dodekaedra. Ta je v primerjavi z obravnavanimi telesi manj znan, zato naj vam bo pri morebitni izdelavi žepnega modela v pomoč tudi njegova mreža. Sestavljena je iz dvanajstih skladnih rombov, v katerih meri manjši od notranjih kotov  $70^\circ 32'$ .

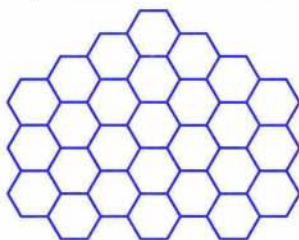
*Vilko Domajnko*

## ŠESTKOTNIŠKE TROMINE

Iz treh enakostraničnih šestkotnikov enakih velikosti lahko sestavimo "šestkotniške tromine" treh vrst:



Ali se da sestaviti naslednji šestkotniški vzorec:



- a) iz tromin tipov a in b;
- b) iz tromin tipa c?

*Jurij Kovič*

## PRODUKT IN VSOTI

Naj bo število 1998 zapisano kot produkt (ne nujno različnih) od 1 večjih naravnih števil,

$$1998 = n_1 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Kolikšna je lahko najmanjša in največja vrednost vsote  $n_1 + \dots + n_k$ ?

*Martin Juvan*

## 38. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Kot običajno, je bila tudi letošnja matematična olimpiada julija, kar je v Argentini ravno sredi zimskih počitnic. Da bi tekmovalci Matjaž Konvalinka, Matija Mazi in Tadej Starčič z Gimnazije Bežigrad, Martin Milanič z Gimnazije Koper, Matjaž Titan z Gimnazije Murska Sobota, Andrej Vodopivec s I. gimnazije v Celju ter vodja ekipe Matjaž Željko s Fakultete za matematiko in fiziko skok v zimo sredi poletja kar najboljje prestali, smo se pred odhodom v Mar del Plato za nekaj dni ustavili v Buenos Airesu. V tem času je Darjo Felda s Fakultete za elektrotehniko skupaj z ostalimi člani mednarodne tekmovalne komisije pripravil šest nalog, s katerimi so si tekmovalci popestrili dopoldneva 24. in 25. julija. Med nalogami sta bili tudi naslednji dve:

1. V polja matrike razsežnosti  $n \times n$  postavimo elemente iz množice  $S = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ . Tako matriko imenujemo *srebrna*,<sup>1</sup> če za vsak  $i = 1, \dots, n$  unija  $i$ -te vrstice in  $i$ -tega stolpca vsebuje vse elemente iz množice  $S$ . Pokaži:
  - a) Za  $n = 1997$  srebrna matrika ne obstaja.
  - b) Srebrne matrike obstajajo za neskončno mnogo vrednosti  $n$ .
2. Poišči vse pare  $(a, b)$  naravnih števil  $a$  in  $b$ , ki zadoščajo enačbi

$$a^{b^2} = b^a.$$

Ekipa Slovenije je tokrat dosegla največji uspeh, od kar nastopamo samostojno. Matjaž Konvalinka in Matjaž Titan sta osvojila bronasti medalji, Martin Milanič in Tadej Starčič pa sta prejela pohvali.

Zahvala za uspehe naših olimpijcev in tekmovalcev na drugih tekmovanjih gre predvsem učiteljem-mentorjem, ki mladim nadobudnežem pomagajo pri spoznavanju matematike. Nastop na olimpiadi so omogočili Ministrstvo za šolstvo in šport, Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter sponzorji Mura iz Murske Sobote, Hermes Softlab iz Ljubljane in Modna kravata Gjergjek iz Murske Sobote.

Matjaž Željko

---

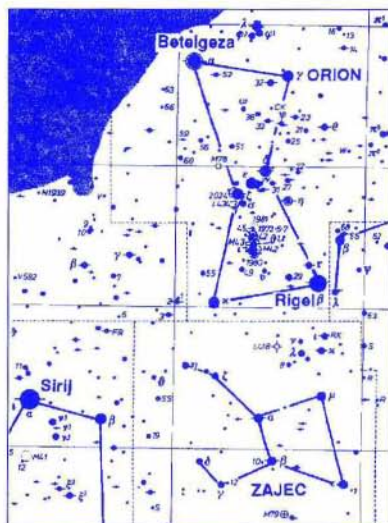
<sup>1</sup> V španščini pomeni *Plata* srebro.

## ZAJEC

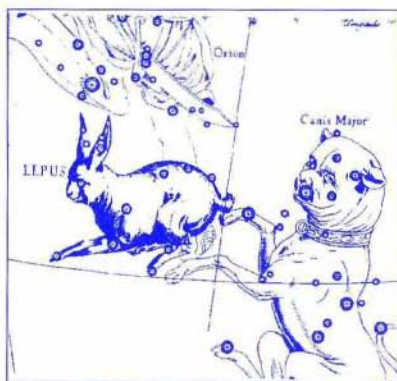
Preteklo zimo je bilo nekaj zelo lepih jasnih noči. Zvezdno nebo je kar žarelo in vabilo k opazovanju. Seveda se mu nisem odrekel. Posebno pozornost pa mi je tokrat vzbudilo ozvezdje *Zajec*, ki se je videlo izredno čisto. Čeprav gre za manj znano ozvezdje, ga hitro najdete in zares lahko občudujete.

Ozvezdje *Zajec* je zelo staro ozvezdje. Opisal ga je že starogrški astronom Ptolemej v svojem znamenitem zvezdnem katalogu iz 2. stoletja. Arabci so Zajcu rekli Orjakov (torej Orionov) prestol. V resnici si lahko predstavljamo štiri zvezde kot nekakšen prestol ali stol, na katerem pa velikan ne more sedeti preveč udobno.

Ni težko razumeti, da je ime *Zajec* povezano z lovцем Orionom. Povsem naravno se zdi, da se je ta žival zatekla k Orionovim nogam. Morda je ugotovila, da je Orion tako zelo zaposlen s preganjanjem nebesnega Bika, da je ob njem čisto brez skrbi, dokler bo miren in tiho. Morda pa želi ostati ob lovcu skrit, neopazen, predvsem pa varen pred hitrima in nevarnima lovskima psoma (Sirijem – Velikim psom in Prokijonom – Malim psom). Tako bi vedno imel možnost, da skoči stran, čim bi šla psa enkrat mimo.



Slika 1. Ozvezdje *Zajec* pod Orionom, pri nas zvečer vidno od decembra do aprila. Sliko smo vzeli iz naše astronomske revije *Spika*.



Slika 2. *Zajec* (Lepus) ob Orionovih nogah, prikazan v stari karti zvezdnega neba. Iz slike zgodbo kar beremo.

Naj bo tako ali drugače, predlagam, da jasne noči poiščete ozvezdje Orion, pod njim pa ozvezdje Zajec. Nato natančno opazujte Zajca in poskusite ugotoviti:

- približno ob kateri uri je na jugu 15. 1., 1. 2., 15. 2., itd. (sestavite preglednico);
- približno kdaj vzhaja in približno kdaj zahaja v teh dneh (preglednica);
- ozvezdje poskusite narisati po opazovanju.

Če boste vse to naredili, boste ugotovili spremembo videza zvezdnega neba. Vzrok temu je navidezno letno gibanje Sonca od zahoda proti vzhodu, to pa je posledica kroženja Zemlje okrog Sonca.

*Marijan Prosen*

## 28. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Olimpiada je potekala med 13. in 21. julijem v mestu Sudbury v Kanadi. Tekmovalo je 265 tekmovalcev iz 62 držav, pri čemer je bilo 6 držav opazovalk. Naši tekmovalci so osvojili eno bronasto medaljo in tri pohvale.

Slovensko ekipo (pet tekmovalcev in dva spremljevalca) so sestavljali: Miloš Jeftič, Igor Verstovšek, Matej Marinč in Gašper Tkačik, vsi z Gimnazije Bežigrad Ljubljana, ter Matej Horvat z II. gimnazije Maribor. Spremljevalca in člana mednarodne komisije sva bila Jure Bajc, FMF – Oddelek za fiziko, in Ciril Dominko, DMFA Slovenije.

Za razliko od prejšnjih let so se tekmovalci na tej olimpiadi najprej spopadli z eksperimentalno nalogo (po dolgem času je bila samo ena, navedeno sta dve) in po dnevu počitka še s tremi teoretičnimi nalogami. Letos so imeli po večletnem premoru spet največ uspeha ruski tekmovalci; štirje v petčlanski ekipi so dobili zlato medaljo. Zmagovalec olimpiade pa je bil član iranske ekipe. Za zlato medaljo je bilo potrebno letos doseči 41 točk od 50 možnih, za srebrno 36 točk, za bronasto 30 točk in za pohvalo 23 točk.

Med našimi tekmovalci je Gašper Tkačik zbral 35,75 točke in osvojil bronasto medaljo, Igor Verstovšek z 29 točkami, Matej Horvat s 27,5 točkami in Matej Marinč s 23,75 točkami pa so prejeli pohvale.

Naslednja, 29. mednarodna fizikalna olimpiada, bo med 2. in 10. julijem 1998 v Reykjaviku, glavnem mestu Islandije.

*Ciril Dominko*

|                                   |                               |                           |                        |                            |                                |
|-----------------------------------|-------------------------------|---------------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| JUBILEJ ZNANSTVENIKA S SLIKE      | VODJA MISIJE EU PRI NAS NAQUI | KRALJEVINA V JUŽNI AFRIKI | LOVSKO ZNAMENJE ZMAJE  | PETEK ?<br>NEDELJA         | RADIJSKI HUMORIST HRIBAR       |
| NIZEK ŽENSKI PEVSKI GLAS          |                               |                           |                        | ANGLEŠKA PLOŠČINSKA MERA   | ►                              |
| MERSKA PRIPRAVA                   |                               |                           |                        |                            | MESTO V MAROKU                 |
| VOLODJA PEER                      |                               |                           |                        |                            | OSREDNJI DEL KOLESA            |
| ►                                 |                               |                           |                        |                            |                                |
| ►                                 |                               |                           |                        |                            |                                |
| FOTO PETER LEGISA                 | KATРАН                        |                           |                        |                            | DODATNO IZPLAČILO DELNI-ČARJEM |
|                                   | NOTRANJ. VISOKA PLANOTA       |                           |                        |                            | POLET                          |
| PTIČ, TEKAC                       |                               |                           |                        | BUKOV GOZD                 | ZDRAVNIK ZA SEČNE ORGANE       |
| NEM. DRAM. (GEORG)                |                               |                           |                        | MESTO JULIJANTOVE MLADOSTI |                                |
| AVTOR MARKO BOKALIČ               | NAJFINEJŠI REČNI PESEK        |                           |                        |                            |                                |
|                                   |                               |                           | RIM. BOGA LJUBEZNI     |                            |                                |
|                                   |                               |                           | 3. OSERBA MNOŽINE      |                            |                                |
| NATOVA LETALSKA BAZA V ITALIJI    |                               |                           |                        |                            |                                |
| NESPOSOBNOST ZAZNAVANJA SVETLOBE  |                               |                           |                        | VETROVKA                   |                                |
| VELIK ŠPORTNI OBJEKT              |                               |                           |                        | META-MORFNA KAMNINA, GNAJS |                                |
| SLOV. KIPAR (JANEŽ)               |                               |                           |                        | HRV. PISEC VELIKA-NOVIC    |                                |
|                                   |                               |                           |                        | PLAKAT                     |                                |
| ELSA MORANTE                      | BENETKE                       |                           | SLOV. VIOLINIST (IGOR) | LEON BERGANT               | IT. GLASB. TEORETIK IZ AREZZA  |
|                                   | VISOKA VZPETINA               |                           |                        | INDIJANSKO LJUDSTVO        |                                |
| HRVAŠKI OTOK POD VELEBITOM        | JULIJAN LJUBIMEC              |                           |                        |                            | FOTOGRAF SELHAUS               |
|                                   | BANJA                         |                           |                        |                            | KRILNI DEL ZGRADBE             |
| KOPNINA V MORJU                   |                               |                           | OVOG OKROG BUBE        |                            | TONSKI NAČIN                   |
|                                   |                               |                           | NEON                   |                            |                                |
| SAMO-VOLJNA OBLAST                |                               |                           |                        |                            | NEMATE-RIALNO BITJE            |
| JUBILANT JE ČLAN SAŽU, ZATO JE... |                               |                           |                        |                            | DRAMA-TURGINJA RATEJ           |

