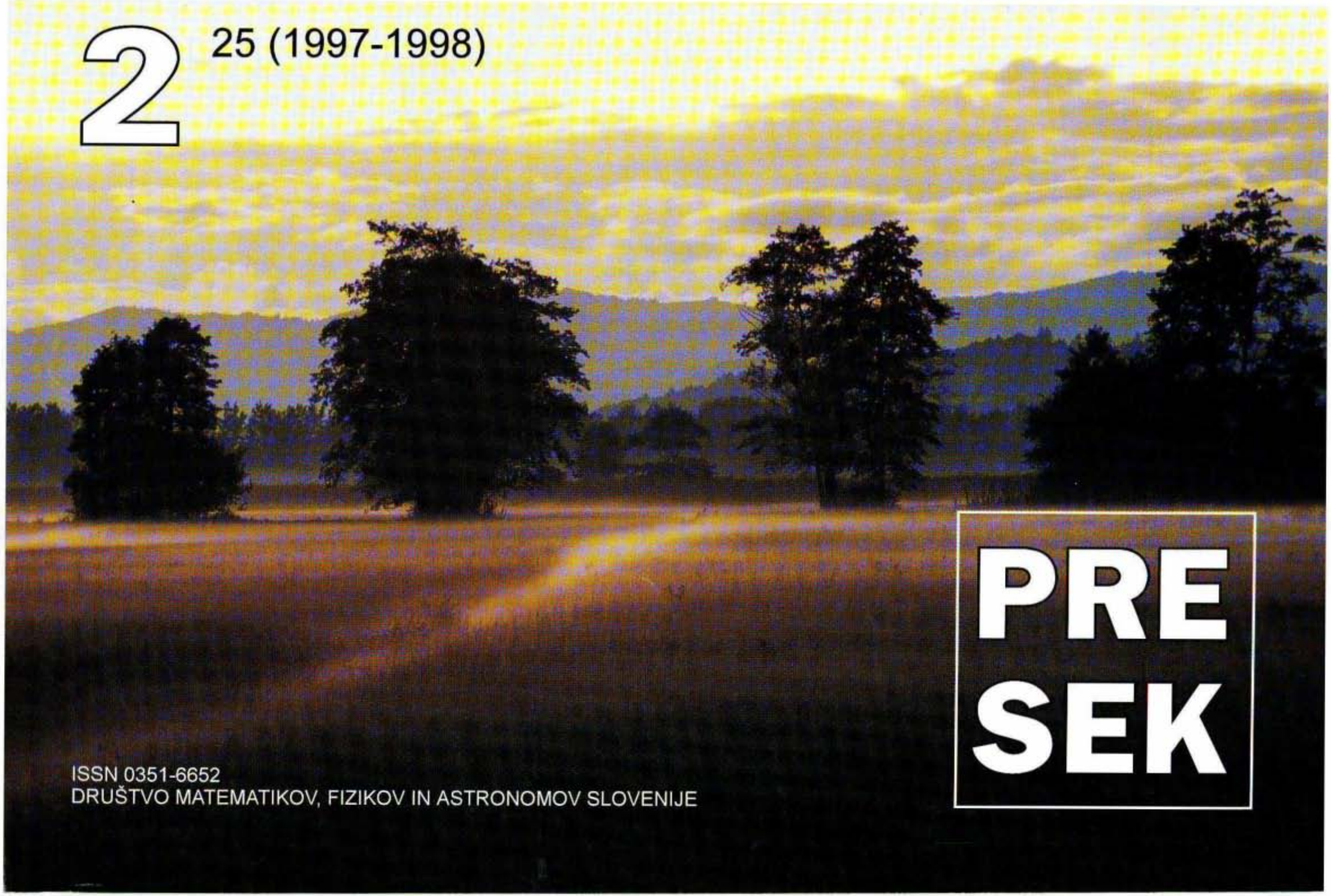

2
25 (1997-1998)
PRESEK
ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, leto 1997/98, številka 2, strani 65–128

VSEBINA

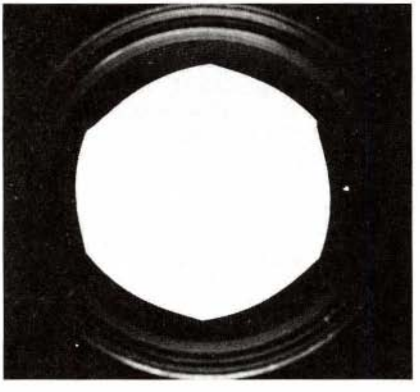
FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA, 2. del – ZASLONKA IN EKSPOZICIJA

Zaslonka

Človeško oko lahko deloma uravnava količino svetlobe, ki vpada vanj. Zenica se razširi, kadar je temno, in zoži, kadar je zelo svetlo. Enako nalogo v fotografskem objektivu opravlja *zaslonka*. To je mehanizem, sestavljen iz pet ali več *lamel*, s katerimi lahko omejimo količino svetlobe, ki prihaja skozi objektiv (sliki 1 in 2).

Če beseda nanese na zaslonko, smo vsaj pri klasičnih aparatih takoj pri zaporedju skrivnostnih *zaslonskih števil*:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1{\cdot}4 & 2 & 2{\cdot}8 & 4 & 5{\cdot}6 & 8 \\ 11 & 16 & 22 & 32 & 45 & \dots & \end{array} \tag{1}$$



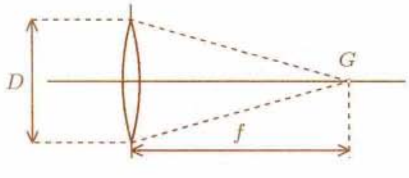
Slika 1. Zaslonka zaprta na zaslonsko število 4 (na objektivu z najmanjšim zaslonskim številom 2·8).

Slika 2. Zaslonka zaprta na zaslonsko število 22.

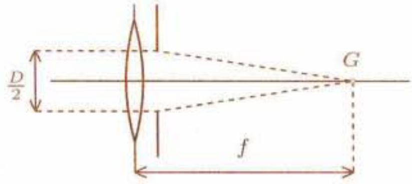
Matematik hitro ugotovi, da naslednje število v zaporedju dobimo tako, da prejšnje pomnožimo s $\sqrt{2}$ in zaokrožimo.

Kaj so zaslonska števila? Fotografski objektiv nadomestimo z eno samo lečo. *Zaslonsko število* z je goriščna razdalja (goriščnica) f leče, deljena s premerom D (odprtine) leče (slika 3):

$$z = \frac{f}{D}\,.$$



Slika 3.



Slika 4.

Angleški izraz za zaslonsko število je *f-number* (fNo). Leča s premerom 5 cm in goriščno razdaljo 20 cm ima zaslonsko število 4.

Če premer odprtine z zaslonko zmanjšamo na polovico prejšnjega premera (v našem primeru na 2'5 cm), dobimo zaslonsko število 8. Ploščina zmanjšane odprtine je le četrtina ploščine prvotne odprtine (slika 4). Skozi tako odprtino prihaja le četrtina prejšnjega svetlobnega toka. Torej pri zaslonskem številu 8 prihaja skozi objektiv le četrtina svetlobe, ki bi prihajala skozi objektiv pri zaslonskem številu 4.

Če hočemo leči s premerom D prehod svetlobe zmanjšati z zaslonko na polovico, mora premer odprtine znašati $D : \sqrt{2}$, kot se takoj prepričamo. Ploščina odprtine je namreč sorazmerna kvadratu premera in torej polovica prvotne ploščine. Zato je novo zaslonsko število

$$z' = \frac{f}{D/\sqrt{2}} = \frac{f}{D}\sqrt{2} = z\sqrt{2}\,.$$

Če torej zaslonsko število pomnožimo s $\sqrt{2}$, se ploščina odprtine razpolovi. Vsako naslednje število v zaporedju (1) torej pomeni razpolovitev količine svetlobe, ki prihaja skozi objektiv.

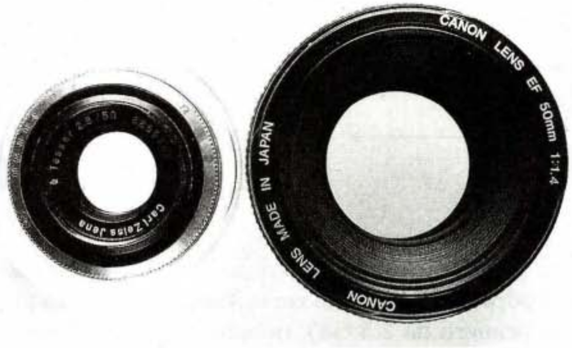
Npr.: Pri zaslonskem številu 8 objektiv prepušča dvakrat toliko svetlobe kot pri zaslonskem številu 11. Pri zaslonskem številu 4 prepušča objektiv 32-krat toliko svetlobe kot pri zaslonskem številu 22 (sliki 1 in 2).

V praksi namesto npr. "zaslonsko število 8" površno rečemo "zaslonka 8".

Svetlobna jakost objektiva

Leča z goriščno razdaljo f in z najmanjšim zaslonskim številom z ima premer f/z. Temu količniku pravimo *odprtina leče*. Najbolj prodajani zoomi imajo odprtine od $f/3'5$ do $f/5'6$.

Čim manjši je z, tem večja je odprtina zaslonke. Inverzna vrednost $1 : z$ zaslonskega števila z pri polni odprtini zaslonke je *svetlobna jakost* objektiva.



Slika 5. Dva objektiva z goriščno razdaljo 50 mm: levi je legendarni štirilečni objektiv Tessar s svetlobno jakostjo 1 : 2˙8. Izdelujejo ga v vrsti različic že 90 let. Desni objektiv ima svetlobno jakost 1 : 1˙4. Tako veliko svetlobno jakost je mogoče doseči le z uporabo dragih stekel in večjim številom leč (v našem primeru 7). Desni objektiv zbere štirikrat toliko svetlobe kot levi, zato je z njim laže slikati v slabih svetlobnih pogojih.

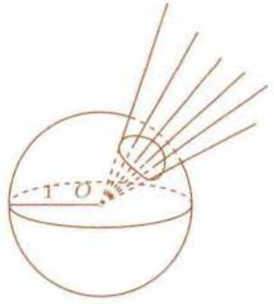
Danes so priljubljeni objektivi s spremenljivo goriščnico – zoomi. Poklicni fotografi uporabljajo večinoma zoome s svetlobno jakostjo 1 : 2˙8. Taki objektivi so pri enakih goriščnicah občutno večji, težji in dražji od zoomov s spremenljivo svetlobno jakostjo od 1 : 3˙5 do 1 : 5˙6, kakršne uporabljajo amaterji (slika 6).

Slika 6. Standardni zoom, ki ima svetlobno jakost 1 : 3˙5 pri najmanjši goriščnici (28 mm) in šibko svetlobno jakost 1 : 5˙6 pri največji goriščnici (80 mm). Tehta le 200 g.

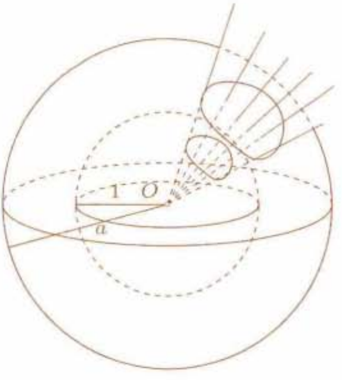
Prostorski kot

Poglejmo si, kako zaslonka vpliva na osvetljenost slike. Srečamo se s pojmom *prostorskega kota*.

Imamo neprozorno sfero s polmerom 1 in s središčem v točki O (slika 7). Na tej enotski sferi si mislimo izrezano okno poljubne oblike. Vsi poltraki (žarki) z izhodiščem v O, ki potekajo skozi omejeno okno, sestavljajo *prostorski kot*. Mera ω tega prostorskega kota je kar površina manjkajočega dela sfere (okna).



Slika 7.



Slika 8.

Mislimo si zdaj okrog točke O narisano še sfero s polmerom a (slika 8). Središčni razteg s faktorjem a in s središčem v O nam enotsko sfero preslika na novo sfero, ohranja pa prostorski kot. Zato je površina preseka nove sfere s prostorskim kotom enaka $a^2\omega$. Torej je

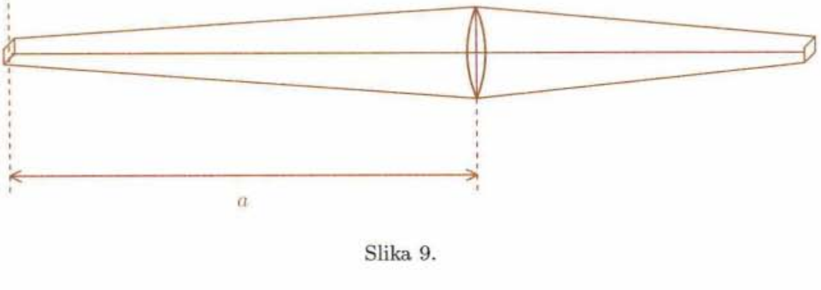
$$\omega = \frac{S}{a^2} ,$$

kjer je S površina preseka nove sfere s prostorskim kotom.

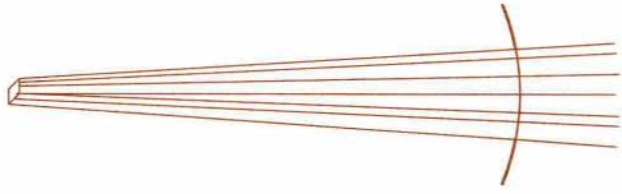
Naslednji razdelek je bolj fizikalno obarvan in ga odlikujejo številne poenostavitve in zanemaritve, vendar je vseeno zelo poučen.

Zveza med svetlostjo objekta in osvetljenostjo slike

Fotografiramo hrapavo enakomerno svetlo steno, ki je pravokotna na optično os aparata. Tam, kjer optična os leče seka steno, si na njenem površju mislimo označen kvadratek s ploščino 1mm^2 (slika 9).



Slika 9.



Slika 10.

Okrog kvadratka si mislimo narisano sfero s polmerom a, kjer je a razdalja med steno in lečo (slika 10). Kvadratek seva svetlobo. V neposredni bližini optične osi vzamemo okence na sferi. Žarki skozi okence (približno) oblikujejo majhen prostorski kot z mero ω. Ker ima naš kvadratek ploščino 1 (mm^2), je svetlost L kvadratka (in s tem stene) po definiciji do enote natančno enaka

$$\frac{\text{svetlobni tok iz kvadratka skozi okence}}{\omega}.$$

(Stena je hrapava, zato se nam zdi enako svetla, tudi če jo pogledamo bolj poševno. Vendar pa je kvadratek od strani videti manjši. Zato skozi enako veliko okence na isti sferi daleč stran od osi kvadratek seva manj svetlobe.)

Če je torej premer D leče precej manjši od a, je svetlobni tok iz kvadratka skozi lečo bolj ali manj enak

$$L\omega',$$

kjer je $\omega' = \frac{S}{a^2}$ prostorski kot, s katerim vidimo našo lečo iz kvadratka.

Kot vemo, leča naš kvadratek preslika na kvadratek s stranico m mm, kjer je m povečava. *Osvetljenost* slike je enaka kvocientu

$$\frac{\text{svetlobni tok, ki pada na ploskev}}{\text{ploščina ploskve}},$$

torej

$$\frac{1}{m^2}L\omega' = \frac{1}{m^2}L\frac{S}{a^2}.$$

Iz našega prejšnjega članka vemo, da je $a = (1 + m^{-1})f$. Upoštevajmo, da je

$$S = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{4}\pi\frac{f^2}{z^2}.$$

Če zanemarimo izgubo svetlobe pri prehodu skozi objektiv, torej velja: Osvetljenost slike je enaka

$$\frac{\pi}{4}L\frac{1}{z^2(1+m)^2},$$

kjer je L svetlost originala.

Torej pri gornjih predpostavkah velja:

Osvetljenost slike je odvisna le od svetlosti L objekta, od zaslonskega števila z in od povečave m.

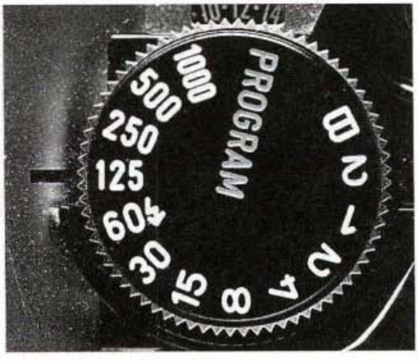
Za oddaljene objekte je $m \doteq 0$. Denimo, da je $z = 4$. Potem je osvetljenost slike enaka

$$\frac{\pi}{64}L\,.$$

Osvetljenost slike znaša pri zaslonskem številu 4 slabih 5% svetlosti originala.

Ekspozicija

Da bi na filmu nastala dobra slika, mora nanj pasti bolj ali manj natančno določena količina svetlobe. Poleg zaslonke kontrolira količino svetlobe še *zaklop*. Idealizirano se zaklop odpre za določen čas in nato zapre. Današnji zaklopi so večinoma elektronsko upravljani in so pri dobrih aparatih zmožni naravnati osvetlitvene čase od 30 s do 1/4000 s. Na sliki 11 imamo starejši model aparata s časi od 2 s do 1/1000 s. Oznaka 125 pomeni čas 1/125 s itd. Edino obarvana dvojka med 1 in B dejansko pomeni 2 s. Sicer pa 8 pomeni 1/8 s itd...



Slika 11. Na klasičnih aparatih osvetlitvene čase naravnamo s tem gumbom.

Slika 12. Novejši aparati na prikazovalniku pokažejo nastavljeno ekspozicijo.

Denimo, da z zaslonko $z = 22$ in časom $t = \frac{1}{8}$ s (slika 12) dosežemo pravilno osvetlitev. Če zaslonko odpremo na $z = 16$, se ploščina odprtine podvoji, zato moramo čas skrajšati na polovico, se pravi na $\frac{1}{16}$ s. Pravilno osvetlitev dosežemo še z naslednjimi pari:

$z = 11,$	$t = \frac{1}{32}$ s	$\frac{1}{30}$ s
$z = 8,$	$t = \frac{1}{64}$ s	$\frac{1}{60}$ s
$z = 5{\cdot}6,$	$t = \frac{1}{128}$ s	$\frac{1}{125}$ s
$z = 4,$	$t = \frac{1}{256}$ s	$\frac{1}{250}$ s
$z = 2{\cdot}8,$	$t = \frac{1}{512}$ s	$\frac{1}{500}$ s
$z = 2,$	$t = \frac{1}{1024}$ s	$\frac{1}{1000}$ s
$z = 1{\cdot}4,$	$t = \frac{1}{2048}$ s	$\frac{1}{2000}$ s

Na aparatu so ulomki za čase prikazani malenkost spremenjeni (primerjaj s fotografijo 11), tako kot vidimo na desni.

Definirajmo zdaj: *Ekspozicija* je urejeni par (z,t), kjer je z zaslonsko število in t čas osvetlitve.

Denimo, da spet slikamo hrapavo enakomerno svetlo steno s svetlostjo L. Količina svetlobe, ki pade na ploščinsko enoto filma pri ekspoziciji (z,t), je (v idealnem primeru) enaka

$$\frac{\pi}{4}L\frac{1}{(1+m)^2}\cdot\frac{t}{z^2}\,.$$

Če sta svetlost L in povečava m fiksna, velja: če je

$$\frac{t'}{(z')^2}=\frac{t}{z^2}\,,$$

bo pri ekspozicijah (z,t) in (z',t') na ploščinsko enoto filma prišla enaka količina svetlobe.

Avtomatični aparati sami sprogramirajo zaslonsko število z in čas t, tako da je osvetlitev pravilna. Boljši aparati premorejo *premik programa* (program shift). Z vrtenjem kolesca ali pritiskanjem gumba lahko skačemo po ekspozicijah (z,t), tako da kvocient t/z^2 ostane isti – na primer po parih, predstavljenih zgoraj.

V prej opisanem zaporedju ekspozicij je kvocient t/z^2 v vseh primerih enak 2^{-12} s.

