

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 25 (1997-1998)
ISSN 0351-6652

PRE SEK

1



Samotorca, 5.4.1997, 1:00 (foto Gregor Bavdek)



Strahinj pri Kranju, 9.3.1997, 3:00 (foto Gregor Bavdek)



Mlaka pri Kranju, 6.4.1997, 21:30 (foto Gregor Bavdek)



Zaplana, 29.3.1997 (foto Janko Meršar)

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, leto 1997/98, številka 1, strani 1–64

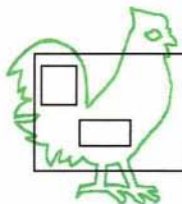
VSEBINA

MATEMATIKA	Mala šola topologije – 1. del (Marija Vencelj) 2-6
	Pitagorov izrek iz trapeza (Marko Razpet) 7
	O številih 11...1 (Jože Grasselli) 20–23
FIZIKA	Sto let katodne cevi (Janez Strnad) 8-12
ASTRONOMIJA	Sencomer (Marian Prosén) 16-19
	Planeti okrog drugih sonc (Mirjam Galičič) 34-38
RAČUNALNIŠTVO	Varne poti in kratke poti (Sandi Klavžar) 24-31
NOVICE	Karl Theodor Wilhelm Weierstrass – ob stoletnici smrti (Anita Močnik) 13-15
	Franc Močnik – odkrit doprni kip (Zvonko Perat) ... 43-47
NALOGE	Vsota in produkta (Martin Juvan) 12
	Na gugalnici (Marija Vencelj) 15
	Hitro kvadriranje števil, ki se končujejo s števko 5 (Marija Vencelj) 31
	Naloga k članku Planeti okrog drugih sonc (Marian Prosén) 39
	Kubi števka (Martin Juvan) 39
	Številka križanka (Dragoljub M. Milošević, prevod Marija Vencelj) 40-41
	Razkrinkajmo Davida Coperfielda (Matej Mencinger) ... 42
	Metanje kocke (Martin Juvan) 47
RAZVEDRILO	Temeljnost (Marija Vencelj) 23
	Križanka "Fizikalne vede" (Marko Bokalič) 32-33
ZANIMIVOSTI	Dokazal si je (Vilko Domajnko) 41
TEKMOVANJA	33. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik) 48-50
	17. državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja (Zlatko Bradač, Mirko Cvahte) 50-51
	41. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) 52-54
	35. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije (Ciril Dominko) 54-57
	18. mednarodno matematično tekmovanje mest – rešitve iz XXIV, P-6, str. 378 (Aleš Vavpetič) 57-62
	18. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog (Aleš Vavpetič) 62-63
NA OVITKU	Spomini na komet Hale-Bopp (slika na naslovnici – foto Gre- gor Bavdek) I,II
	Kip Franca Močnika v Slovenskem šolskem muzeju (glej tudi prispevek na strani 43) III
	Sliki k članku na strani 34 III
	Sencomer (glej članek na strani 16) IV

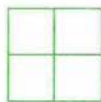
MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 1. del

Topološke preslikave

Za začetek si oglejmo naslednje risbe:



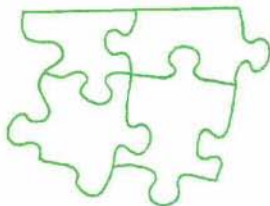
(a)



(b)



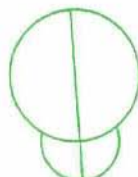
(c)



(d)



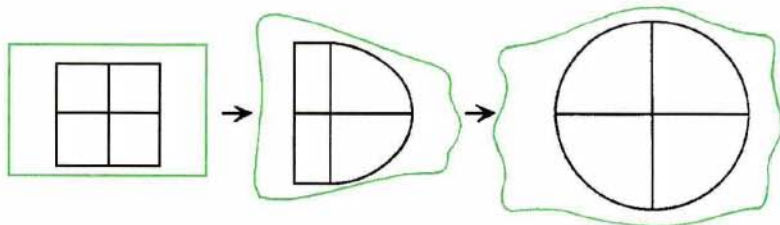
(e)



(f)

Ob njih si lahko zastavimo različne naloge, kakršna je npr. naloga poiskati razlike med risbami (nekatero risbe so npr. sestavljene iz samih daljic; druge ne). Nas bodo bolj zanimala lastnosti, ki so vsem risbam skupne. Ena takih lastnosti, ki jo zlahka opazimo, je, da vsaka risba razdeli ravnino na enako število celic ali področij.

Zamislimo si, da je risba (b) narisana na zelo tanko gumijasto opno, ki jo lahko raztegujemo, stiskamo in zvijamo po mili volji, ne smemo pa je raztrgati niti ne smemo zlepit dveh ali več točk skupaj. Če opno primerno raztegnemo, kot prikazuje naslednja skica, lahko dosežemo, da preide risba (b) v risbo (a).



Topologija¹ je veja matematike, ki se ukvarja z raznimi množicami točk v prostoru (v naših primerih so to narisane figure). Zanimajo jo take lastnosti množic, ki se ohranjajo pri upogibanju, raztezanju ali krčenju (brez raztrganin ali lepljenja). Tako imajo risbe-krivulje na slikah (a) do (f) enake **topološke** lastnosti.

Topologije torej za razliko od sorodne geometrije ne zanimajo dolžine, ploščine, površine ali velikosti kotov; te lahko še poljubno spreminjamo.

Pri naši intuitivni obravnavi topologije se bomo omejili le na take množice, ki jih sestavljajo točke in krivulje. Pri tem se domenimo za uporabo nekaterih sicer splošno veljavnih izrazov.

- (a) Upogibanja, raztezanja ali krčenja brez raztrganin ali lepljenja bomo imenovali **topološke preslikave**.
- (b) Lastnosti, ki še vedno veljajo, potem ko množico topološko preslikamo, imenujemo **topološke invariante** ali **topološko nespremenljive vrednosti**. Tako je očitno medsebojni vrstni red točk topološka invarianta, ni pa topološka invarianta razdalja med dvema točkama.
- (c) Dve krivulji, za kateri velja, da lahko drugo iz druge dobimo s topološko preslikavo, imenujemo **topološko ekvivalentni** ali **topološko enakovredni**.

Na primerih premislimo in utrdimo pomen teh pojmov.

1. Katere od narisanih krivulj so topološko enakovredne krožnici? (Ne pozabimo, da ne smemo ničesar razrezati ali zlepit!) Takim krivuljam pravimo **enostavno sklenjene krivulje**.



(a)



(b)



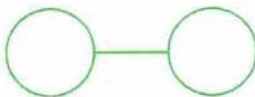
(c)



(d)



(e)



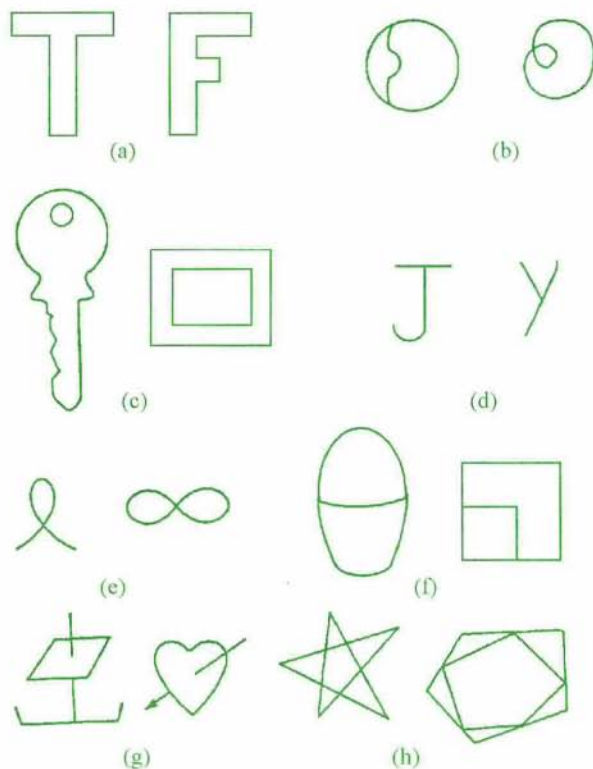
(f)



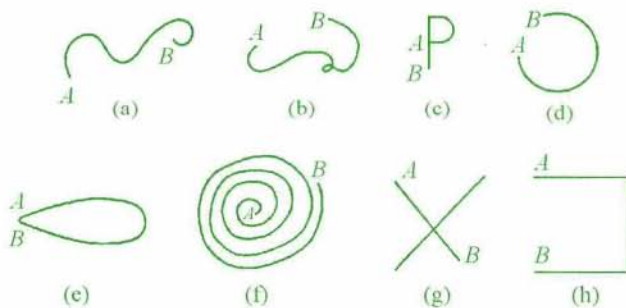
(g)

¹ Beseda topologija je grškega izvora: *τόπος* pomeni v grščini kraj. Topologija je torej nauk o kraju, o legi.

2. Na risbah je več parov krivulj. Ali lahko prvo krivuljo iz para topološko preslikamo v drugo krivuljo?



3. Katere od narisanih krivulj so topološko enakovredne daljici AB ?



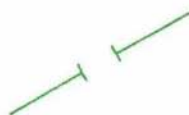
4. Katere med naslednjimi petimi risbami so topološko enakovredne?



(a)



(b)



(c)



(d)

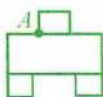


(e)

5. Med naslednjimi pari risb poišči take s topološko enakovrednimi risbami. Če se ti zdi, da sta risbi nekega para topološko enakovredni, označi na drugi od obeh risb možni položaj točke A' , ki je slika točke A pri topološki preslikavi. Če je za A' možnih več položajev, označi vse.



(a)



(b)



(c)



(d)



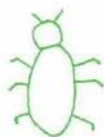
(e)



(f)



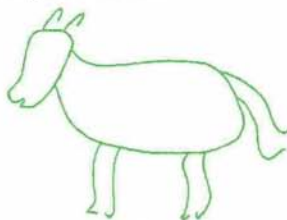
6. V kaj vse lahko spremenimo hrošča? Slika prikazuje originalnega žuška in dve ideji za njegovo topološko preobrazbo.



(a)



(b)

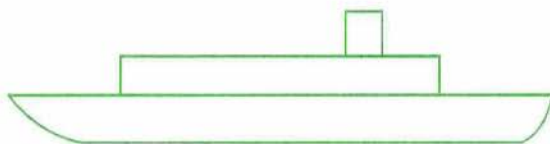


(c)

7. Nariši naslednjim risbam nekaj topološko enakovrednih risb. Poskusi najti tudi čimbolj preproste (oglej si sličico s petelinom ob naslovu tega prispevka).



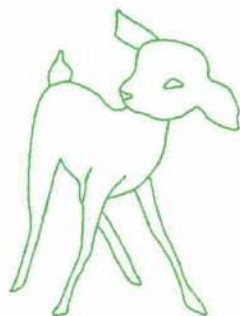
(a)



(b)



(c)



(d)

Nekaj odgovorov:

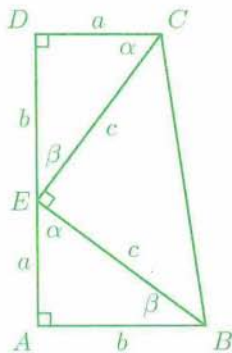
1. (a), (d), (e), (g)
2. (a) Da. (b) Ne. (c) Da. (d) Da. (e) Ne. (f) Da. (g) Da. (h) Da.
3. (a), (d), (f), (h)
4. (a), (b) in (d); (c) in (e)
5. (a), (b), (c), (e), (f); točke poiščite sami.

Marija Vencelj

PITAGOROV IZREK IZ TRAPEZA

Za dokaz Pitagorovega izreka obstaja več načinov, med katerimi so prav preprosti tisti, v katerih uporabljamo ploščino likov. Oglejmo si primer, kako Pitagorov izrek izpeljemo z uporabo trapeza.¹

Vzemimo pravokotni trapez $ABCD$, ki ima za osnovnici a in b , višina pa je enaka vsoti njunih dolžin $a + b$. Na stranici AD je točka E oddaljena od oglišča A za a oziroma od oglišča D za b . Trikotnika ABE in CDE sta očitno pravokotna in skladna. Njuna hipotenuza je c , kateti pa sta a in b , kot je označeno na sliki 1. Pravokoten je tudi trikotnik BCE , kar sledi iz komplementarnosti kotov α in β .



Slika 1.

Srednjica trapeza $ABCD$ je $\frac{1}{2}(a+b)$, njegova višina pa $a+b$. Ploščina trapeza je enaka produktu srednjice in višine, hkrati pa vsoti ploščin pravokotnih trikotnikov ABE , CDE in BCE , zato velja:

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2.$$

Od tod dobimo enakost

$$\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 = ab + \frac{1}{2}c^2.$$

Po preureditvi sledi Pitagorov izrek:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Marko Razpet

¹ Tako je Pitagorov izrek leta 1876 dokazal Garfield, član ameriškega Predstavnškega doma, kasnejši predsednik ZDA (op. urednice).

STO LET KATODNE CEVI

Gledate televizijo? Računate ali tipkate na računalnik? V obeh primerih je pred vami zaslon katodne cevi. Popraviljanci televizijskih in radijskih sprejemnikov ter raziskovalci pogosto zasledujejo časovni potek hitrih pojavov z oscilografom. Tudi vanj je vgrajena katodna cev. Katodno cev je pred sto leti prvi uporabil Ferdinand Braun.

Carl Ferdinand Braun (slika 1) je bil rojen leta 1850 v Fuldi. Študiral je na univerzah v Marburgu in Berlinu. Študij je končal leta 1872. Dve leti je poučeval na gimnaziji, potem je postal profesor najprej na univerzi v Marburgu in leta 1880 na univerzi v Strassburgu. Nekaj časa je predaval na tehniški visoki šoli v Karlsruheju in na univerzi v Tübingenu. Leta 1895 se je kot profesor in ravnatelj fizikalnega inštituta vrnil v Strassburg.

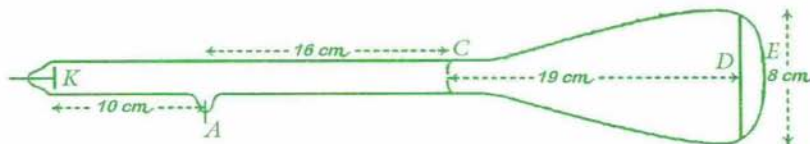
Najprej je pod vodstvom Georga Hermanna Quinckeja raziskoval nihanje strun in palic. Nato je preučeval vpliv tlaka na topnost soli. Leta 1874 ga je zanimalo, kako prevajajo električni tok nekateri minerali. Braun je ugotovil, da tok pogosto ni sorazmeren z napetostjo in torej ne velja Ohmov zakon. Poleg tega je bil upor odvisen od smeri. Na kristal je priključil kovinsko konico in drugi priključek ter tok dobil samo v eni smeri. Naprava je delovala kot usmernik. Poskusi z visokofrekvenčnim tokom so ga leta 1897 pripeljali do katodne cevi. Izdelal je tudi natančen elektrometer. Leta 1898 se je Braun začel ukvarjati s prenašanjem Morsovih znakov z visokofrekvenčnimi tokovi tudi po vodi. Pri tem je sledil Guglielmu Marconiju, ki si je že od leta 1897 prizadeval, da bi z radijskimi valovi prenašal sporočila. Dosegel je razdaljo okoli 15 km, a te razdalje ni bilo lahko preseči. Višja napetost ni pomagala. Nekaj večjo razdaljo so dosegli le z 300 m dolgo žico kot anteno, ki je visela z balona. Tedaj so odajno anteno priključili neposredno na krog z izvirom. Električno nihanje v anteni ni imelo določene frekvence in je bilo močno dušeno. Braun je dognal, da precej energije porabi iskra v iskrišču, ki je bilo od Hertzevih časov sestavni del kroga. Z nihajnim krogom iz kondenzatorja in tuljave



Slika 1. Ferdinand Braun (1850–1918).

so najprej dosegli, da je tok nihal z določeno frekvenco. Braun je leta 1899 patentiral krog s kondenzatorjem in tuljavo brez iskrišča. Oddajno anteno je *induktivno sklopil* na nihajni krog tako, da je sestavil tuljavo v krogu in drugo tuljavo v anteni v nekakšen transformator. Tako je precej zmanjšal dušenje. Nato se je posvetil radijskemu prenosu v določeni smeri. Najprej je to dosegel tako, da je nagnil anteno iz navpične smeri. Leta 1902 pa je uporabil tri antene v ogliščih enakostraničnega trikotnika. V eni od njih je tok za četrto nihaja prehiteval tokova v drugih dveh. Pri delu z radijskimi valovi sta mu bili v pomoč obe njegovi odkritji: kristalni usmernik in katodna cev. Dognanja je zbral v knjižici *Brezžična telegrafija po vodi in zraku*. Leta 1909 je skupaj z Guglielmom Marconijem dobil Nobelovo nagrado "za prispevke v razvoju brezžične telegrafije". Leta 1915 je odpotoval v ZDA, da bi pričal v nekem patentnem sporu, povezanem z radijskimi valovi. Leta 1917, ko so ZDA vstopile v vojno, so ga internirali. Umrl je leta 1918 pred koncem vojne.

Spomladi leta 1897 je Joseph John Thomson ugotovil, da sestavljajo katodne žarke negativno naelektreni delci. Tako je sklepal, ker je katodne žarke odklanjal s prečnim magnetnim in prečnim električnim poljem. Istega leta je Ferdinand Braun objavil članek z naslovom *O postopku za prikazovanje in raziskovanje časovnega poteka spremenljivih tokov*. V njem je poročal o poskusih s katodnimi cevmi, ki mu jih je po njegovih navodilih izdelal Geisslerjev naslednik v Bonnu. V eni od njih, ki se mu je zdela posebno pripravna, je bila katoda K iz aluminijeve pločevine, kovinska žička kot anoda A, zaslonka C iz aluminijeve pločevine z odprtino s premerom 2 mm in s fluorescentno barvo namazani zaslon D iz sljude (slika 2). Z zaslonko je Braun omejil katodne žarke v ozek curek. Na mestu, na katerem so zadeli fluorescentni zaslon, je bilo opaziti drobno svetlo pego. Med anodo in katodo je priključil influenčni stroj, ki je dajal razmeroma visoko enosmerno napetost. Nekatere poskuse je naredil tudi z induktorjem.



Slika 2. Katodna cev Ferdinanda Brauna iz članka pred sto leti.

Pod cev je v bližini zaslonke postavil tuljavico z vodoravno osjo in speljal skozi elektrini tok. Pega se je premikala gor in dol po zaslonu, ko je spreminjal tok skozi tuljavico. Odklon pege je bil sorazmeren s

tokom po tuljavici in ni bilo mogoče opaziti, da bi bil odklon odvisen od frekvence. Sprememba odklona je brez zakasnitve sledila spremembi toka.

Braun je po tuljavici speljal izmenični tok iz strassburške električne centrale s frekvenco 50 s^{-1} . Zaradi nihajočega toka v tuljavici je hitro nihajoča pega na zaslonu dala navpično črto. Z vrtečim se zrcalom je pego projiciral na steno in opazil sinusno krivuljo. Primerjal jo je s krivuljo, ki jo je dalo nihanje glasbenih vilic s to frekvenco, in zadovoljen ugotovil, da se krivulji dobro ujemata (slika 3).



