

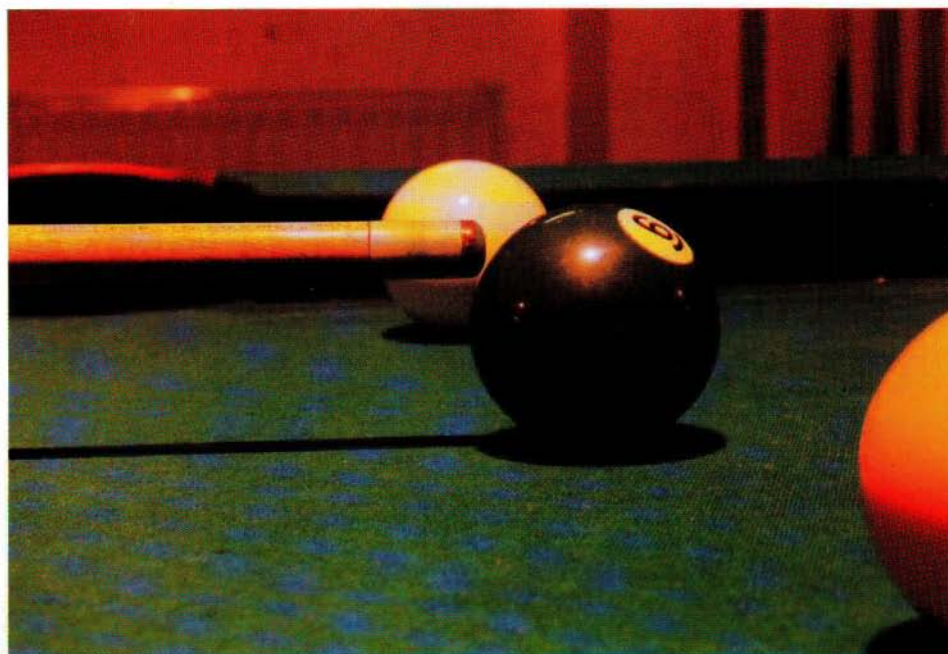
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENE, 24(1996-1997)
ISSN 0351-6652

**PRE
SEK**

6



Dokaz, da je na naslovnici res cvetača.



PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
24. letnik, leto 1996/97, številka 6, strani 321–384

VSEBINA

MATEMATIKA	Mandelbrotova in Juliajeve množice (Primož Potočnik) 322-327 O računovodskem pravilu (Ivan Lisac) 346-351 O Catalanovi domnevi (Jože Grasselli) 358-364 Računanje približkov kvadratnega korena iz naravnega števila (Roman Drnovšek) 372-375
FIZIKA	Prva šola plavanja (Janez Strnad) 328-333 Biljard (Matjaž Vencelj) 354
ASTRONOMIJA	Opazujemo planet Jupiter – reš. str. 365 (Marijan Prosén) 338-340 Ocenimo Sončev premer (Marijan Prosén) 370-371
RAČUNALNIŠTVO	Še enkrat o Fibonaccijevih zaporedjih (Martin Juvan, Katarina Kokalovič) 334-337 Alenka tekmuje z Brigito Bukovec (Matija in Mojca Lokar) 368-369
NOVICE	Naš astronom Herman Mikuz odkril dva asteroida – intervju (Marijan Prosén) 355
NALOGE	Štiri lahke – reš. str. 357 (Marija Vencelj) 345 Vrhovi – reš. str. 376 (Martin Juvan) 356 Kje je napaka? – reš. str. 377 (Olga Arnuš) 365
REŠITVE NALOG	Muhe – s str. 277 (Marija Vencelj) 327 Miha in razlika dveh kvadratov – s str. 296 (Marija Vencelj) 340 Učitelji rišejo – s str. 276 (Martin Juvan) 341-343 Buhteljni v labirintu – s str. 278 (Iztok Arčon) 351 Križanka "Slovenski praštevski vrhovi" – s str. 288 (Marko Bokalič) 356
ZANIMIVOSTI	Panoramske permutacije (Tomaž Pisanski) 344-345
RAZVEDRILO	Križanka "Prizorišča matematičnih in fizikalnih olimpiad" – reš. str. 371 (Marko Bokalič) 352-353 Gobelin – reš. str. 377 (Marko Bokalič) 366-367
TEKMOVANJA	18. mednarodno matematično tekmovanje mest (Aleš Vavpetič) 378-379
LETNO KAZALO	 380-384
NA OVITKU	Fraktalna cvetača (priskrbel jo je Anton Suhadolc, fotografi- ral Peter Legiša). Glej tudi članek na strani 322 I,II Kako suniti biljardno kroglo (foto Matjaž Vencelj)? Glej še članek na strani 354 II Slike k članku na strani 322 III,IV

MANDELBROTOVA IN JULIAJEVE MNOŽICE

Matematika si ljudje ponavadi predstavlja kot zamišljenega in raztrese-nega človeka, oblečenega v zastarela ter malce premajhna oblačila, kako zgolj s kredo v roki na tablo izpeljuje težavne in navadnemu smrtniku pov-sem nerazumljive matematične teorije. Kot ni dima brez ognja, je tudi v tej predstavi kanček resnice. Kljub temu pa je večina sodobnih matematikov odkrila, da je sem in tja poleg krede in lastnega genija koristno pri svojem delu uporabiti tudi modernejša sredstva, denimo računalnik. Hudo-mušni bralec bi sicer pripomnil, da so do tega spoznanja prišli le tisti, ki jim primanjkuje bodisi krede bodisi genija, vendar ostaja dejstvo, da so se s pojavom in razvojem računalnikov pospešeno začela razvijati tudi nekatera matematična področja. Eno takšnih je tudi področje fraktalov in kaosa, kamor lahko uvrstimo tudi pričujoči prispevek.

Fraktali in kaos so se zelo hitro uveljavili tudi v nematematičnih kro-gih, saj jih ponavadi spremljajo presenetljivo lepe in zanimive slike, ki lahko navdušijo gledalca zgolj s svojo estetsko vrednostjo. Nekaj lepih primerkov fraktalov se je pojavilo tudi že v Preseku (glej prispevek Ma-tija Lokarja o praprotilih v 1. številki letnika 1995/96 in Milana Ambrožiča o Newtonovi metodi v 5. številki istega letnika).¹ Tokrat bomo predsta-vili fraktale, ki se imenujejo po matematikih Juliaju in Mandelbrotu. Ker je Presek tudi list za mlade matematike, je prav, da poskušamo mate-matično ozadje, ki se skriva za lepimi barvnimi slikami, čim razumljiveje predstaviti.

Naša zgodba se bo odvijala v množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$, ki si jo bomo predstavljali kot ravnino – vsakemu kompleksnemu številu $x + iy$ pripada točka s koordinatami (x, y) v ravnini. S kompleksnimi števili znamo računati:

$$(x+iy)+(u+iv) = (x+u)+i(y+v), \quad (x+iy)(u+iv) = (xu-yv)+i(xv+yu)$$

in jim določiti absolutno vrednost

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ki v resnici predstavlja oddaljenost slike kompleksnega števila od koordi-natnega izhodišča.

¹ Fraktale nahajamo tudi v naravi. Zanimiv primerek kažeta fotografiji na naslov-nici in II. strani ovitka.

Juliajeve množice

Za izbrano število $c \in \mathbb{C}$ definirajmo kvadratni polinom

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Takšen polinom nam preslikuje točke kompleksne ravnine nazaj v kompleksno ravnino, zato lahko za poljubno število $z_0 \in \mathbb{C}$ opazujemo zaporedje

$$z_0, z_1 = P_c(z_0), z_2 = P_c(z_1), \dots, z_{n+1} = P_c(z_n), \dots$$

Temu zaporedju rečemo *orbita* točke z_0 , točki z_0 pa *seme* orbite.

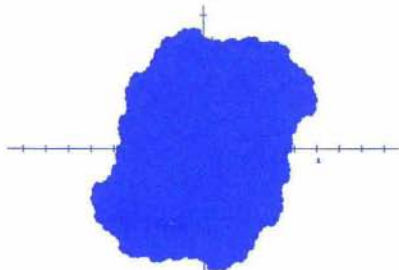
Dogodi se lahko dvoje:

1. orbita lahko sčasoma pobegne daleč od izhodišča, ali z drugimi besedami, množica $\{|z_0|, |z_1|, \dots\}$ je neomejena,
2. orbita ostane na nekem omejenem področju kompleksne ravnine, kar pomeni, da je množica $\{|z_0|, |z_1|, \dots\}$ omejena.

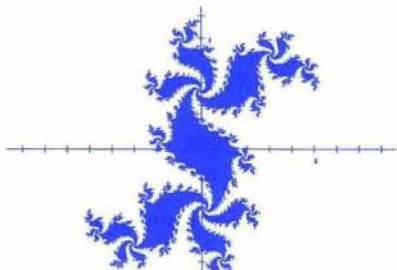
Množico tistih semen, katerih orbite so omejene, označimo z $\mathcal{J}_c$ in ji rečemo Juliajeva množica pri parametru c .

Za pokušino si oglejmo primer Juliajeve množice pri parametru $c = 0$. Tedaj je orbita poljubnega semena $z_0 \in \mathbb{C}$ enaka kar $z_0, z_0^2, z_0^4, z_0^8, \dots$, torej $z_n = z_0^{2^n}$. Od tod sledi analogna formula za absolutne vrednosti $|z_n| = |z_0|^{2^n}$. Če za seme izberemo število znotraj enotskega kroga ($|z_0| \leq 1$), bo očitno tudi za orbito veljalo $|z_n| = |z_0|^{2^n} \leq 1$, kar pomeni, da je takšno seme gotovo element Juliajeve množice, saj je njegova orbita omejena. Velja pa tudi obratno: če za seme izberemo število z_0 zunaj enotskega kroga ($|z_0| > 1$), se bo orbita (z_n) oddaljevala od izhodišča prek vseh mej z večanjem števila n . To pa pomeni, da je Juliajeva množica $\mathcal{J}_c$ pri parametru $c = 0$ enaka kar enotskemu krogu (s središčem v izhodišču in polmerom 1).

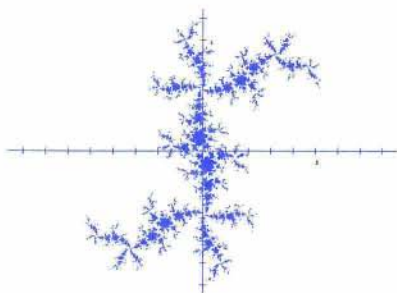
Nič posebnega, boste rekli, samo zelo zapleten način definiranja enotskega kroga. Mnogo bolj zanimivo pa postane, če za parameter c izberemo kakšno drugo kompleksno število.



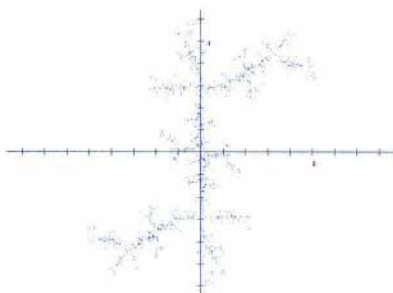
Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

Poglejmo si slike 1, 2, 3 in 4. Struktura teh Juliajevih množic je že mnogo zapletenejša. Na sliki 1 imamo množico $\mathcal{J}_c$ pri parametru $c = 0.15 + 1.25i$, torej pri parametru, ki je relativno blizu izhodišču kompleksne ravnine. Tu je Juliajeva množica do neke mere še podobna krogu.

Precej drugačno situacijo imamo na sliki 2, kjer smo za parameter izbrali $c = 0.3 + 0.5i$. Tu je struktura že mnogo zapletenejša in rob množice $\mathcal{J}_c$ je dobil značilno fraktalno obliko – če bi sliko povečevali v okolici kakšne robne točke, bi odkrivali vedno finejše podrobnosti in strukture, ki bi na pogled zelo spominjale na začetno sliko. Ko parameter c oddaljujemo od izhodišča, postaja množica $\mathcal{J}_c$ vse tanjša in nekje se zgodi, da razpade na prah nepovezanih točk, ki se sčasoma skoraj popolnoma razkadi in izgine z naše slike.

Če slike 1, 2, 3 in 4 pogledamo podrobneje, opazimo, da so vse Juliajeve množice omejene. Ali je to zgolj naključje ali velja splošneje? V resnici velja splošno. Prepričajmo se!

Naj bo $c \in \mathbb{C}$ parameter množice $\mathcal{J}_c$ in z R označimo večje od števil 2 in $|c|$. Vzemimo seme z lastnostjo $|z_0| > R$. Dokazali bomo, da je njegova orbita neomejena in da zato ne pripada Juliajevi množici $\mathcal{J}_c$. Tako se bomo prepričali, da je vsa množica $\mathcal{J}_c$ res znotraj kroga okoli izhodišča s polmerom R .

Definirajmo $q = |z_0| - 1$. Ker velja $|z_0| > R \geq 2$, velja tudi $q > 1$. Za poljubno naravno število k ocenimo

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \frac{|z_k^2 + c|}{|z_k|} \geq \frac{|z_k|^2 - |c|}{|z_k|} = |z_k| - \frac{|c|}{|z_k|}. \quad (1)$$

S pomočjo te formule in indukcijo dokažimo, da za poljubno naravno število k velja

$$|z_{k+1}| \geq q|z_k|. \quad (2)$$

Za $k = 0$, nam (1) pravi:

$$\frac{|z_1|}{|z_0|} \geq |z_0| - \frac{|c|}{|z_0|} > |z_0| - 1 = q,$$

in če zgornjo neenakost še množimo s številom $|z_0|$, že dobimo trditev (2) za primer $k = 0$. Vzemimo sedaj poljubno naravno število n in predpostavimo, da trditev (2) drži za števila $k < n$. Če bomo s pomočjo te predpostavke dokazali, da velja tudi za število $k = n$, nam bo princip matematične indukcije zagotovil veljavnost formule (2) za vsa naravna števila k . Po indukcijski predpostavki velja

$$|z_n| \geq q|z_{n-1}| \geq q^2|z_{n-2}| \geq \dots \geq q^n|z_0| > z_0.$$

Zato velja tudi $-\frac{c}{|z_n|} \geq -\frac{c}{|z_0|}$. Upoštevajmo še formulo (1) za $k = n$ in ocenimo

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \geq |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} \geq |z_0| - \frac{|c|}{|z_0|} > |z_0| - 1 = q.$$

S tem je formula (2) dokazana za število $k = n$, in s tem za vsa naravna števila k . Od tod sledi zveza

$$|z_n| \geq q|z_{n-1}| \geq q^2|z_{n-2}| \geq \dots \geq q^n|z_0|$$

za vsako naravno število n . Ker geometrijsko zaporedje $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ raste prek vsake meje za $q > 1$, je orbita semena z_0 neomejena in zato takšno seme ne pripada Juliajevi množici. S tem smo omejenost Juliajevih množic dokazali.

To dejstvo nam zelo olajša risanje množice $\mathcal{J}_c$ s pomočjo računalnika. Če želimo za neko kompleksno število z_0 preveriti, ali je element Juliajeve množice, zaporedoma računamo elemente z_n njegove orbite in takoj, ko za neko naravno število n dobimo oceno $|z_n| > \max\{2, |c|\}$, lahko zatrdimo, da z_0 ni element Juliajeve množice.

Mandelbrotova množica

Kot vidimo na slikah 1 do 4, niso vse Juliajeve množice povezane. Če bi imeli na razpolago več primerov, bi opazili, da je Juliajeva množica povezana natanko tedaj, ko vsebuje točko 0. Na podlagi tega kriterija lahko ločimo parametre $c \in \mathbb{C}$ v dve družini:

1. na tiste $c \in \mathbb{C}$, za katere je $0 \in \mathcal{J}_c$, in je zato $\mathcal{J}_c$ povezana množica,
2. na tiste $c \in \mathbb{C}$, za katere $0 \notin \mathcal{J}_c$, in je zato $\mathcal{J}_c$ nepovezana množica.

Množico kompleksnih števil c iz prve družine imenujemo Mandelbrotova množica in jo označimo z $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; 0 \in \mathcal{I}_c\}.$$

Če torej želimo za dano kompleksno število c preveriti, ali pripada Mandelbrotovi množici, moramo preveriti, ali je orbita semena $z_0 = 0$ pri polinomu P_c omejena. Takšna orbita je oblike

$$z_0 = 0, z_1 = 0^2 + c = c, z_2 = c^2 + c, z_3 = (c^2 + c)^2 + c, \dots \quad (*)$$

Če ugotovimo, da absolutne vrednosti elementov takšne orbite ostanejo omejene (ne rastejo prek vsake meje), je število c element Mandelbrotove množice. Podobno kot pri Juliajevi množici se lahko tudi tu prepričamo, da takšna orbita gotovo ni omejena, če kateri od njenih elementov postane po absolutni vrednosti večji od števila 2. Zato je v resnici dovolj preveriti, ali so vsi elementi orbite omejeni s številom 2. Ker je število c samo tudi element orbite (*), lahko sklepamo, da se Mandelbrotova množica nahaja v krogu okoli izhodišča s polmerom 2.

Za zgled preverimo, ali je število -2 element Mandelbrotove množice. Oglejmo si orbito semena 0 pri $c = -2$:

$$0, -2, (-2)^2 - 2 = 2, 2^2 - 2 = 2, 2, 2, \dots$$

Orbita se ustali pri številu 2 in je zato omejena, to pa pomeni, da je $-2 \in \mathcal{M}$.

Oglejmo si sedaj sliko 5, kjer je Mandelbrotova množica predstavljena s črno barvo. Rob Mandelbrotove množice je fraktalen – bliže si ga ogledujemo, bogatejšo strukturo lahko opazimo. Na sliki 6 smo povečali del slike 5 okoli točke $-0.76315 - 0.08855i$ za približno 1000-krat. Množica $\mathcal{M}$ je sicer povezana, a jo vendar lahko razbijemo na več komponent, ki se med seboj dotikajo le v eni točki. Največja komponenta ima obliko krivulje srčnice, ostale pa so okrogle in so razporejene ob robu največje. Konci posameznih komponent so okrašeni še s tankimi laski, ki pa jih na sliki zaradi preslabe resolucije žal ni najbolje videti.

Kako narisati Mandelbrotovo ali Juliajevo množico?

Odgovor je preprost – z računalnikom. Kako? Presenetljivo enostavno, le definiciji obeh množic je treba upoštevati. Denimo, da želimo na zaslonu prikazati Juliajevo množico $\mathcal{I}_c$ pri izbranem $c \in \mathbb{C}$. Kot vemo, je zaslon razdeljen na $m \times n$ točk, ki je vsaka lahko obarvana z eno od barv $0, 1, 2, \dots, b$. Ponavadi pomeni 0 črno barvo in jo porabimo za barvanje

množice $\mathcal{J}_c$, ostale pa za barvanje zunanosti. Števila m, n, b so seveda odvisna od zmogljivosti računalnika in programskega jezika, v katerem programiramo. Vsaki točki zaslona priredimo ustrezno točko dela kompleksne ravnine, ki ga želimo predstaviti na zaslonu. Za vsako od teh $m \times n$ točk moramo preveriti, ali pripadajo množici $\mathcal{J}_c$ ali ne. V ta namen izberemo neko dovolj veliko naravno število N , ki bo predstavljalo maksimalno število iteracij, ki jih bo računalnik izvedel.

Za vsako od $m \times n$ točk kompleksne ravnine, denimo z_0 , pričnemo računati zaporedje

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Določimo število R tako, da bo veljalo $R > 2$ in $R > |c|$. Če pri nekem številu k dobimo oceno $|z_k| > R$, to pomeni, da točka z_0 ni element množice $\mathcal{J}_c$ in računanje naslednjih členov zaporedja (z_n) lahko opustimo. Zanimive barvne učinke dosežemo, če takšno točko obarvamo z neko barvo, ki je odvisna od števila k , denimo z barvo $(k \bmod b) + 1$, lahko pa poskusimo tudi s kakšno drugo funkcijo števila k .