|                                     |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|-------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------|
| DOGOREL<br>OSTAJEK<br>CIGARETE      | PLANŠAR-<br>SKI PLES                     | ALINEA                  | OGOVAR-<br>JANJE<br>S "TI"        | ALEKSAN-<br>DRUSKI<br>VIŠJI<br>DUHOVNIK | JUBILANTOV ROJSTNI<br>KRAJ V ZAMEJSTVU<br>(V BLIŽINI TRSTA) | LIKOVNA<br>UMETNICA                        | LUČAJ                                                                               | KNJIGA<br>TELEFON.<br>NAROČNI-<br>KOV   | TV<br>NOVINARKA<br>MALEČKAR | PRIPRAVA<br>ZA ODKLE-<br>PANJE          | ANDREJ<br>JEMEC                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         | NOTA, KI<br>TRAJA ZA<br>POLOVICO<br>ČETRTRINKE              |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         | JUBILANTOV<br>UČITELJ<br>(JOSIP)                            |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         | HRV. REKA                                                   |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         | KRŠKO                                      |
|                                     | SEKRETAR                                 |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            | VEDA                                                                                |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     | AVŠA,<br>TRAPA                           |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            | NAJDALJŠI<br>PRITOK<br>DRINE                                                        |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   | LETOPIŠ                                 |                                                             |                                            |                                                                                     |                                         | ČAKOVEC                     |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   | TV<br>NOVINARKA<br>ČETINSKI             |                                                             |                                            |                                                                                     |                                         | PREME-<br>TANKA             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         | RITMIČNA<br>TELOVADKA<br>RAKUSA                             |                                            |                                                                                     |                                         |                             | ZMANJ-<br>SANJE<br>UGLEDA,<br>PONIZANJE | HITRO<br>ODRIVANJE<br>TELESA OD<br>PODLAGE |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         | ČESPLJA                                                     |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
| MESTO V<br>ANGLUJI                  |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             | KILOMETER                                  |                                                                                     |                                         | ČUTILO ZA<br>VOH            |                                         |                                            |
| RADIJ                               |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             | KRALJEVO<br>POKRIVALO                      |                                                                                     |                                         | MEHKA<br>KOVINA (BI)        |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         | PISATE-<br>LJIČA<br>VASTE         |                                         |                                                             |                                            | PRIPADNIK<br>LJUDSTVA V<br>SPANJI                                                   |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            | SILICIJ                                                                             |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     | UREDNIK NA<br>TVS<br>(JANI)              | MODERA-<br>TORKA<br>BAS | ORBITA                            |                                         |                                                             | ZBIRKA Z<br>VEČ JUBI-<br>LANTOVIMI<br>DELI |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         | JUBILANTOV<br>AKADEMSKI<br>NASLOV |                                         |                                                             | 3/4 PLES                                   |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
| ENO OD JU-<br>BILANTOVH<br>ODKRITIJ |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
| TOLAŽBA                             |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   | KARENINA                                |                                                             |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   | KRAVJI<br>MLADIČ                        |                                                             |                                            |                                                                                     | CERKVENI<br>OBRED                       |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            |                                                                                     | MOSTIČEK<br>ČEZ POTOK                   |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         | BELJAKO-<br>VINA                                            |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          |                         |                                   |                                         | TEKOČA<br>ZACIMBA                                           |                                            |                                                                                     |                                         |                             |                                         |                                            |
|                                     |                                          | APETIT                  |                                   |                                         |                                                             | RADUSKI<br>UREDNIK<br>KANONI               |                                                                                     |                                         | NACE<br>JUNKAR              |                                         |                                            |
|                                     |                                          | MARIJAN<br>PROSEN       |                                   |                                         |                                                             | TETOVO                                     |                                                                                     |                                         | SIBIRSKI<br>VELETOK         |                                         |                                            |
|                                     | USTALJEHO<br>NABOŽNO<br>BESEDILO         |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            |                                                                                     | DROG ZA<br>VPREGO<br>ŽIVALI PRI<br>VOZU |                             |                                         |                                            |
|                                     | REVUJA, ZA<br>KATERO<br>JUBILANT<br>PIŠE |                         |                                   |                                         |                                                             |                                            |  | BERILIJ                                 |                             |                                         | AVTOR<br>MARKO<br>BOKALIČ                  |

## PRAŠTEVILSKI DVOJČKI IN PROCESOR PENTIUM

Oktobra leta 1994 je Thomas Nicely, profesor matematike na Lynchburg Collegu v ameriški zvezni državi Virginia, na internetu objavil vest, da ima procesor Pentium težave pri deljenju nekaterih števil. Njegov računalnik je namreč izračunal obratni vrednosti števil 824 633 702 441 in 824 633 702 443 le na 9 decimalnih mest natančno, čeprav je procesorjev proizvajalec Intel jamčil za natančnost 19 decimalnih mest. Za Intelove strokovnjake je novica pomenila katastrofo, saj njihov procesor ni obvladal računske operacije, ki se je vsi naučimo že v osnovni šoli. Nedvomno je zanimivo poznati približno ozadje te zgodbe.

Procesor Pentium, ki je bil predstavljen leta 1993, je občutno povečal hitrost in zmogljivost osebnih računalnikov. Do jeseni 1994 je Intel prodal skoraj milijon primerkov, ki so jih IBM, Packard Bell in drugi vgradili v svoje osebne računalnike. Intel je zato upravičeno pričakoval velik prodajni uspeh. Potem pa ga je pretresla novica, da Pentium ni zanesljiv pri deljenju števil.

Pravzaprav noben računalnik realnih števil ne deli natančno. (Drugače je pri celoštevilskem deljenju, pri katerem sta celoštevilski kvocient in ostanek izračunana natančno.) Pri deljenju realnih števil – ta so v računalniku predstavljena v zapisu s premično piko – pogosto pride do majhne napake. To se sicer dogaja tudi pri seštevanju, odštevanju in množenju. Razlog za to napako je v tem, da računalnik ne računa z natančnimi števili, temveč z njihovimi približki, ki imajo natančnih le določeno število mest. Število  $1/9 = 0.111111 \dots$  na primer ni shranjeno kot neskončni, temveč le kot končni niz enic. (V resnici je zapis števil v računalniku še nekoliko bolj zapleten, saj so števila zapisana v dvojiškem in ne v desetiškem sistemu.) Prav tako je rezultat vsake računske operacije zaokrožen na vnaprej določeno število mest. Vendar so te zaokrožitvene napake predvidljive. Znani so postopki, kako jih pri posameznih obsežnejših računih obvladamo. Kljub temu je rezultat računanja nezanesljiv, če je računalnik pri tem izvedel ogromno število računskih operacij. Če na primer seštejemo  $10^{10}$  števil na računalniku, ki uporablja desetiško aritmetiko, potem je natančnost te vsote vprašljiva, saj se zaokrožitvene napake lahko seštevajo. Bralcu, ki bi se rad seznanil z osnovnimi problemi numeričnega računanja, priporočamo knjigo Z. Bohte: *Uvod v numerično računanje*, Knjižnica Sigma, DMFA Slovenije 1995.

Vendar so bile težave pri procesorju Pentium bistveno hujše. Nekatera števila (ki imajo v dvojiški predstavitvi, ki jo uporablja procesor, določeno obliko) je delil napačno. Oglejmo si tedaj najbolj znani primer

napačnega deljenja. Na 6 decimalnih mest natančna vrednost kvocienta  $4\,195\,835/3\,145\,727$  je 1.33382, medtem ko je Pentium izračunal 1.33374, kar pomeni 0.006% relativno napako. Ta primer lahko predstavimo še bolj impresivno. Če definiramo

$$x := 4\,195\,835, \quad y := 3\,145\,727 \quad (= 3 \cdot 2^{20} - 1) \quad \text{in} \quad z := x - (x/y) \cdot y,$$

je Pentium namesto  $z = 0$  (oziroma števila zelo blizu 0) dobil  $z = 256$  ( $= 2^8$ ). Vendar je bilo zelo malo verjetno, da bi kdo želel izračunati kvocient, ki bi ga Pentium izračunal napačno. Zato ni čudno, da Intelovi strokovnjaki pri testiranjih izdelka, preden so ga poslali na trg, te napake niso odkrili. Zanimivo pa je, da so poleti 1994 že vedeli za napako, vendar o tem niso obvestili lastnikov računalnikov. Ocenili so, da povprečnemu uporabniku preglednic (npr. Excel ali Quattro Pro) procesor izračuna napačen rezultat enkrat v 27 000 letih. Poleg tega je tudi malo verjetno, da bi kdo podvomil v rezultat. Kako pa je potem profesor Nicely odkril napako na procesorju?

Odgovor na to vprašanje je povezan s praštevili in dvojčki. Par števil  $(p, p+2)$  imenujemo **praštevili dvojček**, če sta  $p$  in  $p+2$  praštevili. Prvih 5 praštevili dvojčkov je tako

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31).$$

Dogovorimo se še za oznaki. Število vseh praštevil, ki ne presegajo realnega števila  $x \geq 2$ , označimo s  $\pi(x)$ , število vseh praštevili dvojčkov, od katerih manjše praštevilo ne presega realnega števila  $x \geq 2$ , pa zaznamujemo s  $\pi_2(x)$ . Tako je  $\pi(10) = 4$ , saj so 2, 3, 5 in 7 edina praštevila, ki ne presegajo 10. Iz zgornjega seznama praštevili dvojčkov pa razberemo, da je  $\pi_2(6) = \pi_2(10) = 2$ . Naslednja tabela prikazuje vrednosti funkcij  $\pi$  in  $\pi_2$  za nekatere  $x$ , ki so potence števila 10:

| $x$       | $\pi(x)$      | $\pi_2(x)$  |
|-----------|---------------|-------------|
| $10^2$    | 25            | 8           |
| $10^3$    | 168           | 35          |
| $10^4$    | 1 229         | 205         |
| $10^5$    | 9 592         | 1 224       |
| $10^6$    | 78 498        | 8 169       |
| $10^7$    | 664 579       | 58 980      |
| $10^8$    | 5 761 455     | 440 312     |
| $10^9$    | 50 847 534    | 3 424 506   |
| $10^{10}$ | 455 052 511   | 27 412 679  |
| $10^{11}$ | 4 118 054 813 | 224 376 048 |

Na tem mestu omenimo znameniti **praštevilski izrek**, ki pravi, da je  $\pi(x)$  približno enako kvocientu  $x/\ln x$  (glej npr. članek G. Pavlič: *Porazdelitev praštevil v množici  $\mathbb{N}$* , Presek **24** (1996/97), štev. 3, str. 140–143). Praštevilski izrek je posledica naslednjih zanimivih neenakosti, odkritih leta 1962. Za vse  $x \geq 2$  velja zgornja ocena

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{3}{2 \ln x}\right),$$

za  $x \geq 59$  pa velja spodnja ocena

$$\pi(x) > \frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{2 \ln x}\right).$$

Ker že od Evklida naprej vemo, da je praštevil neskončno mnogo, se pojavi vprašanje, ali je tudi praštevilskih dvojčkov neskončno. Odgovor na to vprašanje še vedno ni znan, čeprav obstaja domneva, da je pritrtilen. Leta 1919 je norveški matematik Viggo Brun dokazal, da je

$$\pi_2(x) \leq \frac{100x}{(\ln x)^2}$$

za velika števila  $x$ . (Ta zgornja meja je bila pred leti znižana na  $6x/(\ln x)^2$ .) Toda nihče še ni našel (podobne) spodnje ocene za  $\pi_2(x)$ , iz katere bi sledilo, da je praštevilskih dvojčkov neskončno mnogo. Leta 1922 sta Hardy in Littlewood postavila domnevo, da je  $\pi_2(x)$  približno proporcionalno kvocientu  $x/(\ln x)^2$ . Večina matematikov je prepričana, da je resnična. Zato kar nekaj rezultatov iz teorije števil predpostavlja veljavnost Hardy-Littlewoodove domneve.

Zgornji izrek pa ni edini rezultat o praštevilskih dvojčkih, ki ga je dokazal Viggo Brun. Izračunajmo obratne vrednosti vseh praštevilskih dvojčkov in jih seštejmo, torej sestavimo vrsto

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31}\right) + \dots$$

To vrsto imenujemo **Brunova vrsta**. Če je praštevilskih dvojčkov končno mnogo, potem je Brunova vrsta običajna vsota s končno mnogo členi. Denimo sedaj, da je praštevilskih dvojčkov neskončno mnogo. Ali tedaj obstaja vsota Brunove vrste oziroma ali vrsta konvergira? O konvergentnih (neskončnih) vrstah je Presek že pisal (glej npr. članek A. Cedilnik: *Geometrijska in harmonična vrsta*, Presek **23** (1995/96), štev. 1, str. 40–45).