Slika 3. Nihanje električnega toka (levo) se ujema z nihanjem glasbenih vilic z enako frekvenco. Braun je oboje opazoval z vrtečim se zrcalom.

Nato je skozi tuljavico z navpično osjo spustil izmenični tok in postavil pod njo paličasti magnet, ki ga je hitro vrtel okoli navpične osi. Na zaslonu je Braun dobil sklenjene krivulje, če se je magnet vrtel s frekvenco, s katero je nihal tok, in s primerno fazno razliko. Opazoval je Lissajousove krivulje, ki nastanejo, ko sestavimo nihanji v pravokotih smereh (slika 4). Uporabil je tuljavico s pravokotnima osema v dveh krogih, ki sta bila induktivno sklopljena. Opazoval je, kako se je oblika krivulje spremenila, ko je v enega izmed krogov vključil kondenzator.



Slika 4. Lissajousove krivulje, ki jih je Braun opazoval neposredno na zaslonu svoje cevi.

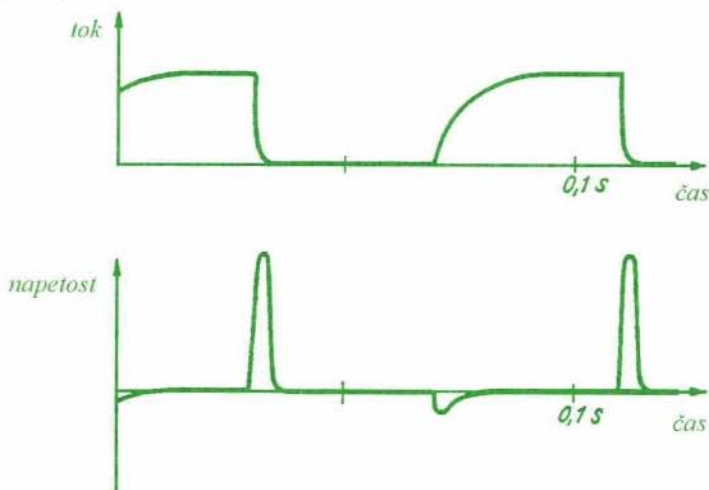
Braunova cev, v kateri prepoznamo predhodnico današnjih katodnih cevi, je imela vrsto pomanjkljivosti. Najprej je bil v njej ostanek plina, sicer ne bi bilo katodnih žarkov. V današnjih ceveh z zelo dobrim vakuumom daje curek elektronov *elektronski top*. Sestavljata ga drobna katoda, ki jo greje električni tok, da iz nje izhlapevajo elektroni, in anoda, na katero je priključena visoka pozitivna napetost proti katodi. Skozi

drobno odprtino v anodi izhaja curek elektronov. Dodatne elektrode med katodo in anodo poskrbijo, da je pega na zaslonu čim manjša. Poleg tega imajo današnje katodne cevi vgrajen majhen kondenzator z navpičnima ploščama, na kateri je priključena žagasta napetost, ali ob vratu par tuljav z navpično osjo, skozi kateri poganjamo žagast tok. S tem dosežemo, da pega enakomerno potuje od levega roba zaslona na desno in se hitro vrne na levi rob. Napetost, katere časovni potek nas zanima, priključimo na kondenzator z vodoravnima ploščama ali na par tuljav z vodoravno osjo. Tako lahko časovno odvisnost opazujemo neposredno na zaslonu in ni treba uporabiti vrtečega se zrcala. Pri televizijskem sprejemniku ali računalniškem zaslonu poganjamo tudi skozi drugi par tuljav žagast tok, le da z nižjo frekvenco, tako da pega potuje tudi z vrhnjega roba zaslona navzdol in otipa ves zaslon. Z napetostjo med katodo in eno od dodatnih elektrod vplivamo na izdatnost elektronskega curka in s tem na svetlost pege na zaslonu.

Za nameček omenimo *induktor*, ki so ga uporabljali Braun in drugi, tudi Conrad Wilhem Röntgen, ko je odkril rentgensko svetlobo. Tedaj ni bilo razširjenega električnega omrežja z izmenično napetostjo in zato ni bilo transformatorjev. Namesto njih so uporabljali induktorje. Šop med seboj izoliranih debelih železnih žic so ovili s primarno tuljavo z N_1 ovoji debele žice in to s sekundarno tuljavo z N_2 ovoji tanke žice. Na primarno tuljavo so priključili akumulatorsko baterijo in mehanično prekinjalo. Na sekundarno tuljavo so priključili elektrodi v cevi z razredčenim plinom. Na cevi ni bilo napetosti, ko je poganjala akumulatorska baterija po primarnem krogu konstanten tok. Napetost se je inducirala na cevi v sunkih, ko je prekinjalo prekinilo tok ali ga zopet sklenilo. Sunek napetosti ob prekinutvi, ko se je zmanjšal magnetni pretok, je bil drugače obrnjen kot sunek napetosti ob vključitvi, ko je magnetni pretok narasel. Morda bo kdo pripomnil, da je bila elektroda cevi zdaj anoda zdaj katoda, in podvomil v to, da je naprava sploh delovala. Transformator zares na sekundarni strani daje N_2/N_1 -krat višjo izmenično napetost, če ga priključimo na primarni strani na izmenično napetost. V tem primeru je treba uporabiti usmernik, ki ga tedaj še niso imeli.

Njegovo vlogo je mimogrede opravil induktor. Po indukcijskem zakonu $U_i = \Delta\Phi/\Delta t$ inducirano napetost določa hitrost spreminjanja magnetnega pretoka Φ . Če je električni tok skozi akumulatorsko baterijo in z njim magnetni pretok naraščal počasi, ko je bilo prekinjalo sklenjeno, se je induciral razmeroma nizek sunek napetosti. Če se je električni tok in z njim magnetni pretok hitro zmanjšal, ko je prekinjalo tok prekinilo, se je

induciral razmeroma visok, nasprotno obrnjen sunek napetosti (slika 5). S tem, da je cev delovala v sunkih, se je bilo pač treba sprijazniti. V uravnavanju enih in drugih sunkov s spretno rabo prekinjala in iskre, ki je nastala v njem, so bili tedanji raziskovalci katodnih žarkov pravi mojstri. To je veljalo tudi za Brauna.



Slika 5. Časovna odvisnost toka po krogu s prekinjalom v induktorju (zgoraj) in sunki inducirane napetosti na cevi (spodaj).

Influenčni stroji so bili dokaj muhasti, zato so namesto njih in induktorjev nekaj časa uporabljali visokonapetostne akumulatorske baterije. Znamenita je bila harvardska baterija, ki je s svojimi 20 160 celicami zmogla napetost 40 000 V. Kot si je mogoče misliti, so imele tudi te svoje pomanjkljivosti. Zato so jih ob uvedbi izmeničnega toka zamenjali transformatorji in usmerniki.

Janez Strnad

VSOTA IN PRODUKTA

Zapišimo število 1997 kot vsoto (ne nujno različnih) naravnih števil,

$$1997 = n_1 + \dots + n_k.$$

Sprašujem vas, kolikšna je najmanjša in kolikšna največja mogoča vrednost produkta $n_1 \cdot \dots \cdot n_k$.

Martin Juhan

KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS – ob stoletnici smrti

Francoska revolucija in doba Napoleona sta ustvarili izredno ugodne možnosti za razvoj matematike. Industrijska revolucija je spodbudila gojenje fizikalnih znanosti in ustvarila nove družbene razrede z novimi pogledi na življenje, razrede, ki sta jih zanimali znanost in tehnična vzgoja. V akademsko življenje so prodrlle demokratične ideje, kritizirali so zastarele oblike življenja. Šole in univerze so reformirali in pomladili. Znanstveno delo kot celota se je še bolj oddaljilo od zahtev ekonomskega življenja in vojskovanja. Pojavili so se specialisti, katere je znanost zanimala zaradi nje same. Zveze s prakso niso nikoli popolnoma prekinili, toda pogosto je ostala skrita. Matematiki devetnajstega stoletja niso bili več na dvorih ali v salonih aristokracije. Običajno so bili v službah na univerzah in so bili obenem učitelji in raziskovalci.



Z deli Weierstrassa, očeta moderne analize, se je začela nova doba matematike, doba kritično-logične natančnosti. Weierstrass je bil v prvi vrsti logik. Delal je počasi, sistematično, korak za korakom. Izhajal je iz definicij. Uspelo mu je sestaviti primer zvezne funkcije, ki ni nikjer odvedljiva. To pomeni, da ji v nobeni točki ne moremo narisati tangente (članek na to temo je bil objavljen v 2. številki XXIV. letnika Preseka). Ker si take funkcije ni moč intuitivno predstavljati, se je pojavila zahteva po jasnejšem razumevanju pojmov limite, zveznosti in odvajanja.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass se je rodil 31. oktobra 1815 v Ostenfeldu v Nemčiji. Oče Wilhelm je delal kot pruski davčni uslužbenec in vsa družina se je zato pogosto selila. Tako je mladi Karl zamenjal cel ducat osnovnih šol po manjših krajih Nemčije, ki so sedaj znani edino po tem, da je tam živel Weierstrass kot otrok. S štirinajstimi leti je bil sprejet na katoliško gimnazijo v Padelbornu. Bil je izredno nadarjen učenec in domov je redno prinašal nagrade in pohvale. Po pouku je delal v bližnji trgovini, ki je, tudi po njegovi zaslugi, zelo uspešno poslovala. Oče, starokopiten in ukazovalen človek, si je za sina zamislil bleščečo državniško

kariero. Poslal ga je na univerzo v Bonn študirat pravo in ekonomijo. Karlova velika želja pa je bil študij matematike in sorodnih ved. Konflikt med očetovo in lastno željo mu je povzročil veliko duševnega trpljenja. Kmalu je Weierstrass nehal obiskovati predavanja. Čas si je krajšal s popivanjem, veseljačenjem in branjem matematičnih knjig. Po štirih letih se je vrnil domov brez kakršne koli diplome.

Oče je bil razočaran. Družinski prijatelj, ki je Karla poznal že od malih nog, je predlagal, da se vpiše na Teološko in filozofsko fakulteto v Münnstru, kjer se bo izšolal za učitelja. Tamkajšnjim profesorjem je moral skesano obljubiti, da ne bo nadaljeval s prejšnjim načinom življenja.

Karl je bil edini študent, ki je obiskoval matematična predavanja profesorja Gudermanna. Ta ga je seznanil s teorijo eliptičnih funkcij in deli Abela. Weierstrass se je že takrat odločil, da bo vse svoje sposobnosti namenil nedokončanemu delu prezgodaj umrlega Abela. Vsa ostala (danes celo bolj cenjena) dela so nastala kot stranski rezultati njegovega osnovnega delovanja. Njemu dolgujemo, da danes obstaja soglasje glede vseh rezultatov in najbolj zapletenih vprašanj, ki zadevajo teorijo diferencialnih in integralnih enačb. Ukvarjal se je s teorijo funkcij, konvergenco potenčnih vrst in s tako imenovanimi Abelovimi funkcijami.

Oglejmo si osnovno idejo, na kateri je temeljilo Weierstrassovo delo.

Potenčna vrsta je formula oblike $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$, kjer so koeficienti $a_0, a_1, a_2, \dots$ konstantna števila, z pa spremenljivka. Končne vsote oblike $a_0, a_0 + a_1z, a_0 + a_1z + a_2z^2, \dots$ imenujemo *delne vsote*. Če za izbran z delne vsote konvergirajo k nekemu številu, potem rečemo, da potenčna vrsta v točki z *konvergira* k temu številu, ki ga imenujemo *limita*. Za vse vrednosti z , pri katerih potenčna vrsta konvergira, lahko limito izračunamo do poljubne natančnosti. To naredimo tako, da seštejemo dovolj členov v delni vsoti.

Rešitve večine matematičnih problemov, ki izhajajo iz fizike, ne znamo zapisati kot končni izraz elementarnih funkcij (na primer log, sin, ...). Rezultat ponavadi zapišemo v obliki potenčne vrste in nato numerično računamo vrednosti do natančnosti, ki se zahteva. Če vrsta ne konvergira, je to ponavadi znak, da smo se zmotili.

Naslednjih petnajst let je bil Weierstrass zaposlen kot srednješolski učitelj. Poučeval je fiziko, nemščino, geografijo, telovadbo, lepopisje, celo matematiko. V vseh teh letih ni imel nobenega stika z drugimi matematiki, niti dostopa do kake matematične knjižnice. Po njegovih besedah so bila to leta neskončne otožnosti in dolgočasje. Anekdota pravi, da potem,

ko se je celo noč ukvarjal z nekim problemom, ni hotel iti v šolo, dokler ga ni rešil.

Leta 1845 je poslal svoje izsledke znani matematični reviji *Jurnal für reine und angewandte Mathematik*. Ko so jih objavili, so se vsi tedaj vodilni matematiki spraševali, kako je možno, da tak genij tiči skrit v neki srednji šoli. Takoj so mu ponudili častni doktorat na berlinski univerzi.

Kot profesor je Weierstrass slovel kot izreden predavatelj. Zanimivo je, da zaradi šibkega zdravja ni nikoli sam pisal po tabli. Vse je skrbno narekoval študentom. Tako se je tudi ohranila večina njegovih del. Sam namreč ni objavljaj. Do svojih člankov je bil tako kritičen, da se mu nikoli niso zdeli dovolj izpiljeni za objavo. Izvrstno pripravljena predavanja in nove teorije so njegovo ime ponesle po vsej Evropi. Njegova predavanja je obiskovalo več kot 250 slušateljev. Med njimi so bili: Georg Frobenius, Oskar Bolza, Ludwig Thome, Otto Hölder, Felix Klein, Sophus Lie, Herman Minkovski, Mittag-Leffler, ... Vedno je bil poln predlogov za disertacije in raziskovalno delo svojih študentov.

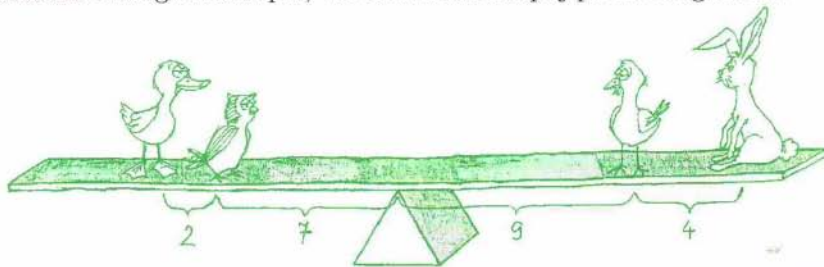
Posebej moramo omeniti njegov odnos s Sonjo Kovalevsko (članek o njej je bil objavljen v 3. številki XIX. letnika Preseka), njegovo najljubšo študentko. Dopisovala sta si do njene smrti.

Zadnja leta Wierstrassovega življenja so bila nesrečna. Najprej je njegove teorije javno napadel dolgoletni prijatelj in sodelavec Leopold Kronecker. Sonjina smrt ga je duševno popolnoma strla. Zažgal je vse, kar ga je spominjalo nanjo. Zadnja tri leta je bil priklenjen na invalidski voziček. Zanj sta skrbeli dve sestri, saj se sam ni nikoli poročil. Umrj je leta 1897, star 82 let.

Anita Močnik

NA GUGALNICI

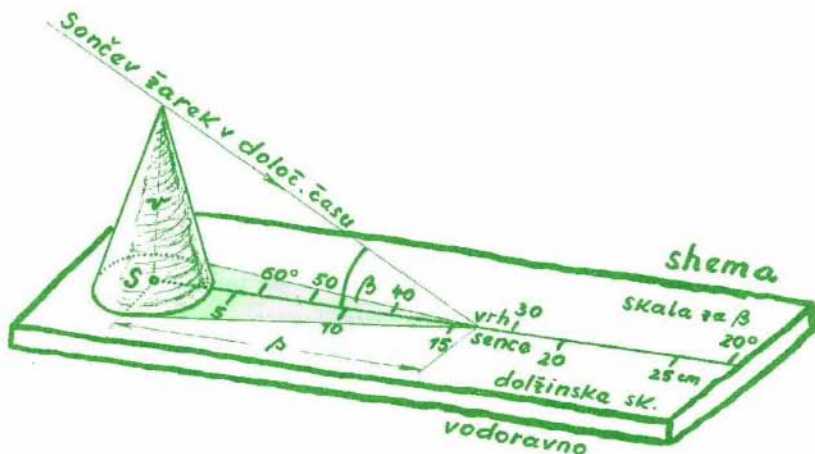
Koliko tehta racman in koliko zajček, če tehta sova kilogram in pol, kokoška 2 kilograma in pol, vse štiri živali skupaj pa 20 kilogramov?



Marija Vencelj

SENCOMER

Predstavljam vam preprosto napravo, s katero lahko v poljubnem trenutku hitro izmerimo dolžino sence oziroma višinski kot Sonca, seveda v sončnem vremenu. Dal sem ji ime *sencomer* (slika 1).



Slika 1. Sencomer; v – višina stožca, s – dolžina njegove sence na vodoravnih tleh, β – višinski kot Sonca. Dolžinsko skalo izdelamo tako, da od središča S osnovne ploskve stožca vzdolž ploščice nanesemo dolžinske enote (npr. cm), skalo za višinski kot pa lahko izdelamo na več načinov: eden je iz enačbe $\tan \beta = \frac{v}{s}$. Pri konstantni (znani) višini (npr. $v = 10$ cm) in odbranih višinskih kotih vsakič izračunamo dolžino sence $s = \frac{v}{\tan \beta}$ in jo označimo s črtico na skali za višinski kot (gl. še Presek 13, str. 153). Dolžino sence ali višinski kot Sonca lahko v tem primeru hitro in skoraj istočasno odberemo.

Glavna dela sencomera sta pokončen slok stožec in vodoravno postavljena deščica ali karton z dolžinsko in kotno razdelitvijo na isti strani deščice ali pa na različnih straneh, kamor stožec meče senco. (V bistvu že zadostuje samo stožec, če imamo merilec za dolžino vedno pri roki.) Na enem koncu deščice označimo krog za osnovno ploskev stožca. V ta krog namestimo stožec tako, da njegova senco vedno pade na vodoravno ploščico (slika 2 na IV. strani ovitka).

Ob vzhodu ali zahodu Sonca ne moremo opazovati sence navpičnega stožca na ploščici, ker je neskončno dolga. Dobro uro po vzhodu pa je Sonce že toliko visoko, da senco lahko opazujemo, čeprav je še nekoliko razmazana. Kako uro pred zahodom Sonca in pozneje so sence spet tako dolge in razmazane, da jih ne moremo dobro opazovati. Najbolje jih torej

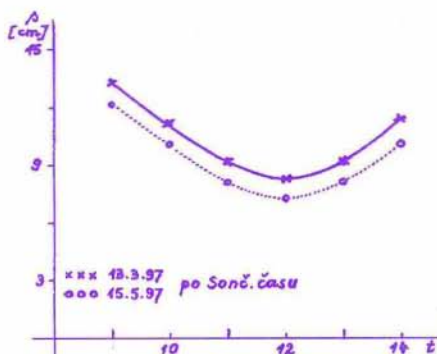
opazujemo od sredine dopoldneva do sredine popoldneva. V tem času lahko precej natančno merimo dolžino sence, ki se do poldneva krajša (zakaj?), opoldne je najkrajša, popoldne pa se daljša. Sestavimo na primer takole preglednico:

Kraj:		Datum:
čas opazovanja (ura)	dolžina sence (v cm)	opombe
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		
16.		