Ekspozicijska vrednost (EV)

Če lahko zapišemo

$$\frac{t}{z^2} = 2^{-x} \quad (\mathrm{s})$$

ali enakovredno

$$\frac{z^2}{t} = 2^x = 2^{EV} \quad (\mathrm{s}^{-1})\,, \tag{2}$$

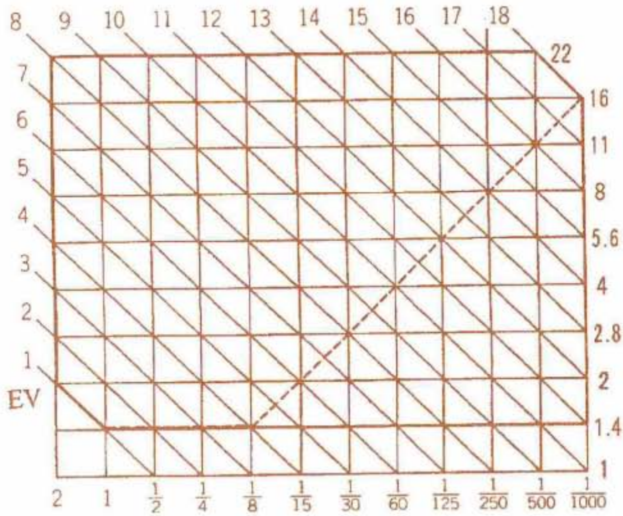
pravimo, da je x *ekspozicijska vrednost* dane osvetlitve, kratko EV.

Torej je (če še ne poznate logaritmov, te tri vrstice preskočite)

$$EV = \log_2\left(\frac{z^2}{t}\right)$$

(če je kvocient v oklepaju izračunan v s^{-1}).

Primer:
Za $z = 22$ in $t = \frac{1}{8}$ s je $EV = 12$.
Za $z = 1$ in $t = 1$ s je $EV = 0$, enako za
$z = 1{\cdot}4$ in $t = 2$ s ali pa za $z = 2{\cdot}8, t = 8$ s.



Slika 13. Zelo pregledno zvezo med z, t in EV dobimo iz zgornjega diagrama, vzetega iz starih Canonovih navodil. Črtkana črta povezuje ekspozicije, kot jih izbira osvetlitvena avtomatika za objektiv $1 : 1{\cdot}4$, 50 mm.

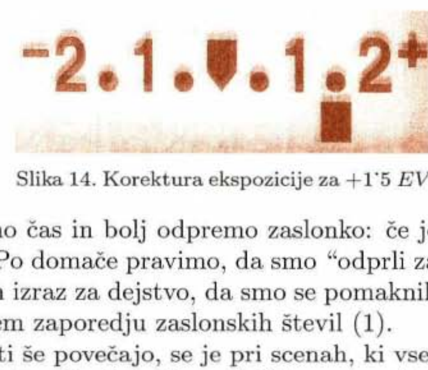
Zapomnimo si:

Če pri danem z osvetlitveni čas razpolovimo, se EV zveča za 1.
Če pri danem z osvetlitveni čas podvojimo, se EV zmanjša za 1.
Če pri danem t zaslonsko število z podvojimo, se EV zveča za 2.
Če pri danem t zaslonsko število z delimo s $\sqrt{2}$, se EV zmanjša za 1.

Korekture ekspozicije

Osvetlitvena avtomatika v boljših aparatih je zelo precizna, dokler imamo opravka z objekti srednje barvne intenzitete. Če pa večino scene pokriva sneg, bomo namesto beline na diapozitivu dobili pusto sivo – v meglenem ali oblačnem vremenu celo modro pokrajino – kot na fotografiji na drugi strani ovitka. Avtomatika namreč skuša na film spustiti toliko svetlobe, da nastane diapozitiv srednje prosojnosti. Tudi najnovejši dosežek – barvni senzor – verjetno ne more določiti, ali slikamo puščavo sive barve ali zasneženo pokrajino, vsaj dokler ni na sceni še kaj drugega za primerjavo. V takih primerih moramo ekspozicijo *popraviti*.

Pri zasneženih scenah moramo na film spustiti dva do štirikrat toliko svetlobe, kot pokaže svetlomer. Lahko, recimo, pri dani zaslonki čas podaljšamo na 2 do 4 kratno vrednost. Pri tem se EV **zmanjša** za 1 do 2. Običajno vseeno rečemo, da smo osvetlitev popravili za $+1$ do $+2$ EV, saj smo **bolj** osvetlili, kot bi sicer: Na prikazovalniku aparata izberemo recimo korekturo $+1{\cdot}5$ kot na sliki 14, pa bomo dobili fotografijo kot na zadnji strani ovitka.



Slika 14. Korektura ekspozicije za $+1{\cdot}5$ EV.

Druga možnost je, da obdržimo čas in bolj odpremo zaslonko: če je bila prej 8, izbiramo med 4 in 5·6. Po domače pravimo, da smo "odprli za eno do dve zaslonki". To je ohlapen izraz za dejstvo, da smo se pomaknili za 1 do 2 mesti nazaj v standardnem zaporedju zaslonskih števil (1).

Ker se na diapozitivih kontrasti še povečajo, se je pri scenah, ki vsebujejo zelo svetle in zelo temne dele, včasih težko odločiti za pravilno ekspozicijo. Novejši aparati premorejo tako imenovano *osvetlitveno zaporedje* (angleško: automatic bracketing). Aparat nam zaporedoma napravi tri posnetke: srednjega po predlogu avtomatike, prvega manj in drugega bolj osvetljenega. Na predzadnji strani ovitka imamo tri take posnetke, ki se razlikujejo za po $1{\cdot}5$ EV. Zraven je še slika, posneta na štajerski avtocesti pri Dramljah. Ekspozicija je trajala več sekund (EV okrog 6).

Spremembe za pol EV

Denimo, da osvetlitveni čas t ostane isti, EV pa se poveča za 0'5. Kaj se zgodi z zaslonskim številom z?

Iz (2) sledi

$$z^2 = 2^{EV} t\,.$$

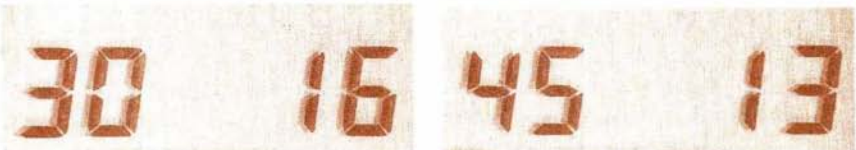
Desna stran se pomnoži z $2^{0'5} = \sqrt{2}$. Torej se z^2 pomnoži s $\sqrt{2}$, od tod se z pomnoži s $\sqrt[4]{2} \doteq 1'19$.

Če je bil $z = 4$, je novo zaslonsko število 4'8.

Nekateri aparati nam omogočajo nastavljanje zaslonskega števila z (in časa) v korakih po $0'5EV$. Med standardno zaporedje (1) zaslonskih števil nam tako interpolirajo ta števila, pomnožena s $\sqrt[4]{2}$:

$$1'2,\ 1'7,\ 2'4,\ 3'4,\ 4'8,\ 6'7,\ 9'5,\ 13,\ 19,\ 27,\ 38, \ldots$$

Kaj pa če z ostane isti, EV pa se zveča za 0'5? Potem se 2^{EV} pomnoži s $\sqrt{2}$, torej se mora čas deliti s $\sqrt{2}$. Če je bil prej denimo 1/32 s je zdaj 1/45 s itd (slika 16).



Slika 15, 16. Ekspoziciji (16, $\frac{1}{30}$ s) in (13, $\frac{1}{45}$ s) imata isto EV.

Pri nekaterih aparatih lahko EV spreminjamo v korakih po $\frac{1}{3}EV$. Sami premislite, kaj se zgodi pri spremembi za $\frac{1}{3}EV$, če a) z ostane isti; b) t ostane isti.

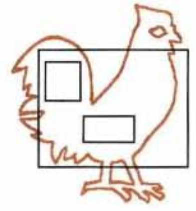
Peter Legiša

IGRA

Peter predlaga Petri igro. Najprej ji razloži pravila: "Sestavila bova osemmestno število tako, da bova izmenično dopisovala eno od števk: 6, 7, 8, 9. Drugi tekmovalec zmaga, če je dobljeno število deljivo z devet, sicer izgubi." Peter ne dovoli, da bi Petra igrala prva, ker ve, da lahko prvi tekmovalec vpisuje števke tako, da vedno zmaga, ne glede na to, kaj vpisuje drugi tekmovalec. Kako ima Peter namen igrati kot prvi?

Dragoljub M. Milošević, prevod *Barbara Japelj*

MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 2. del

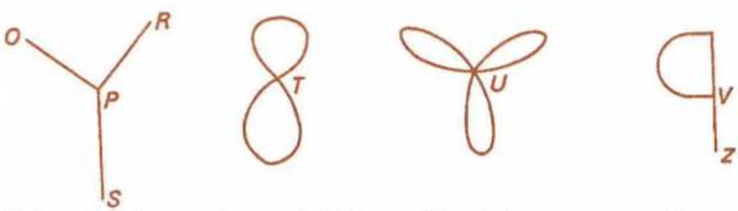


Izhodišča

Iz točke A krivulje na spodnji sliki vodijo štiri poti; ena med njimi npr. proti točki B. Iz točke B vodi ena sama pot. Enako velja za točko C.

Točko, iz katere vodi vsaj ena pot, bomo imenovali **izhodišče**. Število vseh poti, ki vodijo iz izhodišča, imenujemo **stopnja** izhodišča. Tako je stopnja izhodišča A je enaka 4, stopnja izhodišča C pa 1.

Sami določite stopnje izhodišč, označenih s črkami, na naslednji sliki.



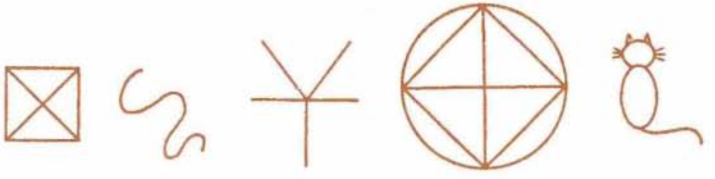
Očitno je, da **se pri topološki preslikavi** (te smo spoznali v prejšnji številki Preseka) **izhodišče dane stopnje preslika v izhodišče iste stopnje.** Torej **je stopnja izhodišča topološko nespremenljiva vrednost,** ali krajše, **stopnja izhodišča je topološka lastnost.**

Poiščite odgovore na naslednja vprašanja:

1. Katere male črke slovenske abecede v naslednji tabeli imajo med drugim:
   (a) natanko eno izhodišče stopnje 3,
   (b) dve izhodišči stopnje 3,
   (c) izhodišče stopnje 4?

abcčdefghijkl
mnoprsštuvzž

2. Zakaj ne moremo narisati figure z enim izhodiščem stopnje 1 in brez drugih izhodišč?
3. Nariši daljico in na njej poišči ter označi izhodišče stopnje 2. Lahko najdeš še kakšno izhodišče stopnje 2? Koliko je vseh skupaj? Zakaj izhodišča stopnje 2 niso zelo zanimiva?
4. Za krivulje na sliki ugotovi, koliko ima vsaka izhodišč stopnje 1 in koliko izhodišč stopnje 3, 4 oziroma 5.



(a) (b) (c) (d) (e)

5. Katere med malimi črkami slovenske abecede so topološko enakovredne črki c ? Koliko izhodišč ima vsaka? Kakšne stopnje so ta izhodišča?
6. Koliko malih črk slovenske abcede je topološko enakovrednih črki n ? Primerjaj odgovor z odgovori na vprašanje 1! Kaj opaziš?
7. Če je možno, nariši krivulje, ki imajo navedeno število izhodišč danih stopenj.

	stopnja 1	stopnja 3	stopnja 4	stopnja 5
(a)	–	–	2	–
(b)	–	1	1	1
(c)	–	3	–	–
(d)	–	2	1	–
(e)	1	1	–	1
(f)	4	–	1	–
(g)	–	2	2	–
(h)	1	1	–	–

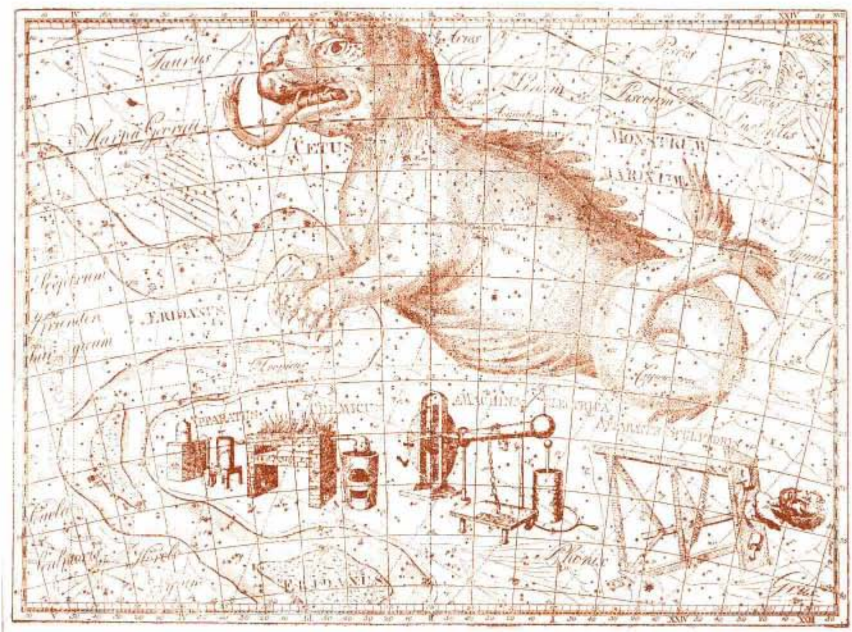
Poskusi najti pravilo, s katerim lahko hitro ugotoviš, kdaj krivulje zagotovo ni možno narisati.

Marija Vencelj

ČUDOVITA

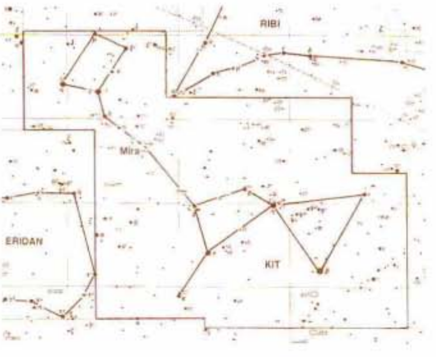
Leta 1596 je nemški astronom David Fabricius (1564 - 1618) pri opazovanju Merkurja v ozvezdju Kit zasledil prej nevidno zvezdo. Njen sij je naglo slabel in zvezda je kmalu postala prostemu očesu nevidna. Vendar je spet močno zasvetila in nato spet hitro izginila. To se je večkrat ponovilo, in na zvezdo so zvezdoslovci postali pozorni. Začeli so jo natančno opazovati in ugotovili, da spreminja svoj sij. Fabricius pa je bil prvi, ki je opazoval spremenljivost kake zvezde.

"Novo zvezdo" so pozneje začeli pesniško imenovati Mira (pravzaprav ji je dal to ime J. Hevelij), kar v latinščini pomeni čudovita, tudi čudna, izredna (slika 1 in 2). Mira je torej zvezda, ki spreminja svoj sij, je zvezda spremenljivka.

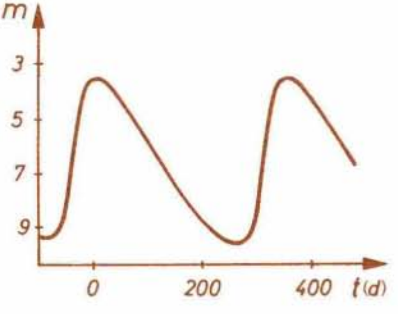


Slika 1. Ozvezdje Kit in lega zvezde *Mire – Čudovite* v njem. Vzemite lupo in izsledite Čudovito. Podoba je iz starega zvezdnega atlasa. Kit je pri nas najbolje viden od oktobra do januarja.

V zadnjih treh stoletjih so odkrili okoli 5000 Miri podobnih zvezd. Sama Mira, uradno označena kot o Kita (Omikron Ceti), v časovnem presledku okoli 330 dni spreminja svoj sij od približno tretje do devete magnitude; naše oko sicer zazna še zvezde šeste magnitude (slika 3). Če preračunamo, to pomeni, da zvezda odda ob največjem siju kar 250 krat več svetlobe kot ob najmanjšem. (Sicer osnovne podatke o Miri dobite v astronomskih efemeridah Naše nebo, vsakoletni publikaciji Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.)



Slika 2. Ozvezdje Kit, prikazano na moderni zvezdni karti v naši astronomski reviji *Spika*.

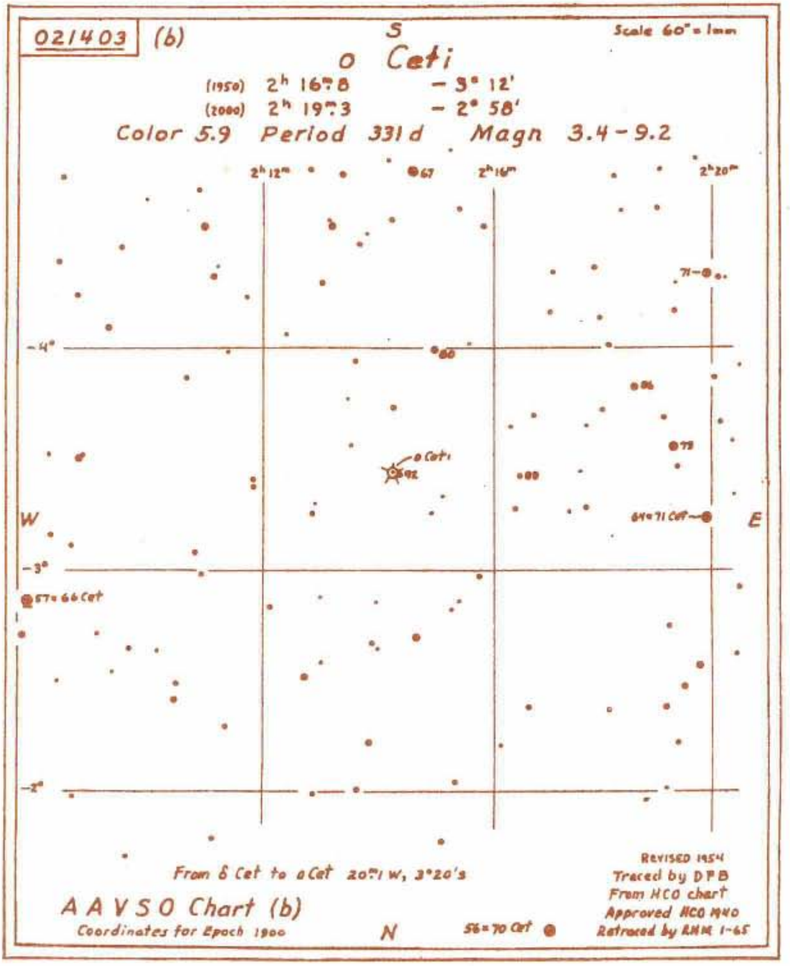


Slika 3. Nihanje sija Čudovite. Pri pulziranju zvezda nekako "diha", se periodično širi in krči – spreminja svoj radij. Pri tem se spreminja površinska temperatura zvezde, približno sočasno s temperaturo pa izsev (oddana svetlobna moč) zvezde. To na Zemlji zabeležimo kot spreminjanje sprejete zvezdine svetlobe ali, natančneje, *spreminjanje njenega sija*. Sicer pa je Čudovita oddaljena od nas okoli 250 svetlobnih let in ima okoli 200-krat večji radij od Sonca. Za druge podatke poglejte še v kak računalniški program ali Internet.

Mira je primer orjaške zvezde, ki pulzira – "diha". Samo bežno poglejmo, kakšne lastnosti imajo zvezde tipa Mire, včasih imenovane tudi miride – dolgoperiodične orjaške spremenljivke nizkih površinskih temperatur. Te zvezde spreminjajo svoj sij s periodo (nihajnim časom) od okoli 80 do 1000 dni, pri čemer so amplitude nihanja sija večje od 2,5 magnitude. Vseh različno pulzirajočih spremenljivk pa je blizu 15 000.