Viggo Brun je pokazal, da je njegova vrsta konvergentna. Če s  $(p_n, p_n + 2)$  označimo  $n$ -ti praštevski dvojček in uvedemo delne vsote

$$B_n := \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n + 2}\right),$$

potem to pomeni, da obstaja realno število  $B$ , od katerega se števila  $B_n$  z dovolj velikimi indeksi  $n$  razlikujejo tako malo, kot le hočemo. Zanimivo je, da to ne velja, če v zgornji vrsti vzamemo vsa praštevila in se torej ne omejimo le na praštevilske dvojčke. Vrsta

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$$

namreč ne konvergira, saj njene delne vsote sčasoma postanejo poljubno velike. (Radovedni bralec lahko najde dokaz tega dejstva npr. v knjigi H. Rademacher: *Lectures on Elementary Number Theory*, Blaisdell 1964 ali v knjigi G. H. Hardy, E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1979 (izrek 19 stran 17).

Oceniti vsoto Brunove vrste je vse prej kot enostavno. Tudi če poznamo vse praštevilske dvojčke do milijarde in iz njih izračunamo delno vsoto Brunove vrste (to je število  $B_{\pi_2(10^9)}$ ), ni lahko povedati, kako blizu števila  $B$  s tem pridemo. Videti je, da je brez predpostavke o resničnosti Hardy-Littlewoodove domneve težko odgovoriti na to vprašanje. Zato privzemimo, da je ta domneva resnična. Pri tem privzetku so matematiki izpeljali naslednjo trditev, ki jo le grobo opišimo. Ker pri  $n$ -ti delni vsoti  $B_n$  upoštevamo samo prvih  $n$  praštevskih dvojčkov (zadnjega kot prej označimo s  $(p_n, p_n + 2)$ ), ji prištejemo člen, proporcionalen številu  $(\ln p_n)^{-1}$ . Tako dobimo približek števila  $B$ , katerega napaka je proporcionalna številu  $(\sqrt{p_n} \ln p_n)^{-1}$ . S pomočjo te trditve sta leta 1974 Daniel Shanks in John Wrench, potem ko sta določila vse praštevilske dvojčke izmed prvih dveh milijonov praštevil, za vsoto Brunove vrste dobila približek 1.90218. Za napako približka sta v svojem članku zapisala, da je kvečjemu  $2 \cdot 10^{-5}$ . Seveda pri pogoju, da velja Hardy-Littlewoodova domneva. Podobno je leta 1976 Richard Brent določil vse praštevilske dvojčke do  $10^{11}$  in za vsoto Brunove vrste dobil približek 1.9021605.

Leta 1993 se je problema ponovno lotil v začetku prispevka omenjeni Thomas Nicely. Odločil se je, da samo z uporabo osebnih računalnikov (torej brez superračunalnikov, ki so dostopni le nekaterim) določi še nadaljnjih nekaj decimalk števila  $B$ . Da bi se izognil vsem možnim

pastem, je Brunovo vsoto računal na dva načina in hkrati uporabljal več osebnih računalnikov. Na začetku je uporabljal 5 osebnih računalnikov, ki so imeli Intelov procesor 486. Marca 1994 je v računanje vključil še računalnik s procesorjem Pentium, s katerim je računanje potekalo precej hitreje. Kljub temu delo ni bilo opravljeno čez noč. Tudi ko je že vedel, da je z rezultati, ki jih je izračunal Pentium, nekaj narobe, je potreboval še nekaj časa, da je izoliral napako. Zaradi neznanega vzroka je njegov Pentium napačno izračunal obratni vrednosti praštevilske dvojčke 824 633 702 441 in 824 633 702 443. Takoj je o svojem odkritju obvestil Intelove strokovnjake. Ker ni dobil odgovora, je novico objavil na internetu, kjer je hitro pritegnila zanimanje drugih uporabnikov Intelovih procesorjev ter končno tudi medijev.

Ko je bila širša javnost obveščena o napaki, jo je priznal tudi Intel, vendar je vztrajal, da se skoraj nihče od imetnikov procesorja Pentium ne bo nikdar "srečal" s to napako. Zato je Intel sprva ponudil zamenjavo procesorjev le tistim, ki so lahko dokazali, da potrebujejo veliko natančnost pri zapletenih računanjih (npr. numerični matematiki). Temu je sledilo hudo ogorčenje javnosti, zato so bili pri Intelu na koncu prisiljeni zamenjati procesor vsakemu, ki je za to prosil. Kljub temu da je bil Intel zaradi tega spodrsrljaja udeležen v mnogih šalah, je bila nadaljnja prodaja procesorjev Pentium zelo uspešna. Sredi leta 1995 je prodaja presegla 10 milijonov, s čimer je Intel brez težav pokrila stroške, ki so nastali zaradi napake.

To ni bila niti prva niti zadnja napaka pri (osebni) računalnikih. Vsekakor pa je bila ena od najbolj osupljivih. Ker je pri računalnikih (še posebej pa pri programski opremi) kar nekaj stvari, ki lahko gredo narobe, uporabniki namreč pričakujemo zanesljivost vsaj pri strojni opremi, ki opravlja osnovne računske operacije. Na srečo ta napaka v procesorju Pentium ni imela hujših posledic. Upamo lahko, da je še dodatno opozorila izdelovalce različnih naprav, ki so delno ali v celoti odvisne od računalnikov, na možnost napak s hujšimi posledicami.

Navkljub težavam je Thomas Nicely določil vse praštevilske dvojčke do  $10^{14}$ , s pomočjo katerih je dobil približek

$$B \approx 1.9021605778.$$

Ta približek je seveda lahko napačen, če Hardy-Littlewoodova domneva ni resnična.

*Roman Drnovšek*

## ŠTEVILSKA KRIŽANKA

## Vodoravno:

1. Razlika med devetim in petim praštevilom.
3. Drugo trikotniško število.
4. Praštevilo.
6. Velikost kota (v stopinjah) v pravilnem petkotniku.
8. 688, zaokroženo na desetice.
9. Šesto trikotniško število.
10. Obseg pravokotnika s stranica-  
ma  $15\frac{1}{2}$  in 9.
11. Osnova številskega sistema, v katerem velja  $35 - 16 = 16$ .
12. Število tetraedrovih oglišč.
13. Koliko kotnih stopinj opiše urni kazalec v 30 minutah?
15. Število elementov množice  $A \cap B$ , če je  $A = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$  in  $B = \{\text{večkratniki števila } 3, \text{ ki so manjši od } 60\}$ .
17. Dvanajst ducatov.
18. Večkratnik števila 11.
20. Koliko petin je v štirih enotah?
21. Tretje praštevilo.
22. Praštevilo.

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  |    | 3  |    | 4  | 5  |
| 6  |    | 7  |    | 8  |    |    |
|    | 9  |    |    | 10 |    |    |
| 11 |    |    |    |    |    | 12 |
|    | 13 | 14 |    | 15 | 16 |    |
| 17 |    |    |    | 18 |    | 19 |
| 20 |    |    | 21 |    | 22 |    |

## Navpično:

1. Koliko je praštevil med 1 in 35?
2.  $20_{(10)}$ , zapisano v trojiškem sistemu.
3. Število simetrijskih osi enakostraničnega trikotnika.
4. Petstoto pozitivno liho število.
5. Produkt treh različnih enomestnih praštevil.
7. Deveti popolni kvadrat.
8.  $2^6$ .
11. Najmanjše možno število stranic pravilnega večkotnika, ki ima stranico krajšo od polmera očrtane krožnice.
12. Število tetraedrovih mejnih ploskev.
13. Koliko meri peti kot petkotnika, v katerem meri vsak od preostalih štirih  $100^\circ$ .
14. Zapiši število  $64_{(10)}$  v številske-  
m sistemu z osnovo 12.
15. Število robov oktaedra.
16. Potenca števila pod 11. vodorav-  
no.
17. Ducat.
19. Ni praštevilo.
21. Lepa šolska ocena.

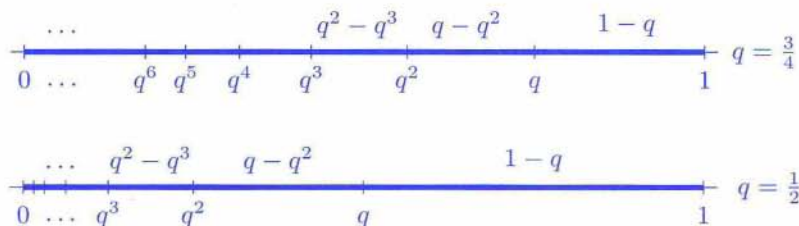
Marija Vencelj

## VSOTA GEOMETRIJSKE VRSTE – PO GEOMETRIJSKO

Vzemimo pozitivno število  $q$ , manjše od 1, kar lahko zapišemo s simboli takole:  $0 < q < 1$ . Njegov kvadrat, torej  $q^2$ , je tudi tako število, toda ta hip je pomembneje, da je  $q^2 < q$ . Po množenju obeh strani neenakosti  $q < 1$  s pozitivnim  $q$  dobimo namreč neenakost  $q^2 < q < 1$ . Postopek nadaljujemo in najdemo zaporedje potenc:

$$0 < \dots < q^{n+1} < q^n < \dots < q^3 < q^2 < q < 1.$$

Zaporedje  $1, q, q^2, q^3, \dots$  je geometrijsko, saj je v zaporedju količnik poljubnega člena z njegovim predhodnikom enak  $q$ , torej stalen. Prvi člen tega zaporedja je 1. Člene zaporedja upodobimo na številski premici, kot prikazujeta sliki. Čim manjši je  $q$ , tem hitreje se potence  $q^n$  približujejo ničli:



Očitno členi zaporedja delijo interval  $[0, 1]$  na vedno krajše podintervale, če gledamo z desne proti levi strani tega intervala. Prvi podinterval ima dolžino  $1 - q$ , drugi  $q - q^2 = q(1 - q)$ , tretji  $q^2 - q^3 = q^2(1 - q)$  in tako naprej. Njihove dolžine sestavljajo zaporedje

$$1 - q, q(1 - q), q^2(1 - q), \dots$$

ki je tudi geometrijsko zaporedje s količnikom  $q$ . Prvi člen je  $1 - q$ . Velja:

$$0 < \dots < q^n(1 - q) < \dots < q^2(1 - q) < q(1 - q) < 1 - q.$$

Prvi podinterval z desne ima dolžino  $1 - q$ , kar je manj od dolžine intervala  $[0, 1]$ , ki je dolg 1. Prva dva podintervala skupaj merita  $(1 - q) + q(1 - q) = 1 - q^2$ . Prvi trije imajo skupno dolžino  $(1 - q) + q(1 - q) + q^2(1 - q) = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 = 1 - q^3$ , po  $n$  korakih ugotovimo, da meri skupna dolžina prvih  $n$  podintervalov  $1 - q^n$ . Če seštejemo po vrsti

dolžine dovolj velikega števila zaporednih podintervalov, se številu 1 približamo, kot le želimo, saj potenca  $q^n$  za dovolj velik  $n$  postane poljubno majhna. To zapišemo v obliki vsote, ki ima neskončno mnogo členov:

$$(1 - q) + q(1 - q) + q^2(1 - q) + \dots = 1.$$

Tri pike (...) pomenijo, da se seštevanje členov nadaljuje v nedogled. Vsota vseh dolžin delnih intervalov, na katere členi zaporedja  $q, q^2, \dots$  delijo interval  $[0, 1]$ , je seveda 1. Če v zgornji vsoti izpostavimo vsem členom skupni faktor  $1 - q$ , dobimo

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = 1,$$

od koder dobimo vsoto geometrijske vrste:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}. \quad (\text{A})$$

Geometrijska vrsta ji pravimo zato, ker sestavljajo njeni členi geometrijsko zaporedje. Formula (A) je očitno pravilna tudi za  $q = 0$ .

Primer:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Kaj pa, če je  $q$  negativen, toda po absolutni vrednosti manjši od 1? Tedaj pišemo  $q = -r$ , kjer je  $0 < r < 1$ . Geometrijsko vrsto preoblikujemo takole:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots &= 1 - r + r^2 - r^3 + r^4 + \dots = \\ &= (1 - r) + r^2(1 - r) + r^4(1 - r) + \dots \end{aligned}$$

Izpostavimo faktor  $1 - r$  in dobimo:

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = (1 - r)(1 + r^2 + r^4 + \dots).$$

Vrsta  $1 + r^2 + r^4 + \dots$  je geometrijska s količnikom  $r^2 < 1$ , njeno vsoto lahko izračunamo s formulo (A):

$$1 + r^2 + r^4 + \dots = \frac{1}{1 - r^2} = \frac{1}{(1 - r)(1 + r)}.$$

Tako smo našli vsoto vrste:

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = (1 - r) \frac{1}{(1 - r)(1 + r)} = \frac{1}{1 + r} = \frac{1}{1 - q}.$$

Formula (A) torej velja za vsako realno število  $q$ ,  $|q| < 1$ .