Na osnovi preglednice nato narišemo graf odvisnosti dolžine sence od dnevnega časa. Graf je vsak dan drugačen, saj ima Sonce vsak dan nekoliko drugačno navidezno pot nad obzorjem (slika 3).

Zanimivo je opazovati premikanje sence, ki jo meče mirujoč stožec ali kak drug navpično postavljen predmet (npr. ravna palica) na vodoravna tla. Dvoje lahko ugotovimo pri tem premikanju: orientiramo se in ocenimo kotno hitrost vrtenja Zemlje, kajti premikanje sence je posledica vrtenja Zemlje.

Orientiramo se takole: Vrh sence stožca se v času nekaj minut premakne proti vzhodu (slika 4). To smer V_1V_2 začrtamo in orientacija je končana, saj za najdenje na zemljišču zadostuje že ena smer. O določitvi vrednosti kotne hitrosti vrtenja Zemlje pa je že pisal Presek v 6. številki 21. letnika.



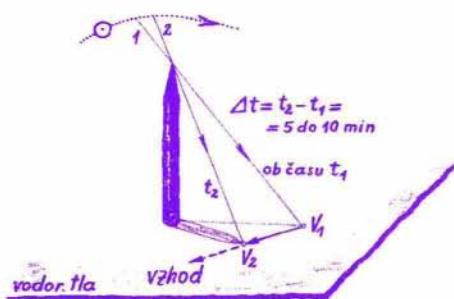
Slika 3. Graf odvisnosti dolžine sence od dnevnega časa za dva datuma.

Senco stožca lahko opazujemo vsake pol meseca. Zapazimo razlike med grafi (slika 3). To, da se dolžina opoldanske sence stožca med letom spreminja, je odvisno od navideznega letnega gibanja Sonca med zvezdami, kar je posledica kroženja Zemlje okrog Sonca (spomnite se na letne čase). Dnevno in letno spreminjanje sence sta torej posledici vrtenja in kroženja Zemlje, na kar človek morda sploh ne pomisli.

Povejmo še nekaj o višinskem kotu Sonca. To je kot med vodoravno ravnino in smerjo proti Soncu, natančneje proti njegovemu središču. Označimo ga z β . Ob vzhodu Sonca je $\beta = 0$. Potem se vse dopoldne veča. Opoldne, ko je Sonce na jugu, je največji (v Ljubljani ob kresu 68° , ob božiču pa 20°), nato popoldne pada in ob zahodu je spet $\beta = 0$.

Višinski kot Sonca lahko ugotovimo na več načinov. Za vsako opazovanje sence narišemo pravokotni trikotnik, katerega kateti sta senca in višina stožca, višinski kot, to je kot med senco in trenutnim Sončevim žarkom (hipotenuzo), pa izmerimo s kotomerom. Uporabimo lahko tudi enačbo, navedeno v podpisu k sliki 1. Vendar je to zamudno. Dosti boljše je, da za višinski kot na deščico že vrišemo skalo v kotnih stopinjah (slika 1). Tako lahko v poljubnem času z lahkoto odberemo vrednost višinskega kota skoraj zagotovo na stopinjo natančno.

Spet lahko med dnevom merimo višinski kot Sonca in sestavimo preglednico:



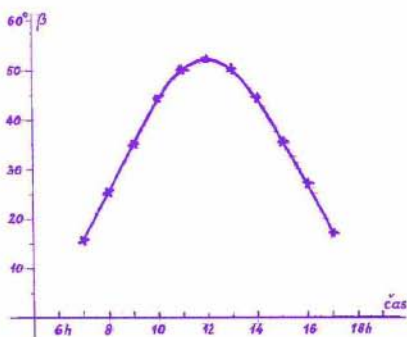
Slika 4. Orientacija po senci, ki jo meče navpični predmet na vodoravna tla.

Kraj:		Datum:
čas opazovanja (ura)	višinski kot Sonca (v stopinjah)	opombe
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		
16.		

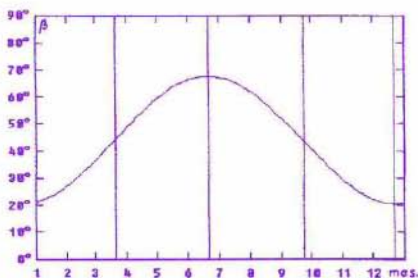
Nato narišemo ustrezen graf (slika 5). Ponovno lahko v različnih dnevih merimo višinski kot Sonca in grafe primerjamo med seboj. Če nas zanima samo spreminjanje opoldanskega višinskega kota Sonca med letom, merimo v različnih dneh samo okoli poldne. Graf spreminjanja višinskega kota Sonca opoldan v letu 1997 za Ljubljano kaže slika 6.

S stožcem pa lahko naredimo še naslednje zelo zanimivo opazovanje: Postavimo ga na bel papir na vodoravnih tleh. Papir in stožec ves čas opazovanja nič ne premikamo. Vsake pol ure (na primer od 9. ure dalje do približno 16. ure) zarišemo vrh sence. Popoldne, ko zaključimo z opazovanjem, vrhove senc povežemo. Dobimo krivuljo, po kateri se je vrh sence stožca sprehajal po papirju tistega dne. Dokazati se da, da je ta krivulja hiperbola, in tudi pokazati, zakaj je vsak dan drugačna.

Takšne krivulje lahko opazujemo tudi na prostem, vendar je z opazovanjem kar nekaj dela. Namesto majhnega stožca vzamemo kol, preklo, drog. Sam sem opravil res veliko takšnih opazovanj (slika 7 na IV. strani ovitka). Prav zadovoljen sem bil, ko sem na koncu dobil odlično ujemanje teorije in prakse. Teoretična razglabljanja prekoračujejo raven tega prispevka, praktično delo pa je povsem preprosto. Poskusite se še vi kak sončen dan v letu spoprijeti s takšnim opazovanjem sence in dobiti zanimivo krivuljo, po kateri se po vodoravnih tleh premika vrh sence vašega stožca ali kakega drugega pokončnega predmeta.



Slika 5. Spreminjanje višinskega kota Sonca v Ljubljani dne 10. 4. 1997.



Slika 6. Spreminjanje opoldanskega višinskega kota med letom v Ljubljani.

Marijan Prosén

O ŠTEVILIH 11...1

V zapisu števil

$$1, 11, 111, 1111, \dots, 11\dots 1, \dots \quad (1)$$

nastopa le števka 1. (Osnova je deset.) Ogledali si bomo dve njihovi lastnosti. Znak J_n naj pomeni število oblike (1) z n enkami, npr. $J_7 = 1\,111\,111$.

Prva lastnost se tiče deliteljev števil oblike (1). Vsa so liha, zato niso deljiva z 2; pa tudi s 5 ne, saj se ne končujejo na 0 ali 5. Za delitelje pridejo tako v poštev le števila tuja 10. In zanimivost:

A. Vsako število, ki je tuje 10, je med delitelji števil oblike (1).

Prepričajmo se!

Naj bo n naravno število, večje od 1 in tuje 10. Poglejmo števila

$$J_1, J_2, J_3, \dots, J_n, J_{n+1}. \quad (2)$$

Po delitvi z n jih lahko zapišemo

$$J_1 = k_1n + r_1, J_2 = k_2n + r_2, \dots, J_n = k_nn + r_n, J_{n+1} = k_{n+1}n + r_{n+1}. \quad (3)$$

Kvocienti $k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}$ so nenegativna cela števila, ostanki $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}$ imajo vrednosti med števili

$$0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4)$$

Števil (2) je $n+1$, ostankov (4) je možnih le n . Zato morata vsaj dva ostanka v (3) imeti isto vrednost. Naj bo npr.

$$r_t = r_s; \quad 1 \leq s < t \leq n+1, \quad (5)$$

torej sledi

$$J_t - J_s = (k_t - k_s)n.$$

Po drugi strani velja

$$J_t - J_s = 10^s \cdot J_{t-s}.$$

Sledi

$$(k_t - k_s)n = 10^s \cdot J_{t-s}. \quad (6)$$

Po privzetku je n tuj številu 10. Zato (6) pove, da n deli J_{t-s} . Toda to je eno od števil $J_1, J_2, \dots, J_n$, saj je $1 \leq t-s \leq n$ zaradi (5). Trditev A je dognana.

Ugotovitev A velja seveda posebej za vsako praštevilo, različno od 2 in 5. To pomeni, da se med prafaktorji števil (1) nahajajo vsa praštevila razen 2 in 5.

Praštevilski razcep začetnih števil iz (1) navaja preglednica:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= 11 = 11 \\
 J_3 &= 111 = 3 \cdot 37 \\
 J_4 &= 1\,111 = 11 \cdot 101 \\
 J_5 &= 11\,111 = 41 \cdot 271 \\
 J_6 &= 111\,111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \\
 J_7 &= 1\,111\,111 = 239 \cdot 4649 \\
 J_8 &= 11\,111\,111 = 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \\
 J_9 &= 111\,111\,111 = 3^2 \cdot 37 \cdot 333667 \\
 J_{10} &= 1\,111\,111\,111 = 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091
 \end{aligned} \tag{7}$$

Videli smo, da je pri n tujem 10 vsaj eno od števil $J_1, J_2, \dots, J_n$ deljivo z n . Najmanjši indeks, za katerega to velja, zaznamujemo s $c(n)$. Iz prvih treh vrstic v (7) izhaja, da 101 ni delitelj za $J_1 = 1$, J_2 , J_3 , pač pa 101 deli J_4 . Zato je $c(101) = 4$.

Ker je med števili $J_1, J_2, \dots, J_n$ vsaj eno, ki je deljivo z n , je izpolnjena ocena

$$c(n) \leq n. \tag{8}$$

S pomočjo (7) sestavimo preglednico števil $c(n)$ za n , $1 < n \leq 41$, ki so tuja 10; kjer $c(n)$ iz (7) ni razviden, je postavljen vprašaj:

$$\begin{array}{cccc}
 c(3) = 3 & c(13) = 6 & c(23) = ? & c(33) = 6 \\
 c(7) = 6 & c(17) = ? & c(27) = ? & c(37) = 3 \\
 c(9) = 9 & c(19) = ? & c(29) = ? & c(39) = 6 \\
 c(11) = 2 & c(21) = 6 & c(31) = ? & c(41) = 5
 \end{array} \tag{9}$$

Pri vprašajih lahko z računom preverimo, da je:

$$\begin{array}{ccc}
 c(17) = 16 & c(23) = 22 & c(29) = 28 \\
 c(19) = 18 & c(27) = 27 & c(31) = 15
 \end{array} \tag{10}$$

Ker je zaradi (9) in (10)

$$c(3) = 3 \quad c(9) = 9 \quad c(27) = 27,$$

ocene (8) ne moremo izboljšati. V podrobnejši opis, kako je $c(n)$ odvisen od n , se ne bomo spuščali.

Obrnimo se k drugi lastnosti števil (1).

Naslonili se bomo na znano dejstvo: Če je naravno število a večje od 1 in tuje 10, je decimalni zapis za $\frac{1}{a}$ čisto periodičen. Npr. $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ in dolžina (osnovne) periode je ena; $\frac{1}{101} = 0,\overline{0099}$ in dolžina periode je štiri.

V nadaljnjem naj bo q praštevilo, večje od tri. Če je p tako praštevilo, da ima $\frac{1}{p}$ dolžino periode enako q , je

$$\frac{1}{p} = 0,\overline{c_1 c_2 \dots c_q} \quad (11)$$

in števke $c_1, c_2, \dots, c_q$ so vzete med vrednostmi $0, 1, 2, \dots, 9$. Ker ima $\frac{1}{3}$ periodo dolžine ena, dolžina periode v (11) pa je $q \geq 5$, je $p \neq 3$. Če $\frac{1}{p}$ množimo z 10^q in nato odštejemo $\frac{1}{p}$, dobimo iz (11)

$$\frac{10^q - 1}{p} = c_1 \cdot 10^{q-1} + c_2 \cdot 10^{q-2} + \dots + c_q.$$

Če označimo naravno število na desni z b , je

$$10^q - 1 = bp$$

in zaradi $10^q - 1 = 9J_q$ tudi

$$9J_q = bp.$$

Dobljena enakost pove, da p deli $9J_q$; potem pa p deli J_q , saj za praštevilo p velja $p \neq 3$.

Tako smo ugotovili: Vsako praštevilo p , pri katerem je dolžina periode števila $\frac{1}{p}$ enaka praštevilu $q \geq 5$, je faktor v J_q . Z nekaj več priprave je mogoče dognati: Če je q praštevilo nad tri in praštevilo p faktor v J_q , je dolžina periode števila $\frac{1}{p}$ enaka q .

Z drugimi besedami:

B. Če je praštevilo q večje od tri, se praštevila p , za katera ima $\frac{1}{p}$ dolžino periode q , natančno ujemajo s prafaktorji števila J_q .

Vzemimo kot zgled $q = 5$. Iz (7) vidimo, da je J_5 produkt prafaktorjev 41 in 271. Velja

$$\frac{1}{41} = 0,\overline{02439}$$

$$\frac{1}{271} = 0,\overline{00369}$$

in števili $\frac{1}{41}$, $\frac{1}{271}$ imata res dolžino periode enako pet; po trditvi B sta 41, 271 edini praštevili p , za kateri ima $\frac{1}{p}$ dolžino periode pet.

Opomba. Kadar n ni praštevilo, nastopajo v J_n tudi prafaktorji p , pri katerih je dolžina periode števila $\frac{1}{p}$ manjša od n . Po (7) ima J_8 prafaktorje 11, 73, 101, 137. Tu je

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$$

$$\frac{1}{101} = 0,\overline{0099}$$

$$\frac{1}{73} = 0,\overline{01369863}$$

$$\frac{1}{137} = 0,\overline{00729927}$$

in pojavljajo se periode dolžin 2, 4 in 8.

Naloge.

1. Pokaži, da za $n \geq 2$ velja $\frac{1}{J_n} = 0,\overline{0 \dots 09}$ z dolžino periode n .
2. Če je n sestavljeno število, $n = ab$, $1 < a < b < n$, je J_n deljiv z J_a in J_b ; torej tudi z najmanjšim skupnim večkratnikom števil J_a in J_b .
3. Število J_n je praštevilo kvečjemu tedaj, ko je n praštevilo. (Pri $n < 113$ se to zgodi le za $n = 2, 19, 23$.)
4. Prepričaj se, da je $c(17) = 16$.
5. Z indukcijo doženi, da je $c(3^j) = 3^j$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Jože Grasselli

TEMELJITOST

Učitelj: Kaj še vedno nisi seštel teh treh števil?

Učenec: O ja, že desetkrat!

Učitelj: Lepo! Rad imam temeljite učence.

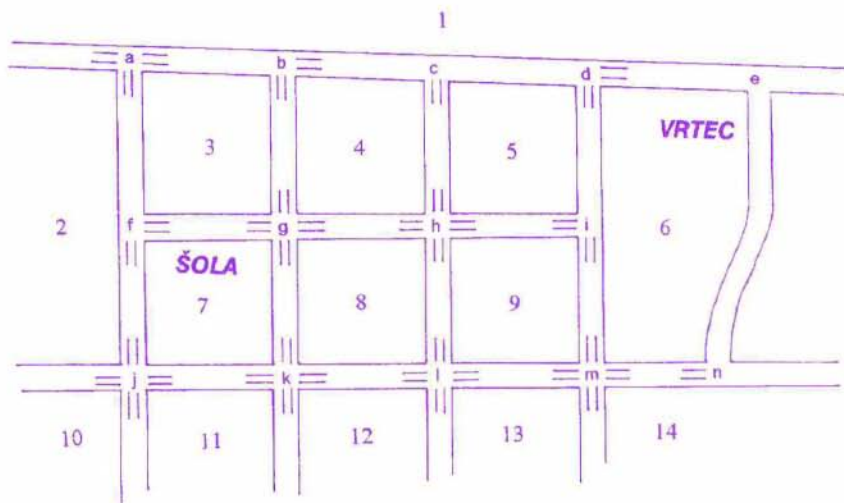
Učenec: Hvala. Tu je vseh deset rezultatov!

Marija Vencelj

VARNE POTI IN KRATKE POTI

Konec pomladi so se mali šolarji podali na pot v pravo šolo, da si ogledajo, v kaj se bodo podali jeseni. Ker sem z enim izmed udeležencev "pohoda" v tesnem sorodu, pot pa poteka po središču mesta, si nisem mogel kaj, da si ne bi zastavil nekaj vprašanj: Katera pot je najbolj varna? Katera pot je najkrajša?

Za omenjeni primer je shematični zemljevid mestnega okoliša (Mari-bora) podan na sliki 1, kjer je, kot že rečeno, potrebno priti iz vrtca do šole. Poleg ulic, vrtca in šole so označeni tudi prehodi za pešce, križišča in območja, na katera ceste razdelijo mestno četrt.



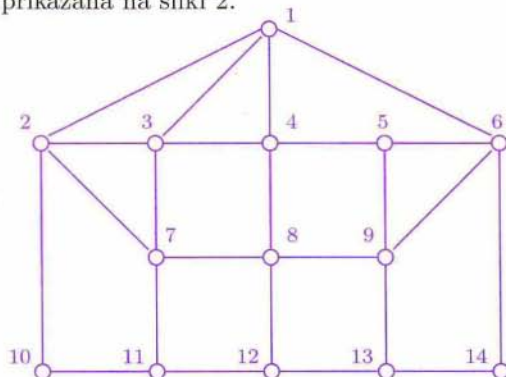
Slika 1. Zemljevid mestne četrti.

Varne poti

Varna pot mora seveda potekati le po pločnikih in prehodih za pešce. Domenimo se, da je najvarnejša tista pot, ki najmanjkrat prečka cesto. Število prečkanj ceste imenujmo *nevarnost poti*. Metoda "ostrega očesa" nas hitro prepriča, da je na sliki 1 nevarnost poti iz vrtca do šole enaka 3 – z manj kot tremi prečkanji ceste žal ne moremo iz vrtca do šole.

Lotimo se sedaj problema v splošnem: Kako bi za poljuben zemljevid in za poljubna začetek in cilj poiskali najvarnejšo pot? Najprej opazimo, da za reševanje problema ne potrebujemo informacije o obliki posameznih območij zemljevida, saj se znotraj območja gibljemo varno. Zato bomo

vsako območje nadomestili z majhnim krožcem. Seveda pa moramo vedeti, iz katerega v katero območje lahko pridemo preko prehoda za pešce. To bomo označili s črto med ustreznima krogcema. Če je med dvema območjema več prehodov, to na varne poti ne vpliva, zato bo ena črta med območjema zadoščala. Za zemljevid s slike 1 dobimo poenostavljeno situacijo, ki je prikazana na sliki 2.