Ugotovitve, dobljene iz opazovanj pulzirajočih zvezd, še kar dobro potrjuje teorija. Ta pravi, da je produkt periode t_0 pulziranja in kvadratnega korena povprečne gostote ρ zvezde konstantna količina, torej $t_0\sqrt{\rho} = \text{konst.}$ Res se je izkazalo, da vse večje zvezde, to je orjakinje in nadorjakinje, ki imajo vse manjšo ρ, pulzirajo z vse daljšo periodo. Sedaj pa zapustimo teorijo, ki je precej zapletena in presega okvir tega članka. Raje poglejmo, kako bi preprosto opazovali Miro.

Predlagam, da Miro opazujete s prostim očesom. Najprej se zelooo potrudite, da jo izsledite (slika 2 in 4). Nato poskusite oceniti spremembo njenega sija glede na konstantni sij okolnih zvezd. Na razpolago je več načinov. Sam sem večinoma ocenjeval sij Mire tako, da sem v njeni okolici poiskal zvezdo, ki je imela sij čim bliže siju Mire. Iz tabele (zvezdnega kataloga ali karte) sem nato odbral sij tiste zvezde, ki sem ga privzel



Slika 4. Zvezdna okolica Čudovite – pri opazovanju se morate pač znajti.

za trenutni sij Mire. Zmotil sem se največ za $\frac{3}{4}$ magnitude, kar je sicer velika napaka, vendar se je zdelo za hitro oceno to še kar dobro. Vam pa predlagam drugačen način.

Sij spremenljivke, torej tudi Mire, ocenjujemo s prostim očesom (lahko pa tudi z daljnogledom) takole: Spremenjljivi sij spremenljivke primerjamo s konstantnim sijem sosednjih zvezd. Recimo tem zvezdam primerjalne zvezde. Na ta način so ocenitve sija s prostim očesom natančne od $\frac{1}{10}$ do $\frac{1}{5}$ magnitude. Takšno natančnost pa dosežemo šele po večletnem načrtnem, vztrajnem in potrpežljivem delu. Pri opazovanju s prostim očesom upoštevamo prvih šest magnitud (od prve magnitude – najsvetlejše zvezde, do šeste magnitude – zvezde, ki jih s prostim očesom še vidimo).

Z očesom ne merimo objektivno, ampak ocenjujemo subjektivno (primerjamo občutke). Če pri ocenjevanju sija uporabljamo primerjalne zvezde, ki smo jih vzeli iz različnih zvezdnih katalogov ali kakšnega učbenika, moramo vedeti, da imamo opravka z različno dobljenimi siji. Upoštevati je treba opazovalno napravo, način opazovanja, osebnostne (očesne in druge) lastnosti opazovalca in še kaj. Največje razlike sijev se pojavijo pri zvezdah, ki se med seboj razlikujejo po barvi (površinski temperaturi). Tako vsak opazovalec, ki ocenjuje z določenim instrumentom, ustvarja svojo (subjektivno) skalo sija.

Sij spremenljivke S primerjamo s sijem dveh primerjalnih zvezd, od katerih je ena A nekoliko svetlejša, druga B pa nekoliko šibkejša od spremenljivke. Sij zvezde A naj bo a, sij zvezde B naj bo b, sij spremenljivke S pa naj bo s. Velja $a < s < b$. Če je le mogoče, izberemo taki primerjalni zvezdi, da je razlika njunih sijev med 1 in $\frac{1}{2}$ magnitude. Primerjalne zvezde naj bi bile enake barve kot spremenljivka.

Interval med sijema primerjalnih zvezd v mislih razdelimo na deset stopenj. Ocenjujemo, kje je sij spremenljivke znotraj tega intervala. Zapis $apsrb$ pomeni, da je S za p stopenj šibkejša od A in za r stopenj svetlejša od B. Seveda je $p + r = 10$, saj smo interval razdelili na 10 enakih delov.

Če smo ocenitev zapisali $apsrb$ in sija a in b primerjalnih zvezd poznamo, sij spremenljivke izračunamo takole:

$$s = a + p\frac{b-a}{10} = b - r\frac{b-a}{10}\,.$$

Če vidimo, da je spremenljivka toliko šibkejša od zvezde A, kot je svetlejša od B (sredina intervala), zapišemo $a5s5b$. Če je sij spremenljivke nekoliko bližji siju zvezde A kot siju zvezde B, zapišemo $a4s6b$ ali tudi $a3s7b$. Če pa se sij spremenljivke komaj opazno razlikuje od sija zvezde A in kar opazno od sija zvezde B, zapišemo $a1s9b$. Pri vsaki ocenitvi zapišemo še čas opazovanja. Če se sij kake spremenljivke hitro spreminja, upoštevamo uro (morda minuto), v našem primeru pa zadostuje natančnost enega, dveh ali tudi treh dni.

Poskusite na opisani način oceniti sij Mire kako noč, ko bo zadosti svetla, to pa bo sredi obdobja december 1997 – januar 1998, torej okoli novega leta. Primerjalne zvezde lahko izberete iz zvezdne karte (slika 2), iz računalniškega astronomskega programa, Interneta ali iz priložene zvezdne skice (pri čemer bo še nekaj dela). Morda celo ugotovite krivuljo spreminjanja Mirinega sija okoli njenega maksimalnega sija (okoli novega leta 1998), to je, narišete graf spreminjanja sija s časom, kjer na abscisno os nanašate čas t opazovanja, na ordinatno pa vrednost – oceno sija m spremenljivke. To je res že nekoliko zahtevno delo. Vendar poskusiti velja.

Za začetek pa Miro najprej izsledite. Ko jo boste znali hitro najti na nebu, se nato na lastne oči poskusite prepričati, ali se tej nenavadni zvezdi zares spreminja sij glede na okolne zvezde konstantnega sija.

Marijan Prosén

HITRO KVADRIRANJE ŠTEVIL, KI SE KONČUJEJO S ŠTEVKO 5 – Rešitev s str. 31

1. Če pravila še niste poznali, ste ga gotovo zlahka uganili. Naravno število, ki se v desetiškem zapisu končuje s števko 5, kvadriramo takole:
   (a) Številu odstranimo (odmislimo) zadnjo števko;
   (b) število, ki ostane, pomnožimo s številom, ki je za 1 večje od njega;
   (c) produktu pripišemo 25; dobljeno število je kvadrat začetnega števila.

   Tako je

$$\mathbf{35}^2 = \mathbf{12}25, \quad \text{ker je} \quad 3 \cdot (3+1) = 3 \cdot 4 = 12\,,$$

   in

$$\mathbf{115}^2 = \mathbf{132}25, \quad \text{ker je} \quad 11 \cdot 12 = 132\,.$$

2. Naravno število n, ki se končuje s števko 5, lahko zapišemo v obliki

$$n = 10m + 5, \qquad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Očitno je m število, ki ga dobimo, če v številu n opustimo zadnjo števko 5. Velja:

$$n^2 = 100m^2 + 100m + 25 = 100m(m+1) + 25.$$

Prvi seštevanec $100m(m+1)$ v zadnji vsoti je število, ki se v desetiškem zapisu končuje z dvema ničlama. Če temu številu prištejemo dvomestno število 25, dobimo isto število, kot če številu $m(m+1)$ na desni pripišemo 25.

3. Naj bo številska osnova a sodo število in zadnja števka števila n enaka polovici osnove, to je $\frac{a}{2}$. Potem velja:

$$n = ma + \frac{a}{2},$$
$$n^2 = m^2a^2 + ma^2 + \frac{a^2}{4} = m(m+1)a^2 + \frac{a^2}{4},$$

kjer je m spet število, ki ga dobimo z odstranitvijo zadnje števke v številu n.
Število $m(m+1)a^2$ se v številskem sistemu z osnovo a zapiše z dvema ničlama na koncu, število $\frac{a^2}{4} < a^2$ pa je v tem številskem sistemu kvečjemu dvomestno število; enomestno je le za $a = 2$.
Zato kvadriramo števila, zapisana v številskem sistemu s sodo osnovo $a \geq 4$ in z zadnjo števko $\frac{a}{2}$, podobno kot števila, ki se v desetiškem zapisu končujejo s števko 5:
Število, ki ga dobimo z odstranitvijo zadnje števke, pomnožimo s številom, ki je od njega za 1 večje, in pripišemo rezultatu kvadrat zadnje števke.
Če je $a = 2$, je razlika le na zadnjem koraku, ko namesto 1 pripišemo 01.

V šestiškem sistemu npr. lahko z uporabo tega pravila kvadriramo števila, ki se končujejo s števko 3. Tako je

$$43_{(6)}^2 = 3213_{(6)},$$

ker je $4_{(6)} \cdot 5_{(6)} = 32_{(6)}$ in $3_{(6)}^2 = 13_{(6)}$.

Marija Vencelj

METANJE KOCKE – Rešitev naloge s str. 47[1]

V programskem jeziku pascal bomo sestavili program, ki bo s pomočjo generatorja naključnih števil ocenil najverjetnejše število metov običajne kocke, v katerih vsota dobljenih pik prvič preseže 1997. Program bo simuliral `n` poskusov, kjer je `n` podatek, ki ga vnese uporabnik. Vsak poskus bo sestavljen iz zaporedja metov kocke. Mete bomo ponavljali, dokler vsota dobljenih pik ne bo presegla 1997. Met kocke bomo predstavili z naključno izbiro enega od števil $1, 2, \ldots, 6$. Hitro opazimo, da število dobljenih pik pri posameznem metu ni pomembno. Zapomniti si moramo le, koliko metov smo porabili za dokončanje poskusa. Število metov, ki jih opravimo pri posameznem poskusu, je vsaj 333 (same šestice), a ni večje od 1998 (same enice). Po koncu vseh poskusov bomo za vsako število i med 333 in 1998 vedeli, koliko poskusov se je končalo po natanko i metih. Te podatke bomo vodili v tabeli `meti`. Tabela bo indeksirana s števili od 333 do 1998. Po koncu poskusov poiščemo največjo vrednost v tabeli in izpišemo indekse vseh tistih elementov tabele, ki hranijo to vrednost.

Jedro programa sestavljata dve vgnezdeni zanki. Zunanja zanka `for` teče po vseh poskusih, notranja zanka `while` pa opravi en poskus.

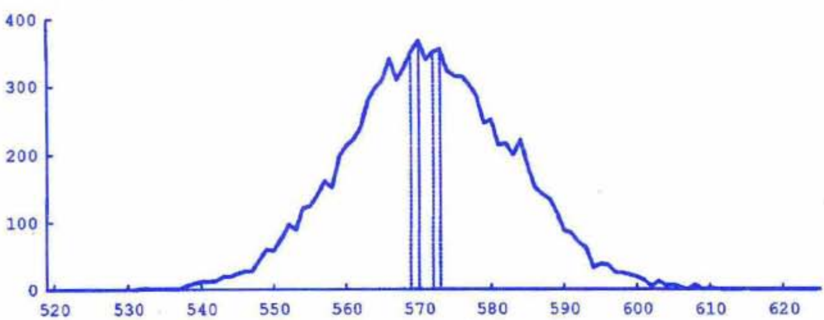
```
program MetanjeKocke;
{ Eksperimentalno oceni najverjetnejše število metov kocke,        }
{ v katerih skupno število dobljenih pik prvič preseže 1997.        }
const
  meja = 1997;                        { Vsota pik mora preseči mejo. }
  min = (meja div 6)+1;             { najmanjše možno število metov }
  max = meja+1;                       { največje možno število metov }
var
  n: integer;                                    { število poskusov }
  meti: array [min..max] of integer;    { evidenca o številih poskusov }
  vsota: integer;               { Šteje dosežene pike v tekočem poskusu. }
  met: integer;                 { Šteje število metov v tekočem poskusu. }
  najvec: integer;
  i: integer;
begin { glavni program }
  write('Koliko poskusov naj opravim: '); readln(n);
  for i:=min to max do meti[i] := 0;
{ Posnemamo metanje kocke. }
  randomize;
```

[1] Objavljamo rešitev avtorja naloge. Nekoliko daljšo (pa pravilno) rešitev nam je poslal tudi bralec Niko Jezernik iz Velenja.

Op. odg. urednice

```
  for i:=1 to n do begin          { Vsaka ponovitev zanke je en poskus. }
    vsota := 0;  met := 0;
    while vsota<=meja do begin
      vsota := vsota+random(6)+1;
      met := met+1;
    end; { while }
    meti[met] := meti[met]+1;
  end; { for }
{ Ugotovimo, pri katerem metu smo največkrat presegli mejo. }
  najvec := meti[min];
  for i:=min+1 to max do
    if meti[i]>najvec then najvec := meti[i];
{ Izpis rezultatov. }
  writeln('Stevilo poskusov = ',n);
  write('Najvec poskusov, in sicer ',najvec,', se je koncalo po');
  for i:=min to max do
    if meti[i]=najvec then write(' ',i);
  writeln(' metih.');
  readln;
end.
```

In kakšno število metov napoveduje gornji program? Pri dovolj velikem številu poskusov, denimo vsaj nekaj tisoč, se odgovori sučejo okoli 571 metov. To ni presenetljivo, saj pri vsakem metu v povprečju dobimo 3.5 pike, količnik med 1998 in 3.5 pa je približno 571. Na primer, pri enem od zagonov sem programu naročil, naj opravi 10000 poskusov. Število metov, potrebnih za dokončanje posameznega poskusa, je bilo porazdeljeno tako, kot prikazuje spodnja slika:



Najkrajši poskus se je končal po 532 metih, najdaljši pa je trajal 615 metov. Največ poskusov, in sicer 368, se je končalo po 570 metih. Veliko poskusov se je končalo še po 573 metih, in sicer 355, po 572 metih, in sicer 351, ter po 569 metih, in sicer 350.

Martin Juvan

PETDESET LET PIONA

Petdesetletnica je manj okrogla kot stoletnica in elektron, katerega stoletnico smo nedavno zabeležili, velja še danes za osnovni delec, pion pa ne več. Vseeno je zgodba o odkritju piona pred petdesetimi leti tako zanimiva, da jo je vredno omeniti.

S tedanjimi pospeševalniki za naelektrene delce so raziskovali atomska jedra, niso pa še mogli raziskovati delcev. Nove delce so odkrivali v *kozmičnih žarkih*. Na vrh zemeljskega ozračja prihajajo naelektreni delci z veliko kinetično energijo, ki bi jim lahko rekli galaktični delci, ker izvirajo iz naše Galaksije. Sestavljajo jih ioni, to so atomi, ki so izgubili elektrone. Največ je vodikovih ionov, *protonov*. Ionov je tem manj, čim večja je njihova masa. Hitri ioni trčijo z jedri atomov v vrhnjih plasteh ozračja in pri tem nastanejo delci in elektromagnetno sevanje z zelo majhno valovno dolžino, kar sestavlja *sekundarne kozmične žarke*. Sekundarni kozmični žarki prihajajo v *plazovih*. Nekateri delci v plazu razpadejo ali se zaustavijo v ozračju, nekaj jih doseže površje Zemlje.

Te delce so tedaj večinoma zaznavali z *meglično celico*. V njej so hitro razpeli vlažni plin, da se je ohladil. V nastalem prenasičeno vlažnem plinu so se izločile prve kapljice vode na elektronih in ionih, ki jih je na svoji poti iz molekul plina naredil hitri naelektreni delec. Na fotografiji so kapljice dale vidno sled, ki je kazala pot delca. Posebno zanimive so bile fotografije, na katerih je bilo mogoče videti, kako je kak delec nastal ali razpadel ali trčil z atomskim jedrom in dal *zvezdo* delcev, ki so odleteli na vse strani. Vendar so bile fotografije takih dogodkov izredno redke. Na slepo je bilo treba velikokrat razpeti celico in fotografirati, preden so po naključju naleteli na fotografijo zanimivega dogodka. Zato so okoli celice namestili plinske števce in poskrbeli, da so sunki napetosti, s katerimi so se ti odzvali na prelet naelektrenih delcev, sprožili celico. Pri tem je delovala naprava tako, da se je celica sprožila, če so nekateri števci zaznali delce iz plazu in jih drugi niso. Tako niso več na slepo razpenjali celice in fotografirali na prazno.

Z meglično celico so leta 1932 odkrili pozitivni elektron ali pozitron, antidelec elektrona. Z meglično celico, ki so jo prožili števci, so naslednjega leta opazovali nastanek parov elektron-pozitron. Na podoben način so leta 1936 odkrili pozitivne in negativne delce po masi med elektronom in protonom. V meglični celici ni bilo mogoče opaziti njihovega nastanka in razpada, ker so v plinu preleteli več sto metrov. V gostejši snovi pa bi to ne bilo nemogoče, saj bi v njej mion prepotoval precej krajšo pot. Toda, kako bi opazovali pot teh delcev? V posebnem primeru je to mogoče, namreč v fotografski emulziji, v kateri so zrnca srebrovega bromida porazdeljena po tanki plasti želatine. Naelektreni delec, ki leti skozi zrnce, naredi v njem elektrone in ione. Nekateri elektroni se zopet združijo z ioni, vsi pa ne, tako da nekatera zrnca ostanejo prizadeta. Ta zrnca se v razvijalcu spremenijo v kepe drobnih delcev srebra, ki so videti črni. Pod mikroskopom je mogoče v razviti emulziji na poti hitrega naelektrenega delca videti črna zrnca.

Dve dunajski fizičarki sta leta 1937 za pet mesecev izpostavili fotografske plošče na višini 2300 metrov, na kateri je več kozmičnih žarkov kot pri tleh. Po razvitju sta v emulziji opazili sledi protonov in zvezde. Tedaj je delal na fizikalnem inštitutu v Bristolu Cecil Powell, ki je bil prej podiplomski študent v Cambridgeu pri C. T. R. Wilsonu, odkritelju meglične celice. (C. T. R. Wilson je nekdaj sodeloval z Josephom Johnom Thomsonom, odkriteljem elektrona.) Na obisku v Bristolu je leta 1938 švicarski teoretični fizik Walter Heitler omenil Powellu dunajske fotografske plošče. Na Powellovo prošnjo je Heitler skladovnico plošč tovarne Ilford z 0,07 milimetra debelo emulzijo izpostavil v švicarskih Alpah na višini 3500 metrov. Pokazalo se je, da je bilo mogoče v teh ploščah pod mikroskopom opazovati sledi protonov in delcev α, to je helijevih ionov, z majhno kinetično energijo. O tem sta Heitler in Powell leta 1939 objavila kratek članek v londonski reviji Nature.

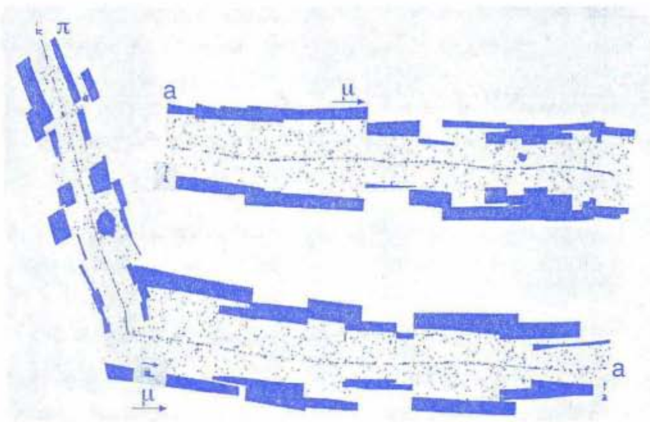
Powell se je že tedaj zavedal, da je treba povečati gostoto zrnc v emulziji, ki naj bi jo uporabili za zaznavanje hitrih naelektrenih delcev. Prepričal se je tudi, da je fotografska emulzija za raziskovanje trkov boljša kot meglična celica. Toda vojna je prekinila delo. Po vojni je Powellov nekdanji kolega iz Cambridgea Patrick Blackett s svojim vplivom v angleški vladi prispeval k ustanovitvi dveh odborov. Eden od njiju je imel na skrbi razvoj občutljivih fotografskih emulzij za zaznavanje naelektrenih delcev. Blacket je leta 1933 v Cambridgeu z Italijanom Giuseppejem Occhialinijem izdelal meglično celico, ki so jo prožili števci. Z njo sta opazovala nastanek parov elektron-pozitron, kar smo omenili v uvodu. Še pred koncem vojne je povabil v Anglijo Occhialinija, ki je bil tedaj v Braziliji. (Za tujega državljana pa ni bilo druge možnosti, kot da se je priključil Powellu v Bristolu pri delu s fotografsko emulzijo.) Leta 1946 se jima je pridružil še Occhialinijev nekdanji podiplomski študent Cesare Lattes. Tovarna Ilford je istega leta izdelala "jedrske raziskovalne emulzije". Nekatere izmed njih so uporabili na letalu, ki se je dvignilo do višine 9000 metrov, druge pa je Occhialini odnesel v francoske Pireneje na višino čez 2800 metrov. (Pri tem mu je prišlo prav, da je bil v Braziliji gorski vodnik.)