Če števila $|z_k|$ ostanejo omejena s številom R za vse $k \leq N$, lahko domnevamo, da točka z_0 pripada množici $\mathcal{J}_c$, in zato pripadajočo točko na zaslonu obarvamo z barvo 0 (črno).

Podobno predstavimo na računalniku Mandelbrotovo množico $\mathcal{M}$. Vsaki točki zaslona zopet priredimo ustrezno točko kompleksne ravnine in za vsako od njih, denimo c , preverimo, ali ostaja zaporedje

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

omejeno po absolutni vrednosti s številom 2. Če zaporedje pri nekem številu k pobegne iz kroga okoli izhodišča s polmerom 2, pobarvamo ustrezno točko na zaslonu neko barvo, ki naj bo odvisna od k , če pa zaporedje ostane omejeno z 2 za vse $k \leq N$, točko počrnimo.

Na takšen način dobimo seveda le približno podobo Mandelbrotove in Juliajevih množic. Večje število iteracij N izberemo, bliže je podoba resnici. Tako smo pri sliki 7 postavili število iteracij na 100, pri sliki 8, kjer so nas zanimale finejše podrobnosti, pa kar na 1000.

Primož Potočnik

MUHE – Rešitev s str. 277

Poljubne tri točke vedno leže v isti ravnini, poenostavljeno torej tudi tri muhe.

Marija Vencelj

PRVA ŠOLA PLAVANJA

Bliža se čas počitnic in z njim poletno kopanje. V mislih na prijetno rekreacijo kolikor mogoče preprosto obdelajmo plavanje. Fizik pojav opazuje, razčleni in njegove člene pojasni z osnovnimi zakoni. Tako okvirno razume tudi zapletene pojave v naravi in v vsakdanjem življenju, čeprav ima premalo podatkov, da bi jih opisal v podrobnostih. To je stvar specialistov, ki se posebej zanimajo za te pojave, na primer strokovnjakov, ki svetujejo vrhunskim plavalcem.

Po fizikovi navadi spremljamo opis pojavov s preprostimi računi. Plavanje na vodni gladini obravnavamo v dveh korakih. Najprej se lotimo primera, pri katerem telo in voda mirujeta in ki sodi v *hidrostatiko*, nato pa primera, pri katerem se deli telesa in deli vode gibljejo in ki sodi v *hidrodinamiko*.

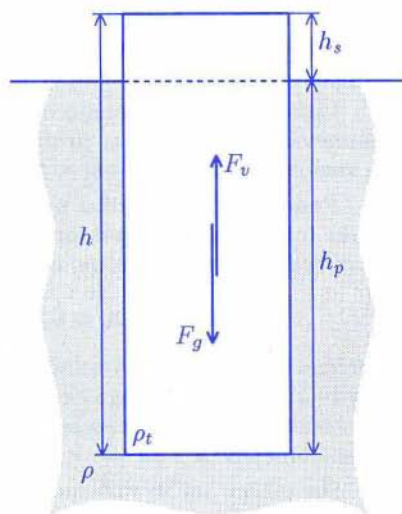
Za telo, ki miruje na vodni gladini, uporabimo izrek o ravновesju. Po njem sila Zemlje na telo navpično navzdol, to je teža, uravnovesi silo vode na telo navpično navzgor, to je vzgon. Po Arhimedovem zakonu je vzgon enak teži izpodrinjene vode. Telo naj ima obliko pokončne prizme z višino h , osnovno ploskvijo S in gostoto ρ_t . Prostornina telesa je Sh , masa $\rho_t Sh$ in teža $g\rho_t Sh$ s težnim pospeškom $g = 10 \text{ m/s}^2$. Težo izpodrinjene vode $g\rho Sh_p$ določata tudi višina potopljenega dela prizme h_p in gostota vode ρ . Z enačbo

$$g\rho_t Sh = g\rho Sh_p \quad (1)$$

izračunamo višino dela prizme, ki gleda iz vode (slika 1):

$$h_s = h - h_p = h \frac{\rho - \rho_t}{\rho}.$$

Gostota telesa mora biti manjša od gostote vode. Ni treba, da bi bilo telo homogeno, se pravi, da bi vsi njegovi deli imeli enako gostoto. Za ρ_t vzamemo povprečno gostoto, ki jo dobimo, ko maso telesa delimo z njegovo prostornino.



Slika 1. Težo (F_g) mirujočega telesa na gladini vode uravnovesi statični vzgon (F_v).

Gostota vode v jezerih, rekah in bazenih je 1000 kg/m^3 , za gostoto človeškega telesa pa vzamemo 960 kg/m^3 . V tem primeru gleda iz vode petindvajsetina višine telesa, pri višini $1,7 \text{ m}$ je to 7 cm . V pokončni legi je to premalo, da bi bila usta nad gladino in bi nemoteno dihali. Plavalec si pomaga tako, da glavo nagne nazaj, ali se uleže na hrbet in "plava mrtvaka". Vsi ljudje nimajo enake gostote. Povprečna gostota telesa je tudi nekoliko manjša, če globoko vdihnemo in zrak zadržimo. Gostota morske vode je zaradi raztopljenih soli večja, 1030 kg/m^3 . Zato se ob sicer nespremenjenih podatkih del višine nad vodo poveča na 12 cm . V morju je precej lažje plavati.

S takim plavanjem se ne moremo zadovoljiti. Še vedno naj se telo na gladini vode ne premika. Vendar naj zdaj roke in noge potiskajo dele vode navzdol. Ne da bi se zanimali za podrobnosti, mislimo na del vode z maso m , ki spočetka miruje, pa ga zajame roka ali noga in ga odrine navzdol s hitrostjo v . Tako plavalec poganja navzdol curek vode. Sila F roke ali noge pospeši del vode od hitrosti 0 na hitrost v v času t . Po Newtonovem zakonu je $F = m(v - 0)/t$ in $F = v \cdot m/t = v\phi$, če vpeljemo masni tok vode $\phi = m/t$. To je sila roke ali noge na del vode, a po zakonu o vzajemnem učinku deluje curek vode na roko ali nogo z nasprotno enako silo, *nasprotno silo curka*. To silo $F_d = v\phi$, ki v našem primeru deluje navpično navzgor, imenujemo *dinamični vzgon* za razliko od prejšnjega *statičnega vzgona* z enako smerjo. Deli vode v curku nimajo vsi enake hitrosti, vrhu tega se med zamahom rok in nog razmere spreminjajo s časom. Upoštevamo pač povprečni tok vode ϕ in povprečno hitrost v .

Da bo račun preglednejši, vzemimo, da je učinkovita površina rok in nog enaka preseku telesa S . Pri tem upoštevamo, da ne odrivajo vode samo dlani in podplati, ampak – čeprav manj učinkovito – tudi podlahti, goleni, nadlahti in stegna. V tem primeru je masni tok $\phi = \rho v S$ in meri nasprotna sila curka $F_d = \rho v^2 S$. Zaradi tega pogleda več telesa iz vode. Težo telesa uravnesita namreč statični vzgon, ki še naprej deluje, in nasprotna sila curka ali dinamični vzgon: $g\rho_t Sh = g\rho Sh_1 + \rho v^2 S$. Zdaj je višina potopljenega dela telesa $h_1 = h\rho_t/\rho - v^2/g$ in gleda iz vode del z višino (slika 2)

$$h - h_1 = h \frac{\rho - \rho_t}{\rho} + \frac{v^2}{g} = h_s + h_d.$$

Pri tem je $h_d = v^2/g$ višina, ki bi gledala iz vode, če ne bi bilo statičnega vzgona.

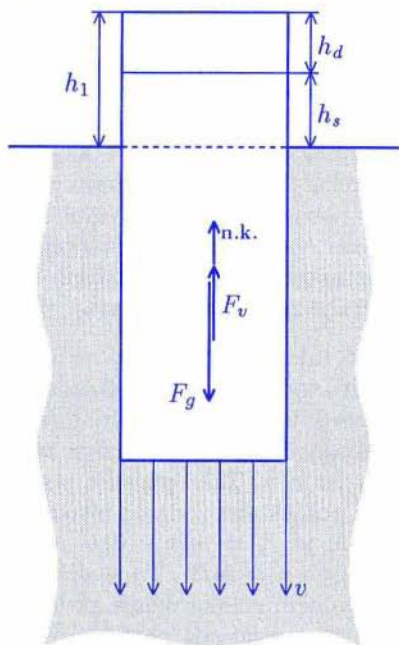
Vzemimo, da sta oba prispevka enaka: $h_s = h_d$. V tem primeru gleda iz vode nekaj manj kot 14 cm, kar omogoči nemoteno dihanje. Za hitrost delov vode dobimo $v = \sqrt{gh_d} = \sqrt{gh/25} = 0,85$ m/s. Če bi zahtevali $h_d = \frac{1}{2}h_s$, bi bila hitrost delov vode 0,60 m/s in bi gledal iz vode del telesa z višino 10 cm, kar bi tudi še omogočilo nemoteno dihanje.

Za nasprotno silo curka mora plavalec delati, kar za statični vzgon ni potrebno. Moč dobimo z izrekom o kinetični energiji. Sila rok in nog mora opraviti pri pospeševanju mase vode m od hitrosti 0 do hitrosti v delo, ki je enako kinetični energiji vode: $A = \frac{1}{2}mv^2$. Enačbo delimo s časom in dobimo za moč $P = \frac{1}{2}vF = \frac{1}{2}\rho vS \cdot v^2 = \frac{1}{2}\rho v^3 S$.

Kdo bi utegnil ugovarjati, da dobimo moč $Fv = \phi v^2 = \rho v^3 S$, ko silo F pomnožimo s hitrostjo roke ali noge v . Vendar bi to veljalo le, če bi se prijemališče sile, to je roka ali noga, ves čas oddaljevalo s hitrostjo v . Toda roka in noga se v povprečju ne oddaljita in vselej znova zajameta vodo s hitrostjo nič in jo pospešita do hitrosti v . Zato moramo moč izračunati s povprečno hitrostjo $(0 + v)/2 = \frac{1}{2}v$.

Moč je izrazito odvisna od hitrosti. Pri hitrosti 0,85 m/s dobimo zanj 12 W, pri hitrosti 0,6 m/s pa nekaj več kot 4 W. Roke in noge odpravljajo dele vode z gibanjem v levo in desno in jo pospešujejo tudi v vodoravni smeri, tako da nastajajo vrtinci. Najbrž ne zgrešimo dosti, če ocenimo moč plavalca, ki se ne premika in skrbi za to, da nemoteno diha z ustmi nad vodo, na nekaj manj kot deset wattov.

Doslej smo se omejili na primere, pri katerih se plavalec ni premikal. Težo telesa uravnovesita sila mirujoče vode na telo, to je statični vzgon, in sila delov gibajoče se vode na telo, to je nasprotna sila curka. Razmere

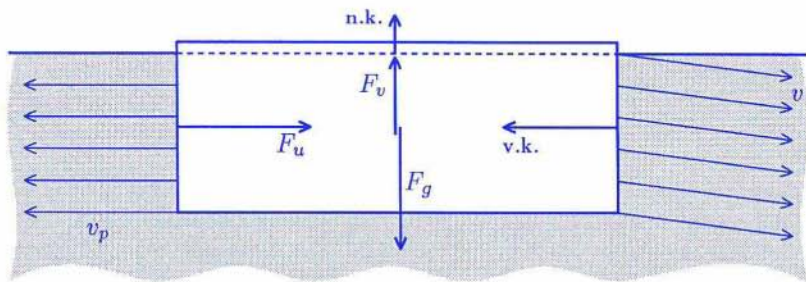


Slika 2. Težo (F_g) telesa uravnovesita statični vzgon (F_v) in dinamični vzgon (n.k.). Dinamični vzgon nastane zaradi toka vode, ki ga odpravljajo navzdol deli telesa.

so okvirno dokaj pregledne. Gibajoči se deli telesa, to je roke in noge, odrivajo navzdol tok vode, ki je v povprečju konstanten, tako da so razmere v povprečju stacionarne.

Curek vode navzdol zaradi sil med deli vode postaja vse počasnejši in vse manj izdaten in nazadnje nedaleč proč od plavalca deli vode obmirujejo. Delo, ki ga oddaja plavalec, se nazadnje porabi za povečanje notranje energije vode: voda se segreje. Plavalec odda vsako sekundo okoli deset joulov. Če upoštevamo, da se kilogram vode segreje za stopinjo Celzija, ko prejme 4200 joulov in je masa vode okoli plavalca velika, nismo presenečeni, da temperaturne razlike ne moremo opaziti. John Prescott Joule se je moral v štiridesetih letih prejšnjega stoletja precej potruditi, da je izmeril povišanje temperature majhne mase vode ali druge kapljavine v toplotno izolirani posodi, ko ji je dovajal delo z mešalom.

Čeprav z besedo plavanje večkrat opišemo telo na gladini vode, ki se ne premika, navadno z njo mislimo na telo, ki se premika. Prav zaradi tega premikanja je kopanje zanimivo: Kar pomislite na tekmovanje, kdo bo hitreje plaval, in na lovljenje v vodi. Načelno je zadeva preprosta. Plavalec s tem, da spremeni lego telesa in kretnje rok in nog, preusmeri curek vode iz navpične smeri (slika 3). Če plava enakomerno v vodoravni smeri, so v ravnovesju vse sile: težo uravnovesita statični vzgon in navpična komponenta nasprotne sile curka, ki ji še naprej lahko rečemo dinamični vzgon, vodoravno komponento nasprotne sile curka pa uravnovesi upor.



Slika 3. Plavalec se premika zaradi vodoravne komponente nasprotne sile curka (v.k.), ki jo uravnovesi upor (F_u). Navpična komponenta nasprotne sile curka (n.k.) skupaj s statičnim vzgonom (F_v) uravnovesi težo (F_g). Plavalec se giblje s hitrostjo v_p proti levi.

Mislimo si, da plavalca, ki drži roke in noge pri miru, vlečemo po vodi s konstantno hitrostjo v_p . Pri tem uravnovesi silo vrvi upor: $F_u = \frac{1}{2} c_u \rho v_p^2 S$. Koeficient upora c_u je za kroglo 0,4 in za telo ribje oblike 0,04. Vnaprej ne vemo, kolikšen je koeficient upora za plavalca, pa še s časom

se spreminja zaradi gibanja rok, nog in trupa. Povprečna vrednost je odvisna od načina plavanja. Poznamo simetrična načina prsno in delfin ter nesimetrična hrbtno in prosto (kravl). Če razmišljamo povprek, ocenimo, da dosežejo tekmovalci hitrost okoli $100 \text{ m}/60 \text{ s} = 1,7 \text{ m/s}$ in več, zelo počasni plavalci pa hitrost $2 \text{ km/h} = 0,6 \text{ m/s}$ in manj.

proga	moški	hitrost	ženske	hitrost
100 m prsno	60,60 s	1,65 m/s	67,02 s	1,49 m/s
100 m delfin	52,27	1,91	57,93	1,73
100 m hrbtno	53,86	1,86	60,16	1,66
100 m prosto	48,21	2,07	54,01	1,85
800 m prosto			496,22	1,61
1500 m prosto	881,66	1,70		

Tabela 1. Svetovni rekordi v plavanju za moške in ženske.

Izenačimo vodoravno komponento nasprotne sile curka $\rho v^2 S$ z uporabo $\frac{1}{2} c_u \rho v_p^2 S$, pa dobimo za hitrost delov vode, ki jih odriva plavalec v nasprotni smeri premikanja: $v = \sqrt{\frac{1}{2} c_u} v_p$.

Moč plavalca izračunamo zopet tako, da masni tok pomnožimo s polovično hitrostjo delov vode. Upoštevati moramo dele vode, ki se gibljejo v smeri gibanja plavalca, in dele, ki se gibljejo v nasprotni smeri:

$$\rho S c_u v_p^2 \cdot \frac{1}{2} v_p + \rho S v^2 \cdot \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} c_u \rho v_p^3 (1 + \sqrt{c_u/8}).$$

Pri tem smo uporabili zvezo med hitrostma.

S to zvezo lahko moč plavalca prepišemo tudi v obliko $\rho S v^2 (v_p + \frac{1}{2} v)$. To enačbo pojasnimo s stališča plavalca, medtem ko smo doslej stali na stališču opazovalca, ki je miroval glede na nemoteno vodo. Za plavalca se namreč del nemotene vode giblje s hitrostjo v_p , potem ko ga odrine, pa s hitrostjo $v + v_p$. Nasprotno silo curka izračunamo z razliko hitrosti, to je v , za hitrost prijemališča sile rok in nog pa moramo upoštevati povprečno hitrost $\frac{1}{2}(v_p + v + v_p) = v_p + \frac{1}{2} v$. Za plavalca sila upora ne opravlja dela, ker njeno prijemališče miruje. Na navpično komponento nasprotne sile curka, ki je precej manjša, se pri računanju sploh nismo ozirali.

Tekmovalec doseže za kratek čas moč, ki ni dosti manjša od kilowatta. Zaradi vrtincev v vodi gre nekaj te moči v izgubo. Vzemimo za učinkovito moč 600 wattov in jo izenačimo z izračunano močjo plavalca. S to zelo površno oceno pridemo do povprečnega koeficienta upora nekaj manj kot 0,3, kar se zdi dokaj smiselno. S tem koeficientom dobimo za zelo počasnega plavalca moč nekaj več kot 30 wattov, kar se tudi zdi smiselno.

Nazadnje obdelajmo še nihanje plavalca. Najprej se vrnimo na začetek in na znani način opazujemo plavalca, ki v navpični legi miruje na gladini. Kako bi se gibal, če bi ga kdo malo potunkal in spustil? Še naprej ga opišimo s pokončno prizmo. V ravnovesju bi se plavalec zaradi dodatne majhne sile F' navpično navzdol dodatno potopil za višino h' , za katero velja enačba $g\rho_t Sh + F' = g\rho S(h' + h_p)$. Zaradi zveze (1) preostane za dodatno silo $F' = g\rho Sh'$. Na plavalca, ki je potopljen dodatno za višino h' , voda deluje z dodatno silo $F' = g\rho Sh'$ navpično navzgor. Dodatni odmik navzdol povzroči dodatno silo navzgor. To je značilno za nihalo. Iz Newtonovega zakona ni težko razbrati, da sorazmernosti koeficient med silo F' in premikom h' , deljen z maso telesa, da $(2\pi/t_0)^2$, če je t_0 nihajni čas. Maso telesa izrazimo kot $\rho_t Sh$, pa dobimo za sorazmernostni koeficient $g\rho S/\rho_t Sh = g\rho/\rho h_p = g/h_p$, če upoštevamo enačbo (1). Plavajoče telo niha potemtakem z nihajnim časom $t_0 = 2\pi\sqrt{h_p/g}$, ki se ujema z nihajnim časom nitnega nihala z dolžino h_p . Za plavalca v navpični legi s prejšnjim podatkom $h_p = 24h/25 = 1,63$ m dobimo nazadnje $t_0 = 2,5$ s. V vodoravni legi, ko je višina potopljenega dela okoli 10 cm ali več, pa bi dobili krajši nihajni čas 0,6 s.

Nihanje je zaradi upora močno dušeno, tako da ga komaj lahko zasledujemo. Zanesemo pa se lahko na ugotovitev, da se plavalec v ravnovesno lego vrne po času z velikostno stopnjo sekunde. Iz tega izhaja, da plavalec s sunki rok in nog v pravem časovnem razmiku lahko izkoristi nihanje, da pridejo usta v pravem trenutku dovolj visoko nad vodo in nemoteno vdihne.