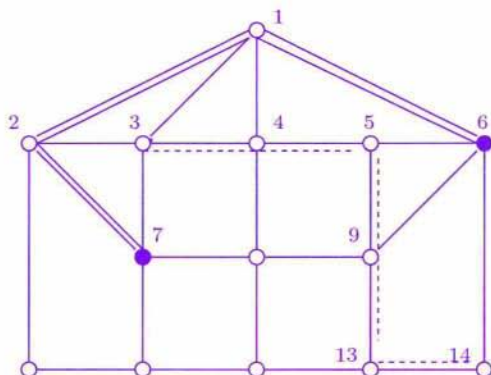


Slika 2. Graf za iskanje varnih poti.

Dobljeno matematično strukturo imenujemo *graf*. O grafih je več zapisano v knjižici iz Presekove knjižnice: *Bajc, Pisanski: Najnujnejše o grafih*. Tu pa povejmo le, da krogcem pravimo *točke*, črtam pa *povezave* grafa. Območju vrtca ustreza točka 6, šolskemu območju pa točka 7.

Po grafu se lahko sprehajamo. To naredimo tako, da gremo iz ene točke v drugo točko po povezavi, ki ju povezuje. Zaporedju takih prehodov rečemo *sprehod* v grafu. Sprehod, v katerem so vse točke različne, imenujemo *pot*. Sprehod med dvema točkama grafa je *najkrajši sprehod*, če vsebuje najmanjše možno število povezav. To število povezav imenujemo *razdalja* med danima točkama. Najkrajši sprehod med dvema točkama je vedno pot. Res, če se na sprehodu ista točka pojavi dvakrat, lahko tisti del sprehoda, ki poteka vmes, opustimo in dobimo krajši sprehod. Zato bomo v nadaljevanju namesto o najkrajših sprehodih govorili kar o najkrajših poteh. Opozorimo še, da lahko med dvema točkama obstaja več različnih najkrajših poti.

Na sliki 3 sta shematično prikazani dve poti v našem grafu. Prva poteka po točkah 6, 1, 2 ter 7 in je ena od treh najkrajših poti med poudarjenima točkama 6 in 7, torej med vrtcem in šolo. Pot po točkah 3, 4, 5, 9, 13 in 14, ki je dolžine 5, pa ni najkrajša pot med 3 in 14, saj lahko med njima hitro najdemo pot dolžine 3.



Slika 3. Dve poti v grafu za iskanje varnih poti.

Prečkanje ceste na sliki 1 torej ponazorimo z ustrezno povezavo grafa s slike 2. Zato je nevarnost poti med dvema območjema s slike 1 enaka razdalji med ustreznima točkama s slike 2. Kako v poljubnem grafu poiščemo razdaljo med dvema točkama, bomo povedali nekoliko kasneje, najprej pa si oglejmo naslednji sorodni problem.

Kratke poti

Tokrat bi radi iz vrtca do šole prišli po najkrajši poti. Seveda smemo tudi sedaj prečkati ceste le po prehodih za pešce, ni pa pomembno, kolikokrat prečkamo cesto. Iz zemljevida s slike 1 bomo naredili graf takole. Njegove točke bodo križišča, saj moramo priti v križišče, če želimo prečkati cesto. (Če bi imeli prehode za pešce tudi izven križišč, bi pač tudi tam dodali točke.) Nato dve točki povežemo, če gre za sosednji križišči. Seveda pa potrebujemo tudi dodatno informacijo – dejanske razdalje med posameznimi točkami. Tako dobimo graf, ki je prikazan na sliki 4. Tak graf imenujemo *uteženi graf*. Vrednostim na povezavah bomo rekli *cene*, saj lahko te vrednosti predstavljajo tudi kaj drugega kot dolžino. Na primer znesek, ki ga moramo plačati za cestnino, ali pa ceno izgradnje posameznega odseka. Za naš primer si lahko predstavljamo, da so cene povezav desetkratniki dejanskih vrednosti, tako na primer cena 10 predstavlja razdaljo 100 metrov.

Algoritem je takle. Recimo, da ima obravnavani graf n točk. Njegove točke oštevilčimo s števili od 1 do n . Nato v dvorazsežno polje, imenujmo ga **razdalje**, zapišemo cene posameznih povezav. Natančneje, če sta točki i in j povezani s povezavo, potem v **razdalje**[i,j] zapišemo ceno povezave med i in j , sicer pa zapišemo ∞ . V računalniku seveda ne moremo zapisati vrednosti neskončno, zato zapišemo dovolj veliko število, na primer 100-krat večje od tipičnih cen povezav. V spodnjem programu smo izbrali vrednost 99999. No, priročneje je, če za točki, ki nista povezani s povezavo, kot podatek vnesemo vrednost -1 , to pa potem s programom spremenimo v 99999. S tem smo pripravili podatke za jedro algoritma.

Ko so podatki pripravljeni oziroma prebrani, se sprehodimo po vseh točkah. Za vsako točko, imenujmo jo i , se vprašamo, ali morda ne poteka bližnjica iz neke točke j do neke druge točke k preko točke i . Pri izbrani točki i to preverimo za vse možne pare točk. Če taka bližnjica obstaja, si to seveda zapomnimo. Ko se algoritem izteče, imamo v polju **razdalje** zapisane vrednosti najkrajših poti za vse pare točk uteženega grafa. Zapišimo ta algoritem v obliki programa.

program najcenejse_poti;

{ V uteženem grafu za vsak par točk poišče vrednost najkrajše poti }
 { med njima. }

const

maximum = 100; { Največje dovoljeno število točk grafa. }

var

razdalje: **array** [1..maximum,1..maximum] **of** longint;

i, j, k, n: integer;

ime: **string**[20]; { Ime datoteke, na kateri so podatki o cenah. }

f: text;

begin

{ Pripravimo datoteko, na kateri so vpisani podatki. }

write('Vhodna datoteka: '); readln(ime);

assign(f,ime); reset(f);

{ Z datoteke f preberemo število točk in cene vseh povezav. }

readln(f,n);

for i := 1 **to** n **do begin**

for j := 1 **to** n **do begin**

read(f,razdalje[i,j]);

if razdalje[i,j] = -1 **then** razdalje[i,j] := 99999;

end;

readln(f);

end;

```

{ Bistvo programa so naslednji trije stavki for. }
{ Vprašamo se: ali imamo bližnjico iz j v k preko i. }
for i := 1 to n do
  for j := 1 to n do
    for k := 1 to n do
      if razdalje[j,k] > razdalje[j,i] + razdalje[i,k] then
        razdalje[j,k] := razdalje[j,i] + razdalje[i,k];
    { Samo še izpis rezultatov, pa smo končali. }
  for i := 1 to n do begin
    for j := 1 to n do write(razdalje[i,j]:3);
    writeln;
  end;
end.

```

Seveda bi lahko gornji postopek sprogramirali tudi elegantneje, vendar bi s tem zamislili njegovo bistvo. Na primer, podatke bi lahko pripravili (in brali) v taki obliki, da bi vnesli samo neničelne cene, dovolj pa bi tudi bilo vnesti le polovico podatkov, saj vedno velja $\text{razdalje}[i,j] = \text{razdalje}[j,i]$.

Omenimo še, da opisani postopek ni edini, ki poišče vrednosti najkrajših poti. Ima tudi pomanjkljivost, saj kot rezultat dobimo le vrednosti najkrajših poti, ne pa tudi samih poti. Seveda pa smo s tremi preprostimi stavki `for` dobili več, kot bi si lahko mislili na začetku.

Primeri

Preizkusimo gornji program na obeh primerih iz tega prispevka. Graf s slike 2 ima 14 točk, vhodni podatki, ki jih pripravimo na datoteki, pa so naslednji:

```

14
0  1  1  1 -1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
1  0  1 -1 -1 -1  1 -1 -1  1 -1 -1 -1 -1
1  1  0  1 -1 -1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
1 -1  1  0  1 -1 -1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
-1 -1 -1  1  0  1 -1 -1  1 -1 -1 -1 -1 -1
1 -1 -1 -1  1  0 -1 -1  1 -1 -1 -1 -1  1
-1  1  1 -1 -1 -1  0  1 -1 -1  1 -1 -1 -1
-1 -1 -1  1 -1 -1  1  0  1 -1 -1  1 -1 -1
-1 -1 -1 -1  1  1 -1  1  0 -1 -1 -1  1 -1
-1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  0  1 -1 -1 -1
-1 -1 -1 -1 -1 -1  1 -1 -1  1  0  1 -1 -1
-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  1 -1 -1  1  0  1 -1
-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  1 -1 -1  1  0  1
-1 -1 -1 -1 -1  1 -1 -1 -1 -1 -1 -1  1  0

```

Izpis, ki ga vrne program, je prikazan v spodnji tabeli:

0	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	3	3	2
1	0	1	2	3	2	1	2	3	1	2	3	4	3
1	1	0	1	2	2	1	2	3	2	2	3	4	3
1	2	1	0	1	2	2	1	2	3	3	2	3	3
2	3	2	1	0	1	3	2	1	4	4	3	2	2
1	2	2	2	1	0	3	2	1	3	4	3	2	1
2	1	1	2	3	3	0	1	2	2	1	2	3	4
2	2	2	1	2	2	1	0	1	3	2	1	2	3
2	3	3	2	1	1	2	1	0	4	3	2	1	2
2	1	2	3	4	3	2	3	4	0	1	2	3	4
3	2	2	3	4	4	1	2	3	1	0	1	2	3
3	3	3	2	3	3	2	1	2	2	1	0	1	2
3	4	4	3	2	2	3	2	1	3	2	1	0	1
2	3	3	3	2	1	4	3	2	4	3	2	1	0

Najnevarnejše poti so tiste med 2 in 13, 3 in 13, 5 in 10, 5 in 11, 6 in 11, 7 in 14, 9 in 10 ter 10 in 14, pri vseh moramo (vsaj) štirikrat prečkati cesto.

V drugem primeru pa preizkusimo program na uteženem grafu s slike 4. Tudi ta graf ima 14 točk, ki jih oštevilčimo na naraven način, torej a naj bo 1 in n naj bo 14. Podatki za program so:

14													
0	10	-1	-1	-1	12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	0	10	-1	-1	16	11	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	10	0	10	-1	-1	15	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	10	0	11	-1	-1	16	10	-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	11	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	22
12	16	-1	-1	-1	0	10	-1	-1	10	17	-1	-1	-1
-1	11	15	-1	-1	10	0	10	-1	-1	10	-1	-1	-1
-1	-1	10	16	-1	-1	10	0	10	-1	-1	10	18	-1
-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	10	0	-1	-1	-1	10	-1
-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	0	10	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	17	10	-1	-1	10	0	10	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	10	0	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	18	10	-1	-1	10	0
-1	-1	-1	-1	-1	22	-1	-1	-1	-1	-1	-1	7	0

In še rezultat programa:

```

0 10 20 30 41 12 21 30 40 22 29 39 48 55
10 0 10 20 31 16 11 20 30 26 21 30 38 45
20 10 0 10 21 25 15 10 20 35 25 20 28 35
30 20 10 0 11 35 25 16 10 45 35 26 20 27
41 31 21 11 0 46 36 27 21 56 46 37 29 22
12 16 25 35 46 0 10 20 30 10 17 27 37 44
21 11 15 25 36 10 0 10 20 20 10 20 28 35
30 20 10 16 27 20 10 0 10 30 20 10 18 25
40 30 20 10 21 30 20 10 0 40 30 20 10 17
22 26 35 45 56 10 20 30 40 0 10 20 30 37
29 21 25 35 46 17 10 20 30 10 0 10 20 27
39 30 20 26 37 27 20 10 20 20 10 0 10 17
48 38 28 20 29 37 28 18 10 30 20 10 0 7
55 45 35 27 22 44 35 25 17 37 27 17 7 0

```

Najdaljša pot med vsemi najkrajšimi potmi je dolžine 56 in poteka med točkama e in j , druga najdaljša pa je pot med točkama a in n . Poišči ju! Vse ostale poti so krajše od 50.

Naloga

Za svoj okoliš ugotovi dejanske podatke o prometni ureditvi in nato poišči najvarnejše in najkrajše poti. Pri tem lahko varnost poti še nekoliko izpopolniš: če cesto prečkamo pri semaforju, je to varneje, kot če jo prečkamo na nesemaforiziranem križišču (na primer dvakrat varneje). Kako moramo za ta primer pripraviti podatke?

Sandi Klavžar

HITRO KVADRIRANJE ŠTEVIL, KI SE KONČUJEJO S ŠTEVKO 5

Če kvadriramo število, katerega zadnja številka v desetiškem zapisu je enaka 5, dobimo število, ki se končuje s 25. Tudi številke, ki stojijo pred tem dvomestnim koncem, lahko dobimo na zelo preprost način (samo iz števk, ki so pred zaključno številko 5 v začetnem številu).

1. Zapiši nekaj primerov in poskusi iz njih uganiti, po kakšnem pravilu dobimo začetne številke kvadratov takih števil.
2. Zakaj pravilo vedno deluje?
3. Ali lahko še v kakšni bazi, različni od 10, dobimo podobno pravilo za kvadriranje nekaterih števil?

Marija Vencelj

KRIŽANKA “FIZIKALNE VEDE”

AVTOR MARKO BOKALIC	VEDA O GIBANJU IN MIROVANJU TELES	ČLAN NAJVIŠJE ZNANSTV. USTANOVE	GIUSEPPE VERDI	MESTO IN REKA NA SLOVAŠKEM	MEZO- SOPRA- NISTKA NOVŠAK	ŽIVALSKA NOGA	PRIPADNIK STAREGA EVROP. LJUDSTVA	HČERIN MOŽ	EMIL NAVINSEK	LERMON- TOVA PESNITEV	P
NAUK O MAGNETNIH POJAVIH											DU (LAT)
ENAKO- VREDNOST LOGICNIH IZJAV											
HEKTAR			RIM ZGO- DOVINAR						VEZNIK		
			PREDVELIKO NOČNA JED						SMUČAR MAHRE		
ŠESTI ŽIDOVSKI MESEC					100 m ²			SLOVESNA ZAOB- LJUBA			
NOVINARKA MALEČKAR				◀	PEVEC SLAVICA	STAR CITROENOV AVTO	FARMA- CEVTSKA USTANOVA	NAJVIŠJE GORSTVO			
								SL. SMUČAR (JUREI)			
NAZIV				SIRSKI VODITELJ (HAFEZ EL)	PEVEC NIPIC					ZEMELJSKA SMOLA	
										LUTKAR MAJARON	
IZPAD DELA ORGANA IZ VOTLINE					FR. SMUČAR- KA (CAROLE)						MLE IZDE SPO USI
					TOPE KUNTNER						
NAUK O ZVOCNIH POJAVIH									DANE ZAJC		
									VELIKO IZRAELSKO MESTO		
	VEDA O SVETLOBNI H POJAVIH	TIBETANSK O GOVEDO				SIVA KRHK KOVINA (Sb)					
		ŽIVLJENJE- SLOVEC				MESTO V MAKEDONIJI					
VELIKA MUHA BRENCELJ					DLAKE POD NOSOM					PORTUGAL. OTOČJE	
					VELIKANSKI KIP					POSTELJNO POKRIVALO	
π			TELESNA DRŽA	VEDA O PSIH							
				NAJDALJŠI PRITOK DRINE							
VRSTA ENERGIJE								SLOVNICA BOHORIC			
								JAREM			
SREDIŠČE FILIPIN OTOKA PANAY							SLIKAR SUBIC				ARI
							ITAL KAMION				
VEDA, KI PROUČUJE VESOLJE											
NEKO TURSKI OBLASTNIK				RUSKI KUHALNIK ZA ČAJ							

RESEK		ODGOVOR NA KONTRO	NORVEŠKI SMUČAR TEKAČ (THOMAS)	PODROBNOST	KRAJ NA OPATUŠKI RIVIERI	IZUMITELJ BENCIN MOTORJA (NIKOLAUS)	NEENAKOMERNO BITJE SRCA	MOČA, MOKROTA	BESEDNA UGANKA, PREMETANKA	TITAN	TV ZASLON	KRAJ JUŽNO OD GROSLJEGA
ŠA IN.)	LJUBITELJ RADIO-TEHNIKE											
	"MIKRO" ELEKTRO-TEHNIKA											
	MADŽARSKA SOPRANISTKA (SYLVIA)	NAUK O RAVNO-VEŠJU SIL SMUČARKA EDER								RADO ČASL		
					OLIVER TOBIAS			LEKARNIŠKA UTEZ		VELETOK V SREDNJI EVROPI		
					KORALNI OTOKI			VRSTA ŽITA				
						LEDENIŠKA GROBLJA						
						MATEMATIK VIDAV					VEDA O ELEKTRIČNIH POJAVIH	NAUK O GIBANJU TELES
ČONI ELEK				ODKUP						EDGAR DEGAS		
RTNI REH				LEGENDAR. BOKSAR (MUHAMED)						PRAKANTON V SVICI		
	SLOV. VIOLINIST (IGOR)	VELEMESTO V TEKSASU							NOGOMETAS HOENESS			
		NAJVEČJI PTIČ							DEKLICA MED "SMRKICI"			
			1. ŠEF OZN (TRYGVE)				PRAVILJ. ČARKA PEROCI	POMRZNJEN SNEG				
			PALICA ZA REČENJE MESA					OBLIČ ZA BRUŠENJE				
					NAVPIČNI ZRAČNI TOKOVI							
					TERCET							
				NAŠ DENAR						THOMAS MANN		
				1. GRŠKA ČRKA						AMONIAK. SPOJINA		
		ŽERJAVICA				AFRIŠKI VOJAKI						
		TIŠINA SPOKOJ				ŽIVAL POD ZEMLJO						
3ON	SLOV. GEOGRAFI (ANTON)						STROKOVNIJAK ZA SNOVI					
							MILANO					
	SODOBNA RACUNALNISKI ZNANOST											
	OKSIDNA PLAST NA ŽELEZU				GL. MESTO ALBANJE							

PLANETI OKROG DRUGIH SONC

Konec leta 1995 je svet obšla vest, da so astronomi odkrili prvi primer planeta, ki kroži okrog Soncu podobne zvezde z imenom *51 Pegasi*. Sledile so objave še drugih podobnih odkritij, vendar pa skorajda ni primera, kjer bi bilo odkritje sončnega sistema povsem gotovo. Poglejmo, zakaj je iskanje planetov okrog drugih sonc tako težko delo.

Zvezda 51 Pegasi in njen planet

Po osemnajstih mesecih neprestanih in natančnih merjenj sta oktobra leta 1995 astronoma M. Mayor in D. Queloz z ženevskega observatorija objavila svoje odkritje: Soncu podobno zvezdo 51 Pegasi obkroža planet, po masi podoben Jupitru. Planet obkroži zvezdo v dobrih štirih dneh, kar pomeni, da je svojemu soncu precej bliže, kot je našemu Soncu najbližji planet Merkur. Masa planeta naj bi bila približno polovica Jupitrove mase.

Zvezda 51 Pegasi ima navidezno vizualno magnitudo 5.5, torej jo lahko vidimo s prostim očesom, še posebej, če si izberemo jasno noč in opazovališče izven večjih mest (glej sliko 1). Od nas je zvezda oddaljena štirideset svetlobnih let. Stara naj bi bila nekaj milijard let, sveti podobno kot Sonce in se prav tako kot Sonce tudi počasi vrti okrog svoje telesne osi.