Primer:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Za  $|q| \geq 1$  geometrijska vrsta nima vsote. Res:

Za  $q = 1$  imamo  $1 + 1 + 1 + \dots$ . Ko seštejemo prva dva člena, dobimo vsoto 2, vsota prvih treh členov je 3 in tako naprej. Če nadaljujemo, očitno dobljena vsota sčasoma preseže še tako veliko pozitivno število.

Zanimiv je primer  $q = -1$ , ko imamo opravka z vrsto  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Tedaj je vsota prvih dveh členov 0, vsota prvih treh 1, prvih štirih spet 0 in tako naprej. Tako zaporedje ničel in enic se seveda ne približuje nobenemu številu, četudi seštejemo še tako veliko število členov.

Kaj pa, če združujemo po dva in dva člena? Tedaj dobimo novo vrsto  $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$ . Kaj je pravilno? Izkaže se, da smemo člene vrste včasih združevati, včasih pa ne. Slednji primer je tak, ko tega ne smemo.

V izpeljavi smo združevali člene:  $1 - r + r^2 - r^3 + r^4 + \dots = (1 - r) + r^2(1 - r) + r^4(1 - r) + \dots$ . V tem primeru smo to storili upravičeno.

V primeru  $|q| > 1$  potence  $q^n$  postanejo z rastočim eksponentom  $n$  po absolutni vrednosti vedno večje, torej geometrijska vrsta tudi tedaj nima vsote.

Marko Razpet

## POENOSTAVI – Rešitev s str. 110

$$(1 - \frac{1}{1})(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{100}) = 0 \cdot \dots = 0$$

in

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5}) \dots (1 - \frac{1}{99}) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{98}{99} = \frac{1}{99}. \end{aligned}$$

Marija Vencelj

## PREMISLI IN ODGOVORI – Rešitev s str. 101

49 rib.

Marija Vencelj

## KAKO UGANEMO ODSTRANJENO ŠTEVKO?

Miha že dva dni zamišljen postopa naokoli. Le kako lahko Ana vedno ugame, katero števko je prečrtal? Zagotovo **ve**, kako priti do pravilnega odgovora!

Predvčerajšnjim ga je Ana povabila k igri. Dala mu je takale navodila:

1. Skrivaj zapiši na papir poljubno večmestno število.
  2. Zapiši še število, ki ima natanko take števke kot prvo (tudi vsako enakomnogokrat), le v drugačnem, a poljubnem vrstnem redu.
  3. Manjše od zapisanih števil odštej od večjega in pomnoži dobljeno razliko s poljubnim večmestnim številom.
  4. V dobljenem produktu prečrtaj poljubno, od 0 različno števko.
- Prosila ga je, naj večmestno število, ki je nastalo po odstranitvi prečrtane števke, zapiše na posebni listek in ji ga pokaže.

Ob pogledu na listek mu je **takoj** (no, skoraj takoj) povedala, katero števko je prečrtal.

Igro sta večkrat ponovila in Ana je vedno navedla pravilno števko. Le enkrat ji to ni uspelo, a tedaj je Mihi dokazala, da se je on zmotil pri odštevanju.

**Pomagajte Mihi razkriti Anino strategijo!**

*Marija Vencelj*

## RAZTRGANI LEPAK

Picko in Packo sta se – bogsigavedi, zakaj – uničevalno lotila velikega reklamnega lepaka znanega pevca. Picko je vsak kos, ki ga je vzel v roke, raztrgal na tri dele, Packo vsakega na pet delov. Kasneje jima je bilo posterja žal in sta ga želela zlepiti nazaj. Pobrala sta raztresene kosce in ugotovila, da jih je 1998.

Ali sta našla vse kose raztrganega lepaka?

*Dragoljub M. Milošević, prir. Marija Vencelj*

## IGRA – Rešitev s str. 75

Peter vpiše eno od števk 6, 7 ali 8. Nato vpiše Petra svojo števko, Peter pa števko, ki da s Petrino števko vsoto 15 (npr. 896). Tako ravna Peter tudi pri vpisovanju pete in sedme števke. Na ta način bo vsota števk od druge do sedme enaka 45, torej deljiva z 9. Da bi bilo zaključno osemestno število deljivo z 9, bi morala biti vsota prve in osme števke deljiva z 9, česar se pri danih pogojih ne da doseči. Tako Petra izgubi igro.

*Dragoljub M. Milošević, prevod Barbara Japelj*



## URNIK TEKMOVANJ V LETU 1998

| področje                    | šola                  | tekmovanje                                | datum                                                       |
|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| matematika                  | osnovna               | šolsko<br>področno<br>državno             | 20. marec<br>18. april<br>16. maj                           |
|                             | srednja               | šolsko<br>izbirno<br>državno<br>olimpiada | 20. marec<br>4. april<br>16. in 17. maj<br>10. do 21. julij |
| fizika                      | osnovna               | šolsko<br>področno<br>državno             | do 14. marca<br>4. april<br>9. maj                          |
|                             | srednja               | področno<br>državno<br>olimpiada          | 28. marec<br>18. april<br>julij                             |
| logika                      | osnovna               | šolsko<br>izbirno<br>državno              | 25. september<br>17. oktober<br>14. november                |
|                             | srednja               | izbirno<br>državno                        | 17. oktober<br>14. november                                 |
|                             | študentje             | državno                                   | 14. november                                                |
| matematika<br>za razvedrilo | osnovna in<br>srednja | državno                                   | 5. september                                                |
| računalništvo               | osnovna               | šolsko<br>področno<br>državno             | do 20. marca<br>17. april<br>9. maj                         |
|                             | srednja               | državno                                   | 8. in 9. maj                                                |

## Nekaj informacij o tekmovanjih

## Matematika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila lahko dobite pri g. Aleksandru Potočniku, OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10, Ljubljana, telefon (061)-443-074 ali (061)-442-900.

### Matematika – srednja šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Naj še posebej poudarimo, da tudi v šolskem letu 1997/98 že potekajo celoletne priprave na mednarodno matematično olimpiado, ki bo julija 1998 na Tajvanu. Teh se udeležujejo dijaki, ki so jih predlagali bodisi člani *Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli* bodisi učitelji-mentorji ali pa so se prijavili sami. Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Prvi izbirni test bo 23. januarja 1998, drugi pa 24. aprila 1998. Podrobnejše informacije dajeta g. Darjo Felda, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-17-68-233 ali (061)-17-68-234 in g. Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061)-17-66-500, dobite pa jih tudi po elektronski pošti na naslovu "math.comp@fmf.uni-lj.si". Koledar aktivnosti je ob vsakem času dostopen po Internetu: URL: "http://www.fmf.uni-lj.si/~mathcomp/koledar.html".

### Fizika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. V februarju bomo na šole poslali razpis tekmovanj. Dodatne informacije dobite pri ge. Jelki Sakelšek, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (061)-444-401 ali (061)-444-181.

### Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavnici poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. Cirilu Dominku na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (061)-13-19-293.

### Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih *Logika & Razvedrilna matematika* in *Ugankarski domenek*.

### Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj na predmetni stopnji osnovne šole, učenci srednjih šol in študentje. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, Ljubljana. Druge informacije daje g. Andrej Jus na ZOTKS, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

### Računalništvo – osnovna šola

Razpis tekmovanja je bil skupaj z obvestilom o spremenjeni vsebini tekmovanj in prijavnico že poslan na šole. Informacije dobite pri g. Andreju Jusu, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

### Računalništvo – srednja šola

#### I. Raziskovalne naloge

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali. Podrobnejša pojasnila daje g. Roman Dorn, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-17-68-411.

#### II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskimi seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **15. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijave in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Informacije dobite pri ZOTKS – Komisija za računalništvo, Lepi pot 6, Ljubljana, tel (061)-213-727, faks (061)-222-487.

*Darjo Felda*

## 32. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 111

### 6. razred

#### Sklop A

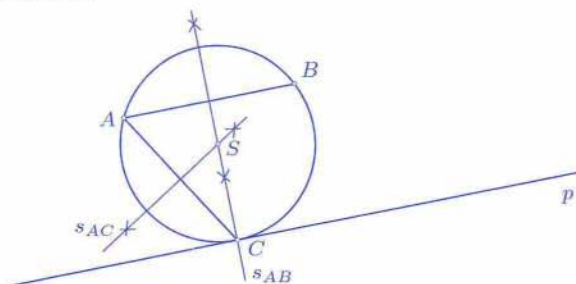
|                  |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| naloga           | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| pravilni odgovor | D  | C  | B  | C  | A  | Č  |

#### Sklop B

**B1** Vrednost izraza je 1.

**B2** Prvo število je za 5 povečan trikratnik drugega števila. Ker je ostanek 5, je drugo število 6, 7, 8 ali 9. Zaradi  $3 \cdot 8 + 5 = 29$  in  $29 + 8 = 37$  je prvo število 29, drugo pa 8.

- B3** Konstruiramo simetralo daljice  $AB$  in točko  $C = s_{AB} \cap p$ , nato pa simetralo daljice  $AC$  in točko  $S = s_{AB} \cap s_{AC}$  ter krožnico s središčem  $S$  in polmerom  $SC$ .



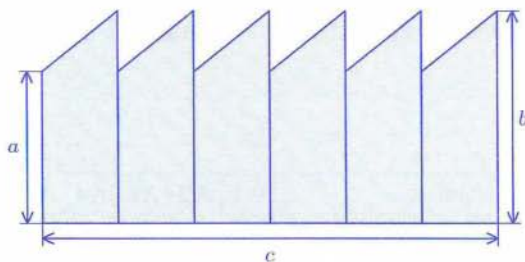
## 7. razred

### Sklop A

|                  |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| naloga           | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| pravilni odgovor | Č  | C  | B  | C  | D  | C  |

### Sklop B

- B1** Vrednost izraza je 9.
- B2** Cena izleta je 75 000 SIT, cena kilometra prevožene poti pa 250 SIT. Za 700 km bi morali plačati 175 000 SIT, vsak od 40 učencev bi tedaj moral plačati 4 375 SIT.
- B3** Lik je sestavljen iz šestih skladnih trapezov z osnovnicama  $a$  in  $b$  in višino  $\frac{c}{6}$ , zato je njegova ploščina  $p = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot c$ .



## 8. razred

### Sklop A

|                  |    |    |    |    |    |    |
|------------------|----|----|----|----|----|----|
| naloga           | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| pravilni odgovor | D  | C  | Č  | A  | B  | C  |

## Sklop B

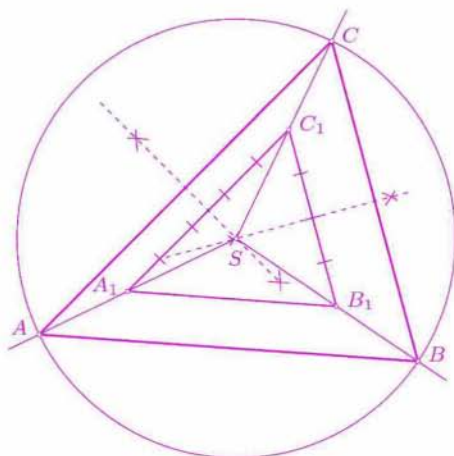
**B1** Ploščina pravokotnika je

$$p = ab = (\sqrt{1997} + \sqrt{1797})(\sqrt{1997} - \sqrt{1797}) = 1997 - 1797 = 200,$$

$$\text{obseg pa } o = 2(a + b) = 2(2\sqrt{1997} + 0) = 4\sqrt{1997}.$$

**B2** Gre za prizmo z osnovno ploskvijo  $O = 10^4 \text{ m}^2$  in višino  $0,25 \text{ m}$ .  
 $V = Ov = 0,25 \cdot 10^4 = 2500$ . Traktor obrne  $2500 \text{ m}^3$  zemlje.