Človek ni prizma. Roke in noge nimajo enake ploščine kot presek telesa. Pri podrobnejšem računanju bi bilo treba ugotoviti razmerje med čelnim presekom telesa S in učinkovitim presekom rok in nog S' . Pri nasprotni sili curka bi kazalo upoštevati efektivni presek $c'_u S'$, podobno kot smo upoštevali efektivni presek $c_u S$ pri računanju upora. Naše privzetke spremljajo še druge pomanjkljivosti. Vendar je preprosta slika, ki smo si jo ustvarili, dokaj uporabna in pripravna za izpopolnitve. Bralci Preseka jo lahko v naslednjem poletju preskusijo v okviru kake srednješolske raziskovalne naloge. Ob tem lahko raziščejo, kako je pri različnih načinih plavanja, če plavamo samo z rokami ali samo z nogami, pri plavanju pod vodo in še veliko drugega. Primerjali bi lahko tudi gibanje človeka na meji med vodo in zrakom z gibanjem živali, ki živijo v vodi in katerih povprečna gostota je enaka gostoti vode.

ŠE ENKRAT O FIBONACCIJEVIH ZAPOREDJIH

Presek je o Fibonaccijevih zaporedjih v tem letniku že pisal (glej Posplošena Fibonaccijeva zaporedja, Presek 24 (96/97), št. 3, str. 150–152). V prispevku smo obravnavali posplošena Fibonaccijeva zaporedja, to je zaporedja, določena z začetnima členoma $a_1 = a$ in $a_2 = b$ ter rekurzivno zvezo $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, $k \geq 2$. Pri tem smo se omejili na zaporedja s pozitivnima celoštevilskima začetnima členoma a in b . Med takimi zaporedji smo iskali tisto, ki vsebuje število 1000000, hkrati pa je zanj vsota $a + b$ najmanjša. Nalogo smo rešili z "metodo grobe sile". Z rekurzivno zvezo lahko iz dveh zaporednih členov zaporedja izračunamo naslednje, pa tudi prejšnje člene. Ker je bilo število 1000000 v zaporedju, smo kar preizkusili vse kandidate za prejšnji člen, to so bila števila od 1 do 999999, in z računanjem nazaj izračunali začetna člena. Tako smo v nekaj sekundah dobili odgovor $a = 154$ in $b = 144$.

Opisana rešitev je bila primerna za zastavljeno nalogo, saj jo je mogoče hitro domisliti in sprogramirati, pa tudi možnosti, da bi se zmotili, ni prav veliko. V nadaljevanju prispevka pa bomo pokazali, kako z nekaj razmišljanja poiščemo še bistveno boljše rešitev, tako, ki jo bo mogoče uporabiti tudi za računanje s svinčnikom in papirjem (no, tudi žepnega računalja se ne bomo branili).

Označimo z $f_1 = f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \dots$ običajna Fibonaccijeva števila. V že omenjenem prispevku smo ugotovili, da za člene posplošenega Fibonaccijevega zaporedja velja

$$a_k = f_{k-2} \cdot a + f_{k-1} \cdot b,$$

pri čemer vzamemo $f_{-1} = 1$ in $f_0 = 0$. Podobno lahko zapišemo tudi formulo za predhodne člene. Recimo, da poznamo člena a_n in a_{n-1} . Potem za $i \geq 0$ velja

$$a_{n-i} = (-1)^i f_{i-1} \cdot a_n - (-1)^i f_i \cdot a_{n-1}. \quad (1)$$

Da gornja formula res velja, se prepričamo z matematično indukcijo, seveda pa nama lahko verjamete tudi na besedo. Poglejmo primer računanja predhodnih členov. Recimo, da je v zaporedju število 100, člen pred njim pa je enak 62. Potem z računanjem nazaj, pri tem uporabljamo rekurzivno zvezo $a_{n-i} = a_{n-i+2} - a_{n-i+1}$, dobimo

$$100, 62, 38, 24, 14, 10, 4, 6, -2, 8, -10, \dots \quad (2)$$

Seveda nas zaporedje predhodnih členov zanima le toliko časa, dokler so vsi njegovi členi pozitivni. In koliko začetnih členov je pozitivnih? V zgornjem primeru jih je 8. V splošnem pa razmišljajmo takole. Pri računanju predhodnih členov so ti pozitivni toliko časa, dokler je novi predhodni člen strogo manjši od predhodnega člena, izračunanega na prejšnjem koraku. Če je novi predhodni člen večji ali enak prejšnjemu, bo naslednji izračunani predhodni člen enak 0 ali manjši od 0. To pomeni, da se ustavimo pri prvem indeksu i , za katerega velja

$$a_{n-i} \geq a_{n-i+1}. \quad (3)$$

Tedaj ima zaporedje predhodnih členov na začetku natanko $i+1$ pozitivnih členov. Če v (3) upoštevamo zvezo (1), dobimo

$$(-1)^i f_{i-1} \cdot a_n - (-1)^i f_i \cdot a_{n-1} \geq (-1)^{i-1} f_{i-2} \cdot a_n - (-1)^{i-1} f_{i-1} \cdot a_{n-1},$$

kar nam po preoblikovanju da

$$(-1)^i f_i \cdot a_n \geq (-1)^i f_{i+1} \cdot a_{n-1}.$$

Pogoj, ki nas pri računanju predhodnih členov zaustavi, je tako

$$(-1)^i \frac{f_i}{f_{i+1}} \geq (-1)^i \frac{a_{n-1}}{a_n}. \quad (4)$$

Pomembni so torej količniki zaporednih Fibonaccijevih števil. Zapišimo jih prvih nekaj:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \dots$$

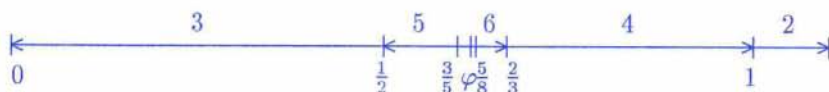
Pokažemo lahko, da se količniki bližajo razmerju zlatega reza, to je vrednosti

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \doteq 0.6180339\dots$$

Natančneje, količniki $\frac{f_{2i}}{f_{2i+1}}$, $i = 0, 1, \dots$, so strogo manjši od φ in rastejo proti φ , količniki $\frac{f_{2i+1}}{f_{2i+2}}$, $i = 0, 1, \dots$, pa so večji od φ in padajo proti φ . O tem se lahko prepričamo, na primer s pomočjo Cassinijeve identitete

$$f_{i+1}f_{i-1} - f_i^2 = (-1)^i, \quad i \geq 0.$$

Prikažimo prvih nekaj količnikov in pripadajoče intervale še na številski premici:



Številke nad intervali povedo, s koliko pozitivnimi členi se začne zaporedje predhodnih členov, če je količnik med a_{n-1} in a_n na izbranem intervalu. Na primer, če $\frac{a_{n-1}}{a_n} \in [\frac{5}{8}, \frac{2}{3})$, potem dobimo z računanjem nazaj poleg a_n in a_{n-1} še štiri pozitivne člene, preden naletimo na prvi nepozitivni člen. Poglejmo še primer (2). Tu je $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{62}{100}$. Količnik tako leži med $\frac{f_7}{f_8} = \frac{13}{21} \approx 0.619$ in $\frac{f_5}{f_6} = \frac{5}{8} = 0.625$. Pogoji (4) ni izpolnjen za noben sod indeks i , pri lihih pa ne velja za $i = 1, 3$ in 5 . Najmanjši i , za katerega je izpolnjen, je tako 7 , zaporedje pa ima na začetku 8 pozitivnih členov. Napoved iz pogoja (4) se torej ujema s številom izračunanih pozitivnih členov v (2).

Pričakujemo lahko, da bo vsota zadnjih dveh pozitivnih členov (torej vsota začetnih členov posplošenega Fibonaccijevega zaporedja iz naše naloge) tem manjša, čim več pozitivnih členov bomo naračunali iz a_n in a_{n-1} . To predvidevanje potrdi tudi račun. Če je $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ na intervalu med $\frac{f_{i-3}}{f_{i-2}}$ in $\frac{f_{i-1}}{f_i}$, pri čemer je interval pri $\frac{f_{i-3}}{f_{i-2}}$ odprt, pri $\frac{f_{i-1}}{f_i}$ pa zaprt, z računanjem nazaj dobimo (vključno z a_n in a_{n-1}) i pozitivnih členov. Če je količnik $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ enak $\frac{f_{i-1}}{f_i}$, sta zadnja pozitivna člena enaka, njuna vsota pa je $\frac{2a_n}{f_i}$. Ko pa se s količnikom $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ bližamo drugi meji intervala, številu $\frac{f_{i-3}}{f_{i-2}}$, se predzadnji pozitivni člen bliža 0 , zadnji pa gre proti $\frac{a_n}{f_{i-2}}$. Vsota obeh se tako od spodaj približuje $\frac{a_n}{f_{i-2}}$. Za majhne vrednosti indeksa i so gornje ugotovitve prikazane tudi v spodnji tabeli (pri tem se vrednostim v zadnjem stolpcu lahko le poljubno približamo, ne moremo pa jih doseči):

število pozitivnih členov i	f_i	interval za količnik $\frac{a_{n-1}}{a_n}$	vrednost $a + b$	
			najmanjša $\frac{2a_n}{f_i}$	največja $\frac{a_n}{f_{i-2}}$
2	1	$[1, \infty)$	$2a_n$	∞
3	2	$(0, \frac{1}{2}]$	a_n	a_n
4	3	$[\frac{2}{3}, 1)$	$\frac{2a_n}{3}$	a_n
5	5	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$	$\frac{2a_n}{5}$	$\frac{a_n}{2}$
6	8	$[\frac{5}{8}, \frac{2}{3})$	$\frac{a_n}{4}$	$\frac{a_n}{3}$
7	13	$(\frac{3}{5}, \frac{8}{13}]$	$\frac{2a_n}{13}$	$\frac{a_n}{5}$

Še posebej zanimiva je izbira $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \varphi$. Tedaj je zaporedje predhodnih členov sestavljeno iz samih pozitivnih števil, ki padajo proti 0, a te vrednosti nikoli ne dosežejo. Seveda v tem primeru vsaj eden od a_n ali a_{n-1} ni celo število, saj φ ni racionalno število.

Tako, teoretično smo razjasnili vse podrobnosti. Poglejmo še, kako teorijo koristno uporabimo pri reševanju naloge, ki smo jo opisali na začetku prispevka. Če naloga ne bi zahtevala, da sta a in b celi števili, bi bila prava izbira seveda $a_{n-1} = \varphi a_n$. Ker pa φa_n ni celo število, sta kandidata za a_{n-1} dva. To sta zaporedni celi števili, med katerima leži φa_n : $\lfloor \varphi a_n \rfloor$ in $\lceil \varphi a_n \rceil$. Da bo rešitev popolna, dopišimo še program:

```
program posploseni-Fibonacci;
{ Učinkovito poišče začetna člena posplošenega Fibonaccijevega }
{ zaporedja. }
var
  fi: extended;                                { razmerje zlatega reza }
  an,a1,a2: longint;                            { največji in tekoča člena zaporedja }
  i: integer;                                    { števec pozitivnih členov }
begin
  fi := (sqrt(5)-1)/2;
  repeat
    write('Vpisi pozitivni clen, ki ga poznas: '); readln(an);
  until an>0;
  a2 := an; a1 := trunc(fi*an); i := 2;          { prvi kandidat }
  write('an = ',a2,' an-1 = ',a1);
  while a1<a2 do
    begin a1 := a2-a1; a2 := a2-a1; i := i+1; end;
  writeln(' a = ',a1,' b = ',a2,' (',i,' clenov)');
  a2 := an; a1 := trunc(fi*an)+1; i := 2;        { drugi kandidat }
  write('an = ',a2,' an-1 = ',a1);
  while a1<a2 do
    begin a1 := a2-a1; a2 := a2-a1; i := i+1; end;
  writeln(' a = ',a1,' b = ',a2,' (',i,' clenov)');
  readln;
end.
```

Pri $a_n = 1996$ je $\varphi a_n = 1233.5958\dots$, torej sta kandidata za a_{n-1} števili 1233 in 1234. Daljše zaporedje določa število 1233, kjer dobimo $a = 49$ in $b = 6$, medtem ko pri $a_{n-1} = 1234$ dobimo $a = 40$ in $b = 34$. Pri $a_n = 19961996$ sta kandidata za a_{n-1} števili 12337192 in 12337193. Tudi tokrat je boljši prvi kandidat, za katerega dobimo $a = 704$ in $b = 692$. Omenimo še, da ima zaporedje, ki ga določa prvi kandidat, 23 pozitivnih členov, zaporedje, ki ga določa drugi, pa le 20, torej kar 3 manj.

Martin Juvan, Katarina Kokalovič

OPAZUJEMO PLANET JUPITER

V astronomskih efemeridah ali v računalniškem programu lahko zasledimo, da bo *Jupiter* v sredini tega leta v primerni legi za opazovanje. Spomladi je še jutranji planet, avgusta pa bo viden vso noč, ker je v opoziciji s Soncem. Potem bo zahajal vedno bolj zgodaj, postajal tako večerni planet in se polagoma izgubil v Sončevi svetlobi.

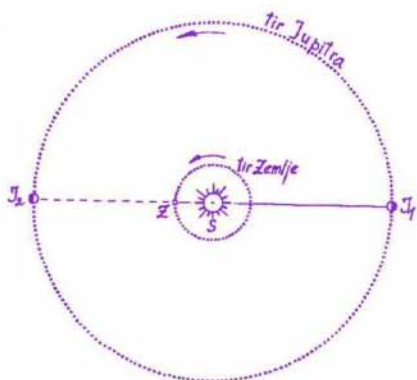
Predlagam, da izkoristite jutro, noč ali pa večer in opazujete največji planet našega Osončja. Stari Grki so mu rekli Stilbon – Sveteč, tudi Zevs, Rimljani pa Jupiter. Ker je bila latinščina dolga stoletja uradni evropski jezik, se je prav to ime preneslo v vse jezike in se ohranilo do danes.

Preden začnemo z opazovanjem Jupitra, si oglejmo dve značilni legi Jupitra glede na Sonce, gledano z Zemlje. Jupiter kroži okrog Sonca po tiru, ki leži zunaj Zemljinega. Takemu planetu rečemo *zunanji planet*.

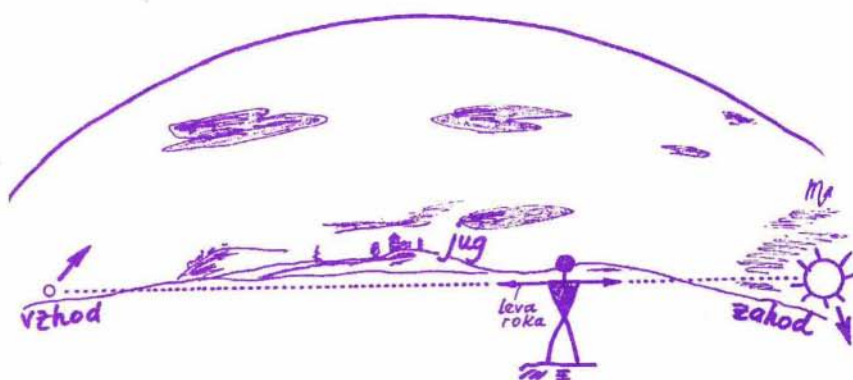
Ko je Zemlja v legi Z, Jupiter lahko zasede na svojem tiru različne lege. Če leži v legi J_1 , je za Soncem, oziroma Sonce je med Zemljo in Jupitrom. Pravimo, da je Jupiter v *konjunkciji* (navideznem stiku) s Soncem. Jupiter vzhaja istočasno s Soncem in je na nebu podnevi, zato je neviden.

Če je Jupiter levo od Sonca, zahaja za Soncem in je viden zvečer, če pa je desno od Sonca, vzhaja pred Soncem in je viden zjutraj. Najprimernejšo lego za opazovanje z Zemlje pa zavzame Jupiter (oz. zunanji planet), ko je v legi J_2 . Takrat nam kaže vso osvetleno ploskvico in je hkrati še najbližje Zemlji. Ta njegova lega se imenuje *opozicija* s Soncem. Planet je viden vso noč. Vzide, ko Sonce zaide.

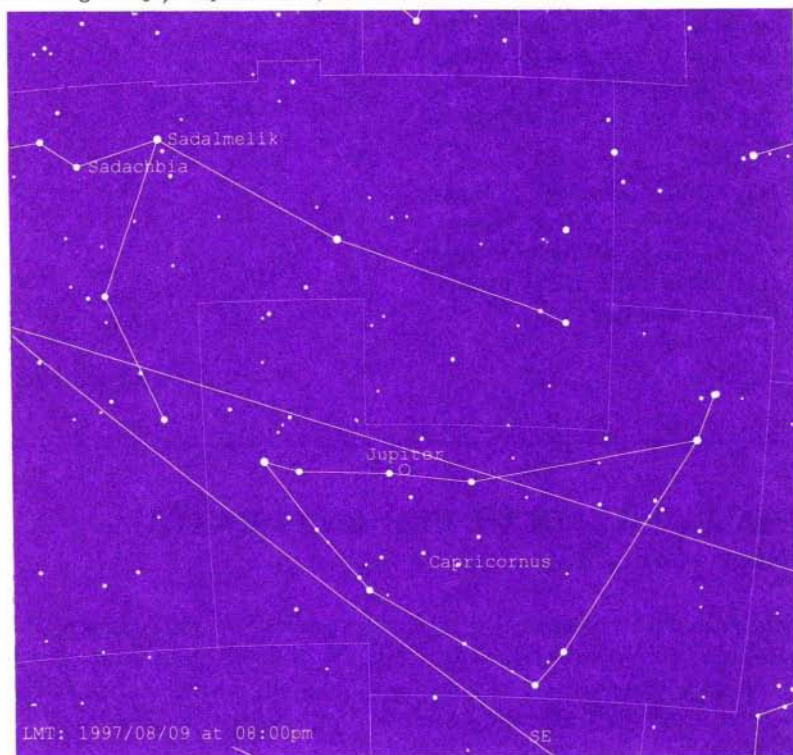
Jupiter najprej opazujemo s prostim očesom. V opoziciji s Soncem ga iščemo v ozvezdju Kozorog. Hitro ga izsledimo, saj je zelo svetlo nebesno telo. Opazujemo ga približno vsak deseti dan. Opazili bomo premik planeta glede na oddaljene zvezde. Tako odkrijemo Jupitrovo navidezno gibanje.



Slika 1. Posebni legi Jupitra glede na Sonce, gledano z Zemlje. Z – Zemlja, S – Sonce, J_1 – konjunkcija s Soncem (planet je neviden), J_2 – opozicija s Soncem (planet je viden vso noč).



Slika 2. Takole z Zemlje opazujemo (doživljamo) Jupiter ob opoziciji s Soncem (geocentrično gledanje). Jupiter vzide, ko Sonce zaide.



Slika 3. Jupiter bo ob opoziciji (9. 8. 1997) viden v ozvezdju Kozorog – računalniška slika.

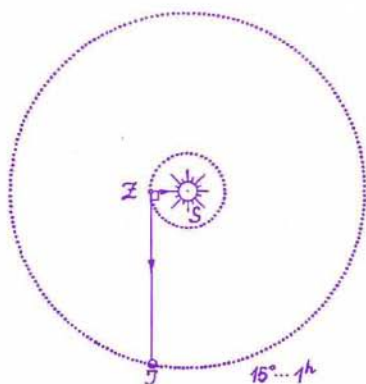
Nato ga opazujemo še z daljnogledom. Že z daljnogledom manjše povečave ob Jupiteru zasledimo štiri drobne svetle pike – njegove največje lune. Če pa Jupiter pogledamo z zmogljivejšim daljnogledom, vidimo še podrobnosti v Jupitrovi atmosferi.

Če razpolagamo z računalniškim programom, lahko razna posnemanja Jupitra gledamo kar na zaslonu računalnika. V učbenikih in enciklopedijah preberemo še kakšne zanimivosti o Jupiteru, o najnovejših raziskavah pa na Internetu.

Namen našega prispevka je, da vas spodbudimo, da greste ven in v objemu narave občudujete in opazujete ta resnično lepi planet.