Slika 1. Na sliki je prikazana lega zvezde 51 Pegasi v ozvezdju Pegaz. Štiri svetlejše zvezde tvorijo znani Pegazov štirikotnik, ki ga zlahka najdemo s prostim očesom.

Ker je odkriti planet tako blizu zvezde, so astronomi kmalu navrgli argumente proti obstoju nam znanega življenja na njem. Razmere na tem planetu so namreč precej neprijazne. Ker poznamo planetov obhodni čas, lahko izračunamo tudi njegovo oddaljenost od zvezde. Ta je le sedem milijonov kilometrov, to pa je sedemkrat manj od razdalje med Soncem in Merkurjem. Zaradi tolikšne bližine soncu mora biti na površini tega planeta temperatura vsaj tisoč stopinj Celzija, takih temperatur pa organizmi, kakršni živijo na Zemlji, ne bi prenesli. Pogled na nebo podnevi bi bil s tega planeta precej zaslepljujoč, saj bi bilo sonce z njega kar v kotu deset ločnih stopinj (naše Sonce je veliko le pol ločne stopinje), to pa je toliko, kot se nam zdi velika teniška žogica, ki jo držimo v iztegnjeni roki.

Kaj pa, če meritve pomenijo kaj drugega in ne gre za planet? Že od leta 1940 naprej se je namreč kar nekajkrat zgodilo, da so objavili odkritje planeta, potem pa se je izkazalo, da gre za dvojni sistem, na primer "običajne" zvezde in rdeče pritlikavke. Danes poznamo tudi že rjave pritlikavke (o katerih je Presek pisal lani), ki bi morda lahko namesto planeta obkrožale zvezdo. Razlikovanje med obema tipoma objektov ni preprosto, saj si lahko še najbolj pomagamo z enim samim parametrom, maso. Masa rjave pritlikavke naj bi bila precej večja od mase planeta. Vendar pa po teoretičnih ocenah poznamo le zgornjo mejo za maso rjave pritlikavke. S pomočjo opazovanj radialne krivulje, s katerimi so odkrili planet zvezde 51 Pegasi, pa dobimo spodnjo mejo za maso planeta.

Primer planeta zvezde 51 Pegasi so neodvisno preverile še druge skupine astronomov po svetu. Meritev je že toliko, da so z veliko gotovostjo izločili še druge fizikalne razloge, ki bi tudi lahko bili odločilni za izmerjene krivulje, na primer zvezdine pulzacije ali radialna nihanja. Večina astronomov verjame, da je odkrit planetni sistem. Vendar pa vse le še ni pojasnjeno, saj je ocena za maso planeta le okvirna, pa tudi teorijo nastajanja sončnih sistemov bo spričo tega, zvezdi tako bližnjega planeta, najbrž treba dopolniti.

Opazovalne metode

Stoletja dolgo so generacije astronomov ugibale, ali planeti krožijo tudi okrog drugih zvezd. Mnogi so upali, da se bo veliko odkritje zgodilo še za njihovega življenja. Vendar pa so astronomski učbeniki že pred časom pisali, da bi bil planet okrog neke druge zvezde tako rekoč nemogoče opaziti neposredno, to pomeni, da bi enostavno pogledali skozi teleskop in videli svetlo sonce, v njegovi bližini pa planet, podobno kot nam pogled z lovskim daljnogledom razkrije dve zvezdi, eno svetlejšo, drugo šibkejšo, če ga usmerimo na srednjo zvezdo v ojesu Velikega voza (znano vizualno dvozzvezdje Mizar-Alkor). Do take trditve so prišli s preprosto oceno.

Vzeli so kak planet našega Osončja, na primer Zemljo. Njeno oddaljenost od Sonca poznamo. Predstavljajmo si, da gledamo Zemljo z neke druge zvezde, pri čemer vzamemo za njeno oddaljenost neko določeno vrednost. Pokaže se, da bi bil kot med Zemljo in Soncem tako majhen, da Zemlje ne bi mogli ločiti od Sonca, saj bi se povsem skrila v njegovi bleščavi.

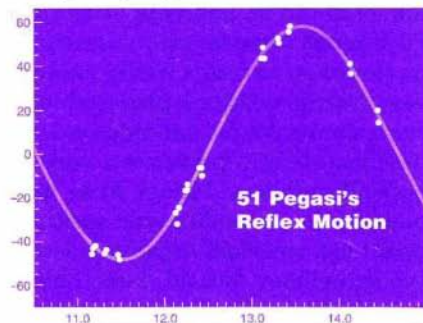
Neposredno torej planetov ni mogoče videti, ker so zvezde preprosto predaleč. Kaj pa posredno? Za to obstajata dve metodi. Prva sodi v področje *astrometrije*, druga pa se poslužuje *spektroskopov*, s katerimi merimo hitrosti zvezd. Poglejmo si najprej astrometrično metodo.

Astrometrija je področje astronomije, ki se ukvarja z natančnim merjenjem leg zvezd. Po matematično bi rekli, da povemo (izmerimo) koordinate zvezde v izbranem koordinatnem sistemu. Od Keplerja naprej vemo, kako obravnavamo sistem sonca in planeta (ali pa dveh zvezd). Vsako od teles kroži okrog skupnega težišča. Če je eno telo mnogo težje od drugega, tako kot je to ponavadi pri soncu in planetu, potem se nam – dokler pri meritvah nismo dovolj natančni – zdi, da lažje telo (planet) kroži okrog težjega (sonca). Če izračunamo koordinate težišča, se nam to ne zdi nič čudnega; težišče planeta in sonca namreč ponavadi leži znotraj sonca. (Hiter račun s pomočjo tabel za mase in oddaljenosti v Osončju nam pove, da v našem Sončnem sistemu leži težišče teles Sonce-Zemlja krepko znotraj Sonca, težišče sistema Sonce-Jupiter pa blizu Sončeve površine.) Ker se v resnici vedno gibljeta obe telesi, tudi težje od obeh, lahko z natančnimi meritvami lege zvezde po daljšem času ugotovimo, da se njena lega morda sistematično premika glede na ozadje mnogo bolj oddaljenih zvezd. Ker smo pri takih meritvah omejeni z ločljivostjo teleskopov, ki jih uporabljamo, doslej z astrometrično metodo še niso uspeli najti planetnega sistema.

Druga metoda pa je tista, s katero so odkrili planet zvezde 51 Pegasi. Tu opazujemo majhne spremembe v hitrosti gibanja zvezde stran od opazovalca ali proti njemu, v našem primeru Zemlji. Ker gledamo to hitrost v radialni smeri, ji pravimo *radialna hitrost*. Meritev temelji na Dopplerjevem pojavu, ki se ga najbolj spomnimo po znanem primeru vlaka. Njegov pisk se nam zdi višji (višja frekvenca – manjša valovna dolžina), če se nam vlak približuje, in nižji (nižja frekvenca – večja valovna dolžina), če se nam oddaljuje. Podobno se nam zdi valovna dolžina svetlobe zvezde takrat, ko se nam na poti po svoji orbiti približuje, manjša (premaknjena proti modremu delu spektra) in, ko se od nas oddaljuje, večja (premaknjena proti rdečemu delu spektra). Po teh premikih določijo radialno hitrost zvezde v trenutku meritve. V resnici seveda gledajo le svetlobo določenih valovnih dolžin, tako imenovane *črte* (glej sliko 2 na III. strani ovitka). Te (spektralne) črte pa nam razkrije spektroskop. Dobljene izmerke za radialno

hitrost nato narišejo v odvisnosti od časa. Kadar dobijo lepo krivuljo, katere oblika se v času ponavlja, je to znak, da gre za pravilno ponavljajoče se gibanje, kakršno je na primer kroženje zvezde okrog težišča (slika 3). Tako sklepajo, da zaradi prisotnosti drugega telesa, s katerim je zvezda gravitacijsko povezana, zvezda kroži okrog skupnega težišča.

Slika 3. Krivulja radialne hitrosti zvezde 51 Pegasi je razkrila, da jo obkroža planet. Na abscisni osi je označen čas (celotna os pokriva štiri opazovalne noči v oktobru 1995), na ordinatni osi pa radialna hitrost (v metrih na sekundo; negativni predznak pomeni oddaljevanje). Narisana sinusna krivulja se izmerkom zelo dobro prilagaja. Gre torej za pravilno, ponavljajoče se gibanje.



Slika 4. Trimeterski teleskop na ameriškem observatoriju Lick (blizu mesta San Jose v Kaliforniji) slovi po doslej največjem številu (4) odkritih kandidatov za planetne sisteme. Teleskop je star 37 let.

Obeti za prihodnost

Danes je na listi kandidatov za okolišne planetene sisteme kakih osem članov. Nekateri so bolj, drugi manj zanesljivi. Tako so bili z izjemno natančnimi meritvami doslej nedvomno potrjeni trije planeti, ki obkrožajo pulzar po imenu PSR1257+12. Ta pulzar je oddaljen tisoč šeststo svetlobnih let in leži na področju ozvezdja Devica. Na listi sta tudi primera zvezd 70 Virginis (zvezda leži v ozvezdju Devica) in 47 Ursae Majoris (zvezda je na področju ozvezdja Veliki medved), ki sta bila objavljena kmalu po prvem iz serije nedavnih planetnih odkritij, sistemu zvezde 51 Pegasi. Tudi v zvezi s tema dvema kandidatoma so se takoj pojavila ugibanja o možnosti naseljenosti in o prisotnosti vode na planetih, vendar pa o tem nimamo nobenih meritev. Mnogi, ki se ukvarjajo z iskanjem planetnih sistemov, poudarjajo, da bodo ravno spektroskopske metode, s katerimi odkrivamo prisotnost različnih organskih sestavin in sestavin, povezanih z življenjem (voda, ogljikov dioksid, kisik), bistvenega pomena pri nadaljnjem delu.

Ko smo govorili o opazovalnih metodah, smo spustili tisto, od katere si astronomi v prihodnosti še največ obetajo. Gre za opazovalno tehniko, ki je izredno zahtevna in občutljiva, zato so ustrezne naprave še vedno v fazi projektiranja, izgradnje in testiranja, ne pa v široki uporabi. Gre za tako imenovano *interferometrijo*. Pri interferometriji moramo imeti vsaj dva teleskopa. Z obema zbrano svetlobo kombiniramo in gledamo dobljeni vzorec. Interferometrijo že dolgo s pridom uporabljajo na področju radijskih valovnih dolžin. Pri krajših valovnih dolžinah, kot so tiste z optičnega in infrardečega področja, ki sta za iskanje planetnih sistemov najobetavnejši, pa je uporaba interferometrije bistveno težja, ker so valovne dolžine, ki jih uporabljamo, bistveno krajše. Pri interferometriji moramo namreč vse pomožne instrumente, ki jih uporabljamo, postaviti vsaj tako natančno, kot je velikostni red valovne dolžine. Pri tem nas ob opazovanjih z Zemlje seveda motijo vsi tresljaji in temperaturna nihanja v okolici, seizmološki premiki tal in še tako minimalni potresi. Nekaterim od teh zunanjih vplivov se do neke mere da izogniti, vendar pa se mnogim astronomom zdi za postavitev optičnega ali infrardečega interferometričnega observatorija še najobetavnejša lega izven Zemlje. Tako bi se izognili neželenim zunanjim motnjam. Umetnikova zamisel takšnega vesoljskega interferometra je prikazana na sliki 5 na III. strani ovitka.

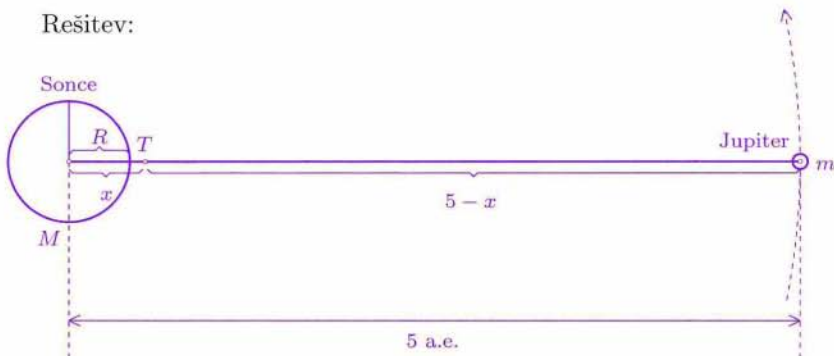
Prva odkritja so dala novega zagona astronomom, ki so leta in desetletja osamljeno iskali druge planetne sisteme. V zadnjem letu so se zrcala mnogih observatorijev, ki si lahko privoščijo spremembo opazovalnih programov in ki imajo ustrezno opremo, preusmerila k novemu, vablljivemu cilju. Novi načini opazovanja in razvoj opazovalne opreme bodo v prihodnjih desetletjih zagotovo prinesli odkritja novih planetnih sistemov.

Mirjam Galičič

NALOGA K ČLANKU PLANETI OKROG DRUGIH SONC

Izračunajmo, kje leži težišče T sistema teles Sonce-Jupiter, če kroži Jupiter okrog Sonca v razdalji 5 a.e. (astronomskih enot) in je razmerje mase Sonca M in mase Jupitra m enako 1000 (1 a.e. meri 215 polmerov Sonca).

Rešitev:



Masi teles sta obratno sorazmerni z razdaljama središč teles od težišča T . Pri oznakah na sliki velja

$$\frac{M}{m} = \frac{5-x}{x},$$

od koder sledi

$$1001x = 5 \cdot 215R, \quad \text{ozroma} \quad x \approx 1,1R,$$

kjer smo z R označili polmer Sonca.

Težišče sistema Sonce-Jupiter leži malo nad površino Sonca.

Marijan Prosén

KUBI ŠTEVK

Edina naravna števila, ki so enaka vsoti svojih števk, so enomestna števila $1, 2, \dots, 9$. Naravna števila, ki so enaka vsoti kvadratov svojih števk, so še bolj redka. Pravzaprav obstaja eno samo tako število. To je število 1, ki je enako tudi vsoti kubov svojih števk. In tako smo pri nalogi. Poiščite vsa tista naravna števila, ki so enaka vsoti kubov svojih števk. Seveda si pri iskanju lahko pomagata tudi z računalnikom.

Martin Juvan

ŠTEVILSKA KRIŽANKA

1		2		3	4	
		5	6			
7	8				9	10
11			12	13		
	14	15				
16					17	
18				19		

Vodoravno:

1. Trimestni konec števila 7^{9999} .
3. Najmanjše naravno število z lastnostjo, da vsota njegovih števk ne deli vsote kubov njegovih števk.
5. Vrednost produkta xy , kjer je (x, y) rešitev sistema enačb $x - 3y = 110$ in $x + 2y = 155$.
7. Vrednost izraza $\frac{V}{\pi} + 5$, kjer je V prostornina krogle s površino 900π .
9. Največje možno število členov takega zaporedja celih števil, v katerem je vsota poljubnih 17 zaporednih števil sodo število, vsota poljubnih 18 števil pa liho število.
11. Procent podražitve glede na začetno ceno, če se je blago podražilo najprej za 25% in nato še za 16%.
12. Številsko vrednost izraza $(a + b)^2 - (a - b)^2$ za $a = 593$ in $b = 3$.
14. Število diagonal v 72-kotniku.
16. Najmanjše naravno število N z lastnostjo: če je $20 \leq n \leq 500$, je n praštevilo natanko takrat, ko sta n in N tuji števili.
18. $f(f(109))$, če je $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.
19. Rešitev enačbe $\frac{x}{2} + \frac{x+2}{3} = 434$.

Navpično:

1. Površina štiristrane piramide, katere osnovna ploskev je pravokotnik s stranicama 20 in 14, višina pa ima podnožišče v presečišču diagonal osnovne ploskve in meri 24.
2. Peti člen zaporedja 210, 211, 219, 246, ...
3. Višina valja s površino 180π in premerom osnovne ploskve 10.
4. Tretja vrsta v Pascalovem trikotniku.
6. Najmanjše naravno število, ki ima produkt števk enak 5040.
8. Prostornina kvadra s površino 17552 in robovoma 10 in 18.
10. Vrednost izraza $\frac{13P}{8\pi}$, kjer je P površina stožca s premerom osnovne ploskve 140 in višino 240.
13. Ploščina trapeza $ABCD$ ($AB \parallel CD$), pri katerem je $AB = 305$, $BC = AD = 13$ in $CD = 281$.
15. Število, ki ga dobimo, če od vsote števk, uporabljenih za zapis lihih števil množice S , odštejemo vsoto števk, uporabljenih za zapis sodih števil množice S , kjer je $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 999, 1000\}$.
16. Število premic, določenih s 14 točkami, ki vse leže na isti krožnici.
17. Ploščina kvadrata, konstruiranega nad kateto AC pravokotnega trikotnika ABC , če je druga kateta $BC = 22$ in hipotenuza $AB = 24$.

Dragoljub M. Milošević, prevod Marija Vencelj

DOKAZAL SI JE

Ko je bil ameriški predsednik Abraham Lincoln (1809–1865) še študent prava, se je nekoč odločil, izboljšati svoje sposobnosti sklepanja. Kot silno ambicioznemu študentu se mu je namreč zazdelo, da ima čestokrat težave z razumevanjem tega, kaj pravzaprav v resnici pomeni dokazati neko trditev s pomočjo danih dejstev.

Kasneje je v svoji avtobiografiji o tem pripovedoval takole:

Rekel sem si: "Lincoln, nikoli ne boš pravnik, če ne boš razumel, v čem je bistvo dokazovanja." Sklenil sem za nekaj časa prekiniti s študijem in iz Springfielda sem odšel domov v očetovo hišo. Obljubil sem si, da se ne vrnem nazaj prej, preden ne bom sposoben tekoče dokazati prav vsak izrek v prvih šestih knjigah Evklidovih *Elementov*. No, takrat sem resnično spoznal, kaj pomeni dokazovati. Stalo me je ogromno truda, toda naposled sem se pomirjen vrnil spet nazaj k študiju prava.

Vilko Domajnko

RAZKRINKAJMO DAVIDA COPERFIELDA

Če ste kdaj gledali čarovnije Davida Coperfielda, se gotovo spomnite trika, ko je izginil znameniti kip svobode. Razlago tega pojava bomo prepustili drugim, mi pa lahko razrešimo drugo uganko, ki jo je Coperfield predstavil kot čarovnijo na domu.

V vlaku z devetimi vagoni se je zgodil umor. Morilec je skrit v enem izmed vagonov, Coperfield pa ga zasleduje in pravi, da ga bo zagotovo odkril...

Njegova navodila so bila takale (ni pa pojasnjeno, zakaj ga je morilec ubogal):

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- Vagone bom uredil, kot kaže zgornja slika. Po njih se lahko premikate v vseh smereh, razen diagonalno (lahko tudi nazaj). Postavite se na katerokoli osenčeno polje-vagon (na polje 2, 4, 6 ali 8).
- Premaknite se za štiri polja! Odstranil bom polje 9, ker gotovo niste pristali na njem.
- Naredite pet korakov! Odstranil bom polje 6, ker niste na njem.
- Premaknite se za dve polji! Ker niste na polju 8, ga bom odstranil.
- Premaknite se za tri polja! Zagotovo niste na poljih 3 ali 7, zato ju bom odstranil.
- Zdaj se premaknite za tri polja, jaz pa bom odstranil polje številka 2, ker gotovo niste na njem.
- Nazadnje se premaknite za eno polje. Odstranil bom polji 1 in 5, vi pa ste na polju številka 4. Vi ste morilec!!