**B3** Načrtamo podoben trikotnik s stranicama  $a = 4 \text{ cm}$  in  $b = 5 \text{ cm}$  ter kotom  $\angle C_1 = 60^\circ$ , nato pa simetrali dveh njegovih stranic. Presečišče simetral je središče očrtane krožnice. Nato načrtamo poltrake iz središča skozi oglišča podobnega trikotnika in krožnico s polmerom  $4,8 \text{ cm}$ . Presečišča poltrakov in krožnice so oglišča iskane trikotnika.



Aleksander Potočnik

## 16. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 116

### 7. razred

- Velikost osnovnega vzorca je  $1,0 \text{ cm} \times 1,0 \text{ cm}$ : beli del je velik  $0,7 \text{ cm} \times 0,7 \text{ cm}$ , ploščini sta torej  $0,49 \text{ cm}^2$  za beli in  $0,51 \text{ cm}^2$  za počrnjeni del. Razmerje belega dela in cele strani je  $0,49 \text{ cm}^2 / 1,0 \text{ cm}^2 = 49\%$ . Vzorec se na spodnji strani sicer ne izide, prispevek pa je manj kot  $0,5\%$  v korist počrnjenega dela, kar smemo zanemariti. Rezultat lahko dobimo tudi ali s preštevanjem črt, pri čemer ne smemo šteti križišč dvakrat, ali s preštevanjem belih kvadratkov.



2. Ko človek miruje, napravi srce približno 60 utripov na minuto ali 1 utrip na sekundo.

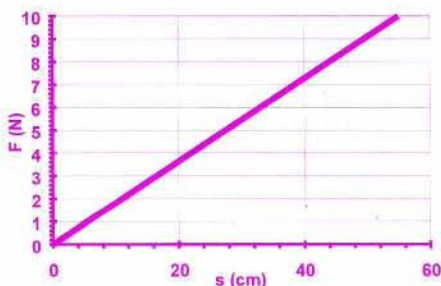
- a) Prostorninski pretok je  $\phi = V/t = 0,7 \text{ dl/s}$ .  
 b) V 60 letih je  $60 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$  sekund in srce napravi 1 900 000 000 utripov. Delo srca je zato 1 900 000 000 J. Breme 10 t ima težo 100 000 N. Iz enačbe  $A = F_g \cdot h$  izračunamo  $h = A/F_g = 19 \text{ km}$ .

3. a) Najprej ocenimo velikosti stičnih ploskev:  $4 \text{ dm}^2$  za Tineta in  $70 \text{ dm}^2$  za Marka. Pod Tinetom je dodatni tlak  $F_g/S_T = 500 \text{ N}/4 \text{ dm}^2 = 125 \text{ N}/0,01 \text{ m}^2 = 12,5 \text{ kPa}$ , pod Markom pa  $700 \text{ N}/70 \text{ dm}^2 = 1 \text{ kPa}$ . Blazina bo dvignila Marka, Tineta pa ne.

- b) Če naj blazina dvigne oba sošolca, moramo napihovati blazino z večjim tlakom od  $12,5 \text{ kPa}$ . Ker gre za oceno, je dober rezultat od 10 do  $15 \text{ kPa}$ .

4. a) Miha je meril razdaljo od mize navzgor. Dolžina neobremenjene vzmeti je  $1,0 \text{ m} - 60 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$ .

- b) V intervalu za  $x$  od 5 cm do 60 cm je teža po velikosti enaka sili vzmeti, raztezek vzmeti  $s = 60 \text{ cm} - x$ . Pomembni točki diagrama sta ( $s =$



$= 0, F_v = 0)$  in ( $s = 55 \text{ cm}, F_v = 10 \text{ N}$ ).

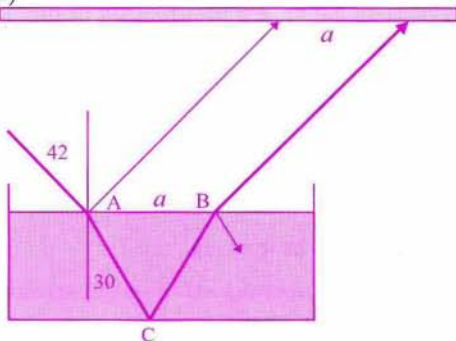
- c) Sila vzmeti se od  $F_g = 10 \text{ N}$  naprej ne spreminja več, saj utež stoji na mizi in je raztezek enak kot pri 10 N. Pri  $F_g = 15 \text{ N}$  je  $F_v = 10 \text{ N}$ , s silo 5 N pa deluje miza na utež.

5. Ker plavač miruje, je vsota tež epruvete in kroglice po velikosti enaka sili vzgona, torej teži izpodrinjene vode. Zato je tudi vsota mas epruvete in kroglice enaka masi izpodrinjene vode:  $m_e + m_k = \rho_v(V_e + V_k + V_z)$ , pri čemer se indeks  $e$  nanaša na epruveto,  $k$  na kroglico in  $z$  na zrak. Prostornina stekla epruvete  $V_e = m_e/\rho_s = 0,57 \text{ cm}^3$ , prostornina kroglice pa je  $V_k = m_k/\rho_s = 2,41 \text{ cm}^3$ . Iz prve enačbe izračunamo prostornino zraka  $V_z = (m_e + m_k)/\rho_v - V_e - V_k = 4,48 \text{ cm}^3$ . Višina zraka je enaka  $h = V_z/S = 4,48 \text{ cm}^3/1,00 \text{ cm}^2 \approx 4,5 \text{ cm}$ .

## 8. razred

1. a) Pretočeni naboj je  $e = It = 3,0 \text{ A} \cdot 3,0 \text{ s} = 9,0 \text{ As}$ . Naboj 1 As izloči  $1/3 \text{ mg}$  bakra, 9,0 As pa  $9,0 \cdot 1/3 \text{ mg} = 3,0 \text{ mg}$  bakra.  
 b) V prvem delu je tok stalen in računamo enako:  $3,0 \text{ A} \cdot 4,0 \text{ s} = 12 \text{ As}$ , kar izloči  $12 \cdot 1/3 \text{ mg} = 4,0 \text{ mg}$  bakra. V drugem delu računamo s povprečnim tokom. Iz diagrama razberemo, da je povprečje med 3,0 A in 0 A enako 1,5 A, čas pa  $8 \text{ s} - 4 \text{ s} = 4 \text{ s}$ . Pretočeni naboj je  $1,5 \text{ A} \cdot 4,0 \text{ s} = 6,0 \text{ As}$  in masa izločenega bakra 2,0 mg. Skupna masa izločenega bakra je torej  $4,0 \text{ mg} + 2,0 \text{ mg} = 6,0 \text{ mg}$ . Zadnji dve sekundi se ne izloči nič bakra.
2. a) Ker se skakalec giblje premo enakomerno, je vsota vseh sil nanj enaka nič. Sila zraka je zato nasprotno enaka teži, njena velikost je  $F_z = 800 \text{ N}$ , smer pa navpično navzgor.  
 b) Delo sile zraka je enako spremembi potencialne energije, saj je sprememba kinetične energije enaka nič. Ko skakalec preleti razdaljo  $d = 10 \text{ m}$  pod kotom  $45^\circ$  glede na vodoravnico, se mu višina zniža za višino  $h$ . Če napravimo skico, vidimo, da je  $h$  stranica,  $d$  pa diagonala kvadrata in velja  $d = h\sqrt{2}$ , od koder dobimo višinsko razliko  $h = d/\sqrt{2} = 7,1 \text{ m}$ . Sprememba potencialne energije je enaka  $\Delta W_p = -F_g \cdot h = -800 \text{ N} \cdot 7,1 \text{ m} = -5700 \text{ J}$ , zato je tudi delo zraka enako  $-5700 \text{ J}$ .

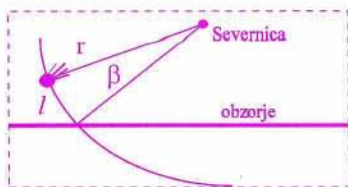
3. a)



b) Razdalja  $a$  na stropu je enaka razdalji med točkama A in B, to pa je stranica enakostraničnega trikotnika  $ABC$ . Iz znane višine trikotnika  $v = a\sqrt{3}/2$  izračunamo stranico  $a = 2v/\sqrt{3} = 58 \text{ cm}$ .

4. Iz poti in časa izračunamo pospešek  $a = 2s/t^2 = 1,5 \text{ m/s}^2$ . V Newtonov zakon vstavimo vsoto vseh sil  $F_{g2} - F_{g1} - F_{tr}$  in za maso sistema vsoto mas obeh uteži. Dobimo  $F_{g2} - F_{g1} - F_{tr} = (m_1 + m_2)a$  in od tod silo trenja  $F_t = 15 \text{ N} - 10 \text{ N} - 2,5 \text{ kg} \cdot 1,5 \text{ m/s}^2 = 1,25 \text{ N}$ . Nalogo lahko rešimo tudi z izrekom o kinetični in potencialni energiji.

5. Komet se navidezno giblje po lo-  
ku, kot kaže slika. S kotomerom  
izmerimo kot  $\beta$  in dobimo  $23^\circ$ .  
Čas izračunamo s sklepanjem: v  
24 urah je kot  $360^\circ$ , čas do zahoda  
 $t = 24 \text{ ur} \cdot 23^\circ / 360^\circ = 1,5 \text{ ure}$ .  
Če nimamo pri roki šestila in ko-  
tomeru si pomagamo z merjenjem  
razdalj. Poiščemo točko na obzorju, ki je za  $r$  oddaljena od Sever-  
nice. Izmerimo razdaljo  $l$  od kometa do te točke, sklepni račun pa  
je podoben: komet prepotuje  $2\pi r$  v 24 urah, izmerjeno razdaljo pa v  
času 1,5 ure.



Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

## IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE – Rešitve s str. 123

**I/1.** Iz  $\frac{m}{n} = \frac{m+k}{nk}$  sledi  $m = \frac{k}{k-1}$ . Ker je  $m$  naravno število, mora biti  $k$  enak 2, pa je tudi  $m = 2$ . Zaradi  $\frac{1}{3} < \frac{2}{n} < 1$  je  $n > 2$  in  $n < 6$ . V poštev pridejo torej pari (2, 3), (2, 4) in (2, 5).

**I/2.** Pomnožimo enačbo z  $abx(a+b+x)$ . Po preurejanju dobimo izraz  $x^2a + x^2b + xa^2 + xb^2 + a^2b + ab^2 + 2xab = 0$ , ki ga zlahka razstavimo:

$$\begin{aligned} x^2(a+b) + ab(a+b) + xa(a+b) + xb(a+b) &= \\ = (a+b)(x^2 + ab + xa + xb) &= \\ = (a+b)(x+a)(x+b) &= 0. \end{aligned}$$

Ker je  $a+b > 0$ , sta edini rešitvi  $x = -a$  in  $x = -b$ .

**I/3.** Naj bo  $M$  poljubna točka v notranjosti danega štirikotnika  $ABCD$ . S pomočjo trikotniške neenakosti ocenimo

$$\begin{aligned} |MA| + |MB| + |MC| + |MD| &= (|MA| + |MC|) + (|MB| + |MD|) \geq \\ &\geq |AC| + |BD|, \end{aligned}$$

kjer velja znak enakosti natanko tedaj, ko leži  $M$  na daljicah  $AC$  in  $BD$ . Iskana točka je torej presečišče diagonal.

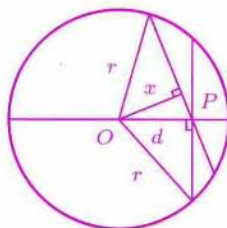
**I/4.** Označimo iskani znesek z  $x$ . Da bi Marko ne mogel na željen način poravnati stroškov, mora veljati  $1.15x - 1.05x < 100$  oz.  $x < 1000$ . Ker je  $1.15 \cdot 1000 = 1150$ , lahko plača Marko z napitnino vred največ 1100 tolarjev. Sledi:  $x \leq \frac{1100}{1.15} < 957$ . Ker pa je  $1.15 \cdot 956 = 1099.4$  in  $1.05 \cdot 956 = 1003.8$ , je največji celoštevilski znesek računa 956 tolarjev.

**II/1.** Očitno morata biti števili  $a$  in  $b$  enake parnosti. Če sta obe sodi, je leva stran enačbe deljiva s 4, desna pa ne. Torej sta lahko števili  $a$  in  $b$  kvečjemu lihi. Pišimo  $a = 2m + 1$ ,  $b = 2n + 1$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$  in poenostavimo dano enačbo:

$$m(m+1) + n(n+1) - 2c = 1.$$

Ta enačba pa nima celoštevilskih rešitev, saj sta števili  $m(m+1)$  in  $n(n+1)$  sodi.