Nalogi

1. Z odročenima rokama prikažite, kako z Zemlje opazujemo Jupiter ob konjunkciji s Soncem (geocentrično gledanje). Jupiter vzhaja in zahaja s Soncem.
2. Naj bo Zemlja v legi Z, Jupiter pa v legi J. Ali je Jupiter viden? Če je, ali je viden zjutraj ali zvečer? Kdaj vzhaja oziroma zahaja?



Marijan Prosén

MIHA IN RAZLIKA DVEH KVADRATOV – Rešitev s str. 296

Sklepanje se zdi na prvi pogled logično. Vendar je v njem napaka. Če je v razcepu $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ razlika števil $a - b$ enaka 1, ne moremo sklepati, da je število $a^2 - b^2$ sestavljeno. Nekaj primerov, ko je praštevilo: $2^2 - 1^2 = 3$, $3^2 - 2^2 = 5$, $4^2 - 3^2 = 7$, ..., (medtem ko $5^2 - 4^2 = 9$ ni praštevilo).

Marija Vencelj

UČITELJI RIŠEJO – Rešitev s str. 276

Morda so se vam zdele objavljene naloge prelahke, vendar pa morate pri oceni njihove težavnosti upoštevati, da so imeli slušatelji za reševanje nalog na voljo le dobri dve šolski uri, poleg sedmih nalog iz loga pa so morali rešiti še podobno število nalog o bazah podatkov.

1. Zaporedje ukazov

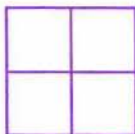
CS

REPEAT 4 [

FD 100 LT 90 FD 100 LT 90 FD 100 LT 90 PU FD 100 PD

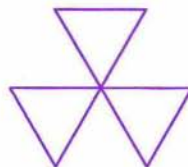
]

nariše



Celotni lik meri v višino in v širino po 200 enot, vsaka črta pa je narisana natanko enkrat. Začetni in končni položaj želve je na sredini lika.

2. Pravilna odgovora sta (b) in (c). Zaporedji (a) in (d) narišeta nekoliko zasukan lik:



3. Križec s kraki dolžine 100 enot narišemo takole:

TO križec

REPEAT 4 [FD 100 PU BK 100 PD RT 90]

END

Dvigovanje in spuščanje peresa pri vračanju želve v središče lahko tudi izpustimo.

4. Najprej zapišimo pomožni ukaz, s katerim narišemo enakostranični trikotnik s stranicami dolžine 150 enot.

TO trikotnik

;Nariše enakostranični trikotnik v levo naprej glede na

;trenutno smer.

REPEAT 3 [FD 150 LT 120]

END

Risbo cveta dobimo, če iz vseh štirih oglišč kvadrata pravilno usmerjeni pokličemo ukaz **trikotnik**. Ne smemo tudi pozabiti, da mora biti središče cveta na sredini zaslona.

T0 cvet

CS ;Počistimo zaslon in se postavimo na njegovo sredino.

PU

SETPOS [-75 -75] ;Pomik v levi spodnji vogal kvadrata.

PD

REPEAT 4 [

trikotnik

FD 150 RT 90

]

END

Omenimo še, da se vsaka stranica kvadrata nariše dvakrat: najprej pri risanju trikotnika, nato pa še pri premiku v naslednji vogal kvadrata.

5. Smreko začnemo risati na dnu debla. Sestavljena je iz d delov, vsak meri 30 enot. Tudi veje so dolge 30 enot.

T0 smreka :d

REPEAT :d [

FD 30 ;del debla

RT 135 FD 30 BK 30 ;desna veja

LT 270 FD 30 BK 30 ;leva veja

RT 135

]

END

Po koncu risanja se želva nahaja na vrhu debla in je obrnjena v isto smer kot na začetku. Z večkratno uporabo ukaza **smreka** lahko narišemo zelo zanimive like. Poskusite na primer naslednje zaporedje ukazov:

CS SETPENSIZE [5 5] REPEAT 6 [smreka 3 BK 90 RT 60]

6. Ker je stopnišče sestavljeno iz 25 stopnic, vsaka stopnica pa meri 20 enot v širino in 10 enot v višino, bo celotna slika široka 500, visoka pa 250 enot. Ker želimo sliko narisati na sredini zaslona, bomo njen levi spodnji vogal postavili v točko $(-250, -125)$. V rešitvi bomo uporabili pomožni ukaz **stopnica**, s katerim narišemo posamezno stopnico.

```

TO stopnica
  LT 90
  REPEAT 2 [
    FD 10 RT 90 FD 10 RT 90 FD 10
  ]
  RT 90
END

```

Ukaz **stopnica** risanje posamezne stopnice začne in konča na sredi njene osnovnice. Celotno stopnišče pa narišemo takole:

```

TO stopnice
  CS PU SETPOS [ -250 -125 ] PD RT 90
  MAKE "d 0 ;dolžina podpornika stopnice
  REPEAT 25 [
    FD 10 LT 90 FD :d
    stopnica
    BK :d RT 90 FD 10
    MAKE "d :d+10
  ]
END

```

Po koncu risanja je želva v desnem spodnjem vogalu slike in je obrnjena v desno. Če želite sliko narediti bolj zanimivo, lahko gornjo rešitev dopolnite na primer z barvanjem posameznih stopnic z naključnimi barvami.

7. Čeprav je opis naloge nekoliko daljši, pa je rešitev zelo preprosta:

```

TO lomljenka :n :d
  CS ;Risanje začnemo na sredini zaslona.
  REPEAT :n [ ;Narisali bomo :n daljic.
    RT 90 *(-1+RANDOM 3) ;naključni zasuk
    FD :d ;Daljice so dolge :d enot.
  ]
END

```

V rešitvi smo upoštevali, da je zasuk za -90 stopinj v desno enak zasuku za 90 stopinj v levo. Tako za izbiranje nove smeri ne potrebujemo odločitvenega stavka IF, zadošča, da naključno izberemo eno od števil -90 , 0 ali 90 .

Martin Juvan

PANORAMSKE PERMUTACIJE

Zame, ki nisem preveč izkušen planinec, je vsakič najbolj zagoneten panoramski pogled, ko pridem na vrh kakega hriba. Sami vrhovi naokoli. Najprej poiščem Triglav in grem potem s pogledom na desno. Vrh sledi vrhu vse naokrog, dokler na zagledam spet Triglava. Le kje se skriva Razor? Včasih je prav hecno: hodiš po poti pa je na levi Viševnik, potem Triglav, pa Rjavina in na skrajni desni Debela peč. Kasneje pa se vrstni red močno pomeša. Za izkušenega planinca ni to noben problem, za matematika pa je taka zmeda lahko vzpodbuda, da si zastavi nove naloge, ki mu krajšajo čas med hojo.

Če imamo opravka z n knjigami, jih lahko na polico zložimo na $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ načinov. Vsaki razporeditvi rečemo *permutacija*. Vseh permutacij n elementov je torej $n!$. Število vseh permutacij z rastočim n zelo hitro narašča.

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800

Zdaj pa imamo problem. Izberimo si n gorskih vrhov. Privzemimo, da noben vrh ne zakriva nobenega drugega. Najbolje je, da si tretjo razsežnost kar odmislimo in dogajanje prenesemo v ravnino: na primer na zemljevid. Postavimo se nekam na zemljevid in si oglejmo v kakšnem vrstnem redu lahko vidimo vrhove od leve proti desni. Recimo, da je $n = 4$ in vidimo vrhove v zaporedju 1234. Potem lahko začnemo tudi pri vrhu 2 in jih vidimo v zaporedju 2341, pa še v zaporedju 3412 in končno 4123. Vsaki od teh štirih permutacij bomo rekli *panoramska permutacija*. Če se premaknemo v drugo točko zemljevida bomo v splošnem dobili druge

štiri panoramske permutacije. Vedno se postavimo v točko zemljevida, ki ne leži na nobeni premici skozi poljubna dva vrhova.

Vprašanja: Koliko panoramskih permutacij dobimo, če štiri točke postavimo v oglišča kvadrata? Koliko pa jih je, če oblikujejo tri točke enakostranični trikotnik, in postavimo četrto v trikotnikovo središče? Kako postaviti štiri točke v ravnino, da bo število panoramskih permutacij največje? Ista vprašanja lahko zastavimo za $n = 5$ in $n = 6$. Ali obstaja razporeditev n točk v ravnino, da bodo zanjo vse permutacije panoramske? Če je odgovor na zadnje vprašanje "ne", ali je mogoče vsaj oceniti, kako hitro narašča število panoramskih permutacij z rastočim n ?

Tomaž Pisanski

ŠTIRI LAHKE

Šahovska deska.

Koliko kvadratov je na šahovski deski? (Ne prenažite se z odgovorom!)

Datumi.

Datum 8. 8. 1988 lahko krajše zapišemo tudi 8. 8. 88, torej s samimi enakimi števki.

Kolikokrat se v enem stoletju pojavi tak datum, da zapišemo dan, mesec in zadnji dve mesti letnice s samimi enakimi števki?

Skrit račun.

Poišči vse možnosti za račune oblike

$$\overline{BC} \times \overline{BC} = \overline{ABC},$$

kjer so A, B, C različne desetiške števke.

Majhen čoln.

Dva moža in dva dečka bi radi prečkali reko. Imajo majhen čoln, ki nosi lahko samo enega moža ali samo dva dečka. S seboj nimajo nobene dovolj dolge vrvi ali kaj podobnega, da bi lahko prazen čoln potegnili čez reko nazaj. Ali lahko pridejo vsi suhi čez reko, če znajo vsi veslati?

Marija Vencelj

O RAČUNOVODSKEM PRAVILU

Dostikrat se znajdemo pred nalogo, kako sešteti podano končno vsoto. Vzemimo najprej naslednji vsoti in ju seštejmo brez dokazovanja:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (1)$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)$$

To sta znani formuli za vsoto prvih n naravnih števil in kvadratov prvih n naravnih števil (glej tudi sestavek Vsota potenc naravnih števil v 1. številki Preseka).

Vzemimo kak težji primer. Kolikšna je na primer vrednost vsote

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} ? \quad (3)$$

Na prvi pogled je najbrž ne znamo preprosto ugnati. Včasih si pri podobnih nalogah pomagamo s primerno *interpretacijo* členov v dani vsoti. Poskusimo to storiti z vsoto (3).

Binomski simbol $\binom{n}{k}$ je število k -elementnih podmnožic množice z n elementi. V vsoti (3) nastopa ob binomskem simbolu $\binom{n}{k}$ število k . Kakšen pomen pa ima tu k ? In produkt $k\binom{n}{k}$? Premislimo. Gre za neki odnos med elementi in podmnožicami. Ker je vseh k -elementnih podmnožic $\binom{n}{k}$, nam produkt $k\binom{n}{k}$ pove, kolikokrat je resnična izjava '*element a pripada množici X* ', ko preteče a osnovno množico z močjo n , X pa vse podmnožice z močjo k .

Vidimo torej, da gre tu za odnos '*pripada*' ($\in$). Preden seštejemo vsoto (3), pa razmislek posplošimo.

Računovodsko pravilo. Naj bosta A, B končni množici in $R \subseteq A \times B$ poljubna podmnožica kartezičnega produkta $A \times B$. Podmnožici R pravimo tudi *relacija*.

Če je $R(a) = \{b \in B \mid a R b\}$ in $R^{-1}(b) = \{a \in A \mid a R b\}$ in označujejo $|R|$, $|R(a)|$, $|R^{-1}(b)|$ moči množic R , $R(a)$ in $R(b)$, potem je

$$|R| = \sum_{a \in A} |R(a)| = \sum_{b \in B} |R^{-1}(b)|. \quad (4)$$

Kot običajno smo z znakom $\sum_{a \in A} |R(a)|$ označili vsoto števil $|R(a)|$, ko a preteče množico A , in podobno v ostalih primerih.

Zgornjo trditev najlažje ilustriramo ob sliki 1. Zapišimo elemente množice A v skrajni levi stolpec, elemente množice B pa v zgornjo vrstico. Če sta elementa a in b v relaciji R ($a R b$), zapišimo na križišče ustrezne vrstice in stolpca enico, sicer postavimo tja ničlo. Potem so tri števila iz enakosti (4) zaporedoma: skupno število enic, vsota enic, šteta po vrsticah, in vsota enic, šteta po stolpcih ($2 + 1 + 1 + 2 = 2 + 3 + 1 = 6$). Ta tri števila so enaka, zato enakost (4) velja.

	b_1	b_2	b_3	b_4	Σ
a_1	0	0	1	1	2
a_2	1	1	0	1	3
a_3	1	0	0	0	1
Σ	2	1	1	2	6

Slika 1. $R(a_1) = \{b_3, b_4\}$, $R(a_2) = \{b_1, b_2, b_4\}$, $R(a_3) = \{b_1\}$.

Vrnimo se sedaj k uvodnemu problemu. Definirajmo množici A in B ter relacijo R takole:

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \quad B = \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\} \quad a R b \iff a \in b.$$

Za tako definirane A, B in R bomo uporabili računovodsko pravilo.

Vzemimo $a \in A$ in izračunajmo $|R(a)|$! V množici $R(a)$ so tiste množice iz B , ki vsebujejo element a . Koliko jih je? Ker so vse oblike $X \cup \{a\}$, kjer je $X \subseteq A \setminus \{a\}$ (zakaj?), jih je toliko kot podmnožic množice $A \setminus \{a\}$, teh pa je 2^{n-1} . Nato še za $b \in B$ izračunajmo $|R^{-1}(b)|$. Množica b premore $|b|$ elementov, zato je $|R^{-1}(b)| = |b|$. Iz računovodskega pravila (4) sledi:

$$|R| = \sum_{a \in A} 2^{n-1} = \sum_{b \in B} |b|.$$

Levo vsoto sestavlja n členov enakih 2^{n-1} , v desni združimo člene glede na moč množice b in dobimo:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Vsoto (3) smo torej sešteli.

Osnovna ideja računovodskega pravila je, da preštejemo moč relacije R na dva načina. S primerno izbiro množic A, B in R lahko dobimo zanimive enakosti. Poiščimo jih še nekaj.

• Naj bo $A = B = \{1, 2, \dots, n\}$ in $a R b \iff a \leq b$. Potem je med 1 in n takih števil, ki so manjša ali enaka a , ravno a ; števil večjih od b , pa je $n - b + 1$. To vstavimo v (4) in dobimo

$$\sum_{a=1}^n a = \sum_{b=1}^n (n - b + 1).$$

Ker tečeta a in b v obeh vsotah po istih številih, lahko v drugi vsoti namesto b pišemo a , ga prenesemo na levo in izračunamo novo desno vsoto:

$$2 \sum_{a=1}^n a = \sum_{a=1}^n (n + 1) = n(n + 1). \quad (5)$$

Če enačbo (5) še delimo z 2, dobimo vsoto (1).

• Naj bo tokrat

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \quad B = A \times A \quad a R (b_1, b_2) \iff a \leq b_1 \text{ in } a \leq b_2.$$

Elementi množice B so v tem primeru pari števil. Parov (b_1, b_2) , pri katerih sta obe komponenti večji ali enaki a , je $(n - a + 1)^2$ (zakaj?). Če pa je dan par (b_1, b_2) , taka števila a , da velja $a \leq b_1$ in $a \leq b_2$, kar naštejmo: to so $1, 2, \dots, b_1$, če je $b_1 \leq b_2$, in $1, 2, \dots, b_2$, če je $b_2 \leq b_1$. V splošnem jih je torej $\min(b_1, b_2)$, kjer $\min(b_1, b_2)$ označuje manjše od števil b_1 in b_2 . Sedaj dobimo iz (4):

$$\sum_{a=1}^n (n - a + 1)^2 = \sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \min(b_1, b_2). \quad (6)$$

Leva vsota v (6) je pravzaprav vsota kvadratov prvih n naravnih števil, torej leva stran enakosti (2). Poglejmo še desno vsoto. Razstavimo jo takole:

$$\sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \min(b_1, b_2) = \sum_{b_1 < b_2} b_1 + \sum_{b_2 < b_1} b_2 + \sum_{b_1=b_2} b_1. \quad (7)$$

V (7) sta na desni strani prvi dve vsoti enaki, zato izračunajmo le eno:

$$\sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=b_1+1}^n b_1 = \sum_{b_1=1}^n b_1(n - b_1) = n \sum_{b_1=1}^n b_1 - \sum_{b_1=1}^n b_1^2. \quad (8)$$

V (8) seštevamo le še prvih n naravnih števil in kvadrate prvih n naravnih števil, zato iz (6), (7) in (8) sledi

$$3 \sum_{b_1=1}^n b_1^2 = (2n+1) \sum_{b_1=1}^n b_1. \quad (9)$$

Iz (9) in (1) pa z deljenjem s 3 sledi enakost (2).

• Za naravno število n označimo z $D(n)$ množico vseh deliteljev števila n . Definirajmo:

$$A = D(n) \quad B = \{1, 2, \dots, n\} \quad a R b \iff a \mid b.$$

Poglejmo, kaj dobimo v tem primeru. Naj bo a delitelj števila n . Vsa z a deljiva števila, ki ležijo med 1 in n , so:

$$a, 2a, 3a, \dots, \frac{n}{a}a. \quad (10)$$

V (10) je natančno $\frac{n}{a}$ števil. Naj bo sedaj b število iz množice B . Koliko je deliteljev števila n , ki delijo število b ? Delitelji števila n , ki delijo tudi število b , so *skupni delitelji* obeh števil. Vse skupne delitelje števil b in n bomo dobili, če bomo opazovali delitelje največjega skupnega delitelja obeh števil, torej množico $D(d(b, n))$. Tu $d(b, n)$ označuje največji skupni delitelj števil b in n . Uvedimo še dve oznaki: če je n naravno število, naj bo $\tau(n)$ število njegovih deliteljev, $\sigma(n)$ pa vsota vseh deliteljev števila n . Primer:

$$\tau(6) = |\{1, 2, 3, 6\}| = 4, \quad \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Sedaj lahko odgovorimo na gornje vprašanje. Deliteljev števila n , ki delijo tudi število b , je $\tau(d(b, n))$. Uporabimo (4):

$$\sum_{a|n} \frac{n}{a} = \sum_{b=1}^n \tau(d(b, n)). \quad (11)$$

Ker pa je

$$\sum_{a|n} \frac{n}{a} = \sum_{a|n} a \quad (12)$$

(delitelji so v (12) samo naštet v obratnem vrstnem redu), dobimo iz (11) in (12)

$$\sigma(n) = \sum_{b=1}^n \tau(d(b, n)).$$

Preskusimo enačbo za $n = 6$:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(2) + \tau(1) + \tau(6) = 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 4 = 12 = \sigma(6).$$

- Vzemimo sedaj

$$A = \{1, 2, \dots, n\} \quad B = A \times A \quad a R (b_1, b_2) \iff a = b_1 b_2.$$

Naj bo $a \in A$. Koliko takih parov (b_1, b_2) obstaja, da je $a = b_1 b_2$? Opazimo, da je par (b_1, b_2) določen že z izbiro delitelja b_1 , saj je $b_2 = \frac{a}{b_1}$. Vseh parov je torej toliko, kot je deliteljev števila a , teh pa je $\tau(a)$. Poglejmo še obratno. Za vsak par $(b_1, b_2) \in B$ obstaja le eno tako število a , da je $a = b_1 b_2$, to je $b_1 b_2$. Toda produkt $b_1 b_2$ mora ležati v A , če naj bo $b_1 b_2 R (b_1, b_2)$. Zato je

$$|R^{-1}((b_1, b_2))| = \begin{cases} 1, & \text{če je } b_1 b_2 \leq n \\ 0, & \text{če je } b_1 b_2 > n \end{cases}.$$

Vstavimo zadnja dva rezultata v (4). Dobimo:

$$\sum_{a=1}^n \tau(a) = \sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \begin{cases} 1, & \text{če je } b_1 b_2 \leq n \\ 0, & \text{če je } b_1 b_2 > n \end{cases}. \quad (13)$$

Če v (13) fiksiramo b_1 , potem zadoščajo neenačbi $b_2 \leq \frac{n}{b_1}$ naslednja števila iz množice A :

$$1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor, \quad (14)$$

kjer smo z $\lfloor x \rfloor$ označili največje celo število, ki je manjše ali enako številu x . Iz (14) sledi

$$\sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^n \begin{cases} 1, & \text{če je } b_2 \leq \frac{n}{b_1} \\ 0, & \text{če je } b_2 > \frac{n}{b_1} \end{cases} = \sum_{b_1=1}^n \sum_{b_2=1}^{\lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor} 1 = \sum_{b_1=1}^n \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor. \quad (15)$$

Iz (13) in (15) dobimo

$$\sum_{a=1}^n \tau(a) = \sum_{b_1=1}^n \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor. \quad (16)$$

To pot vsote nismo znali sešteti, smo jo pa preoblikovali. Navedimo še računski primer, zopet za $n = 6$. Leva stran v (16) postane:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \tau(4) + \tau(5) + \tau(6) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 = 14,$$

desna stran pa

$$\left\lfloor \frac{6}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor = 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14.$$

Ker je za velike n računanje izraza $\tau(n)$ zamudno, je vsoto (16) lažje računati po desni strani.