Kako je lahko ugotovil, na katerem polju je morilec? Ali res vedno pristane na tem polju?

Matej Mencinger

FRANC MOČNIK – odkrit doprski kip

V Slovenskem šolskem muzeju so 1. oktobra lani odkrili doprski kip slovenskemu šolniku in matematiku Francu Močniku. Kip je odkril dr. Anton Suhadolc, dekan Fakultete za matematiko in fiziko pri Univerzi v Ljubljani (glej sliko kipa na III. strani ovitka).

Dr. Franc Močnik, "oče slovenskega učiteljstva", prvi šolski svetnik in nadzornik ljudskih šol dežele Kranjske se je rodil v Cerknem 1. oktobra 1814. Že ob stoletnici rojstva 1914 so se pojavili glasovi o postavitvi spomenika cerkljanskemu šolniku in matematiku. Te vzpodbude je tedaj prevpila prva svetovna vojna. Močnikov spomin je počasi bleдел, ponovno smo se ga spomnili ob stopetdeseti obletnici rojstva z Bibliografijo Franca Močnika (Povšič Jože, 1966). Stosedemdeseta obletnica rojstva 1994 pa prinese ponatis (faksimile) njegovih tridelnih računic.

Do lani sta nas na našega velikega šolnika in matematika spominjali le dve zunanji obeležji: napis na stari osnovni šoli Vič v Ljubljani in spominska plošča na rojstni hiši Franca Močnika v Cerknem. Pospešeno pa tečejo priprave za postavitve Močnikovega spomenika letos oktobra v Cerknem.

Močnik je živel v času največjih šolskih reform v takratnem Avstro-ogrskem cesarstvu in je bil soustvarjalec sistematičnega ljudskošolskega in srednješolskega matematičnega pouka.

Še danes bi bil mogoče uporaben njegov pristop k začetnemu računstvu (1. razred osnovne šole). Pri sestavljanju računic se je Močnik ravnal po načelu monografske računske metode, ki ne deli in ne stopnjuje pouka v številčnem obsegu od 1 do 100 po računskih operacijah, tako imenovanih štirih species, ampak prikaže vsako posamezno število kot individuum v vseh njegovih odnosih, tako da iz tega kakor same po sebi izhajajo posamezne osnovne računske operacije. Število razstavi ali zapiše v obliki vsote oziroma razlike na najrazličnejše načine (npr. število 6 zapiše v oblikah: $6 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $4 + 2$, $5 + 1$, itd.) in mu tako pridruži vse mogoče naloge seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja (tudi z ostankom). Močnik je monografsko metodo prvi ne samo teoretično natančno razložil, ampak tudi nadrobno praktično uveljavil v svojih metodičnih knjigah in računicah.

V takratnih učnih knjigah je bilo težišče na uporabi, razlaga je bila postranska stvar, saj se bila podana v suhi obliki. Močnik pa ni zanemarjal formalne izobrazbene strani ter se ni omejeval le na zbirko primerov in nalog za mehanično računanje. Računski postopek je izvajal in dokazal tako, da je učenec lahko razumel, kaj in zakaj tako računa. Močnik je razumel, da le tisti učni postopek, pri katerem takoj spočetka zbudimo,

urimo in krepimo logično mišljenje in sklepanje, lahko prepreči, da se pouk aritmetike ne izrodi v duhomorni mehanizem računanja po pravilih in mehanično razreševanje nalog brez globljega razumevanja. Saj je le tisti učenec, ki je pri delu samostojen in kritičen, ki je navajen, da sam išče pot k rešitvi, zavarovan pred tem, da bi pozneje popolnoma pozabil v šoli predelano snov. Močnik ne prepušča učnega postopka le pouku, oziroma učitelju, ampak ga v učbenikih nudi sam, in sicer v sistematični zaporednosti.

Še danes bi bil zelo moderen in priporočljiv njegov pristop k obravnavi osnovnih pojmov geometrije. Na ljudski in meščanski šoli predpostavlja tako organiziran pouk geometrije, da se učenci, ko napredujejo v spoznavanju geometrijskih izrekov, urijo tudi v prostorskem predstavljanju, v logičnem mišljenju in sklepanju, v spominu in natančnem izražanju. Tako od učitelja kakor od učbenika je treba zahtevati jasnost in temeljitost v splošnem, zlasti pa v osnovah. Zato Močnik začenja povsod z opazovanjem tistih predmetov, s katerimi je učenec obdan, in pokaže najprej fizično telo, od tega pride na geometrično in nato na ploskve, črte in točke. V tem se njegovi učbeniki razlikujejo od tistih, v katerih avtorji začenjajo s točkami in črtami, ki jih učenci gledajo kot španske vasi. Geometrijska pravila so razvita in dokazana. Pisec drži učence v stalni napetosti in jih napeljuje, da pravila sami najdejo. Dokazi so taki, da ne presegajo njihovih učnih moči.

Močnik je do danes najbolj plodovit pisec slovenskih matematičnih učbenikov in eden od prvih, ki so v prejšnjem stoletju soustvarjali slovensko matematično terminologijo.

Močnik je pomemben tudi kot zagovornik uvažanja slovenščine v takratne še povsem nemške glavne šole na Kranjskem in kot borec za strokovno rast in izboljšanje materialnega položaja učiteljstva.

O Močnikovem pedagoškem delu na področju matematike zgovorno priča njegov matematični knjižni opus:

Število Močnikovih knjig:		Matematični učbeniki:	
razprave	1	učbeniki: za ljudske šole	35
logaritmične tabele	2	za meščanske in obrtne šole	24
priročniki	2	za gimnazije	39
metodike	11	za realke	22
učbeniki	126	za učiteljsišča	6
skupaj	142	učbeniki skupaj	126

Čeprav so bile Močnikove knjige pisane v nemščini bo Močnikovo ime ostalo zapisano v zgodovini matematičnega pouka tistih evropskih narodov, v katerih jezike so bile prevedene njegove knjige: v slovenski, hrvaški, srbski, albanski, bolgarski, češki, italijanski, madžarski, novogrški, poljski, romunski, slovaški in ukrajinski jezik. Slovenci, Hrvati in Srbi smo v šolah uporabljali prevode njegovih knjig. Toda medtem ko so Hrvati in Srbi že takoj po letu 1850 vpeljali njegove učbenike za srednjo šolo, smo Slovenci smeli uporabljati takrat le njegova navodila za uporabo računic in računice za ljudsko šolstvo. Šele v šolskem letu 1882/83 je Dunaj dovolil slovenščino kot učni jezik na nižji gimnaziji, začeniši v prvem razredu, in to le v Kranju, v Novem mestu ter na slovenskih oddelkih ljubljanske gimnazije. Takrat je Celestina prevedel v slovenski jezik Močnikove aritmetike in geometrije za nižje gimnazije. Ko sta Celestinova prevoda začela pohajati, je Blaž Matek v letih 1896 in 1898 namesto obolega Celestine obe učni knjigi na novo sestavil.

Močnikova publicistična delavnost je obsegala, kakor je razvidno iz povedanega, sestavljanje aritmetičnih in geometrijskih učbenikov za ljudske, meščanske, srednje šole in učiteljska. V tem je bil mojster kakor redkokdo. Natanko je vedel, kaj potrebuje posamezna šolska stopnja, in po kateri poti je treba kreniti za ciljem. Iz tega si moremo tudi razložiti nenavadni in trajni uspeh, ki ga je dosegel s svojimi učbeniki: bili so skoraj sto let, generaciji za generacijo učencev, vodnik po kristalni stavbi matematike.

Močnikova življenska pot:

- 1814 rojen v Cerknem 1. oktobra.
- 1821–1824 ljudska šola v Idriji.
- 1824–1832 gimnazija in licej v Ljubljani.
- 1832–1836 bogoslovje v Gorici.
- 1836–1846 učitelj na normalki v Gorici.
- 1836–1840 študira (danes bi rekli "ob delu") z izpiti na univerzi v Gradcu.
 - 1839 znanstveno delo: Teorija numeričnih enačb.
 - 1840 promovira v Gradcu za doktorja filozofije (matematike).
- 1840 izide prva metodika računstva: *Lehre von den vier Rechnungsarten* (J. Blasnik, Ljubljana).
- 1843 metodični priročnik: *Anleitung zur gesamten Rechenkunst* (J. Blasnik, Ljubljana).
- 1844 dvorna študijska komisija odobri Močnikov načrt o spremembi takratnih računic in pouka računanja
- 1846–1858 piše učbenike za računstvo za ljudske šole, šole na kmetih, župnijske glavne in mestne šole ter ponavljalne in nadaljevalne šole.
- 1846–1849 profesor elementarne matematike in trgovskega računstva na tehniški akademiji v Lvovu (Ukrajina).

- 1849–1850 profesor matematike na vseučilišču v Olomucu (Moravska na Češkem).
- 1850–1882 izda prve izvode učbenikov za realke, ki jih kasneje še dopolnjuje.
- 1850–1853 natisne tudi učbenike za gimnazijo (višjo in nižjo). Kasneje sam (ali drugi) te učbenike še dopolnjuje in predeluje. Zadnji za šolsko rabo namenjeni učbenik je izšel še 1938 (v nemščini).
- 1851–1860 šolski svetnik in nadzornik ljudskih šol za deželo Kranjsko v Ljubljani.
- 1851 sestavi učni načrt za glavne šole na Kranjskem v katerem uvede poleg do tedaj samo nemškega učnega jezika tudi slovenski učni jezik – uvedba dvojezičnih glavnih šol.
- 1851 predlaga (24.4.) ustanovitev pedagoškega tečaja ("učiteljsišča") v Idriji, ki nato deluje od 1852–1866.
- 1854 po naročilu šolskega ministra napiše dve metodiki računstva za razredni pouk (Metodika računanja iz glavne in Metodika računanja s ciframi).
- 1856–1858 skupaj z Andrejem Praprotnikom sestavi Slovenski abecednik, Slovensko-nemški abecednik ter Prvo in Drugo berilo za slovenske šole.
- 1856–1857 skupaj z Blažem Potočnikom izda dvojezično slovensko-nemško slovnico za trivialke in glavne šole.
- 1856 izide ponatis Geometrije (prva izdaja, 1850) za nižje realke. Ponatisu so med tekstom dodani slovenski terminološki vložki. To so začetki slovenske matematične terminologije, katere soavtor je bil Franc Močnik.
- 1856 izdela statut ljubljanske obrtne šole.
- 1858 izda logaritemske tabele in knjižico z navodili za računanje z novimi avstrijskimi novci (avstro-ogrska denarna reforma in nova novčena veljava).
- 1860–1869 šolski svetnik in nadzornik ljudskih šol in realk za Štajersko v Gradcu.
- 1860 izdela pravila društva za podporo učiteljskim vdovam. Boj za boljši materialni status učiteljev je bila zelo pomembna Močnikova dejavnost na Kranjskem.
- 1861 izdajo Močnikova berila: Prvo in Drugo berilo za slovenske šole in Erstes... , Zweites... , Drittes Lesebuch za nemške ljudske šole.
- 1862 odlikovan z viteškim križem reda Franca Jožefa.
- 1865 na Močnikovo priporočilo je sprejeta za šolsko rabo v gimnazijah in realkah tretja (prva izdaja 1854) predelana izdaja Janežičeve slovenske slovnice.
- 1869–1871 je imenovan za Štajerskega deželnega šolskega nadzornika prve stopnje.
- 1870–1873 izidejo prve izdaje Močnikovih petdelnih računov za ljudske šole. Vsako računico je spremljala posebna knjižica metodičnih napotkov.

- 1871 upokojen in ob tej priliki odlikovan z redom železne krone tretjega razreda. S tem pridobi viteški naslov.
- 1872–1885 izhajajo prve izdaje učbenikov za meščanske, trgovske in obrtne šole.
- 1873 izda priročnik za uporabo "francoskih" mer v avstrijski šoli.
- 1874 izide metodika računstva za ljudske šole (od 1. do 5. razreda).
- 1875 izide metodika geometrijskega oblikoslovja za ljudske šole.
- 1877 izidejo Močnikove logaritemske tablice namenjene "šolski rabi".
- 1878–1879 izhajajo njegovi učbeniki matematike za učiteljsišča.
- 1891–1892 izidejo tridelne računice za ljudsko šolo (faksimilizirana izdaja: Cerkno, 1995).
- 1892 umre v Gradcu 30. novembra.

Zvonko Perat

METANJE KOCKE

Denimo, da nas zanima najverjetnejše število metov običajne kocke, v katerih skupno število doseženih pik prvič preseže 1997. O tem, kako lahko točno izračunamo to število, bomo morda spregovorili kdaj drugič. Vaša tokratna naloga je, da napišete program, ki bo eksperimentalno (torej s pomočjo generatorja naključnih števil) ocenil število potrebnih metov. Program naj prebere število poskusov in izpiše tisto število metov, v katerem se je končalo največ poskusov. Če je takšnih števil več, naj bodo izpisana vsa. Možni odgovori so seveda le števila med 333 in 1998.

Da ne bo nesporazumov, še enkrat pojasnimo, kaj računamo. Zaradi enostavnosti vzemimo, da opazujemo, kdaj vsota dobljenih pik prvič preseže 10. Odločimo se za šest poskusov (za verodostojen odgovor je sicer treba narediti precej več poskusov):

prvi poskus:	3, 4, 4	četrti poskus:	6, 6
drugi poskus:	1, 4, 2, 6	peti poskus:	2, 3, 6
tretji poskus:	1, 5, 2, 4	šesti poskus:	1, 3, 3, 2, 1, 4

Števila metov v posameznih poskusih so torej 3, 4, 4, 2, 3 in 5. Največ poskusov, in sicer po dva, se je končalo po 3 in 4 metih. Izpisati moramo torej števili 3 in 4.

Martin Juvan

33. TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

Najboljši sedmošolci in osmošolci s področnih tekmovanj so se v soboto, 17. maja 1997, pomerili v šestih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po veljavnem pravilniku uvrsti do 0,5% vseh sedmošolcev s posameznega področja in do 1% vseh osmošolcev s posameznega področja.

REGIJA	7. razred	8. razred
Ljubljana	86	135
Maribor	48	75
Celje	29	41
Koper	23	26
Nova Gorica	10	16
Novo mesto	22	33
SKUPAJ	218	326

Zlato Vegovo priznanje so prejeli sedmošolci, ki so osvojili najmanj 15 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 19 od 25 možnih točk.

Vsem učencem, ki so osvojili zlato Vegovo priznanje, je DMFAS poklonilo knjigo *Številске križanke*.

Nagrade najuspešnejšim tekmovalcem:

7. razred:

I. nagrada:

Anka Ilc, OŠ Danila Lokarja, Ajdovščina
 Matevž Bokalič, OŠ Dol pri Ljubljani
 Klemen Šivic, OŠ dr. Ivana Korošca, Borovnica
 Jugoslav Njenjić, II. OŠ Celje
 Matija Perne, OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka

II. nagrada:

Timon Mede, OŠ Miška Kranjca, Ljubljana
 Aleš Frece, OŠ Slivnica pri Celju, Gorica pri Slivnici

III. nagrada:

Tina Murn, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka
Igor Puh, OŠ Nove Fužine, Ljubljana
Staš Lapanja, OŠ Petra Kavčiča, Škofja Loka
Katja Rade, OŠ Riharda Jakopiča, Ljubljana
Matjaž Majnik, OŠ Vide Pregarc, Ljubljana

8. razred:**I. nagrada:**

Marjeta Vouk, OŠ Anice Černejeve, Makole
Nina Marinšek, OŠ Antona Tomaža Linhartarja, Radovljica
Katarina Ivanšek, OŠ Artiče
Mate Car, OŠ Beltinci
Brigita Avramovič, OŠ Bičevje, Ljubljana
Bojana Bajželj, OŠ Borisa Zihlerja, Ljubljana
Eva Milošev, OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka
Vesna Petkovska, OŠ Danile Kumar, Ljubljana
Borut Vaupotič, OŠ Gorišnica
Irena Rupnik, OŠ Ivana Tavčarja, Gorenja vas
Peter Kloeckl, OŠ Jakoba Aljaža, Kranj
Janez Langus, OŠ Križe
Tadej Bajda, OŠ Leskovec
Darja Starc, OŠ Louisa Adamiča, Grosuplje
Nuša Zidarič, OŠ Ludvika Pliberška, Maribor
Davorin Lešnik, OŠ Majšperk
Martina Turk, OŠ Martina Koresa, Podlehnik
Andrej Muhič, OŠ Mirna Peč
Borut Pečar, OŠ Narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana Črnuče
Matija Pretnar, OŠ Narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana Črnuče
Marko Limbek, OŠ Preserje pri Radomljah
Sergej Omladič, OŠ Prežihovega Voranca, Ljubljana
Selenia Praprotnik, OŠ Prule, Ljubljana
Matej Jazbinšek, OŠ Sava Kladnika, Sevnica
Lavra Vrlič, OŠ Šmartno pri Slovenj Gradcu
Borut Todorovič, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana
Katja Švara, OŠ Trnovo, Ljubljana
Eva Berdajs, OŠ Vič, Ljubljana
Daniela Vidmar, OŠ Vodmat, Ljubljana

II. nagrada:

Haris Omanović, OŠ 11. Maj, Grahovo
Jan Dolinšek, I. OŠ Slovenj Gradec
Aljaž Recek, OŠ Ivana Cankarja, Vrhnika
Urška Špeh, OŠ Mozirje
Zoran Ogrizek, OŠ Simona Jenka, Kranj
Klemen Paternoster, OŠ Šmartno pri Litiji
Irena Batistič, OŠ Vič, Ljubljana

III. nagrada:

Ambrož Božiček, OŠ Bistrica ob Sotli
Sašo Petek, OŠ Franceta Prešerna, Maribor
Jure Upelj, OŠ Gradec, Litija
Urška Tajnšek, OŠ Lava, Celje
Peter Perčič, OŠ Livade, Izola
Maja Rosič, OŠ Ljudski vrt, Ptuj
Peter Skube, OŠ Loka, Črnomelj
Borut Ojcinger, OŠ Primoža Trubarja, Laško
Peter Lukan, OŠ Solkan, Nova Gorica
Boštjan Maček, OŠ Tabor I, Maribor
Uroš Divjak, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana
Janja Pungerčar, OŠ Tržišče
Tilen Bajec, OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana
Tina Šantl Temkiv OŠ Vič, Ljubljana

Aleksander Potočnik

17. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA ZLATA STEFANOVA PRIZNANJA

Oddelek za fiziko Pedagoške fakultete v Mariboru in Društvo matematikov, fizikov in astronomov sta bila organizatorja tekmovanja iz fizike za osnovnošolce. V predavalnicah in laboratorijih Pedagoške fakultete v Mariboru se je 10. maja 1997 pomerilo 33 ekip iz 7. razredov in 34 ekip iz 8. razredov. Tekmovalci so reševali tri teoretične in dve eksperimentalni nalogi. Naloge za področna in državno tekmovanje so pripravili učitelji Pedagoške fakultete Maribor, pri organizaciji pa je sodelovala Jelka Sakelšek.