Plošče so dale bogato žetev. Powell je pozneje zapisal, da je opazovanje teh plošč v Londonu in Bristolu razkrilo čisto nov svet. "Bilo je, kot da bi nenadoma dospeli v ograjen sadovnjak, v katerem so uspevala zaščitena drevesa in so na njih dozoreli v velikem obilju eksotični sadeži." V Bristolu je bil Occhialini z vnemo pri delu: "po sedem dni na teden do dveh, včasih do štirih zjutraj ob nenavadno močni kavi". Delo je bilo zelo zamudno. Pod mikroskopom je bilo treba preiskati emulzijo, najti sledi delcev in jih zasledovati.

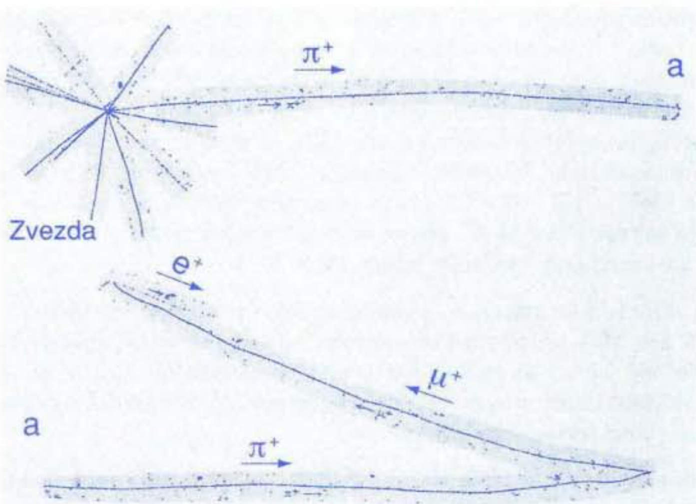
Sledi mezonov, kakor so imenovali vse delce z večjo maso od elektrona in manjšo od protona, so bile zavite in v njej se je gostota zrnc spreminjala z razdaljo, ker se je hitrost mezona manjšala. Tako so jih brez večjih težav razločevali od sledi protonov. Na začetku 1947 sta Occhialini in Powell poročala o šestih zvezdah. Opazili so tudi mezon, ki se je zaustavil, razpadel na drug mezon in ušel iz emulzije. Pri drugem podobnem dogodku se je tudi drugi mezon zaustavil in razpadel po 0,61 milimetra dolgi poti v emulziji. Lattes, Hugh Muirhead, ki je bil Powellov podiplomski študent, Occhialini in Powell so to objavili maja 1947 v Nature.

Nekaj časa niso opazili nobenega dogodka z dvema mezonoma. Zato so poslali Lattesa s ploščami v kolumbijske Ande na višino 5200 metrov. V ploščah iz Kolumbije so naleteli še na deset dogodkov s po dvema zaporednima razpadoma mezonov. Zdaj niso več dvomili v obstoj dveh vrst mezonov. Oktobra 1947 so Lattes, Occhialini in Powell v Nature zagotovili, da se prvi mezon, ki so ga imenovali mezon π ali *pion*, v emulziji zaustavi in razpade na dva delca, od katerih je eden delec μ ali mion (slika 1, 2). Drugi delec je namreč v vseh primerih prepotoval v plošči razdaljo okoli 0,6 milimetra. Po sledeh so določili, da imata pion 260 ± 30 elektronskih mas in mion 205 ± 20 elektronskih mas. Današnja podatka sta 273,31 in 206,76. Leta 1950 so se prepričali, da poleg naelektrenih pionov, ki v emulziji puščajo sledi, nastane tudi nevtralni pion, ki ne pušča sledi. Tedaj so že imeli dovolj zmogljiv pospeševalnik, da so ustvarili nevtralne pione.

Ugotovili so, da približno toliko pionov obtiči v jedrih in povzroči nastanek zvezd, kot jih razpade na mione. To so pojasnili takole: negativni pion pritegne jedro s svojim nabojem in v jedru povzroči nastanek zvezde. Negativnega piona jedra ne pritegnejo in prost razpade na mion. Pioni veliko močneje kot mioni delujejo na jedra z močno jedrsko silo. Mioni pa delujejo le na naelektrene delce zaradi svojega električnega naboja. Danes vemo, da so pioni najlažji delci, zmožni močne jedrske sile, in da so sestavljeni. Mioni pa so podobni elektronom in so osnovni delci.



Slika 1. Razpad piona in miona v fotografski emulziji. Sliko so sestavili iz velikega dela odsekov, posnetih skozi mikroskop. Pion je prišel od leve zgoraj, mion, ki je nastal pri razpadu, se je gibal proti desni. Njegova pot s spodnjega dela slike se v točki *a* nadaljuje na zgornjem delu in je v celoti dolga okoli 0,6 milimetra. Fotografija je iz članka C. M. G. Lattesa, G. .P. S. Occhialinija in C. F. Powella v Nature oktobra 1947.



Slika 2. Hitri delec je pri trku z jedrom v fotografski emulziji dal zvezdo. Goste sledi so zapustili protoni. Nastal je tudi pozitivni pion, ki je razpadel na mion in ta na pozitron. Slika je razdeljena na dva dela, pot piona se nadaljuje v točki *a*. Imenitno sliko so dobili v Bristolu leta 1948 z občutljivejšo emulzijo, v kateri je bilo mogoče opaziti tudi sledi elektronov. Sled miona je v celoti dolga okoli 0,6 milimetra.

Powell je dobil Nobelovo nagrado iz fizike leta 1950 "za razvoj fotografske metode za raziskovanje jedrskih pojavov in za svoja odkritja o mezonih s to metodo". Occhialini je leta 1979 z Blackettom dobil Wolfovo nagrado za prispevek k odkritju nastanka parov mezonov in k odkritju piona. Blackett sam je dobil Nobelovo nagrado že leta 1948 "za razvoj Wilsonove meglične celice in za svoja odkritja z njo na področju jedrske fizike in kozmičnega sevanja".

Po tem se je težišče raziskovanja delcev preselilo v Ameriko in šele čez petintrideset let so nove delce zopet odkrili v Evropi. Meglične celice in fotografske emulzije pa že dolgo ne uporabljajo več.

Pospeševalniki. Pri trku delca z dano kinetično energijo z drugim delcem ne more nastati delec z lastno energijo, večjo od dane kinetične energije. Lastno energijo dobimo, ko maso pomnožimo s kvadratom svetlobne hitrosti. S ciklotroni, krožnimi pospeševalniki, v katerih je prečno magnetno polje ukrivilo pot delcev, so tedaj lahko pospešili vodikova jedra z lastno energijo 938 MeV le do kinetične energije nekaj več kot deset MeV. Z naraščajočo kinetično energijo se namreč poveča masa delca in ta pride prepozno med elektrodi, da bi ga pospešilo izmenično električno polje. S protoni s kinetično energijo do okoli deset MeV je bilo sicer mogoče uspešno raziskovati atomsko jedro. Toda taki izstrelki niso mogli roditi delcev z lastno energijo večjo kot okoli deset MeV. 1 MeV (megaelektronvolt) je kinetična energija, ki jo dobi mirujoč delec z enim osnovnim nabojem, ko preleti napetost 1 MV (megavolt, to je milijon voltov). 1 MeV $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ J. Lastna energija elektrona je 0,51 MeV, lastna energija miona 105,7 MeV, lastna energija naelektrenih pionov 139,6 MeV in lastna enerija nevtralnega piona 135,0 MeV.

S *sinhrociklotronom* so pospešili gruče protonov do kinetične energije več sto MeV. Med pospeševanjem, ko so protoni že dosegli kinetično energijo več MeV, so znižali frekvenco pospeševalne napetosti, kakor je ustrezalo povečanju mase. Ob sinhrociklotronu so naredili poskus z nevtralnimi pioni, ki smo ga omenili.

Mioni. Japonski fizik Hideki Yukawa je leta 1935 napovedal obstoj delca z lastno energijo med lastno energijo elektrona in lastno energijo protona. S tem delcem je želel pojasniti močno jedrsko silo, ki veže delce v atomska jedra. Zaradi vmesne mase so napovedani delec imenovali *mezotron.* Yukawa je dobil Nobelovo nagrado leta 1949 "za napoved obstoja mezonov na podlagi teoretičnega dela o jedrskih silah". Leta 1937 so odkrili v kozmičnih žarkih delec z maso med elektronom in protonom. Mislili so, da je to Yukawov mezotron, in ga zaznamovali z grško črko μ. Toda poskusi so razkrili, da na odkriti delec atomska jedra ne delujejo z močno jedrsko silo. To je spravilo fizike v zadrego. Zato so na Japonskem in v Združenih državah predlagali, da odkriti delec μ ni Yukawov delec, ampak da obstaja še drug mezon. Med vojno in v letih po vojni je bilo ponekod težko priti do revij ali pa so te prihajale z veliko zamudo, zato Američani leta 1947 niso vedeli za japonski predlog. Tudi po odkritju pionov so še nekaj časa govorili o mezonu μ. Čez čas se je uveljavilo mnenje, da je delec μ soroden elektronu in ga je treba imenovati mion. Miona razpadata takole

$$\mu^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu \,,$$
$$\mu^- \to \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \,.$$

Miona razpadeta z razpolovnim časom $1,52 \cdot 10^{-6}$ sekunde. V razpolovnem času razpade polovica začetnega števila delcev. Z ν zaznamujemo nevtrino. Nevtrino z indeksom e je povezan z elektronom, nevtrino z indeksom μ z mionom, črtica nad simbolom zaznamuje antinevtrino.

Pioni. Naelektrena piona razpadeta takole:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu \,,$$
$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu \,,$$

nevtralni pion pa takole

$$\pi^\circ \to \gamma + \gamma \,.$$

Naelektrena piona razpadeta z razpolovnim časom $1,8 \cdot 10^{-8}$ sekunde in nevtralni pion z razpolovnim časom $5,7 \cdot 10^{-17}$ sekunde. γ zaznamuje foton, to je delec elektromagnetnega valovanja.

Pozitivni pion sestavljata kvark u in antikvark $\overline{\mathrm{d}}$, negativnega pa kvark d in antikvark $\overline{\mathrm{u}}$. Nevtralni pion sestavja kombinacija kvarka in antikvarka: u in $\overline{\mathrm{u}}$, d in $\overline{\mathrm{d}}$,...

Janez Strnad

ŠTEVILSKA KRIŽANKA – Rešitev s str. 40

Vodoravno: **1.** 143, **3.** 112, **5.** 1233, **7.** 4505, **9.** 33, **11.** 45, **12.** 7116, **14.** 2484, **16.** 9699690, **18.** 109, **19.** 502.

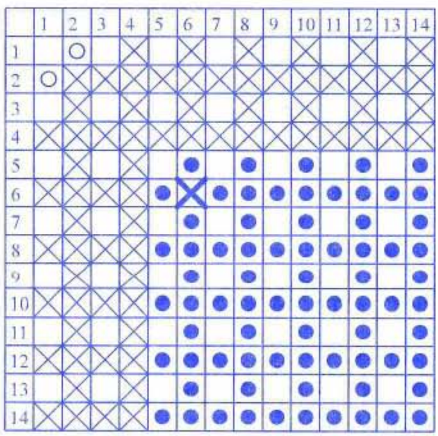
Navpično: **1.** 1144, **10.** 36400.

Dragoljub M. Milošević

ZIDOVI BREZ RAZPOK

Pravokotnik velikosti $m \times n$ želimo pokriti z dominami (majhnimi pravokotniki velikosti 1×2) tako, da bo pokritje čim bolj "trdno". To pomeni, da ne bo imelo vodoravne ali navpične ravne črte (razpoke), ki bi ga razdelila na dva manjša pravokotnika. Pokritje pravokotnika z dominami bomo imenovali *zid*. V prispevku bomo raziskali, za katere pravokotnike obstajajo zidovi brez razpok.

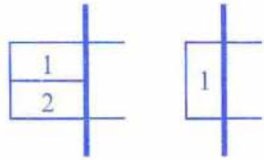
Če sta obe stranici pravokotnika lihe dolžine, potem je ploščina pravokotnika liho število. Ker vsaka domina pokrije natanko dve polji, takega pravokotnika sploh ne moremo pokriti z dominami. Za vse preostale pravokotnike pa lahko naredimo zidove, saj jih lahko pokrijemo z dominami. Na sliki 1 je prikazana razpredelnica, v kateri je za pravokotnike, z ne prevelikima stranicama, označeno, ali dopuščajo zidove brez razpok ali ne. Prazna polja ustrezajo tistim pravokotnikom, ki ne dopuščajo nobenega pokritja z dominami. S krožci so označeni pravokotniki, za katere obstajajo zidovi brez razpok, s križci pa tisti, ki takih zidov ne dopuščajo. Ker dopuščamo tako vodoravne kot navpične razpoke, je razpredelnica seveda simetrično izpolnjena. Oglejmo si, zakaj imajo zidovi nekaterih velikosti vedno razpoke, drugi pa ne. Zaradi simetrije zadostuje premišljati le o zidovih, ki imajo navpično stranico krajšo ali kvečjemu enako dolgo, kot je vodoravna. Zidove bomo obravnavali po vrsti, razvrščene glede na dolžino krajše stranice.



Slika 1.

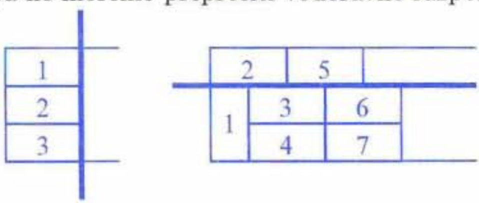
Vzemimo zid, ki ima krajšo stranico (spomnimo se, da smo privzeli, da je ta navpična) dolžine 1. Tak zid je sestavljen iz nekaj po vrsti zloženih vodoravnih domin. Seveda je med vsakim parom sosednjih domin navpična razpoka. Tak zid torej nima razpoke le tedaj, ko ima daljša stranica dolžino 2.

Zid s krajšo stranico dolžine 2 ima vedno razpoko. Vseeno je, kako postavimo prve domine, razpoko gotovo dobimo (glej sliko 2).



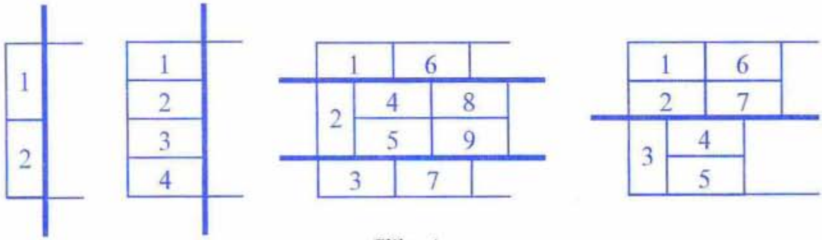
Slika 2.

Tudi zidovi, ki imajo krajšo stranico dolžine 3, imajo vedno razpoko. Ob krajšo stranico lahko postavimo domine le na dva (bistveno različna) načina; oba sta prikazana na sliki 3. Prvi način ni dober, ker takoj dobimo navpično razpoko. Pri drugi postavitvi se navpičnim razpokam sicer lahko izognemo, a moramo zato domine polagati na točno določen način (glej sliko 3). Ko hočemo zid zaključiti, pa ne moremo preprečiti vodoravne razpoke.

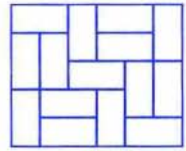


Slika 3.

Podobno kot pri zidovih s krajšo stranico dolžine 3 sklepamo tudi pri zidovih, ki imajo krajšo stranico dolžine 4. Tokrat lahko začnemo na štiri (bistveno različne) načine; vsi so prikazani na sliki 4. Pri prvih dveh takoj dobimo navpično razpoko. Pri drugih dveh se navpičnim razpokam sicer lahko izognemo, je pa polaganje nadaljnjih domin za oba začetka natanko določeno (glej sliko 4). Tudi tokrat pa se na koncu vodoravni razpoki ne moremo izogniti. Zidovi s krajšo stranico dolžine 4 imajo torej vedno razpoko.

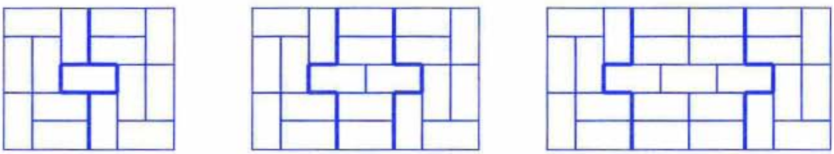


Slika 4.

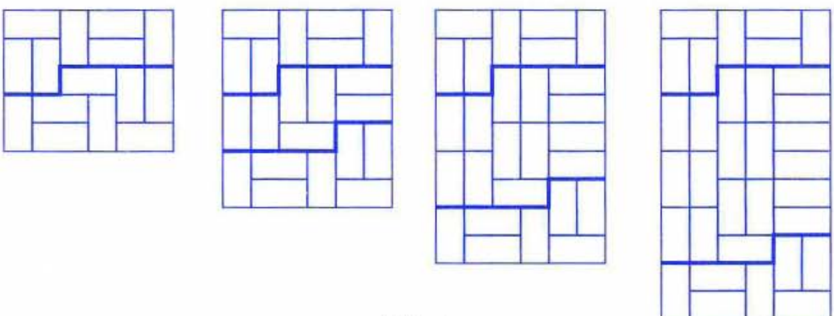


Slika 5.

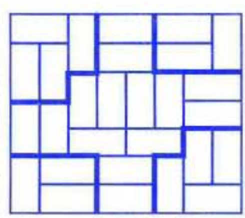
Najmanjši pravi zid brez razpok je velikosti 5×6; prikazan je na sliki 5. Enostavno ga lahko razširimo za 2 enoti v širino (slika 6) ali v višino (slika 7), tako da ne naredimo razpok. Razširitve lahko naredimo na več načinov, ne le tako, kot je prikazano na obeh slikah. Zid je mogoče razširiti tudi v obe smeri (v širino in v višino) hkrati; na sliki 8 je prikazan zid velikosti 7×8, ki ga dobimo z razširitvijo v obe smeri. Na opisani način lahko zgradimo zidove brez razpok velikosti $m \times n$, kjer sta obe stranici dolgi vsaj 5 enot in je ena sode, druga pa lihe dolžine.



Slika 6.

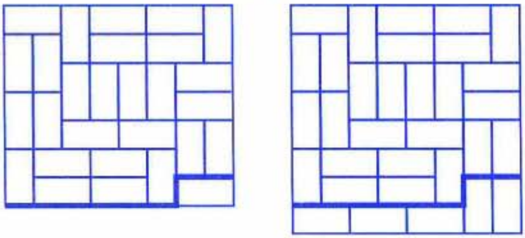


Slika 7.



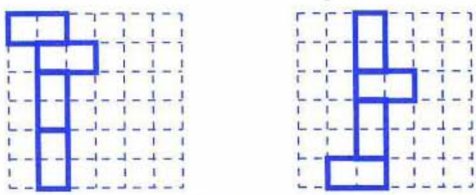
Slika 8.

Ugotoviti moramo še, kako je z zidovi, ki imajo obe stranici sode dolžine in dolgi vsaj 6 enot. Pokažimo, kako skonstruiramo zid velikosti $m \times n$, ki nima razpok, če je vsaj eno od števil m, n, recimo m, strogo večje od 6. V prejšnjem odstavku smo opisali, kako naredimo zid brez razpok, ki je velikosti $(m-1) \times n$. Tega bomo nekoliko spremenili in mu dodali še eno vrsto, tako da bomo dobili zid brez razpok, ki bo velikosti $m \times n$. Pri v prejšnjem odstavku opisani konstrukciji imajo vsi zidovi v desnem spodnjem vogalu vodoravno položeno domino. Le-to postavimo v navpično lego in poleg nje dodamo še eno navpično domino. Ostale domine v dodani vrsti položimo vodoravno. Razširjanje zidu velikosti 7×8 je prikazano na sliki 9. Ker je $m > 6$, so v zadnjih dveh stolpcih razširjenega zidu tudi vodoravno položene domine, tako da ne dobimo razpoke.