**II/2.** Točka  $P$  naj bo od središča  $O$  krožnice s polmerom  $r$  oddaljena  $d$  enot. Narišimo poljubno tetivo skozi točko  $P$  in označimo njeno oddaljenost od središča krožnice z  $x$ . Potem je ta tetiva dolga  $2\sqrt{r^2 - x^2}$ . Ker je  $0 \leq x \leq d$ , je tetiva dolga vsaj  $2\sqrt{r^2 - d^2}$  in največ  $2r$ .



Najdaljša tetiva skozi  $P$  je torej premer z dolžino 30 enot, najkrajša pa je pravokotna na premer in meri 24 enot. Dolžine drugih tetiv so vsa realna števila med 24 in 30, vsako število nastopi dvakrat. Ker je med temi števili pet celih, je vseh tetiv s celoštevilsko dolžino 12 ( $= 2 \cdot 5 + 2$ ).

**II/3.** Označimo  $\vec{a} = \vec{AB}$  in  $\vec{b} = \vec{AD}$ . Potem je  $\vec{AF} = t(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a})$  za natančno določeni števili  $t, s \in (0, 1)$ . Sledi  $(\frac{t}{2} + s - 1)\vec{a} + (t - s)\vec{b} = \vec{0}$ . Ker sta vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  med seboj pravokotna, mora biti  $\frac{t}{2} + s - 1 = t - s = 0$ . Torej je  $t = s = \frac{2}{3}$  in iskano razmerje je  $t : (1 - t) = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$ .

**II/4.** Iz enačb izrazimo  $a = -\frac{19x^2 + 97}{x} = -\frac{97x^2 + 19}{x}$ . Od tod sledi  $19x^2 + 97 = 97x^2 + 19$  oziroma  $x^2 = 1$ . Enačbi imata torej skupno rešitev  $x = 1$  pri vrednosti parametra  $a = -116$ , skupno rešitev  $x = -1$  pa pri vrednosti parametra  $a = 116$ .

**III/1.** Označimo  $N(n) = n^8 - n^2$  in razcepimo  $n^8 - n^2 = n^2(n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$  ter  $72 = 8 \cdot 9$ . Najprej

bomo pokazali, da je število  $N(n)$  vedno deljivo z 9. Ločimo tri primere:

$$n \equiv 0 \pmod{3} \implies n^2 \equiv 0 \pmod{9}$$

$$n \equiv 1 \pmod{3} \implies n - 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ in } n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$n \equiv -1 \pmod{3} \implies n + 1 \equiv 0 \pmod{3} \text{ in } n^2 - n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

Torej je število  $n^8 - n^2$  res deljivo z 9 za vsako naravno število. Obravnavajmo še deljivost z 8. Če je  $n$  liho število, je število  $(n-1)(n+1)$  deljivo z 8. Če je število  $n$  deljivo s 4, je seveda  $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ . Če pa je  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , je število  $N(n)$  sicer deljivo s 4, vendar pa ni deljivo z 8.

Število  $n^8 - n^2$  torej ni deljivo z 72 natanko tedaj, ko da število  $n$  ostane 2 pri deljenju s 4.

**III/2.** Iz  $x^2 - 4x - 2 = 0$  izrazimo  $x = x^2 - 3x - 2$  in upoštevamo v prvi enačbi:

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - 2 - x = x^2 - 3x - 2 - x = x - x = 0.$$

Rešitvi enačbe  $x^2 - 4x - 2 = 0$  torej res zadoščata tudi prvi enačbi. Polinom  $x^2 - 4x - 2$  zato deli polinom

$$(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - 2 - x = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8$$

in lahko zapišemo

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8 = (x^2 - 4x - 2)(x^2 - 2x - 4).$$

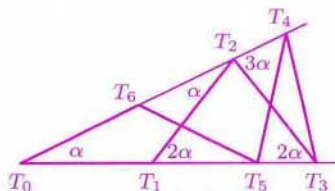
Z reševanjem kvadratnih enačb  $x^2 - 4x - 2 = 0$  in  $x^2 - 2x - 4 = 0$  dobimo vse rešitve:  $x_1 = 2 - \sqrt{6}$ ,  $x_2 = 2 + \sqrt{6}$ ,  $x_3 = 1 - \sqrt{5}$ ,  $x_4 = 1 + \sqrt{5}$ .

**III/3.** Označimo  $|AC| = e$ ,  $|BD| = f$ ,  $\alpha = \sphericalangle DAB$  in  $\beta = \sphericalangle ABC$ . Ker je  $ABCD$  tetivni štirikotnik, sta kota  $BCA$  in  $BDA$  obodna kota nad istim lokom in sta zato med seboj enaka. Označimo  $\gamma = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$  in z  $a$  stranico  $AB$ . Po sinusnem izreku za trikotnika  $ABC$  in  $ABD$  je  $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{e}{a}$  in  $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{f}{a}$ . Torej je  $\sin \gamma = \frac{a}{e} \sin \beta = \frac{a}{f} \sin \alpha$  in zato  $e \sin \alpha = f \sin \beta$ , kar je bilo treba dokazati.

**III/4.** Označimo točke, kot kaže skica. Zaradi simetrije bolhinih skokov je  $|T_0T_3| = |T_0T_4|$  oziroma

$$\sphericalangle T_0T_3T_4 = \sphericalangle T_0T_4T_3.$$

Trikotnik  $T_0T_1T_2$  je enakokrak, zato je



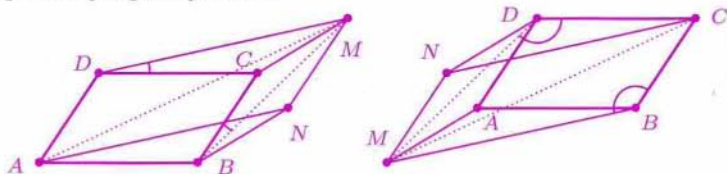
$\sphericalangle T_2 T_1 T_3 = 2\alpha$ . Tudi trikotnik  $T_1 T_2 T_3$  je enakokrak, zato je  $\sphericalangle T_0 T_3 T_2 = 2\alpha$ . Kot  $\sphericalangle T_4 T_2 T_3$  je zunanji kot trikotnika  $T_0 T_2 T_3$ , zato meri  $3\alpha$ . Zaradi enakokrakosti trikotnika  $T_2 T_3 T_4$  je tudi  $\sphericalangle T_2 T_4 T_3 = 3\alpha$ . Razmislimo pa smo že, da je ta kot enak kotu  $\sphericalangle T_0 T_3 T_4$ , zato je vsota kotov v trikotniku  $T_0 T_3 T_4$  enaka  $\alpha + 3\alpha + 3\alpha = \pi$ , od koder sledi  $\alpha = \frac{\pi}{7}$ .

**IV/1.** Ker se da število zapisati kot vsota devetih oziroma enajstih zaporednih naravnih števil, je enako devetkratniku petega oziroma enajstkratniku šestega števila v ustreznem zaporedju. Ker pa se da število zapisati tudi kot vsota desetih zaporednih naravnih števil, je enako petkratniku vsote petega in šestega števila v tem zaporedju. Najmanjše naravno število, ki je deljivo s 5, 9 in 11, je 495. Prepričamo se, da 495 zadošča pogojem naloge:  $495 = 51 + 52 + \dots + 59 = 45 + 46 + \dots + 54 = 40 + 41 + \dots + 50$ .

**IV/2.** Člen  $\binom{m}{m}$  zamenjamo z  $\binom{m+1}{m+1}$  in s pomočjo Pascalove identitete  $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$  izračunamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} &= \left( \binom{m+1}{m+1} + \binom{m+1}{m} \right) + \binom{m+2}{m} + \binom{m+3}{m} + \dots + \binom{m+n}{m} = \\ &= \left( \binom{m+2}{m+1} + \binom{m+2}{m} \right) + \binom{m+3}{m} + \dots + \binom{m+n}{m} = \\ &= \left( \binom{m+3}{m+1} + \binom{m+3}{m} \right) + \dots + \binom{m+n}{m} = \\ &= \dots = \binom{m+n}{m+1} + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}. \end{aligned}$$

**IV/3.** Glede na lego točke  $M$  ločimo dva bistveno različna primera, ki ju prikazuje spodnja slika.



Oglejmo si najprej dokaz v prvem primeru. Izberimo tako točko  $N$ , da bo  $BNMC$  paralelogram. Potem je

$$\sphericalangle BMN = \sphericalangle MBC = \sphericalangle CDM = \sphericalangle BAN,$$

saj sta trikotnika  $DCM$  in  $ABN$  skladna. Štirikotnik  $ABNM$  je zato tetivni in

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle ANB = \sphericalangle DMC$$

zaradi skladnosti trikotnikov  $DCM$  in  $ABN$ . Dokaz sklenimo z ugotovitvijo

$$\sphericalangle DMA = \sphericalangle DMC - \sphericalangle AMC = \sphericalangle AMB - \sphericalangle AMC = \sphericalangle CMB.$$

Če pri kotu  $\sphericalangle AMC$  upoštevamo tudi orientacijo, ni potrebno posebej obravnavati primera, ko leži točka  $C$  v trikotniku  $AMD$ .

Za dokaz v drugem primeru pa si pomagamo s prvim primerom. Zaradi  $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MDA$  po že dokazanem velja  $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC$  in analogno kot v prvem primeru lahko tudi sedaj sklepamo, da je zato  $\sphericalangle CMB = \sphericalangle DMA$ .

**IV/4.** Kocko postavimo v prvi oktant koordinatnega sistema tako, da ima telesna diagonala eno krajišče v koordinatnem izhodišču in drugo v točki  $(3, 3, 3)$ . Ravnina skozi središče kocke, pravokotna na to telesno diagonalo, je podana z enačbo  $x + y + z = \frac{9}{2}$ . Telesne diagonale enotskih kockic, vzporedne s to diagonalo, imajo krajišča v točkah  $(i, j, k)$  in  $(i+1, j+1, k+1)$ , kjer so  $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ . Ravnina seka enotsko kockico, če je  $i + j + k < \frac{9}{2} < i + j + k + 3$ . Hitro se prepričamo, da le osmih kockic ravnina ne seka, saj pogoj ni izpolnjen le za

$$(i, j, k) \in \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \\ (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}.$$

Ravnina torej preseka 19 enotskih kockic.

Matjaž Željko

## REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA IZ FIZIKE ZA SREDNJEŠOLCE V ŠOLSKEM LETU 1996/97

Objavljamo rešitve nalog s predtekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 22. marca 1997. Besedila nalog smo objavili v letošnji 2. številki Preseka.

### Skupina A

1. Nalogo najbolj enostavno rešimo, če se postavimo na stališče drugega voznika: zanj lонец na začetku miruje, nato pa se giblje pospešeno proti njemu. Seveda pa je nalogo mogoče rešiti tudi drugače.

- a) Podatki:  $t = 4,0$  s;  $a = 4,0$  m/s<sup>2</sup>;  $v_0 = 72$  km/h. Pot, ki jo napravi lonec za drugega voznika, je kar enaka razdalji med avtomobiloma:  $s = \frac{1}{2}at^2 = 32$  m; na koncu ima relativno hitrost  $v = at = 58$  km/h, kar pomeni, da se glede na cesto še ni ustavil.
- b) Podatki:  $s = 32,0$  m;  $a = 12,0$  m/s<sup>2</sup>;  $v_0 = 72$  km/h. Lonec se glede na cesto ustavi, predno zadene drugega voznika. Tedaj glede na drugega voznika doseže hitrost  $v_0$ . Med ustavljanjem naredi pot  $s_1 = v_0^2/2a = 16,7$  m. Preostalih  $\Delta s = 15,3$  m se giblje s hitrostjo  $v_0$  in zadene drugega voznika čez  $\Delta s/v_0$ , skupaj

$$t = \frac{v_0}{a} + \frac{\Delta s}{v_0} = 2,4 \text{ s}.$$

2. Podatki:  $F_1 = 90$  N.

Silo  $F_3$  razstavimo:  $F_3 = F_5 + F_6$ , tako da del bremena  $F_5$  visi na spodnji tehtnici, del  $F_6$  pa na desni (glej sliko pri besedilu nalog). Napišimo ravnovesne pogoje za

spodnjo tehtnico:  $5F_2 = 4F_5$ ,

levo tehtnico:  $F_1 = F_2 + F_5 = F_2 + \frac{5}{4}F_2 = \frac{9}{4}F_2$ ,  $F_2 = \frac{4}{9}F_1 = 40$  N in  $F_5 = 50$  N,

desno tehtnico:  $2F_6 = F_4$  in

za zgornjo tehtnico:  $2(F_1 + F_2 + F_5) = 3(F_6 + F_4)$ .