Ivan Lisac

BUHTELJNI V LABIRINTU – Rešitev s str. 278

Začnimo od zadaj. Na CILJ lahko pridemo le s polja 13, po poti označeni z DA. Na polju 13 je vprašanje: ALI MORAŠ ODGOVOR NA TO VPRAŠANJE ZANIKATI?. Vprašanje se seveda nanaša na pravilo 4. Kot ste verjetno že sami ugotovili, ni mogoče v nobenem primeru zapustiti polja 13 v smeri DA, če za potezo izberete svinčnik, ki kaže na to polje. Ko pravilo 4 ni aktivno, je odgovor NE in morate naprej po poti NE. Ko je pravilo 4 vključeno, je odgovor na zastavljeno vprašanje DA, zaradi pravila 4 pa morate naprej tudi v tem primeru v smeri NE.

Ali je sploh mogoče priti na CILJ? Uporabiti moramo polje 10, ki drugi svinčnik pošlje v smeri DA. Priti moramo torej v položaj, ko je en svinčnik na polju 13, drugi na polju 10 in za potezo izberemo tistega na polju 10. Pri tem ne sme biti aktivno pravilo 4. Na kratko bomo to označili s parom števil: (13,10).

*(Pri vsakem paru označuje številka v mastnem tisku svinčnik, ki ga moramo izbrati za naslednjo potezo. Ko bo aktivno pravilo 4, bomo par označili z *.)*

Do polja 13 pridemo preko polja 11 v smeri NE. To je izvedljivo le, če je aktivno pravilo 4. Na poti k cilju moramo torej najmanj enkrat vključiti pravilo 4 in ga še pred zadnjo potezo izključiti.

Položaj (8,9)* je edini, iz katerega lahko pridemo v bližino cilja (s polja 11 na polje 12) in nato pravočasno izključimo pravilo 4.

Do položaja (8,9)* pelje več poti. Ali lahko najdeš najkrajšo?

Ena od možnih rešitev:

(1,3), (1,9), (1,11), (2,11), (7,11), (8,11), (8,7), (4,7), (9,7)*, (8,9)*, (8,11)*, (8,12)*, (4,12)*, (2,12), (7,12), (7,13), (10,13), (1,CILJ)

Iztok Arčon

KRIŽANKA "PRIZORIŠČA MATEMATIČNIH IN FIZIK.

AVTOR MARKO BOKALIČ	SREDIŠČE AVSTRJSKE KOROŠKE	VEJA MATE- MATIKE	SLIKANJE NOTRANJIH ORGANOV	RIMSKA BOGINJA JEZE	GOZDNO GOSPO- DARSTVO	MESTO SV OD RIMA	DODATEK JEDEM NA ŽARU	NAJVEČJI ITALIJANSKI PESNIK	MA-FI OLIMPIADE	RUSKI SKLADAT. (SERGEJ)	OLIVER TOBIAS
MA 1993									FRANC. IGRALEC (MAURICE)		
FIZIKALNA KOLIČNA, ENACENA Z DELOM									GL. MESTO GRČIJE		
									ŽARA		
IGRALKA TURNER					SKOP- LIJENEC						ČRNEJ AVSTRJ DOMAC
PRITOK DONAVE IZ ROMUNIJE				TIR NEBESNEGA TELESA	NAREČNI IZRAZ ZA STRAŠILO						
PRISTA- NIŠČE V SZ SPANJI					SLOVENSKA SOPRA- NISTKA						
IZRAEL. PREDSED. WEIZMANN					DEKLICA, KI NIMA BRATA ALI SESTRE	NEMŠKI VELETOK	AMERIŠKI MALI MEDVED	ČASOPISNI OGLAS AM. ZVEZNA DRŽAVA			
FI 1995									PREBIVALKE BRITANSKE SOSEDE		
	GARJE	MA 1995	NAJVIŠJI VZOR SAMOSTAN PRI POD- ČETRTRKU						ODTENEK, TANČINA		
DELEC SEKUNDE									OGULIN		
									DUHOVNIŠKI PRIPRAVNIK		
KRAJ V NOTRA- NJOSTI PAGA						SL. NOGOM. (ZORAN)	JOKASTIN SIN IN MOZ				
BOGATAŠ ONASSIS				TURŠKO GOSTIŠČE						BRESKVI PODOBN SADEŽ	
				GL. MESTO ŠVICE						GEPAKD	
MA 1996							KOLIČNA V VATIH				UK OBL ML MI
							VRTNA HISICA				
LEDENE IGLICE NA DREVJU					DVOJNOST V FILOZOFIJI						
					NATRIJ						
VRSTA STREŠNE KRITINE								NAŠA ZAHODNA SOSEDA			
SLAVKO OSTERC			NAPRAVA NAD ŠTE- DILNIKOM					RUSKI BIATLONEC (SERGEJ)			

ALNIH OLIMPIAD”

ŠE NEIZ- RAČUNAN KOREN ENACBE	NAJMANJŠE NARAVNO STEVILLO	FIATOV MODEL	UDELEŽENA EKIPA SAMO- STOJNE SLOVENIJE	IZUMITELJ METODE ZA RAČUN. NICEI POLINOMOV	POŠKODBA OD VROČINE	PEVKA FALK	GRČIJA	SRBSKI PISATELJ (MOMO)	PEVEC PESTNER	NEKDANJI SMUČARSKI SKAKALEC (BOGDAN)	UKRAJIN. DENARNI ENOTA
			MA 1994								
			MATEM. PREDPIS								
			TUJ DVO- GLASNIK								
VL. IN							MESTO NA JZ FINSKE				
							ŠKOT. OVČAR IZ FILMA				
	NALIVNIK								ČERMAK VLADO		
	PRVI BOLGARSKI KRALJ								NEUMETN. IZDELEK		
			EVA LONGYKA			AM. IGRALEC (ALAN)					
						ŽVAHNO DOGAJANJE					
			GOŠTA REBRICAŠTA TKANINA					HUMORIST- KA PUTRIH			
								MANEKENKA SENČAR			
		VERSKA ALI POLITIČNA LOČINA	MESTO V INDIJI Z GROBNICO TAČOZ MAHAL	ŠERPA						MENIČNI POROK ŽIRANT	REŠEVANJE UGANKE
				AMONIAK. SPOJINA					IVAN URBAS		
				ENOGLASNI CERKV. SPEV					VELETOK V PAKISTANU		
	ŽUŽELKA, KI NABIRA MED	NEMŠKI SKLADAT. (WERNER)			FI 1994						
					VOZNIK LETALA						
		VRELA VODA				NEKD. JUG. ARMADNI GENERAL (KOSTA)	KORDILJERE				
		VOJAŠKI KRUH					AMERCU				
								KRAJ PRI DOMŽALAH			
								FI 1996			
JAV			TRDNJAVA V TEKSASU						STOJAN AUER		
ČILO ISLI- ANK			OKRASNI PTIC						KATRAN		
		SAD					PASTIRSKA KOČA				
		JOHN OSBORNE					URBAN FRANC				
				VELIKI ARKTICNI SESALEC							
				LETA 1992 SE SLOVENSKI DIJAKI SE NISO UDELEŽILI OLIMPIAD		GLASNO IZVAJANJE V GLASBI					

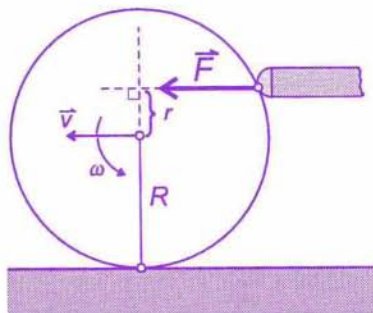
BILJARD

Ste se že kdaj vprašali, v kakšni višini moramo s konico palice suniti kroglo za biljard, da se bo lepo zakotalila po mizi? Po občutku – malo nad sredino krogle, kajne? Pa poskusimo natančno izračunati, kako visoko!

Krogla se kotali, kadar je njena hitrost v enaka produktu njenega polmera in kotne hitrosti vrtenja okrog težišča, torej $v = R \cdot \omega$. Kadar se krogla za svojo hitrost vrti prepočasi, se malce “drsa” po podlagi, če prehitro, pa “koplje” kot kolesa avtomobila pri grobem speljevanju. Da bo med hitrostjo in kotno hitrostjo veljala napisana zveza, moramo krogli ob sunku s palico podeliti gibalno in vrtilno količino v pravnem razmerju.

Naj v začetku krogla polmera R miruje na biljardni mizi. Konico palice natremo s kredo, da ne drsi po krogli, in v vodoravni smeri sunemo kroglo v višini r nad njenim težiščem.

Krogla ima zdaj gibalno količino, ki je kar enaka prejetemu sunku sile $G = F \cdot \Delta t$, obenem pa tudi vrtilno količino, ki je tolikšna kot sunek navora palice glede na vodoravno os skozi težišče krogle $\Gamma = M \cdot \Delta t = r \cdot F \cdot \Delta t$.



Delimo drugo enačbo s prvo, vstavimo za gibalno količino $G = m \cdot v$ in za vrtilno količino $\Gamma = J \cdot \omega = \frac{2}{5}mR^2 \cdot \omega$ ter upoštevajmo, da se krogla po trku kotali ($\omega = v/R$):

$$r = \frac{\Gamma}{G} = \frac{J \cdot \omega}{m \cdot v} = \frac{\frac{2}{5}mR^2 \cdot \omega}{m \cdot v} = \frac{\frac{2}{5}R^2 \cdot \frac{v}{R}}{v} = \frac{2}{5}R.$$

S palico moramo torej suniti v kroglo na sedmih desetinah njene višine $2R$. Prenizek udarec povzroči, da se krogla podrsa ali celo odskoči od mize, pri previsokem zadetku pa kroglo s palico “povaljamo” po mizi. Spretni igralci biljarda v posebnih primerih v igri tudi namenoma uporabijo takšne nečiste udarce.

Tudi rob biljardne mize igra podobno vlogo kot palica. Krogla, ki se prikotali do roba, se mora tam odbiti in kotaliti tudi nazaj grede. Tako so tudi robovi mize približno sedem desetih premera krogle nad igralno površino. Če bi jih postavili više, bi krogle ob odboju zdrsavale podnje, se zatikale in izgubljale kinetično energijo. Prenizek rob pa bi povzročil, da bi krogle skakale z mize, in biljard bi postal nevaren šport.

Matjaž Vencelj

NAŠ ASTRONOM HERMAN MIKUŽ ODKRIL DVA ASTEROIDA

Zelo sem vesel, da je Slovincu enkrat uspelo odkriti nekaj novega v vesolju in se vpisati med odkritelje. Ali gre za plod dolgoletnih opazovanj ali se je to zgodilo naključno? Kaj bi lahko povedal o svojem odkritju?

Asteroida sta bila najdena kot stranski produkt fotometrije šibkih kometov, s čimer se ukvarjam že nekaj let. Pri opazovanju kometa 119P/Parker-Hartley dne 30. januarja 1997 (komet je imel sij okoli 17m) sem pri natančnejšem pregledovanju štirih zaporednih posnetkov opazil šibko "zvezdico", ki se je počasi premikala med zvezdami. Opazovanja sem ponovil 1. februarja 1997 in v bližini omenjenega asteroida našel še enega.

Kako bo ime novima asteroidoma in kakšni so podatki o njunih tirih, če so že znani?

Vsekakor je še prezgodaj, da bi razmišljal o imenih. Poimenovanje bi bilo možno le, če bi uspel najti asteroida tudi ob naslednjih dveh opozicijah. Glede na to, da sta bila opazovana le v kratkem časovnem intervalu 10 dni, močno dvomim, da mi ju bo uspelo naslednje leto ponovno najti. Dodatna težava je tudi v tem, da gre za zelo šibka objekta s sijem med 18. in 19. magnitudo, kar pomeni, da sta na meji detekcije z našim 36-cm teleskopom.

Vem, da je tvoja glavna usmeritev raziskovanje kometov. Kako si trenutno zaposlen s kometom Hale-Bopp?

Komet Hale-Bopp me zaposluje že vse od odkritja v juliju 1995. Ta je poleg Hyakutakeja, ki smo ga opazovali lansko leto, drugi zares svetel komet po več kot dvajsetih letih. Konec marca mu je narastel sij na okoli -1m, kar ga uvršča med najsvetlejše komete tega stoletja. Glede opazovanj nam gre letos zelo na roke lepo vreme, ki s krajšimi prekinitvami traja že vse od januarja.

In kakšne načrte imaš za prihodnost?

Tudi v prihodnje bodo kometi ostali v središču mojega zanimanja. Še naprej se nameravam ukvarjati z opazovanji kometov. Ta usmeritev je dala zelo dobre rezultate, naše delo poznajo in cenijo tudi v tujini. Na vsak način pa si bom prizadeval, da bi našel oba asteroida tudi ob naslednjih opozicijah, saj bi ju potem lahko poimenoval.

S Hermanom Mikužem se je preko računalnika pogovarjal Marijan Prosén.

ŠTIRI LAHKE – Rešitve s str. 345

Šahovska deska.

Na šahovski deski so 204 kvadrati osmih velikosti: 64 kvadratov po eno polje, 49 kvadratov po 2×2 polji, itd.

Datumi.

Vseh datumov, ki jih lahko na predlagani način zapišemo s samimi enakimi števki, je trinajst. Poleg očitnih devetih: 1. 1. 11, 2. 2. 22, ..., 9. 9. 99, še naslednji štirje:

11. 1. 11

1. 11. 11

11. 11. 11

22. 2. 22

Skrit račun.

Edini račun predlagane oblike je $25 \times 25 = 625$. Rezultat lahko dobimo s poskušanjem, več je seveda vreden premislek:

Če označimo $\overline{BC}$ z x , je x dvomestno število, manjše od 32, ker je njegov kvadrat trimestno število.

Nadalje lahko zapišemo

$$x^2 = 100A + x,$$

oziroma

$$x(x - 1) = 25 \cdot 4A.$$

Ker sta x in $x - 1$ sosednji in zato tuji števili, je natanko eno od njiju deljivo s 25 in zaradi zgornje ocene enako 25.

Preskus pokaže, da možnost $x - 1 = 25$, oziroma $x = 26$, odpade. Druga izbira $x = 25$ pa je dobra.

Majhen čoln.

Če označimo z D dečka in z M moža ter pomeni $\rightarrow$ vožnjo čez reko v smeri potovanja, $\leftarrow$ pa vožnjo nazaj, poteka prevoz v naslednjem zaporedju:

$$\xrightarrow{2D}, \xleftarrow{D}, \xrightarrow{M}, \xleftarrow{D}, \xrightarrow{2D}, \xleftarrow{D}, \xrightarrow{M}, \xleftarrow{D}, \xrightarrow{2D}.$$

Marija Vencelj

O CATALANOVI DOMNEVI

Naravni števili 8 in 9 sta zaporedni, $8 + 1 = 9$; prvo $8 = 2^3$ je kub naravnega števila 2, drugo $9 = 3^2$ kvadrat naravnega števila 3. Kvadratov $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ in prav tako kubov $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \dots$ je neskončno. Toda 8 in 9 imata neko posebnost.

Če opazujemo naravna števila do 1000, vidimo, da razen primera 8, 9 za kubom nikoli ne pride kvadrat. Ali se to zgodi pri številih nad 1000? Kub naravnega števila y je y^3 , naslednje naravno število je $y^3 + 1$. Če naj bo kvadrat, mora veljati

$$y^3 + 1 = x^2 \quad (1)$$

pri naravnih x, y . Enačba (1) pa razen $x = 3, y = 2$ ne premore nobene druge naravne rešitve. To je leta 1738 dognal L. Euler (1707–1783). Naravni števili 8, 9 sta tako edini, ko kubu sledi kvadrat. V tem je njuna posebnost.

Ali lahko za kvadratom sledi kub? Tedaj mora biti

$$y^2 + 1 = x^3. \quad (2)$$

Da se ta enačba v naravnih številih ne da izpolniti, je prav tako ugotovil Euler. Kvadratu torej nikoli ne sledi kub.

Dokaz Eulerjevih ugotovitev ni preprost. Povzemimo:

A. Od dveh zaporednih naravnih števil je manjše kub in večje kvadrat le v primeru 8, 9; nikdar pa ni manjše kvadrat in večje kub.

Potenca a^b je prava, če sta a, b od ena večji naravni števil. Pravih potenc je neskončno, mednje spadajo vsi kvadrati in kubi razen 1. Poraja se vprašanje: Ali sta poleg 8, 9 še kateri pravi potenci zaporedni naravni števili?

Belgijski matematik Eugène Catalan (1814–1894) je bil prepričan, da je odgovor na zastavljeno vprašanje ne. Leta 1844 je ena takrat še redkih matematičnih revij objavila Catalanovo javno pismo, v katerem med drugim beremo:

“Zaporedni naravni števili, različni od 8 in 9, ne moreta biti pravi potenci. Drugače povedano: Enačba

$$x^m - y^n = 1, \quad (3)$$

v kateri so neznanke naravna števila, ima eno samo rešitev.”

Ta trditev se imenuje Catalanova domneva. Ker gre v (3) za pravi potenci x^m , y^n , so vrednosti neznank x , y , m , n večje od 1. (Če je od eksponentov m , n vsaj eden enak 1, ima enačba (3) neskončno rešitev v naravnih številih.) Rešitev, o kateri govori trditev, je $x = n = 3$, $y = m = 2$; pripadata ji pravi potenci 9, 8. Catalan je pripomnil, da trditve ne more popolnoma dokazati in da bodo imeli drugi morda pri tem več sreče. No, do danes se to še ni zgodilo.

Enačbe (3) so se lotevali največ tako, da so eno ali dve neznanki izbrali in za poenostavljeno enačbo dokazovali Catalanovo domnevo. Izbira $m = 2$, $n = 3$ pripelje npr. do enačbe (1), $m = 3$, $n = 2$ do enačbe (2). Obravnavajmo nekaj takšnih zgledov.

a) Za $m = n \geq 2$ preide enačba (3) v

$$x^m - y^m = 1. \quad (4)$$

Pri $x \leq y$ je $x^m - y^m \leq 0$. Če torej obstaja rešitev za (4), mora biti $x > y$. Ker naj bosta x , y naravni števili, pri naravnem številu c velja $x = y + c$. Po binomskem izreku je potem

$$x^m - y^m = (y + c)^m - y^m = my^{m-1}c + \dots + myc^{m-1} + c^m.$$

Vsota na koncu vsebuje m seštevanec, ki so naravna števila. Ker je $m \geq 2$, je njena vrednost vsaj 3. To pomeni, da se enačba (4) pri $m \geq 2$ v naravnih številih ne da izpolniti.