Slika 9.

Zidu velikosti 6×6 brez razpok pa ni mogoče narediti. O tem se prepričamo takole. Zid velikosti 6×6 je sestavljen iz 18 domin. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da jih je vsaj 9 položenih navpično (sicer zid vsebuje vsaj 9 vodoravnih domin; zasukamo ga za 90° in vodoravne domine postanejo navpične). Recimo, da nima razpoke. Potem v nobenem stolpcu niso položene tri navpične domine (sicer bi imeli razpoko vsaj na eni strani takega stolpca; celo na obeh, če stolpec ni robni). Zid ima 6 stolpcev, navpično postavljenih domin je vsaj 9, kvečjemu 2 sta v istem stolpcu, torej imamo vsaj 3 stolpce, ki vsebujejo po dve navpični domini. Vsaj eden od teh stolpcev ni robni. Preostali polji v tem stolpcu sta pokriti z vodoravnima dominama. Obe nista obrnjeni v isto smer, saj bi sicer dobili navpično razpoko. Ena vodoravna domina torej gleda v levo, druga pa v desno (glej sliko 10). Toda tedaj imata levi in desni del zidu po liho polj in ju ni mogoče pokriti z dominami, kar je v protislovju s predpostavko, da zid nima razpoke.



Slika 10.

Ugotovili smo, kateri pravokotniki dopuščajo zidove brez razpok in kateri ne. Ostaja pa še veliko zanimivih nerešenih vprašanj, npr. koliko različnih zidov brez razpok lahko sestavimo za večje pravokotnike. Zanimiva je tudi ugotovitev, da ima zid velikosti 6×6 vedno razpoko, medtem ko obstajajo manjši zidovi in veliko večjih, ki razpok nimajo.

Tatjana Juranji

KRIŽANKA "V CERKNEM ODKRIT KIP SLOVENSKI

				OSENČENI POJMI SE NANAŠAJO NA MATEMATIKA	INDUSTRIALEC	DEVORED	IME PISATELJA PREŽIHA	STAR CITROENOV AVTO	DEL OBRAZA	ZAČETEK DNEVA	ENRICO CARUSO
				BREZCILJNO POSTOPANJE							
				MORAVSKO MESTO, KJER JE POUČEVAL							
				REALIST							ALBIN ČIŽMAN
				OTOK ČAROVNICE KIRKE / NAJNIŽJE PIHALO				ROJSTNI KRAJ	KRAJ PRI LJUBNEM / ŽABJA JAJCA		
AVTOR MARKO BOKALIČ	KRATKOTRAJEN DEŽ	24 UR / METODIČNO OBDELANO PODROČJE MAT. OSNOV				HRAST S HRAPAVO SKORJO				TEHNIČNA NAPRAVA	MOGOČEN GORSKI VRH
TEKMOVALNA STEZA						OČE SLOVEN. UČITELJSTVA	ZEVSOVA MATI / VEK (PESNIŠKO)				DOLGO ZGODOVINSKO OBDOBJE
SUROVINA ZA CEMENT						IZVEDENEC					
OPIS, PRIKAZ					PAS PRI OBLAČILU KIMONU	JEZERO IN PROVINCA V KANADI / ČOLN DREVAK					
ČEŠKI REFORMATOR (JAN)				ODPRTINA V ZIDU / HRIB NAD BEOGRADOM					ZAPORNICA / ŠVEDSKA IGRALKA (GRETA)		
LUKA V SV. ALŽIRIJI							IZKLICANA BARVA KART	GALIJ			ITAL. RELIGIOZ. SLIKAR (GUIDO)
ZNAČILNOST PUSTIH, DEŽEVNIH DNI / KRAJ POD ČRNIM KALOM (PLEZALIŠČE)								ALKALOID V VOLČJI ČEŠNJI / ATA			
PALICA ZA ČIŠČENJE PLUGA					UDRTJE / ANDREJ JEMEC					FOTOGRAF ŠELHAUS / ERBIJ	
MEHKA, FINA TKANINA						NJEGOVO NAJBOLJ POGOSTO AVTORSKO DELO					
JUNAK IZ RISANKE, OLIVIN IZBRANEC						ZNANSTVEN I NAUK					

EMU MATEMATIKU”

* 1.1u.1814 ✝ 30.11.1892	SLOV. SKLADAT. (BOJAN)	NENAVADN O VELIK ČLOVEK	ENA OD LASTNOSTI VEKTORJA	RADIJSKA NAPOVEDOVALKA RAHONC	RADON	OSTRA KONICA	MLADEŽ, DECA	MESTO, KJER JE ŠTUDIRAL IN UMRL	PRETEP	NAUK O RAVNOVESJU SIL	ZNAK, KI PODALJŠA NOTO	100 m^2
TEDANJA DRŽAVA NA NAŠIH TLEH												
KDOR KAŽE												
TROSKOKAŠ TOPOLOVČAN TLA POSODE					ZELIŠČAR PRVINA							NAJOŽJI DEL TRUPA
						UMIK S POLOŽAJA AZIJSKA DRŽAVA						
			TV VODITELJICA CAMARA EGIPTOV. KRISTJAN						HRVAŠKA NAFTNA DRUŽBA			
				PISEC HILL GR. BOG LJUBEZNI					KONJSKI TEK EGIPČAN. BOG SONCA			
GLAVNO MESTO ITALIJE	FILOZOFSKI POJEM ARTILER. OROŽJE						SLOVESNO DEJANJE V PREDPISANI OBLIKI	RADIJ ZGODBA			TIP ŠOLE V GORICI, KJER JE PRVIČ UČIL	POLJE IZVEN IGRIŠČA
		KRAJ VZH. OD VRANSKEGA								NATRIJ NJEGOV PEDAGOŠKI NAZIV		
		ČIST ZVOK GORSKO REŠEVALNO VOZILO				MESTO V ROMUNIJI JUD. FILOZ. (URIEL)						
			MOŽ, OČE (ZANIČLJ.) SLAB UČENEC						NEGOVANO ZEMLJIŠČE			
SOVRAŠTVO	KAREL ERBEN STAVČNO LOČILO			ODKRITJE SPOMENIKA V ROJSTNEM KRAJU	CEPIČ SMUČAR. CENTER V ZDA				EDI MAJARON POGRINJEK			PEVKA BAEZ
				VIŠINA VODE ROMUNSKI DŽIP								
		PARIŠKA PEVKA (PATRICIA)					NIZ. MESTO OB REKI MAAS MANGAN					
		TEMELJITO OBDELANA VEJA MATEMATIKE										
		JUNAK ZNAMENITE FRANC. PESNITVE							MONGOLSKI VLADARSKI NASLOV			

KUBI ŠTEVK – Rešitev naloge s str. 39

V besedilu naloge sem zatrdil, da je število 1 edino naravno število, ki je enako vsoti kvadratov svojih števk. Prepričajmo se najprej, da vas nisem nalagal. Recimo, da obstaja n-mestno število x, ki je enako vsoti kvadratov svojih števk. Potem je x gotovo večji od 10^{n-1}, saj je 10^{n-1} najmanjše n-mestno število. Hkrati pa vsota kvadratov števk števila x ni večja od $9^2 \cdot n = 81 \cdot n$. Od tod sledi $10^{n-1} \leq 81 \cdot n$ oziroma $n \leq 3$. Število x je torej kvečjemu trimestno. Označimo z a število stotic, z b število desetic in s c število enic števila x. Po predpostavkah je $x = 100a + 10b + c = a^2 + b^2 + c^2$. Ker je $a, b, c \leq 9$, je $x \leq 9^2 + 9^2 + 9^2 = 243$. Zato je $a \leq 2$. Potem pa je $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2^2 + 9^2 + 9^2 = 166$, torej $a \leq 1$. Če bi bil $a = 1$, bi imeli

$$100 + 10b + c = 1 + b^2 + c^2 .$$

Toda $b^2 < 10b$ in $c^2 < 100$, tako da gornja enakost ne more biti izpolnjena. Število x ima torej kvečjemu dve števki. Poiskati moramo še vse celoštevilske rešitve enačbe

$$10b + c = b^2 + c^2$$

oziroma

$$b(10 - b) = c(c - 1) ,$$

pri čemer $b, c \in \{0, \ldots, 9\}$ in nista oba b in c enaka 0. Takole razmišljajmo. Ker je (natanko) eno od števil c, $c-1$ sodo, števili b in $10-b$ pa sta enake parnosti, mora biti b sod. Zato je (natanko) eno od števil b, $10-b$ deljivo s 4, produkt $b(10-b)$ pa je deljiv z 8. Ker sta faktorja c in $c-1$ na desni strani med seboj tuji števili, 8 pa je potenca praštevila, mora 8 deliti bodisi c bodisi $c-1$. Možne vrednosti za c so torej 0, 8, 1 in 9. Ker je $b(10-b) \leq 25$, pri $c = 8$ in $c = 9$ ni rešitve. Pri $c = 0$ dobimo tudi $b = 0$, tako da ta možnost odpade. Ostane še $c = 1$, od koder izračunamo $b = 0$ in končno $x = 1$.

Poglejmo še, kako je s števili, ki so enaka vsoti kubov svojih števk. Naj bo x tako število. Če ima n mest, potem mora podobno kot pri vsoti kvadratov veljati $10^{n-1} \leq 9^3 \cdot n = 729 \cdot n$ oziroma $n \leq 4$. Kandidati za x so torej števila od 1 do $4 \cdot 729 = 2916$. Ker je možnosti precej več kot pri vsoti kvadratov, pa tudi njihovo preverjanje in pregledovanje je bolj zapleteno, sem se odločil, da raje sestavim kratek program, ki bo preizkusil vse kandidate. Tule je:

```
program KubiStevk;
{ Poišče vsa naravna števila, ki so enaka vsoti kubov svojih števk.      }
var
   kubi: array[0..9] of integer;           { tabela kubov števk 0, 1, ..., 9 }
   n: integer;                             { kandidat; število med 1 in 2916 }
   vsota: integer;                           { vsota kubov števk kandidata }
   nn: integer;
begin
  write('Kubasta stevila: ');
  for n:=0 to 9 do kubi[n] := n*n*n;           { Naračunamo kube števk. }
  for n:=1 to 2916 do begin  { Kandidati imajo kvečjemu štiri števke. }
    nn := n;  vsota := 0;
    while nn<>0 do begin              { Izračunamo vsoto kubov števk. }
      vsota := vsota+kubi[nn mod 10];
      nn:= nn div 10;
    end;
    if vsota=n then write(n:5);       { Število n ima zahtevano lastnost. }
  end;
  writeln;
end.
```

Program sem pognal in v hipu izvedel, da obstaja natanko pet naravnih števil, ki so enaka vsoti kubov svojih števk. To so števila 1, 153, 370, 371 in 407.

Gotovo slutite, kaj vas bom vprašal za konec. Katera naravna števila pa so enaka vsoti četrtih (ali petih, šestih,...) potenc svojih števk? In kakšni so odgovori, če gledamo zapise pri osnovah, ki so različne od 10?

Martin Juvan

KONJEV SKOK

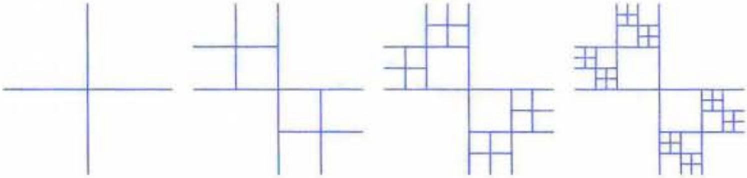
Šahovski konj začne skakati od nekega začetnega polja in skače tako, da pristane na vsakem polju natanko enkrat. Če črke polj, na katere je skočil, zapisujemo po vrsti, dobimo matematični pojem. Kateri?

N	I	E	R
D	E	T	N
A	A	M	T

Dragoljub M. Milošević, prevod *Barbara Japelj*

KRIŽI

Pozorno si oglejte spodnje like in poskusite razbrati pravilo, po katerem so narisani.



Prepričan sem, da z ugotavljanjem pravila niste imeli preveč težav. Sedaj pa poskusite sestaviti še računalniški program, ki bo risal like zgornjih oblik. Verjetno bo najlažje v programskem jeziku logo sestaviti ukaz z dvema vhodnima podatkoma, kjer prvi podatek določa red lika, drugi pa širino osnovnega križa. Liki na zgornji sliki so redov 1, 2, 3 in 4. Še nasvet. Pri programiranju uporabite rekurzijo, da bo program preprostejši, krajši in lažje razumljiv.

Martin Juvan

HITROST V GEOMETRIJI

Nemški matematik Adam Riese (1489–1559) se je v zgodovino zapisal kot pisec znamenitih učbenikov aritmetike, ki so bili v Nemčiji priljubljeni še dolgo za njim. Nekoč sta Riese in neki risar sklenila, da se pomerita v risanju. Določila sta, da naj zmaga tisti, ki bo uspel z geometrijskim orodjem v eni minuti načrtati več pravih kotov.

Risar je najprej potegnil premico. Zatem je z metodo, ki jo tudi danes običajno uporabljamo za konstrukcijo pravega kota, načrtal še nekaj pravokotnic nanjo. Tudi Riese je najprej potegnil premico. Nato pa je nad njo s šestilom zarisal polkrog in mu naglo včrtal še večje število trikotnikov. Prepričljivo je zmagal.

Vilko Domajnko

PREMISLI IN ODGOVORI

Mačka in pol poje ribo in pol v enem dnevu in pol. Koliko rib poje sedem mačk v enem tednu in pol?

Marija Vencelj

KRIŽANKA "FIZIKALNE VEDE" – Rešitev s str. 32

											PRESEK												
	M	A	G	N	E	T	I	Z	E	M			R	A	D	I	O	A	M	A	T	E	R
	E	K	V	I	V	A	L	E	N	C	A		E	L	E	K	T	R	O	N	I	K	A
	H	A		T	A	C	I	T		I	N			S	T	A	T	I	K	A		R	Č
	A	D	A	R		A	R		P	R	I	S	E	G	A		O	T		G	R	A	N
	N	E	L	A◀					H	I	M	A	L	A	J	A		M	O	R	E	N	A
	I	M	E			A	L	F	I		A	S	F	A	L	T		I	V	A	N		
	K	I	L	A		M	E	R	L	E		S	I	R		O	D	J	E	M		E	D
	A	K	U	S	T	I	K	A		D	Z			D	A	L	L	A	S		U	L	I
⊛			J	A	K		A	N	T	I	M	O	N		L	I	E			S	R	E	N
	O	B	A	D		B	R	K	E		A	Z	O	R	I		T	E	R	M	I	K	A
π	P	I			K	I	N	O	L	O	G	I	J	A		T	O	L	A	R		T	M
	T	O	P	L	O	T	A		A	D	A	M		Ž	A	R		A	S	K	A	R	I
	I	L	O	I	L	O		I	V	E			M	E	L	I	K		K	E	M	I	K
	K	O	Z	M	O	L	O	G	I	J	A		I	N	F	O	R	M	A	T	I	K	A
	A	G	A		S	A	M	O	V	A	R		R	J	A		T	I	R	A	N	A	⊛

ALI JE VREDNO POBRATI KOVANEC?

Včasih zagledamo kovanec za 50 stotinov, ki leži na cesti. Ali ga je vredno pobrati? Ali nas bo porabljena energija stala več, kot bi jo za pobrani kovanec dobili v trgovini z živili?

Uporabimo preprost račun, s katerim pridemo do ocene količin, ki so za našo presojo pomembne. Prijem je mnogokrat uporabil E. Fermi v zapletenih razmerah in pogosto dobil vrednosti, ki so bile presenetljivo blizu pravim. Zato takim računom pravimo Fermijeve ocene. Zanje si upamo trditi, da so pravilne znotraj velikostne stopnje.

Če upoštevamo, da stane 1 kilogram rastlinske masti 500 tolarjev in je v njej shranjene za 40 MJ energije, lahko hitro izračunamo, koliko stane pobiranje kovanca. Denimo, da pri pobiranju znižamo težišče za 1 m in da imamo maso 100 kg. Tedaj opravimo delo 1 kJ, za kar pri izkoristku 20% porabimo 5 kJ energije. Ker za 50 stotinov lahko kupimo 1 g rastlinske masti, ki vsebuje 40 kJ, se pobiranje kovanca "splača". Za koliko porabimo vode in mila, ko si po takem pobiranju umijemo roke, pa naj izračunajo bralci sami.

Andrej Likar

VSOTA IN PRODUKTA – Rešitev s str. 12

Naj bo $1997 = n_1 + \ldots + n_k$, kjer so $n_1, \ldots, n_k$ naravna števila. Določiti želimo najmanjšo in največjo mogočo vrednost produkta $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Najmanjše vrednosti ni težko določiti. Ker množimo naravna števila, produkt ne more biti manjši od 1. Vrednost 1 pa lahko dosežemo, in sicer tako, da število 1997 zapišemo kot vsoto 1997 enic.

Nekoliko težje je poiskati največjo vrednost produkta. Prepričajmo se najprej, da v vsoti, ki da največji produkt, ne nastopajo sumandi, večji od 4. Če bi namreč v vsoti obstajal sumand $m > 4$, potem bi ga lahko nadomestili z naravnima številoma $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ in $\lceil \frac{m}{2} \rceil$. Vsota se ne bi spremenila, produkt pa bi se povečal: če je m sod, velja

$$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{m}{2} \rceil = \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} = \frac{m}{2} \cdot \underbrace{\frac{m-4}{2}}_{>0} + m > m\,,$$

če pa je m lih, imamo

$$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{m}{2} \rceil = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m+1}{2} = \frac{m+1}{2} \cdot \underbrace{\frac{m-5}{2}}_{\geq 0} + m + 1 > m\,.$$

Pri tem smo v prvi oceni upoštevali, da je $m > 4$, v drugi pa, da je $m \geq 5$. V vsoti z največjim produktom lahko torej nastopajo le števila 1, 2, 3 in 4. No, enice gotovo ne nastopajo, saj dobimo večji produkt, če jih prištejemo h kateremukoli drugemu sumandu. Tudi štiricam se lahko izognemo, in sicer tako, da jih zamenjamo s parom dvojk. Pri tem se vsota in produkt ohranita. Med vsotami z največjim produktom torej vedno obstaja taka, ki je sestavljena le iz dvojk in trojk. Vendar dvojk ne sme biti preveč. Če bi namreč imeli tri dvojke, bi jih lahko nadomestili z dvema trojkama. Vsota se ne bi spremenila, $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, produkt pa bi se povečal, $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$. Med sumandi sta torej kvečjemu dve dvojki, pri čemer je število dvojk odvisno od ostanka, ki ga ima vsota pri deljenju s 3. Kadar je ostanek enak 0, dvojk ne potrebujemo, pri ostanku 1 moramo vzeti dve, pri ostanku 2 pa eno dvojko.

Ker da število 1997 pri deljenju s 3 ostanek 2, vsota z največjim produktom vsebuje 1 dvojko in $\frac{1997-2}{3} = 665$ trojk,

$$1997 = 2 + \underbrace{3 + \ldots + 3}_{665 \text{ členov}}\,.$$

Največja vrednost produkta je torej $2 \cdot 3^{665}$.

Morda ste opazili, da razen v prejšnjem odstavku nismo nikjer upoštevali, da je vsota enaka 1997. Tako smo pravzaprav rešili nekoliko splošnejšo nalogo. Pokazali smo, da je za vsako naravno število $n > 1$ največja vrednost produkta $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ naravnih števil $n_1, \ldots, n_k$ z vsoto $n_1 + \ldots + n_k = n$ enaka

$$n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = \begin{cases} 3^\ell, & n = 3\ell \quad (\ell \text{ trojk}) \\ 4 \cdot 3^{\ell-1}, & n = 3\ell + 1 \quad (2 \text{ dvojki in } \ell - 1 \text{ trojk}) \\ 2 \cdot 3^\ell, & n = 3\ell + 2 \quad (1 \text{ dvojka in } \ell \text{ trojk}). \end{cases}$$

Pri tem lahko tedaj, ko je n oblike $3\ell + 1$, v vsoti obe dvojki zamenjamo s štirico. To je tudi edina možnost, da v vsoti z največjim produktom nastopi število 4.

