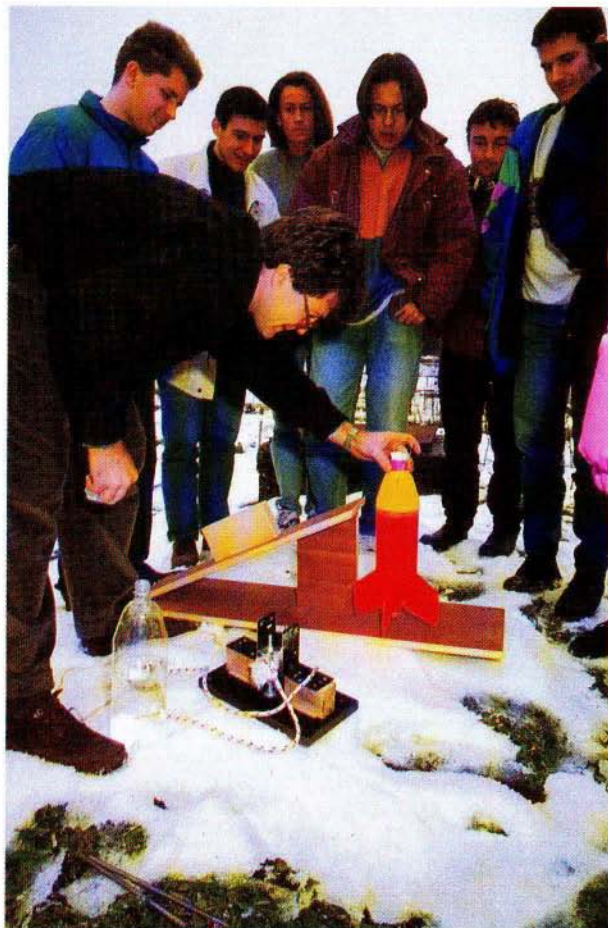


# PRE SEK

# 4

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 24(1996-1997)  
ISSN 0351-6652



Priprave na poskusno izstrelitev (foto Igor Omahen).



Izstrelitev je uspela! (foto Igor Omahen).



# PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
24. letnik, leto 1996/97, številka 4, strani 193–256

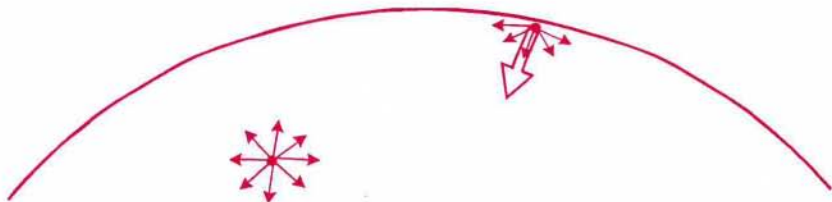
## VSEBINA

|                      |                                                                                                                             |         |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>MATEMATIKA</b>    | O deljenju z ostankom in še o čem (Ivan Vidav).....                                                                         | 206-209 |
|                      | Metoda ploščine (Silva Kmetič).....                                                                                         | 226-229 |
| <b>FIZIKA</b>        | Milni mehurčki na snegu (Alojz Kodre).....                                                                                  | 194-198 |
|                      | Projiciranje Sončevega mrka (Zoran Arsov).....                                                                              | 216-217 |
| <b>ASTRONOMIJA</b>   | Kaj je doslej odkrilo vesoljsko plovilo Galileo?<br>(Mirjam Galičič).....                                                   | 202-205 |
|                      | Zanimiva sončna ura – reš. str. 231 (Marijan Prosén)                                                                        | 218-220 |
| <b>RAČUNALNIŠTVO</b> | Naredi svoj Paintbrush (Jože Marinček).....                                                                                 | 210-214 |
| <b>NOVICE</b>        | Zaključek tekmovanja mest (Roman Modic).....                                                                                | 214-215 |
|                      | Z veseljem v vesolje ali tekmovanje študentov fizike<br>v poletih raket na vodo in stisnjen zrak<br>(Gorazd Planinšič)..... | 222-223 |
|                      | Poletna raziskovalna tabora – Spuhlja 96<br>(Vilko Domajnko, Jani Kovačič).....                                             | 232-234 |
| <b>NALOGE</b>        | Trikotnik na traku (Boris Lavrič).....                                                                                      | 200     |
|                      | Utesnjeni tetraeder (Boris Lavrič).....                                                                                     | 200     |
|                      | Množenje z devet (Marija Vencelj).....                                                                                      | 221     |
| <b>REŠITVE NALOG</b> | Komutativnost množenja – s str. 157 (Marija Vencelj) .                                                                      | 209     |
|                      | Soda pred liha – s str. 139 (Martin Juvan).....                                                                             | 220-221 |
|                      | Dediščina – s str. 152 (Marija Vencelj).....                                                                                | 234-235 |
|                      | Križanka "Družabne igre" – s str. 160 (Marko Bokalič) .                                                                     | 235     |
|                      | Izpitni nalogi – s str. 134 (Dušan Murovec,<br>prir. Marija Vencelj).....                                                   | 236-237 |
| <b>ZANIMIVOSTI</b>   | Sestavljanje števil – reš. str. 229 (Martin Juvan)...                                                                       | 199-200 |
| <b>RAZVEDRILO</b>    | Križanka "Šah" (Marko Bokalič).....                                                                                         | 224-225 |
|                      | Kateri datum manjka? (Marko Petkovšek).....                                                                                 | 230-231 |
| <b>PISMA BRALCEV</b> | Izpolnjevanke (Adil Čehić).....                                                                                             | 201     |
|                      | Številski križanka (Miha Eder).....                                                                                         | 232     |
| <b>TEKMOVANJA</b>    | 32. državno tekmovanje za Zlato Vegovo priznanje<br>(Aleksander Potočnik).....                                              | 238-239 |
|                      | 16. državno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce<br>(Mojca Čepič).....                                                      | 239-244 |
|                      | 11. državno tekmovanje v računalništvu za osnovno-<br>šolce, 2. del – rešitve s str. 182 (Martin Juvan) .                   | 244-247 |
|                      | Državno tekmovanje iz matematike za srednješolce<br>(Matjaž Željko).....                                                    | 247-249 |
|                      | 37. mednarodna matematična olimpiada –<br>rešitev s str. 135 (Matjaž Željko).....                                           | 250-251 |
|                      | Naloge z državnega tekmovanja iz srednješolske<br>fizike (Jure Bajc).....                                                   | 251-256 |
| <b>NA OVITKU</b>     | Milni mehurčki na snegu (foto Andrej Likar). Glej članek<br>na str. 194.....                                                | I       |
|                      | Tekmovanje raketarjev. Glej članek na str. 222.....                                                                         | II      |
|                      | Kaj je odkrilo vesoljsko plovilo Galileo? Glej članek<br>na str. 202.....                                                   | III     |
|                      | Projiciranje Sončevega mrka. Glej članek na str. 216....                                                                    | IV      |

## MILNI MEHURČKI NA SNEGU – ODGOVOR NA VPRAŠANJE IZ P XXIII/6, str. III

Lani spomladi smo postavili vprašanje, kaj se zgodi z milnimi mehurčki, ko pristanejo na čisti snežni površini. Lahko smo namreč opazovali, kako se ti mehurčki včasih usedejo na sneg, potem pa, sprva počasi in nato vse hitreje, v nekaj sekundah splahnijo. Na naslovnici te številke lahko občudujete fotografijo, ki je mnogo lepša kot tista lani. Pojava ni težko razložiti: kot bomo videli, ga lahko celo modeliramo. Račun nam da res približno takšen potek, kot ga opazujemo. Če bi hoteli model zares prekusiti, pa bi potrebovali zahtevnejšo meritev, na primer filmski posnetek dogajanja, na katerem bi lahko izmerili velikost mehurčka v odvisnosti od časa.

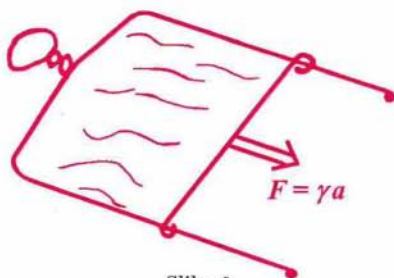
Prosta površina tekočine, na primer površina kapljice, kaže posebno lastnost, ki ji pravimo površinska napetost. Med molekulami tekočine deluje privlačna sila: v notranjosti kapljice je molekula z vseh strani obdana s sosedami, zato je skupna sila v povprečju enaka nič. Molekula na površini pa ima sosede le na eni strani, zato jo rezultanta privlačnih sil vleče navznoter (slika 1). Kdo poreče, da bi potemtakem tekočina stalno tekla s površine v notranjost, pa seveda ne. Rezultanta privlačnih sil je namreč uravnovešena s povečanim tlakom v tekočini: lahko si predstavljamo, da se kapljica zaradi površinske napetosti za malenkost stisne, zaradi česar v njej zraste tlak. Vendar je to samo miselno pomagalo, saj površinske napetosti ne moremo vključiti in izključiti, da bi ob preklopu opazovali spremembo velikosti kapljice. Lahko pa, kot bomo videli, opazimo učinke povečanega tlaka. Lepo je opazna še druga posledica te sile: če ni drugih vplivov, tekočina vedno privzame obliko z najmanjšo površino. Zato so majhne kapljice vedno kroglaste. Ob medsebojnem dotiku se rade zlijejo, saj je površina zlite kaplje manjša od skupne površine prvotnih. Pri večjih kapljah se kroglasta oblika posede zaradi teže. Pri poskusih v breztežnem prostoru pa so tudi velike kaplje kroglaste.



Slika 1.



Podoben pojav uporabljamo pri meritvi površinske napetosti. Iz žice zvijemo pravokoten okvir, pri katerem je ena stranica premična prečka. Okvir potopimo v tekočino, na primer milnico, in ga izvlečemo, tako da med prečko in nasprotnim robom ostane kaplja tekočine. Če jo hočemo razvleči v opno, moramo opraviti delo proti sili površinske napetosti (slika 2). Tako je, kot bi hoteli raztegniti



Slika 2.

krpico gumijaste opne, na primer delček gumijastega balončka. Vendar je med obema opnoma pomembna razlika: gumijasta opna postaja z nategom vse bolj toga in jo čedalje težje raztegujemo. Pri tekočinski opni pa se sila ne spreminja z nategom. Sorazmerna je le z dolžino prečke:

$$F = \gamma a,$$

kjer imenujemo koeficient  $\gamma$ , to je razmerje med silo  $F$  in dolžino prečke  $a$ , kar površinska napetost. Prav hitro tudi vidimo, da je delo, ki ga opravimo, ko premaknemo prečko za  $\Delta x$ , sorazmerno prirastku površine  $\Delta S = a\Delta x$ :

$$A = F\Delta x = \gamma a\Delta x = \gamma\Delta S.$$

Kako je s tem pri milnem mehurčku? Delo pri povečevanju površine opravljamo s pihanjem, torej s povečanim tlakom zraka, ki ga vpihnemo. Tega dela se včasih zavemo, ko napihujemo gumijaste balončke, pri milnih balončkih pa je povečanje tlaka komaj opazno. Površinska napetost milnice je le 0.025 N/m. Mislimo si, da smo mehurček že napihnili do krogle s polmerom  $r$ . Če ga povečamo še za majhen  $\Delta r$ , se volumen poveča za

$$\Delta V = 4\pi(r + \Delta r)^3 - 4\pi r^3 \approx 4\pi r^2 \Delta r,$$

kjer smo zanemarili majhne člene, ki vsebujejo  $(\Delta r)^2$  in  $(\Delta r)^3$ . Površina se pri tem poveča za

$$\Delta S = 8\pi(r + \Delta r)^2 - 8\pi r^2 \approx 16\pi r \Delta r.$$

Upoštevali smo, da ima mehurček dve krogelni površini, zunanjo in notranjo, ki sta praktično enako veliki, saj je stena mehurčka zelo tanka. Ko

izenačimo delo pri povečanju površine  $\gamma\Delta S$  z delom, ki ga opravi povečani tlak v mehurčku  $\Delta p\Delta V$ , izvemo

$$\Delta p = 4\gamma/r.$$

Ko mehurček rase, je torej prebitek tlaka v njem vse manjši.