Sedaj takoj vidimo, da za enačbo

$$x^{2^j} - y^{2^k} = 1, \quad (5)$$

kjer sta j , k naravni števili, ni naravnih rešitev. Res! Če je $j = k$, imamo opraviti z enačbo (4); zanjo pa že vemo, da ne premore naravnih rešitev. Pri $j > k$ lahko (5) zapišemo

$$\left(x^{2^{j-k}}\right)^{2^k} - y^{2^k} = 1$$

in naravni števili $x^{2^{j-k}}$, y , bi dali rešitev za (4) pri $m = 2^k$. Ne gre. Podobno odpravimo še $j < k$. Zato:

B. Pravi potenci x^m , y^n nikoli nista zaporedni naravni števili. Enako velja za pravi potenci x^{2^j} , y^{2^k} .

b) Za $x = 3$, $y = 2$ dobi enačba (3) obliko $3^m - 2^n = 1$ ali

$$3^m - 1 = 2^n. \quad (6)$$

Iščemo rešitev, ko sta m , n naravni števili in $m \geq 2$, $n \geq 2$.

Naj bo najprej $m \geq 3$. Tak m je ali deljiv z lihimi praštevilom ali pa je prava potenca števila 2.

Če je m deljiv z lihimi praštevilom p , je $m = tp$, kjer je t naravno število. Levo stran v (6) razstavimo

$$3^{tp} - 1 = (3^t - 1)(3^{t(p-1)} + 3^{t(p-2)} + \dots + 3^t + 1). \quad (7)$$

V zadnjem oklepaju je p lihimi naravnih števil, njihova vsota v je zato liho število nad 1. Po (7) je v delitelj za $3^m - 1$. Če bi veljalo (6), bi liho število $v > 1$ delilo 2^n . To ne gre. V (6) torej $m = tp$, kjer je p liho praštevilo, ni mogoče.

Naj bo zdaj m prava potenca števila 2, $m = 2^s$, kjer je s naravno število nad 1. Enakost (6) je tedaj

$$3^{2^s} - 1 = 2^n. \quad (8)$$

Z indukcijo lahko preverimo, da je pri $s \geq 2$ leva stran v (8) deljiva s 5. Toda desna stran 2^n v (8) nima nikdar delitelja 5. Zato pri m , ki je prava potenca števila 2, enakost (8) ne more držati.

Ostane še $m = 2$. Takrat se (6) glasi $3^2 - 1 = 2^n$ ali $8 = 2^n$ in $n = 3$. To rešitev že poznamo. Sklep:

C. Pravi potenci 2^n , $n \neq 3$, nikoli ne sledi prava potenca 3^m .

c) Za $m = y$, $n = x$ iz (3) izhaja

$$x^y - y^x = 1. \quad (9)$$

Na desni stoji liho število. Razlika naravnih števil x^y , y^x je liha le, če je x sod in y lih ali pa x lih in y sod. Ta opazka omogoča dokazati, da je $x = 3$, $y = 2$ edina rešitev za (9) v naravnih številih. (Za sodi x je dokaz enostaven, ne tako za lihi x .) Zanimiv dokaz, da ni naravnih števil x , y , $x \neq 3$, $y \neq 2$, ustrežajočih enačbi (9), je našel G. Skandalis leta 1982. Dokaz poteka takole:

Indukcija potrdi, da je

$$2^x > 2x + 2 \quad \text{pri naravnem } x \geq 4.$$

Od tod z indukcijo sledi

$$2^x - x^2 > 1 \quad \text{pri naravnem } x \geq 5. \quad (10)$$

Zaradi $y^x - x^y = -(x^y - y^x)$ je absolutna vrednost

$$|x^y - y^x| \quad (11)$$

neobčutna za zamenjavo x z y . Zato smemo v (11) privzeti, da je $x > y$, saj $x = y$ ne pride v poštev. V nadaljnjem naj bosta x, y naravni števili in $x > y \geq 2$. Pokazati je treba, da je $|x^y - y^x| \neq 1$ za $x \neq 3, y \neq 2$.

Če je $x = 4, y = 3$, je $|4^3 - 3^4| = 17 \neq 1$.

Če je $x \geq 5, y = 2$, je $|x^2 - 2^x| \neq 1$ zaradi (10).

Ostane še možnost $y \geq 3$.

Spomnimo se, da $(1 + \frac{1}{s})^s$ vztrajno raste in je pod $e = 2,718 \dots < 2,8$, ko se s veča proti neskončno po pozitivnih (ne nujno celih) številih. Za pozitivno število r in $\frac{r}{s} = \frac{1}{f}$ velja

$$\left(1 + \frac{r}{s}\right)^s = \left(1 + \frac{1}{f}\right)^{fr} < e^r \quad (12)$$

pri vsakem pozitivnem s in r .

Ker je $x > y \geq 3$, je $z = x - y$ naravno število. Po (12) je $(1 + \frac{z}{y})^y < e^z$ in dobimo

$$\frac{y^x}{x^y} = \frac{y^{z+y}}{(y+z)^y} = \frac{y^z}{\left(1 + \frac{z}{y}\right)^y} > \left(\frac{y}{e}\right)^z > \frac{3}{2,8} = 1 + \frac{1}{14} > 1 + \frac{1}{x^y}. \quad (13)$$

Na koncu upoštevamo, da je $1/(x^y) \leq 1/(4^3) = 1/64 < 1/14$ pri $y \geq 3$ in $x > y$. Po množenju z x^y se iz (13) najde

$$|x^y - y^x| > 1 \quad \text{za vse } x > y \geq 3.$$

Zato velja

D. Če sta x, y naravni števili nad 1 in ni $x = 2, y = 3$ ali $x = 3, y = 2$, naravni števili x^y, y^x nista sosednji.

č) Izbira $n = 2$ v (3) pripelje do enačbe

$$x^m - y^2 = 1. \quad (14)$$

Zanjo je V. A. Lebesgue leta 1850 pokazal, da ne premore naravne rešitve, pri kateri bi bilo $m \geq 2$. Na trši oreh naletimo pri enačbi

$$x^2 - y^n = 1, \quad (15)$$

ki jo daje (3) za $m = 2$. Z naslonitvijo na nekatera prejšnja dognanja je dokazal Chao Ko leta 1964, da je $x = 3$, $y = 2$, $n = 3$ edina rešitev za (15) v naravnih številih večjih od ena. Po teh ugotovitvah trditev A razširjamo na

E. V zaporedju naravnih števil za kvadratom nikoli ne pride prava potenca; pa tudi pravi potenci ne sledi kvadrat razen v primeru 8, 9.

Povrnimo se k enačbi (3). Recimo, da je pri naravnih številih a , b , m , n , ki so vsa nad ena

$$a^m - b^n = 1. \quad (16)$$

Zaradi B števili m , n ne moreta biti enaki in tudi ne potenci števila 2. Za m , n so tako le tri možnosti:

- i) $m = gp$, $n = 2^u$ in g , u naravni števili, p liho praštevilo
- ii) $m = 2^v$, $n = hq$ in h , v naravni števili, q liho praštevilo
- iii) $m = gp$, $n = hq$ in g , h naravni števili, p , q lihi praštevili.

Če velja prva možnost, lahko (16) zapišemo

$$(a^g)^p - (b^{2^{u-1}})^2 = 1$$

in kvadratu $(b^{2^{u-1}})^2$ bi sledila prava potenca $(a^g)^p$. Po E to ne gre in prva možnost odpade.

Pri drugi možnosti (16) preoblikujemo v

$$(a^{2^{v-1}})^2 - (b^h)^q = 1$$

in pravi potenci bi sledil kvadrat. Po E gre to le, ko je $a^{2^{v-1}} = 3$, $b^h = 2$, $q = 3$ in tako $v = 1$, $a = 3$, $h = 1$, $b = 2$, $q = 3$. S tem je tudi druga možnost odpravljena.

Ob tretji možnosti (16) izrazimo

$$(a^g)^p - (b^h)^q = 1$$

in $x = a^g$, $y = b^h$ je naravna rešitev za enačbo

$$x^p - y^q = 1, \quad (17)$$

v kateri sta p , q različni lihi praštevili. (Za $p = q$ preide enačba (17) v enačbo (4); zanjo B potrjuje, da nima naravnih rešitev.)

Velja torej

F. Če sta pravi potenci, ki nista 8, 9, zaporedni naravni števili, ju lahko zapišemo kot potenci z različnima lihima prašteviliškima eksponentoma.

J. W. S. Cassels je okrog leta 1960 odkril, da imajo rešitve enačbe (17) lastnost

G. Če lihi praštevili p , q in naravni števili x , y povezuje enačba $x^p - y^q = 1$, p deli y in q deli x .

Na podlagi ugotovitve G so našli precej lihih prašteviliških parov p , q , ko ni naravnih x , y , ustrezajočih enačbi (17).

Strnimo gornje vrstice:

Znani so mnogi pari naravnih števil m , n , ko enačba (3) nima naravnih rešitev x , y ; prav tako razni pari naravnih števil x , y , ko ni naravnih m , n , da bi veljalo (3). Razen $x = 3$, $m = 2$, $y = 2$, $n = 3$ za enačbo (3) ni bila najdena še nobena druga rešitev v naravnih številih, večjih od ena.

Catalanova domneva bi bila takoj razjasnjena, če bi ugotovili, koliko naravnih rešitev ima enačba (3). Kaj je bilo doseženo v tej smeri?

C. L. Siegel (1896–1981) je leta 1929 dokazal: Če sta naravni števili $m \geq 2$, $n \geq 2$ izbrani, je kvečjemu končno mnogo parov naravnih števil x , y , ki izpolnijo enačbo (3). Tako npr. $x^3 - y^7 = 1$ ali nima naravne rešitve ali pa je takih rešitev le končno mnogo; podobno enačba $x^{11} - y^{17} = 1$ in tako naprej. Število rešitev enačbe (3) bi kljub Siegelovi ugotovitvi moglo biti neskončno. Za m , n je namreč treba upoštevati neskončno parov (mimo onih, za katere se ve, da ni rešitev). Do napredka je prišlo leta 1976, ko je R. Tijdeman dognal

H. Vsako od naravnih števil $m \geq 2$, $n \geq 2$, x , y , ki jih veže pogoj $x^m - y^n = 1$, je manjše od fiksne konstante K .

Ugotovitev H pove, da enačba (3) ne more imeti neskončno naravnih rešitev $m \geq 2$, $n \geq 2$, x , y . Če je poleg $x = n = 3$, $y = m = 2$ še kakšna rešitev, jo je iskati med naravnimi števili pod K . Morebitne rešitve bi se takoj razkrile v seznamu vseh pravih potenc a^b , $a < K$, $b < K$. Tega seznama pa tudi s pomočjo računalnika ni mogoče sestaviti, ker je konstanta K prevelika.

Tako ostaja Catalanova domneva odprta.

Dodatek.

- a) Števila $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ se imenujejo Fermatova. Ker je $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$, F_0 ni prava potenca. Pri $n \geq 1$ je $F_n = (2^{2^{n-1}})^2 + 1$ naslednik kvadrata $(2^{2^{n-1}})^2$ in zato po E ni prava potenca. Sklep: *Fermatovo število nikoli ni prava potenca.*
- b) Ker Catalanova domneva ni dokazana, si lahko zastavimo vprašanje: Ali obstajajo tri zaporedna naravna števila, ki so obenem prave potence? Naj bo a naravno število in a , $a+1$, $a+2$ prave potence. Ker med števili do 10 tega ni, vzamemo $a > 10$. Po F je potem

$$a = x^p, \quad a+1 = y^q, \quad a+2 = z^r \quad (18)$$

in p , q , r so liha praštevila, x , y , z naravna števila. Iz (18) sledi

$$y^q - x^p = 1, \quad z^r - y^q = 1$$

in G pove, da q deli x in z . Zaradi $z^r - x^p = 2$ potem q deli 2. Ne gre, saj je q lih. Zato: *Od treh zaporednih naravnih števil vsaj eno ni prava potenca.*

- c) Z naravnim številom $c \geq 3$ opredelimo splošena Fermatova števila

$$F_{c,n} = c^{c^n} + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ali je med temi števili kakšna prava potenca? Če je c potenca števila 2, je zaradi $n \geq 1$ število $F_{c,n}$ Fermatovo in po dodatku a) ni prava potenca. Če c ni potenca števila 2, velja $c = tq$ pri lihem praštevilu q in naravnem številu t . Potem je

$$c^{c^n} = y^q \quad (19)$$

za $y = (tq)^{t^n q^{n-1}}$ in q deli y . Zaradi $c \geq 3$, $n \geq 1$ je $c^{c^n} > 8$. Če je torej $c^{c^n} + 1$ prava potenca, je po F mogoče pisati $c^{c^n} + 1 = x^p$ pri lihem praštevilu p in naravnem x . Iz (19) potem sledi $x^p - y^q = 1$. Po G praštevilo q deli x ; ker pa q deli tudi y , bi tako q delil 1. Nemogoče. Torej: *Posplošeno Fermatovo število nikoli ni prava potenca.* (Za $F_{c,0} = c + 1$ to ni nujno.)

Jože Grasselli

KJE JE NAPAKA?**Prvi primer:**

Rešujemo enačbo:

$$5 - \frac{x+5}{x-7} = \frac{4x-40}{x-13}$$
$$\frac{4x-40}{x-7} = \frac{4x-40}{x-13}, \quad x-7 = x-13, \quad 7 = 13$$

Ker smo prišli do protislovja, enačba nima rešitve. Vendar se lahko s preizkusom prepričamo, da število 10 reši dano enačbo.

Kje v sklepanju je napaka?

Drugi primer:

V množici realnih števil rešujemo enačbo $x + \frac{1}{x} = 1$. Ker x ne more biti enak nič, lahko enačbo pomnožimo z x in dobimo enačbo $x^2 + 1 = x$, ki je ekvivalentna prejšnji. Ta enačba nima realnih rešitev. Pa seštejmo obe enačbi:

$x^2 + x + \frac{1}{x} + 1 = 1 + x$, oziroma $x^2 + \frac{1}{x} = 0$ ali $x^3 + 1 = 0$. Ta enačba ima v realnem rešitev $x = -1$.

Kaj smo naredili narobe, da smo dobili enačbo, ki ni ekvivalentna prvotni?

Olga Arnuš

OPAZUJEMO PLANET JUPITER –**Rešitev 2. naloge s str. 340**

Da. Jupiter je viden po polnoči, torej tudi zjutraj. Vzhaja opolnoči, šest ur pred Soncem (90° je 6 ur).

Marijan Prosén

GOBELIN

Gobelin je logično razvedrilna uganka, pri kateri je potrebno na osnovi logičnega sklepanja izpolniti prazno mrežo s kvadrati po določenih pravilih. Običajno je rešitev slika, ki nekaj predstavlja. To je lahko predmet, dogajanje, napis, pač odvisno od avtorjeve ideje.

Rešujemo ga tako, da na podlagi števil ob zgornjem in levem robu s svinčnikom barvamo (črnilo) polja v mreži. Števila ob robu vsake vrstice in vsakega stolpca povedo, koliko skupin črnih polj je v vrstici oziroma stolpcu in koliko črnih polj je v vsaki strnjeni skupini (torej brez vmesnih belih). Med sosednjima skupinama črnih polj pa je vsaj eno (lahko tudi več) belo polje. Vrstica oziroma stolpec se lahko začne s črnim ali belim poljem. Števila, ki povedo število črnih polj v skupini, so vedno zapisana v pravem vrstnem redu (od leve proti desni za vrstice in od zgoraj navzdol za stolpce).

Če so na primer pred vrstico števila 2, 3, 2, 4, to pomeni, da sta v prvi skupini z leve strani dve črni polji, potem je vsaj eno belo, nato tri črna polja, pa spet vsaj eno belo, potem spet dve črni in v zadnji skupini v vrstici še štiri črna polja. Pred prvo skupino in za zadnjo so lahko bela polja.

Kako rešujemo?

Začnemo z vrsticami (stolpci), ki imajo kakšno število večje od polovice dolžine vrstice (stolpca). Tedaj lahko v sredini vrstice (stolpca) počrnilo nekaj polj, ki so zagotovo črna (preseki množic). Če je pred vrstico število 9, vrstica pa je dolga 15 polj, lahko srednja tri polja počrnilo (kje leži ostalih šest polj, zaenkrat še ne vemo). Logiko reševanja odkrivamo sproti. Menim, da za bralce Preseka ni potrebno navajati podrobnostih navodil.

Med reševanjem kombiniramo reševanje vrstic in stolpcev ter sproti označujemo (s pikami ali križci) polja, ki so zagotovo bela.

Veliko veselja pri reševanju vam želi avtor!

Slika, ki nastaja, vas ne sme zavesti, da bi polja črnilo po občutku. Počrnite le tisto, do česar ste prišli po premisleku!

Gobelin mora biti enolično rešljiv.

Marko Bokalič

ALENKA TEKMUJE Z BRIGITO BUKOVEC

Na atletskem stadionu je Alenka srečala Brigito Bukovec. Beseda je dala besedo in domenili sta se, da bosta tekmovali v teku na 100 m. Brigita preteče 100 m v 10 sekundah¹, Alenka pa potrebuje še enkrat toliko, torej 20 sekund. Da bi bila tekma zanimivejša, da Brigita Alenki prednost 10 m. Čez koliko sekund in kje bo Brigita prehitela Alenko?

Razdaljo, na kateri sta dekleti v času t , zapišemo s formulo

$$s(t) = v \cdot t + s_0,$$

kjer je v hitrost in s_0 začetna razdalja. Brigitina hitrost je $\frac{100}{10}$ m/s = 10 m/s, Alenkina pa $\frac{100}{20}$ m/s = 5 m/s. Definirajmo razdaljni funkciji za obe dekleti:

$$m_brigita(t) := 10 \cdot t + 0$$

$$m_alenka(t) := 5 \cdot t + 10.$$

Enačba za čas, ko Brigita ujame Alenko, se torej glasi

$$10 \cdot t = 5 \cdot t + 10.$$

Odštejemo $5t$,

$$5 \cdot t = 10$$

ter delimo s 5 in že smo pri rešitvi $t = 2$.

Brigita torej ujame Alenko po 2 sekundah. Toda, razmislimo:

Brigita ne bo nikoli prehitela Alenke: po 1 sekundi bo Brigita tam, kjer je Alenka začela – torej pri 10 m. V tej sekundi pa je Alenka pretekla 5 m in je sedaj pri 15 m. Brigita potrebuje še pol sekunde, da bo prišla do razdalje 15 m. Vendar v tem času Alenka preteče dodatna 2.5 m in je sedaj pri 17.5 m. Brigita potrebuje še četrť sekunde, da pride do tja, in takrat je Alenka že pri 18.75 m. ... Ne glede na to, kako dolgo nadaljujemo, vedno je Alenka vsaj malo pred Brigito.

Rešitev enačbe in “zdrava pamet” nam povesta, da Brigita prehití Alenko. Kaj je narobe z zgornjim razmišljanjem?

Nekaj računstva nam pomaga, da izpolnimo tabelo:

¹ Res je, da je Brigita malce počasnejša. Vendar bomo tako lažje računali.

	čas od zadnjega opazovanja	skupni čas	kje je Brigita	kje je Alenka
1.	0 s	0 s	0 m	10 m
2.	1 s	1 s	10 m	15 m
3.	$\frac{1}{2}$ s	$1 + \frac{1}{2} = 1.5$ s	15 m	17.5 m
4.	$\frac{1}{4}$ s	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.75$ s	17.5 m	18.75 m
5.	$\frac{1}{8}$ s	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1.875$ s	18.75 m	19.375 m
6.	$\frac{1}{16}$ s	1.9375 s	19.375 m	19.6875 m

Ker je nadaljevanje računanja zamudno, si pomagamo z računalnikom. Uporabili bomo program DERIVE.