Pred državnim tekmovanjem so bila 5. aprila 1997 področna tekmovanja v devetih mestih, kjer so tekmovanja organizirali in vodili: Dragica Perovec-Stojko (Šmartno ob Paki), Franc Pogorelnik (Radlje ob Dravi), Mirko Cvahte in Zlatko Bradač (Maribor), Marko Munih (Piran), Milojka

Frank (Nova Gorica), Karla Krajnik (Škofja Loka), Darinka Uršič (Ljutomer), Milena Košak (Novo mesto) ter Vesna Harej in Jelka Sakelšek (Ljubljana). Sodelovalo je 342 ekip iz 7. razredov in 357 ekip iz 8. razredov, skupaj 1398 učencev. Tekmovalci so na področnih tekmovanjih reševali 5 teoretičnih nalog.

Na državnem tekmovanju so zlata Stefanova priznanja prejeli:

Osnovna šola	Tekmovalca (ki)	Točke (od 100)
--------------	-----------------	----------------

7. razred

Dr. Ivana Korošca, Borovnica	Simon Vrhovec, Klemen Šivic	97
Petra Kavčiča, Škofja Loka	Matija Perne, Lucija Franko	96
I. OŠ Celje	Maja Rome, Sergej Šuštar	89
Gorje, Zgornje Gorje	Aleš Osenčič, Martin Pretnar	87
Ivana Roba, Šempeter pri Gorici	Andraž Cej, Matjaž Humar	85
Spodnja Šiška, Ljubljana	Miha Brezavšček, Gašper Vidic	83
Toneta Čufarja, Ljubljana	Boris Cergol, Meta Kokalj	82
Dobrova	Barbara Hafner, Uroš Dolinar	81
Nove Fužine, Ljubljana	Igor Puh, Siniša Jančič	78
Narodnega heroja Rajka, Hrastnik	Marjana Potočin, Primož Kaluža	77
Šentvid, Ljubljana	Gregor Bregar, Andraš Jadek	77
Dušana Bordona, Koper	Ana Antinčič, Matjaž Božič	75
Narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana	Jure Merčun, Jan Brulc	75

8. razred

Tabor II, Maribor	Vesna Božič, Marko Bevc	81
Davorina Jenka, Cerklje	Primož Marn, Žiga Dremelj	81
Hudinja, Celje	Pavel Platovšek, Mojca Videc	78
Ledina, Ljubljana	Gregor Tavčar, Jure Žumer	77
Tabor I, Maribor	Boštjan Maček, Marko Gosak	77
Vič, Ljubljana	Jakob Tomše, Eva Berdajs	77
Mirna Peč	Andrej Muhič, Damjan Golob	76
Beltinci	Mate Car, Rajko Palatin	75
Danila Lokarja, Ajdovščina	Miha Maraž, Tadej Beočanin	73
Loka, Črnomelj	Peter Skube, Tomaž Kuzma	72
Riharda Jakopiča, Ljubljana	Rok Strniša, Dragan Simeonov	72
Antona Tomaža Linhart, Radovljica	Nina Marinšek, Miha Papler	70

Tekmovalkam in tekmovalcem čestitamo za dosežene rezultate.

Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

41. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

V sobotnem dopoldnevu 17. maja 1997 se je 166 dijakov iz 57 gimnazij in srednjih šol v prostorih Gimnazije Vič v Ljubljani spopadlo z nalogami na 41. matematičnem tekmovanju srednješolcev Slovenije, popoldne pa so se podali na izlet v Zagorico in na GEOSS.

Za uspešno reševanje nalog je državna tekmovalna komisija podelila naslednje nagrade in pohvale:

Prvi letnik:

2. nagrada:

Anže Žagar, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Jaka Hajnšek, Splošna in strokovna gimnazija Lava Celje.

3. nagrada:

Črto Kreft, ŠC - Gimnazija Ptuj; Lovro Žiberna, II. gimnazija Maribor; Sunil Sah, Gimnazija Bežigrad; Matjaž Urlep, Splošna in strokovna gimnazija Lava Celje.

Pohvala:

Davorin Stevanović, Gimnazija Jesenice; Matevž Plankl, Gimnazija Celje-Center; Mitja Krnel, Gimnazija Koper; Iztok Grilc, Gimnazija in ESS Trbovlje; Viktor Božič, Gimnazija Vič; Žiga Virk, Gimnazija Vič; Tina Toni, Gimnazija Bežigrad; Matej Kanduč, SVŠ in gimnazija Ljubljana; Haris Hodžič, Gimnazija Vič; Rok Marolt, Gimnazija in ESS Brežice; Mitja Obed, Srednja ekonomsko-turistična šola Radovljica; Rok Orel, Gimnazija Vič.

Drugi letnik:

1. nagrada:

Urška Bokal, Gimnazija Bežigrad; Jure Kališnik, Splošna in strokovna gimnazija Lava Celje; Ajda Skarlovnik, Gimnazija Bežigrad; Tomaž Weiss, II. gimnazija Maribor.

2. nagrada:

Samo Juretič, Šolski center Nova Gorica; Dušan Jan, Gimnazija Tolmin; Igor Jaušovec, I. gimnazija Maribor.

3. nagrada:

Maja Jeromel, II. gimnazija Maribor; Filip Šramel, Splošna in strokovna gimnazija Lava Celje.

Pohvala:

Gregor Jerše, Gimnazija Kranj; Teja Melink, Šolski center Nova Gorica; Gorazd Karer, Šolski center Nova Gorica; Sanel Falan, Gimnazija Frana Miklošiča Ljutomer; Luka Strniša, Gimnazija Bežigrad; Vesna Pigac, Gimnazija in ESS Trbovlje; Peter Ahčin, SZŠ in gimnazija Ljubljana; Justin Činkelj, Gimnazija Želimlje; Ana Bergant, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Peter Varga, Dvojezična srednja šola Lendava; Matej Batič, Škofijska gimnazija Vipava; Blaž Brulc, Gimnazija Novo mesto; Tadej Kaltnekar, Srednja šola Srečka Kosovela, Sežana; Nataša Tiegl, Gimnazija Bežigrad.

Tretji letnik:**2. nagrada:**

Tadej Starčič, Gimnazija Bežigrad; Matjaž Titan, Gimnazija Murska Sobota; Martin Milanič, Gimnazija Koper.

3. nagrada:

Matej Rizman, II. gimnazija Maribor; Matija Mazi, Gimnazija Bežigrad; Andreja Avberšek, Gimnazija Kranj; Luka Gabršček, Gimnazija Bežigrad.

Pohvala:

Andrej Pukšič, Splošna in strokovna gimnazija Lava Celje; Martin Knapič, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Andrej Perne, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Blaž Zupančič, Gimnazija in ESS Brežice; Tomaž Kossem, Splošna in strokovna gimnazija Lava Celje; Anže Burger, Gimnazija Bežigrad; Rok Reya, Gimnazija Škofja Loka; Aleš Fabjan, Gimnazija Kranj; Milan Tomazin, Gimnazija Kočevje; Damir Franetič, Srednja šola Postojna.

Četrty letnik:**1. nagrada:**

Matjaž Konvalinka, Gimnazija Bežigrad; Gorazd Bizjak, Gimnazija Bežigrad; Klemen Kenda, Gimnazija Juriya Vege Idrija; Mitja Šlenc, Gimnazija Bežigrad.

3. nagrada:

Damir Arh, Gimnazija Jesenice; Andrej Vodopivec, I. gimnazija v Celju.

Pohvala:

Saša Fratina, Gimnazija Bežigrad; Dejan Kolarič, III. gimnazija Maribor; Primož Šparl, ŠC - Gimnazija Ptuj, David Marošević, Gimnazija Jesenice; Mitja Luštrek, ŠC Rudolfa Maistra, Kamnik; Dušan Žeželj, Gimnazija Ledina, Ljubljana; Tomaž Vrtovec, Šolski center Nova Gorica; Nika Lendero, Gimnazija Velenje.

Po določilih *Pravilnika o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike* je državna tekmovalna komisija izbrala ekipo, ki je zastopala Slovenijo na Mednarodni matematični olimpiadi v Argentini. V ekipo so se uvrstili: Matjaž Konvalinka, Matija Mazi, Martin Milanič, Tadej Starčič, Matjaž Titan in Andrej Vodopivec.

Domov so prinesli dve bronasti medalji in dve pohvali.

Matjaž Željko

35. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE

Podobno kot v prejšnjih letih je tudi letos potekalo tekmovanje srednješolcev iz fizike v štirih skupinah A, B, C in D, razdeljenih po snovi, in v treh stopnjah.

Prve stopnje – regijskega tekmovanja – se je udeležilo 950 dijakov iz 53 srednjih šol. Tekmovanje je bilo istočasno izvedeno 22. marca 1997 na osmih srednjih šolah po vsej Sloveniji. Organizirale so ga naslednje srednje šole: Gimnazija Bežigrad Ljubljana, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana, I. gimnazija Maribor, Gimnazija Ravne na Koroškem, Srednja kovinarska in cestnoprometna šola Škofja Loka, Šolski center Nova Gorica, Gimnazija Koper in Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice. Tekmovalne komisije, sestavljene iz profesorjev fizike s sodelujočih šol, so popravile izdelke in predlagale tekmovalce za državno tekmovanje iz posamezne regije.

Državno tekmovanje je bilo 19. aprila. Po predlogu regijskih komisij se je v skupini A pomerilo 37 tekmovalcev, v skupini B tudi 37, v skupini C 30 in v skupini D 21. Skupaj 125 tekmovalcev iz 36 srednjih šol.

Organizator državnega tekmovanja je bila Gimnazija Murska Sobota. Medtem ko so tekmovalci reševali naloge, so si njihovi mentorji ogledali ravninski del Prekmurja, po koncu reševanja nalog pa so si tudi tekmovalci ogledali del Prekmurja – Goričko.

Tekmovalna komisija DMFA Slovenije, ki so ji pri izvedbi tekmovanja in ocenitvi izdelkov pomagali študenti Fakultete za matematiko in fiziko, je na razglasitvi rezultatov podelila 10 prvih nagrad, 14 drugih, 14 tretjih in 25 pohval.

Podeljene nagrade in pohvale:

Skupina A

I. nagrada:

Nejc Košnik, Gimnazija in ekonomska srednja šola Trbovlje; Jure Bezgovšek, Šolski center Velenje; Jure Repinc, Gimnazija Kranj; David Štular, Gimnazija Kranj; Andraž Tori, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

II. nagrada:

Jaka Kovač, Gimnazija Kranj; David Krmpotič, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer; Jure Strle, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

III. nagrada:

Andrej Koncilja, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Zala Grošelj, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Marko Gril, Gimnazija Kranj; Matej Spiller-Muys, Gimnazija Poljane Ljubljana.

Pohvala:

Sašo Jelenčič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Damir Najvirt, Šolski center Ptuj – gimnazija; Blaž Novak, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Tomaž Podlesnikar, II. gimnazija Maribor; Miha Javornik, Šolski center Slovenj Gradec – gimnazija; Marko Javoršek, Gimnazija Piran; Tadej Podgornik, SŠ za elektrotehniko in računal. Ljubljana; Matej Maček, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Lovro Suhodolčan, Gimnazija Celje – center.

Skupina B

I. nagrada:

Nagrada ni bila podeljena.

II. nagrada:

Luka Gabršček, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Primož Buh, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Andrej Grubišič, II. gimnazija Maribor; Natan Osterman, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

III. nagrada:

Matej Rizman, II. gimnazija Maribor; Denis Bider, Škofijska klasična gimnazija Ljubljana; Miran Bürmen, Gimnazija Murska Sobota; Urban Simončič, Šolski center Novo mesto; Nikola Vukašinović, Gimnazija Poljane Ljubljana; Anže Zupanc, Šolski center Celje.

Pohvala:

Damjan Šterk, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Gorazd Karer, Šolski center Nova Gorica; Simon Berlec, Srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik; Miha Erjavec, Gimnazija Ravne na Koroškem; Blaž Kmetec, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Skupina C**I. nagrada:**

Martin Knapič, Gimnazija Šentvid Ljubljana; Aleš Vodičar, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Martin Zadnik, SS za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana.

II. nagrada:

Janko Boltar, Gimnazija Koper; Matija Mazi, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Aleš Kranjc, Tehniški šolski center Nova Gorica.

III. nagrada:

Matija Gams, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Blaž Zupančič, Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice.

Pohvala:

Dejan Bezec, Gimnazija Murska Sobota; Aljoša Kancler, Srednja elektro-računalniška šola Maribor; Klemen Naveršnik, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Gregor Resman, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Mitja Vardjan, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Aleš Štimec, Gimnazija in ekonomska srednja šola Brežice.

Skupina D**I. nagrada:**

Miloš Jeftič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Igor Verstovšek, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

II. nagrada:

Matej Horvat, II. gimnazija Maribor; Matej Marinč, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Gorazd Bizjak, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Boštjan Glažar, SS za elektrotehniko in računalništvo Ljubljana.

III. nagrada:

Rok Šabjan, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Gašper Tkačik, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Pohvala:

Gorazd Lampič, Gimnazija Bežigrad Ljubljana; Aleksander Slemenšek, Šolski center Celje; Uroš Benko, Gimnazija Murska Sobota; Mitja Luštrek, Srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik; Jan Szilagyi, Gimnazija Bežigrad Ljubljana.

Po izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo so se na letošnjo 28. mednarodno olimpiado iz fizike, ki je potekala med 13. in 21. julijem v mestu Sudbury, Kanada, uvrstili: Igor Verstovšek, Miloš Jeftič, Matej Marinč in Gašper Tkačik, vsi iz Gimnazije Bežigrad Ljubljana, ter Matej Horvat iz II. gimnazije Maribor.

Domov so prinesli eno bronasto medaljo in tri pohvale.

Ciril Dominko

18. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – Rešitve iz XXIV, P-6, str. 378

Rešitve nalog prvega dela

Prva skupina

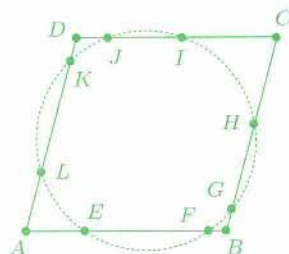
1. Označimo teh 10 števil z $n - 9, n - 8, \dots, n$ in naslednjih 9 števil z $n + 1, n + 2, \dots, n + 9$. Potem velja $(n - 9)^2 + (n - 8)^2 + \dots + n^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + 9)^2$, in zato $n^2 = 2(2n + 4n + \dots + 18n) = 180n$, torej $n = 180$. Iskana števila so tako 171, 172, ..., 180.
2. Naj bo S ploščina enakostraničnega trikotnika s stranico 1. Potem je ploščina trapeza s stranicami 1, 1, 1 in 2 enaka $3S$, ploščina enakostraničnega trikotnika s stranico n pa je $n^2 S$. Če lahko enakostranični trikotnik s stranico n razrežemo na trapeze s stranicami 1, 1, 1 in 2, je n deljiv s 3. Enakostranični trikotnik s stranico 3 enostavno razrežemo na tri trapeze s stranicami 1, 1, 1 in 2. Če je dolžina stranice enakostraničnega trikotnika $n = 3k$, potem lahko trikotnik razrežemo na k^2 enakostraničnih trikotnikov s stranico dolžine 3, vsakega od njih pa potem razrežemo na tri trapeze. Torej so iskana števila vsa naravna števila n , ki so deljiva s 3.

3. (a) Števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, so $0, 1, \dots, 9$. Torej je število poznanstev med fanti in dekleti $0 + 1 + \dots + 9 = 45$. Od tod sledi, da vsak fant pozna 5 deklet. Označimo dekleta s števili od 0 do 9 in fante s števili od 1 do 9. Naj dekleta, označena z 0, ne pozna nobenega fanta. Za $1 \leq k \leq 4$ naj dekleta z oznako k pozna fante z oznakami od 1 do k . Za $5 \leq k \leq 9$ naj dekleta z oznako k pozna fante z oznakami od $10 - k$ do 9. Potem vsak fant pozna natanko pet deklet, torej taka družba obstaja.
- (b) Števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, so $0, 1, \dots, 10$. Torej je število poznanstev med fanti in dekleti $0 + 1 + \dots + 10 = 55$. Ker 55 ni deljivo z 10, ni možno, da bi vsak fant poznal enako število deklet.

4. Naj bo $ABCD$ romb s stranico a in privzemimo oznake s slike.

Iz izreka o potenci točke B na krožnico sledi

$$\begin{aligned} |BG| \cdot |BH| &= |BE| \cdot |BF| = \\ &= (a - |AE|) \cdot (a - |AF|) = \\ &= a^2 - a(|AE| + |AF|) + |AE| \cdot |AF|. \end{aligned}$$



Podobno izpeljemo še

$$\begin{aligned} |CH| \cdot |CG| &= a^2 - a(|DJ| + |DI|) + |DJ| \cdot |DI|, \\ |DJ| \cdot |DI| &= a^2 - a(|AL| + |AK|) + |AL| \cdot |AK|, \\ |CI| \cdot |CJ| &= a^2 - a(|BG| + |BH|) + |BG| \cdot |BH|. \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $|AE| \cdot |AF| = |AL| \cdot |AK|$ in $|CH| \cdot |CG| = |CI| \cdot |CJ|$, iz dobljenih enačb sledi

$$(|AE| + |AF|) - (|DJ| + |DI|) = (|AL| + |AK|) - (|BG| + |BH|).$$

Ker je $|AF| = a - |BF|$, $|DI| = a - |CI|$, $|AK| = a - |DK|$ in $|BH| = a - |CH|$, sledi iz gornje enačbe zelena enakost

$$|AE| - |BF| - |DJ| + |CI| = |AL| - |DK| - |BG| + |CH|,$$

oziroma

$$|AE| + |BG| + |CI| + |DK| = |AL| + |BF| + |CH| + |DJ|.$$

Druga skupina

- Koordinatni sistem postavimo tako, da so oglišča kocke v točkah $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$. Naj stranica a povezuje točki $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, stranica b točki $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ in stranica c točki $(0,0,1)$, $(0,1,1)$. Potem za točko (x,y,z) znotraj kocke velja, da so kvadrati razdalj do stranic a , b in c enaki $(x-1)^2 + y^2$, $(y-1)^2 + z^2$ in $(z-1)^2 + x^2$. Poiščimo točke, v katerih so kvadrati razdalj enaki. Predpostavimo lahko, da je $x \geq y$ in $x \geq z$, ter ločimo dva primera.