S tem znanjem se že lahko lotimo prvotnega vprašanja, zakaj mehurček splahni. Hitro lahko zavržemo prvo idejo, da je namreč za pojav kriv mraz, zaradi česar se zrak v mehurčku ohladi in skrči. Celotna sprememba temperature, od tiste, ki jo ima zrak v pljučih ( $37^\circ\text{C}$ ), do temperature okolice (recimo največ  $-10^\circ\text{C}$ ) povzroči spremembo prostornine le za kakih 18% in spremembo polmera za 6%, pa še ta poteče večinoma, še preden sede mehurček na sneg. Tudi vodne pare, ki bi se pri ohlajevanju lahko utekočinila, pri teh temperaturah ni toliko, da bi prispevala k znatni spremembi prostornine. Ker mehurček popolnoma splahni, mora zrak izteči iz njega. To pa se zgodi, ker se spodnji del mehurčka "odpre". Sneg je porozen, luknjičav: milnica se ob dotiku vpije vanj. Zaradi povečanega tlaka v mehurčku počasi izteče tudi zrak. Skozi drobne kanalčke, kakršni so v snegu, teče zrak s hitrostjo, ki je sorazmerna tlačni razliki. To je podobno, kot če pustimo, da se mehurček izprazni skozi drobno slamico, s katero smo ga napihnili. V snegu predstavljajo prostorčki med kristali veliko zelo drobnih cevok, ki jim sicer ne vemo ne števila ne oblike, skupaj pa učinkujejo kot ena sama odtočna cevka. Zanj velja sorazmernost med volumskim tokom, oziroma med spremembo volumna v kratkem času  $\Delta t$ , in tlačno razliko:

$$\Phi_V = -\Delta V/\Delta t = k\Delta p.$$

V neznanem koeficientu  $k$  se skriva prepustnost snega. Vstavimo v to enačbo gornji zvezi med spremembo prostornine  $\Delta V$  in spremembo polmera  $\Delta r$  ter med polmerom in tlačno razliko:

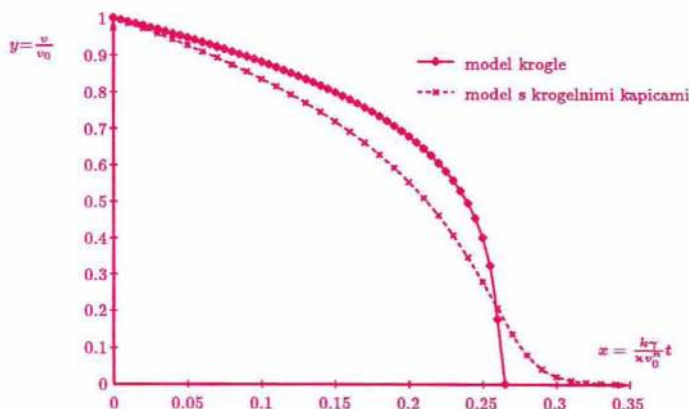
$$-4\pi r^2\Delta r/\Delta t = 4k\gamma/r.$$

Dobili smo zvezo za odvisnost polmera plahnečega mehurčka od časa. Tisti, ki poznajo diferencialni račun, jo brez težav prepišejo v diferencialno enačbo in jo rešijo. Lahko pa napišemo tudi kratek program in spremljamo praznjenje mehurčka na grafu. Ker ne poznamo koeficienta  $k$ , si pomagamo tako, da računamo z relativnimi količinami. Uvedemo razmerje med trenutnim polmerom in njegovo začetno vrednostjo,  $y = r/r_0$ , in zapišemo njegovo spremembo v kratkem času:

$$\Delta y = -(1/y^3)\Delta(k\gamma t/\pi r_0^4) = -(1/y^3)\Delta x.$$



Na začetku ima  $y$  vrednost 1. Po zgornji enačbi izračunamo njegovo spremembo v majhnem koraku  $\Delta x = \Delta(k\gamma t/\pi r_0^4)$ , ki pomeni čas v nekakšnih posebnih enotah, primernih za naš problem. Dobljeni  $\Delta y$  odštejemo od začetne vrednosti in račun ponavljamo, dokler je še kaj odšteti. Naš graf ne bo imel prave časovne osi (slika 3), oblika pa nam bo vseeno pokazala, da mehurček plahni sprva počasi, proti koncu pa vse hitreje - tako kot smo videli v poskusu na snegu. Da se relativni polmer zmanjša od 1 do 0, traja približno  $1/4$  enote časovne spremenljivke  $x$ . Na polovici tega časovnega intervala je polmer še 0.84: torej se v prvi polovici zmanjša le za 16%, v drugi pa za preostalih 84%. Vidimo tudi, da je trajanje pojava v enotah pravega časa,  $t_0 = \pi r_0^4/4k\gamma$ , sorazmerno s četrto potenco začetne velikosti mehurčka. Dvakrat večji mehurček plahni šestnajstkrat dlje.



Slika 3.

Tako! Razložili smo pojav in razlago celo podprli z računom. Pri tem pa se, kot je v naravoslovju pogosto, porodi več novih vprašanj. Z razlago smo se dokopali do globljega razumevanja in to nas opozarja na podrobnosti, ki smo jih doslej jemali kot samoumevne. Nekatera vprašanja so bolj tehnične narave, druga pa zadevajo same osnove pojava. Na primer: v računu smo privzeli, da je mehurček ves čas kroglast, v poskusu pa jasno vidimo, da ostaja ploskev, s katero je zasidran na površini snega, ves čas ista. Mehurček v resnici prehaja skozi oblike krogelnih kapic z isto osnovno ploskvijo in vse manjšo prostornino. Z nekaj več geometrijskega znanja uženemo tudi tak račun. Kot vidimo na sliki 3, rezultat ni bistveno drugačen od gornjega, graf je malo manj strm, še vedno pa velja, da poteka pojav v začetku počasi, nato pa vse hitreje. Le prav ob koncu se spet upočasni, vendar tega v poskusu skoraj ne opazimo, ker ostane na snegu skoraj ravna mrenica milnice.

Porodi se nam tudi prav globoko vprašanje: kako da mehurček sploh nastane in obstane? Če zavzame tekočina v ravnovesju obliko z najmanjšo površino, kako lahko obstaja mehurček, ki ima nemara stokrat večjo površino kot kapljica milnice, iz katere je nastal? Odgovor je v zvijači, s katero mehurček ustvarimo: v sredo kapljice kolikor mogoče mirno vpihujemo zrak. (Vemo, da burno pihanje kapljico po navadi razbije.) Če naj bi nastali mehurček sam od sebe prešel v obliko z najmanjšo površino, bi moral najprej skozi oblike, v katerih se površina še nekoliko poveča, recimo tako, da nastane droben predor skozi opno. V mirno lebdečem mehurčku ni od nikoder dobiti dela, ki bi ga bilo za to treba opraviti. Se pa to lahko zgodi pri mehurčku, ki niha. Zato so mehurčki v vetrovnem ozračju, ki vzbuja nihanja, manj obstojni. Lahko to delo prispevamo sami, tako da mehurček prebodemo s konico. Če milnica konice ne omoči, pomeni, da smo opno predrli in ustvarili prost rob, na katerem je krivina zelo velika. S širjenjem te odprtine se površina naglo zmanjšuje. Proces je tako buren, da se mehurček razsuje v drobne kapljice. Če pa milnica ost omoči, se je oprime, tako da ne nastane prost rob. Zato se mehurčka vedno lahko dotaknemo z mokro slamico in celo z mokrim prstom. Mehurček tudi lepo sede na mokro podlago in na sneg, če je čist. Kadar je površina snega nasmetena z iglicami, ostanki listja ali vejic, pa mehurček praviloma počí.

In sčasoma seveda vsak mehurček počí sam od sebe. Tekočinska plast se počasi tanjša, nekaj zaradi izparevanja, nekaj pa zato, ker se milnica počasi steka v kapljo, ki visi pod mehurčkom. To lahko spremljamo po barvi: ko izginejo mavrične barve na mehurčku, je debelina tekočinske plasti postala manjša od valovne dolžine vidne svetlobe, t.j. približno 0.4 mikrona. Opna je tedaj debela le še nekaj tisoč molekulskih plasti; kmalu potem zadošča že najmanjša motnja, da se opna predre in se s prostim robom odpre možnost, da se površina zmanjša.

Nazadnje samo omenimo zares zahtevno vprašanje: Kako da mehurček obstane na porozni snežni površini. Če si skušamo predstavljati, kako se opna dotika snežnih zrn, se zdi skoraj neizogibno, da so vmes nastali tudi deli prostega robu. Kako da se na njih ne začne krčenje površine, zaradi katerega se mehurček razblini? Najbrž je rob mehurčka odebeljen: kjer se dotika snežnih zrn, jih oblije, med njimi pa oblikuje sedlaste površine, kakršne opazimo, če vodno kapljo skušamo razvleči med prstoma. Če je opna med zrnji tako debela, kolikor znaša razmik med njimi, ostane stabilna, njena površina se ne more zmanjšati, ne da bi se odtrgala od snežnega zrna, ki ga obliva. Mehurček je torej zasidran na snežnih zrnih.

Kaj vse se je razkrilo, ko smo hoteli razložiti preprost poskus med izletom v zimsko pokrajino!

*Alojz Kodre*



## SESTAVLJANJE ŠTEVIL

V letošnji prvi številki Preseka ste lahko prebrali nalogo, ki je spraševala, kako s števili 1, 9, 9 in 7 sestavimo čim več števil med 0 in 128. Naloge takega tipa se večkrat pojavljajo v revijah, ki objavljajo naloge iz razvedrilne matematike. Običajno so med bralci ugodno sprejete in tudi tokrat je mnogo bralcev Preseka sprejelo izziv. V naših krajih so bile še posebej priljubljene pred leti, ko so na hrvaški televiziji predvajali kviz *Brojke i slova*.

Vrnimo se k nalogi iz Preseka in k z njo povezani zgodovini. Pred več kot desetimi leti je bila v reviji *Galaksija* zastavljena nagradna naloga, ki je spraševala, kako s štirimi štiricami zapišemo vsa naravna števila od 1 do 100. (Pravzaprav je bila naloga vzeta iz decembrske številke letnika 1981 revije *Science Digest*.) Nagradne naloge v *Galaksiji* je tedaj urejal Dejan Ristanović. Reševalci so imeli največ težav z zapisi števil 13, 19, 33 in 85. Zapise teh števil si lahko ogledate na strani 229. Zanimiv prijem, ki so ga uporabili nekateri reševalci, je "računalniška" uporaba decimalnega zapisa brez ničle pred decimalno piko. Tako lahko število 55 zapišemo kot

$$55 = (4! - .4) / .4 - 4.$$

Nekaj let kasneje je isti avtor urejal rubriko *Dejanove pitalice* v računalniški reviji *Računari*. Tako se je julija 1987 v njej zopet pojavila skoraj enaka naloga. Tokrat so iskali zapis čim več prvih naravnih števil s štirimi štiricami. Najboljši reševalec je uspel s štirimi štiricami zapisati vsa števila od 1 do 334. In kako je gornja naloga povezana s Presekovo? Istega leta je bila v septembrski številki *Računarov* objavljena tudi rešitev gornje naloge, in sicer v obliki postopka, ki poišče zapis poljubnega naravnega števila s štirimi štiricami. Tak postopek je bil napovedan že pri rešitvi prvotne naloge v *Galaksiji*, a ni bil nikoli objavljen. V nadaljevanju si bomo ogledali ta postopek, le da bomo namesto štirih štiric uporabili števila 1, 9, 9 in 7.