Martin Juvan

RAZKRINKAJMO DAVIDA COPERFIELDA – Rešitev s str. 42

Nalogo bomo rešili s teorijo grafov. O njih je Presek že pisal, nazadnje smo jih srečali v prejšnji številki v članku Sandija Klavžarja Varne poti in kratke poti. Pojmom, ki smo jih tam ponovili, dodajmo še dva:

Točki sta *sosednji*, če med njima obstaja povezava. Številu vseh sosed neke točke pravimo *stopnja točke*.

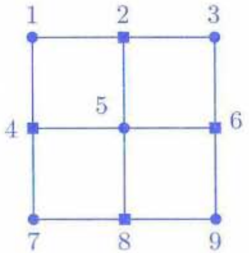
Graf, ki ustreza nalogi iz prejšnje številke Preseka, je prikazan na sliki 1. Polja smo nadomestili s točkami, s povezavami pa smo nakazali možnost gibanja po poljih.

Najprej definirajmo množici

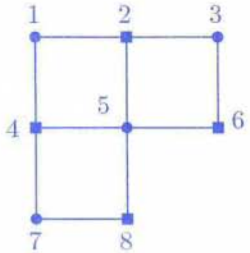
$$A = \{2, 4, 6, 8\} \qquad \text{in} \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Točke iz množice A označimo s kvadratki, točke iz množice B pa s krožci.

1. Stopnja vsake točke iz množice B je soda. Nadalje je razdalja med poljubno točko iz A in katerokoli točko iz B enaka 1 ali 3. Zato je dolžina poljubnega sprehoda, ki se začne v neki točki iz množice A in konča v neki točki iz množice B, liha. Noben sprehod, dolg štiri korake in z začetkom v točki iz A, se ne konča v točki iz množice B. Odstranimo lahko poljubno točko iz množice B, recimo točko 9 (slika 2).



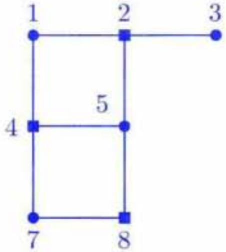
Slika 1.



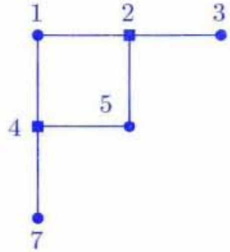
Slika 2.

2. Iz istega razloga se sprehod, dolg pet korakov, ki začenja na polju-točki iz množice A, vedno konča na polju iz množice B; zato lahko odstranimo poljubno točko iz množice A. Naj bo to točka 6 (slika 3).

3. Ostali smo na nekem polju iz množice B. Premik za dva koraka nas privede nazaj na neko polje iz B. Zato lahko odstranimo polje 8 (slika 4).

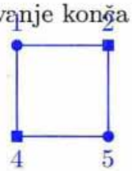


Slika 3.

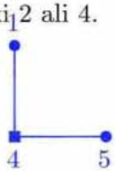


Slika 4.

4. Tako smo ostali na polju iz množice B. Vsi sprehodi, dolgi tri korake, ki se končajo v točki 3 ali 7, se v grafu na sliki 4 začnejo v točkah 2 in 4, zato lahko mirne duše odstranimo polji 3 in 7. Opazimo tudi, da se naše potovanje konča lahko le v točki 2 ali 4.



Slika 5.



Slika 6.

5. Ostala so nam le še polja 1, 2, 4 in 5, stojimo pa na polju 2 ali 4 (slika 5). Vsi sprehodi, ki se začnejo in končajo na poljih 2 ali 4, so sodi. Ker se moramo tokrat premakniti za tri korake, nikakor ne moremo končati v točki 2 ali 4. Zato lahko odstranimo, recimo, točko 2 (slika 6).

6. Ker smo ostali na polju 1 ali 5, je očitno, da nas premik za eno polje nujno privede v točko 4; odstranimo lahko tudi točki 1 in 5.

Matej Mencinger

NA GUGALNICI – Rešitev s str. 15

Racman tehta 10 kg, zajček 6 kg.

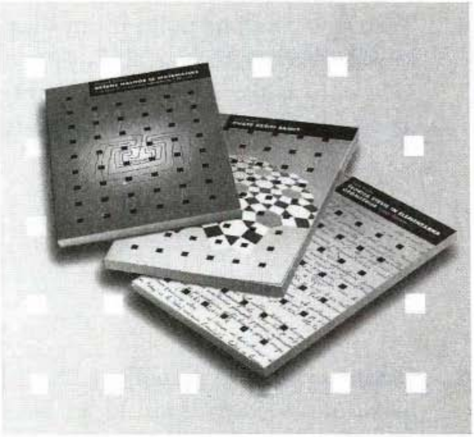
Marija Vencelj

ZBIRKA SIGMA 1997

Pri zbirki Sigma so v letošnjem letu izšle tri zanimive knjige[1]:

Ivan Vidav: TEORIJA ŠTEVIL IN ELEMENTARNA GEOMETRIJA/izbor člankov

Akademik dr. Ivan Vidav je večino svojega raziskovalnega dela posvetil funkcionalni analizi in teoriji operatorjev. Znan pa je tudi po svojih širokih pogledih na matematiko in po svoji skrbi za razvoj pedagoške matematike v Sloveniji. Knjiga Teorija števil in elementarna geometrija je nastala na osnovi več člankov Ivana Vidava s področja elementarne geometrije in teorije števil, dveh področij ki sta še posebej zanimivi za pedagoško matematiko. Članki so večinoma izšli v Preseku ali v Obzorniku za matematiko in fiziko, avtor pa jih je ob tej priliki predelal in preoblikoval v knjižno obliko. Knjiga je namenjena srednješolskim učiteljem in boljšim dijakom kot vzpodbuda za nadaljnje delo.



Jurij Kovič: ZNATE REŠITI SAMI?

Knjiga Znate rešiti sami? vsebuje preko 80 nalog in problemov, ki so namenjeni razmišljujočim srednješolcem. Kot taka je skoraj idealno v skladu z dolgoletno uredniško politiko Knjižnice Sigma, ki naj predvsem skrbi za popularizacijo matematike. Knjiga je razdeljena na osem poglavij: Paradoksi in neskončnost, Hevristika ali vprašanje metode, Geometrija taksijev, Šahovnica, Igrice lovljenja na šahovnici, Figure, Mozaiki, Ciklanje. Delo je napisano tako, da naj pritegne čim širši krog bralcev in jih vpelje v matematični način premišljevanja o problemih. Večina problemov je razrešenih, med njimi pa je veliko komentarjev in zgodovinskih podrobnosti.

[1] Knjige lahko kupite pri komisiji za tisk DMFAS, 1001 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 2964, tel. 061/176-65-53.

Matjaž Željko: REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE z državnih in izbirnih tekmovanj – IV. del

Matematična tekmovanja srednješolcev imajo v Sloveniji dolgo tradicijo. Lansko je bilo že štirideseto. Po prvih dveh v letih 1950 in 1951 je bilo tretje šele leta 1958, od leta 1960 dalje pa poteka vsako leto. Knjiga Rešene naloge iz matematike z državnih in izbirnih tekmovanj – IV. del zajema naloge z izbirnih tekmovanj od leta 1992 do leta 1996, naloge z republiških tekmovanj od leta 1988 do leta 1991 in državnih tekmovanj od leta 1992 do leta 1996. To je že četrta v tem sklopu knjižic, ki so namenjene vsem ljubiteljem matematičnih nalog, je pa tudi zanimiv dokument, saj prikazuje pomembno delo pri popularizaciji matematike med srednješolsko mladino.

Matjaž Omladič

GOBELIN "MOTOCIKEL"

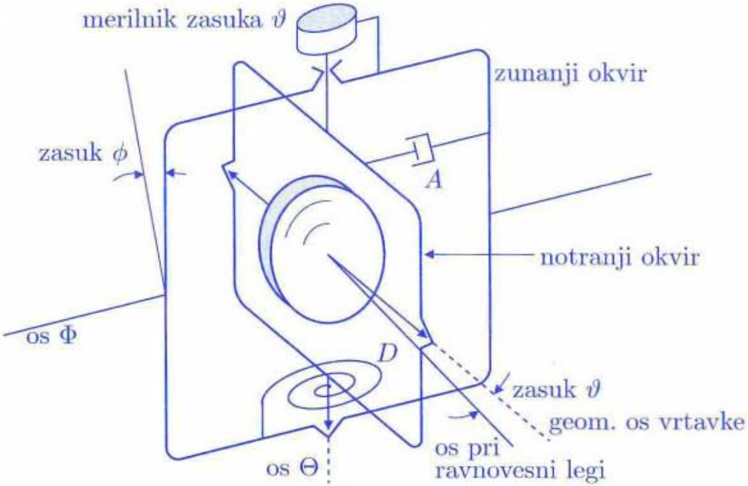
Gobelin rešujemo tako, da na podlagi števil ob zgornjem in levem robu s svinčnikom barvamo (črnimo) polja v mreži. Števila ob robu vsake vrstice in vsakega stolpca povedo, koliko skupin črnih polj je v vrstici oziroma stolpcu in koliko črnih polj je v vsaki strnjeni skupini (torej brez vmesnih belih). Med sosednjima skupinama črnih polj pa je vsaj eno (lahko tudi več) belo polje. Vrstica oziroma stolpec se lahko začne s črnim ali belim poljem. Števila, ki povedo število črnih polj v skupini, so vedno zapisana v pravem vrstnem redu (od leve proti desni za vrstice in od zgoraj navzdol za stolpce).

MOTOCIKEL																											1	5			
									1								2	1	1						6	1	1	5		
								2	1	2					2	2	3	2	1	1					4	2	2	2	2	6	
							3	2	1	2	5	2	3	5	3	3	3	2	2	4	6	7	6	3	4	2	1	1	2	4	7
					3	1																									
				2	1	4																									
				2	1	4																									
				4	2	4																									
			2	3	2	4																									
					2	10																									
				3	5	2																									
			5	4	4	1																									
		4	3	4	2	2																									
2	2	3	4	1	2	1																									
1	1	1	8	1	2	1																									
		2	2	6	2	2																									
					4	3																									

Marko Bokalič

ŽIVALSKI ŽIROSKOP

Vrtavka je zanimiva igrača, če pa jo vpnemo, kot kaže slika 1, postane žiroskop (giroskop). Notranji okvir, ki nosi vrtavkino geometrijsko os, je vrtljivo vpet v zunanji okvir. Os, okoli katere se lahko vrti notranji okvir, imenujmo Θ. Ta os je glede na zunanji okvir nepremična. Zunanji okvir pa se lahko vrti le okoli osi Φ. Vrtavka s polmerom nekaj centimetrov se v sekundi zavrti tudi štiristokrat okoli geometrijske osi.



Slika 1. Vrtavka kot del žiroskopa. Vzmet D in dušilka A povezujeta zunanji in notranji okvir. Zaradi zasuka okrog osi Φ se zasuče notranji okvir okrog osi Θ, zasuk je sorazmeren s kotno hitrostjo $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$.

Med notranjim in zunanjim okvirom je še vijačna vzmet D, ki sili notranji okvir v ravnovesno lego. Da se notranji okvir kar se da hitro umiri v tej legi, je njegovo gibanje dušeno, kar ponazorimo z dušilko A.

Zunanji okvir togo povežemo s telesom, ki mu želimo meriti kotno hitrost Ω okoli osi Φ. Spomnimo se, da je kotna hitrost kvocient med kotom $d\phi$, za katerega se zasuče telo v času dt, in tem časom $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$. Ko se telo vrti, se notranji okvir izmakne iz ravnovesne lege in umiri pri kotu ϑ, ki je sorazmeren s kotno hitrostjo telesa Ω. Ta kot lahko natančno merimo in nato določimo kotno hitrost Ω.

Žiroskope najpogosteje uporabljajo v letalih in raketah, pa tudi pri orientaciji. Podatki o vrtenju letala ali rakete v prostoru so nujni pri pilotiranju, kotne hitrosti pa ne moremo meriti neposredno z opazovanjem vrtenja in merjenjem kota ϕ ali štetjem obratov, ki jih naredi telo v danem času.

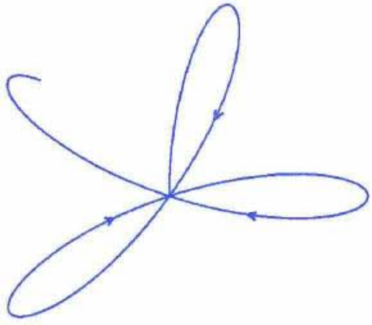
Računska obravnava žiroskopa presega okvir Preseka. V grobem lahko rečemo, da deluje zaradi vztrajnosti, saj vrtavka ohranja geometrijsko os v prostoru, če nanjo ne deluje zunanji navor. Ko zasučemo zunanji okvir, moramo nanj delovati z navorom. Vrtavka se odzove tako, da premakne notranji okvir. Nekaj občutka o delovanju žiroskopa dobimo, ko se igramo s kolesom bicikla. Os vrtečega kolesa skušamo zasukati, pri tem pa smo pozorni na navor, s katerim moramo delovati na os.

Preprostejše so razmere pri žiroskopu na nihalo, ki ga uporabljajo muhe pri letu. Čeprav nam ti insekti niso pri srcu, vseeno občudujemo njihovo neverjetno okretnost v zraku. Pri letu jim pomaga "živalski žiroskop". Muhe so dvokrilci (Diptera), imajo le dvoje letalnih kril, drugi par je zakrnel (slika 2). Prav ta zakrneli par ima pomembno nalogo pri mušjem letu, saj deluje kot žiroskop. Krila so se pri tem paru spremenila v kijca z odebeljenim zgornjim delom in množico senzorjev mehanične napetosti v korenu ob trupu. Pri letu nihata kijca z enako frekvenco kot letalni krili. Pri zavojih so senzorji periodično vzdraženi, kar žuželkam pomaga pri letu. Ko so jim odstranili kijce, je bil let negotov, večinoma se je končal z divjim vrtenjem in strmoglavljenjem.

Slika 2. Zakrneli par kril je spremenjen v žiroskop. Podrobneje vidimo kijec s senzorji na povečani sliki.

Oglejmo si gibanje enega kijca. Da bodo računi kar se da preprosti, si mislimo namesto kijca kroglico z maso m in zelo lahko, skoraj togo prečko, ki povezuje kroglico s trupom. Kroglica naj pri premem letu muhe niha harmonično s krožno frekvenco ω.

Mislimo si, da se ravnina, v kateri nihata kroglica in prečka, suče s kotno hitrostjo Ω okoli osi, ki je pravokotna na tir in gre skozi ravnovesno lego. Gibanje kroglice je v tem primeru zamotano (tir vidimo na sliki 3). Na kroglico deluje poleg sile, sorazmerne z odmikom, še dodatna nihajoča sila prečke. Ta poskrbi, da kroglica sledi nihajni ravnini. Sila je največja pri prehodu nihala skozi mirovno lego in je pravokotna na tir delca (glej sliko 3). Zaradi te sile se pri muhi deformira kijec, to pa zaznajo senzorji v njegovem korenu.



Slika 3. Tir kroglice pri nihalu, ki se mu suče nihajna ravnina. Kroglica se začne gibati navzgor.

Do amplitude sile pridemo tako, da opazujemo kroglico le pri prehodu skozi ravnovesno lego. Takrat ima kroglica hitrost $v_0 = r_0\omega$, kjer smo z r_0 označili amplitudo nihanja. Po kratkem času dt se ravnina zasuče za kot Ωdt, kroglica pa se iz izhodišča premakne za $v_0 dt$. Sprememba hitrosti dv pravokotno na prvotno smer je zato $v_0(\Omega dt) + (v_0 dt)\Omega = 2v_0\Omega dt$. Prvi člen opiše spremembo hitrosti zaradi zasuka ravnine, drugi pa dodatno tangencialno hitrost, ki jo dobi telo, ker je oddaljeno iz izhodišča. Iz Newtonovega zakona potem dobimo amplitudo sile $F_0 = ma = mdv/dt = 2mv_0\Omega$. Amplituda sile je torej sorazmerna z Ω, žiroskop pa je tem bolj občutljiv, čim večji sta hitrost v_0 in masa m.

Andrej Likar

POENOSTAVI

Poenostavi izraza

$$\left(1-\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

in

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99}\right).$$

Marija Vencelj

MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA 1998

V šolskem letu 1997/98 bo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organiziralo celoletne priprave na mednarodno matematično olimpiado, ki bo julija 1998 na Tajvanu. Na pripravah, ki bodo potekale enkrat mesečno, bodo kandidati ob reševanju nalog olimpijskega tipa obdelali tudi pripadajočo teorijo.

Olimpijska ekipa bo v letu 1998 izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov in državnega tekmovanja. Vsak od izbirnih testov in državno tekmovanje bodo pri izboru enakovredno upoštevani.

Prvi izbirni test bo 23. januarja 1998, drugi izbirni test bo 24. aprila 1998, državno tekmovanje bo predvidoma 16. in 17. maja 1998. Zainteresirani dijaki lahko dobijo podrobnejše informacije pri svojem mentorju oz. profesorju matematike ali po elektronski pošti na naslovu:

`math.comp@fmf.uni-lj.si`,

koledar aktivnosti (z datumi) pa je ob vsakem času dostopen po Internetu: URL:

`http://www.fmf.uni-lj.si/~mathcomp/koledar.html`.

Informacije lahko dobite tudi pri spodaj podpisanem na Fakulteti za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061) 1766–675.

Matjaž Željko

32. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

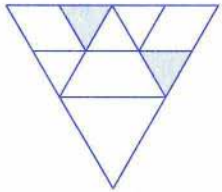
19. aprila 1997 se je 1744 šestošolcev, 1578 sedmošolcev in 1655 osmošolcev na področnem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 579 učencev 6. razreda, 545 učencev 7. razreda in 559 učencev 8. razreda. Tudi letos so učenci reševali naloge v dveh sklopih. Prvih šest nalog je bilo izbirnega tipa z obkrožanjem ustreznega odgovora, nato pa še tri "klasične" naloge. Naloge, ki jih je pod predsedstvom prof. Terezije Uran izbrala državna tekmovalna komisija, so bile:

6. razred

A1 Števke (cifre) letnice 1997 ločimo s piko enkrat ali večkrat in tako dobimo sedem različnih zmnožkov, npr. $199 \cdot 7$ ali $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7$ ali $19 \cdot 9 \cdot 7$ ... Nobeden od teh zmnožkov ni deljiv z (s):

(A) 11 (B) 9 (C) 7 (Č) 3 (D) 2

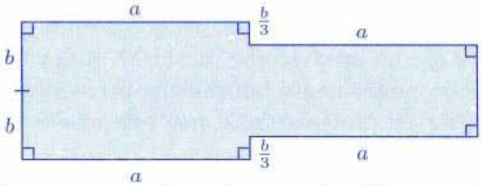
A2 Kolikšen del največjega trikotnika je osenčen?



(A) šestina (B) sedmina (C) osmina

(Č) devetina (D) šestnajstina

A3 Kolikšna je ploščina lika na skici, če je $a = 10$ cm, $b = 3$ cm?

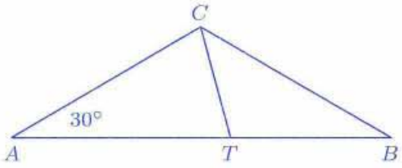


(A) 120 cm^2 (B) 100 cm^2 (C) 90 cm^2 (Č) 60 cm^2 (D) 40 cm^2

A4 V košari je 40 jabolk in 60 hrušk. Dodamo še 100 jabolk. Koliko odstotkov sadja v košari so jabolka?

(A) 40% (B) 50% (C) 70% (Č) 140% (D) 200%

A5 Na osnovnici enakokrakega trikotnika $\triangle ABC(\overline{AC} = \overline{BC})$ z notranjim kotom $\sphericalangle A = 30^\circ$ označimo točko T, tako da je $\overline{AC} = \overline{AT}$. Velikost kota $\sphericalangle TCB$ je:



(A) 45° (B) 40° (C) 35° (Č) 30° (D) 25°

A6 Jure ima zajčke in kletke. Če da v vsako kletko po enega zajčka, ostane en zajček brez kletke. Če pa da v vsako kletko po dva zajčka, ostaneta dve kletki prazni. Koliko zajčkov ima Jure?