Naj bo $y \geq z$. Potem iz $(y-1)^2 + z^2 = (z-1)^2 + x^2$ sledi $x^2 + 2y = y^2 + 2z$. Ker je $x^2 \geq y^2$ in $2y \geq 2z$, je $x = y = z$. V drugem primeru pa naj bo $z \geq y$. Potem iz $(x-1)^2 + y^2 = (z-1)^2 + x^2$ sledi $z^2 + 2x = y^2 + 2z$. Ker je $z^2 \geq y^2$ in $2x \geq 2z$, je $x = y = z$. Torej je iskana množica točk daljica s krajišči $(0,0,0)$ in $(1,1,1)$, to je diagonala kocke s krajiščema, ki ne ležita na nobeni od stranic a , b ali c .
- Recimo, da tak razrez obstaja. Za vsak kos pobarvamo konveksne krožne loke na robu tega kosa z rdečo, konkavne krožne loke na robu tega kosa pa z modro barvo (ravnih delov roba ne pobarvamo). Označimo z r vsoto dolžin vseh rdečih lokov in z m vsoto dolžin vseh modrih lokov. Ko kose zložimo v kvadrat, se vsak rdeč lok dotika modrega in obratno, zato je $r = m$. Ko so kosi zloženi v krog, se vsak moder lok dotika rdečega, vendar pa se rdeči loki, ki sestavljajo rob kroga, ne dotikajo modrih lokov, zato je $r > m$, kar pa je protislovje. Torej tak razrez ne obstaja.
- Na parabolo narišimo dve vzporedni tetivi in označimo njuni razpolovišči. Naj bo l daljica, ki spaja ti dve točki. Narišimo tetivo, ki je pravokotna na l , in označimo njeno razpolovišče. Premica, ki gre skozi to razpolovišče in ki je vzporedna l , je ordinata in seka parabolo v koordinatnem izhodišču. Sedaj ni težko narisati še abscise. Podkrepimo konstrukcijo z dokazom. Naj ima prva tetiva krajišči (x_1, x_1^2) in (x_2, x_2^2) in druga tetiva krajišči (x_3, x_3^2) in (x_4, x_4^2) . Potem sta naklonska koeficienta tetiv enaka $\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$ in $\frac{x_3^2 - x_4^2}{x_3 - x_4} = x_3 + x_4$. Ker sta tetivi vzporedni, je $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. Torej imata razpolovišči tetiv enaki abscisi, zato je daljica l vzporedna ordinati.
- Števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, so $0, 1, \dots, n$. Torej je število poznanstev med fanti in dekleti enako $\frac{1}{2}n(n+1)$. Ker so števila deklet, ki jih poznajo posamezni fantje, enaka, mora biti število vseh poznanstev deljivo z n . Od tod sledi, da je število $n+1$ deljivo z 2. To pomeni, da pri sodem n taka družba ne obstaja. Pokažimo, da pri lihem n družba z dano lastnostjo obstaja. Naj bo

$n = 2k + 1$. Razdelimo dekleta v $k + 1$ parov. Za $0 \leq i \leq k$ naj eno dekle v i -tem paru pozna i fantov, drugo v tem paru pa preostalih $2k + 1 - i$ fantov. Potem so števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, med seboj različna. Vsak fant pozna natanko eno dekle iz vsakega para, torej $k + 1$ deklet. Torej za vsako liho število $n > 1$ taka družba obstaja.

Rešitve nalog drugega dela

Prva skupina

- (a) Naj bodo p , q in r praštevila z iskano lastnostjo. Naj velja $p > q > r$. Če je $r = 2$, je $r^2 + d = 14 = 2 \cdot 7$. To število pa ni deljivo s pq , saj je $p, q > 2$. Tudi možnost $r = 3$ odpade, saj je $r^2 + d = 19$ praštevilo. Torej je $r \geq 5$. Velja še $q \geq r + 2$ in $p \geq r + 6$, saj je eno izmed treh zaporednih lihih števil deljivo s 3. Potem dobimo $r^2 + 10 \geq pq \geq (r + 6)(r + 20) = r^2 + 8r + 12$, kar pa ni možno, zato praštevila z iskano lastnostjo ne obstajajo.

(b) Naj bo $p = 5$, $q = 3$ in $r = 2$. Potem je število $p^2 + 11 = 36$ deljivo s $qr = 6$, $q^2 + 11 = 20$ deljivo s $pr = 10$ in $r^2 + 11 = 15$ deljivo s $pq = 15$.
- (a) Dolžina hipotenuze trikotnika je 5. Ker so dolžine stranic trikotnika celoštevilske, je tudi dolžina n stranice kvadrata celo število. Ploščina kvadrata je n^2 , ploščina trikotnika pa 6. Od tod sledi, da je n deljivo s 6, zato je $n = 6m$. Tedaj je število trikotnikov, na katere je razrezan kvadrat, enako $6m^2$, torej sodo število.

(b) Naj bo kvadrat z ravnimi odseki razrezan na pravokotne trikotnike s katetama 1 in 2. Vsak odsek ima za krajšiči dve oglišči nekih trikotnikov in poteka po stranicah nekaj trikotnikov. Če del stranice trikotnika leži na nekem odseku, leži na tem odseku cela stranica, zato leži cel trikotnik bodisi na eni bodisi na drugi strani odseka. Vzemimo poljuben odsek. Označimo z b število hipotenuz trikotnikov, ki ležijo na eni strani odseka, in z d število hipotenuz trikotnikov, ki ležijo na drugi strani odseka. Ker je dolžina hipotenuze vsakega trikotnika enaka $\sqrt{5}$ in ker sta dolžini katet celoštevilski, je dolžina izbranega odseka enaka $a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$ za neki nenegativni celi števili a in c . Pri $b \neq d$ je $\sqrt{5} = \frac{a-c}{d-b}$, kar pa ni možno. Zato je $b = d$ in tako je število trikotnikov, katerih hipotenuza leži na izbranem odseku, sodo. Postopek ponovimo za vse odseke in dobimo, da je število trikotnikov, katerih hipotenuza leži znotraj kvadrata, sodo. Podobno obravnavamo oba para vzporednih stranic kvadrata in dobimo, da je število hipotenuz na vzporednih stranicah enako. Torej je vseh trikotnikov sodo mnogo.

Opomba: Dokaz za pravokotnik je enak.

Druga skupina

- Naj bo $g(x) = f(f(x)) = x^2 - 1996$. Enačba $x^2 - x - 1996 = 0$ ima dve realni rešitvi; označimo ju z a in b . Naj bo $f(a) = p$. Potem je $f(p) = f(f(a)) = g(a) = a$. Od tod sledi, da je $g(p) = f(f(p)) = f(a) = p$. Torej je tudi p rešitev enačbe $x^2 - x - 1996 = 0$, zato velja $f(a) = a$ in $f(b) = b$ ali $f(a) = b$ in $f(b) = a$. Naj bo $h(x) = g(g(x)) = (x^2 - 1996)^2 - 1996$. Potem iz $h(x) = x$ sledi $x^4 - 3992x^2 - x + 3982020 = 0$. Ker je $g(a) = a$ in $g(b) = b$, je $h(a) = a$ in $h(b) = b$. Zato lahko zgornji polinom razstavimo: $x^4 - 3992x^2 - x + 3982020 = (x^2 - x - 1996)(x^2 + x - 1995) = 0$. Tudi enačba $x^2 + x - 1995 = 0$ ima dve realni rešitvi; označimo ju s c in d . Naj bo $g(c) = q$. Potem je $g(q) = g(g(c)) = h(c) = c$. Od tod sledi, da je $h(q) = g(g(q)) = g(c) = q$, torej velja $q = c$ ali $q = d$. Ker je c različen od a in b , je $g(c) = d$ in $g(d) = c$. Naj bo $f(c) = r$ in $f(d) = s$. Potem je $f(r) = g(c) = d$ in $f(s) = g(d) = c$. Ker je $h(r) = f(f(f(f(r)))) = f(f(f(d))) = f(f(s)) = f(c) = r$, je $r \in \{a, b, c, d\}$. Ker je $d \neq f(a) \in \{a, b\}$, je $r \neq a$. Podobno sklepamo, da je $r \neq b$. Če je $r = c$, potem je $f(r) = r$ in zato $g(r) = f(f(r)) = r$. To pa ni možno, saj je c različen od a in b , to pa sta edini rešitvi enačbe $g(x) = x$. Podobno dobimo, da je $r \neq d$. Tako smo prišli do protislovja, zato taka funkcija ne obstaja.
- (a) Igralec zмага, če izpolni kartice na naslednji način: $(1, \dots, 10)$, $(1, \dots, 5, 11, \dots, 15)$, $(6, \dots, 15)$, $(16, \dots, 25)$, $(16, \dots, 20, 26, \dots, 30)$, $(21, \dots, 30)$, $(31, \dots, 40)$, $(41, \dots, 50)$, $(51, \dots, 60)$, $(61, \dots, 70)$, $(71, \dots, 80)$, $(81, \dots, 90)$, $(91, \dots, 100)$. Z dvema številoma lahko preprečimo zmago vsake izmed prvih treh kartic (z enim ne moremo), prav tako z dvema številoma to dosežemo za naslednje tri kartice (in ti dve števili morata biti različni od prvih dveh). Z nadaljnjimi sedmimi števili preprečimo zmago zadnjim sedmim karticam. Torej je potrebnih vsaj 11 števil, da se prepreči zmago vsem 13 karticam, zato ena kartica vedno zмага.

(b) Recimo, da smo izpolnili le 12 kartic. Recimo, da se neko število pojavi vsaj na treh karticah. Če je to število skupaj s še devetimi števili (po enim iz vsake preostale kartice) med prepovedanimi števili, smo izgubili. Zato se vsako število lahko pojavi največ na dveh karticah. Tedaj se $10 \cdot 12 - 100 = 20$ števil pojavi na natanko dveh karticah (ostala pa le na eni). Izberemo dve kartici, ki imata skupno število. Na teh dveh karticah je največ 19 različnih števil, zato obstajata dve drugi kartici, na katerih se prav tako pojavi skupno število (drugo kot na prvih dveh karticah). Če so med prepovedanimi števili

skupno število prvih dveh kartic, skupno število drugih dveh kartic ter po eno število iz preostalih osmih kartic, smo izgubili, zato med 12 karticami ni nujno zmagovalne.

Aleš Vavpetič

18. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – pomladanski krog

V marcu je potekal pomladanski krog 18. tekmovanja mest. Dijaki prvih in drugih letnikov so tekmovali v prvi skupini, ostali pa v drugi. Izdelek vsakega tekmovalca je bil ocenjen z največjo možno vsoto točk iz treh nalog. V prvem delu so imeli dijaki na izbiro naslednje naloge:

Prva skupina

1. Za koliko naravnih števil med 1 in 1997 velja, da je vsota njihovih števk deljiva s 5? (3 točke)
2. Lažnjivi kljukec se je hvalil, da je pri biljardu na mizi oblike enakostraničnega trikotnika udaril kroglo z roba mize tako, da je šla preko neke točke na mizi trikrat in vsakič v drugi smeri, na koncu pa se vrnila na začetno točko. Ali je to možno, če velja običajni odbojni zakon? (3 točke)
3. Dve med seboj pravokotni premici se sekata v točki M , ki leži znotraj kroga F , in tako razdelita krog na štiri dele. Naj bosta a in b oddaljenosti točke M do premerov, ki sta vzporedna premicama. Določi razliko vsote ploščin največjega in najmanjšega dela razrezanega kroga in vsote ploščin ostalih dveh delov. (4 točke)
4. Kvadrat je razrezan na 25 manjših kvadratkov, od katerih le eden nima ploščine 1 (ostalih 24 kvadratkov ima ploščino 1). Določi ploščino prvotnega kvadrata. (4 točke)
5. Naj bo $ABCD$ paralelogram, E razpolovišče stranice AD in F nožišče pravokotnice na daljico EC skozi točko B . Pokaži, da je trikotnik ABF enakokrak. (4 točke)

Druga skupina

1. Kocka je razrezana na 99 manjših kockic, od katerih le ena nima prostornine 1 (ostalih 98 kockic ima prostornino 1). Določi prostornino prvotne kocke. (3 točke)
2. Naj bosta a in b taki naravni števili, da je število $a^2 + b^2$ deljivo z ab . Pokaži, da je $a = b$. (3 točke)

3. Središče kroga ima kartezični koordinati (a, b) . Koordinatno izhodišče leži v notranjosti kroga, tako da koordinatni osi razrežeta krog na štiri dele. Označimo z S^+ ploščino dela kroga, kjer imata koordinati isti predznak, in z S^- ploščino dela, kjer imata koordinati različni predznak. Določi vrednost izraza $S^+ - S^-$. (4 točke)
4. Pravilni tetraeder $ABCD$ je včrtan v sfero. Konstruiramo takšne pokončne piramide $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$ in $BCDA'$ zunaj tetraedra, da ležijo točke A' , B' , C' in D' na sferi. Izračunaj kot med ravninama ABC' in ACD' . (4 točke)
5. Dva dijaka igrata naslednjo igro: Dijak A označi neko točko na ravnini z rdečo barvo, nato dijak B označi 10 točk na ravnini z zeleno barvo, nato ponovno dijak A označi neko točko na ravnini z rdečo barvo, dijak B označi 10 točk na ravnini z zeleno barvo in tako naprej. (Vse točke morajo biti različne.) Dijak A zmaga, če na ravnini lahko narišemo enakostraničen trikotnik z oglišči rdeče barve. Ali lahko dijak B prepreči zmago dijaku A ? (4 točke)

V težjem sklopu nalog pomladanskega kroga so tekmovalci reševali sedem nalog. Objavljamo po dve za vsako skupino:

Prva skupina

1. Pokaži, da se število
 - (a) 97^{97} (4 točke)
 - (b) 1997^{17} (4 točke)
 ne da zapisati kot vsota kubov nekaj zaporednih naravnih števil.
2. Naj bo P točka znotraj trikotnika ABC , za katerega velja $|AB| = |BC|$, $\sphericalangle ABC = 80^\circ$, $\sphericalangle PAC = 40^\circ$ in $\sphericalangle ACP = 30^\circ$. Izračunaj kot $\sphericalangle BPC$. (7 točk)

Druga skupina

1. Imamo 25 različno težkih koščkov sira. Enega od koščkov razrežemo na dva dela in dobljene koščke razdelimo v dve vrečki s po 13 koščki tako, da sta razrezana dela v različnih vrečkah. Ali lahko to naredimo tako, da sta vrečki enako težki? (4 točke)
2. Za pozitivna števila a , b in c velja $abc = 1$. Pokaži naslednjo neenakost:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

(8 točk)

Aleš Vavpetič

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, šolsko leto 1997/98, številka 1, strani 1 – 64

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domažnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosen (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1996/97 je za posamezne naročnike **1.620 SIT**, za skupinska naročila šol **1.350 SIT**, posamezna številka **324 SIT**, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarife št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1323

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

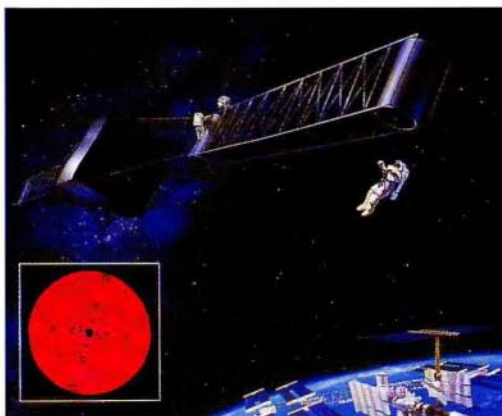
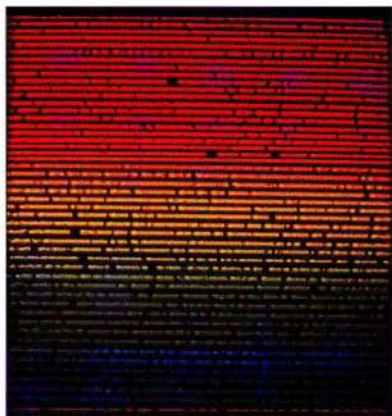
Sliki na sosednji strani spodaj sta del članka Planeti okrog drugih sonc, ki ga najdete na strani 34, in predstavljata: ➔

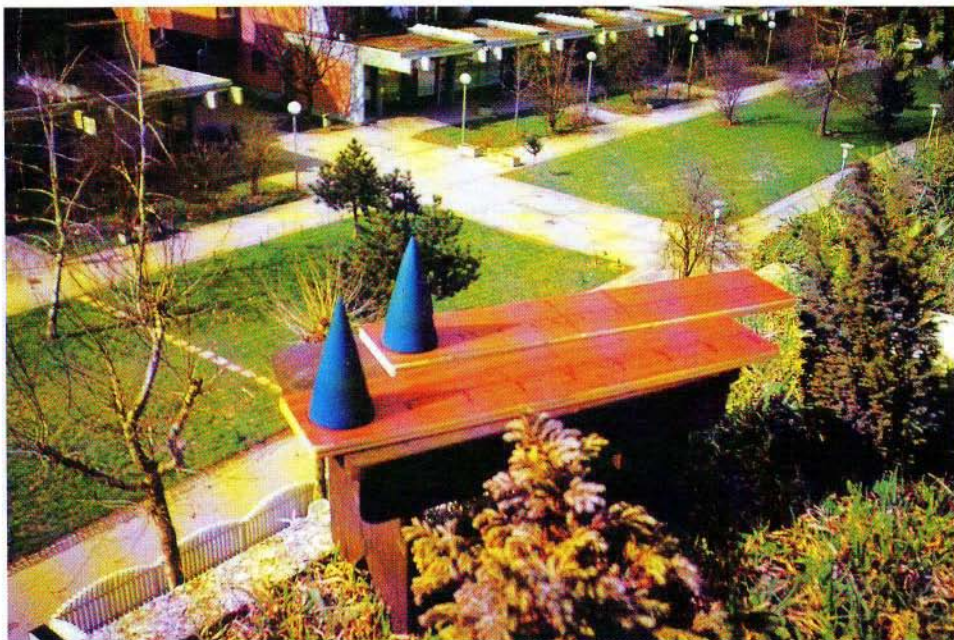
Slika 2. CCD posnetek s spektrografom razpršene zvezdne svetlobe. (Spekter je bil narejen s teleskopom, prikazanim na sliki 4.) Temni vzdolžni presledki so absorpcijske črte. So nekoliko premaknjene. Iz premikov določijo krivuljo radialne hitrosti, kakršna je prikazana na sliki 3. Premiki, ki odkrivajo gibanje zvezde okrog skupnega težišča s planetom, so izjemno majhni.

Slika 5. Risba interferometra, ki bi v vesolju iskal druge planetne sisteme. Najprej bi ga v bližnji orbiti okrog Zemlje sestavili in pognali, nato pa bi ga poslali v zunanja področja Osončja, kjer bi opravljal opazovanja in jih pošiljal nazaj na Zemljo. Pojekt takega interferometra so predlagali ameriški in evropski znanstveniki.



Doprsni kip Franca Močnika v Slovenskem šolskem muzeju v Ljubljani. Močnikovo busto je oblikoval Evgen Guštin iz Breznice pri Žirovnici (foto Marija Haberle Perat).





Slika 2. Praktična uporaba sencomera – merjenje dolžine sence in višinskega kota Sonca.



Slika 7. Prikaz rezultatov mojega več kot enoletnega opazovanja sence navpične palice. Vrh sence, ki jo meče palica na vodoravna tla, se premika po hiperboli, ki je vsak dan drugačna. Od spomladanskega do jesenskega enakonočja so hiperbole vbočene (upognjene k paliči), od jesenskega do spomladanskega enakonočja so izbočene, vmes – ob enakonočjih pa se izrodijo v premico.