V zadnjo enačbo vstavimo ustrezne izraze iz zgornjih zvez in dobimo  $4F_1 = 3\frac{3}{2}F_4$ ,  $F_4 = \frac{8}{9}F_1 = 80$  N,  $F_6 = 40$  N in  $F_3 = 90$  N.

3. Podatki:  $r = 1,5$  m;  $l = 24$  m;  $F_1 = 2,6$  kN;  $F_L = 300$  kN;  $\sigma = 10$  kN/m<sup>3</sup>.

Vzgon uravnovesi težo ladje  $F_L$  in težo  $N$  zabojev; ko sega voda do palube, je pod vodo ravno polovica valja in velja

$$\frac{1}{2}\pi r^2 l \sigma = F_L + NF_1, \quad N \leq \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 l \sigma - F_L}{F_1} = 210.$$

Preveriti pa moramo, če težišče ne sega nad palubo. Za težišče prazne ladje dobimo

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{F_{\text{paluba}} \cdot 0 + F_{\text{plašč}} \cdot \frac{2r}{\pi} + 2F_{\text{stranica}} \cdot \frac{4r}{3\pi}}{F_{\text{paluba}} + F_{\text{plašč}} + 2F_{\text{stranica}}} = \\ &= \frac{2r(3l + 2r)}{3[l(2 + \pi) + \pi r]} = 0,585 \text{ m}, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je teža ploskve sorazmerna z njeno ploščino. Za težišče ladje in zabojev pa velja

$$z^* = \frac{z_0 F_L - \frac{1}{2} h N F_1}{F_L + N F_1}.$$

- a)  $h = 100$  cm: V tem primeru je težišče *nad* palubo in ladja ne plava stabilno. Število zabojev, pri katerem je plavanje še stabilno, dobimo iz zahteve  $z^* \geq 0$ ,  $N \leq 2z_0 F_L / h F_1 = 135$ .
- b)  $h = 60$  cm: V tem primeru je  $z^* = 13$  cm, torej pod palubo, in plavanje je stabilno. Največje število zabojev je torej 210.<sup>1</sup>

### Skupina B

1. Podatki:  $v = 200$  km/h;  $m = 7000$  kg;  $t = 1,0$  s;  $k = 0,60$ ;  $S = 24$  m<sup>2</sup>;  $C = 1,1$ ;  $\rho = 1,3$  kg/m<sup>3</sup>.

Sili vetra  $F_u = \frac{1}{2} \rho C S v^2 = 53$  kN nasprotuje trenje  $F_t = kmg = 41$  kN, razlika sil  $F = F_u - F_t = 12$  kN povzroči, da se tovornjak giblje v prečni smeri s pospeškom  $a = F/m = 1,7$  m/s<sup>2</sup>. V času  $t$  se premakne za  $s = \frac{1}{2} at^2 = 0,85$  m in dobi hitrost  $v = at = 1,7$  m/s.

Ko sila vetra preneha, gibanje tovornjaka v prečni smeri zaustavlja trenje s pojemkom  $a' = kg = 5,9$  m/s<sup>2</sup>; dokler se v prečni smeri ne zaustavi, napravi v tej smeri še pot  $s' = v^2/2a' = 0,25$  m. Skupen premik v prečni smeri je torej 1,1 m.

2. Podatki:  $v = 14$  m/s;  $h = 2,0$  m;  $k = 0,80$ .

Ko se opeka dotakne tal, deluje podlaga nanjo s tolikšno silo, da se v (zelo kratkem) času  $\Delta t$  zaustavi:  $F_p \Delta t = mv_{\perp} = m\sqrt{2gh}$ . Sunek trenja,  $F_t \Delta t = kF_p \Delta t$ , zmanjša začetno gibalno količino opeke v vodoravni smeri

$$m(v - v') = F_t \Delta t = k \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} \Delta t, \quad v' = v - k\sqrt{2gh} = 9,0 \text{ m/s}.$$

Trenje se po tem zmanjša na vrednost  $kmg$  in opeka se ustavlja s pojemkom  $a = kg = 7,8$  m/s<sup>2</sup>. Ustavi se na poti  $s = v'^2/2a = 5,2$  m.

3. Podatki:  $M = 2,0$  kg;  $m = 1,0$  kg;  $k = 0,70$ ;  $h = 0,60$  m.

Ko telo drsi po klancu, velja ohranitev vsote potencialne in kinetične energije; hitrost na koncu, tik preden zdrsne na voziček, dobimo iz  $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$ ,  $v_0 = \sqrt{2gh} = 3,4$  m/s.

<sup>1</sup> Pri opisanem načinu je reševanje drugega primera trivialno; možen pa je tudi postopek, ko najprej izračunamo  $N$  iz drugega pogoja, in v tem primeru vprašanje pod b) ni več tako enostavno.

Pri drsenju po vozičku se ohranja skupna gibalna količina vozička in telesa, in ko se telo glede na voziček zaustavi, se oba gibljeta s hitrostjo  $v$ :  $(m + M)v = v_0m$ ,  $v = mv_0/(m + M)$ .

Kinetična energija telesa in vozička se zmanjša zaradi dela trenja na poti  $s$

$$mgks = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)v^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \frac{M}{m + M},$$

od koder dobimo

$$s = \frac{mgh}{mgk} \cdot \frac{M}{m + M} = \frac{h}{k} \cdot \frac{M}{m + M} = 57 \text{ cm}.$$

4. Podatki:  $a = g/2$ .

Najprej predpostavimo, da voda ves čas pokriva dno posode. Predpostavko moramo na koncu preveriti; če ne velja, moramo ubrati drugo pot.

Gladina vode se postavi pod kotom  $\varphi$ , tako da je  $\tan \varphi = a/g = \frac{1}{2}$ . Ker je bat lahek, na obliko gladine ne vpliva. Premik dobimo iz zahteve, da volumen vode v vsakem delu posode ostane nespremenjen.

Dolžino (prvega) dela posode, kjer voda sega višje, označimo z  $2x$ , dolžina drugega dela je potem  $l - 2x$ . Višino vode na sredini drugega dela označimo z  $y$ . Gladina na sredini prvega dela sega za  $l/4$  višje, saj je razdalja med sredinama  $l/2$ . S  $h$  označimo višino gladine, predno se prične posoda pospeševati. Zahtevamo, da se volumen vode v prvem in drugem delu ne spremeni:

$$2x \left( y + \frac{l}{4} \right) = \frac{lh}{2}, \quad (l - 2x)y = \frac{lh}{2}.$$

Izrazimo  $y$  in dobimo kvadratno enačbo za  $x$ :

$$2x^2 - (l + 4h)x + hl = 0$$

s smiselno rešitvijo  $x = h + l/4 - \sqrt{h^2 + (l/4)^2}$ . Premik bata je enak  $s = \frac{1}{2}l - 2x$  in za  $h = l/4$  dobimo:  $s = \frac{1}{2}l(\sqrt{2} - 1) \approx 0,2l$ .

Gladina v drugem delu ravno pokrije celotno dno.

### Skupina C

1. Podatki:  $V_1 = 0,10 \text{ l}$ ;  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\bar{v} = 10 \text{ cm/s}$ ;  $F = 5 \text{ N}$ ;  $p_2 = 100 \text{ bar}$ ;  $h = 100 \text{ cm}$ ;  $r = 10 \text{ cm}$ ;  $p_0 = 1,0 \text{ bar}$ ;  $M = 20 \text{ kg}$ ;  $T_3 = 37^\circ\text{C}$ ;  $c_v = 620 \text{ J/kgK}$ .

Delo, ki ga dovede Aladin, se porabi za povečanje notranje energije plina:  $A = Ft\bar{v} = mc_v(T_2 - T_1)$ , če je  $T_2$  končna temperatura plina, dokler je še v posodi.

Maso plina dobimo iz splošne plinske enačbe, zapisane za končno stanje plina

$$m = \frac{M}{R} \cdot \frac{p_0 V_3}{T_3}, \quad V_3 = \frac{\pi r^2 h}{3} + V_1 = 0,0105 \text{ m}^3, \quad m = 8,2 \text{ g}.$$

Iz splošne plinske enačbe izračunamo še  $T_2 = T_3 p_2 V_1 / (p_0 V_3) = 296 \text{ K}$ . Za čas drgnjenja dobimo

$$t = \frac{mc_v(T_2 - T_1)}{F\bar{v}} = \frac{c_v M}{R F \bar{v}} \left( p_2 V_1 - p_0 V_3 \frac{T_1}{T_3} \right) = 30 \text{ s}.$$

2. Podatki:  $U_1 = \frac{4}{5}U_0$ ;  $R_2 = 2R_1$ .  
Pri sklenjenem stikalu velja

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{R_1}{R_n + R_1},$$

če z  $R_n$  označimo notranji upor izvira, z  $R_1$  pa notranji upor prvega voltmetra.

Pri prekinjenem stikalu velja

$$\frac{U'_1 + U'_2}{U_0} = \frac{R_1 + R_2}{R_n + R_1 + R_2} = \frac{3R_1}{R_n + 3R_1} = \frac{3U'_1}{U_0},$$

če z  $R_2$  označimo notranji upor drugega voltmetra. Drugi enačaj sledi zaradi  $R_2 = 2R_1$ , tretji iz  $U'_2 = 2U'_1$ , saj sta napetosti v razmerju uporov. Iz prve enačbe dobimo  $R_n = R_1/4$  in končno iz druge:  $U'_1/U_0 = 4/13 \approx 0,31$  in  $U'_2/U_0 = 8/13 \approx 0,62$ .

3. Podatki:  $m = 10 \text{ kg}$ ;  $e = 100 \text{ mA}$ s;  $v = 10 \text{ km/s}$ ;  $a = 100 \text{ g}$ ;  $\varphi = 30^\circ$ .  
Izstrelek zadane prvo ladjo ravno v oglišču enakostraničnega trikotnika, katerega drugi dve oglišči sta začetna lega ladje in središče kroga, po katerem kroži izstrelek v magnetnem polju. Ladja do srečanja napravi pot, ki je enaka radiju kroženja  $r$ , v času  $t = \sqrt{2r/a}$ , izstrelek pa lok, ki pripada kotu  $60^\circ$ ,  $s = \pi r/3$ , v času  $t = \pi r/(3v)$ , saj je velikost njegove hitrosti konstantna. Izraz za radij  $r$  dobimo iz zahteve, da sta časa enaka:  $r = 18v/(\pi^2 a)$ . Za kroženje v magnetnem polju velja  $erB = mv$  in iz obeh zadnjih enačb dobimo

$$B = \frac{\pi^2 am}{18ev} = 5,4 \text{ T}.$$

Pri večjih poljih je tudi mogoče doseči, da se srečata, a pri tem izstrelek nekajkrat zakroži.

4. Podatki:  $m = 3,3 \cdot 10^{-27}$  kg;  $e' = 3,2 \cdot 10^{-19}$  As;  $U = 1,0$  kV;  $l = 8,0$  cm;  $S = 9,0$  dm<sup>2</sup>;  $t = 1,5$   $\mu$ s. Predznak naboja na ploščah je negativen, saj se le v tem primeru delec alfa lahko vrne v začetno stanje.