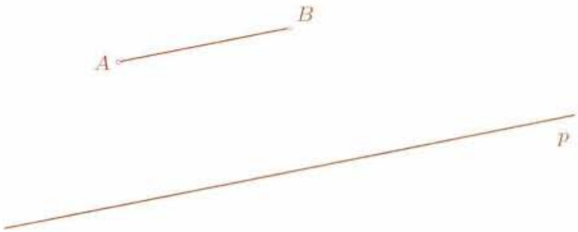
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (Č) 6 (D) 7

B1 Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{3} + 2,5 \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot 0,5 - \left(1,75 - 2\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{21}\right) \cdot \frac{2}{5}.$$

B2 Vsota dveh števil je 37. Če prvo število deliš z drugim, dobiš količnik 3 in ostanek 5. Kateri števili sta to?

B3 Dana je daljica AB in premica p, tako da velja $AB \parallel p$. Nariši (na tem listu) krožnico, ki poteka skozi točki A in B in se dotika premice p.



7. razred

A1 Števke (cifre) letnice 1997 ločimo s + (plus) enkrat ali večkrat in tako dobimo sedem različnih vsot, npr. $1+9+9+7$ ali $199+7$ ali $1+99+7$ ... Natančno ena od teh vsot je deljiva z (s):

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (Č) 4 (D) 6

A2 Kolikšna je vrednost izraza $\frac{19{,}97^2}{1{,}997^2}$?

(A) 1997 (B) 1000 (C) 100 (Č) 10 (D) 1

A3 Iz 40 g soli želimo napraviti 8% raztopino. Koliko vode moramo priliti?

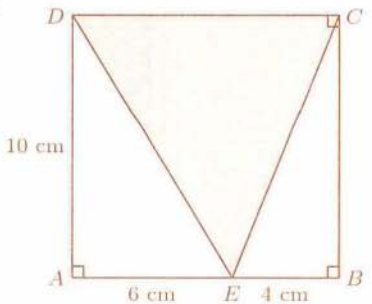
(A) 46 g (B) 460 g (C) 500 g (Č) 540 g (D) 640 g

A4 Ploščina trikotnika $\triangle ECD$ na skici je:

(A) 30 cm^2 (B) 40 cm^2

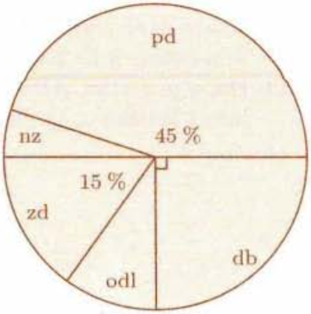
(C) 50 cm^2 (Č) 60 cm^2

(D) 70 cm^2



A5 Krožni diagram prikazuje učni uspeh 680 učencev neke osnovne šole ob zaključku šolskega leta. Koliko učencev je doseglo odličen uspeh?

(A) 10 (B) 15 (C) 36 (Č) 45 (D) 68



A6 1 cm^3 ledu tehta 0,92 grama. Koliko tehta 1 liter ledu?

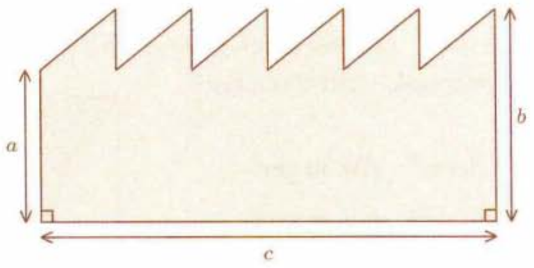
(A) 9,2 g (B) 92 g (C) 0,92 kg (Č) 9,2 kg (D) 920 kg

B1 Izračunaj vrednost izraza:

$$\sqrt{3-\left(4-3\frac{1}{5}:0,32\right)^{2}+(0,5\cdot 8-9)^{2}\cdot 5-\frac{1}{11}\cdot 11^{2}}\,.$$

B2 Avtobusno podjetje računa ceno izleta glede na število potnikov in glede na število prevoženih kilometrov. Sedmi razred neke osnovne šole je organiziral izlet. Udeležilo se ga je 50 učencev, prevozili so 300 km in vsak učenec je plačal 1500 SIT. Ali bi 4000 SIT za učenca zadoščalo za izlet, ki bi se ga udeležilo 40 učencev in bi prevozili 700 km dolgo pot? Odgovor utemelji.

B3 Ploščino lika na skici izrazi z dolžinami a, b in c.



8. razred

A1 Zadnja števka (cifra) potence 199^7 je:

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (Č) 7 (D) 9

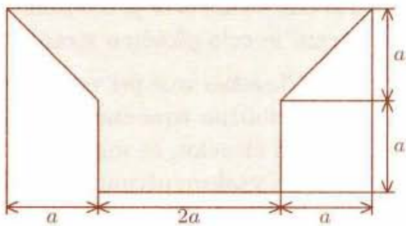
A2 Na premici ležijo po vrsti točke A, B, C in D, tako da velja $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 1 : 2 : 3$. Dolžina daljice, ki ima za krajišči središči daljic AB in CD, meri 24 cm ($\overline{S_1S_2} = 24$ cm). Kolikšna je dolžina daljice BC?

(A) 4 cm (B) 10 cm (C) 12 cm (Č) 18 cm (D) 24 cm

A3 Na skici je narisan prerez nakovala. Obseg tega prereza je približno:

(A) $9a$ (B) $9,41a$ (C) $10a$

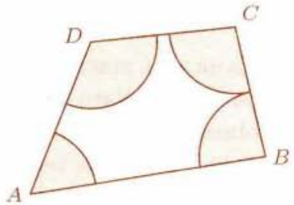
(Č) $10,82a$ (D) $11,82a$



A4 V štirikotniku $ABCD$ z dolžino stranice $\overline{BC} = b$ smo narisali štiri krožne izseke z enakim polmerom, kot je prikazano na sliki. Vsota ploščin vseh krožnih izsekov je:

(A) $\frac{\pi b^2}{4}$ (B) $2\pi b^2$ (C) $\frac{\pi b^2}{2}$

(Č) $2\pi b$ (D) πb^2



A5 Naj bo $n^3 = n + 1$. Katera enakost tedaj ne velja?

(A) $n^4 = n^2 + n$ (B) $n^4 + n^3 = n^2 + 1$ (C) $n^4 = n^3 + n^2 - 1$
(Č) $n^2 = 1 + \frac{1}{n}$ (D) $n^6 = n^3 + 1 + 2n$

A6 Če je $\frac{5}{6}$ nekega števila 60, potem je $\frac{3}{4}$ tega števila:

(A) $37\frac{1}{2}$ (B) 45 (C) 54 (Č) $66\frac{2}{3}$ (D) 70

B1 Stranici pravokotnika sta $a = \sqrt{1997} + \sqrt{1797}$ in $b = \sqrt{1997} - \sqrt{1797}$. Izračunaj njegovo ploščino in obseg.

B2 Traktor pri oranju obrača zemljo. Koliko kubičnih metrov zemlje obrne traktor, če orje 25 cm globoko in če meri zorana njiva 1 hektar?

B3 Načrtaj trikotnik $\triangle ABC$, če sta stranici a in b v razmerju $4 : 5$ ($a : b = 4 : 5$), notranji kot $\sphericalangle C$ meri $60°$, polmer trikotniku očrtane krožnice pa $r = 4,8$ cm. Nariši skico.

Aleksander Potočnik

16. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

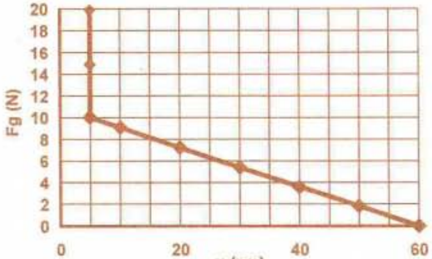
7. razred

1. Z mrežo medsebojno pravokotnih črnih črt pokrijemo stran A4 (29,7 cm x 21,0 cm). Razdalja med sredinama sosednjih vzporednih črt je 1,0 cm, širina črte je 3,0 mm. Kolikšno je razmerje med belim delom strani in celo ploščino strani? Rezultat zapiši še v procentih.

2. a) Človeško srce pri vsakem stisku iztisne okrog 0,7 dl krvi v ožilje. Približno izračunaj, kolikšen je prostorninski tok krvi skozi srce pri človeku, če miruje.
   b) Pri vsakem utripu opravi srce delo okrog 1 J. Približno izračunaj, koliko dela opravi človeško srce v življenjski dobi 60 let. Izračunaj tudi, kako visoko bi dvigalo dvignilo breme z maso 10 ton, če bi pri tem opravilo enako delo kot srce v 60 letih.

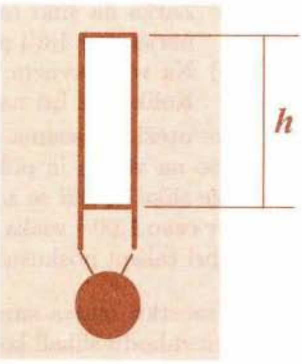
3. Na prazni zračni blazini sta dva sošolca: Tine stoji, Marko pa leži na hrbtu. Nato začneš z usti blazino napihovati. Denimo, da lahko blazino napihuješ s tlakom, ki je za 5 kPa večji od zunanjega zračnega tlaka. Tinetova teža je 500 N, Markova pa 700 N. Velikosti stičnih ploskev sošolcev z blazino oceni sam.
   a) Katerega od obeh sošolcev bo blazina zagotovo dvignila od tal? Odgovor utemelji z računom!
   b) S koliko večjim tlakom od zunanjega zračnega tlaka je potrebno napihovati blazino, če naj blazina dvigne oba sošolca?

4. Miha je na kavelj, ki je 1,0 m nad mizo, obesil vzmet. Na spodnji konec vzmeti, do koder je meril razdaljo x, je obešal različne uteži. Vsakokrat je obesil le eno utež, višine vseh uteži so enake 5,0 cm. Nato je narisal diagram: teža uteži F_g v odvisnosti od razdalje x, kot kaže slika. Nariši sliko poskusa in razmisli, katero razdaljo x je Miha meril.



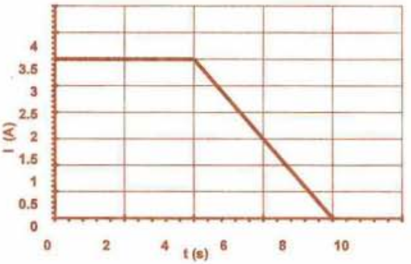
   a) Kolikšna je dolžina neobremenjene ($F_g = 0$) vzmeti?
   b) Nariši diagram: sila vzmeti F_v v odvisnosti od raztezka vzmeti s.
   c) Kolikšna je pri tem poskusu sila vzmeti, ko je teža uteži 15 N?

5. V svojem učbeniku imaš sliko modela kartezijskega plavača. Plavač na tejle sliki pa je narejen iz steklene epruvete, kot obtežitev pa ima na dnu stekleno kroglico, ki je z dvema tankima lahkima nitkama pritrjena na epruveto. Plavač je ves potopljen v vodi in miruje. Epruveta je narejena iz 0,30 mm debelega stekla, ima notranji presek 1,00 cm^2 in maso 1,43 g. Masa kroglice je 6,03 g. Gostota stekla je 2,50 g/cm^3, gostota vode pa 1,00 g/cm^3. Kolikšna je višina zraka h v epruveti?



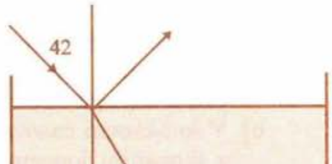
8. razred

1. V učbeniku preberemo podatek, da tok 1,0 A v času 1,0 s izloči pri elektrolizi modre galice 1/3 mg bakra.
   a) Koliko bakra izloči tok 3,0 A v 3,0 s?
   b) Koliko bakra v času 10 s izloči tok, ki se spreminja tako, kot kaže diagram?



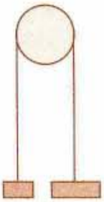
2. Del 200 m dolgega smučarskega poleta v Planici bi v približku lahko opisali takole: Med oznakama 160 m in 170 m leti skakalec 2 m nad doskočiščem, ki ima naklon 45°. Leti *premo enakomerno* s hitrostjo 100 km/h. Masa skakalca s smučmi je 80 kg.
   a) Poleg teže deluje na skakalca še sila zraka. Kolikšna je med omenjenima oznakama sila zraka na skakalca? Nariši tudi smer sile.
   b) Iz izreka o kinetični in potencialni energiji izračunaj delo sile zraka na skakalca med oznakama 160 m in 170 m.

3. Na mizi stoji akvarij, v katerem sega voda 50 cm visoko, na dnu akvarija pa je ravno zrcalo. Na vodno gladino posvetimo z ozkim curkom svetlobe pod kotom 42°, kot kaže slika. Nekaj odstotkov svetlobe se odbije na gladini, večina pa se lomi v vodo pod kotom 30°, nato pa odbije na zrcalu na dnu.



a) Žarka na sliki nista narisana do konca. Sliko preriši na list in nariši nadaljnji potek žarkov (do stropa sobe).
b) Na vodoravnem stropu vidimo šibkejšo in močnejšo svetlo liso. Koliko sta lisi narazen?

4. Dve uteži z masama $m_1 = 1{,}00$ kg in $m_2 = 1{,}50$ kg obesimo na vrvico in položimo na gladko okroglo palico, kot kaže slika. Uteži se začneta gibati enakomerno pospešeno in v času 1,00 s vsaka prepotuje razdaljo 0,75 m. Kolikšna je pri takem poskusu zaviralna sila trenja?



5. V začetku marca smo malo po sončnem zahodu slikali komet Hale-Bopp. V kolikšnem času po nastanku slike je komet zašel? Zvezde in z njimi tudi komet navidezno krožijo okoli Severnice, saj lahko gibanje kometa glede na zvezde pri tako kratkih časih zanemarimo. Pomagaj si z načrtovanjem.

Mirko Cvahte, Zlatko Bradač

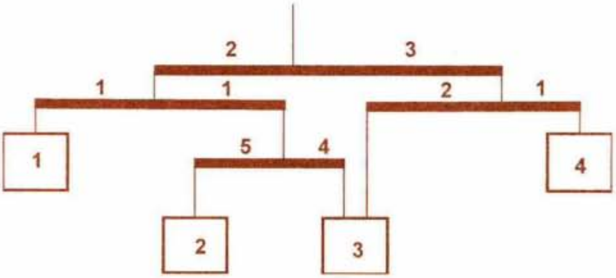
NALOGE S PREDTEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1996/97

Tekmovanje je bilo izvedeno 22. marca 1997 po regijah. Sodelovalo je 950 tekmovalcev iz 53 srednjih šol. Najboljši iz posameznih regij so sodelovali na državnem tekmovanju.

Skupina A

1. Dva avtomobila enakomerno vozita v konstantni medsebojni razdalji. S spredaj vozečega avtomobila odpade izpušni lonec. Zadaj vozeči voznik ge ne opazi in zapelje čezenj z nespremenjeno hitrostjo. V hiši ob cesti zaslišijo dva žvenketa; prvega ob padcu izpušnega lonca na cesto in drugega ob vožnji zadaj vozečega avtomobila čez izpušni lonec. Žvenketa slišijo v časovnem razmiku 4,0 s.
   a) Izračunaj prvotno medsebojno razdaljo med avtomobiloma, če je pojemek izpušnega lonca, ko drsi po tleh, $4{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ in hitrost posameznega avtomobila 72 km/h.
   b) V kolikšnem časovnem razmiku bi slišali žvenketa, če bi skupno z izpušnim loncem odpadel še zadnji odbijač sprednjega avtomobila in bi bil zaradi večjega trenja pojemek odbijača in lonca 3-krat večji?

2. Štiri uteži so obešene na štirih medsebojno povezanih tehtnicah, kot kaže slika. Vsaka tehtnica je sestavljena iz lahke letvice, ki je z drugimi povezana z lahkimi vrvicami. Številke nad letvicami povedo, v kolikšnem razmerju sta dolžini letvice levo in desno od osi. Izračunaj teže uteži, označenih s številkami 2, 3 in 4, če veš, da so vse tehtnice v ravnovesju in je teža uteži s številko 1 enaka 90 N.



3. Manjša tovorna ladja s težo 300 kN in dolžino 24 m je zasidrana v pristanišču. Trup ladje ima obliko polovice valja. Osnovna ploskev je polkrog s polmerom 1,5 m. Trup je votel, stene in paluba pa so iz istega materiala ter so enako debele. Kabina je majhna in njeno težo smemo zanemariti. Ladja se *potopi,* če gladina vode seže ravno čez celo palubo. Na palubo nalagamo enake zaboje s težami po 2600 N, in sicer simetrično glede na črto, ki vzdolž ladje deli palubo po sredini. Zaboji stojijo na palubi in niso zloženi drug na drugega.

a) Koliko zabojev smemo še naložiti na palubo, da bo plavanje ladje še stabilno? Višina posameznega zaboja je 100 cm.

b) Kolikšno pa je največje iskano število zabojev, če so visoki po 60 cm?

Natovorjena ladja plava *stabilno,* če je njeno težišče pod palubo. Specifična teža vode je 10 kN/m^3.

Težišče homogene polkrožne plošče je od središča (namišljenega celega kroga) oddaljeno za $4r/(3\pi)$, če je r polmer plošče. Pri težišču homogenega polkrožnega obroča pa je ustrezna razdalja $2r/\pi$.

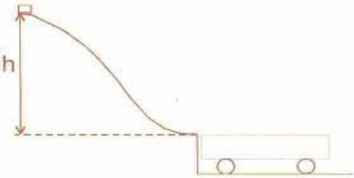
Skupina B

1. Sedemtonski tovornjak vozi iz Vipave v Ajdovščino. Na ravnem odseku bočno zapiha sunek burje s hitrostjo 200 km/h. Sunek traja 1,0 s. Koeficient trenja med tovornjakom in cesto je v prečni smeri (glede na smer vožnje) 0,60. Kako daleč na nasprotni pas zanese tovornjak?

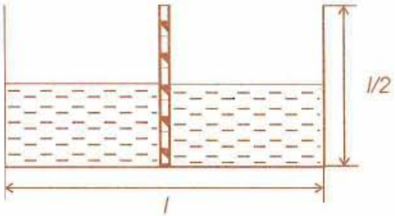
Sila zračnega upora na telo je sorazmerna s kvadratom hitrosti, s katero piha veter, $F_u = \frac{1}{2}\rho C S v^2$, kjer je S prečni presek predmeta, C koeficient upora in ρ gostota zraka. Prečni presek tovornjaka ima ploščino 24 m^2, koeficient upora pa je 1,1. Gostota zraka je 1,3 kg/m^3, težnostni pospešek pa 9,8 m/s^2.

2. Tovornjak, naložen z opekami, vozi s hitrostjo 14 m/s. S prikolice tovornjaka, ki je 2,0 m nad tlemi, pade opeka. Na kolikšni poti se opeka ustavi, če je koeficient trenja med opeko in cesto 0,80? Trk opeke s tlemi je neprožen in traja zelo kratek čas.

3. Telo z maso 1,0 kg drsi brez začetne hitrosti po gladkem klancu z višine $h = 60$ cm. Na koncu, kjer klanec preide v vodoravnico, zdrsne telo na mirujoč voziček z maso 2,0 kg. Koeficient trenja med telesom in površino vozička je 0,70. Kolikšno pot opravi telo glede na voziček, preden se glede na voziček ustavi?



4. Posoda je s tankim lahkim batom, gibljivim v vodoravni smeri brez trenja, razdeljena na dva enaka dela. Vsak del je do polovice napolnjen z vodo. Posoda se začne gibati s pospeškom $g/2$ v vodoravni smeri. Za koliko se premakne bat, če je dolžina posode l, višina pa $l/2$?