Poglejmo, kaj se zgodi po 20 opazovanjih:

#9: RAZDOLJAJ(20)

op	kda.j	n_brigita	n_alenka
1	0	0	10
3	1.5	15	17.5
5	1.875	18.75	19.375
7	1.96875	19.6875	19.84375
9	1.9921875	19.921875	19.9609375
11	1.998046875	19.98046875	19.990234375
13	1.99951171875	19.9951171875	19.99755859375
15	1.9998779296875	19.998779296875	19.9993896484375
17	1.999969482421875	19.99969482421875	19.999847412109375
19	1.99999237060546875	19.9999237060546875	19.99996185302734375
21	1.9999980926513671875	19.999980926513671875	19.9999904632568359375

#10:

COMMAND: [Author](#) [Build](#) [Calculus](#) [Declare](#) [Expand](#) [Factor](#) [Help](#) [Jump](#) [solve](#) [Manage](#)
[Options](#) [Plot](#) [Quit](#) [Remove](#) [Simplify](#) [Transfer](#) [Unremove](#) [move](#) [Window](#) [approx](#)
Enter option [Derive](#) [Xn](#)
Simp(#9) C:\DERIVE\1\BRIGITA Free:100% Ins Algebra

Vidimo torej, da ne glede na to, koliko opazovanj naredimo – vedno to počnemo v času krajšem od dveh sekund! Podobno nam tretji in četrti stolpec kažeta, da bo Brigita ujela Alenko pri 20 metrih.

In kaj je torej narobe s prvotnim razmislekom?

Matija in Mojca Lokar

OCENIMO SONČEV PREMER

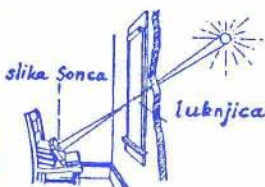
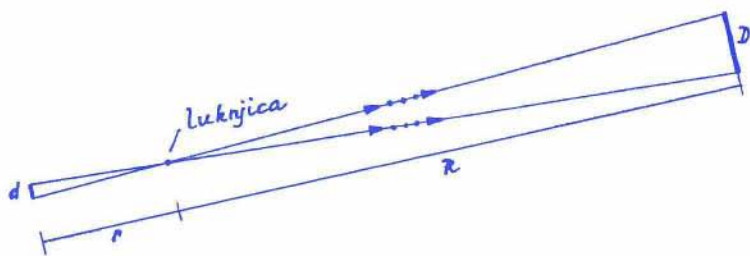
Na našem nebu je Sonce najsvetlejšo vesoljsko telo. Ker nam je v vesoljskih merilih razmeroma blizu (oddaljeno je "le" 150 milijonov kilometrov) in ker je njegovo površje zelo vroče (okoli 6000 K), moramo zelo paziti na oči, kadar ga opazujemo.

SONCA NIKOLI NE OPAZUJEMO S PROSTIM OČESOM, SPLOH PA NE NEPOSREDNO Z DALJNOGLEDOM, ker lahko poškodujemo mrežnico očesa, si poslabšamo vid ali celo oslepimo.

V prispevku Projiciranje Sončevega mrka v 4. številki Preseka ste lahko prebrali, kaj potrebujemo za varno opazovanje Sonca.

Tokrat si oglejmo kako brez nevarnosti za oči na preprost način ocenimo velikost oziroma premer Sonca.

Večjo lepenko na sredini preluknjamo z debelejšo šivanko. V sončnem vremenu jo postavimo na okno. Pramen Sončeve svetlobe skozi luknjico ujamemo na bel papir, ki leži pravokotno na Sončeve žarke. Sliko Sonca na papirju izostrimo s spreminjanjem razdalje med lepenko in papirjem. Da bi čim bolj opazovali sliko Sonca, prostor čim bolj zatemnimo ali vse skupaj pokrijemo z večjim kosom temnejšega blaga.



Takole s preprostim opazovanjem ocenimo velikost Sonca.

RAČUNANJE PRIBLIŽKOV KVADRATNEGA KORENA IZ NARAVNEGA ŠTEVILA

Znanih je več metod za računanje racionalnih približkov iracionalnega števila $\sqrt{2}$. Eno izmed njih lahko opišemo z rekurzivnim zaporedjem

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.5, \\ x_3 &= \frac{3/2+2}{3/2+1} = \frac{7}{5} = 1.4, \\ x_4 &= \frac{7/5+2}{7/5+1} = \frac{17}{12} \approx 1.41667, \\ x_5 &= \frac{17/12+2}{17/12+1} = \frac{41}{29} \approx 1.41379. \end{aligned}$$

Ker je $\sqrt{2} \approx 1.41421$, postavimo domnevo, da zaporedje $\{x_n\}$ konvergira proti $x = \sqrt{2}$. To pomeni, da poljuben odprti interval (a, b) , ki vsebuje število x , vsebuje vse člene zaporedja, razen (morda) končno mnogo. Povedano drugače: Za vsak par realnih števil a in b z lastnostjo $a < x < b$ obstaja tak indeks $N \in \mathbb{N}$, da velja $a < x_n < b$ za vsako naravno število $n \geq N$, tj. členi $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots$ ležijo na intervalu (a, b) .

V tem članku bomo to metodo posplošili na računanje racionalnih približkov kvadratnega korena iz poljubnega naravnega števila, jo utemeljili in s tem potrdili zgoraj omenjeno domnevo.

Naj bo k poljubno naravno število. Očitno je zanimiv le primer, ko k ni kvadrat naravnega števila. Ponovimo najprej, kaj je celi del $[x]$ realnega števila x . To je največje celo število, ki ne presega števila x . Tako je npr. $[5] = 5$, $[\sqrt{2}] = 1$ in $[-\sqrt{2}] = -2$. Ker celemu številu $[x]$ sledi celo število $[x] + 1$, velja neenačba

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad (2)$$

Sedaj definirajmo zaporedje

$$x_1 = [\sqrt{k}], \quad x_{n+1} = \frac{x_n + k}{x_n + 1} \quad \text{za } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Očitno v primeru $k = 2$ dobimo zaporedje (1). Oglejmo si še en primer. Vzemimo $k = 5$ in računajmo:

$$\begin{aligned} x_1 &= [\sqrt{5}] = 2, \\ x_2 &= \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3} \approx 2.33333, \\ x_3 &= \frac{7/3+5}{7/3+1} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} = 2.2, \\ x_4 &= \frac{11/5+5}{11/5+1} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2.25, \\ x_5 &= \frac{9/4+5}{9/4+1} = \frac{29}{13} \approx 2.23077, \\ x_6 &= \frac{29/13+5}{29/13+1} = \frac{94}{42} = \frac{47}{21} \approx 2.23810 \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Če dobljene približke primerjamo z vrednostjo korena $\sqrt{5}$, ki je na 5 decimalah natančno enaka 2.23607, vidimo, da je

$$x_1 < x_3 < x_5 < \sqrt{5} \quad \text{in} \quad x_2 > x_4 > x_6 > \sqrt{5}.$$

Zato upravičeno domnevamo, da členi zaporedja (3) z lihimi indeksi strogo naraščajo in so manjši od $\sqrt{k}$, členi s sodimi indeksi pa strogo padajo in so večji od $\sqrt{k}$. Bralec bo potrdil to domnevo, ko bo rešil prve tri naloge ob koncu tega članka.

Tukaj bomo dokazali, da zaporedje (3) konvergira proti $\sqrt{k}$. Dokaz tega dejstva bomo oprli na naslednjo oceno:

Za vsako realno število $x \geq [\sqrt{k}] - 1$ velja neenakost

$$\left| \frac{x+k}{x+1} - \sqrt{k} \right| \leq c |x - \sqrt{k}|, \quad (4)$$

kjer je $c = (\sqrt{k} - 1)/[\sqrt{k}] < 1$.

Dokažimo jo. Najprej je zaradi ocene (2) število c manjše od 1. Očitno je neenakost (4) ekvivalentna z neenakostjo

$$[\sqrt{k}][x+k-x\sqrt{k}-\sqrt{k}] \leq (\sqrt{k}-1)(x+1)|x-\sqrt{k}|,$$

oziroma

$$[\sqrt{k}](1-\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) \leq (\sqrt{k}-1)(x+1)|x-\sqrt{k}|.$$

Če je $x = \sqrt{k}$, potem neenakost očitno velja, sicer jo pokrajšamo s pozitivnim številom $(\sqrt{k}-1)|x-\sqrt{k}|$. Ker dobljena neenakost

$$[\sqrt{k}] \leq x+1$$

velja po predpostavki, je ocena (4) tako dokazana.

Z namenom, da oceno (4) uporabimo za $x = x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), se prepričajmo, da za zaporedje $\{x_n\}$ velja neenakost

$$x_1 \leq x_n \leq \frac{k-x_1}{x_1-1} = y. \quad (5)$$

Očitno (5) velja za $n=1$, z neposrednim računom pa ugotovimo, da velja tudi za $n=2$. Princip matematične indukcije zagotavlja, da je dovolj dokazati, da iz $x_1 \leq x_n \leq y$ sledi $x_1 \leq x_{n+1} \leq y$. Ker je

$$x_{n+1} = 1 + \frac{k-1}{x_n+1}$$

in ker po indukcijski predpostavki velja $x_1 \leq x_n \leq y$, imamo

$$x_{n+1} \leq 1 + \frac{k-1}{x_1+1} = \frac{x_1+k}{x_1+1} = x_2 \leq y$$

in

$$x_{n+1} \geq 1 + \frac{k-1}{y+1} = x_1,$$

torej je $x_1 \leq x_{n+1} \leq y$. S tem je neenakost (5) potrjena.

Če torej v oceno (4) vstavimo $x = x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), dobimo neenakost

$$|x_{n+1} - \sqrt{k}| \leq c |x_n - \sqrt{k}|.$$

Z večkratno uporabo zadnje neenakosti izpeljemo verigo neenakosti

$$|x_n - \sqrt{k}| \leq c |x_{n-1} - \sqrt{k}| \leq c^2 |x_{n-2} - \sqrt{k}| \leq \dots \leq c^{n-1} |x_1 - \sqrt{k}| < c^{n-1}.$$

Zadnja neenačba je posledica ocene $|x_1 - \sqrt{k}| = \sqrt{k} - [\sqrt{k}] < 1$. Tako smo pokazali, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sqrt{k} - c^{n-1} < x_n < \sqrt{k} + c^{n-1}. \quad (6)$$

Od tod sledi, da zaporedje $\{x_n\}$ konvergira proti številu $\sqrt{k}$. Res! Vzemimo poljuben odprti interval (a, b) , ki vsebuje število $\sqrt{k}$. Potem je zaradi neenakosti (6) pogoj $a < x_n < b$ zanesljivo izpolnjen, če je

$$a < \sqrt{k} - c^{n-1} \quad \text{in} \quad \sqrt{k} + c^{n-1} < b,$$

oziroma

$$c^{n-1} < \sqrt{k} - a \quad \text{in} \quad c^{n-1} < b - \sqrt{k},$$

kar lahko zapišemo na kratko $c^{n-1} < d$, kjer je $d = \min\{\sqrt{k} - a, b - \sqrt{k}\}$. Ker je $a < \sqrt{k} < b$, je $d > 0$. Izberimo tako naravno število N , da je $c^{N-1} < d$. To je mogoče, ker je $0 < c < 1$. (Za N lahko vzamemo poljubno naravno število, ki je večje od števila $1 + \ln d / \ln c$.) Potem za vsako naravno število $n \geq N$ velja $c^{n-1} \leq c^{N-1} < d$, in zato $x_n \in (a, b)$ za vsak $n \geq N$. Dokazali smo torej, da zaporedje $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti številu $\sqrt{k}$.

Članek končajmo z nalogami. Rešitve prvih treh nalog so elementarne, zadnja pa zahteva poznavanje pojma logaritma.

1. Dokaži, da za zaporedje (3) velja enakost

$$x_{n+2} = \frac{(k+1)x_n + 2k}{2x_n + (k+1)}$$

za vsako naravno število n .

2. S pomočjo naloge 1 pokaži, da so členi zaporedja (3) z lihimi indeksi manjši od $\sqrt{k}$, členi s sodimi indeksi pa večji.
3. S pomočjo naloge 2 dokaži, da členi zaporedja (3) z lihimi indeksi strogo naraščajo, členi s sodimi indeksi pa strogo padajo, torej $x_1 < x_3 < x_5 < \dots$ in $x_2 > x_4 > x_6 > \dots$.
4. Kateri členi zaporedja (1) ležijo na intervalu $(1.414, 1.415)$?

Roman Drnovšek

VRHOVI – Rešitev s str. 356

Najprej si osvežimo spomin. V programskem jeziku logo poskušamo sestaviti ukaz **vrhovi :s**, ki bo za dani seznam **:s** vrnil seznam tistih njegovih elementov, rekli jim bomo vrhovi, ki so strogo večji od vseh svojih predhodnikov.

Opišimo postopek reševanja. Prazni seznam (zanj klic **EMPTYP :s** vrne vrednost resnično) nima vrhov, torej je tudi rezultat prazen seznam. Kadar je vhodni seznam neprazen, je njegov prvi element vedno vrh, saj nima predhodnikov. Tako za začetno vrednost seznama vrhov vzamemo seznam, ki vsebuje prvi element seznama **:s**. Prvi element seznama dobimo z ukazom **FIRST**, seznam pa naredimo z ukazom **LIST**. Nato v zanki **REPEAT** po vrsti pregledamo še ostale elemente seznama **:s**. Ker prvi element obravnavamo ločeno, zanko ponovimo enkrat manj, kot je dolžina seznama **:s**. Dolžino seznama ugotovimo z ukazom **COUNT**. V zanki najprej z ukazom **BF** odvržemo že pregledani element na začetku, nato pa primerjamo prvi element ostanka z njegovim največjim predhodnikom. Največjega predhodnika ni težko poiskati, to je kar zadnji element doslej zgrajenega seznama vrhov. Zadnji element seznama dobimo z ukazom **LAST**. Če je novi kandidat vrh, ga z ukazom **LPUT** dodamo na konec seznama vrhov. Po koncu zanke kot rezultat vrnemo zgrajeni seznam vrhov.

```
TO vrhovi :s
; Vrne seznam tistih elementov seznama :s,
; ki so strogo večji od vseh predhodnikov.
LOCAL "vrh          ;Spremenljivka, v kateri gradimo rešitev.
LOCAL "dol          ;Dolžina vhodnega seznama.
IF EMPTYP :s [OP :s]
MAKE "vrh (LIST FIRST :s) ;Prvi element je gotovo vrh.
MAKE "dol COUNT :s
REPEAT :dol-1 [
  MAKE "s BF :s          ;Odvržemo že pregledani element.
  IF (LAST :vrh)<(FIRST :s) [MAKE "vrh LPUT FIRST :s :vrh]
]
OP :vrh
END
```

Če se vam preoblikovanje seznamov ne zdi dovolj zanimivo, lahko poskusite vrhove tudi narisati. Na primer tako, kot so za klic **vrhovi [3 2 5 4 5 8 7]** prikazani na spodnji sliki.

Seveda sliko lahko še polepšate z napisi, oznakami, drugače odebelite ali obarvate stolpce ...



Martin Juvan

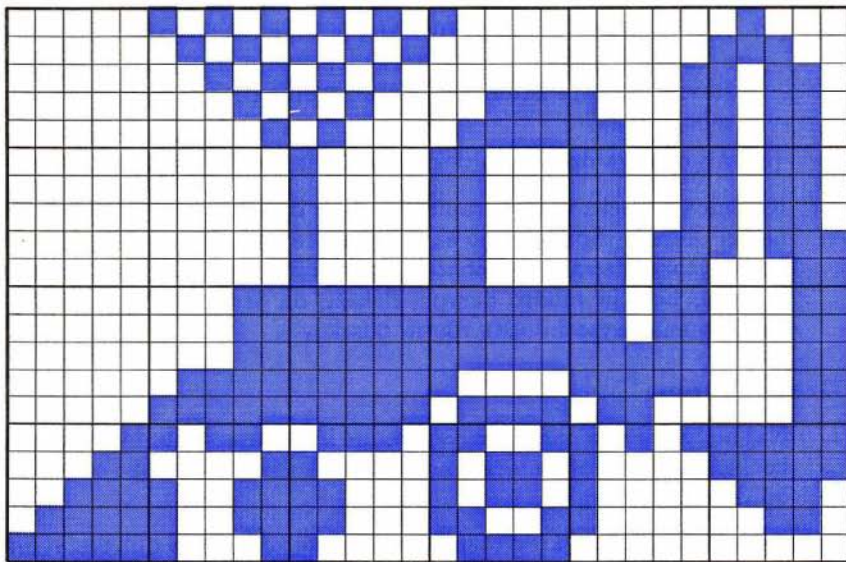
KJE JE NAPAKA – Rešitev s str. 365**Prvi primer:**

Ulomka z enakima števčema sta enaka, če se ujemata tudi v imenovalcu, ali pa če je števec enak nič, kar je edino možno v našem primeru. Rešitev enačbe je torej $x = 10$.

Drugi primer:

Potek reševanja si oglejmo v splošnem. Imamo enačbo $f(x) = g(x)$. Če število 0 ne more biti rešitev enačbe (enačbo rešujemo v množici realnih števil brez nič), potem smemo enačbo množiti z x in dobimo $xf(x) = xg(x)$. S seštevanjem obeh enačb pa dobimo enačbo oblike $(x+1)f(x) = (x+1)g(x)$, ki ima kot eno od rešitev število -1 .

Olga Arnuš

GOBELIN – Rešitev s str. 366

Marko Bokalič

18. MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST

Na lanskoletnem 17. mednarodnem tekmovanju mest so naši tekmovalci zelo uspešno reševali naloge. Kar deset jih je prejelo pohvale: Matija MAZI, Tadej STARČIČ, Matjaž KONVALINKA, Gorazd LAMPIČ, Matej MARINČ, Drago BOKAL (vsi Gimn. Bežigrad), Polona GREŠAK (Gimn. Trbovlje), Igor KLEP (Gimn. Ptuj), Tomaž KOSEM (Gimn. Lava) in Andrej VODOPIVEC (Gimn. Celje).

Z novim šolskim letom se je začel tudi nov cikel tekmovanja mest. Na jesenskem krogu letošnjega tekmovanja mest so tekmovalci reševali naloge dva dni. V lažjem sklopu nalog so tekmovalci reševali naslednje naloge:

Prva skupina

1. Ali obstaja 10 zaporednih naravnih števil, katerih vsota kvadratov je enaka vsoti kvadratov naslednjih devetih naravnih števil?
2. Poišči vsa taka naravna števila n , za katera lahko enakostranični trikotnik s stranicami dolžine n razrežemo na trapeze s stranicami 1, 1, 1 in 2.
3. (a) Ali obstaja taka družba 10 deklet in 9 fantov, da so števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, med seboj različna, števila deklet, s katerimi se posamezni fantje poznajo, pa so med seboj enaka?
(b) Ali obstaja družba 11 deklet in 10 fantov z zgornjo lastnostjo?
4. Krožnica naj seka vsako stranico romba v dveh točkah, ki jo razdelita na tri daljice. Sprehodimo se po stranicah romba v smeri urinega kazalca tako, da začnemo obhod v oglišču in po vrsti barvamo odseke z rdečo, belo in modro barvo. Pokaži, da je vsota dolžin modrih odsekov enaka vsoti dolžin rdečih odsekov.

Druga skupina

1. Naj bodo a , b in c paroma nevzporedne in paroma disjunktne stranice kocke. Poišči množico točk v notranjosti kocke, ki so enako oddaljene od danih treh stranic.
2. Ali lahko papirnat krog razrežemo na take kose, da iz njih sestavimo kvadrat z enako ploščino? Režemo lahko le po daljicah ali po krožnih lokih, dovoljenih pa je le končno mnogo rezov.

3. Parabola $y = x^2$ leži v ravnini xOy . Zbrišemo koordinatne osi (parabola ostane, vendar lege koordinatnega izhodišča ne poznamo). Z uporabo šestila in ravnila rekonstruiraj koordinatni osi.
4. Za katera naravna števila $n > 1$ obstaja družba $(n + 1)$ deklet in n fantov, da so števila fantov, s katerimi se posamezna dekleta poznajo, med seboj različna, števila deklet, s katerimi se posamezni fantje poznajo, pa so med seboj enaka?

V težjem sklopu nalog jesenskega kroga so tekmovalci reševali šest nalog. Objavljamo po dve za vsako skupino:

Prva skupina

1. Ali obstaja taka trojica različnih praštevil p, q in r , da je število $p^2 + d$ deljivo s produktom qr , število $q^2 + d$ deljivo z rp in število $r^2 + d$ deljivo s pq , če je
 - (a) $d = 10$,
 - (b) $d = 11$?
2. (a) Kvadrat je razrezan na enake pravokotne trikotnike s katetama dolžin 3 in 4. Pokaži, da je število trikotnikov sodo.
(b) Kvadrat je razrezan na enake pravokotne trikotnike s katetama dolžin 1 in 2. Pokaži, da je število trikotnikov sodo.

Druga skupina

1. Pokaži, da taka (lahko tudi nezvezna) funkcija $y = f(x)$, za katero bi veljalo $f(f(x)) = x^2 - 1996$ za vse $x \in \mathbb{R}$, ne obstaja.
2. "Matematična tombolska" kartica je tabela, sestavljena iz $100 = 10 \cdot 10$ polj. Igralec označi 10 polj na kartici in jo pošlje (v kuverti). V naslednjih dneh je v vseh časopisih objavljenih 10 prepovedanih polj. Pokaži,
 - (a) da lahko igralec izpolni 13 kartic tako, da bo vsaj ena kartica "zmagala" (tj. ne bo vsebovala prepovedanega polja),
 - (b) da med 12 karticami ni nujno zmagovalne kartice.

PRESEK — list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje — 24. letnik, leto 1996/97, številke 1–6, strani 1–384

MATEMATIKA

Z matematiko nad pošto (Primož Potočnik)	14-18
Vsota potenc naravnih števil (Aleksander Turnšek)	48-52
Višinska točka trikotnika in stožnice (Nada Razpet)	74-77
Porazdelitev praštevil v množici $\mathbb{N}$ (Gregor Pavlič)	140-143
O deljenju z ostankom in še o čem (Ivan Vidav)	206-209
Metoda ploščine (Silva Kmetič)	226-229
Nenavadna aritmetika ali ne poskušajte tega v šoli! (Primož Potočnik)	290-295
Mandelbrotova in Juliajeve množice (Primož Potočnik)	322-327
O računovodskem pravilu (Ivan Lisac)	346-351
O Catalanovi domnevi (Jože Grasselli)	358-364
Računanje približkov kvadratnega korena iz naravnega števila (Roman Drnovšek)	372-375

FIZIKA

Hálo, čudoviti naravni pojav – 1. del (Matej Rovšek)	6-13
Raketa na vodo in stisnjen zrak (Goran Sabolič, Mirko Cvahte)	34-38
Še o Mpembovem pojavu (Janez Strnad)	42-46
Aristotel in Arhimed o vzvodu (Janez Strnad)	70-72
Sprehod po megli (Jože Rakovec)	102-106
Svetlobni mlinček (Janez Strnad)	130-134
Hálo, čudoviti naravni pojav – 2. del (Matej Rovšek)	144-145
Milni mehurčki na snegu (Alojz Kodre)	194-198
Projiciranje Sončevega mrka (Zoran Arsov)	216-217
Fotografija in matematika I – Upodabljanje (Peter Legiša)	258-269
Prva šola plavanja (Janez Strnad)	328-333
Biljard (Matjaž Vencelj)	354

ASTRONOMIJA

Odkritje rjavih pritlikavk (Mirjam Galičič)	2-4
Opazujemo Venero (Marijan Prosen)	39-41
Iskanje izvenzemeljskih civilizacij in bakterije z Marsa (Mirjam Galičič)	65-69

Hijade (Marian Prosén)	92-94
Izmerimo Lunin premer (Marian Prosén)	138-139
Kaj je doslej odkrilo vesoljsko plovilo Galileo? (Mirjam Galičič) ...	202-205
Zanimiva sončna ura – reš. str. 231 (Marian Prosén)	218-220
Prihaja komet Hale-Bopp (Andrej Guštin)	270-275
Opazujemo planet Jupiter – reš. str. 365 (Marian Prosén)	338-340
Ocenimo Sončev premer (Marian Prosén)	370-371

RAČUNALNIŠTVO

O črtnih kodah (Bojan Mohar)	20-24
Počistimo disk (Matija Lokar)	28-31
Narišimo mrežo kocke (Matija Lokar)	78-81
Posplošena Fibonaccijeva zaporedja (Martin Juvan)	150-152
Naredi svoj Paintbrush (Jože Marinček)	210-214
Učitelji rišejo (Martin Juvan)	276-277
Še enkrat o Fibonaccijevih zaporedjih (Martin Juvan, Katarina Kokalovič)	334-337
Alenka tekmuje z Brigito Bukovec (Matija in Mojca Lokar)	368-369

ZANIMIVOSTI – RAZVEDRILO

Zapeljivi radiolar – reš. str. 94 (Vilko Domajnko)	26-27
Križanka "Računalniške povezave" – reš. str. 90 (Marko Bokalič)	32-33
Križanka "Presekovi uredniki" – reš. str. 159 (Marko Bokalič)	96-97
Napišite pesmico (Marija Vencelj)	158-159
Križanka "Družabne igre" – reš. str. 235 (Marko Bokalič)	160-161
Sestavljanje števil – reš. str. 229 (Martin Juvan)	199-200
Križanka "Šah" – reš. str. 296 (Marko Bokalič)	224-225
Kateri datum manjka? (Marko Petkovšek)	230-231
Buhteljni v labirintu – reš. str. 351 (Iztok Arčon)	278-279
Križanka "Slovenski praštevski vrhovi" – reš. str. 356 (Marko Bokalič)	288-289
Panoramske permutacije (Tomaž Pisanski)	344-345
Križanka "Prizorišča matematičnih in fizikalnih olimpiad" – reš. str. 371 (Marko Bokalič)	352-353
Gobelin – reš. str. 377 (Marko Bokalič)	366-367

REŠITVE NALOG

Izpitni nalogi – s str. 134 (Dušan Murovec, prir. Marija Vencelj) ..	236-237
Napišite pesmico – pesnikov pa ni! (Marija Vencelj)	275
Učitelji rišejo – s str. 276 (Martin Juvan)	341-343

TEKMOVANJA

11. državno tekmovanje iz znanja računalništva za osnovnošolce (Tihomil Šlenc)	54-55
32. tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje (Aleksander Potočnik)	56-57
Državno tekmovanje iz fizike za Zlata Stefanova priznanja 1995/1996 (Jelisava Sakelšek)	57-59
40. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije (Matjaž Željko) .	59-61
34. tekmovanje iz srednješolske fizike (Ciril Dominko)	61-64
Mednarodna matematična olimpiada 1997 (Matjaž Željko)	107
11. državno tekmovanje v računalništvu za osnovnošolce, 1. del – reš. str. 179 (Tihomil Šlenc)	107-111
31. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje – reš. str. 173 (Aleksander Potočnik)	112-116
16. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 175 (Mojca Čepič)	117-119
Mednarodno matematično tekmovanje mest, 1. del (Matjaž Željko)	119-122
Izbirno tekmovanje iz matematike – reš. str. 188 (Matjaž Željko) ..	123-124
Naloge s predtekmovanja iz srednješolske fizike – reš. str. 167 (Ciril Dominko, Bojan Golli)	124-128
Urniki tekmovanj v letu 1997 (Darjo Felda)	165-167
11. državno tekmovanje v računalništvu za osnovnošolce, 2. del – reš. str. 244 (Tihomil Šlenc, Martin Juvan)	182-184
Mednarodno matematično tekmovanje mest, 2. del (Matjaž Željko)	185-187
32. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – reš. str. 297 (Aleksander Potočnik)	238-239
16. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – reš. str. 299 (Mojca Čepič)	239-244
Državno tekmovanje iz matematike za srednješolce – reš. str. 307 (Matjaž Željko)	247-249
37. mednarodna matematična olimpiada – reš. s str. 135 (Matjaž Željko)	250-251
Naloge z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike – reš. str. 313 (Jure Bajc, Bojan Golli)	251-256
18. mednarodno matematično tekmovanje mest (Aleš Vavpetič) ...	378-379

PISMA BRALCEV

Razpis na temo 1997 s str. 18 – odgovori (Marija Vencelj).....	146-149
Izpolnjevanke (Adil Čehič).....	201
Številski križanek (Miha Eder).....	232
Kvadratna funkcija in enakostranični trikotnik (Mateja Jerše).....	279

NALOGE

Kako hitro hoditi? – reš. str. 91 (Marija Vencelj).....	1
Kolikokrat bo treba tehtati? – nagradna naloga – reš. str. 162 (Marija Vencelj).....	5
Ali je vsota kvadratov samih neničelnih števil lahko enaka nič? – reš. str. 72 (Jurij Kovič).....	13
Razpis na temo 1997 – reš. str. 98 (Marija Vencelj).....	18-19
Pisani krogi – reš. str. 101 (Martin Juvan).....	19
Nekaj zanimivih nalog za najmlajše bralce – reš. str. 95 (D. M. Milošević, prev. B. Japelj).....	24-25
Knjižni nakupi – reš. str. 91 (Vilko Domajnko).....	25
Zaporedna števila – reš. str. 73 (Martin Juvan).....	27
Tri naloge iz geometrije – reš. str. 81 (Borut Zalar).....	52-53
Skrit račun – reš. str. 77 (Marija Vencelj).....	53
Podaljšana Langfordova zaporedja – reš. str. 88 (Martin Juvan).....	53
Praštevilske vrednosti polinoma – reš. str. 153 (Dušan Murovec).....	69
Kvadrati praštevil – reš. str. 163 (Boris Lavrič).....	83
Vse manj je dobrih gostiln – reš. str. 153 (Marija Vencelj).....	83
Kateri slavni matematik je to? – reš. str. 153 (Marija Vencelj).....	100
Prištevanke za dva – reš. str. 137 (Marija Vencelj).....	VII
Izpitni nalogi (Dušan Murovec).....	134
Soda pred liha – reš. str. 220 (Martin Juvan).....	139
Dediščina – reš. str. 234 (Marija Vencelj).....	152
Komutativnost množenja – reš. str. 209 (Marija Vencelj).....	157
Trikotnik na traku – reš. str. 285 (Boris Lavrič).....	200
Utesnjeni tetraeder – reš. str. 285 (Boris Lavrič).....	200
Množenje z devet – reš. str. 295 (Marija Vencelj).....	221
Muhe – reš. str. 327 (Marija Vencelj).....	277
Miha in razlika dveh kvadratov – reš. str. 340 (Marija Vencelj).....	296
Štiri lahke – reš. str. 357 (Marija Vencelj).....	345
Vrhovi – reš. str. 376 (Martin Juvan).....	356
Kje je napaka? – reš. str. 377 (Olga Arnuš).....	365

NOVICE

Znova blesteči uspehi naših dijakov na olimpiadah iz matematike in fizike (Iz uredništva)	5
Gottfried Wilhelm Leibniz (Petar Pavešić)	84-88
37. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko)	135
27. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)	136-137
Novo največje znano praštevilo (Matija Lokar)	154-155
27. fizikalna olimpiada v deželi Vikingov (Klemen Žagar)	156-157
Zaključek tekmovanja mest (Roman Modic)	214-215
Z veseljem v vesolje ali tekmovanje študentov fizike v poletih raket na vodo in stisnjen zrak (Gorazd Planinšič)	222-223
Poletna raziskovalna tabora – Spuhlja 96 (Vilko Domajnko, Jani Kovačič)	232-234
Sto let elektrona (Janez Strnad)	280-284
Naš astronom Herman Mikuž odkril dva asteroida – intervju (Marijan Prosén)	355

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

24. letnik, šolsko leto 1996/97, številka 6, strani 321 – 384

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

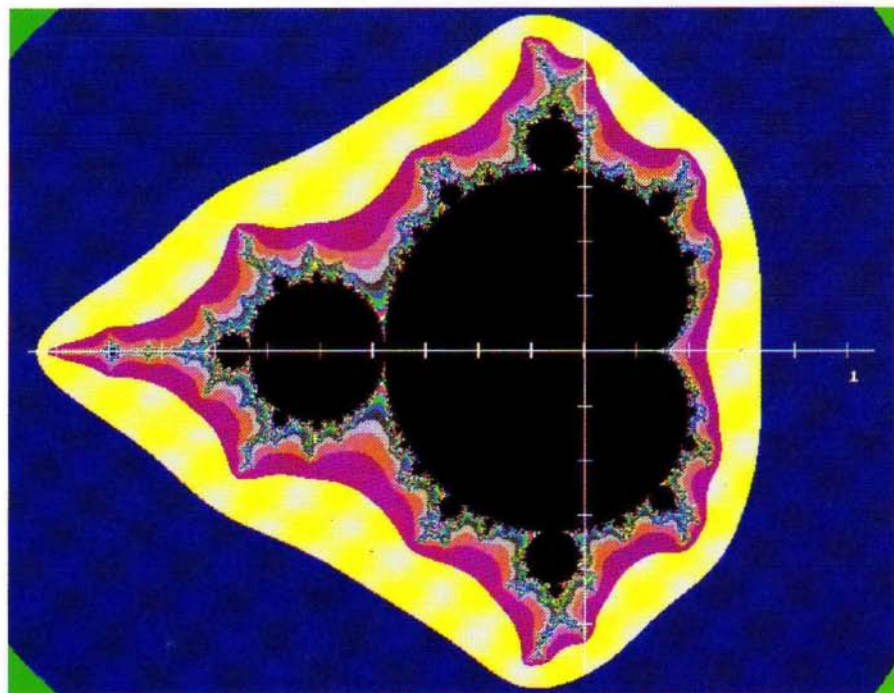
Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1996/97 je za posamezne naročnike 1.500 SIT, za skupinska naročila šol 1.200 SIT, posamezna številka 300 SIT, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

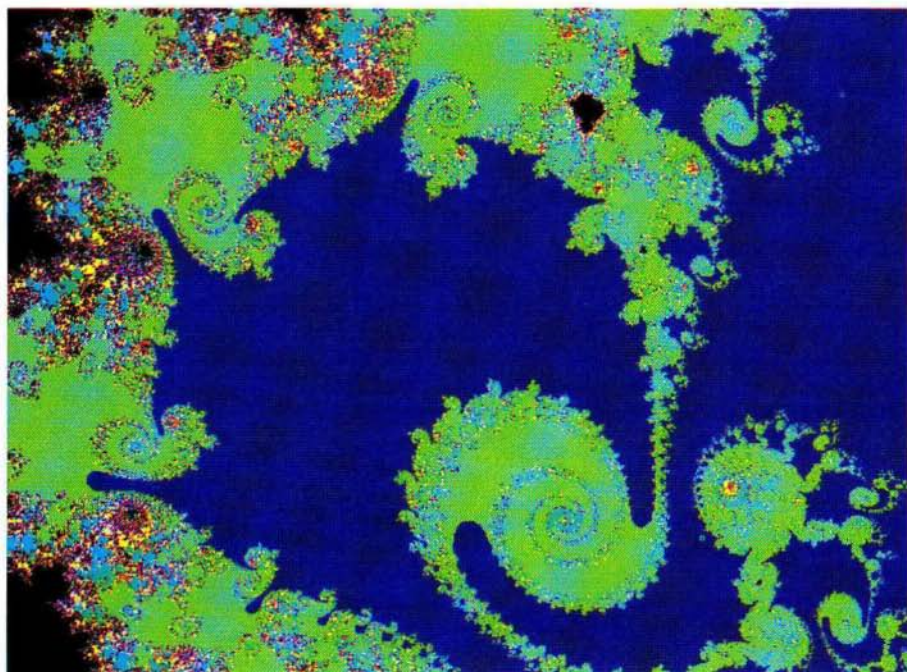
Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1320

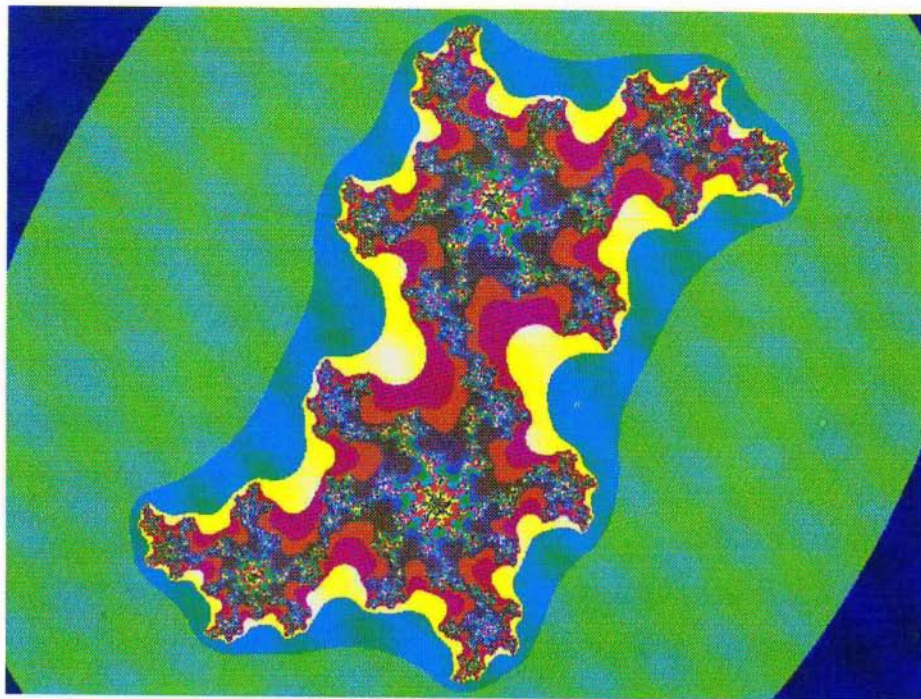
Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana



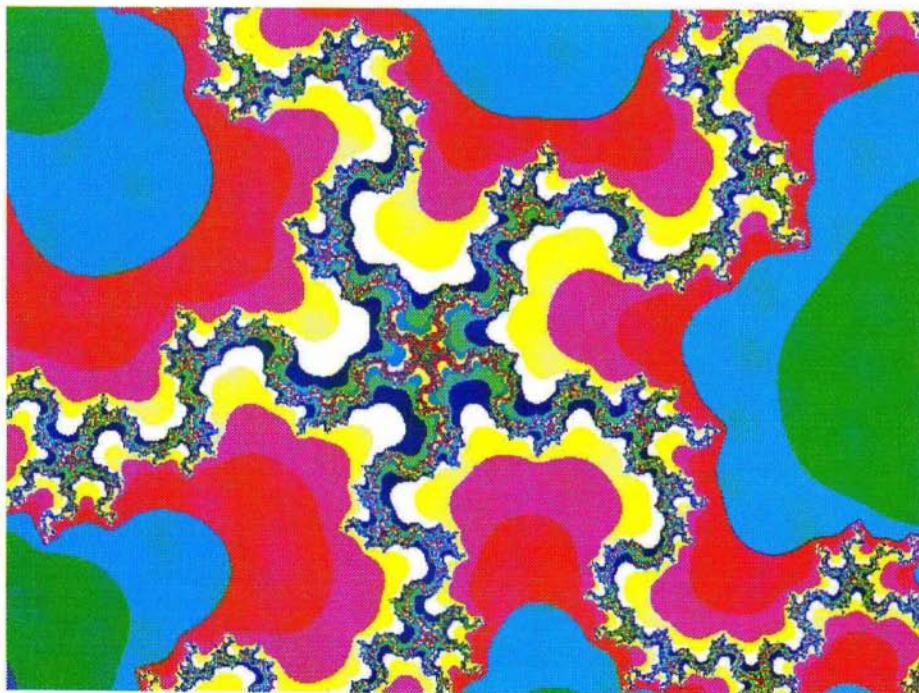
Slika 5.



Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.