- a) Znotraj kondenzatorja se delec alfa giblje s pospeškom  $a_n = e'E_n/m$ ,  $E_n = U/l$ , zunaj pa s pojemkom, ki je po velikosti enak  $a_z = e'E_z/m$ ,  $E_z = e/\varepsilon_0 S$ . Z  $e$  smo označili velikost naboja na plošči kondenzatorja. Za čas pospeševanja  $t_n$  dobimo

$$\frac{l}{2} = \frac{a_n t_n^2}{2}, \quad t_n = \sqrt{\frac{ml}{e'E_n}} = \sqrt{\frac{m}{e'U}} l,$$

za čas zaviranja  $t_z$  pa

$$v_1 = a_z t_z, \quad t_z = \frac{v_1}{a_z} = \frac{\sqrt{a_n l}}{a_z},$$

kjer je  $v_1$  hitrost, ki jo ima delec alfa, ko je ravno v luknjici. Dobimo

$$t_z = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \sqrt{\frac{m}{e'}} \sqrt{U}.$$

Delec alfa se vrne v začetno lego po času  $t = 2(t_n + t_z)$ , tako da iz

$$t = 2\sqrt{\frac{m}{e'}} \left( \frac{l}{\sqrt{U}} + \frac{\varepsilon_0 S}{e} \sqrt{U} \right)$$

dobimo za velikost naboja

$$e = \frac{\varepsilon_0 S U}{\frac{t}{2} \sqrt{\frac{e'U}{m}} - l} = 5,2 \cdot 10^{-9} \text{ As}.$$

- b) Upoštevajmo  $v_1 = \sqrt{a_n l} = \sqrt{2a_z s}$ , kjer je  $s$  največja oddaljenost od plošče, ki jo delec alfa prečka, pa dobimo še

$$s = \frac{a_n}{2a_z} l = \frac{E_n}{2E_z} = \frac{\varepsilon_0 S}{2e} U = 7,7 \text{ cm}.$$

## Skupina D

1. Podatki:  $a = 10 \text{ m}$ ;  $B = 2,0 \text{ T}$ ;  $I = 4,0 \text{ A}$ ;  $m = 60 \text{ g}$ .

- a) Tok mora teči v smeri urinega kazalca.  
 b) Newtonov zakon za zanko napišemo kot  $J\alpha = M$ . Za kotni pospešek  $\alpha$  vstavimo izraz za harmonično nihanje  $\alpha = -\omega^2\varphi$ ; pri računu vztrajnostnega momenta zanke  $J$  upoštevamo, da je sestavljena iz dveh palic z dolžino  $2a$  in maso  $m/3$ , vrtljivih okoli krajišča, in dveh palic z maso  $m/3$ , ki ju obravnavamo kot točkasti telesi, oddaljeni za  $a$  oziroma  $2a$  od osi vrtenja

$$J = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{3} (2a)^2 + \frac{m}{6} a^2 + \frac{m}{6} (2a)^2 = \frac{31}{18} ma^2.$$

K navoru prispevata magnetni sili na zgornjo in spodnjo vodoravno prečko, od katerih ima vsaka velikost  $F_m = IaB$ , a nasprotno smer, in teža  $F_g = mg$ , ki prijemlje v težišču zanke  $y^* = 7a/6$ :

$$M = -[(2aF_m - aF_m) - F_g y^*] \sin \varphi = -\left[a^2 IB - \frac{7}{6} mga\right] \varphi.$$

V zadnjem koraku upoštevamo, da za majhna nihanja velja  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Dobimo

$$\omega = \sqrt{\frac{18aIB - 21mg}{31ma}} = 8,4 \text{ s}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,75 \text{ s}.$$

2. Podatki:  $p_0 = 0,01 \text{ Pa}$ ;  $T = 300 \text{ K}$ ;  $d_0 = 2,0 \text{ cm}$ ;  $E_0 = 20 \text{ kV/m}$ ;  $\kappa = 1,4$ .

- a) Če napetost počasi povečujemo, naraščajočo silo med ploščama kondenzatorja uravnovesi sila zaradi povečanja tlaka plina med ploščama:

$$(p - p_0)S = \frac{eE}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}, \quad p = p_0 + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2} = p_0 + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Do preboja pride, ko doseže  $E$  vrednost  $E_0$ ; tedaj je  $p_1 = 1,18p_0$ . Ker je stiskanje počasno, je sprememba izotermna in velja  $p_0 d_0 = p_1 d_1$ . Ko pride do preboja, je razdalja med ploščama  $d_1 = p_0 d_0 / p_1 = 1,7 \text{ cm}$ .

- b) Ko pride do preboja, se plin hitro segreje pri konstantnem volumnu. Iz okolice ne sprejme nič toplote in ne opravi nič dela,

tako da se energija električnega polja v celoti spremeni v notranjo energijo:

$$mc_v \Delta T = \frac{1}{2} C U^2, \quad mc_v = m \frac{R}{M} \cdot \frac{1}{\kappa - 1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \cdot \frac{1}{\kappa - 1}, \quad V_0 = d_0 S.$$

Za povečanje temperature dobimo

$$\Delta T = \frac{\varepsilon_0 (\kappa - 1) T_0}{2 p_1} \left( \frac{U}{d_1} \right)^2 = (\kappa - 1) \frac{p_1 - p_0}{p_1} T_0 = 18 \text{ K}$$

in  $T_1 = 45^\circ \text{C}$ .

3. Podatki:  $d = 12 \text{ mm}$ ;  $k = 40 \mu\text{V/K}$ .

a) Denimo, da na prvo ploščo vpada gostota toka  $j_1$ , na drugo pa  $j_2$ ; plošči imata temperaturi  $T_1$  in  $T_2$ . Če sta njuni površini  $S$ , v stacionarnem stanju velja za posamezni plošči

$$j_1 S + j_\lambda S + j_2^* S = j_1^* 2S \quad \text{in} \quad j_2 S - j_\lambda S + j_1^* S = j_2^* 2S.$$

Enačbi odštejemo in preuredimo:  $j_2 - j_1 = 3(j_2^* - j_1^*) + 2j_\lambda$ . Upoštevajmo še  $j_{1,2} = \sigma T_{1,2}^4$  in  $j_\lambda = \lambda(T_2 - T_1)/d$ , kjer je  $d$  razmik med ploščama, spotoma pa še  $T_2^4 - T_1^4 = (T_2 - T_1)(T_2^3 + T_2^2 T_1 + T_2 T_1^2 + T_1^3) \approx \Delta T \cdot 4T^3$ , kjer je  $T$  sobna temperatura. Končno dobimo

$$j_2 - j_1 = 2(6\sigma T^3 + \frac{\lambda}{d}) \delta T,$$

ob  $U = k \Delta T$  pa

$$j_2 - j_1 = 2(6\sigma T^3 + \frac{\lambda}{d}) \frac{U}{k},$$

tako da je iskani sorazmernostni koeficient  $5,4 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2 \text{V}$ .

- b) Sprva je  $\Delta j = P/4\pi r^2$ , ko radiometer dvignemo pa

$$\Delta j' = \frac{P}{4\pi(r/\cos\theta)^2} \cos\theta,$$

tako da dobimo  $\cos^3\theta = \frac{1}{2}$  in  $h = r \tan\theta = 46 \text{ cm}$ .

Bojan Golli

## GRAJSKI LABIRINT

Ali in Če, brata – dvojčka, oba slavna detektiva, že tri dni zaman iščeta mucu Lizo, ki je pobegnila teti Amaliji. Uboga teta je že čisto obupana. Vendar pa sta detektiva končno le prišla muci na sled. Skrila se je v nadvse skrivnostnem gradu kraljice Logike. Sedaj mirno sedi v zadnji sobi tega gradu in prede.

Pomaga detektivoma skozi labirint grajskih sob do muce. Prvi detektiv vstopi v sobo številka 1, drugi pa v sobo številka 3. Vzemi v vsako roko po en svinčnik in ju postavi na sobi, kjer sta detektiva, da ju po poti ne boš izgubil. Tvoja naloga je, da se pri vsaki potezi odločiš, kateri detektiv (in z njim svinčnik) bo napredoval do naslednje sobe. Ko si enega izbral, se ravnaj po navodilu v tisti sobi.

**Primer:** Recimo, da si se na začetku odločil za detektiva, ki je v sobi 1. Tam je vprašanje: "ALI JE DRUGI DETEKTIV V RUMENI SOBI?". Odgovor je "DA", saj je soba številka 3 rumena. Torej gre izbrani detektiv iz sobe 1 po hodniku, označenem z "DA", v sobo 7. Sedaj se moraš ponovno odločiti, kateri od obeh detektivov bo naredil naslednjo potezo: tisti, ki je še vedno v sobi 3, ali ta, ki je sedaj v sobi 7... In tako naprej, dokler ne pripelješ enega od detektivov (torej enega od svinčnikov) v zadnjo sobo z napisom "CILJ". Tam prede muca Liza.

Brž do cilja, da ne bo teta Amalija predolgo čakala na svojo mucu. Pa veliko zabave na poti po labirintu.

(P.S.: Ali znaš priti do cilja v manj kot desetih potezah?)

*Iztok Arčon*

### PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

25. letnik, šolsko leto 1997/98, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Miran Černe (glavni urednik), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovalništvo), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).  
Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1997/98 je za posamezne naročnike **1.620 SIT**, za skupinska naročila šol **1.350 SIT**, posamezna številka **324 SIT**, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

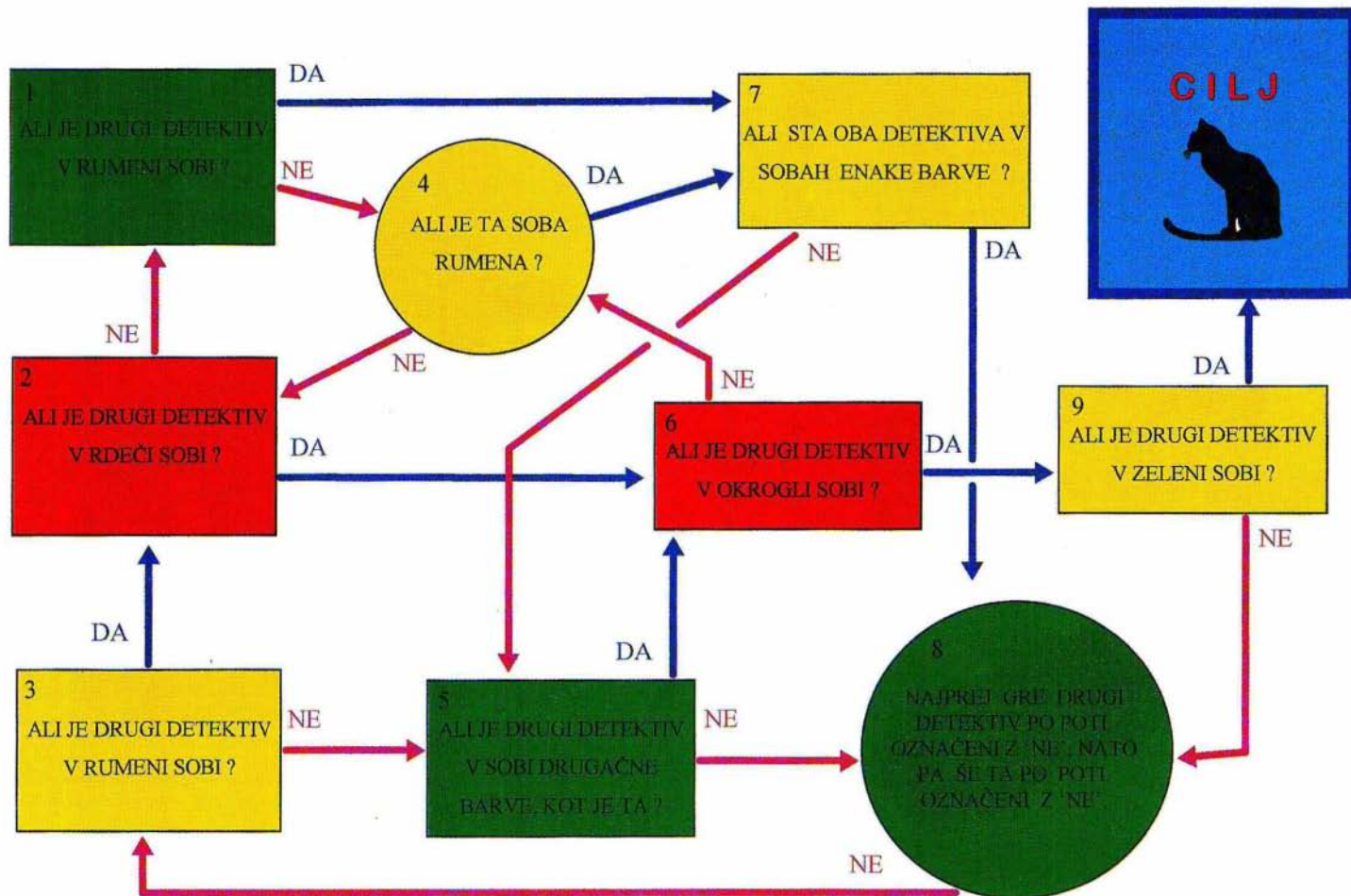
List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1335

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana





Slovenska olimpijska ekipa iz fizike pred uro v parku v bližini Niagarskih slapov. Z leve proti desni: Miloš Jeftič, Gašper Tkačik, Igor Verstovšek, Matej Marinč, Jure Bajc, Ciril Dominko, Matej Horvat (foto Ciril Dominko).



Slovenska matematična olimpijska ekipa. Z leve proti desni stojijo: Matjaž Željko, Matjaž Konvalinka, Matjaž Titan, Darjo Felda; čepijo: Tadej Starčič, Andrej Vodopivec, Matija Mazi, Martin Milanič (foto Matjaž Željko).