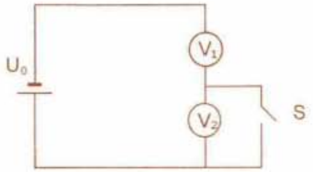


Skupina C

1. Prostornina Aladinove svetilke, v kateri je pod tlakom zaprt duh, meri 0,10 l. Temperatura neona, iz katerega je duh sestavljen, je enaka 20° C. Aladin začne svetilko drgniti s povprečno hitrostjo 10 cm/s in silo trenja 5,0 N. Ko tlak v svetilki doseže 100 barov, se pokrov svetilke odpre in pokaže se duh, v obliki obrnjenega stožca z višino 100 cm in z radijem osnovne ploskve 10 cm. Zunanji tlak je 1 bar.

Koliko časa mora Aladin drgniti svetilko, če je njena toplotna kapaciteta zanemarljivo majhna, da se prikaže duh? Specifična toplota duha pri konstantnem volumnu je 620 J/kg K, kilomolska masa 20 kg, njegova telesna temperatura pa znaša 37° C. Splošna plinska konstanta je 8300 J/K.

2. Pri sklenjenem stikalu S kaže voltmeter V_1 80% napetosti U_0. Koliko kažeta volmetra V_1 in V_2 pri nesklenjenem stikalu S? Notranji upor voltmetra V_2 je dvakrat večji od notranjega upora voltmetra V_1.



3. Dve vesoljski ladji mirujeta v breztežnem prostoru. Prva ladja izstreli proti drugi električno nabit izstrelek z maso 10 kg in nabojem 100 mAs. Hitrost izstrelka je 10 km/s. Druga ladja se v trenutku izstrelitve obda z močnim homogenim magnetnim poljem na velikem območju. Takoj po izstrelitvi se začne prva ladja gibati premo enakomerno pospešeno s pospeškom 100 g v smeri 30° glede na prvotno zveznico med ladjama proti drugi. Smer magnetnega polja je pravokotna na ravnino, v kateri ležita zveznica med obema ladjama in tir prve ladje. Kolikšno gostoto magnetnega polja mora ustvariti druga ladja, da bo izstrelek zadel prvo ladjo?

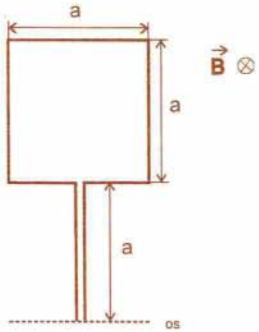
4. Enaki navpični plošči ploščatega kondenzatorja, katerih vsaka ima ploščino 9,0 dm^2, sta pritrjeni na izolirani stojali. Plošči staknemo, nato pa ju razmaknemo na razdaljo 8,0 cm, a na vsaki ostane še nekaj naboja. Na sredini vsake plošče je drobna luknjica, in sicer tako, da je premica skozi obe luknjici pravokotna na obe plošči. Med plošči priključimo napetost 1,0 kV, v sredino kondenzatorja, v višini obeh luknjic pa damo delec alfa. Le-ta se prvič spet vrne v začetno lego po 1,5 μs.

   a) Kolikšen naboj je bil na vsaki od plošč potem, ko smo ju staknili? Kakšen je bil njegov predznak?
   b) Za koliko se je delec alfa največ oddaljil od kondenzatorja?

Delec alfa je helijevo jedro in ima naboj $3{,}2 \cdot 10^{-19}$ As ter maso $3{,}3 \cdot 10^{-27}$ kg. Influenčna konstanta je $8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

Skupina D

1. V homogenem magnetnem polju z gostoto 2,0 T je žična zanka, kot je prikazano na sliki. Zanka je v navpični ravnini in je vrtljiva okrog vodoravne osi. Po zanki teče tok 4,0 A. Masa zanke je 60 g, stranica $a = 10$ cm.



   a) V kakšni smeri mora teči tok, da se zanka vrne v prvotno lego, če jo malo izmaknemo iz zgornje lege?
   b) Zanko malo izmaknemo iz prvotne lege in spustimo. S kolikšnim nihajnim časom zaniha?

2. Delamo poskus v razredčenem plinu. Imamo valjasto posodo, katere osnovni ploskvi sta plošči kondenzatorja. Ena plošča je pritrjena, druga pa lahko drsi brez trenja po notranjosti posode, tako da je ves čas vzporedna z drugo ploskvijo. Plošči sta prevodni, plašč valja pa je iz električnega izolatorja. Posoda je v vodoravnem položaju, plošči sta navpični. Na začetku je znotraj in zunaj posode tlak 10 mPa in temperatura plina 300 K. Med poskusom plin ne more uhajati iz posode. Plošči priključimo na izvir napetosti in le-to *počasi* povečujemo, dokler ne pride v posodi do preboja. V tem trenutku se izvir samodejno izklopi.
   a) Kolikšna je razdalja med ploščama, ko pride do preboja? Na začetku sta plošči v razdalji 2,0 cm, prebojna jakost električnega polja v plinu pa je 20 kV/m.
   b) Kolikšna sta temperatura in tlak plina v kondenzatorju takoj po preboju? Premična plošča je dovolj težka, da se takoj po preboju še ne premakne.

   Razmerje specifičnih toplot je 1,4. Influenčna konstanta je $8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

3. *Radiometer* sestavljata dve *veliki*, enaki, vzporedni in na obeh straneh počrnjeni plošči v medsebojni razdalji 12 mm, med katerima je zrak. Na vsako ploščo je pritrjen en spoj termoelementa s koeficientom termične napetosti 40 μV/K. Napetost med obema spojema merimo z voltmetrom. Iz te napetosti lahko določimo razliko gostot svetlobnih tokov, ki padata *pravokotno* na vsako ploščo.
   a) Privzemi, da se temperaturi plošč in sobna temperatura med sabo le malo razlikujejo. Pokaži, da je izmerjena razlika go-

stot svetlobnih tokov tedaj sorazmerna z izmerjeno napetostjo in določi sorazmernostni koeficient.

b) V temni sobi delamo poskus s točkastim svetilom, ki oddaja svetlobo enakomerno na vse strani. Postavimo ga v razdaljo 60 cm od radiometra, in sicer tako, da je zveznica z radiometrom pravokotna na plošči. Za koliko ga moramo dvigniti v smeri, pravokotni na prejšnjo zveznico, da izmerjena napetost pade na polovico začetne vrednosti?

Plošči sta črni telesi. Poskus delamo pri sobni temperaturi 20 °C, pri kateri znaša toplotna prevodnost zraka $260 \cdot 10^{-4}$ W/mK. Stefanova konstanta je $5{,}7 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4.

Termoelement je narejen iz dveh žic iz različnih prevodnikov, spojenih v dveh točkah v električni krog. Če sta spoja na različnih temperaturah, se v krogu pojavi gonilna napetost, sorazmerna z razliko temperatur $U = k(T_2 - T_1)$, kjer je k koeficient termične napetosti.

Če se dve količini a in b le malo razlikujeta med seboj ($a \approx b$), približno velja $a^4 - b^4 = 4a^3(a - b)$.

Ciril Dominko

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Izbirno tekmovanje iz matematike je potekalo v soboto, 12. aprila 1997. Tekmovalci so si belili glavo ob naslednjih nalogah:

Prvi letnik

1. Za naravni števili m in n velja $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$. Janezek je našel tako naravno število k, da se vrednost ulomka $\frac{m}{n}$ ne spremeni, če števcu prištejemo število k, imenovalec pa s tem številom pomnožimo. Poišči vse take pare števil m in n.

2. Poišči vse rešitve enačbe $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$, kjer sta a in b pozitivni realni števili.

3. Poišči točko v konveksnem štirikotniku, za katero je vsota razdalj do posameznih oglišč najmanjša.

4. Po slastni večerji je Marko, ki je imel v denarnici le 100-tolarske bankovce, sklenil, da bo dal natakarju napitnino v višini med 5 in 15% vrednosti računa. Ko je dobil račun, je opazil, da celotnega zneska ne more plačati samo s stotaki, saj bi natakar dobil bodisi preveč bodisi premalo napitnine. Poišči največji celoštevilski znesek računa, za katerega Marko željenega ne more narediti.

Drugi letnik

1. Dokaži, da enačba $a^2 + b^2 - 8c = 6$ nima celoštevilskih rešitev.
2. Točka P je 9 enot oddaljena od središča krožnice s polmerom 15. Koliko različnih tetiv s celoštevilsko dolžino lahko postavimo skozi P?
3. Dan je kvadrat $ABCD$. Razpolovišče stranice CD označimo z E, presečišče daljic AE in BD pa z F. Izračunaj razmerje $|AF| : |FE|$.[1]
4. Za katere vrednosti parametra a imata enačbi

$$19\,x^2 + a\,x + 97 = 0 \quad \text{in} \quad 97\,x^2 + a\,x + 19 = 0$$

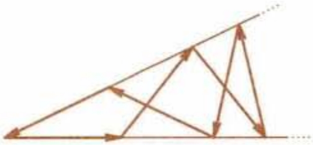
skupno rešitev?

Tretji letnik

1. Poišči vsa naravna števila n, za katera število $n^8 - n^2$ ni deljivo z 72.
2. Dana je enačba $(x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - 2 - x = 0$.
   (a) Pokaži, da rešitvi enačbe $x^2 - 4x - 2 = 0$ zadoščata gornji enačbi.
   (b) Poišči vse rešitve gornje enačbe.
3. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik. Dokaži, da je

$$|AC| \cdot \sin \sphericalangle DAB = |BD| \cdot \sin \sphericalangle ABC.$$

4. Bolha skače izmenoma po krakih kota (glej skico). Vsi njeni skoki so enako dolgi. Svojo pot začne v vrhu, kamor se po sedmem skoku tudi vrne. Koliko meri kot?



Četrti letnik

1. Poišči najmanjše naravno število, ki ga lahko zapišemo kot vsoto devetih, desetih in kot vsoto enajstih zaporednih naravnih števil.
2. Naj bosta m in n naravni števili. Dokaži naslednjo enakost:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

3. Dan je paralelogram $ABCD$ in taka točka M izven njega, da je $\sphericalangle MBC = \sphericalangle CDM$. Dokaži, da je tudi $\sphericalangle CMB = \sphericalangle DMA$.

---

[1] Objavljena je pravilno formulirana naloga. Vsem prizadetim se tekmovalna komisija opravičuje.

4. Skozi središče kocke z robom 3, sestavljene iz 27 enotskih kockic, postavimo ravnino, ki je pravokotna na eno od njenih telesnih diagonal. Koliko enotskih kockic preseka ravnina?

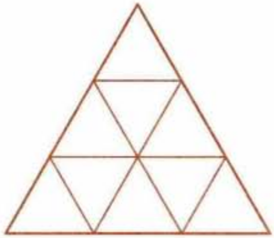
Matjaž Željko

18. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Rešitve pomladanskega kroga

Prva skupina

1. Med števili od 1 do 9 ima le število 5 iskano lastnost. Sedaj si oglejmo števila od $10n$ do $10n+9$ za $1 \leq n \leq 198$. Za vsak n imata med naštetimi števili natanko dve iskano lastnost. Med števili od 1990 do 1997 pa imata iskano lastnost števili 1991 in 1996. Torej je takih števil 399.

2. Oglejmo si daljice, ki biljardno mizo razdelijo na 9 enako velikih enakostraničnih trikotnikov (glej sliko na desni). Tvorijo sklenjeno pot, ki zadošča običajnem odbojnem zakonu in gre preko središča mize trikrat, vsakič v drugi smeri. Torej je zgodba lažnjivega Kljukca lahko resnična.



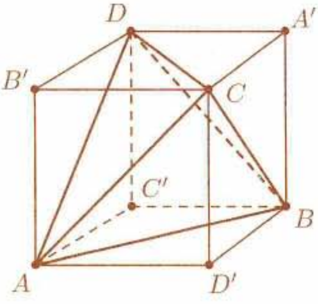
3. Prezrcalimo premici preko središča kroga. Prvotni in prezrcaljeni premici razdelita krog na devet delov, med katerimi so nekateri lahko izrojeni, če središče krožnice leži na eni od koordinatnih oseh. Štirje od njih so skladni vogalni deli; en vogalni del je najmanjši prvotni del, en vogalni del pripada največjemu prvotnemu delu. Med deli sta tudi dva para skladnih stranskih delov; natanko en del iz vsakega para pripada največjemu prvotnemu delu. Preostali del je pravokotnik s stranicama $2a$ in $2b$, ki pripada največjemu prvotnemu delu. Torej je razlika vsot ploščin enaka $4ab$.

4. Naj bo m dolžina stranice prvotnega kvadrata in n dolžina stranice manjšega kvadrata, ki ni enotski. Potem je $24 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Števili $m+n$ in $m-n$ sta iste parnosti. Ker je njun produkt 24, sta obe sodi. Zato imamo dve možnosti: $m+n = 12$ in $m-n = 2$ ali $m+n = 6$ in $m-n = 4$. Iz prve možnosti sledi, da je $m = 7$ in $n = 5$, iz druge pa $m = 5$ in $n = 1$. Ker manjši kvadrat ni enotski, druga možnost odpade, zato je ploščina prvotnega kvadrata enaka 49.

5. Naj bo G razpolovišče daljice BC. Potem sta daljici AG in EF vzporedni in zato pravokotni na daljico BF, in ker je $\overline{BG} = \overline{GC}$, sta trikotnika ABG in EGC skladna. Zato gre daljica AG skozi razpolovišče daljice BF. Nosilka višine AG na stranico BF torej razpolavlja trikotnik ABF in je tako $\overline{AB} = \overline{AF}$.

Druga skupina

1. Naj bo m dolžina stranice prvotne kocke in n dolžina stranice manjše kocke, ki ni enotska. Potem je $98 = m^3 - n^3 = (m^2+mn+n^2)(m-n)$. Imamo tri možnosti. Pri prvi je $m^2 + mn + n^2 = 98$ in $m - n = 1$. Potem velja $3m^2 - 3m = 97$, kar pa ni možno, ker 97 ni deljivo s 3. Pri drugi možnosti je $m^2 + mn + n^2 = 49$ in $m - n = 2$. Potem velja $3m^2 - 6m = 45$ in zato $m = 5$ in $n = 3$. Pri tretji možnosti je $m^2 + mn + n^2 = 14$ in $m - n = 7$. Tedaj je $3m^2 - 21m = -35$, to pa ponovno ni možno, ker 35 ni deljivo s 3. Torej je prostornina prvotne kocke enaka 125.
2. Naj bo p praštevilski delitelj števila a. Potem p deli ab in zato tudi $a^2 + b^2$. Zato je p tudi delitelj števila b. Naj bo p^m najvišja potenca praštevila p, ki deli a, in p^n najvišja potenca, ki deli b. Predpostavimo lahko, da je $m \geq n$. Število ab je deljivo s p^{m+n}, število $a^2 + b^2$ pa ni deljivo s p^{2n+1}. Torej je $m + n < 2n + 1$ in zato $m \leq n$. Od tod sledi, da je $m = n$. Ker je bil p poljuben praštevilski delitelj, je $a = b$.
3. Predpostavimo lahko, da je $a \geq 0$ in $b \geq 0$. Narišimo premici $x = 2a$ in $y = 2b$, ki skupaj s koordinatnima osema razrežeta krog na devet delov. (Če je katera od koordinat središča enaka 0, so nekateri deli lahko degenerirani.) Med njimi so štirje skladni vogalni deli, natanko eden med njimi pripada najmanjšemu delu in eden največjemu. Med deli sta dva para skladnih stranskih delov in natanko en del iz vsakega para pripada največjemu delu. Preostali del je pravokotnik s stranicama $2a$ in $2b$, ki pripada največjemu delu. Torej je $S^+ - S^- = 4ab$.
4. Točke A, B, C, D, A', B', C', D' so pravzaprav oglišča kocke, včrtane sferi. Ravnini ABC' in ACD' se zato sekata pravokotno.



5. Dijak B ne more preprečiti zmage dijaku A. Dijak A najprej zaporedoma barva z rdečo poljubne točke na neki premici. Za vsak par dveh rdečih točk obstaja po ena točka na vsaki strani premice, ki ju mora dijak B pobarvati zeleno, da prepreči zmago dijaku A. Po

n korakih mora dijak B pobarvati zeleno $2\binom{n}{2}$ točk, da prepreči zmago dijaku A. Ker lahko B pobarva zeleno 10 točk naenkrat, lahko drži korak z dijakom A, dokler je $2\binom{n}{2} > 10n$. Torej dijak A zagotovo zmaga v 12 potezi.

Rešitve drugega dela pomladanskega kroga

Prva skupina

1. (a) Število 97^{97} da pri deljenju z 9 ostanek 7. Število $(3n+a)^3$ da pri deljenju z 9 ostanek 0, če je $a = 0$, ostanek 1, če je $a = 1$, in ostanek 8, če je $a = 2$. Torej da vsota nekaj zaporednih kubov pri deljenju z 9 ostanek 0,1 ali 8, zato se število 97^{97} ne da zapisati kot vsota nekaj zaporednih kubov.

   (b) Število 1997^{17} da pri deljenju s 7 ostanek 4. Število $(7n+a)^3$ da pri deljenju s 7 ostanek 0, če je $a = 0$, ostanek 1, če je $a = 1, 2, 4$, in ostanek 6, če je $a = 3, 5, 6$. Torej da vsota nekaj zaporednih kubov pri deljenju s 7 ostanek 0, 1, 2 ali 5. Zato se število 1997^{17} ne da zapisati kot vsota nekaj zaporednih kubov.

2. Naj bo H nožišče višine iz točke B in O presečišče daljic BH in CP. Ker je $|AB| = |BC|$, je $\sphericalangle OBC = 40^o$ in $\sphericalangle OAB = 20^o$. Torej je $\sphericalangle POB = \sphericalangle OBC + \sphericalangle OCB = 60^o$. Podobno dobimo, da je $\sphericalangle POA = \sphericalangle OAC + \sphericalangle OCA = 60^o$. Torej je daljica PO simetrala kota $\sphericalangle AOB$ in PA simetrala kota $\sphericalangle BAO$. Od tod sledi, da je daljica BP simetrala kota $\sphericalangle ABO$, zato je $\sphericalangle PBC = 60^o$ in $\sphericalangle BPC = 100^o$.

Druga skupina

1. Označimo koščke sira z $s_1, \ldots, s_{25}$ od najlažjega do najtežjega koščka. Košček s_1 damo v prvo vrečko, s_2 v drugo, s_3 spet v prvo in tako naprej. Nazadnje damo košček s_{24} v drugo vrečko. Ko damo neki košček v eno od vrečk, je ta vrečka težja od druge, vendar je razlika v teži manjša od teže zadnjega dodanega koščka. Torej je na koncu druga vrečka težja od prve, vendar ne več, kot je teža koščka s_{24}, zato tudi ne več, kot je teža koščka s_{25}. Torej lahko košček s_{25} razrežemo tako, da dosežemo enako težo vrečk.

2. Lahko predpostavimo, da je $a \geq b \geq c$. Potem velja

$$\begin{aligned} a+b+c &= a\sqrt[6]{abc} + b\sqrt[6]{abc} + c\sqrt[6]{abc} \leq \\ &\leq a\sqrt[6]{aac} + b\sqrt[6]{bbc} + c\sqrt[6]{abc} \leq \\ &\leq a\sqrt[6]{aac} + b\sqrt[6]{abb} + c\sqrt[6]{bcc} \leq \\ &\leq a\sqrt[6]{aaa} + b\sqrt[6]{bbb} + c\sqrt[6]{ccc} = \\ &= a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}\,. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(b+c) &= 2abc + a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b = \\ &= 2 + (a^2b + a^2c) + (b^2a + b^2c) + (c^2a + c^2b) \geq \\ &\geq 2 + 2a\sqrt{a} + 2b\sqrt{b} + 2c\sqrt{c} \geq \\ &\geq 2 + 2(a+b+c)\,,\end{aligned}$$

kjer smo pri prvi neenakosti trikrat upoštevali, da je $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, pri drugi neenakosti pa smo upoštevali zgornji rezultat. Sedaj pa dobimo iskano neenakost

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} - 1 = \\ &\qquad = \frac{2+2a+2b+2c-(a+b)(b+c)(c+a)}{(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)} \geq 0.\end{aligned}$$

Aleš Vavpetič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

25. letnik, šolsko leto 1997/98, številka 2, strani 65 – 128

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1997/98 je za posamezne naročnike **1.620 SIT**, za skupinska naročila šol **1.350 SIT**, posamezna številka **324 SIT**, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana