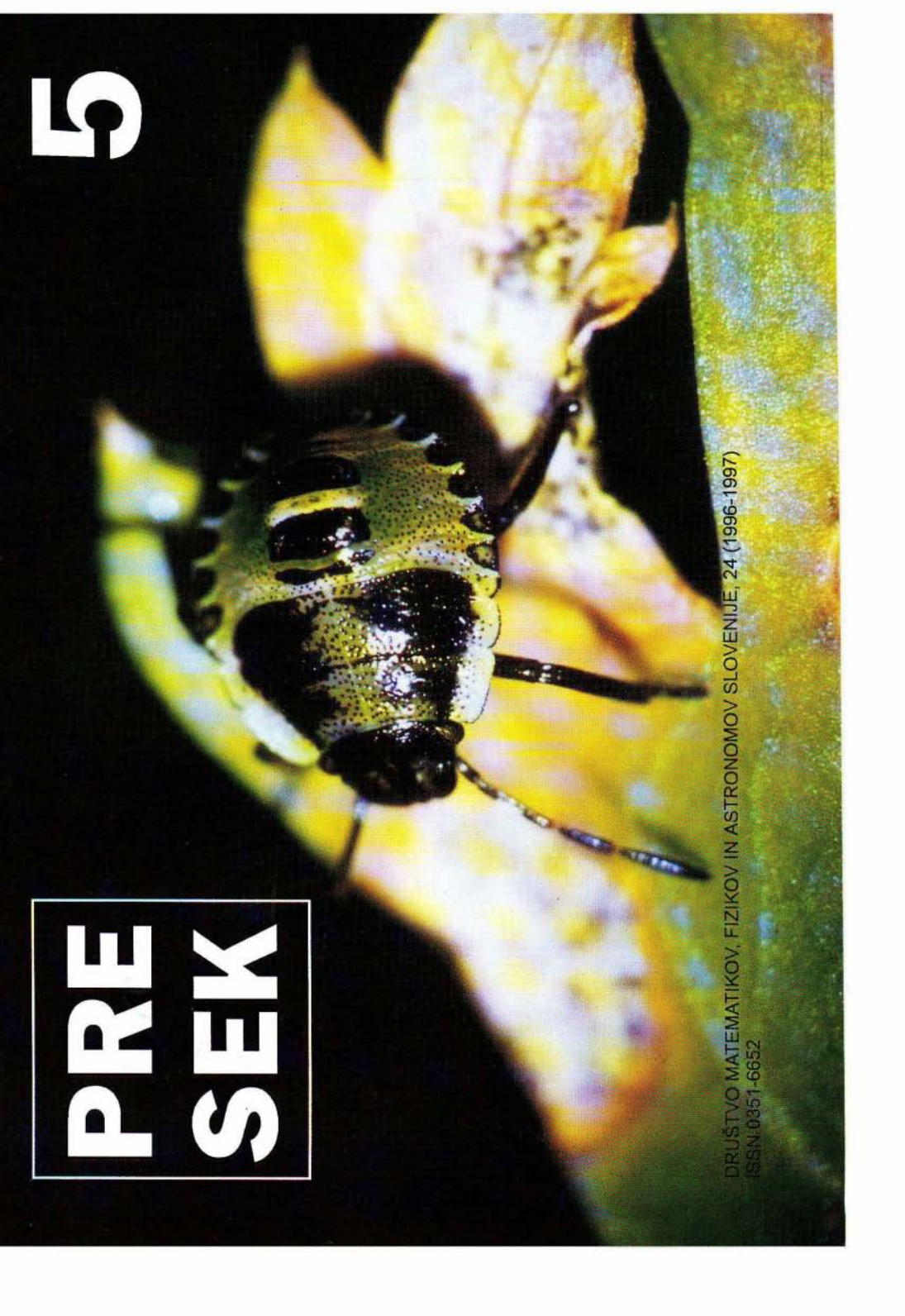


5

PRE SEK

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 24 (1996-1997)
ISSN 0351-6652





PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
24. letnik, leto 1996/97, številka 5, strani 257–320

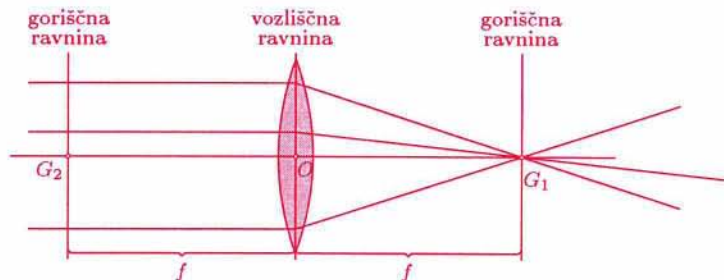
VSEBINA

MATEMATIKA	Nenavadna aritmetika ali ne poskušajte tega v šoli! (Primož Potočnik) 290-295
FIZIKA	Fotografija in matematika I – Upodabljanje (Peter Legiša) 258–269
ASTRONOMIJA	Prihaja komet Hale-Bopp (Andrej Guštin) 270-275
RAČUNALNIŠTVO	Učitelji rišejo (Martin Juvan) 276-277
NOVICE	Sto let elektrona (Janez Strnad) 280-284
NALOGE	Muhe (Marija Vencelj) 277 Miha in razlika dveh kvadratov (Marija Vencelj) 296
REŠITVE NALOG	Napišite pesmico – pesnikov pa ni! (Marija Vencelj) 275 Trikotnik na traku – s str. 200 (Boris Lavrič) 285 Utesnjeni tetraeder – s str. 200 (Boris Lavrič) 285-287 Množenje z devet – s str. 221 (Marija Vencelj) 295 Križanka "Šah" – s str. 224 (Marko Bokalič) 296
ZANIMIVOSTI	Buhteljni v labirintu (Iztok Arčon) 278-279
RAZVEDRILO	Križanka "Slovenski praštevilski vrhovi" (Marko Bokalič) 288-289
PISMA BRALCEV	Kvadratna funkcija in enakostranični trikotnik (Mateja Jerše) 279
TEKMOVANJA	32. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje – rešitve nalog s str. 238 (Aleksander Potočnik) .. 297-298 16. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – rešitve s str. 239 (Mojca Čepič) 299-307 Državno tekmovanje iz matematike za srednješolce – rešitve s str. 247 (Matjaž Željko) 307-313 Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz srednješolske fizike v šolskem letu 1995/1996 – s str. 251 (Bojan Golli) 313-320
NA OVITKU	Hrošček na listu peteršilja je bil v naravi dolg dobrih 5mm (foto Peter Legiša). Glej tudi članek na strani 258 I Čmrlj v makovem cvetu je bil slikan z vmesnim obročkom (foto Peter Legiša) II Metulj in rastlinska stenica sta bila slikana s 100 mm makro objektivom (foto Peter Legiša) IV Igra Buhteljni v labirintu – glej napotke na strani 278... III

FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA I – UPODABLJANJE

Upodabljanje

Pri fiziki se učimo, da tanka zbiralna leča žarke, vzporedne osi leče, zbere v gorišču (slika 1).



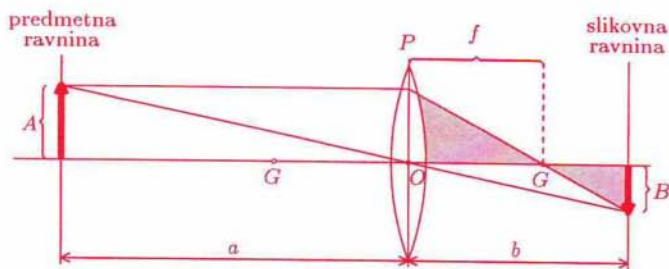
Slika 1.

Optično središče leče O je okarakterizirano s tem, da žarki, ki gredo skozenj, ne spremenijo svoje smeri. Natančneje: žarek, ki vpade na lečo in se lomi skozi O , je po izhodu iz leče vzporeden prvotni smeri. Če tak žarek oklepa majhen kot z optično osjo, lahko zaradi tankosti leče morebitni vzporedni premik zanemarimo.

Skozi optično središče leče narišemo ravnino P , pravokotno na os leče. Ravnini P pravimo *ravnina leče* (tudi *kardinalna* ali *vozliščna ravnina*). Leča ima dve gorišči: G_1 in G_2 . Razdalja med goriščem in ravnino leče je *goriščna razdalja* ali *goriščnica*. Navadno jo označimo s črko f .

Skozi vsako od gorišč leče narišemo še ravnini, pravokotni na os. To sta *goriščni ravnini*. V oddaljenosti $a > f$ od (ravnine) leče narišemo še eno ravnino, pravokotno na os. To bo naša *predmetna ravnina*. V njej vzemimo manjši predmet kot na sliki 2. Kot vemo, leča napravi obrnjeno sliko predmeta v *slikovni ravnini*, ki je spet pravokotna na os. Razdaljo slikovne ravnine od (ravnine) leče označimo z b .

Leča nam, kot vemo, napravi podobnostno transformacijo predmetne ravnine na slikovno ravnino. Koeficient podobnosti označimo z m in imenujemo *povečava*. Pri običajnem slikanju je m mnogo bližje 0 kot 1, saj na filmu nastane pomanjšana slika stvarnosti.



Slika 2.

Na sliki 2 s podobnostjo trikotnikov vidimo, da je

$$m = B : A = b : a$$

in

$$B : A = (b - f) : f.$$

Tako je

$$b : a = (b - f) : f$$

in od tod

$$bf = ab - af.$$

Ali

$$(b + a)f = ab, \quad (1)$$

se pravi

$$\frac{b + a}{ab} = \frac{1}{f}$$

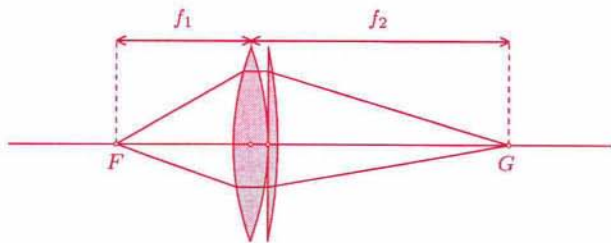
ali

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Razdalji a in b sta *konjugirani razdalji*.

Dioptrija

Recipročna vrednost goriščne razdalje leče je *lomnost* ali *optična moč* leče. Enota za lomnost je *dioptrija*, ki ni nič drugega kot m^{-1} . Npr.: leča z goriščnico 20 cm ima $1 : 0,2 \text{ m} = 5$ dioptrij. Leča z goriščno razdaljo 5 cm ima 20 dioptrij.



Slika 3.

Če tesno zložimo dve tanki leči, se sestav obnaša kot leča, katere moč je vsota moči obeh leč. To ni težko videti (slika 3). Žarke, ki izhajajo iz gorišča F prve leče, ta pretvori v snop vzporednih žarkov. Druga leča te žarke združi v svojem gorišču G . Po (1) je

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f},$$

kjer sta f_1, f_2 goriščni razdalji obeh leč, f pa goriščna razdalja sestava. Npr.: če zložimo lečo z goriščno razdaljo 20 cm in lečo z goriščno razdaljo 5 cm, ima sestav $5+20 = 25$ dioptrij. Goriščna razdalja sestava je torej 4 cm.

Omenimo še, da imajo razpršilne leče (kakršne nosijo kratkovidni) negativno optično moč.

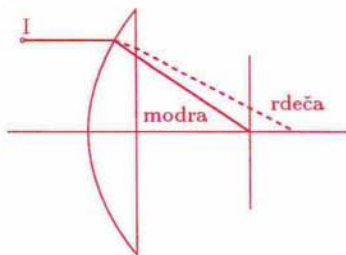
Fotografski objektiv

Pri slikanju s fotoaparatom naj bi nam leča fotoaparata napravila obrnjeno sliko predmeta na film. Vendar stvari niso tako preproste. Naša razglabljanja so veljala za *tanko lečo*. Kritično razporejeni bralci bi lahko vprašali: kako tanko?

Moj prvi fotoaparat danes že izumrle znamke Ferrania je dejansko imel eno samo majčkeno lečo. Ker je skozi njega v aparat prihajalo zelo malo svetlobe, je bil osvetlitveni čas precej dolg in so slike bile ponavadi "stresene". Tudi kadar se mi je posrečilo držati aparat pri miru, slike niso bile ostre.

Vzrok je med drugim v tem, da steklo ne lomi svetlobe vseh barv enako. Modro barvo denimo lomi bolj kot rdečo. Pravimo, da v leči (enako kot v stekleni prizmi) pride do *disperzije* (razklona) bele svetlobe. Nekatera stekla svetlobo razklonijo bolj, druga manj. Pri kristalnih kozarcih je velika disperzija celo zaželeno, saj so mavrični razlomi lepi. V fotografiji, pri izdelavi očal, teleskopov itd. pa nam disperzija povzroča težave še danes.

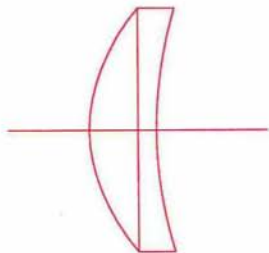
Na sliki 4 imamo točkast izvir I bele svetlobe. Če se modri žarki iz I srečajo ravno na filmu, se rdeči žarki srečajo šele za filmom. Tako namesto bele točke na filmu dobimo mavrično pego – z modro sredino in rdečim robom. Tej napaki, ki pokvari ostrino tudi pri slikanju črnobelih motivov, pravimo *barvna napaka* ali *kromatična aberacija*. (To ni edina, je pa najbolj opazna napaka enostavnih leč.)



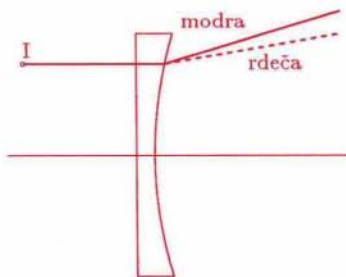
Slika 4. Leča razprši belo svetlobo.

Vsak, ki nosi očala z debelejšimi stekli, pozna barvno napako, ki je opazna predvsem na robu vidnega polja. Zaradi te in drugih optičnih napak enostavnih leč močno kratkovidnim ali daljnovidnim ljudem tudi očala ne pričarajo povsem ostre slike. Če pa ti "slabovidni" ljudje pogledajo skozi dober daljnogled, pogosto vidijo povsem ostro. Zakaj?

Pred več kot 250 leti sta dva angleška optika neodvisno ugotovila, da je s kombinacijo leč iz različnih stekel mogoče barvno napako močno zmanjšati. Vzela sta konvexsno lečo iz navadnega stekla in dodala šibkejšo konkavno lečo iz svinčevega stekla, ki svetlobo bolj razkloni kot navadno steklo. Sestav je imel pozitivno optično moč (slika 5).



Slika 5. Akromat je sestavljen iz dveh različnih vrst stekel.



Slika 6. Konkavna leča belo svetlobo razprši v drugo smer kot konvexsna.

Konvexsna leča je belo svetlobo razklonila v eno smer, konkavna pa v drugo (slika 6). S primerno kombinacijo oblik obeh leč sta se učinka obeh razklonov bolj ali manj uničila.

Večkrat obe leči kar zlepijo skupaj. Takim kombinacijam leč rečemo *akromati* in so optično neprimerno boljši od enostavnih leč. Uporaba akromatov je omogočila izdelavo dobrih daljnogledov, mikroskopov itd.

Danes imajo celo najcenejši fotoaparati namesto ene leče *objektiv*, sestavljen iz dveh ali več leč. To je eden od čudežev masovne proizvodnje in potrošnje.

Dobri objektivni so sestavljeni iz najmanj štirih leč. Trud konstruktorjev je usmerjen k temu, da bi taki objektivni dajali kar se da verno sliko stvarnosti. Pri mnogih objektivih lahko brez večjih problemov računamo, kot da imamo namesto objektiva eno samo tanko lečo, postavljeno v *optičnem središču* objektiva.

Izteg

Vrnimo se torej k enačbi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Če gre $a \rightarrow \infty$, gre $a^{-1} \rightarrow 0$ in tako $b^{-1} \rightarrow f^{-1}$. Lahko rečemo, da za $a = \infty$ velja $b = f$: **Slika neskončno oddaljenega predmeta nastane v goriščni ravnini objektiva.**

Če je $a < \infty$, je $a^{-1} > 0$ in tako

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} < \frac{1}{f},$$

se pravi $b > f$. Slike bližnjih predmetov so torej za več kot f oddaljene od optičnega središča objektiva. Če hočemo torej na filmu dobiti ostro sliko bližnjega predmeta, moramo povečati razdaljo med objektivom in filmom. Ponavadi se to zgodi tako, da se objektiv odmakne od filma. Odmik ali *izteg* označimo z x' , kjer je

$$x' = b - f.$$

Večina objektivov je vgrajena v nekakšno vijačnico. Če v pravo smer vrtimo obroč za ostrenje, se objektiv odmika od filma. (Danes navadno to namesto nas opravlja elektromotorček.) Označimo še

$$x = a - f.$$

Potem je

$$xx' = (a - f)(b - f) = ab - (a + b)f + f^2 = f^2$$

po (1). Zapomnimo si:

$$xx' = f^2.$$

Na mnogih objektivih imamo lestvico razdalj. Ker bi bilo težko označiti optično središče objektiva, te razdalje pomenijo *oddaljenost med predmetno ravnino in ravnino filma*, se pravi

$$d = a + b.$$

Primeri:

1. Vzemimo objektiv z goriščno razdaljo 5 cm. Če je $x = 2,5$ m, je

$$x' = \frac{f^2}{x} = \frac{25 \text{ cm}^2}{250 \text{ cm}} = 1 \text{ mm}.$$

Izteg je majhen. Razdalja med predmetno ravnino in ravnino filma je

$$d = x + x' + 2f \doteq x + 2f = 2,6 \text{ cm}.$$

Povečava je

$$m = \frac{b}{a} = \frac{x' + f}{x + f} = \frac{5,1 \text{ cm}}{255 \text{ cm}} = \frac{1}{50} = 0,02.$$

Če je objekt dolg 1 dm, je njegova slika na filmu dolga 2 mm.

2. Če je $f = 25$ mm in $x = 2,5$ m, je $x' = \frac{f^2}{x} = \frac{1}{4}$ mm. Izteg je komaj opazen! Tu je

$$d \doteq x + 2f = 255 \text{ cm}$$

in

$$m = \frac{x' + f}{x + f} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Objekt, dolg 1 dm, ima 1 mm dolgo sliko na filmu.

Posplošimo nauke gornjih zgledov. Vzemimo, da je x **bistveno večji** od f . Potem je x' zelo majhen. Razdalja med ravninama filma in predmeta je $x + 2f \doteq x$. Dolžina slike je

$$B = mA = \frac{x' + f}{x + f} A \doteq \frac{f}{x} A$$

in izteg

$$x' = \frac{f^2}{x}.$$

Pri (približno) enaki razdalji je dolžina slike sorazmerna f . Izteg pa je sorazmeren f^2 .

Če npr. f podvojimo, se dolžina slike podvoji, izteg pa se pomnoži z $2^2 = 4$.

Povečave

Vrnimo se k enačbi $a^{-1} + b^{-1} = f^{-1}$. Upoštevajmo, da je $b = ma$, pa je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

in od tod

$$a = (1 + m^{-1})f,$$

$$b = (m + 1)f.$$

Ker je $b = x' + f$, je

$$x' = mf, \quad x = m^{-1}f \quad (2)$$

ter

$$d = (2 + m + m^{-1})f. \quad (3)$$

Če je $m = 1$, se pravi slika enako velika kot original, je $a = b = 2f$ in $d = 4f$. Če je $m = \frac{1}{2}$, je $a = 3f, b = \frac{3}{2}f$ in $d = \frac{9}{2}f$. Če je $m = 2$, je $a = \frac{3}{2}f, b = 3f$ in $d = \frac{9}{2}f$.

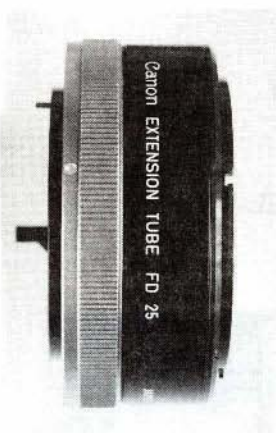
V tem zadnjem primeru je leča bliže originalu kot sliki. Izteg znaša $x' = 2f$. Tako velik izteg ponavadi dosežemo tako, da med lečo in telo aparata vstavimo meh.

Primeri:

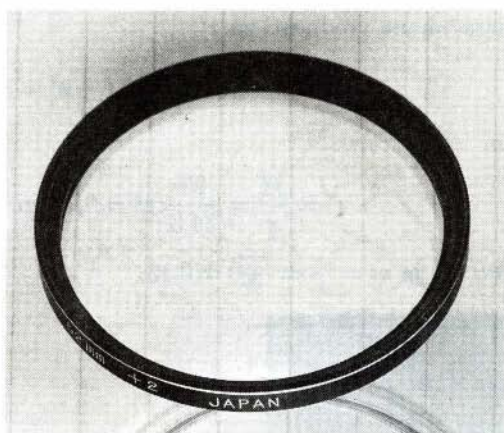
3. Naj bo $f = 5$ cm in $d = 45$ cm. Koliko je m ?

Rešitev. Stvari se lotimo takole. Ker je, kot vemo iz prakse, izteg x' sorazmerno majhen, je $d \doteq x + 2f$ in torej $x \doteq 35$ cm. Iz enačbe $xx' = f^2$ ugotovimo

$$x' = \frac{f^2}{x} \doteq \frac{25}{35} \text{ cm} \doteq 7 \text{ mm}.$$



Slika 9. Vmesni obroček.



Slika 10. Predleča s +2 dioptrijama.

Rešitev: Računamo, kot da bi tesno zložili dve tanki leči. Objektiv ima 20 dioptrij, predleča 2 dioptriji; sestav obeh torej 22 dioptrij ali goriščno razdaljo 45,5 mm. Goriščna razdalja sestava se je torej *zmanjšala* za 4,5 mm; za toliko vzamemo, da se je povečal izteg. Torej je novi izteg X' med 4,5 mm in $7,3 + 4,5 = 11,8$ mm, in to pri novem $F = 45,5$ mm. Iz enačbe

$$X' = MF$$

dobimo, da je povečava med

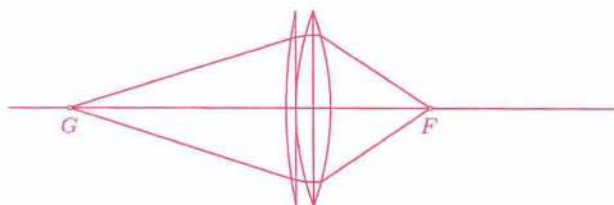
$$\frac{4,5}{45,5} \text{ in } \frac{11,8}{45,5},$$

se pravi med 0,1 in 0,26. Drugače povedano, med 1 : 10 in (približno) 1 : 4. Ustrezne razdalje izračunamo po (3) in znašajo od 55 cm do 28 cm.

Formule za predleče

Če je bil objektiv naravnjen na ∞ , preden smo privili predlečo, je zdaj razdalja med ravninama predleče in predmeta enaka goriščni razdalji predleče.

To vidimo takole (slika 11). Če imamo točkast izvor svetlobe v gorišču predleče, nam predleča proti objektivu pošlje snop, vzporeden optični osi. Objektiv ta snop združi v svojem gorišču na filmu in tako napravi ostro sliko izvora.

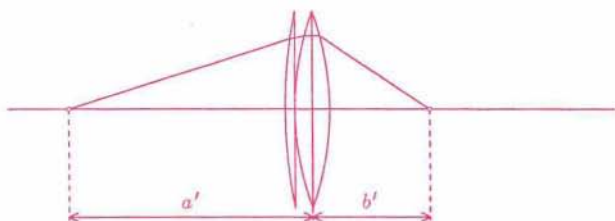


Slika 11.

Torej: če smo privili predlečo z dvema dioptrijama, bo razdalja od predleče do ravnine predmeta 50 cm. Če smo privili predlečo z goriščno razdaljo 250 mm, bo razdalja od predleče do ravnine predmeta 25 cm.

Pri starejših ljudeh leča v očesu izgubi prožnost in ne more toliko spreminjati goriščne razdalje kot v mladosti. Mnogi ostro vidijo oddaljene predmete, ne morejo pa brati. Kot pri fotoaparatu predleča v obliki očal pomaga zmanjšati goriščno razdaljo očesa. Z dvema dioptrijama bodo zgoraj omenjeni zanesljivo videli ostro na pol metra, z 2,5 dioptrijami pa na 40 cm.

Izpeljimo sedaj formule za majhen objektiv z dodatno predlečo (slika 12). Privzamemo, da se z dodatkom predleče optično središče ne premakne in torej b ostane isti. Objektiv s predlečo naj ima goriščno razdaljo f , predleča pa gorišnico g . Kot prej privzamemo, da je optična moč sestava enaka $f^{-1} + g^{-1}$.



Slika 12.

Za objektiv brez predleče je (slika 2)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

s predlečo pa

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}.$$

Od tod je

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{g}. \quad (4)$$

Primeri:

6. Babica brez očal vidi ostro od 1 metra naprej. Z očali z 2 dioptrijama bo ostro videla že na razdalji a' , kjer je

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{1} + 2 = 3\text{m}^{-1},$$

se pravi na 33 cm. Z 2,5 dioptrije bo ostro videla že na 30 cm.

7. Z očali z -5 dioptrijami kratkovidni vidi ostro od 25 cm do 2 m. Na kakšnih razdaljah vidi ostro brez očal?

Rešitev. Iz enačbe

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} - 5 \quad (\text{m}^{-1})$$

dobimo za $a' = 2\text{m}$, da je $a = \frac{2}{11}\text{ m} \doteq 18\text{ cm}$. Za $a' = \frac{1}{4}\text{ m}$ pa $a = \frac{1}{9}\text{ m} \doteq 11\text{ cm}$. Brez očal torej vidi ostro od 11 cm do 20 cm.

Izračunajmo novo povečavo m' za objektiv s predlečo, če je bila prejšnja povečava za objektiv brez predleče m .

Vemo, da je (slika 6 in formula 4)

$$m' = \frac{b}{a'} = b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{g}\right) = \frac{b}{a} + \frac{b}{g} = m + \frac{b}{g}.$$

Tu je $b = x' + f = mf + f = (1 + m)f$ po (2). Torej je

$$m' = m + (1 + m)\frac{f}{g}.$$

Če je bil $m = 0$, je $m' = \frac{f}{g}$.

Omejitve

Tovrstni računi se prav dobro ujemajo s stvarnostjo, dokler imamo opravka z enostavnimi objektivi majhnih razsežnosti. Upoštevati pa moramo, da lahko dejanska goriščna razdalja za 6% odstopa od deklarirane. Objektiv, ki ga prodajajo kot 50 milimetrskega, ima lahko dejansko goriščno razdaljo 53 mm ali pa 47 mm.

Kako pa je z bolj zapletenimi objektivi? Čas je, da priznamo, da večlečni objektiv nima samo ene vozliščne ravnine, ampak dve. Enačbe kot

$$a^{-1} + b^{-1} = f^{-1}$$

še zmeraj veljajo, če a merimo od predmetne ravnine do prve vozliščne ravnine, b pa od slikovne ravnine do druge vozliščne ravnine. Torej je razdalja med predmetno ravnino in filmom enaka

$$d = a + b + h,$$

kjer je h lahko tudi negativen, $|h|$ pa je razdalja med vozliščnima ravninama. Običajni prospekti ne navajajo vrednosti za h , kaj šele lege *vozlišč*, to je presečišč vozliščnih ravnin z optično osjo. Na srečo sta vozlišči pogosto blizu skupaj in h blizu 0. V tem primeru ni poseben greh, če si računanje poenostavimo tako, kot smo storili mi. Opozorimo naj, da sta pri teleobjektivih vozlišči lahko pred objektivom. To ni presenetljivo, saj tak objektiv z goriščno razdaljo 300 mm v dolžino lahko meri le dobrih 20 cm.

Če si ogledamo proizvajalčev prospekt za tak dober kilogram težak teleobjektiv (ki je pogost del opreme fotoreporterjev), opazimo, da je na razdalji 2,5 m povečava enaka 0,13. Če bi računali kot v primeru 3, bi dobili vrednost 0,16. Glavni vzrok za neskladje ni neupoštevanje dvojnosti vozliščnih ravnin, ampak dejstvo, da ima tak objektiv *notranje ostrenje* (angleško "internal focusing", od tod oznaka IF). Namesto da bi se za slikanje od blizu celotni sestav leč odmikal od filma, se s premikanjem nekaj manjših leč znotraj objektiva zmanjšuje goriščna razdalja. (Podobno na sicer na mnogo enostavnejši način dela naše oko.) Na razdalji 2,5 m je goriščnica zaznavno manjša od 300 mm. Dolžina objektiva ostane ves čas enaka, premiki pa so majhni in se dogajajo v zatesnjenem prostoru znotraj objektiva, kar povečuje hitrost in zanesljivost delovanja.

Specialni objektivi s tako imenovano *plavajočo optiko* ostrijo z iztegom in obenem s spreminjanjem goriščne razdalje.

Najmanj pregledne so razmere pri objektivih s spremenljivo goriščnico – popularnih *zoomih*. Podatki proizvajalcev o goriščnicah se že pri slikanju zelo oddaljenih predmetov neredko razlikujejo od dejanskih za več kot dovoljenih 6%. Pri slikanju iz bližine se goriščnice še dodatno spremenijo. Če pa znamo kolikor toliko oceniti resnično goriščno razdaljo, bodo naši računi dovolj natančni.

Peter Legiša

PRIHAJA KOMET HALE-BOPP

Zadnja desetletja niso bila ravno bogata s svetlimi kometi. Vse od leta 1976, ko je na nebu kraljeval komet West, do lanske pomladi ni bilo posebno svetlega kometa. Celo težko pričakovani Halleyev komet, ki je prišel v bližino Sonca v letu 1986, je bil precejšnje razočaranje za opazovalce, saj ni dosegel pričakovanega sija. Zato je bil nenadejan prihod kometa Hyakutake, ki se je Zemlji približal na vsega 15 milijonov kilometrov, in za leto 1997 napovedani prihod svetlega kometa Hale-Bopp, pravi praznik za astronome in druge ljubitelje nočnega neba.

Komet s kataloško številko C/1995 01 je 23. julija 1995 odkril ameriški ljubiteljski astronom Alan Hale iz New Mexica. Med svojim rednim opazovanjem neba je opazil šibko meglico, ki je prej v tistem delu neba ni bilo. Dve uri po njegovem telefonskem klicu v Centralni biro za astronomske telegrame v Cambridgeu, kjer zbirajo opazovanja nebesnih teles, je prišlo še drugo sporočilo o odkritju novega kometa. Thomas Bopp je s podobnim teleskopom kot Hale skoraj sočasno odkril isti komet. Ker pa je opazoval kakih 140 kilometrov od svojega doma, je potreboval slabi dve uri do telefona, zato so odkritje pripisali obema astronomoma.



Sliko kometa Hale-Bopp je 18. 2. 1997 posnel Herman Mikuž na observatoriju na Črnem vrhu. Na posnetku je dobro viden tako ravni plinski rep, kakor tudi širok in svetlejši prašni rep.

Izračunali so, da je komet Hale-Bopp povratni komet, ki se giblje po zelo razpotegnjenem eliptičnem tiru z obhodnim časom približno 3000 let. 22. marca letos se je približal Zemlji na 196,7 milijona kilometrov. V tem času je bil verjetno najsvetlejši in tudi v najugodnejši legi za opazovanje. 1. aprila je komet prišel v perihelije. Tedaj je bil od Sonca oddaljen 136,7 milijonov kilometrov.

Čeprav se je komet v času odkritja nahajal še daleč od Zemlje, je bil nepričakovano svetel. Astronomi so v tistem času napovedovali, da bo komet verjetno med najsvetlejšimi v tem stoletju. Seveda pa je pri kometih težko napovedovati njihov razvoj v bližini Sonca in se optimistične napovedi lahko kaj hitro izneverijo. Dosedanje spremljanje kometa pa vendarle kaže, da se bodo prve napovedi astronomov uresničile. Komet Hale-Bopp se Zemlji ne bo približal toliko, kot se je komet Hyakutake, bo pa verjetno svetlejši z bolj izrazitim repom. Vsekakor velja srečanje s kometom Hale-Bopp za zelo zanimivo in enkratno doživetje.

Vidnost kometa Hale-Bopp iz naših krajev

Komet Hale-Bopp je iz naših krajev dobro viden že vse od januarja, viden pa bo še do konca aprila 1997. Od začetka januarja do sredine marca je bilo komet mogoče opazovati v zgodnjih jutranjih urah nad vzhodnim obzorjem. Ob koncu marca je bil viden v večernih urah nad severozahodnim obzorjem. Sredi noči je glava kometa za nekaj ur zdrsnila za obzorje, rep kometa pa je bil vso noč dobro viden. V jutranjih urah pa je bil cel komet zopet viden nad severovzhodnim obzorjem. Prvega aprila je komet Hale-Bopp prišel v perihelij, Soncu najbližjo točko na svoji orbiti. V drugi polovici aprila bo komet viden le še v večernih urah, saj se bo navidezno vse bolj bližal Soncu. V prvih dneh maja bo dokončno izginil v večerni zarji.

Pojav kometov na nebu

Čeprav je pojav kometov skozi zgodovino ljudem povzročal veliko preglavic in skrbi, sodobna znanost posreduje resnično sliko o teh nebesnih telesih.

V velikih oddaljenostih od Sonca je komet povsem neaktivna hladna gmota. Ko pa pride v notranje predele Osončja, ga na površju segreje Sončeva svetloba. Iz njega pričnejo iztekati večje količine pare in prahu, kar opazimo kot oblak okoli jedra in mu pravimo koma. Pod vplivom Sončevega vetra, ki odpihuje snov iz okolice jedra kometa, nastane značilen rep, kar dela komete prave posebneže v Osončju.

Vsako leto pride v bližino Zemlje več deset kometov. Večina kometov je tako šibkih, da jih je mogoče videti le s teleskopi. Redkeje se pojavijo kometi, ki so dobro vidni tudi s prostim očesom. Kako svetli so? No, njihovega sija ni mogoče primerjati s sijem Lune. Ker so to razsežna telesa, je tudi njihova svetloba porazdeljena med glavo in repom. Prej spominjajo na megličast oblak kot pa na kako trdno gmoto. Glave kometov so izrazite in navadno bolj ali manj okrogle oblike, repi pa se lahko raztezajo čez velik del neba. Čeprav je celoten sij kometov lahko zelo velik, pa zaradi megličaste podobe komet kaj kmalu izgine v soju polne Lune ali nesramnih mestnih luči.

Ko se kometi približajo Zemlji, je njihovo navidezno gibanje po nebu zelo hitro. V eni noči lahko prepotujejo cela ozvezdja. Celo s prostim očesom je mogoče opaziti premikanje kometov glede na okoliške zvezde. Ko se kometi približajo Soncu, se njihovo navidezno gibanje upočasni. Ob srečnih okoliščinah, ki so odvisne od lege Zemlje in naklona tira komet, lahko komet ponovno opazujemo, ko obide Sonce in se prične vračati v zunanje predele Osončja.

Mnogi opazovalci so prepričani, da pojav kometov najlepše doživimo z opazovanjem s prostim očesom v odmaknjenih krajih pod temnim jasnim nočnim nebom, ki ga ne motijo mestne luči. Drugi prisegajo na opazovanje z lovskimi daljnogledi, s katerimi lahko hkrati zajamejo velik del kometove glave in repa. Profesionalni astronomi, ki si služijo kruh z raziskovanjem kometov, uporabljajo vse sodobne astronomske pripomočke, da bi prodrli čim globlje v skrivnosti teh nebesnih popotnikov.

Opazovanja kometov iz vesolja

Ob prihodu Halleyevega komet, leta 1986 so izpeljali prvo mednarodno usklajeno vesoljsko opazovalno akcijo. Glavno vlogo so odigrale tri velike vesoljske agencije, evropska, sovjetska in japonska. Na srečanje s kometom so poslali kar pet sond, dve sovjetski sondi Vega 1 in Vega 2, japonski Suisai in Sakigake ter evropsko Giotto. Misija Giotto se je kometu najbolj približala in na Zemljo poslala najpomembnejše znanstvene podatke.

Ameriška vesoljska agencija NASA je ob teji priložnosti doživela hud polom zaradi nesreče vesoljskega plovila Challenger. V eksploziji plovila so poleg posadke izgubili tudi prvi eksperiment za opazovanje Halleyevega komet. Zaradi te nezgode so odpovedali vse nadaljne polete in tako je pri NASI v vodo padel projekt Astro 1, ki je bil namenjen opazovanju znamenitega komet. Američani so veliko znanstveno izgubo delno nadomestili s preusmeritvijo starejše sonde ISEE-3 (Third International Sun-Earth Explorer), ki je bila namenjena opazovanju medsebojnega vpliva

Sončevega vetra in Zemljine magnetosfere. Sondo so kasneje preimenovali v ICE (International Cometary Explorer) in jo leta 1985 napotili h kometu Giacobini-Zinner.

Ko je julija leta 1985 raketa Ariane 1 v vesolje ponesla majhno, 960 kilogramov težko sondo Giotto, si ni nihče upal napovedati, da bo to eden najuspešnejših projektov Evropske vesoljske agencije (ESA). Giotto je bila prva evropska sonda, ki so jo poslali v medplanetarni prostor in sploh prva sonda, ki so jo posebej načrtovali za opazovanje kakega komete iz neposredne bližine. Narejena je bila v rekordnem času, saj je od idejnega osnutka do izstrelitve poteklo le pet let. Sonda ni bila zgrajena tako, da bi preživela srečanje s Halleyevim kometom. Pričakovali so, da bodo prašni delci, s katerimi se je sonda srečala v bližini kometovega jedra, uničili njen ščit in vse inštrumente. Kasneje se je izkazalo, da sonda ni samo preživela srečanja s Halleyevim kometom, temveč je bila sposobna za ponovno opazovanje drugih kometov.

Glavne naloge sonde Giotto so bili snemanje jedra Halleyevega komete, določanje sestave kometove kome, opazovanje fizikalnih in kemijskih procesov v kometovi atmosferi, merjenje kemijske sestave prašnih delcev, merjenje količine nastalega prahu in plinov ter merjenje interakcije med plini in Sončevim vetrom. Med pomembnejšimi inštrumenti, ki so bili izbrani za to misijo, je bila kamera, s katero so snemali položaj in obliko jedra komete. S pomočjo treh različnih masnih spektrometrov so merili sestavo plinov in prahu v komi, s še tremi drugimi detektorji pa hitrosti delcev in magnetno polje v bližini komete.

Sonda Giotto se je 14. 3. leta 1986 jedru Halleyevega komete približala na vsega 600 kilometrov. Pripravljeni poskusi so zelo dobro uspeli, čeprav je med približevanjem h kometovem jedru sonda zadel večji delec in jo rahlo zasukal. Večina poskusov je potekala v času bližnjega srečanja neprekinjeno 32 minut. Sonda je v tem času zbrala kopico neprecenljivih podatkov o zgradbi, fizikalni in kemijski sestavi komete, ki prej niso bili dostopni zemeljskim opazovalcem.

Sonda Giotto je naredila prve neposredne posnetke kakega jedra komete. Jedro je bilo večje, kot so pričakovali strokovnjaki. Bilo je bolj ali manj krompirjaste, torej nepravilne oblike in velikosti 16 km krat 7,5 km krat 8 km. Jedro je bilo tudi mnogo bolj "črno" od pričakovanj, saj so meritve pokazale, da odbija vsega štiri odstotke vpadle Sončeve svetlobe. Za primerjavo naj povemo, da Venera odbija 76 odstotkov vpadle svetlobe. Odbojnost jedra Halleyevega komete je primerljiva s temnejšimi področji na površju Lune in Marsovim satelitom Deimosom.

Sonda Giotto je potrdila tudi staro domnevo, da so jedra kometov sestavljena iz "rahlega" ledu, čigar povprečna gostota je približno tretjina gostote vode.

Odkritje prašnih in plinskih curkov, ki kot nekakšni gejziri bruhajo snov v medplanetarni prostor, je pokazalo, da le okrog deset odstotkov površja jedra oddaja snov. Posnetki so tudi pokazali z grički in dolinami razgibano površje, ki se zaradi aktivnosti v bližini Sonca stalno spreminja.

Analize plinov so pokazale, da se sestava kome zaradi zapletenih kemijskih procesov spreminja z oddaljenostjo od jedra. Zato so le notranji predeli kome podobni kemijski sestavi jedra. Kemijska sestava, ki jo je izmerila sonda, je bila bolj ali manj pričakovana. Meritve v notranjih predelih kome so pokazale, da je v kometu 80 odstotkov vode, 10 odstotkov ogljikovega monoksida (CO), 2,5 odstotka ogljikovega dioksida (CO₂), CH je udeležen v 7 odstotkih, vsebnost NH je 0,1 odstotka. Sonda je odkrila še sledove železa, natrija in žvepla.

Meritve vsebnosti posameznih elementov v kometu so pokazale, da je njihovo razmerje podobno razmerju elementov na Soncu. Edina izjema je dušik, ki ga je v kometu znatno več. Bistvene razlike pa so se pokazale s primerjavo razmerij elementov na Zemlji in v meteoritih. Strokovnjaki si to razlagajo tako, da je jedro komete sestavljeno še iz prastarega materiala, iz katerega je nastalo Osončje.

Giotto se je najbolj približal Halleyevemu kometu, ko je bil ta od Sonca oddaljen približno 0,9 astronomske enote. V tem času je jedro komete vsako sekundo oddajalo okrog 20 ton plina in 33 ton prašnih delcev. To bi lahko primerjali z železniško postajo, ki jo vsako minuto zapusti vlak s približno sto polno naloženimi vagoni peska. Analize nekaj tisoč prašnih delcev, ki jih je sonda opravila med preletom komete, so pokazale, da obstajata predvsem dve vrsti delcev. Prva so takoimenovana 'organska zrna', ki so sestavljena iz vodika, ogljika, dušika in kisika. Druga so 'mineralna zrna', sestavljena iz težjih elementov kot so natrij, magnezij, silicij, kalcij in železo.

Po uspešni akciji ob srečanju s Halleyevim kometom, so sondo Giotto 'zamrznili'. Po dolgotrajnem počitku so leta 1992 sondo ponovno obudili k življenju in jo pripravili za naslednje srečanje, tokrat s kometom Grigg-Skjellerup. Ker je sonda imela dovolj goriva in je večina naprav še vedno delovala, so njen tir spremenili tako, da se je 10. 7. 1992 približala jedru komete Grigg-Skjellerup na vsega 200 kilometrov. Sonda Giotto je tudi tokrat dobro opravila svojo nalogo in odkrila predvsem nekatere razlike med kometom Halleyevem in kometom Grigg-Skjellerup. Po drugi nenadejani nalogi so sondo ponovno 'zamrznili'. Sonda se bo vrnila v bližino Zemlje leta 1999 in ker je na njenem krovu ostalo še štiri kilograme goriva, jo bodo takrat poskusili ponovno oživiti ter poslati na srečanje s kakim novim kometom.

Vesoljske misije prihodnosti

Po izredno uspešno opravljeni nalogi sonde Giotto so se pri NASI odločili za še bolj drzen podvig. S sondo Stardust (Zvezdni prah), ki jo bodo izstrelili predvidoma februarja 1999, naj bi na Zemljo prinesli vzorce prahu iz kometove kome. Leta 2004 naj bi se Stardust potopil v oblak okoli kometa Wild-2. S pomočjo aerogela, posebnega poroznega materiala, naj bi zajeli pline in prah, ki obkrožajo kometovo jedro. Sonda bo nosila tudi kamero, s katero bo mogoče narediti še boljše posnetke jedra, kot je bilo to mogoče s sondo Giotto. Nabrani vzorci se bodo v posebnih kapsulah vrnili na Zemljo leta 2006. Če bo misija uspela, bo to prvi material, ki bo s kometa prenešen na Zemljo, kjer ga bodo strokovnjaki lahko natančno preučili.

Ideja za drugo vesoljsko misijo, ki naj bi v bližnji prihodnosti odkrivala skrivnosti kometov, je nastala pri Evropski vesoljski agenciji (ESA). Izstrelitev vesoljske sonde Rosetta bo predvidoma 23. 1. 2003. Če bo šlo vse po načrtih, bi se morala v avgustu leta 2011 sonda približati povratnemu kometu Wirtanen. Na površje kometovega jedra bo sonda spustila dve manjši sondi, Roland in Champollion, ki bosta vsaj 84 ur opravljali različne kemijske in fizikalne meritve. Rosetta bo snemala in zbirala še druge podatke o kometu vse do oktobra 2013.

Andrej Guštin

NAPIŠITE PESMICO – Pesnikov pa ni!

Ko smo v tretji številki Preseka objavili vabilo, da napišite odštevanko za metanje Turkov čez krov, smo pričakovali, da nas boste zasuli s pošto.

Pa smo dobili eno samo pesmico. Poslal nam jo je Dušan Modic iz Novega mesta.

To Turke naj izdaja
brez nemira, tepeža.

Pesnili smo tudi v uredništvu:

Ob muke kapitan zdaj je,
več ni zadrege zanj.

Potuhnjena skriva
za črke se rima preteča.

Vabilo še vedno velja!

Naj spomnimo. Napisati morate odštevanko, v kateri si slede samoglasniki v vrstnem redu

o, u, e, a, i, a, a, e, e, i, a, e, e, a.

Marija Vencelj

UČITELJI RIŠEJO

Ne drži, da samo učenci rešujejo teste. Včasih morajo tudi učitelji reševati naloge, ki jih strogi predavatelj nato popravi in oceni. Pred časom smo učitelje na 150-urnem uvodnem tečaju iz računalništva poskušali presenetiti z naslednjimi nalogami iz programskega jezika logo. Ker je bilo o logu le nekaj predavanj, učitelji pa večinoma niso bili preveč navdušeni nad programiranjem, so naloge vsebovale le vprašanja iz želje grafike (brez rekurzije). Poskusite jih rešiti tudi vi.

1. Kakšno sliko nariše naslednje zaporedje ukazov:

CS

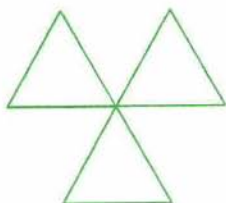
REPEAT 4 [

FD 100 LT 90 FD 100 LT 90 FD 100 LT 90 PU FD 100 PD

]

2. Katero od naštetih zaporedij ukazov nariše sliko na desni? (Obkroži vse pravilne odgovore.)

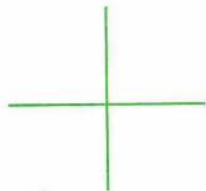
Želva se pred ukazi nahaja v sredini lika in je obrnjena v desno.



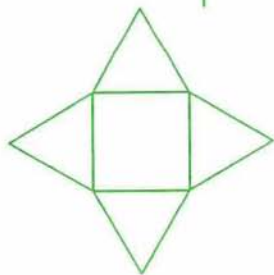
- (a) REPEAT 3 [REPEAT 3 [FD 100 RT 120] RT 120]
- (b) REPEAT 3 [REPEAT 3 [FD 100 LT 120] RT 120]
- (c) REPEAT 3 [REPEAT 3 [FD 100 LT 120] LT 120]
- (d) REPEAT 3 [REPEAT 3 [FD 100 RT 120] LT 120]

Posamezne odgovore (zelo) na kratko utemelji.

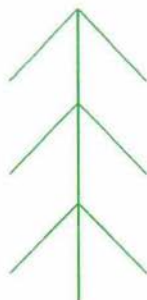
3. Sestavi ukaz **krizec**, ki nariše lik na desni. Dolžina krakov naj bo 100 enot.



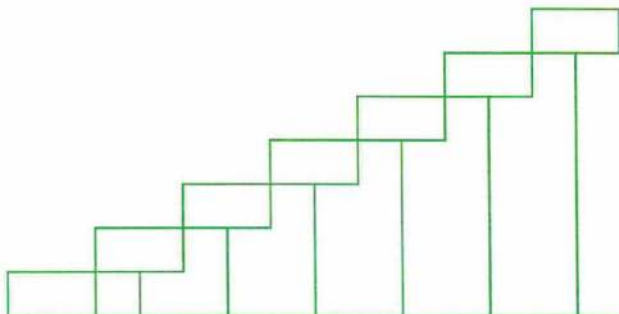
4. Sestavi ukaz **cvet**, ki nariše lik, ki je prikazan na desni. Stranice kvadrata in trikotnikov merijo 150 enot. Središče lika naj bo na sredini zaslona.



5. Sestavi ukaz **smreka** : d , ki nariše smreko "višine" d . Kot med deblom in vejami naj bo 45 stopinj. Smreka z "višino" tri je prikazana na sliki desno.



6. Sestavi ukaz **stopnice**, ki nariše stopnišče s petindvajsetimi stopnicami. Stopnice so široke 20 in visoke 10 enot. Pazi, da pri risanju ne boš zašel čez rob zaslona. Stopnišče s sedmimi stopnicami je videti takole:



7. Sestavi ukaz **lomljenka** : n : d , ki nariše naključno lomljeno črto, sestavljeno iz n daljic. Vse daljice so dolge d enot in so lahko vodoravne ali navpične. Naključno lomljenko izbrane dolžine dobimo takole: Na začetku je želva na sredini zaslona in gleda navzgor. Na vsakem koraku (teh bo ravno n) se naključno odločimo za spremembo želvine smeri za 90 stopinj v levo, za 90 stopinj v desno ali pa želva svojo smer ohrani. Nato narišemo daljico dolžine d v novi smeri.

Martin Juvan

MUHE

Na dvorišču stoji 2 m visok drog, na vrhu katerega sedijo tri muhe. Točno opoldne vse tri muhe hkrati odlete v tri različne konce dvorišča. Kdaj se bodo muhe nahajale v isti ravnini?

Marija Vencelj

BUHTELJNI V LABIRINTU

Na predzadnji strani ovitka je nenavaden labirint, sestavljen iz barvnih polj. Na poti skozi labirint vas usmerjajo napisi na posameznih poljih. Pravila, ki veljajo v labirintu, so naslednja:

- V vsako roko vzamemo po en svinčnik (ali kako drugo kazalo). Prvega postavimo na polje številka 1, drugega pa na polje številka 3.
- Potezo v labirintu naredimo tako, da izberemo enega od obeh svinčnikov in upoštevamo navodila na polju, na katero kaže izbrani svinčnik.
- Labirint je razrešen, ko enega od obeh svinčnikov pripeljemo na polje z napisom CILJ.

Poglejmo si primer! Denimo, da smo se pri prvi potezi odločili za svinčnik, ki kaže na polje 3. Tam je vprašanje: ALI JE DRUGI SVINČNIK NA RUMENEM POLJU?. Odgovor je DA, saj kaže drugi svinčnik na rumeno polje. Torej premaknemo izbrani svinčnik s polja 3 po poti označeni z DA na polje 9. Sedaj se moramo ponovno odločiti, s katerim od obeh svinčnikov bomo naredili naslednjo potezo: s tistim, ki je še vedno na polju 1, ali s tem, ki je sedaj na polju 9. In tako naprej, dokler ne pripeljemo enega od svinčnikov na CILJ.

Reševanje tega labirinta je torej nekoliko drugačno kot pri običajnih labirintih, kjer se odločamo, ali bomo na križišču zavili v levi ali desni hodnik. Tu izbiramo svinčnik, s katerim bomo napredovali, nato pa nas napis na izbranem polju usmeri naprej. Vprašanja na večini polj se nanašajo na položaj drugega svinčnika. To pomeni, da sta oba svinčnika pri gibanju po labirintu med sabo tesno povezana. Če želimo priti do cilja, ju moramo voditi usklajeno.

Preizkusite!

Pri nerodni izbiri se kaj hitro zgodi, da nas napis na polju pošlje popolnoma drugam, kot bi si želeli. Med drugim se nam lahko pripeti celo to, da se med potjo po labirintu spremenijo pravila. Za to poskrbi polje 4. Ko izberemo svinčnik, ki kaže na to polje, ga moramo najprej premakniti po poti označeni z DA, nato pa moramo pri vsaki naslednji potezi odgovor zanikati (temu bomo rekli pravilo 4). Denimo, da se pri neki naslednji potezi znajdemo na polju 11, kjer se vprašanje glasi: ALI JE TO POLJE RDEČE?. Odgovor je DA, ker je polje 11 rdeče, toda, ker deluje pravilo 4, moramo odgovor zanikati, zato nadaljujemo po poti označeni z NE. Tako postopamo, dokler pravila 4 ne izključimo.

Pravilo 4 preneha veljati, ko ga aktiviramo drugič! Ko pridemo z enim od svinčnikov ponovno na polje 4 in ga izberemo, najprej upoštevamo prvi del napisa: POJDI V SMERI DA. Ker pri tej potezi še vedno deluje

pravilo 4, nadaljujemo po poti označeni z NE. Pri vsaki nadaljni potezi pa pravilo 4 deluje dvakrat. Vsak odgovor moramo dvakrat zanikati, kar je isto, kot če pravilo 4 sploh ne bi delovalo.

Pri vseh poljih je potrebno premakniti le en svinčnik, razen pri polju številka 10, kjer moramo najprej premakniti drugi svinčnik v smeri DA in nato še svinčnik, ki kaže na to polje, po poti označeni z NE. Če deluje pravilo 4, se seveda vlogi zamenjata: drugi gre v smeri NE in prvi v smeri DA.

Pa še to: ALI IMAŠ RAD BUHTELJNE?. Tisti, ki jih radi jeste, nadaljujete s polja 5 v smeri DA, če jih ne marate, greste v smeri NE. Tisti pa, ki se ne morete odločiti, ali so vam všeč ali ne, lahko čisto po matematično privzamete, da jih, denimo, ne marate. (Če se pa slučajno zgodi, da vam med reševanjem labirinta zadišijo sveže pečeni buhteljni iz kuhinje, ne bo nič narobe, če privzetek spremenite in si jih privoščite, dokler so še topli.)

Veliko zabave pri reševanju.

Iztok Arčon

Dodatno branje:

Labirinte, sestavljene iz izjav, ki se sklicujejo druga na drugo, je izumil Robert Abbott in jih objavil v svoji knjigi *Supermazes*, Prima publishing, Rocklin, Calif., 1996. Lep primer Abbottovega labirinta lahko najdete v decembrski številki revije (1996) *Scientific American*. Prevod je bil objavljen v eni zadnjih številk revije *Življenje in tehnika*.

PISMA BRALCEV

Srednješolka *Mateja Jerše* iz Ljubljane nam je poslala naslednjo zanimivo nalogo:

KVADRATNA FUNKCIJA IN ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK

Dokaži, da so teme in ničli kvadratne funkcije oglišča enakostraničnega trikotnika natanko takrat, ko je diskriminanta enaka 12.

Naloga je res lepa in *Mateja* zasluži čestitke zanje. Sedaj, ko je odgovor na dlani, naloge ni več težko ugnati. Poskusite!

Odgovorna urednica

STO LET ELEKTRONA

Leta 1995 je poteklo sto let od odkritja rentgenske svetlobe, 1996 sto let od odkritja radioaktivnosti in 1997 sto let od odkritja elektrona. Med seboj povezana odkritja so prispevala k nastanku današnje fizike.

Misel, da je snov sestavljena iz delcev, izvira iz kemije. Fizikom se je govorjenje o atomih spočetka zdelo preveč ohlapno. V drugi polovici prejšnjega stoletja pa so za velikost atomov dobili ocene, ki so se čedalje boljše ujemale, in so atome sprejeli v fiziko. Najprej so jih imeli za nespremenljive in nedeljive, a odkritje radioaktivnosti je pokazalo, da se atomi enega elementa lahko spremenijo v atome drugega elementa. Že prej je odkritje elektrona nakazalo, da so atomi sestavljeni iz naelektrenih delcev. To misel so fiziki razvijali do današnjih dni in pri tem odkrili veliko novih delcev. Nekatere od teh so imeli najprej za nesestavljene, pa se je pokazalo, da niso taki. Toda elektron, ki so ga odkrili prvega, še danes velja za nesestavljenega. Je najstarejši *osnovni delec*.

Z odkritjem Voltove baterije so fiziki lahko raziskovali stalni električni tok. Najprej so od tega pridobili kemiki. Tok so speljali skozi raztopine soli in pri *elektrolizi* odkrili nekaj novih elementov. Michael Faraday, eden od najuspešnejših eksperimentatorjev, je leta 1824 spoznal, da iz raztopine soli enak naboj izloči kilomol katerega koli enovalentnega elementa. Ob tem je razmišljal o naboju iona, to je naelektrenega delca, ki potuje po raztopini. Vendar si tedaj o pojmih atoma in molekule še niso bili čisto na jasnem.

Leta 1874 je George Johnstone Stoney prvi ocenil velikost naboja enovalentnega iona in je ta naboj imenoval *elektron*. Z imenom je posegel v prazgodovino elektrike. Tako so imenovali jantar, za katerega je bilo znano, da privlači lahke koščke nekaterih snovi, če ga podrgnejo. Stoney je poskušal pojasniti sevanje svetlobe z gibanjem naelektrenih delcev v atomu. Razmišljal je celo o gibanju po elipsi, a misli ni dalje razvil.

Poleg toka po raztopinah soli so raziskovali tudi tok po razredčenih plinih. Heinrich Geissler je razvil črpalko, s katero je izsesal zrak iz steklenih cevi, da je padel tlak pod tisočino navadne vrednosti. Po ceveh je pognal električni tok in opazoval, kako se je svetil plin in kristali v cevi. Sodeloval je s fizikom Juliusom Plückerjem in Johannom Wilhelmom Hittorfom. Prvi je leta 1858 opazil, da izhaja pri dovolj nizkem tlaku preostalega plina iz katode, to je negativne elektrode v cevi, raven svetleč pramen. Drugi je čez deset let skoval ime *katodni žarki*. Pozneje je opazil, da so se žarki ukrivili, ko je cevi približal magnet.

V Angliji je William Crookes delal poskuse, ne da bi vedel za nemške poskuse. Na nasprotni strani katode, kjer so katodni žarki zadeli cev, se je steklo zelenkasto svetlikalo. Tam je nastala povečana senca križa iz sljude, ki ga je postavil na pot katodnim žarkom. Žarki so stalili košček platine, ki so ga zadeli na svoji poti. Po tem je Crookes sodil, da so katodni žarki negativno naelektrene molekule.

Ali niso morda katodni žarki valovanje? Dilema – ali delci ali valovanje – so si fiziki postavili že o svetlobi. Tedaj se že vedeli, da je svetloba elektromagnetno valovanje. Dokler se še niso navadili na pojem električnega in magnetnega polja, so pri tem mislili na mehanično valovanje po etru, nekakšni zelo rahli snovi.

Heinrich Hertz se je leta 1883 tako vprašal o katodnih žarkih. Okoli njih bi se moralo pojaviti magnetno polje kot okoli toka po žici, če bi jih sestavljali hitri naelektreni delci. Polja ni zaznal, ker je imel premalo natančen merilnik. Zaradi tega, ker mu ni uspelo dovolj znižati tlaka, tudi ni ugotovil, da bi naelektreno telo odklonilo katodne žarke. Zato je imel katodne žarke za valovanje. Na to ga je napeljala tudi ugotovitev, da predrejo katodni žarki tanko plast snovi. Njegov učenec Philipp Lenard je podrobneje raziskal oslabitev žarkov pri prehodu skozi tanke kovinske lističe. Opazil je, da telo dobi negativni naboj, če prestreže katodne žarke. Kot Hertz se je nagibal k misli, da so katodni žarki valovanje etra, poleg tega je okleval z objavo izidov merjenj.

V Angliji je leta 1890 Arthur Schuster izmeril odklon katodnih žarkov v prečnem magnetnem polju. Po odklonu v znanem magnetnem polju je mogoče sklepati na specifični naboj, to je na kvocient naboja in mase. Schuster je za specifični naboj dobil približno 10^{11} As/kg (tedaj so uporabljali druge enote). Specifični naboj ionov pri elektrolizi je bil tisočkrat manjši. To bi pomenilo, da imajo katodni žarki tisočkrat manjšo maso od ionov, če imajo enako velik naboj. Ta misel se mu je zdela nesprejemljiva. Domneval je, da postanejo katodni žarki ob trkih z molekulami v ostanku plina zelo počasni in se zato precej odklonijo.

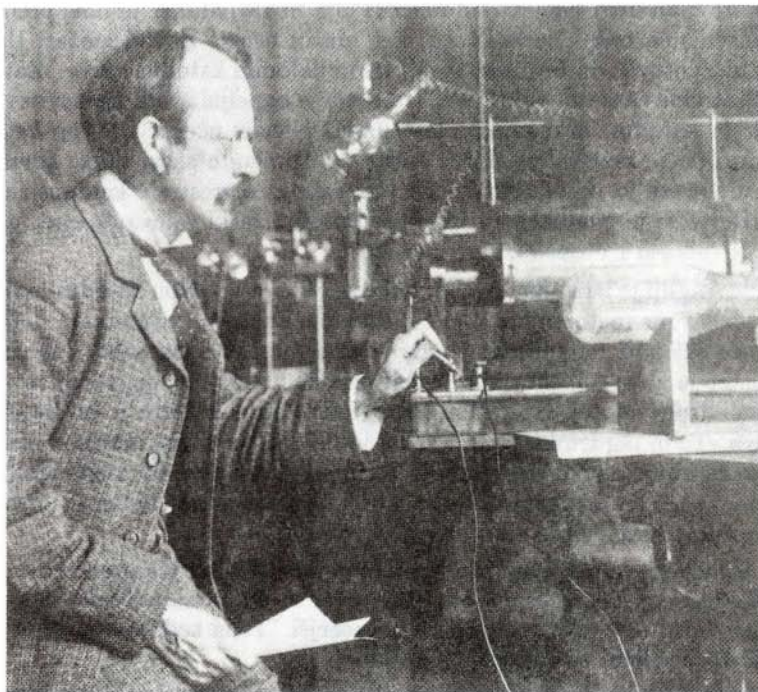
Schusterjeva merjenja je v Nemčiji ponovil Walter Kaufmann in prišel do enakega specifičnega naboja. Prepričal se je, da zaradi trkov z molekulami žarki ne postanejo znatno počasnejši. Toda tudi njemu se je zdel tolikšen specifični naboj nesprejemljiv.

Leta 1896 je na Nizozemskem Pieter Zeeman raziskoval svetlobo, ki so jo sevale natrijeve pare v magnetnem polju. S tem je nadaljeval raziskovanja Michaela Faradaya, ki je iskal in našel vpliv magnetnega polja na svetlobo. Zeeman je s spektroskopom razstavil izsevano svetlobo na sestavine z določeno valovno dolžino in ugotovil, da so se spektralne

črte v magnetnem polju razširile. (Danes vemo, da se črte razcepijo na več bližnjih črt.) Zeemanov učitelj Hendrik Antoon Lorentz je pojasnil to z vplivom magnetnega polja na gibajoče se naelektrene delce. Pravo razširitev je dobil, če je za specifični naboj upošteval podatek za katodne žarke.

Poskuse s katodnimi žarki je delal tudi Francoz Jean Perrin. Leta 1895 je ugotovil, da naelektreno telo zgubi naboj, če prestreže katodne žarke. Negativno naelektreno telo je odbijalo katodne žarke. Izmeril je odklon katodnih žarkov v magnetnem polju, a je odlašal z objavo.

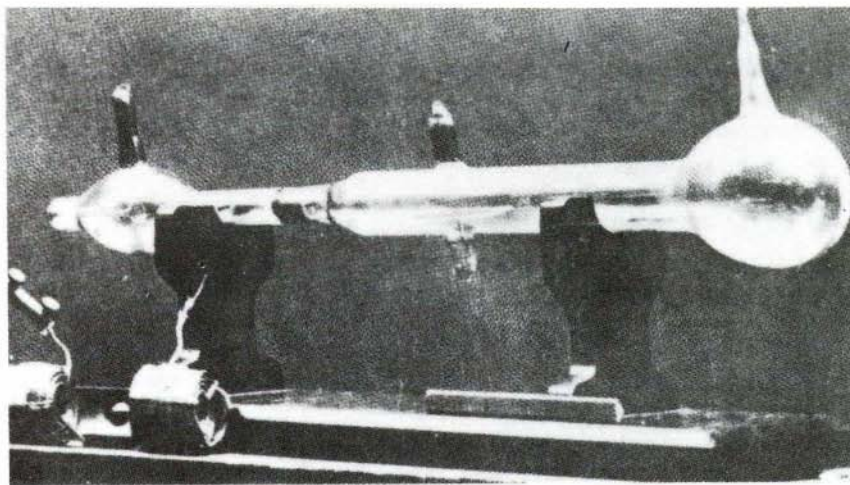
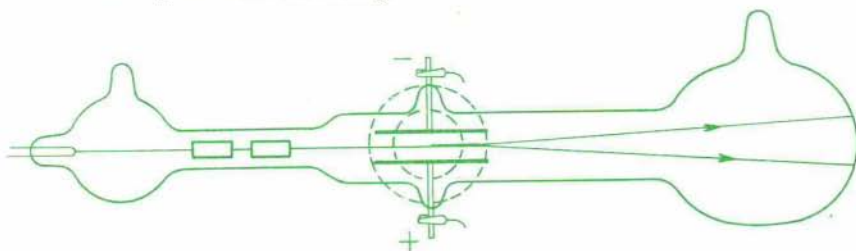
Nemec Johann Emil Wiechert je leta 1897 na javnem predavanju naredil nekaj poskusov s katodnimi žarki. Po odklonu v magnetnem polju je sklepal, da imajo katodni žarki okoli tisočkrat manjšo maso kot vodikovi ioni.



Slika 1. Joseph John Thomson ob cevi za katodne žarke v Cavendishevem laboratoriju. Sodelavci so ga klicali Džej Džej.

Joseph John Thomson (slika 1) je na javnem predavanju 30. aprila 1897 v londonski Kraljevi ustanovi izvajal poskuse s katodnimi žarki.

Elektroda se je negativno naelektrila, ko je z magnetnim poljem usmeril nanjo katodne žarke. Nato je najprej žarke odklonil z magnetnim poljem in nato z dodatnim električnim poljem odklon izravnal (slika 2). Za specifični naboj je dobil nekaj več kot 10^{11} As/kg. Po tem je sklepal, da sestavljajo katodne žarke delci, ki sta jih Zeeman in Lorentz zasledila pri sevanju svetlobe v atomih. Imenoval jih je *korpuskule* po latinski besedi za delce. Pozneje je še natančneje izmeril njihov specifični naboj in izračunal maso s privzetkom, da imajo enako velik naboj kot vodikovi ioni. S časom se je po Lorentzovem predlogu kljub Thomsonovemu nasprotovanju uveljavilo ime elektron, ki ga Stoney prej predlagal za to, kar danes imenujemo *osnovni naboj*.



Slika 2. Cev, s katero je J. J. Thomson pred sto leti naredil odločilni poskus s katodnimi žarki. Zgornja risba kaže kondenzator, katerega električno polje je odklonilo žarke navzdol, in obris tuljave, katere magnetno polje iz ravnine papirja je odklonilo žarke navzgor. Žarki se niso odklonili, ko sta bili vključeni obe polji.

Za odkritelja elektrona velja Joseph John Thomson in za datum odkritja 30. april 1897. Več imen smo omenili, da se je bralec lahko prepričal, kako je v resnici odkritju botrovalo večdesetletno delo številnih fizikov. Schuster je prvi omenil zelo velik specifični naboj. Wiechert je prvi zagotovil, da imajo katodni žarki enako velik naboj kot vodikovi ioni. Drugi, tudi tisti, ki so zaradi negotovosti oklevali z objavo svojih izidov ali so se oprijeli zgrešene misli, da gre za valovanje, so pomagali izpopolniti merilno tehniko. Najbrž je Joseph John Thomson naredil odločilni korak in ni narobe, če navedemo njegovo ime, ko je treba imenovati enega samega odkritelja. Enako res pa je, da s tem naredimo krivico fizikom.

Joseph John Thomson je dosegel več drugih uspehov. Rojen je bil leta 1856. Najprej je želel postati inženir, a se je premislil in končal študij fizike na univerzi v Cambridgeu. Komaj sedemindvajsetleten je tam postal vodja Cavendishevega inštituta in ga je uspešno vodil do leta 1919. Umrl je leta 1940 in je pokopan v westminstrki katedrali ob Newtonu.

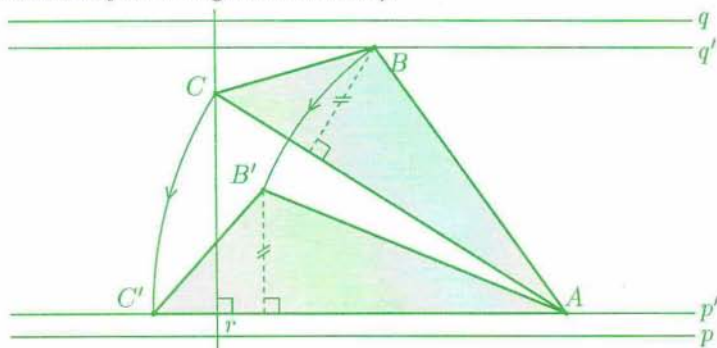
Thomson si je zamislil prvi model atoma. Atom naj bi sestavljal pozitivni naboj, v katerem naj bi bila zbrana domala vsa masa atoma. Po njem naj bi bili razporejeni elektroni kot rozine v potici in bi nihali okoli ravnovesnih leg.

Pozneje se je Thomson posvetil raziskovanju kanalskih žarkov, to je pozitivnih ionov, ki v cevi s tokom po razredčenem plinu uhajajo skozi tanek kanal v katodi. Z odklanjanjem v električnem in magnetnem polju je natančno določil njihovo maso in ugotovil, da imajo ioni istega elementa lahko različno maso. Tako je odkril *izotope*, ki so jih že prej spoznali pri radioaktivnih elementih. Njegovi učenci so izpopolnili masno spektrometrijo, kakor imenujemo natančno merjenje ionskih mas.

Leta 1906 je dobil Nobelovo nagrado za "teoretično in eksperimentalno raziskovanje električnega toka v plinih". Enako nagrado je dobilo pozneje tudi sedem njegovih nekdanjih sodelavcev. Leta 1937 je dobil nagrado tudi njegov sin George Paget Thomson. To ni edini primer, da sta dobila nagrado oče in sin. Vendar je edini primer, da je sinovo odkritje "nasprotovalo" očetovemu. Oče je z merjenjem ugotovil, da so elektroni v katodnih žarkih delci, sin pa se je prav tako z merjenji prepričal, da kažejo elektroni lastnost valovanja. Nagrado je dobil za "eksperimentalno odkritje uklona elektronov na kristalih". To ni bilo valovanje, o kakršnem so razmišljali Herz in somišljeniki, ampak del nove – kvantne – mehanike.

TRIKOTNIK NA TRAKU – Rešitev s str. 200

Naj trikotnik Δ leži med vzporednicama p in q . Če je h dolžina njegove najkrajše višine in d razdalja med p in q , moramo dokazati, da je $h \leq d$. Zaznamujmo z A tisto oglišče trikotnika Δ , ki je najbližje premici p , z B pa tisto oglišče trikotnika Δ , ki je najbližje premici q . Potem tretje oglišče C trikotnika Δ leži med vzporednico p' k p skozi A in vzporednico q' h q skozi B . Razdalja d' med p' in q' seveda ne presega d . Brez škode za splošnost dokaza smemo privzeti, da je oglišče A vsaj toliko oddaljeno od pravokotnice r na p in q skozi C kot oglišče B (v nasprotnem primeru namreč zamenjamo vlogi točk A in B).



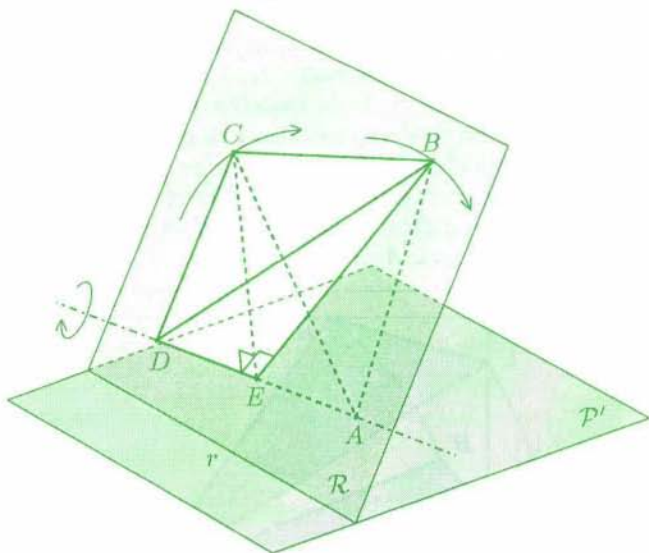
Zasukajmo trikotnik Δ v ravnini premic p in q okrog oglišča A , tako da se oglišče C premesti na premico p' . Pri tem naj B preide v B' , C pa v C' . Zasukani trikotnik tako ostane med p' in q' , njegova višina na stranico AC' pa je pravokotna na p' . Ker je ta višina skladna z višino na stranico AC v trikotniku Δ , od tod takoj sledi $h \leq d'$ in tedaj $h \leq d$.

Boris Lavrič

UTESNJNI TETRAEDER – Rešitev s str. 200

Naj pravilni tetraeder $ABCD$ s stranico dolžine a leži med vzporednima ravninama $\mathcal{P}$ in $\mathcal{Q}$, ki sta za d oddaljeni druga od druge. Privzeti smemo, da je oglišče A najbližje ravnini $\mathcal{P}$, oglišče B pa najbližje ravnini $\mathcal{Q}$. Oglišči C in D potem ležita med ravnino $\mathcal{P}'$, ki je vzporedna $\mathcal{P}$ in gre skozi A , ter ravnino $\mathcal{Q}'$, ki je vzporedna $\mathcal{Q}$ in gre skozi B . Razdalja d' med $\mathcal{P}'$ in $\mathcal{Q}'$ seveda ne presega d . Brez škode za splošnost dokaza smemo predpostaviti, da je oglišče C vsaj toliko oddaljeno od $\mathcal{P}'$ kot oglišče D (v nasprotnem primeru namreč zamenjamo vlogi točk C in D). Zasukajmo tetraeder $ABCD$ okrog osi AD , tako da se rob BC postavi vzporedno ravnini $\mathcal{P}'$

in ostane na isti strani ravnine $\mathcal{P}'$, kot je bil pred zasukom. Pri tem naj se B zasučje v B' , C pa v C' (glej sliko 1).



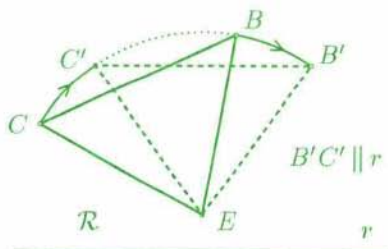
Slika 1.

Ravnina $\mathcal{R}$ skozi B in C ter razpolovišče E roba AD je pravokotna na AD , zato se točki B in C pri sukanju gibljeta po njej. Trikotnik BCE je enakokrak in velja

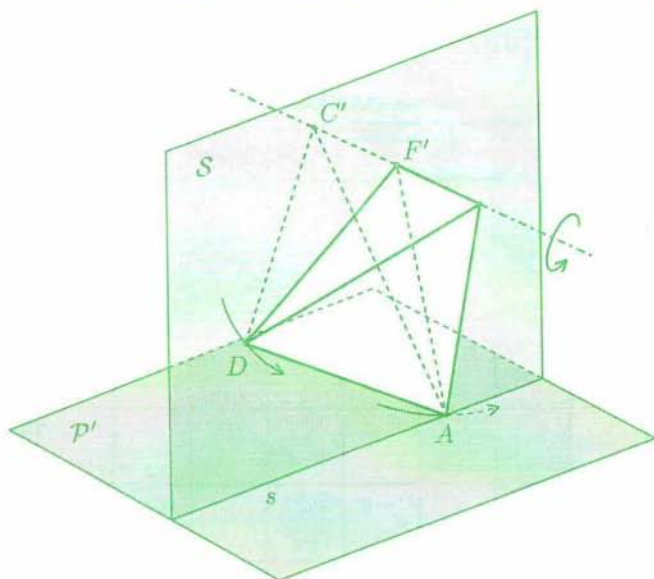
$$|BC| = a, \quad |BE| = |CE| = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

zato njegova najkrajša višina poteka iz oglišča E . Od tod s pomočjo naloge *Trikotnik na traku* (njena rešitev je na prejšnji strani) in slike 2, ki kaže zasuk v ravnini $\mathcal{R}$, lahko brž ugotovimo, da tudi tetraeder $AB'C'D$ leži med $\mathcal{P}'$ in $\mathcal{Q}'$.

Zasukajmo zdaj tetraeder $AB'C'D$ okrog osi $B'C'$, tako da se rob AD postavi vzporedno ravnini $\mathcal{P}'$ in se D ne oddalji od $\mathcal{P}'$. Pri tem naj se A zasučje v A' , D v D' , E pa v E' (glej sliko 3).

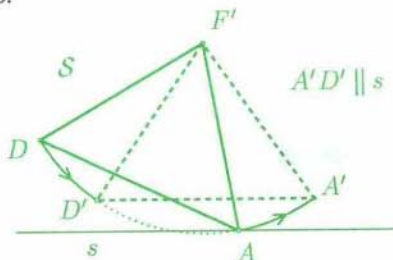


Slika 2.



Slika 3.

Ravnina S skozi A in D ter razpolovišče F' roba $B'C'$ je pravokotna na $B'C'$ in na ravnino P' , točki A in D pa se pri sukanju gibljeta po njej. Podobno kot pri prvem zasuku tetraedra lahko vidimo (glej sliko 4, ki kaže zasuk v ravnini S), da tudi tetraeder $A'B'C'D'$ leži med P' in Q' .



Slika 4.

Daljica $E'F'$ v tetraedru $A'B'C'D'$ je pravokotna na P' , zato je $|E'F'| \leq d'$ in tedaj $|E'F'| \leq d$. Z uporabo Pitagorovega izreka dobimo

$$|E'F'|^2 = |A'F'|^2 - |A'E'|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2,$$

zato velja $d \geq \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Tetraeder med vzporednima ravninama je torej najbolj utesnjen takrat, kadar ti ravnini vsebujeta vsaka enega od nasproti ležečih robov tetraedra.

Boris Lavrič

KRIŽANKA “SLOVENSKI PRAŠTEVILSKI VRHOVI”

AVTOR MARKO BOKALIČ	PALEST. VODITELJ (JASER)	JULIJCI (2347 m)	DESET NA KVADRAT	NAJVEČJA DIVJA MAČKA	PRIPADNIK ITALSKIH PLEMEN	LJUBLJAN. KNAŽIČNAR V CASU IL. PROVINC (CHARLES)	NAŠA CELINA	ŽLAHTNI PLIN	TEHNECU	VIŠINE SO POVZETE PO ATLASU SLOVENIJE	MEI O
VZORČEN SLOVEK										PEVEC DEDIC	
PREDGORJE JULIČEV (1667 m)										KAMN. ALPE (1663 m) JULIJCI (1777 m)	
ITAL. FIZIK IN KEMIČ									SAVINSKE ALPE (2203 m)		
FRAN SUKLJE			IMA FARMAK (GERTRUDE)						KRAJ PRI ZAGORJU		
ANGLEŠKA PLOŠČINSKA MERA			RIMSKA LJUBLJANA		PRIPOVED. PESNITEV			PRAVOSLAV. CERK. ZBOR	SODNI ZBOR		
OKRAŠEN PTIČ								KRAVJI GLAS			
EKIPA			SKUPEK LAS								NAI LOGI
BULOŽER											
VSAKA IMA SVOJ VRH						VISOK GORSKI VRH	PRITOK SAVE				RI ČAS UCI
ČVRSTINA							HITER SLOK PES				
POHORJE (1543 m)								NEM. - FR. KIPAR (HANS)			
								OHRIČ			
FRANCOSKI PISATELJ (BORIS)					MOČAN EKSPLOZIV						
					PODRO- BNOST						
RADON			PEVKA PIAF						NAVEDEK		
			MAJHEN RT						PRIPADNIK MOČNEJS. SPOLA		
OSREDNJI DEL STEBLA							STRIC V PRIMOR. OKOLJU	VEDENJSKA NAVADA			
								HRIB NAD LJ. BARJEM			
KRADLJIVEC				TV VODIT. (MATJAZ)						RIMSKA BO- GINJA JEZE RIMSKI HEŠNI BOG	
				KVARNER OTOK							
REKvizit BRIGITE BUKOVEC						VZHOĐNE KARAVANKE (1699 m)					
KURZ						FRNKOLA					JU (23)
AKTINIJ			BELLUNO			JULIJCI (2393 m)					ODD SPRI NA

NENAVADNA ARITMETIKA ALI NE POSKUŠAJTE TEGA V ŠOLI!

Gotovo ne bi poželi prevelikih simpatij svojih učiteljic oziroma učiteljev matematike, če bi pri kontrolnih nalogah pisali enakosti

$$1 + 1 = 0, \quad 1 + 3 = 2, \quad 2 + 3 = 1, \quad 2 \cdot 3 = 5, \quad 3 \cdot 7 = 9.$$

Bojim se, da vas iz kaše ne bi izvlekel niti pričujoči prispevek, zato vam toplo priporočam, da (ne)znanja, ki ga boste pridobili s prebiranjem naslednjih vrstic, ne uporabite v šoli.

Za kaj gre? Vzemimo dve naravni števili a in b ter ju zapišimo dvojiško. Naj tu povem, da bomo v nadaljevanju število 0 vseskozi prištevali k množici naravnih števil.

$$a = a_o + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot 2^n = a_n a_{n-1} \dots a_o(2); \quad a_i \in \{0, 1\}$$

$$b = b_o + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_m \cdot 2^m = b_m b_{m-1} \dots b_o(2); \quad b_i \in \{0, 1\}.$$

Definirajmo vsoto števil a in b na običajen način, le da pri seštevanju v kupčku ne prenašamo viška v naslednji stolpec. Da ne bo prihajalo do zmede, bomo takšno seštevanje označevali s $\oplus$, navadno pa s $+$. Velja torej

$$c = a \oplus b, \quad \text{kjer } c = c_s c_{s-1} \dots c_o(2), \quad s = \max\{m, n\}$$

$$\text{in } c_k = a_k + b_k \pmod{2}.$$

Oglejmo si zgled. $1 = 1(2)$, $3 = 11(2)$,

$$\begin{array}{r} 1(2) \\ 11(2) \\ \hline 10(2) \end{array}.$$

Ko smo v desnem stolpcu sešteli $1 + 1$, smo dobili $2 = 10(2)$, kar je po modulu 2 enako 0.¹ Desni stolpec rezultata je zato enak 0. Pri običajnem seštevanju bi enico prenesli v levi stolpec, tu pa tega nismo storili.

¹ Da je neko število a po modulu m enako številu b , pomeni, da je število $a - b$ deljivo s številom m , oziroma, da dasta števili a in b pri deljenju s številom m enaka ostanka.

Tako definirano seštevanje ima vse lepe lastnosti navadnega seštevanja. Z lahkoto se namreč lahko prepričamo, da velja:

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c), \quad (1)$$

$$a \oplus b = b \oplus a, \quad (2)$$

$$0 \oplus a = a \oplus 0 = a. \quad (3)$$

Poleg teh običajnih lastnosti pa velja še mnogo manj običajna:

$$a \oplus a = 0. \quad (4)$$

To pa lahko preberemo tudi drugače:

Za vsako naravno število a obstaja tako naravno število b , da velja $a \oplus b = b \oplus a = 0$.

Takšnemu številu, ki je v našem primeru kar enako številu a samemu, rečemo običajno k a nasprotno število. Ugotovili smo torej, da ima v množici naravnih števil vsako število svoje nasprotno število glede na operacijo $\oplus$. To pa je že lastnost, ki je navadno seštevanje ne premore. Tu bi bilo naravnemu številu a obratno število število $-a$, ki pa ni več naravno, saj je negativno, če je le $a \neq 0$. Gimnazijci bodo ugotovili:

Množica naravnih števil tvori skupaj z operacijo $\oplus$ komutativno (Abelovo) grupo.

Pomeni, da je operacija $\oplus$ v nekem smislu celo lepša kot $+$, saj navadno seštevanje v množici naravnih števil ne tvori grupe.

Podobno kot smo definirali operacijo $\oplus$, definirajmo še množenje $\odot$. Številu a in b , ki ju množimo, spet napišemo dvojiško in množimo v kupčku kot običajno, le da pri seštevanju po stolpcih ne prenašamo viška na naslednji stolpec. Zapisano s simboli

$$a_n a_{n-1} \dots a_{o(2)} \odot b_m b_{m-1} \dots b_{o(2)} = c_s c_{s-1} \dots c_{o(2)},$$

kjer

$$s = m + n \quad \text{in} \quad c_k = \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) (\text{mod } 2). \quad (M)$$

Spet si oglejmo zgled: $7 = 111_{(2)}$, $3 = 11_{(2)}$,

$$\begin{array}{r} 111_{(2)} \odot 11_{(2)} \\ 111 \\ \underline{111} \\ 1001_{(2)} \end{array} = 9.$$

Brez težav se prepričamo, da velja

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c), \quad (5)$$

$$a \odot b = b \odot a, \quad (6)$$

$$1 \odot a = a \odot 1 = a \quad (7)$$

in da veže obe operaciji zakon distributivnosti

$$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c). \quad (8)$$

Dogovorimo se takoj, da bomo izraz $a \oplus (b \odot c)$ pisali poenostavljeno $a \oplus b \odot c$ in pri tem tiho privzeli, da ima množenje prednost pred seštevanjem.

Gimnazijec bo iz zakonov (5) – (8) zopet ugotovil, da množica naravnih števil skupaj z operacijama $\oplus$ in $\odot$ tvori kolobar (komutativen in z enoto 1), podobno kot ga tvori množica celih števil z operacijama običajnega seštevanja in množenja.²

Poleg tega, da operaciji $\oplus$ in $\odot$ prekašata navadni operaciji seštevanja in množenja v tem, da prelevita množico $\mathbb{N}$ v kolobar, pa velja še nekaj zanimivih lastnosti.

Spomnimo se, kolikokrat smo si želeli, da bi smeli kvadrirati dvočlenik kar po domače $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, in se vedno znova spraševali, zakaj je svet tako grd, da moramo vrvati še mešani člen $2ab$. No, če bi namesto operacij $+$ in $\cdot$ uporabljali operaciji $\oplus$ in $\odot$, bi bilo vse lepše. Velja namreč

$$(a \oplus b)^2 = a^2 \oplus b^2.$$

Pri tem izraz a^2 pomeni seveda $a \odot a$ in ne $a \cdot a$.

² Vse zgornje in sledeče trditve bo bralec, ki je seznanjen z nekaj teorije algebre, najlažje dokazal, če bo opazil, da je kolobar $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$ izomorfen kolobarju polinomov nad obsegom ostankov po deljenju s številom 2, torej $\mathbb{Z}_2[X]$. Izomorfizem podaja preslikava $a_n \dots a_0_{(2)} \mapsto a_n x^n + \dots + a_0$.

Z uporabo pravil (4), (6) in (8) se v zgornjo trditev prepričamo.

$$\begin{aligned}(a \oplus b)^2 &= (a \oplus b) \odot (a \oplus b) = (a \oplus b) \odot a \oplus (a \oplus b) \odot b = \\ &= a \odot a \oplus b \odot a \oplus a \odot b \oplus b \odot b = \\ &= a^2 \oplus (a \odot b \oplus a \odot b) \oplus b^2 = a^2 \oplus b^2.\end{aligned}$$

Za vajo izpeljimo formulo za $\oplus$ -vsoto prvih n naravnih števil. Z nekaj poskušanja uganemo in na koncu z uporabo popolne indukcije dokažemo formulo

$$1 \oplus 2 \oplus \dots \oplus n = \begin{cases} 1 & \text{za } 4|(n+3) \\ n+1 & \text{za } 4|(n+2) \\ 0 & \text{za } 4|(n+1) \\ n & \text{za } 4|n \end{cases}.$$

Bralec lahko sam izpelje še formuli za $\oplus$ -vsoto prvih n sodih in prvih n lihih števil.

Zanimivo je opazovati praštevila v kolobarju $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$. Pojem praštevila je tu definiran enako kot pri običajnih operacijah – praštevilo v kolobarju $(\mathbb{N}, \oplus, \odot)$, recimo mu $\odot$ -praštevilo, je takšno naravno število p , ki ga lahko napišemo kot produkt $p = a \odot b$ drugih dveh naravnih števil le, če je eno od števil a in b enako 1, drugo pa p . Dodatno predpišemo še, da število 1 ni praštevilo. Pisec članka je poiskal vsa $\odot$ -praštevila, ki so manjša od 500.

2, 3, 7, 11, 13, 19, 25, 31, 37, 41, 47, 55, 59, 61, 67, 73, 87, 91, 97, 103, 109, 115, 117, 131, 137, 143, 145, 157, 167, 171, 185, 191, 193, 203, 211, 213, 229, 239, 241, 247, 253, 283, 285, 299, 301, 313, 319, 333, 351, 355, 357, 361, 369, 375, 379, 391, 395, 397, 415, 419, 425, 433, 445, 451, 463, 471, 477, 487, 499.

Vidimo, da je med njimi nekaj običajnih praštevil, ni pa vseh. Prav tako niso vsa $\odot$ -praštevila običajna praštevila. Zanimivo je, da se tudi tu pojavljajo tako imenovani *dvojčki*, to so pari praštevil, ki se razlikujejo le za 2, npr.

$$(11, 13), (59, 61), (115, 117) \dots$$

Postavimo si lahko vprašanje, ali je takšnih parov praštevil neskončno, a bojim se, da odgovoriti nanj ni enostavno. Pri običajnih praštevilih je enako vprašanje eno od najslavnejših odprtih problemov teorije števil.

Čeprav se zdijo vprašanja v zvezi s $\odot$ -praštevili enako težka kot vprašanja o običajnih praštevilih, je avtorju le uspelo dokazati zanimiv izrek.

Izrek: Če je od 2 različno število p z dvojiškim zapisom $p_n \dots p_{o(2)}$ $\odot$ -praštevilo, je $\odot$ -praštevilo tudi število $\bar{p} = p_o \dots p_{n(2)}$.

Dokaz: Najprej opazimo, da je zadnja dvojiška cifra p_o števila p enaka 1, saj bi se drugače število p lahko zapisalo kot produkt $p = p_n \dots p_{1(2)} \odot 10_{(2)}$, to pa je v protislovju z dejstvom, da je p od 2 različno $\odot$ -praštevilo.

Z grško črko τ označimo funkcijo, ki naravnemu številu $a = a_n \dots a_{o(2)}$ priredi število $\tau(a) = a_o \dots a_{n(2)}$. Velja torej $\bar{p} = \tau(p)$. Ker se število p konča na cifro 1, očitno drži enakost $\tau(\tau(p)) = p$.

Funkcija τ pa ima še eno zelo lepo lastnost – je multiplikativna:

$$\tau(a \odot b) = \tau(a) \odot \tau(b).$$

V to se prepričamo s pomočjo definicije (M) , ker pa je račun kar dolg in nič kaj težak, ga izpuščam.

Predpostavimo sedaj, da število $\bar{p}$ ni $\odot$ -praštevilo. Tedaj obstajata od 1 in $\bar{p}$ različni naravni števili a in b , tako da velja $\bar{p} = a \odot b$. Vendar tedaj velja tudi

$$p = \tau(\tau(p)) = \tau(\bar{p}) = \tau(a \odot b) = \tau(a) \odot \tau(b).$$

Ker je p $\odot$ -praštevilo, je eno od števil $\tau(a)$ in $\tau(b)$, denimo $\tau(a)$, enako 1. Ker je $a \neq 1$, je število a oblike $10 \dots 0_{(2)}$. To pa je nemogoče, saj bi bila tedaj zadnja številka produkta $\bar{p}$ tudi enaka 0, kar pa ni, saj je zadnja številka števila $\bar{p}$ hkrati prva številka števila p .

Predpostavka, da število $\bar{p}$ ni $\odot$ -praštevilo, nas je pripeljala v protislovje, kar pomeni, da je bila napačna. S tem je izrek dokazan.

Za konec naj vas še prepričam, da operaciji $\oplus$ in $\odot$ nista povsem za lase privlečeni in da imata lahko tudi precejšnjo uporabno vrednost. Tisti bralci, ki berejo Presek že več let, se morda spomnijo zmagovalne strategije pri igri Nim, ki je bila opisana v 4. številki Preseka šolskega leta 1985-86. Naj na hitro ponovim.

Nim je igra, ki jo igrata dva igralca s pomočjo 15 vžigalic, ki jih na začetku razporedita v pet kupčkov po 1, 2, 3, 4 in 5 vžigalic. Igralca

izmenoma jemljeta vžigalice s kupčkov tako, da vsakič pobereta s poljubnega kupčka poljubno število vžigalic (vsaj eno in največ toliko, kot jih na izbranem kupčku je). Zmaga tisti, ki pobere zadnjo vžigalico.

Kako igrati, da bomo zmagali? Denimo, da je v trenutku, ko smo na potezi, v posameznih kupčkih $a_1, a_2, \dots, a_5$ vžigalic. Seštejmo $s = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_5$. Če je vsota s enaka 0, smo izgubljeni. Če pa je $s \neq 0$, je gotovo (kot se izkaže) res $a_i \oplus s < a_i$ za vsaj en indeks $i \leq 5$. Ko poiščemo tak indeks, poberemo z i -tega kupčka toliko vžigalic, da jih bo ostalo še $a_i \oplus s$. Ker je $a_i \oplus s < a_i$, je to dovoljena poteza. Tedaj se bo naš nasprotnik znašel v situaciji $a_1, \dots, a_i \oplus s, \dots, a_5$ z vsoto

$$s = a_1 \oplus \dots \oplus a_i \oplus s \oplus \dots \oplus a_5 = s \oplus s = 0$$

in bo izgubljen, saj bo s svojo potezo vsoto 0 gotovo pokvaril. Od tod sledi, da našemu nasprotniku nikoli ne bo uspelo doseči situacije, ko bodo vsi kupčki prazni, saj je takrat vsota s enaka nič.

Na začetku je vsota $1 \oplus \dots \oplus 5$ enaka 1, kot se to lepo vidi iz formule za vsoto prvih n naravnih števil, in zato tisti, ki je na potezi, dobi (denimo tako, da vzame osamljeno vžigalico s prvega kupčka). Naša formula nam pove tudi, da bi bila za prvega igralca igra izgubljena, če bi igrali z 28 vžigalicami in 7 kupčki, saj je vsota $1 \oplus \dots \oplus 7$ enaka 0.

Primož Potočnik

MNOŽENJE Z DEVET – Rešitev s str. 221

Poiskati moramo štirimestno število, katerega produkt s številom 9 je tudi štirimestno število s števkami v obratnem vrstnem redu.

- Če bi bila prva številka večja od 1, bi množenje z 9 povečalo število števk. Iskano število je torej oblike $\overline{1abc}$.
- Nadalje je $\overline{1abc} \times 9 = \overline{9ba1}$, torej iščemo število oblike $\overline{1ab9}$.
- Iz

$$(10^3 + 10^2a + 10b + 9) \cdot 9 = 9 \cdot 10^3 + 10^2b + 10a + 1$$

sledi

$$89a + 8 = b,$$

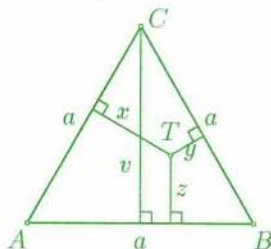
od koder dobimo za števki a in b edino možnost $a = 0$, $b = 8$. Iskano število je $1089 = 33^2 = 3 \cdot 121 \cdot 3$.

Marija Vencelj

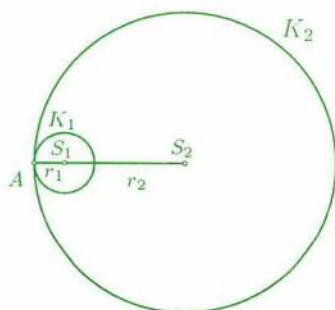
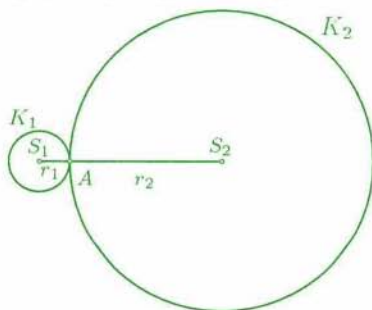
32. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve nalog s str. 238

7. razred

- Monika je izboljšala svoj čas za 6s, torej $\frac{6s}{120s} = \frac{1}{20} = 5\%$. Andrej je izboljšal svoj čas za 6s, to je $\frac{6s}{150s} = \frac{1}{25} = 4\%$. Monika je izboljšala svoj rezultat za večji odstotek.
- Izraz ima vrednost 0, če je $(0,125 \cdot (-2)^3 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} \cdot (-\frac{4}{9}) - \frac{2}{3}t) = 0$. Od tod dobimo $\frac{1}{8} \cdot (-8) \cdot \frac{3}{2} \cdot (-\frac{4}{9}) - \frac{2}{3}t = 0$ in $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}t = 0$, zato je $t = 1$.
- $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot (3^2 + 1) - 2^n \cdot (2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = (3^n - 2^{n-1}) \cdot 10$
- Ploščina trikotnika $\triangle ABC$ je $p_{ABC} = p_{ABT} + p_{BCT} + p_{CAT}$. Če označimo razdalje točke T do stranic z x , y in z , dobimo $\frac{av}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2}$, kjer $a \neq 0$. Torej je $v = x + y + z$.



- Iz $o_1 = 2\pi$ sledi $r_1 = 1$ in iz $o_2 = 10\pi$, da je $r_2 = 5$. Od tod dobimo $S_1 S_2 = r_1 + r_2 = 6$ in $o_3 = 6\pi$ ali $S_1 S_2 = r_1 - r_2 = 4$ in $o_3 = 4\pi$ cm.

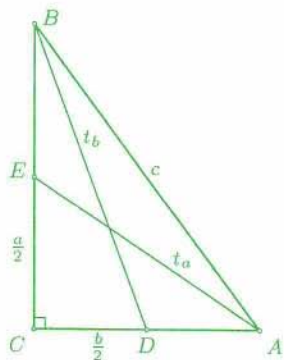


8. razred

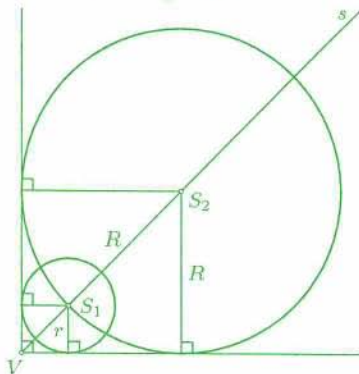
- Iz pogojev naloge dobimo enačbo $\frac{3}{8}x + \frac{3}{10}(180 - x) = 60$, ki ima rešitev $x = 80$, kar pomeni, da so imeli v trgovini 80 kg jabolk in 100 kg hrušk.

2. Enačba $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} (x+2) \right) \right) + \frac{3}{4} = 0$ ima rešitev $x = -6$. Presečišče grafa funkcije z abscisno osjo je torej $M(-6, 0)$, od tod pa dobimo $0 = (5m - 2) \cdot (-6) + 12m - 3$ in $m = \frac{1}{2}$ ter $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

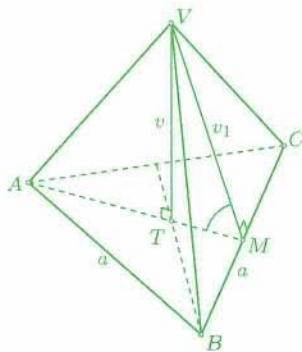
3. Iz pravokotnega trikotnika $\triangle CAE$ dobimo $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = t_a^2$, torej $b^2 = 52 - \frac{a^2}{4}$. Iz pravokotnega trikotnika $\triangle CDB$ dobimo $a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = t_b^2$ in $a^2 = 73 - \frac{b^2}{4}$. Ker je $c^2 = a^2 + b^2$, je tudi $c^2 = \left(73 - \frac{b^2}{4}\right) + \left(52 - \frac{a^2}{4}\right)$. Sledi $c^2 = 125 - \left(\frac{a^2 + b^2}{4}\right)$ in $c^2 = 125 - \frac{c^2}{4}$, od koder dobimo $c = 10$ cm.



4. Iz $\overline{VS_1} = r\sqrt{2}$ in $\overline{VS_2} = R\sqrt{2}$ dobimo $R\sqrt{2} = r\sqrt{2} + R$, od tod pa $r : R = (\sqrt{2} - 1) : \sqrt{2}$.



5. Ker je $\overline{TM} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, je $v_1 = \overline{MV} = 2 \cdot \overline{TM} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ in $v = \overline{TV} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$. Zato je $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ in $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. Od tod dobimo $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ in $a = 18$.



Aleksander Potočnik

16. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve s str. 239

7. razred

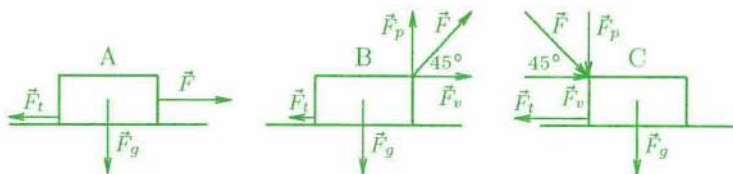
Rešitve teoretičnih nalog:

- Med tališčem in vreliščem je 100 stopinj Celzija oziroma 180 stopinj Fahrenheita. Ena stopinja Fahrenheita predstavlja le $\frac{5}{9}$ stopinj Celzija. Kadar je temperatura 50 stopinj Fahrenheita, je to 18 stopinj Fahrenheita nad tališčem ledu, kar pomeni

$$18 \times \frac{5}{9} \text{ }^{\circ}\text{C} = 10^{\circ}\text{C}.$$

V New Yorku je tega dne temperatura 10°C .

2.



- Delo opravljajo le sile, ki so vzporedne s premikom. Ker je pri A sila vzporedna s premikom, opravi največje delo. V primeru B in C sta komponenti sile F_v , ki sta vzporedni s premikom, enaki in zato opravita sili v primeru B in C enako delo.
- Ker je sila trenja sorazmerna komponenti vsote sile teže $\vec{F}_g$ in sile $\vec{F}$, ki je pravokotna na podlago, moramo po velikosti razvrstiti le to komponento sile. Komponenta vsote $\vec{F}_g + \vec{F}$, ki je pravokotna na podlago, je v primeru A kar enaka teži telesa F_g . V primeru B je pravokotna komponenta vsote obeh sil manjša od teže telesa in je enaka $F_g - F_p$. V primeru C pa je pravokotna komponenta vsote obeh sil večja od teže telesa, ker telo nekoliko pritiskamo ob tla, in je enaka $F_g + F_p$.

Po velikosti si sile trenja od najmanjše do največje sledijo tako: B, A, C.

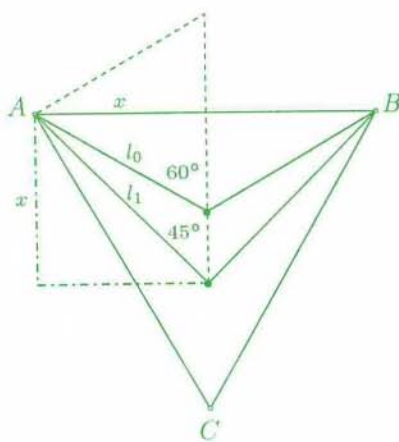
- Raztezke elastik in sile lahko določamo z načrtovanjem ali računsko. Označimo dolžino neraztegnjene elastike z l_0 , dolžino raztegnjene elastike, ko stoji trikotnik na oglišču C, z l_1 in dolžino raztegnjene elastike, ko stoji trikotnik na stranici AB, z l_2 .

Iz geometrije problema (slika a) razberemo, da dolžina neraztegnjene elastike predstavlja stranico nekega trikotnika (ne tistega, v katerega so privezane elastike), katerega višina je x , dolžina raztegnjene elastike l_1 pa diagonalo kvadrata z enako stranico x , tako da velja

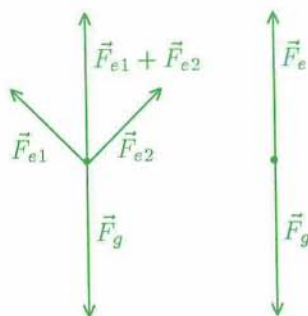
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}l_0 \quad \text{in} \quad l_1 = \sqrt{2}x.$$

Dolžina l_1 je

$$l_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}l_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}10 \text{ cm} = 12,2 \text{ cm}.$$



(a)



(b)

Silo, s katero je raztegnjena elastika v tem primeru, lahko prav tako izračunamo ali si pomagamo z načrtovanjem (slika b)

$$F_{e1} = \frac{\sqrt{2}}{2}F_g = \frac{\sqrt{2}}{2}1 \text{ N} \approx 0,7 \text{ N}.$$

V zadnjem primeru napenja elastiko celotna teža uteži ($F_e = F_g$). Raztezek elastike je sorazmeren s silo, ki jo napenja

$$\frac{l_2 - l_0}{l_1 - l_0} = \frac{F_g}{F_{e1}}$$

$$(l_2 - l_0) = \frac{F_g}{F_{e1}}(l_1 - l_0) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})l_0 = 3,2 \text{ cm}.$$

Do enakega rezultata lahko pridemo tudi s skrbnim načrtovanjem in merjenjem ustreznih dolžin (slika a)

$$(l_2 - l_0) = \frac{F_g}{F_{e1}}(l_1 - l_0) = \frac{1 \text{ N}}{0,71 \text{ N}}(12,2 \text{ cm} - 10 \text{ cm}) = 3,1 \text{ cm},$$

kar se dovolj dobro ujema s prejšnjim rezultatom.

Predlagane rešitve eksperimentalnih nalog:

1. Umerjanje tehtnice:

Upogibna tehtnica je sestavljena iz plastenke, v katero smo pritrdili dolgo prožno tanko kovinsko palico s kazalcem na koncu. Premik kazalca odčitavamo na priloženem milimetrskem papirju.



Če na konec palice obesimo 5,6 g utež, se kazalec povesi za 23 mm. Ob vsaki dodani 5,6-gramski uteži se kazalec povesi še za 23 mm. Teža merjenca F_g je produkt njegove gostote ρ_m , prostornine V in težnega pospeška g :

$$F_g = \rho_m V g.$$

Sila vzgona, ki deluje na potopljeni merjenec F_v , pa je enaka produktu gostote vode ρ_v , prostornine merjenca in težnega pospeška

$$F_v = \rho_v V g.$$

Navidezna teža merjenca v vodi je enaka razliki teže merjenca in vzgona

$$F'_g = F_g - F_v = (\rho_m - \rho_v) V g.$$

Gostota merjenca je

$$\rho_m = \rho_v \frac{F_g}{F_g - F'_g}.$$

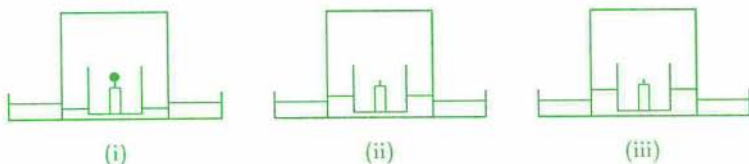
Ko na tehtnico obesimo prvega od neznanih merjencev, se kazalec povesi za 80 mm. Merjenec tehta torej 20 g. Prvi merjenec, potopljen

v vodi, pa kazalec povesi le za 70 mm. V vodi navidezno tehta 17,5 g. Iz teh podatkov lahko izračunamo gostoto merjenca, ki je 8000 kg/m^3 . Ko na tehtnico obesimo drugega od neznanih merjencev, se kazalec povesi za 45 mm. Merjenec tehta torej 10 g. Drugi merjenec, potopljen v vodi, kazalec povesi le za 10 mm. V vodi navidezno tehta 2 g. Iz teh podatkov lahko izračunamo gostoto merjenca, ki je 1290 kg/m^3 .

2. a) i) Gladina v čaši je nekoliko pod gladino v banji.
 ii) Ko sveča ugasne, je gladina vode v čaši višje, kot je bila na začetku.
 iii) Gladina vode v čaši je še nekoliko višje kot v trenutku, ko sveča ugasne.
 iv) Na začetku poskusa je tlak v posodi p_z enak

$$p_z = p_0 + \rho g(x - x_1),$$

kjer je p_0 zunanji zračni tlak, ρ gostota vode, g težni pospešek, x globina vode v banji in x_1 globina vode pod čašo. (Vodna gladina v čaši je za $(x - x_1)$ nižja kot v banji.)



Na koncu poskusa je tlak v posodi p_k enak

$$p_k = p_0 - \rho g(x_3 - x),$$

kjer je x_3 globina vode pod čašo na koncu poskusa. (Vodna gladina v čaši je za $(x_3 - x)$ višja kot v banji.) Razlika tlakov na koncu in na začetku poskusa je

$$p_k - p_z = -\rho g(x_3 - x_1),$$

torej je tlak na koncu za $\rho g(x_3 - x_1)$ manjši kot na začetku. Tipične vrednosti za $x - x_1$ so okoli 1 cm in ravno toliko za $x_3 - x$.

Sprememba tlaka je približno 200 Pa.

- b) i) Gladine vode v čaši je na isti višini kot gladina vode v banji.
 ii) Gladine vode v čaši je na isti višini kot gladina vode v banji.
 iii) Gladine vode v čaši je na isti višini kot gladina vode v banji.
 iv) *Opis razlik:*

Podroben opis razlik: 1. Pri poskusu (b) se gladina pri poveznjenju čaše ne zniža, pri (a) pa se. 2. Med gorenjem se gladina pri (b) ne dvigne, pri (a) pa se. 3. Pri ugasnitvi se gladina pri (b) ne dvigne, pri (a) pa se.

Kratek opis razlik: Pri poskusu s cevko se lega gladine nič ne spreminja, pri poskusu brez nje pa se.

Razlaga razlik:

Ker cevka, ki vodi iz zunanosti pod čašo, zagotavlja izmenjavo zraka z okolico, ostaja tlak pod čašo enak zunanjemu tlaku, zato se gladina vode v čaši ne spreminja.

8. razred

Rešitve teoretičnih nalog:

1. Kinetična energija, ki jo ima voziček zaradi hitrosti v_z ob vstopu v obroč, mora zadoščati za dvig do najvišje točke $h = 10$ m, v kateri ima voziček še vedno nekaj kinetične energije zaradi svoje hitrosti $v_k = 8$ m/s

$$\frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}mv_k^2 + mgh.$$

Hitrost, ki jo ima na začetku, je

$$v_z = \sqrt{2gh + v_k^2} = \sqrt{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 10 \text{ m} + (8 \text{ m/s})^2} = 16,2 \text{ m/s}.$$

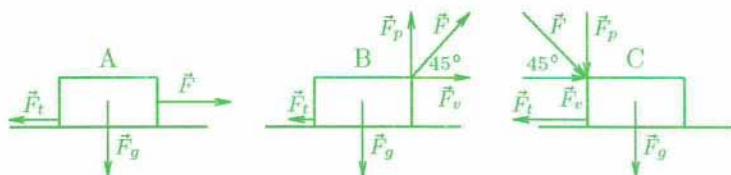
Ker se v vsakdanjem življenju trenju in upor zrak ne moremo izogniti, preostane vozičku za vzpon in ustrezno hitrost le $4/5$ kinetične energije, ki jo ima ob vstopu v obroč

$$0,8 \cdot \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}mv_k^2 + mgh.$$

Hitrost, ki jo ima na začetku, mora biti večja, kot kadar trenja ni, in je

$$v_z = \sqrt{\frac{2gh + v_k^2}{0,8}} = \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 10 \text{ m} + (8 \text{ m/s})^2}{0,8}} = 18,2 \text{ m/s}.$$

2.



- a) Hitrost telesa C je po premiku za 1 m manjša kot je bila na začetku, ker je delo, ki ga je opravila sila F , manjše kot pri telesu A, saj je delo opravljala le komponenta sile F , ki je vzporedna s premikom F_v . Sila trenja, ki deluje med telesom C in podlago, je večja kot sila trenja, ki deluje med telesom A in podlago, ker je pravokotna komponenta vsote sile teže in sile, s katero telo potiskamo, $F_g + F_p$ večja kot v primeru A. Delo, ki ga je opravila sila F pri telesu A, je bilo potrebno, da je telo A obdržalo svojo hitrost, ko je med njim in podlago delovala sila trenja, ki je bila sorazmerna le teži F_g .

- b) i) Velikost sile trenja telesa A ob podlago je enaka sili, s katero telo vlečemo, ker se hitrost telesa ne spremeni.

Odgovor na vprašanje je: enaka.

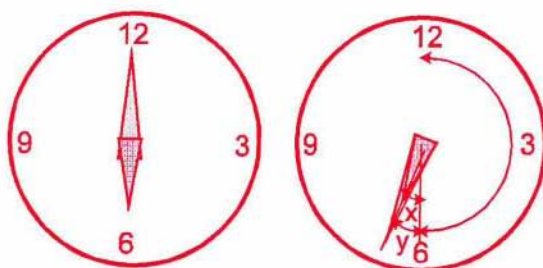
- ii) Velikost sile trenja telesa B ob podlago je manjša, kot je sila, s katero telo vlečemo. Iz slike lahko razberemo, da je sila pravokotna na podlago, ki je enaka razliki sile teže F_g in pravokotne komponente F_p vlečne sile F , manjša kot v primeru A. Zato je manjša tudi velikost sile trenja, ki je bila v primeru A po velikosti enaka sili F .

Odgovor na vprašanje je: večja.

- iii) Velikost sile trenja telesa C ob podlago je večja, kot je sila, s katero telo potiskamo. Iz slike lahko razberemo, da je sila pravokotna na podlago, to je sila teže F_g , povečana za pravokotno komponento F_p vlečne sile F , večja kot v primeru A. Zato je večja tudi velikost sile trenja, ki je bila v primeru A po velikosti enaka sili F .

Odgovor na vprašanje je: manjša.

3. Mali kazalec je ob 6. uri na številki 6, veliki pa na številki 12. Veliki kazalec bo pokril malega v nekem trenutku med šesto in sedmo uro. Za pot do te točke bosta veliki in mali kazalec potrebovala nekaj več kot pol ure. Prekrila se bosta, ko bo konica malega kazalca opisala lok z dolžino x , konica velikega pa pol krožnice in še lok y (slika).



Loka x in y sta v razmerju dolžin kazalcev

$$\frac{x}{y} = \frac{l_m}{l_v}.$$

Ker se kazalca gibljeta z različnima hitrostima, konica malega kazalca prepotuje celo krožnico $2\pi l_v$ v $12t_0 = 12$ ur, konica velikega pa potrebuje za celo krožnico $2\pi l_m$ le eno uro t_0

$$v_m = \frac{2\pi l_m}{12t_0}, \quad v_v = \frac{2\pi l_v}{t_0}.$$

Tako lahko izračunamo čas t , ob katerem se kazalca pokrijeta

$$\frac{x}{y} = \frac{v_m t}{v_v(t - \frac{t_0}{2})} = \frac{\frac{2\pi l_m}{12t_0} t}{\frac{2\pi l_v}{t_0}(t - \frac{t_0}{2})} = \frac{l_m}{l_v},$$

oziroma iz zadnjega dela gornje enačbe

$$\frac{\frac{t}{12}}{(t - \frac{t_0}{2})} = 1$$

$$t = 12t - 6t_0, \quad \text{oziroma} \quad t = \frac{6}{11} \text{ ure}.$$

Kazalca se bosta pokrila ob 6^h in $6/11$ ure.

Predlagane rešitve eksperimentalnih nalog:

- Na zaslon projiciramo sliko oddaljenih predmetov (bloki, vidni skozi okno). Izmerimo razdaljo med lečo in zaslonom, ko je slika na zaslonu ostra. Goriščna razdalja leče f je 10 cm. Nato postavimo svetlobni vir npr. 3 cm, 5 cm, 10 cm, 15 cm in 20 cm od gorišča leče, oziroma 13 cm, 15 cm, 20 cm, 25 cm in 30 cm od leče.

a	b	ab
3 cm	33 cm	99 cm
5 cm	20 cm	100 cm
10 cm	10 cm	100 cm
15 cm	7 cm	105 cm
20 cm	5 cm	100 cm

- i) Ko se povečuje razdalja a med virom in goriščem leče, se razdalja b med sliko vira in goriščem leče zmanjšuje.
 ii) Produkt ab je v mejah natančnosti meritev enak f^2 .
2. a) Iz teksta razberemo, kolikšna sta tok I_d skozi diodo in tok I_r skozi upor R . Skupni tok je

$$I = I_d + I_r = 5 \text{ mA} + 55 \text{ mA} = 60 \text{ mA}.$$

Napetost na dodatnem uporniku R_o je

$$U_o = U_g - U = 10 \text{ V} - 8,2 \text{ V} = 1,8 \text{ V}.$$

Zato lahko izračunamo njegov upor

$$R_o = \frac{U_o}{I} = \frac{1,8 \text{ V}}{60 \text{ mA}} = 30 \Omega.$$

- b) Iz napetosti na Zenerjevi diodi, ki je enaka napetosti na uporniku R , in iz znanega toka I_r skozi upornik R lahko izračunamo upor R

$$R = \frac{U}{I_r} = \frac{8,2 \text{ V}}{55 \text{ mA}} = 150 \Omega.$$

- c) Iz zbirke 5 upornikov izberemo upornika za 33Ω in 150Ω , sestavimo vezje ter pomerimo napetost na diodi, ki je okrog $8,2 \text{ V}$.
 d) Vzporedno vezani upornik mora imeti približno 5-krat večji upor, torej izberemo upornik za 820Ω , s katerim nadomestimo upornik R . Izmerimo napetost na diodi ali novem uporniku; ta je okrog $8,5 \text{ V}$.
 e) Tok skozi upornik R' je

$$I'_r = \frac{U'}{R'} = \frac{8,5 \text{ V}}{820 \Omega} = 10,4 \text{ mA}.$$

- f) Tok skozi dodatni upornik R_o dobimo iz napetosti U'_o na njem, ki je

$$U'_o = U_g - U' = 10 \text{ V} - 8,5 \text{ V} = 1,5 \text{ V}.$$

Skupni tok, torej tok skozi dodatni upornik R_o , je

$$I' = \frac{U'_o}{R_o} = \frac{1,5 \text{ V}}{33 \, \Omega} = 45 \text{ mA}.$$

g) Skozi diodo teče tok

$$I'_d = I' - I_r = 45 \text{ mA} - 10 \text{ mA} = 35 \text{ mA}.$$

Mojca Čepič

DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE – Rešitve nalog s str. 247

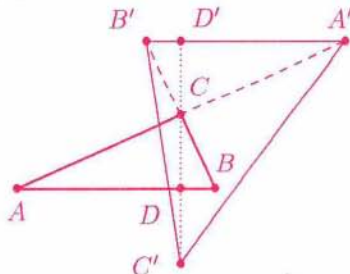
Prvi letnik

- Če ne bi bilo nobeno izmed števil b in c deljivo s 3, bi števila b^2 , c^2 in $(bc)^2$ dala ostanek 1 pri deljenju s 3 in število a bi bilo deljivo s 3. Ker pa je a od 3 večje praštevilo, to ni mogoče. Torej je eno izmed praštevil b in c enako 3. Drugo je seveda različno od 2 (v tem primeru bi veljalo $a = 49$), zato je $c = 3$. Ker pa je x števka, je $b = c + x \leq c + 9$. Ko preverimo vse možnosti, ugotovimo, da je edina rešitev $b = 7$ in $a = 499$. Torej je $ax = 1996$.
- Oglejmo si, kateri produkti dajo popolne kvadrate, in razbijmo množico $\{1, 2, \dots, 25\}$ na 16 podmnožic:

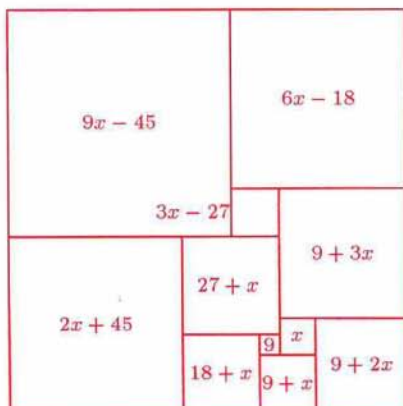
$$\{1, 4, 9, 16, 25\}, \{2, 8, 18\}, \{3, 12\}, \{5, 20\}, \{6, 24\}, \{7\}, \{10\}, \\ \{11\}, \{13\}, \{14\}, \{15\}, \{17\}, \{19\}, \{21\}, \{22\}, \{23\}.$$

Ker moramo izbrati 17 različnih števil, obstajata dve, ki ležita v isti podmnožici in je zato njun produkt popolni kvadrat.

- Zaradi simetrije smemo privzeti, da je kot $\angle ACB$ pravi. Označimo nožišče višine na hipotenuzo z D in prezrcalimo točko D preko točke C v točko D' . Točke C , D in C' so kolinearne. Ker so tudi točke D , C in D' kolinearne in je daljica CD' pravokotna na stranico $A'B'$, je tudi daljica $C'D'$ pravokotna na daljico $A'B'$. Ker je $|A'B'| = |AB|$ in $|C'D'| = 3|CD|$, meri ploščina trikotnika $A'B'C'$ 3.



4. Označimo z x dolžino stranice kvadrata, ki je po velikosti tik za najmanjšim. Vnesimo na sliko v vsak kvadrat dolžino njegove stranice. Od tod vidimo, da je zgornja stranica pravokotnika dolga $15x - 63$, spodnja pa $6x + 81$. Seveda pa sta ti dve stranici enaki, zato je $x = 16$. Tako sta stranici pravokotnika 176 in 177.



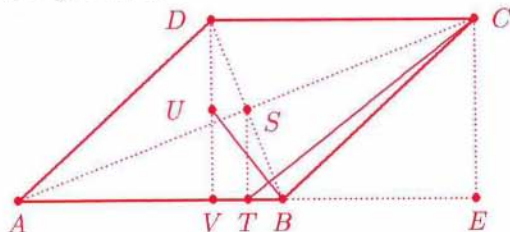
Drugi letnik

1. Če je $a = 1$, mora biti $b = 1$ in pogoj naloge je izpolnjen. Preverimo še možnost $a \geq 2$. Ker število a deli število $b + 1$, je $a \leq b + 1$. Iz pogoja naloge sledi, da število ab deli število $(b + 1)(a^2 - 2) = ba^2 + a^2 - 2b - 2$, torej deli tudi število $a^2 - 2b - 2$. Ker pa je

$$\begin{aligned} -ab &\leq -2b < a^2 - 2b - 2 \leq \\ &\leq a(b + 1) - 2b - 2 = ab + a - 2b - 2 \leq \\ &\leq ab + (b + 1) - 2b - 2 < ab, \end{aligned}$$

mora biti $a^2 - 2b - 2 = 0$. Torej je a sodo število in je zato $\frac{b+1}{2} = (\frac{a}{2})^2$.

2. Pravokotno projekcijo točke C na nosilko stranice AB označimo z E . Dokazati moramo, da imata pravokotna trikotnika VBU in ECT pravokotni hipotenuzi. Torej zadošča pokazati, da sta si trikotnika VBU in ECT podobna.



Označimo $a = |AB|$, $v = |DV|$ in $u = |AV|$. V trikotniku VBU velja

$$|BV| : |UV| = (a - u) : (v/2) = 2(a - u)/v,$$

v trikotniku ECT pa

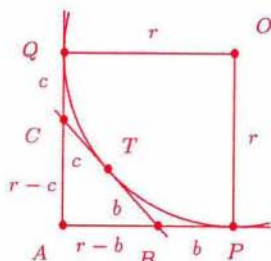
$$|CE| : |TE| = v : (a - (a - u)/2) = 2v/(a + u).$$

Pokazati je treba, da je $2(a - u)/v = 2v/(a + u)$. Trditev je ekvivalentna enakosti $v^2 = a^2 - u^2$, ki pa v pravokotnem trikotniku AVD drži. Pravokotna trikotnika VBV in ECT sta si zato podobna, koda $\sphericalangle BUV$ in $\sphericalangle CTE$ sta tako skladna in daljica BU je res pravokotna na daljico TC .

3. Privzemimo oznake s slike. Dokazati moramo neenakost

$$\frac{2}{3}r < b + c < r.$$

Zaradi enakosti dolžin tangentskih odsekov je $|BT| = |BP| = b$ in $|CT| = |CQ| = c$. Iz trikotniške neenakosti v trikotniku ABC sledi $b + c < (r - b) + (r - c)$ ali $b + c < r$.



Ker pa je v pravokotnem trikotniku ABC hipotenuza BC daljša od obeh katet, je $b + c > r - b$ in $b + c > r - c$. Seštejmo neenakosti in dobimo $2(b + c) > 2r - (b + c)$ oz. $b + c > \frac{2}{3}r$.

4. Označimo klepetulje s $K_1, K_2, \dots, K_n$. Diagram

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_{n-1} \rightarrow K_n \rightarrow K_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow K_2 \rightarrow K_1$$

pokaže, da $2n - 2$ telefonskih pogovorov zadošča.

Privzamemo lahko, da nobena dva telefonska pogovora ne potekata istočasno, in si oglejmo klepetuljo K , ki je prva izvedela vse. Do trenutka, ko je oseba K izvedela vse, je bilo potrebno vsaj $n - 1$ pogovorov (kako bi sicer ona izvedela vse?) in da bodo tudi ostale klepetulje izvedele vse, bo potrebno še vsaj $n - 1$ pogovorov. Za popolno obveščenost vseh vaških klepetulj je torej potrebno najmanj $2n - 2$ telefonskih pogovorov.

Tretji letnik

1. Naj bodo x_1, x_2, x_3, x_4 tista različna cela števila, za katere je $p(x_i) = 1$. Definirajmo polinom $q(x) = p(x) - 1$. Ker so x_1, x_2, x_3, x_4 ničle polinoma q , obstaja tak polinom r s celoštevilskimi koeficienti, da velja

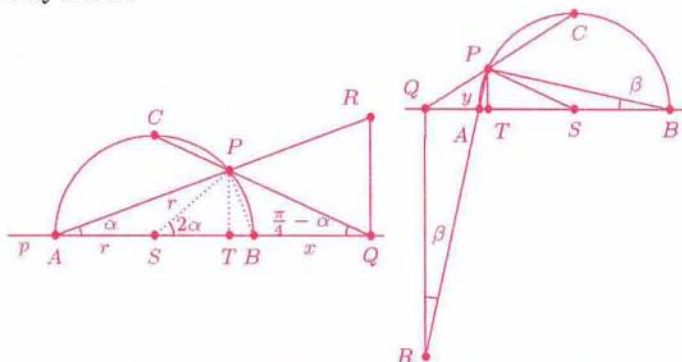
$$q(x) = r(x)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Recimo, da obstaja celo število m , da je $p(m) = 42$. Potem velja

$$41 = q(m) = r(m)(m - x_1)(m - x_2)(m - x_3)(m - x_4).$$

Cela števila $(m - x_1)$, $(m - x_2)$, $(m - x_3)$, $(m - x_4)$ so med seboj različna in delijo število 41. Ker je 41 praštevilo, so to števila ± 1 in ± 41 . Sledi $41 = q(m) = r(m)41^2$ in $r(m) = \frac{1}{41}$. To pa ni možno, saj ima polinom r celoštevilске koeficiente. Celó število m z zahtevano lastnostjo torej ne obstaja.

2. Glede na položaj točke P na loku $\widehat{AB}$ ločimo dva primera. V prvem primeru označimo $\alpha = \angle BAP$ in $x = |BQ|$, v drugem pa $\beta = \angle ABP$ in $y = |AQ|$. Točko T smo v obeh primerih izbrali tako, da je $AQ \perp PT$.



Po izreku o obodnem in središčnem kotu je $\angle BSP = 2\alpha$ in $\angle APC = \frac{\pi}{4}$. Ker je $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ in $\angle PBQ = \frac{\pi}{2} + \alpha$, je $\angle BQP = \frac{\pi}{4} - \alpha$. V trikotniku STP velja $|PT| = r \sin 2\alpha$. V trikotniku QPT pa izračunamo $|PT| = (x + r - r \cos 2\alpha) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha)$, saj je $|TB| = r - r \cos 2\alpha$. Izenačimo izraza za dolžino $|PT|$ in dobimo enačbo $r \sin 2\alpha = (x + r - r \cos 2\alpha) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ ali

$$2r \sin \alpha \cos \alpha = (x + 2r \sin^2 \alpha) \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Od tod lahko izpeljemo, da je $(2r + x) \operatorname{tg} \alpha = x$ ali $|RQ| = |BQ|$. Podroben izračun v drugem primeru prepustimo bralcu; pripomnimo le, da je potrebno dokazati enakost $y = (2r + y) \sin \beta$.

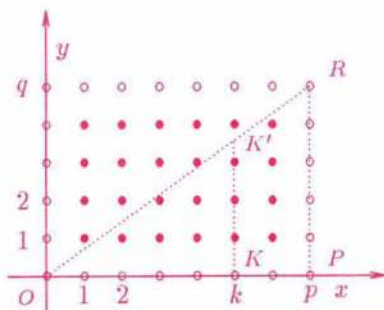
3. Označimo

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; 0 < x < p, 0 < y < q\}$$

in privzemimo oznake s slike.

Na diagonali OR ne leži nobena točka iz množice M , saj sta si števili p in q tuji. Za vsako naravno število $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ leži pod diagonalo natančno $[|KK'|]$ takih točk iz M , katerih abscisa je enaka k (glej sliko). Iz podobnosti trikotnikov OKK' in OPR sledi

$$|KK'| = \frac{|OK|}{|OP|} |PR| = \frac{kq}{p}.$$



Torej je vsota $\sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{kq}{p} \right]$ ravno število točk iz M , ki ležijo pod diagonalo OR . Ker na tej diagonali ni točk iz M , je

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[\frac{kq}{p} \right] = \frac{(q-1)(p-1)}{2}.$$

Zaradi simetrije dobimo še $\sum_{k=1}^{q-1} \left[\frac{kp}{q} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$, od koder sledi iskana enakost.

4. Označimo z n število tekmovalcev na turnirju in z x_i število točk, ki jih je dosegel i -to uvrščen tekmovalec proti zadnjim trem uvrščenim. Potem je $x_n + x_{n-1} + x_{n-2} = 3$, saj so zadnji trije med seboj igrali le tri tekme. Torej so zadnji trije skupaj dosegli 3 točke v igrah proti ostalim tekmovalcem. Prvih $n-3$ tekmovalcev je med seboj odigralo $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ tekem, zato je $x_1 + \dots + x_{n-3} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$. Število tekem, v katerih so igrali zadnji trije proti prvim $n-3$, je $3(n-3)$; od tod dobimo

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2} + 3 = 3(n-3).$$

Torej je $(n-4)(n-9) = 0$. Možnost $n = 4$ odpade, saj bi v tem primeru moral prvuvrščen doseči vse svoje točke proti zadnjim trem, kar je v protislovju s podatki naloge. Torej je na turnirju igralo 9 šahistov.

Četrty letnik

1. Pokažimo najprej, da je zaporedje od nekje naprej konstantno. Ker je $a_{k+2} \leq \max\{a_k, a_{k+1}\}$, je zaporedje omejeno s številom $\max\{a, b\}$. Ker pa je vsak člen zaporedja odvisen le od prejšnjih dveh, je

(b) Ko igralec z belimi žetoni odstrani črni žeton, naj igralec s črnimi žetoni v mislih igralno polje pokrije z dominami 2×1 (to lahko naredi, ne glede na to, kateri žeton je bil odstranjen). Vsakič, ko *Beli* premakne svoj žeton, lahko *Črni* premakne žeton, ki je bil na isti domini. Na ta način *Črni* gotovo ne bo izgubil, ker pa se igra konča, bo zato izgubil *Beli*.

Matjaž Željko

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1995/96 – s str. 251

Objavljamo rešitve nalog z državnega tekmovanja srednješolcev iz fizike, ki je bilo 20. aprila 1996 v Kranju. Besedila nalog smo objavili v letošnji 4. številki Preseka.

Skupina A

1. Podatki: $\lambda_1 = 20$ m, $\lambda_2 = 15$ m, $\Delta t = 280$ s.

Če z x označimo razdaljo do izvira valov, lahko razliko časov potovanj zapišemo kot

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{x}{v_2} - \frac{x}{v_1} = x \sqrt{\frac{2\pi}{g}} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right)$$

in dobimo $x = 10$ km.

2. Podatki: $h = 18$ cm, $2r = 20$ cm, $l_0 = 3$ m, $k = 250$ N/m, $\sigma = 10^4$ N/m³.

Volumen izpodrinjene vode je ob oseki enak $(h_0 - h)S$, če s h_0 označimo višino boje. Tedaj sta v ravnovesju teža boje in vzgon $F_g = (h_0 - h)S\sigma$. Ob plimi je volumen izpodrinjene vode kar enak volumnu boje h_0S ; razliko med vzgonom in težo boje uravnovesi elastična sila vrvi $k(l - l_0) = h_0S\sigma - F_g = hS\sigma$. Ob plimi se morje dvigne za višino boje h , ki gleda iz morja ob oseki, in še za raztezek vrvi $l - l_0$

$$h + (l - l_0) = h + \frac{h\pi r^2 \sigma}{k} = 41 \text{ cm}.$$

3. Podatki: $F_g = 10 \text{ N}$.

Vodoravna komponenta sile, s katero deluje stena na valj, je na skici (v besedilu nalog) označena z F ; stena deluje na valj še s silo lepenja z največjo možno vrednostjo $k_2 F$, ki kaže navpično navzgor. Zapišimo sile, s katerimi srednji valj deluje na levega: silo v smeri zveznice središč valjev označimo z F_v ; projekcija te sile na vodoravno os je $-\frac{\sqrt{3}}{2} F_v$ in na navpično $-\frac{1}{2} F_v$. Srednji valj deluje na levega še s silo lepenja z največjo vrednostjo $k_1 F_v$ in s komponentama $-\frac{1}{2} k_1 F_v$ in $+\frac{\sqrt{3}}{2} k_1 F_v$. Vsota vodoravnih komponent sil na levi valj je v ravnovesju enaka 0; v mejnem primeru vzamemo za obe sili lepenja njuni največji vrednosti

$$F - \frac{\sqrt{3}}{2} F_v - \frac{1}{2} k_1 F_v = 0,$$

podobno velja za navpične komponente

$$k_2 F + \frac{\sqrt{3}}{2} k_1 F_v - F_g - \frac{1}{2} F_v = 0.$$

Ker računamo štiri neznane količine, potrebujemo še dve neodvisni enačbi. Vsota navpičnih komponent sil na vse tri valje mora biti enaka 0

$$2k_2 F - 3F_g = 0.$$

Zahtevati moramo še, da je vsota navorov na levi valj enaka 0. Za os izberimo geometrijsko os tretjega valja; sila lepenja med steno in valjem suče valj v smeri urinega kazalca, sila lepenja med valjema pa v nasprotni smeri

$$k_2 F r = k_1 F_v r.$$

Sistem enačb rešimo in dobimo za koeficiente lepenja

$$k_1 = \frac{3}{2 + 3\sqrt{3}} = 0,42 \quad \text{in} \quad k_2 = \frac{3}{6 + \sqrt{3}} = 0,39$$

ter

$$F = \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) F_g = 39 \text{ N}.$$

Skupina B

1. Podatki: $m = 70$ kg, $M = 100$ kg, $v_0 = 30$ km/h.

Rolkarju uspe vso svojo kinetično energijo spremeniti v potencialno $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0$ in se dvigne za $h_0 = v_0^2/2g = 3,5$ m. Drsalec pa del svoje kinetične energije preda pregradi. Ko prileti drsalec v pregrado, se ohrani vodoravna komponenta skupne gibalne količine drsalca in pregrade $mv_0 = (m + M)v$, če je $v = mv_0/(m + M)$ hitrost pregrade in hkrati vodoravna komponenta hitrosti drsalca po trku. Ker je trk prožen, se ohranja tudi vsota skupne kinetične in potencialne energije. Ko drsalec doseže najvišjo lego, je navpična komponenta njegove hitrosti enaka 0, oba s pregrado pa se gibljeta v vodoravni smeri s hitrostjo v . V tem trenutku velja $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}(m + M)v^2$ in dobimo

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \frac{M}{m + M} = h_0 \frac{M}{m + M}$$

ter

$$\Delta h = h_0 - h = h_0 \frac{m}{m + M} = 1,45 \text{ m}.$$

2. a) Podatki: $\lambda_1 = 1,35$ W/mK, $d_1 = 15$ cm, $\Delta T_1 = 20$ K, $\lambda_2 = 0,45$ W/mK, $d_2 = 22$ cm, $\Delta T_2 = 15$ K, $\rho = 400$ kg/m³, $q = 334$ kJ/kg.

Del toplotnega toka, ki priteče skozi streho, odteče skozi sneg, ostanek pa se porabi za to, da se v času Δt stali masa Δm snega

$$S\lambda_1 \frac{\Delta T_1}{d_1} = S\lambda_2 \frac{\Delta T_2}{d_2} + \frac{q\Delta m}{\Delta t}.$$

Če z Δx označimo debelino snega, ki se stali v času Δt , velja $\Delta m = \rho S \Delta x$. Za hitrost taljenja dobimo

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\rho q} \left(\lambda_1 \frac{\Delta T_1}{d_1} - \lambda_2 \frac{\Delta T_2}{d_2} \right) = 4 \text{ mm/h}.$$

Pri natančnejšem računu bi morali upoštevati še toploto, ki je potrebna, da se masa snega Δm segreje od povprečne temperature snega v plasti na 0°C, to je za $\frac{1}{2}\Delta T_2$. Namesto q v imenovalcu zgornjega izraza bi dobili $q + \frac{1}{2}c_p \text{ ledu } \Delta T_2$ in hitrost taljenja bi bila za približno 5 % manjša.

b) Ko hitrost pade na 0, je debelina snežne odeje

$$d_2 = d_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = 3,75 \text{ cm}.$$

3. Podatki: $T = 6,0 \text{ h}$, $\eta = 0,9$, $\kappa = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Na polu tehtnica pokaže kar težo: $F_{\text{pol}} = F_g = \kappa mM/R^2$, če z m označimo maso telesa, z M maso planeta in z R njegov radij. Na ekvatorju pa telo kroži s pospeškom $R\omega^2$ pod vplivom centripetalne sile, ki je enaka razliki med težo in silo tehtnice $mR\omega^2 = F_g - F_{\text{ekvator}}$. Iz podane zveze $F_{\text{ekvator}} = \eta F_{\text{pol}}$ dobimo

$$mR\omega^2 = (1 - \eta) \frac{\kappa mM}{R^2}.$$

Velja $M = 4\pi R^3 \rho / 3$ in $\omega = 2\pi / T$. Gostota planeta je

$$\rho = \frac{3\pi}{(1 - \eta)\kappa T^2} = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

4. a) Podatki: $l = 1 \text{ m}$, $v_0 = 0,40 \text{ m/s}$, $a_0 = 12 \text{ m/s}^2$.

Za opazovalca v komori se telo v vodoravni smeri giblje s konstantno hitrostjo v_0 proti levi steni in s pospeškom $a = a_0 - g$ navpično navzgor $x = v_0 t$, $y = \frac{1}{2} a t^2$. Levo steno bi zadelo v času $t_1 = l / v_0 = 1,25 \text{ s}$, strop pa v času $t_2 = \sqrt{2l/a} = 1 \text{ s}$; torej prej zadene strop na razdalji $\frac{1}{2} l - v_0 t_2 = 0,10 \text{ m}$ od leve stene.

b) Podatki: $l = 1 \text{ m}$, $v_0 = 0,50 \text{ m/s}$, $a = 120 \text{ m/s}^2$.

Za opazovalca v komori se sedaj telo v vodoravni smeri giblje pospešeno proti levi steni $x = \frac{1}{2} a t^2$, v navpični smeri pa gibanje lahko obravnavamo kot navpični met navzgor z začetno hitrostjo v_0 : $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. Po prvi enačbi bi levo steno doseglo v času $t_1 = \sqrt{l/a} = 0,091 \text{ s}$, po drugi pa bi se vrnilo na tla v času $t_2 = 2v_0/g = 0,10 \text{ s}$ in se pri tem ne bi dotaknilo stropa. Telo se torej prej dotakne leve stene na višini $h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 4 \text{ mm}$.

Skupina C

1. Podatki: $d = 10$ cm, $a = 5$ cm, $e = 2,3$ nAs.

Na začetku je navpična komponenta sile vrvice na vsako od kroglic enaka razliki teže in električne sile plošč $F_y = mg - eU_0/d$, vodoravna komponenta pa vsoti (odbojnih) sil drugih dveh kroglic $F_x = 2F_{12}\sqrt{3}/2 = e^2\sqrt{3}/4\pi\epsilon_0 a^2$. Razmerje komponent sil je enako tangensu naklonskega kota vrvice $\tan \varphi = F_y/F_x = \sqrt{2}$. Ko so kroglice najbolj razmaknjene, je navpična komponenta sile vrvice enaka 0, torej $mg = eU/d$. Dobimo: $eU/d = eU_0/d + F_y = eU_0/d + \sqrt{2}F_x$ in

$$U = U_0 + \frac{\sqrt{6}ed}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad \Delta U = 2000 \text{ V}.$$

2. Podatki: radij najmanjše zanke r_1 , srednje r_2 , največje $2r_2$; upor žic na dolžinsko enoto, ρ .

Ko teče tok po srednji zanki, velja

$$I_2 = \frac{U}{2\pi\rho(r_3 + r_2)} \quad \text{in} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right),$$

po notranji pa

$$I_1 = \frac{U}{2\pi\rho(r_3 + r_1)} \quad \text{in} \quad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right).$$

Vstavimo $r_3 = 2r_2$, $r_1 = xr_2$ in iz $B_1 = B_2$ dobimo kvadratno enačbo $x^2 + 3x - 2 = 0$ z rešitvijo $x = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3) = 0,56$.

3. Podatki: napetost izvira U , navidezni upor R , upor žic na dolžinsko enoto ρ .

Tok, ki teče iz izvira, se razdeli na tok skozi R in skozi sprejemnik $I = I_R + I_A$. Če z x označimo dolžino daljnovoda do R , dobimo za padec napetosti za levi del vezja (glej skico v besedilu nalog) $U = I_R x + I_R R$, za desni pa $I_R R = I_A \rho(l - x)$. Enačbe rešimo in dobimo

$$I_A = \frac{UR}{\rho l R + \rho^2 x(l - x)}.$$

Tok je najmanjši, ko je izraz $x(l - x)$ največji, to pa je ravno pri temenu parabole $x = \frac{1}{2}l$.

4. Podatki: $a = 10$ cm, $R = 105 \Omega$, $B = 1$ T, $v = 1$ m/s.

Če naj se palica giblje enakomerno, mora biti magnetna sila na palico enaka nič, torej po palici ne sme teči tok. Napetost med točkama, kjer

se palica dotika kvadrata, mora zato biti nasprotno enaka inducirani napetosti v palici: $U_{12} + U_i = 0$. Če z x označimo pot, ki jo prepotuje palica od začetne točke, lahko napetost U_{12} izrazimo z gonilno napetostjo U_g kot $U_{12} = 2\sqrt{2}xU_g/4a$. Za inducirano napetost pa velja $U_i = Blv$, če z l označimo dolžino dela palice med vodnikoma $l = 2x$ za $x < a/\sqrt{2}$ in $l = 2(\sqrt{2}a - x)$ za $a/\sqrt{2} < x < \sqrt{2}a$. Za $x < a/\sqrt{2}$ mora biti napetost izvira kar konstantna $U_g = 2\sqrt{2}Bva = 0,28$ V, za $a/\sqrt{2} < x < \sqrt{2}a$ pa se mora s časom spreminjati kot $U_g = \alpha/t - \beta$, kjer sta $\alpha = 4Bva^2/v = 0,04$ Vs in $\beta = 2\sqrt{2}Bva = 0,28$ V.

Skupina D

1. Podatki: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $R = 30$ cm.

Na prelomu se prične krogla vrteti okrog dotikališča pod vplivom centripetalne sile, ki je enaka razliki projekcije teže kroglice na radij kroženja (t.j. zveznico med osjo in središčem krogle) in pravokotni sili podlage, $F_{cp} = mg \cos \varphi - F_{podlaga}$. Pri tem je φ kot med radijem kroženja in navpičnico. Krogla se lahko odtrga od podlage; tedaj je sila podlage enaka 0 in iz $m\omega^2 R = F_{cp}$ in $\omega = v/R$ sledi $mv^2/R = mg \cos \varphi$. Če hitrost krogle povečujemo, se bo to zgodilo najprej pri kotu $\varphi = \beta$. Hitrost krogle mora zato biti manjša od mejne vrednosti $v = \sqrt{gR \cos \beta}$. Višino nad prelomom, pri kateri krogla doseže mejno vrednost, izračunamo iz ohranitve vsote potencialne in kinetične energije

$$mgh + mgR(\cos \alpha - \cos \beta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2.$$

Pri tem smo upoštevali, da se pri kotaljenju okoli preloma krogla dodatno spusti za višino $R(\cos \alpha - \cos \beta)$, kar v našem primeru ni zanemarljivo. Dobimo

$$h = R \left(\frac{17}{10} \cos \beta - \cos \alpha \right) = 10 \text{ cm}.$$

2. Podatki: $T_3 = 1540^\circ\text{C}$, $T_4 = 700^\circ\text{C}$.

Tlaka, pri katerih potekata izobarna procesa, označimo s p_1 in p_2 , temperature v točkah 1, 2, 3 in 4 pa zaporedoma s T_1 , T_2 , T_3 in T_4 . Zapišimo enačbi za adiabatna procesa 1-2 in 3-4

$$\frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^\kappa} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^\kappa}, \quad \frac{p_1^{\kappa-1}}{T_4^\kappa} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_3^\kappa}.$$

Iz obeh enačb sledi

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}.$$

Na adiabatih zrak ne izmenjuje toplote z okolico, na izobari 2-3 prejme toploto $Q_1 = mc_p(T_3 - T_2)$ in na izobari 4-1 odda toploto $Q_2 = mc_p(T_4 - T_1)$, m je masa vse delovne snovi. V enem ciklu opravi plin delo $A = Q_1 - Q_2$ in izkoristek Braytonovega stroja lahko zapišemo kot

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Ob upoštevanju zgornje zveze med temperaturami dobimo

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{973 \text{ K}}{1813 \text{ K}} = 0,46.$$

Če se prostornina delovne snovi na izobari 2-3 poveča ν -krat, velja $T_3 = \nu T_2$, saj gre za izobarni proces. Izkoristek Carnotovega stroja, ki bi delal med temperaturama T_1 in T_3 , je potem

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{1}{\nu} \cdot \frac{T_1}{T_2},$$

iskano razmerje pa

$$\frac{1 - \frac{1}{\nu} \cdot \frac{T_1}{T_2}}{1 - \frac{T_1}{T_2}} = 1,8.$$

3. Električna poljska jakost znotraj enakomerno nabite kroglice z radijem r_0 in nabojem e_0 se takole spreminja z oddaljenostjo od središča r

$$E(r) = \frac{e(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} r,$$

saj je znotraj kroglice z radijem r , $r < r_0$, naboj $e(r) = e_0 r^3 / r_0^3$. Sila na elektron v takšnem atomu, $F(r) = e_0 E(r)$, je torej premo sorazmerna z razdaljo od izhodišča, tako kot pri sinusnem nihalu, $F = kr$, $k = e_0^2 / (4\pi\epsilon_0 r_0^3)$. Energija nihanja z amplitudo r_0 je

$$W_{\text{klas}} = \frac{kr_0^2}{2} = \frac{e_0}{8\pi\epsilon_0 r_0}$$

in frekvenca

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_0}}.$$

Naloga pove, da je najnižja energija enodimenzionalnega oscilatorja pri kvantnem opisu enaka $W_{\text{kvan}} = \frac{1}{2}\hbar\omega$, torej

$$W_{\text{kvan}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3 m_0}}.$$

Energiji sta enaki, če je radij kroglice ravno enak Bohrovemu radiju

$$r_0 = r_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e_0^2 m_0} = 0,053 \text{ nm}.$$

Bojan Golli

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

24. letnik, šolsko leto 1996/97, številka 5, strani 257 – 320

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1996/97 je za posamezne naročnike 1.500 SIT, za skupinska naročila šol 1.200 SIT, posamezna številka 300 SIT, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1306

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