Rešitev prihaja iz računalniških krogov. Namesto naravnih in desetiških logaritmov se v računalništvu precej pogosteje uporablja dvojiški logaritem. Današnji računalniki namreč temeljijo na dvojiškem sistemu, pa tudi pri analizi različnih postopkov, ki uporabljajo ideje, sorodne bisekciji, se dvojiškemu logaritmu ne moremo izogniti. Naravni logaritem označujemo z  $\ln$ , desetiškega z  $\log$ , ustaljena oznaka za dvojiški logaritem pa je  $\lg$ . Postopek, s katerim dobimo zapis poljubnega naravnega števila, temelji na večkratni zaporedni uporabi kvadratnega korena. Recimo, da

začnemo s številom 2. Z zaporednim korenjenjem dobimo 2,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{\sqrt{2}}$ , ..., torej števila

$$2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{2^{-n}}, \quad n \geq 0.$$

Še dvakrat uporabimo dvojiški logaritem, spremenimo predznak in že imamo

$$-\lg \lg 2^{2^{-n}} = -\lg 2^{-n} = -(-n) = n.$$

Začeli smo s številom 2. Kot ste gotovo že sami ugotovili, števila 2 ni težko zapisati s števili 1, 9, 9 in 7:

$$2 = 1 - \sqrt{9} - \sqrt{9} + 7 = 1 + (9/9)^7 = -1 + 9/.9 - 7.$$

Končajmo s primerom. Po gornjem postopku število 5 lahko zapišemo kot

$$5 = -\lg \lg \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1 + 9/.9 - 7}}}}}}}}.$$

No, zapis morda res ni najpreglednejši, je pa gotovo nenavaden in zanimiv.

*Martin Juvan*

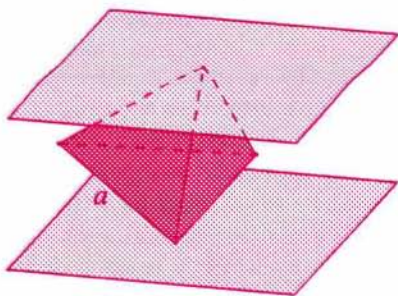
## TRIKOTNIK NA TRAKU

Na ravnini med vzporednima premicama  $p$  in  $q$  leži trikotnik. Dokaži, da njegova najkrajša višina ni daljša od razdalje med  $p$  in  $q$ .

*Boris Lavrič*

## UTESNJENI TETRAEDER

Najmanj koliko morata biti oddaljeni vzporedni ravнинi, da mednju lahko postavimo pravilni tetraeder s stranico dolžine  $a$ ?



*Boris Lavrič*



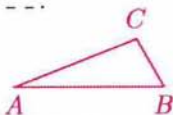
## IZPOLNJEVANKA

Učenci šestih razredov osnovne šole Janka Glazerja iz Ruš (sedaj že sedmošolci) so nam poslali nekaj nalog, ki so jih sestavili pri dodatnem pouku iz matematike in krožku iz logike. Izbrali smo dve: številsko križanko, ki jo najdete na strani 232, in spodnjo izpolnjevanko.

## Vodoravno:

1. ----- do matematike.
2. Osnosmerni štirikotnik, v katerem gre somernica skozi nasprotni oglišči.
3. Množico točk, ki se preko premice prezrcali sama nase, imenujemo OSNO-----.

4. Poimenuj lik:

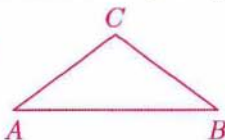


5.  $80 - 54 = 26$ . Kako imenujemo to računsko operacijo?

6. Poimenuj daljico  $AB$ .

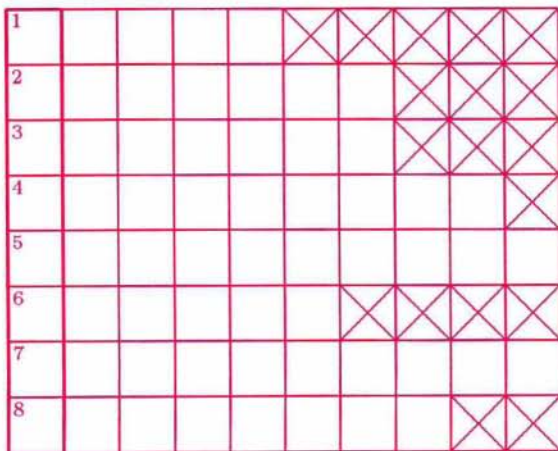


7. To je ----- trikotnik.



8.  $35 : 5 = 7$ . Kako imenujemo rezultat pri deljenju?

**Navpično:** Pod 1 navpično dobiš rešitev izpolnjevanke. Naštej vsaj tri področja, kjer boš to rešitev potreboval tudi ti!



Adil Čehič, OŠ Janka Glazerja, Ruše

## KAJ JE DOSLEJ ODKRILLO VESOLJSKO PLOVILO GALILEO?

Ko je po dobrih šestih letih poleta z Zemlje vesoljsko plovilo *Galileo* vstopilo v orbito okrog Jupitra, je začelo na Zemljo pošiljati podatke in slike, ki so osupnili astronome. Nova spoznanja o največjem planetu Osončja in njegovih lunah so Nasini znanstveniki takoj posredovali javnosti. Oglejmo si nekatera od njih.

### Vzlet in naloge Galilea

Vesoljsko plovilo *Galileo* je 18. 10. 1987 začelo svojo dolgo pot na hrbtu vesoljskega čolnika *Atlantis*. Plovilo tehta dve in pol toni ter nosi doslej najobsežnejši "tovor" znanstvenih instrumentov namenjenih meritvam Jupitra in njegovih lun. 7. 12. 1995 je *Galileo* vstopil v načrtovano orbito okrog Jupitra in tako postal – ob planetovih 16 naravnih satelitih – njegov prvi umetni satelit. Po načrtih naj bi krožil okrog Jupitra dve leti, se med tem približeval njegovim lunam ter ves čas pošiljal na Zemljo podatke in slike – povprečno po dve na dan. Med Galilejeve glavne znanstvene naloge sodi preučevanje Jupitra, predvsem njegove atmosfere in magnetne aktivnosti ter njegovih štirih najbližjih in največjih lun (*Io*, *Evropa*, *Ganimed* in *Kalisto*).

Vesoljsko plovilo nosi ime po slavnem italijanskem znanstveniku *Galileu Galilei* (1564 – 1642), ki je izumil teleskop. *Galileo* sam je s svojim teleskopom opazoval planet *Jupiter* in tudi že opozoril na njegove štiri največje in planetu najbližje lune. Po njem te štiri naravne satelite včasih imenujemo Galilejeve lune.

### Jupiter

*Jupiter* je največji planet našega Osončja. Vsebuje 318-krat več mase kot Zemlja, po prostornini pa je od nje večji 1400-krat. Ker pa je plinast, je v povprečju štirikrat manj gost od Zemljine snovi. Zanj je tudi značilno, da seva iz svoje notranjosti več toplote, kot jo sprejme od Sonca. Obkroža ga veliko lun. Danes jih poznamo šestnajst, tako da je kot nekakšen miniaturni sončni sistem.

In kaj nam je o Jupitru novega doslej že sporočil *Galileo*? Stožčasta sonda, ki se je s hitrostjo 160 000 kilometrov na uro zarila v Jupitrovo atmosfero, je poslala že lepo število meritev. Eno najpomembnejših odkritij se nanaša na količino dveh, v Osončju (in vesolju) najpogostejših kemijskih elementov, vodika in helija. Ker je vodika zdaleč največ, ponavadi izražamo količino ostalih elementov, tudi helija, relativno glede na

količino vodika. Za Sonce vemo, da je to razmerje okrog petindvajset odstotkov. Zdaj vemo, da za Jupiter znaša okrog štiriindvajset odstotkov. Lahko torej sklepamo, da se od Jupitrovega nastanka pred milijardami let do danes njegova kemijska sestava v grobem ni dosti spremenila. Izmerek tudi pomeni, da se v Jupitru helij ni usedel z zunanjih območij v notranjost, kot se je to zgodilo pri Saturnu. Torej je Jupiter v notranjosti dosti bolj vroč od Saturna, drugega največjega planeta Osončja.

Drugače pa je z vsebnostjo nekaterih težjih elementov. Tako je v Jupitrovi atmosferi precej več ogljika, dušika in žvepla kot v Soncu. To je najverjetneje posledica številnih vpadov meteoritov v dolgih milijardah let. So pa Galilejevi instrumenti zaznali le zelo malo organskih sestavin, kar pomeni, da obstaja izjemno majhna, pravzaprav zanemarljiva verjetnost, da bi na Jupitru našli kako, zemeljski podobno, biološko aktivnost.

Galileo je meril tudi hitrosti vetrov v Jupitrovi atmosferi. Te naj bi dosegale vrednosti do šeststo kilometrov na uro, kar je precej več, kot so mislili doslej. Tako velike hitrosti vetra naj bi bile posledica temperaturnih razlik zaradi toplote, ki izhaja iz notranjosti planeta, ne pa posledica Sončevega ogrevanja. Zanimivo tudi je, da meritve kažejo na obstoj le ene plasti oblakov, ne pa treh, kot so znanstveniki pričakovali. Ti oblaki pa niso prijazne zgostitve vodnih hlapov, kot smo navajeni na Zemlji, ampak jih sestavlja precej ostra spojina dušika, vodika in žvepla. Pokazalo se je tudi, da je Jupitrova atmosfera precej suha, da vsebuje manj vode, kot bi pričakovali. Je pa v Jupitrovem vremenu (na enoto planetove površine) približno desetkrat manj bliskanja kot na Zemlji, vendar so posamezni bliski kar nekajkrat močnejši od teh, ki smo jih vajeni.

## Io

Io je od štirih Galilejevih lun najmanjša, je pa Jupitru najbližja. Velika je približno za tretjino Zemljine velikosti. Posnetki, ki jih je poslal Galileo, kažejo, da se je ta luna močno spremenila v zadnjih sedemnajstih letih, ko sta jo opazovala Voyager 1 in 2 (slika 1 na III. strani ovitka). Na njen izgled hitro in dramatično vplivajo številni vulkanski izbruhi (slika 2 na III. strani ovitka), ki potekajo neprestano in spreminjajo videz njenega oranžno-belega površja.

Galileo se je luni Io približal na 840 kilometrov. Gravitacijsko polje Io je povzročilo majhne odklone od načrtane orbite plovila, ki so jih na Zemlji uspeli zaznati z natančnimi meritvami radijskega signala, ki ga oddaja Galileo.

Kaže, da ima Io ogromno železno sredico, katere polmer je okrog polovice celotnega polmera te lune. Okrog sredice je plašč delno stopljenih kamnin, tega pa obdaja trdna skorja. Io je najbolj geološko aktivno telo v



Sončevem sistemu, nekateri ji pravijo kar vulkanska luna. Je kot nekakšna plastelinska krogla, ki pa je ne stiskajo in raztezajo roke kratkohlavnika, ampak močno Jupitrovo gravitacijsko polje. Pri tem prihaja do trenja, ob čemer se skale grejejo in talijo, zato je površje Io preprejeno z vulkani in tokovi lave, ogromni gejzirji pa v okolico bruhajo žveplov dioksid. S svojo vulkansko aktivnostjo proizvede Io dvakrat toliko toplote kot Zemlja, čeprav je Zemlja trikrat večja.

Naslednje presenetljivo odkritje je povezano z magnetnim poljem. Izmerjena "luknja" v magnetnem polju Jupitra, ki seveda sega tudi preko območja, kjer se nahaja Io, daje misliti, da ima Io tudi svoje magnetno polje (naša Luna ga nima). Znanstveniki si v zvezi s tem še niso povsen na jasnem in nestrpno čakajo na podatke še ostalih inštrumentov in na nove meritve.

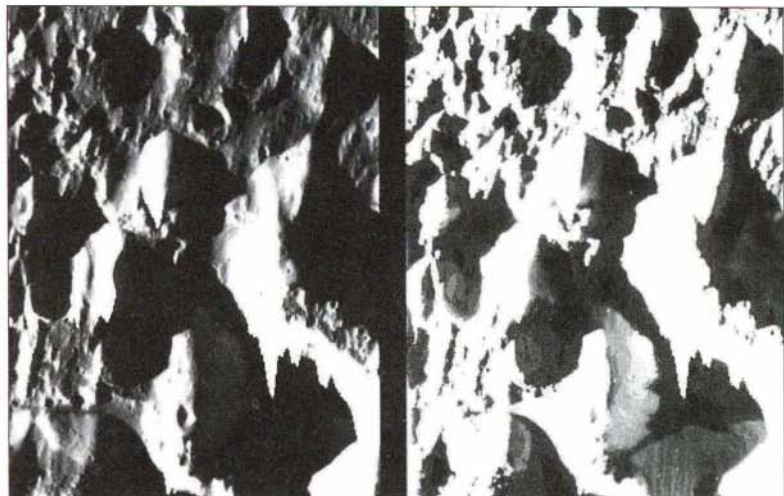
Kaže tudi, da je Io kriva za hude nevihte prahu na Jupitru. Galilejevi detektorji so imeli priložnost prvokrat opazovati veliko in močno prašnato nevihto, v kateri je na dan padlo 20 000 prašnih kapelj. Te kaplje oziroma prašni delci potujejo stran od Jupitra z velikimi hitrostmi. Znanstveniki menijo, da izvirajo z lune Io. Možno je, da nastajajo pri vulkanskih izbruhih, se nato električno nabijejo in pospešijo v Jupitrovem magnetnem polju.

## Ganimed

Ganimed je največja Jupitrova luna in hkrati največja luna v Osončju. Njegov polmer meri 2450 kilometrov. Tako je večji od Merkurja, od Marsa pa je za četrtno manjši. Galileo se mu je 27. 6. 1996 približal na okrog osemsto kilometrov, kar je sedemdesetkrat bližje, kot mu je prišel Voyager 2. Na Ganimedu najdemo celo vrsto Zemljinim podobnih geoloških formacij: kraterje, kotanje, gore in razpoke. Površje je precej svetlo, prekrito z ledom (slika 3), ki pa je na nekaterih mestih temnejši, "umazan". Tam je tudi precej na gosto prekrit s kraterji in verjetno starejši. Ganimed je sestavljen pretežno iz skalnate snovi in vodnega ledu.

Galilejevi podatki kažejo, da je Ganimed doživel številna in huda bombardiranja kometov in asteroidov. Obenem je močno preoblikovan zaradi geoloških sil, kakršne so ustvarjale tudi gore na Zemlji in premikajo naše kontinentalne plošče. Ganimed ima svojo magnetosfero, to je obdajajoče področje v obliki balona, napolnjeno z nabitimi delci, ki jim gibanje predpisuje Ganimedovo lastno magnetno polje. Ker je o magnetnem polju lune Io Galileo doslej poslal še premalo podatkov, je tako Ganimed prva luna v Osončju, za katero s precejšnjo gotovostjo vemo, da ima svoje magnetno polje. Meritve tudi kažejo, da je Ganimed obdan

s tanko plastjo ionosfere. Ker je ionosfera tudi ena od plasti, ki obdajajo Zemljo, nekateri znanstveniki domnevajo, da morda tudi Ganimed obdaja tanka plast atmosfere. Obstoj Ganimedove atmosfere pa je spričo lunine velikosti in mase eno od najbolj vznemirljivih vprašanj, na katera si znanstveniki projekta Galileo obetajo odgovore.



Slika 3. Ledeni griči in doline na površju Ganimeda. Sonce obseva Ganimed na tej sliki z leve strani. Razločimo lahko podrobnosti, velike enajst metrov. Sliko so z oddaljenosti okrog tisoč kilometrov posneli 28. 6. 1996.

Novi posnetki Ganimeda potrjujejo ugotovitve o geološki aktivnosti te lune in pomagajo znanstvenikom bolje razumeti tudi nenavadne posnetke Ganimedovega površja, ki sta jih poslali že plovili Voyager.

### Kaj še?

Galileo naj bi obkrožil Jupiter enajstkrat. V več kot letu dni poti, ki je še pred plovilom, se bo še nekajkrat približalo posameznim lunam, tudi Kalistu in Evropi, in opravilo nove meritve. Načrtovana so tudi opazovanja Jupitrove nočne strani, da bi videli, če in kakšna je njegova aurora. Posebej zanimivimo bo tudi Galilejevo raziskovanje Velike rdeče pege (velika je za tri Zemlje!), področja, ki ga lahko opazimo že z manjšim teleskopom in kjer po dosedanjih domnevah poteka silovita nevihta, podobna hurikanu (slika 4 na III. strani ovitka).

Podatki, ki jih bo poslal Galileo, bodo znanost močno obogatili in verjetno dodobra spremenili našo predstavo o Jupitru, njegovih lunah in s tem o celotnem Osončju.

*Mirjam Galičič*

## O DELJENJU Z OSTANKOM IN ŠE O ČEM

V prvih razredih osnovne šole smo se naučili računskih operacij s števili: seštevanja, množenja, odštevanja in deljenja. Ker smo tedaj poznali samo naravna števila  $1, 2, 3, \dots$ , zadnji dve operaciji nista bili vselej izvedljivi. Če smo na primer delili kakšno število  $D$  z deliteljem  $d$ , smo dobili kvocient  $k$  in v splošnem še ostanek  $o$ . Delitev se je izšla, kadar je bil ostanek  $o$  enak nič. Sicer pa je ostanek  $o$  vedno manjši od delitelja  $d$ . Preizkus smo napravili tako, da smo kvocient  $k$  pomnožili z deliteljem  $d$  in temu produktu prišteli ostanek  $o$ . Pri pravilnem računu smo dobili za rezultat deljenec  $D$ , torej

$$D = k \cdot d + o. \quad (1)$$

Za ostanek  $o$  pa velja ocena

$$0 \leq o < d. \quad (2)$$

Pri poljubno izbranih naravnih številih  $D$  in  $d$  sta celi števili  $k$  in  $o$ , ki zadoščata enačbi (1) in pogoju (2), natanko določeni. Dobimo ju seveda z deljenjem števila  $D$  z  $d$ . Ali sme biti  $D$  manjši od  $d$ ? Sme. V tem primeru velja enačba (1) pri  $k = 0$  in  $o = D$ . Ker je zdaj  $o = D < d$ , je tudi pogoj (2) izpolnjen.

Postopek deljenja naravnih števil z ostankom v matematiki pogosto uporabljamo. Morda je najbolj znan primer uporabe iskanje največjega skupnega delitelja števil  $D$  in  $d$ , ki ga dobimo s ponavljanjem deljenja z ostankom (Evklidov algoritem). Vendar tu ne bomo govorili o Evklidovem algoritmu, temveč si bomo ogledali neko drugo uporabo.

Vemo, da vsota ne določa sumandov. Če poznamo vsoto  $x + y$ , števil  $x$  in  $y$  ne moremo izračunati, tudi tedaj ne, kadar sta  $x$  in  $y$  naravni števili. (Edina izjema je enačba  $x + y = 2$ , ki je s pozitivnima celima številoma  $x$  in  $y$  izpolnjena samo pri  $x = y = 1$ .) Včasih, kadar je znano več podatkov o sumandih, pa sta  $x$  in  $y$  določena. Tu bomo obravnavali tale primer: Naj bo

$$x + y = D, \quad (3)$$

kjer je  $D$  dano število. Denimo, da vemo tole:

- 1) Sumanda  $x$  in  $y$  sta naravni števili,
- 2)  $x$  je deljiv z nekim znanim številom  $d$  in
- 3)  $y$  je manjši od  $d$ , torej  $y < d$ .



V tem primeru sta sumanda  $x$  in  $y$  določena. Dobimo ju tako, da delimo  $D$  z  $d$ . Če je pri tej delitvi kvocient enak  $k$  in ostanek  $o$ , nam pogled na enačbo (1) pove, da je

$$x = k \cdot d \quad \text{in} \quad y = o.$$

Kot primer za uporabo tega dejstva si oglejmo, kako izračunamo iz enega samega znanega števila rojstni datum kake osebe. Denimo, da Janez ne ve, kdaj je bil rojen njegov prijatelj Tone. To bi rad dognal na precej neobičajen način: Toneta prosi, naj vzame kos papirja in svinčnik (ali računalnik) in potem napravi tale račun:

“Število, ki pove dan v mesecu tvojega rojstva, pomnoži s 15 in produktu prištej število, ki določa mesec rojstva. Dobljeno vsoto pomnoži z 98 in produktu prištej letnico rojstva.”

Tone nekaj časa računa in dobi na koncu rezultat 41946. Zdaj vzame Janez v roke svinčnik in kos papirja, prepíše to število, nekaj časa računa in pove, da je bil Tone rojen 27. marca 1962. Tone potrdi, da je datum pravilen. Kako je Janez dobil iz enega samega znanega števila tri števila, ki določajo datum?

Zaznamujmo z  $a$  število, ki pove dan v mesecu, in z  $b$  število, ki določa mesec rojstva. Ker je Tone rojen v tem stoletju, saj še ni tako star kakor tista gospa iz Arlesa v južni Franciji, lahko zapišemo njegovo rojstno letnico v obliki  $1900 + c$ , kjer je  $c$  manjši od 98. Račun, ki ga je moral opraviti Tone, se v znakih glasi takole:

$$98(15a + b) + 1900 + c.$$

Ta izraz je enak 41946. Janez je najprej odštel 1900 in dobil enačbo

$$98(15a + b) + c = 40046.$$

Leva stran je vsota dveh členov. Prvi  $98(15a + b)$  je deljiv z 98, drugi  $c$  pa je manjši od 98. Janez je delil 40046 z 98 in dobil kvocient  $k = 408$  ter ostanek  $o = 62$ . Ker je očitno kvocient  $k$  enak  $15a + b$ , ostanek  $o$  pa enak  $c$ , je že našel letnico rojstva, namreč  $1900 + c = 1962$ . V enačbi

$$15a + b = 408$$

je na levi prvi člen  $15a$  deljiv s 15, drugi člen  $b$  pa določa mesec rojstva in je zato kvečjemu 12, torej vsekakor  $b < 15$ . Janez je zdaj delil 408 s 15 in dobil kvocient  $k = a = 27$  in ostanek  $o = b = 3$ . Tako je izračunal, da je bil Tone rojen 27. 3. 1962.

Janez je Tonetu naročil, naj prvič množi s 15, drugič z 98. Očitno bi smel izbrati namesto faktorja 15 katerokoli število, ki je večje od 12, kolikor je mesecev v letu, namesto faktorja 98 pa katerokoli število večje od 97, ker smo zdaj v letu 1997. Najpreprosteje bi bilo, če bi obakrat izbral faktor 100. Bralec naj sam premisli, kakšen bi bil rezultat množenja in seštevanja v tem primeru.

Datum Tonetovega rojstva je skrit v številu 41946. Odkrijemo ga, če poznamo ključ, ki ga v našem primeru določata faktorja 15 in 98. Denimo, da bi Janez čez nekaj časa pozabil, kakšen je drugi faktor, zapomnil pa bi si prvega in imel na listku zapisan rezultat 41946. Rojstnih podatkov ne bi več mogel določiti. Če bi, recimo, domneval, da je bil drugi faktor število 100, bi dobil datum 26. oktober 1946, ki ni pravi. Bralec naj se skuša sam prepričati, da drugi faktor prav gotovo ni 99.

Z isto metodo, kakor tri števila, skrijemo v eno samo število poljubno končno množico naravnih števil. Tako bi lahko Janez izračunal poleg datuma rojstva tudi hišno številko Tonetovega stanovanja.

Pa naj bo

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (4)$$

poljubno končno zaporedje naravnih števil. Izberimo faktorje  $d_2, d_3, \dots, d_n$ , tako da veljajo ocene

$$d_2 > a_2, \quad d_3 > a_3, \quad \dots, \quad d_n > a_n.$$

( $d_2, \dots, d_n$  so naravna števila.) Tvorimo zdaj zaporedje

$$k_2, k_3, \dots, k_n$$

po temle predpisu: Najprej naj bo  $k_2 = a_1 d_2 + a_2$ , nato  $k_3 = k_2 d_3 + a_3$ , ..., splošno

$$k_i = k_{i-1} d_i + a_i \quad \text{za } i = 3, 4, \dots, n. \quad (5)$$

V zadnjem členu  $k_n$ , imenujmo ga  $D$ , je skrito zaporedje (4). Če poznamo število  $D$  in faktorje  $d_2, \dots, d_n$ , lahko vse člene  $a_i$  izračunamo. Najprej delimo  $D$  z  $d_n$ . Pogled na enačbo (5), ki jo zapišemo za  $i = n$ , pove, da je kvocient pri tej delitvi enak  $k_{n-1}$ , ostanek pa zadnji člen  $a_n$  zaporedja (4). Če kvocient  $k_{n-1}$  delimo z  $d_{n-1}$ , je novi kvocient enak  $k_{n-2}$ , ostanek pa člen  $a_{n-1}$ . Tako nadaljujemo in dobimo vsa števila (4). Hkrati vidimo, da število  $D$  določa tudi vrstni red členov zaporedja (4).

Zgled. Denimo, da je Tonetova hišna številka 48. Hišna številka in rojstni podatki sestavljajo štiri števila

$$48, 27, 3, 62.$$

Ker imajo nekateri meseci 31 dni, mora Janez za  $d_2$  izbrati večje število, npr.  $d_2 = 35$ . Faktorja  $d_3$  in  $d_4$  pa naj bosta kakor prej 15 in 98. Tone, ki mu zdaj pride prav računalnik, izračuna, da je  $D = 2509646$ . Janez deli to število z 98 in dobi kvocient 25608 in ostanek 62. Nato deli kvocient 25608 s 15. Novi kvocient je zdaj 1707, ostanek pa 3. Nazadnje deli 1707 s 35 in dobi ostanek 27 ter kvocient 48. Tako najde vsa štiri števila, ki določajo hišno številko in datum rojstva prijatelja Toneta.

Ivan Vidav

## KOMUTATIVNOST MNOŽENJA – Rešitev s str. 157

Iščemo štiri desetiške številke  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ki izpolnjujejo pogoje

$$\overline{ab} \times \overline{ba} = \overline{cdc},$$

od katerih je le  $d$  lahko enaka 0.

- Zaradi simetrije zadošča poiskati števila  $\overline{ab}$ , za katera je  $a \leq b$ . Ker je  $\overline{ab} \times \overline{ba}$  trimesčno število, mora biti  $a \times b < 10$ . Torej lahko nastopijo kvečjemu naslednji primeri:

$$a = 1 \text{ in } 1 \leq b \leq 9,$$

$$a = 2 \text{ in } 2 \leq b \leq 4,$$

$$a = 3 \text{ in } b = 3.$$

- Iz

$$(10a + b)(10b + a) = 100c + 10d + c$$

sledi

$$10(a^2 + b^2 - d) = 101(c - ab).$$

To pomeni, da je  $a^2 + b^2 - d$  deljivo s 101, zaradi zgornjih ocen pa velja še

$$-7 \leq a^2 + b^2 - d \leq 82.$$

Torej je  $a^2 + b^2 - d = 0$ .

- Ker je  $d$  desetiška številka, sledi od tod ocena  $a^2 + b^2 = d \leq 9$ , kar pomeni, da za neničelna  $a$  in  $b$  ostanejo le še možnosti:

$$a = 1, b = 1; \quad a = 1, b = 2; \quad a = 2, b = 2.$$

Ker je  $11 \cdot 11 = 121$ ,  $12 \cdot 21 = 252$  in  $22 \cdot 22 = 484$ , ima naša naloga štiri rešitve. To so števila 11, 12, 22 in zaradi simetrije še 21.

Marija Vencelj



## NAREDI SVOJ PAINTBRUSH

### Zamisel

Program `PaintBrush` je med začetniki zanesljivo eden najbolj priljubljenih dodatkov k Oknom. Razlog je na dlani: je enostaven za uporabo, risba pa je sploh eno človekovih najstarejših izraznih sredstev, v kar se lahko prepričamo, denimo, v španski Altamiri.

Uporabljati program pa ni niti zdaleč tako zanimivo, kot napisati ga. Zakaj ne bi torej napisali svojega programa `PaintBrush`? Poskusimo to storiti v Visual BASICu.

Naš prvi poizkus bo seveda kar se da enostaven. Ko bomo premaknili miš, hočemo na zaslonu videti ustrezno črto. Kadarkoli se miš premakne, Okna pošljejo ustrezno sporočilo.

Program, napisan v Visual BASICu, se na to sporočilo odzove tako, da pokliče podprogram `MouseMove`. Torej moramo samo napisati ustrezní podprogram:

```
Sub Form_MouseMove (Button As Integer,
                    Shift As Integer,
                    X As Single,
                    Y As Single)

    Line -(X, Y)
End Sub
```

Program napišemo tako, da dvakrat kliknemo na okno z napisom `Form1`. Pokaže se urejevalnik, v katerem izberemo podprogram `MouseMove` in dopišemo manjkajočo vrstico.

Ukaz `Line (x1, y1)-(x2, y2)` nariše črto med točkama  $(x_1, y_1)$  in  $(x_2, y_2)$ . Če prvo točko izpustimo, nariše črto od zadnje točke risanja do točke  $(x_2, y_2)$ . Zadnja točka risanja se spreminja ob ukazih za risanje (`Line`, `Circle`, `PSet`, ...). Koordinati zadnje točke risanja sta shranjeni v spremenljivkah `CurrentX` in `CurrentY`. Ko program poženemo, velja `CurrentX = CurrentY = 0`, točka  $(0, 0)$  pa je v levem zgornjem kotu okna.

Naš program za risanje že deluje. Ima pa še nekaj pomanjkljivosti, ki jih hitro opazimo. Tako ne moremo premakniti miške, ne da bi se za njo poznala sled. Naš vzornik (program `Paintbrush`) to rešuje tako, da se sled pozna le, če med premikanjem miške njen levi gumb držimo pritisnjen. Druga večja hiba je naslednja: Če miškin kazalec zapusti naše okno, se risanje prekine (miš pa je na voljo drugim programom). Ko pa se z mišjo vrnemo v okno (denimo na drugem koncu), program potegne ravno črto od točke, kjer smo okno zapustili, do točke, kjer smo se v okno vrnili.

Najprej odpravimo prvo pomanjkljivost (pokazalo se bo, da bomo tako nehoti popravili tudi drugo). Parameter `Button` podprograma `MouseMove` nam pove, kateri miškin gumb smo držali, ko smo jo premaknili. Vrednost 0 pomeni, da ni bil pritisnjen noben gumb. Če je bil pritisnjen levi gumb, se prišteje 1. Če je bil pritisnjen desni gumb, se prišteje 2, in če je bil pritisnjen srednji gumb, se prišteje 4. Tako lahko prepoznamo tudi različne kombinacije. Vrednost `Button=3` na primer pomeni, da smo hkrati pritisnili tako levi kot desni gumb. Seveda črto vlečemo le, če je pritisnjen levi gumb – to pa je natanko tedaj, ko je vrednost spremenljivke `Button` liha. Naš dopolnjeni podprogram se sedaj glasi:

```
Sub Form_MouseMove (Button As Integer,  
                    Shift As Integer,  
                    X As Single,  
                    Y As Single)  
    If Button Mod 2 = 1 Then  
        Line -(X, Y)  
    EndIf  
End Sub
```

Žal program še ne deluje povsem tako, kot smo hoteli. Dokler ne držimo nobenega gumba, program res ne vleče črte. Čim pa pritisnemo gumb, program poveže konec narisane črte s trenutnim položajem. Seveda, ukaz `Line -(x,y)` potegne črto med točkama (`CurrentX`, `CurrentY`) in (`x,y`), od zadnjega risanja pa se vrednosti `CurrentX` in `CurrentY` nista nič spremenili. Sedaj, ko poznamo problem, hitro odkrijemo tudi rešitev: ko črte ne vlečemo, enostavno popravimo vrednosti spremenljivkama `CurrentX` in `CurrentY` na trenutni položaj. Tega izvemo iz argumentov `X` in `Y` podprograma `MouseMove`.

```
Sub Form_MouseMove (Button As Integer,  
                    Shift As Integer,  
                    X As Single,  
                    Y As Single)  
    If Button Mod 2 = 1 Then  
        Line -(X, Y)  
    Else  
        CurrentX = X  
        CurrentY = Y  
    EndIf  
End Sub
```

Tako spremenjen program pa že omogoča prostoročno risanje, kot smo želeli. Mimogrede preverimo še, kaj se zgodi, če v programu z miško zapustimo zaslon na enem koncu in se vrnemo v okno neke druge.

### Nastavitev parametrov risalnega okna

Naš program pa še vedno ni popolnoma zrel za uporabo. Če ne verjamete, narišite enostavno sliko, potem pa program pomanjšajte in za tem vrnite na prvotno velikost. Slika je izginila!

Na srečo moramo samo nastaviti parameter ali dva in stvar bo urejena. Program ustavimo (če teče), potem pa v okolju Visual BASIC izberimo okno z napisom **Form1**. V oknu **Properties** (*lastnosti*) lahko sedaj nastavimo nekatere lastnosti tega okna (če okna **Properties** ne najdete, ga lahko prikličete s pomočjo tipke **F4**). Za nas bosta ta hip pomembni le dve: **AutoRedraw** in **Caption**.

Lastnost **AutoRedraw** ima lahko vrednost **False** ali **True**. Če je njena vrednost **False**, je programer (torej mi) odgovoren za prikazovanje slike, ko se iz tega ali onega razloga del slike izgubi. Najpogostejši razlog, da izgubimo del slike, je, da je bilo okno zakrito. Vrednost **True** pa pomeni, da bo Visual BASIC sam poskrbel za obnavljanje slike. Uporabnost te izbire je očitna, saj nam ni treba storiti praktično ničesar, slika pa bo obnovljena. Žal pa program pri tej izbiri porabi več pomnilnika in tudi risanje je nekoliko počasnejše. No, v našem primeru pravzaprav nimamo druge možnosti, saj bi bilo sicer prostoročno risbo zelo težko obnoviti. Zato postavimo lastnost **AutoRedraw** na **True**.

Lastnost **Caption** določa napis na oknu. Ker napis **Form1** ni najbolj primeren, ga spremenimo, denimo **Risanje** (ali **Moj Paintbrush** ali kaj tretjega). Lastnost **Caption** ne vpliva na delovanje programa, pač pa le na njegov videz.

### Pomembni dodatki

Slabost našega programa je nedvomno tudi ta, da črte, ki smo jo potegnili, ne moremo izbrisati na noben drug način, kot da program ustavimo in znova poženemo. Rešitev je tudi tokrat preprosta: podprogram **Cls** (**C**lear **S**creen) pobriše zaslon. Odločiti se moramo le, kdaj bomo ta podprogram poklicali.

Takoj pomislimo na ukazni gumb. Vendar ga nimamo kam postaviti, saj je celotna površina okna naša risalna deska, torej bi bil gumb napoti. No, nič ne de – risalno površino bomo nekoliko omejili. Uporabili bomo gradnik "slika" (*picture*). V orodjarni izberemo gumb  in na okno



narišemo pravokotnik. Z malo truda bomo dosegli, da bo risanje omejeno na notranjost pravokotnika, zunaj pravokotnika pa bomo pustili dovolj prostora za naš gumb.

Če sedaj poženemo program, ugotovimo, da lahko rišemo le po zunanjosti pravokotnika – prav nasprotno od želenega! Ko se miš premakne, o tem obvesti objekt, ki je pod njo. Če je ta objekt okno, se izvede podprogram `MouseMove`. Ko pa je ta objekt slika, je ustrezni podprogram prazen (v kar se hitro prepričamo, če v Visual BASICu dvakrat pritismo na sliko in poiščemo podprogram `MouseMove`). Če želimo risati le znotraj slike, moramo izbrisati podprogram `MouseMove`, ki smo ga napisali za okno `Form1`, in podobnega napisati za sliko `Picture1`. Ukaz `Line` in spremenljivki `CurrentX` ter `CurrentY` se nanašajo na okno, ne na sliko. Če hočemo risati po sliki `Picture1`, moramo dodati predpono `Picture1`, na primer `Picture1.Line` ali `Picture1.CurrentX`. Dobimo torej podprogram

```
Sub Picture1MouseMove (Button As Integer,  
                        Shift As Integer,  
                        X As Single,  
                        Y As Single)  
    If Button Mod 2 = 1 Then  
        Picture1.Line -(X, Y)  
    Else  
        Picture1.CurrentX = X  
        Picture1.CurrentY = Y  
    EndIf  
End Sub
```

Seveda moramo sliki popraviti tudi lastnost `AutoRedraw`, podobno, kot smo to storili z oknom. Če sliki spremenimo še lastnost `Align` in jo postavimo na `Align Bottom`, bomo dosegli, da bo risalna površina zasedala skoraj vse okno razen ozkega pasu na vrhu. Lastnost `Align` določa, kako se gradnik postavi na okno. Običajno je njena vrednost `0 - None`. Če jo postavimo na `1 - Align Top`, gradnik zavzame vso površino okna nad seboj, in če jo postavimo na `2 - Align Bottom`, zavzame vso površino okna pod seboj.

Dolžni smo še gumb za brisanje risalne površine. Gumb poberemo v orodjarni in ga postavimo v nepokriti pas na vrhu okna. Njegovo lastnost `Caption` popravimo na `Brisi`. Sedaj dvakrat pritismo na gumb in Visual BASIC nas postavi v telo podprograma `Command1_Click`. Program bo poklical ta podprogram, kadar bomo pritisnili na gumb. Telo podprograma je kar se da enostavno:

```

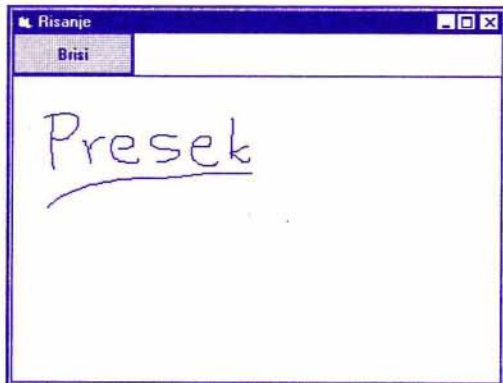
Sub Command1.Click ()
    Picture1.Cls
End Sub

```

Paziti moramo, da ne pozabimo na predpono **Picture1**, drugače bo ukaz **Cls** pobrisal okno, ne pa tudi slike. Poprej pa smo trudoma dosegli, da je risba omejena samo na sliko.

Tako, program je sestavljen. Ker smo z njim zadovoljni, ga shranimo na disk (**File|Save Project**). Program se bo shranil v dve datoteki. V prvi, s končnico **FRM**, bo zapisan program skupaj z opisom okna in gradnikov na njem. V drugo datoteko, ta ima končnico **MAK**, bo prišel seznam uporabljenih komponent in razne nastavitve. Obema datotekama damo enako

ime, denimo **Risanje**. Za vsakdanjo uporabo pa si lahko naredimo še prevedeni program, **Risanje.EXE**. Uporabimo Ukaz **File|Make EXE file...** Tako preveden program za delovanje ne potrebuje okolja Visual BASIC, zadošča mu že datoteka **VBRUN300.DLL** (pri različici 3.0).



Jože Marinček

## ZAKLJUČEK TEKMOVANJA MEST

Zaključek letošnjega tekmovanja mest je bil v ruskem mestu Uglič, ki leži ob največji evropski reki Volgi, 250 km severno od Moskve (kar je sedem ur vožnje z vlakom). Uglič je mesto z dolgo zgodovino, o čemer priča tudi veliko število značilnih cerkva. V mestu je tudi znana tovarna ur Čajka, ki, kakor sami reklamirajo svoje izdelke, *izdeluje ure v ruskem stilu, a z evropsko natančnostjo*. Udeleženci pa smo si mesto zapomnili predvsem po tem, da so ga kar naprej pokrivali z asfaltom, ki ga imajo očitno na pretek. Mesto se razvija in v njem je že kar osem prog mestnega avtobusa.

Po prihodu v Uglič so nas nastanili v dijaškem domu, kjer smo preživeli dolgih deset dni od 31. julija do 9. avgusta. Dolgih zato, ker pogoji bivanja niso bili ravno najboljši (voda ni bila pitna, ni bilo tušev, hrana pa tudi ni bila ravno užitna). Na srečo je človek zelo prilagodljivo

bitje in nekako smo se le znašli. Skratka, udeležencem ni preostalo nič drugega, kot da se so lotili matematičnih problemov, saj je bila to tako rekoč edina tolažba.

Zaključek tekmovanja mest je zelo zanimiv, saj ne gre za klasično tekmovanje, kjer je za reševanje nalog na voljo nekaj ur, temveč predstavijo organizatorji nekaj problemov (tokrat šest), od katerih je vsak sestavljen iz več nalog, ki počasi osvetljujejo problem in peljejo k rešitvi. Težavnost nalog se stopnjuje in nekaj nalog je bilo prav zares težkih. Vsak udeleženec je izbral nekaj problemov, s katerimi se je ukvarjal kar ves teden. Najuspešnejši tekmovalci so na koncu dobili diplome.

Slovenijo so na konferenci zastopali dijaki Igor KLEP z Gimnazije Ptuj, Matija MAZI z Gimnazije Bežigrad in Andrej VODOPIVEC z Gimnazije Celje, ekipo pa je spremljal Roman MODIC, absolvent Fakultete za matematiko in fiziko. Tekmovalci so se sijajno odrezali, saj so kljub težkim pogojem dela zavzeto reševali naloge in za svoj trud prejeli vsak svojo diplomo.

Tekmovanje mest postaja čedalje bolj mednarodno, saj bo predvidoma čez dve leti zaključek tekmovanja mest prvič v zahodni Evropi (v Nemčiji), kjer si lahko obetamo večjo mednarodno udeležbo.

Za konec pa še nekaj nalog s tekmovanja:

1. Za katera naravna števila  $m$  in  $n$  se da pravokotnik dimenzij  $m \times n$  pokriti s ploščicami oblike  ?
2. Naj bodo  $f$ ,  $g$  in  $h$  taki paroma tuji polinomi s kompleksnimi koeficienti (polinoma sta si tuja, če nimata skupnih (kompleksnih) ničel), da je  $f(x) + g(x) + h(x) = 0$  za vsako kompleksno število  $x$ . Potem stopnja nobenega izmed polinomov ne presega števila  $N - 1$ , kjer je  $N$  število različnih ničel polinoma  $fgh$ .  
Namig: Za polinom  $f(x) = (x - a_1)^{s_1}(x - a_2)^{s_2} \cdots (x - a_n)^{s_n}$ , kjer so števila  $a_1, \dots, a_n$  paroma različna, velja

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_1}{x - a_1} + \frac{s_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{s_n}{x - a_n}.$$

3. Naj bosta  $f$  in  $g$  tuja nekonstantna polinoma. Potem je

$$\deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2} \deg(f) + 1,$$

kjer  $\deg$  označuje stopnjo polinoma.

Namig: Uporabi prejšnjo nalogo.

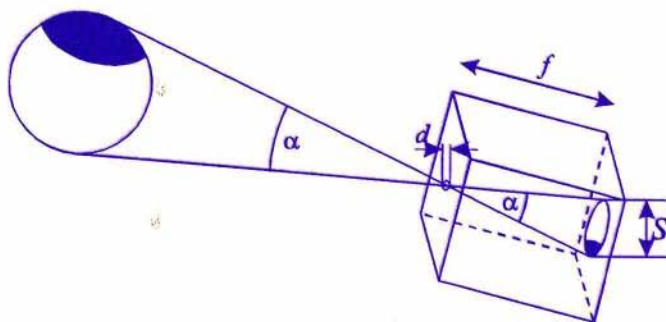
4. Poišči nekonstatne paroma tuje polinome  $f$ ,  $g$  in  $h$ , za katere velja  $f^2 + g^3 = h^5$ .

*Roman Modic*



## PROJICIRANJE SONČEVEGA MRKA

Ob delnem Sončevem mrku v oktobru je marsikdo iskal primerno opremo za opazovanje. Mnoge improvizirane priprave, vsaj za dolgotrajno opazovanje, niso primerne (npr. zadimljeno steklo, popolnoma osvetljen fotografski film, več skupaj zloženih sončnih očal). Neposredno opazovanje Sonca je varno le s posebnim filtrom. Še najbolj varen način je projiciranje Sonca. Uporabimo kartonasto škatlo, ki jo na sredini preluknjamo. Na zadnji strani škatle se pojavi obrnjena slika Sonca (slika 1). Tako preprosto projekcijsko pripravo imenujemo camera obscura. Uporabimo jo lahko kot preprost fotoaparatus.



Slika 1. Projiciranje Sončevega mrka s camera obscura.

V zvezi s projekcijo nas zanimajo tri stvari: velikost, ostrina in svetlost. Zorni kot Sonca  $\alpha$  je okoli pol ločne stopinje. Ker je kot  $\alpha$  majhen, lahko uporabimo približek  $\tan \alpha \approx \alpha$ . Velikost slike je približno 1 % dolžine škatle:

$$S = f \cdot \alpha,$$

kjer je  $S$  premer slike in  $f$  dolžina škatle ( $f = 1 \text{ m} \Rightarrow S \approx 1 \text{ cm}$ ).

S poskusi lahko ugotovimo, da je ostrina slike odvisna od razmerja  $d/f$  ( $d$  je premer luknjice). Mislimo si, da na škatlo posvetimo z vzporednimi žarki. Pri relativno veliki okrogli luknjici dobimo na zadnji strani škatle okroglo piko, ki ima enak premer kot luknjica  $D = d$ . Ko projiciramo razsežno telo, je njegova slika sestavljena iz več takih pik (vsaka pika predstavlja projekcijo skupinice točk na telesu). Če želimo doseči dobro ločljivost, morajo biti pike čim manjše, kar dosežemo z manjšanjem premera luknjice v škatli (slika 2). Vendar pa se pri majhnih luknjicah pojavi uklon in je povezava med premerom luknjice in velikostjo pike  $D$

na zaslonu drugačna – z manjšanjem premera postaja pika večja:

$$D = 2,44 \cdot \frac{\lambda}{d/f},$$

kjer je  $\lambda$  valovna dolžina opazovane svetlobe. Enačba le grobo podaja velikost slike, saj je izpeljana iz izraza za prvi interferenčni minimum v interferenčni

sliki na krožni odprtini. Sedaj lahko poiščemo približno vrednost za  $d$ , pri katerem se premer pike ne zmanjšuje več. Najmanjši premer pike dobimo na meji med navadno in uklonsko sliko, ko velja:

$$d = 2,44 \cdot \frac{\lambda \cdot f}{d},$$

iz česar sledi

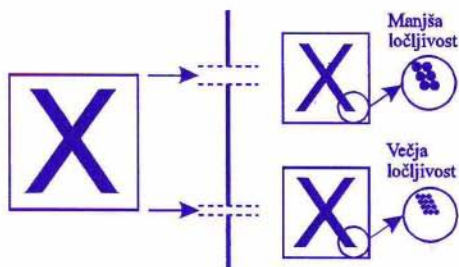
$$d = \sqrt{2,44 \cdot \lambda \cdot f}.$$

Pri  $f = 1$  m in  $\lambda = 550$  nm dobimo  $d \approx 1$  mm.

Svetlost slike je sorazmerna z  $d/f$ , razmerje pa predstavlja kar zbiralno moč priprave za svetlobo (pri fotoaparatu je  $d$  premer objektiva,  $f$  goriščna razdalja). Pri konstantni dolžini škatle bo slika svetlejša pri večji luknjici. S spreminjanjem velikosti luknjice si lahko sami izberemo želeno kombinacijo ostrine in svetlosti.

Iz že na začetku omenjene zagate nas reši narava sama. Projekcijo Sonca lahko opazimo npr. na gozdnih tleh. Krošnje dreves zasenčijo skoraj vso Sončevo svetlobo, nekaj žarkov pa le prodre skozi majhne špranje med listi. Ker so gozdna tla običajno raznobarvna in neravna, nas to lahko pri opazovanju moti. Zato lažje opazujemo na gladki svetli površini avtomobila parkiranega v senci (sliki 3 in 4 na IV. strani ovitka). Na povečani sliki 4 lepo vidimo, da so projekcije različno ostre in svetle, kar je odvisno od razdalje špranje od avtomobila in velikosti špranje.

Kot fotoaparat taka naprava ni najprimernejša, ker moti majhna svetlobna moč in neostra slika. Vendar pa ima ta vrsta kamere tudi prednosti pred optičnimi napravami z lečami in zrcali. Predvsem jo odlikujeta globinska ostrina in široko zorno polje. Največ jo uporabljajo za snemanje v UV in rentgenskem delu spektra svetlobe, ker je v tem območju valovnih dolžin zelo težko dobiti primerne leče in zrcala.

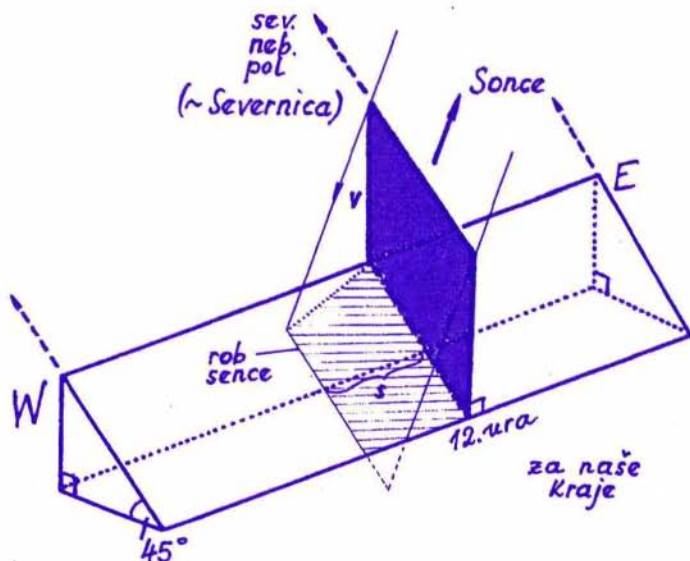


Slika 2. Ločljivost projekcije v odvisnosti od velikosti luknjice.

## ZANIMIVA SONČNA URA

Predlagam, da naredite tole preprosto, a zanimivo sončno uro, ki ji rečemo tudi *polarna sončna ura*. Zakaj tako, boste ugotovili iz prispevka kar sami.

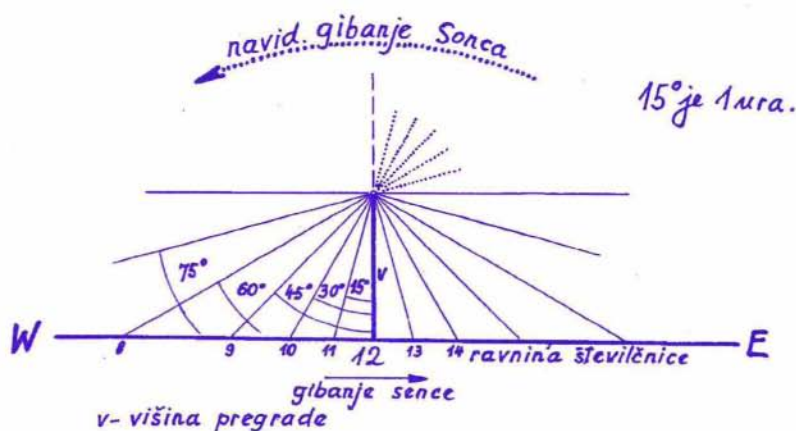
Številčnica te ure je dolg ozek pravokotnik, ki je nagnjen za  $45^\circ$  (natančneje za  $46^\circ$ ) k vodoravni ravnini. Daljši stranici pravokotnika (zgornja in spodnja) ležita natančno v smeri vzhod – zahod, krajši (desna in leva) pa sta nagnjeni za  $45^\circ$  in kažeta proti Severnici (natančneje proti severnemu nebesnemu polu). V sredino pravokotnika pravokotno namestimo pravokotniško pregrado, katere vrhnja stranica kaže proti Severnici. Oznake za ure na številčnici izdelamo ali po opazovanju sence pregrade, ki jo meče vrh pregrade na nagnjen pravokotnik, ali pa po teoretičnem premisleku. Tako narejena ura deluje vse leto, najbolje ob enakonočjih (seveda v času, ko je Sonce nad ravnino številčnice). Vedno pa jo je treba preskusiti. Pazimo, da uro pravilno orientiramo.



Slika 1. Polarna sončna ura za naše kraje – princip. Namesto pravokotniške pregrade lahko uporabimo tudi pregrado, ki je enakokrak pravokotni trikotnik, katerega hipotenuza kaže proti Severnici, ali pa kakšno drugo pregrado, le da rob kaže proti Severnici.

Če izdelamo številčnico po opazovanju sence, začrtamo črto po robu sence pregrade vsako polno uro ali pogostejše, pri teoretičnem načinu pa dolžino sence pregrade določimo s konstrukcijo, ki jo prikazuje slika 2.





Slika 2. Konstrukcija številčnice polarne sončne ure.

Pri konstrukciji dolžine sence pregrade za vsako polno uro upoštevamo naslednje. Ob 9. uri (tri ure pred poldnem) in ob 15. uri (tri ure po poldnevu) je dolžina sence enaka višini pregrade. To nam lahko služi za preskus ure ( $15^\circ$  je 1 ura).

Dolžina sence je odvisna od višine pregrade in lege Sonca. Opoldne (12. ura) sence ni. S kotomerom odmerimo  $15^\circ$  (1 ura),  $30^\circ$  (2 uri),  $45^\circ$  (3 ure),  $60^\circ$  (4 ure),  $75^\circ$  (5 ur), ... levo in desno od vrha pregrade. Krake kotov podaljšamo do presečišča z ravnino številčnice. Tako dobimo oznake za ure. Razdelitev lahko izdelamo še natančneje bodisi po teoretičnem premisleku bodisi z opazovanjem sence.

Dolžino sence  $s$  navpične pregrade pa lahko izračunamo tudi iz enačbe  $s = v \operatorname{tg} H$ , kjer je  $H$  časovni kot Sonca.

| $H$         | Čas dopoldne | Čas popoldne |
|-------------|--------------|--------------|
| $7,5^\circ$ | 11:30        | 12:30        |
| $15^\circ$  | 11           | 13           |
| $30^\circ$  | 10           | 14           |
| $45^\circ$  | 9            | 15           |
| $60^\circ$  | 8            | 16           |
| $75^\circ$  | 7            | 17           |

Številčnico izdelamo na oba načina in primerjamo, kako se teorija ujema s prakso. Pri polarni sončni uri imamo široke možnosti izdelave.

**Nalogi:**

1. Daljši leseni kvader, ki ima za osnovno ploskev kvadrat, prežagamo po diagonali osnovne ploskve na dva ali štiri enake dele – tristrane prizme. Za številčnico lahko uporabimo katerokoli stransko ploskev tako nastalih prizem. V sredini kake ploskve izdolbemo zarezo, v katero pravokotno vtaknemo pregrado, ki jo izdelamo iz pravokotne deščice. Tako dobimo dve ali štiri polarne sončne ure.
2. Iz enega kosa papirja (npr. A4 formata) izdelamo polarno sončno uro. Kako? Odgovor je na strani 231.

Marijan Prosén

**SODA PRED LIHA - Rešitev s str. 139**

Napisati želimo podprogram, ki bo seznam števil preuredil tako, da bodo v njem vsa soda števila pred vsemi lihimi. Dodatna zahteva je, da se relativni vrstni red znotraj sodih števil obrne, znotraj lihih števil pa ohrani. Sestavili bomo funkcijski podprogram; ta bo imel en parameter – kazalec na začetek vhodnega seznama, vrnil pa bo kazalec na začetek preurejenega seznama. Oglejmo si podprogram:

```

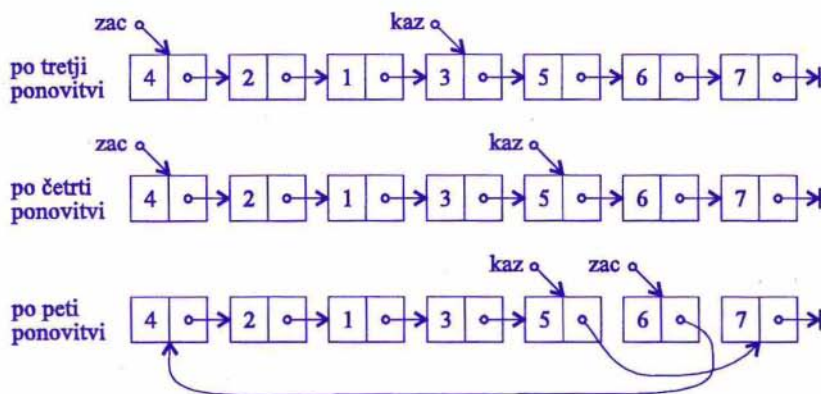
type
  kcelica = ↑celica;
  celica = record
    stêv: integer;
    nasl: kcelica;
  end;

function Preuredi(kaz: kcelica): kcelica;
{ Preuredi seznam tako, da so najprej vsa soda in nato vsa liha števila. }
{ Relativni vrstni red znotraj sodih števil se obrne, znotraj lihih pa ohrani. }
var
  zac: kcelica;                                { začetek preurejenega seznama }
  pom: kcelica;                                { pomožni kazalec }
begin
  if kaz=nil then
    Preuredi := nil
  else begin
    zac := kaz;
    while kaz↑.nasl<>nil do
      if odd(kaz↑.nasl↑.stêv) then
        kaz := kaz↑.nasl
      else
        begin
          pom := kaz↑.nasl; kaz↑.nasl := pom↑.nasl;
          pom↑.nasl := zac; zac := pom;
        end;
      Preuredi := zac;
    end; { else }
  end; { Preuredi }
end;

```

Na kratko pojasnimo delovanje podprograma. Najprej poskrbimo za prazen vhodni seznam. Če pa vhodni seznam ni prazen, se v zanki **while** sprehodimo skozenj. Pri tem s pomočjo kazalca *zac* postopoma gradimo preurejeni seznam. Tako na začetku vsake ponovitve zanke **while** kazalec *zac* kaže na začetek, kazalec *kaz* pa na konec že preurejenega dela. Če je naslednje še nepregledano število iz vhodnega seznama sodo, ga premestimo na začetek preurejenega dela, če pa je liho, le pomaknemo kazalec *kaz* na naslednji element. Opozorimo, da v podprogramu ne gradimo novih celic – ne uporabljamo podprogramov **new** in **getmem**, ampak le prevezujemo že obstoječe kazalce.

Poglejmo še, kam kažejo posamezni kazalci po treh, štirih in petih ponovitvah zanke **while**, če začnemo s seznamom 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7:



Opazimo lahko, da je podprogram napisan tako, da je število elementov v preurejenem delu za ena večje od števila ponovitev zanke **while**.

Za konec pa še naloga za tiste, ki jim programiranje še ni dovolj. Dopolnite gornji podprogram tako, da se bo tudi relativni vrstni red znotraj sodih števil ohranil in ne obrnil.

*Martin Juvan*

## MNOŽENJE Z DEVET

Poišči štirimestno število (desetiški zapis), ki mu množenje z 9 obrne vrstni red števk.

*Marija Vencelj*



## Z VESELJEM V VESOLJE ALI TEKMOVANJE ŠTUDENTOV FIZIKE V POLETIH RAKET NA VODO IN STISNjen ZRAK

Prva poročila o izdelavi raket na vodo in stisnjen zrak iz plastenk gaziranih pijač zasledimo skorajda v istem času, ko je ta priljubljena embalaža preplavila tržišča širom po svetu. Med številnimi članki, ki poročajo o izdelavi takšnih raket, izstopata le dva članka, ki podrobneje odkrivata fizikalno ozadje poskusa (eden je bil objavljen v letošnji prvi številki Preseka). Pri prebiranju presenetljivih števil, o katerih poročajo avtorji (pospešek pri vzletu več kot 100 g, največja hitrost 150 km/h in več, višina leta preko 50 m), pa prav gotovo marsikoga zamika, da bi takšno raketo preizkusil tudi sam.

Ta skušnjava je premamila tudi nas na Oddelku za fiziko Fakultete za matematiko in fiziko na Univerzi v Ljubljani. Zato sta Oddelek za fiziko FMF in ustanova Hiša eksperimentov v lanskem decembru organizirala tekmovanje študentov fizike v izdelavi in poletih raket na vodo in stisnjen zrak. Velik odziv med študenti nas je prijetno presenetil. Tekmovanja se je udeležilo 30 študentov iz vseh letnikov.

Tekmovali so v šestih skupinah. Naloga vsake skupine je bila izdelati izstrelitveno ploščad in dve raketi – prvo za tekmovanje v doseganju največje višine leta in drugo za tekmovanje v doseganju najdaljšega časa poleta. Delo skupin smo izpeljali tako, da je bilo kar se da podobno poteku izvajanja pravih raziskovalnih projektov, ki potekajo na inštitutih in univerzah. V vsaki skupini so izbrali generalnega direktorja, finančnega direktorja in direktorja razvoja. Vsem skupinam so bila odobrena enaka sredstva za nakup materiala. Material so naročali z naročilnicami v centralnem skladišču (pri asistentu) in plačevali z nakaznicami. Čeprav se je v začetku zdelo, da smo podobni otrokom v vrtcu, ki se igrajo trgovino, se je kasneje pokazalo, da so študenti prav zaradi stalnega spremljanja finančnega stanja projekta in zaradi omejenih sredstev zelo varčno ravnali z materialom in dobro premislili, preden so se lotili rezanja ali vrtanja.

Največ časa pa so študenti posvetili izpopolnjevanju svojih raket. Sprva so platenke komaj dosegale višino fakultetne stavbe. Ko pa so se opremili z izkušnjami raketnih modelarjev (glej R. Snoj in dr.: *Raketno modelarstvo*) in dodali raketam primerna krilca, so te izginjale v nebo in pristajale na strehah sosednjih stavb. Tako izpopolnjene rakete pa so se s precejšnjo hitrostjo tudi vračale proti zemlji in zato v večini primerov

pristanke niso preživele. Zato je postal največji problem, kako izdelati zanesljiv pristajalni sistem, ki bo omogočil varen pristanek rakete.

Najbolj enostavno in najbolj razširjeno je pristajanje s padalom, a problem je, kako doseči, da se padalo odpre v pravem trenutku. Odločili smo se, da ne bomo uporabljali pirotehničnih sredstev in raznih aktivnih, daljinsko upravljanih sistemov. Kljub tej omejitvi pa so študenti kar tekmovali v izvirnosti idej in večino teh tudi preizkusili. Tako so razvili posebej oblikovane kape, ki so pokrivalle konice raket, izdelali prožilne sisteme iz prožnih peres in vzmeti ter preizkusili celo odpiranje padala, ki ga sproži povečan tlak zaradi kemijske reakcije med sodo bikarbono in kisom. Med najbolj izvirnimi idejami pa je gotovo pristajalni sistem z balončkom. Na ustje plastenke privežemo balonček in ga napolnimo z vodo tako, da zapolni del plastenke. Tlak nad balončkom najprej iztisne vodo, nato pa obrne balonček kot nogavico in ga napihne zunaj plastenke. Napihnjen balonček zavira padanje rakete podobno kot padalo. Pomanjkljivost tega načina pristajanja je v tem, da se balonček napihne že kmalu po vzletu rakete.

Tekmovanje je bilo kljub slabemu vremenu izpeljano v petek 20.12.1996 na jasi pod sankališčem v Tivoliju. Na tekmovanju je nastopilo šest skupin (raketnih družb) z imeni UEAA, SPRA, OBUP (Odbor za boljšo uporabo plastenk), Vulkan, 42A in N.A.Š.A. V doseganju največje višine leta je zmagala skupina Vulkan s 113 m. V tej kategoriji so vse skupine tekmovalle z dvoliterskimi plastenkami in pri začetnem tlaku 6 bar. V doseganju najdaljšega časa poleta je zmagala skupina N.A.Š.A. s časom 37 s. V tej kategoriji so tekmovali z dva in pol literskimi plastenkami in pri tlaku 5 bar. Le skupini N.A.Š.A. je uspelo razviti pristajalni sistem, ki je tako na predtekmovanju kot na tekmovanju uspešno odprl padalo.

Rakete na stisnjen zrak in vodo so za dober mesec popestrile dogajanje na Fakulteti za matematiko in fiziko. Odziv študentov in številne izvirne ideje, ki so se porajale med delom, so najboljši dokaz za to, da študentje poleg obstoječega obveznega laboratorijskega dela potrebujejo tudi prostor in čas za ustvarjalno eksperimentalno delo. Tako lahko pridejo do izraza in se razvijajo individualne sposobnosti študentov, ti pa na lastni koži spoznajo, da teoretično znanje, ki si ga nabirajo pri študiju, res "deluje".

Med delom se je tudi pokazalo, da lahko enostaven projekt, ki ga brez težav izpeljemo na vsaki srednji šoli, kaj hitro odpre vrsto teoretičnih problemov, ki predstavljajo trd oreh tudi na univerzitetnem nivoju.

*Gorazd Planinšič*





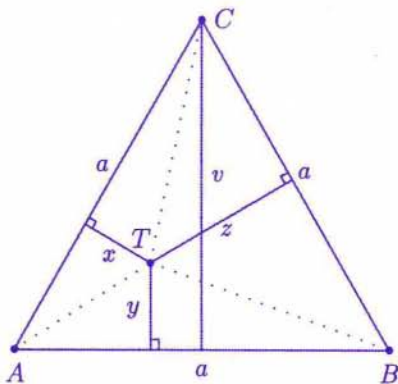
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  | BRUSNI<br>KAMEN       | ZAJEDAVEC<br>V<br>ŽOLČEVODU<br>GOVEDI | ATIŠKI<br>HEROJ                | USTANOV.<br>KP<br>MADŽARŠKE<br>(BELA) | TENISAČICA<br>HUBER          |  | MIRAN<br>ALISIĆ                     | PRIPADNIK<br>PERLUSKIH<br>INDIJANCEV | VOJAŠKO<br>POVELJ-<br>STVO |  |                                               |                                                                                     |
| JATA<br>HA                                                                      |                       |                                       |                                |                                       |                              | HIŠNI<br>GLODALEC                                                                 |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
| GOV<br>ALEC                                                                     |                       |                                       |                                |                                       |                              | NAJMOČ.<br>FIGURA                                                                 |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
| AVA                                                                             |                       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   | KLICA                               |                                      |                            |  | ZAPIS<br>ŠAHOVŠKE<br>IGRE                     |    |
|                                                                                 |                       |                                       |                                | REKA V SZ<br>NEMČIJI                  |                              |                                                                                   |                                     | DENARNI NA-<br>DOMESTEK              |                            |                                                                                   |                                               | NAVPIČNO<br>ZAPOREDJE<br>POLJ                                                       |
|                                                                                 |                       |                                       |                                | "POŠEVNA<br>VRSTA"                    |                              |                                                                                   |                                     | KAMNITO<br>ORODJE                    |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 | HRANA NA<br>KROŽNIKU  |                                       |                                |                                       | ŠVEDSKI<br>SMUČAR.<br>CENTER |                                                                                   |                                     |                                      | GOVEJA<br>ŽIVAL            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 | CITROENOV<br>AVTO     |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      | ZMAGOVIT<br>POLOŽAJ        |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 | EDEN                  |                                       |                                |                                       | NAKUP                        | ZVEZDICE<br>REPATICE                                                              |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              | NAJNIŽJA<br>FIGURA                                                                |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       | ČETRTI<br>RIMSKI<br>KRALJ      |                                       |                              |                                                                                   | FR. PSIH-<br>ANALITIK.<br>(JACQUES) |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   | SORODNIK                            |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       | BOJNA<br>LADJA                        | OTVORITEV<br>Z ŽRTVOJ<br>KMETA |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            | RIMSKA 101                                                                        |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       | LECCE                          |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            | KRAJ NAD<br>SPODNJO<br>IDRIJO                                                     |                                               |                                                                                     |
| LMSKI<br>LEC<br>L)                                                              | LOVSKA<br>PUŠKA       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            | LJAK                                                                              |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            | VELIK<br>PRITOK<br>KAME                                                           |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 | ATLETIČNA<br>STRAŠEK  |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     | DREVESNI<br>IZRASTEK                 |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 | ZLATNINA<br>NA TELESU |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     | SREDOZ.<br>RASTLINA                  |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       | ALOJZIJ<br>VADNAL              |                                       |                              | TV VODIT.<br>LEKŠE                                                                |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |  |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              | GORA V KA-<br>RAVANKAH                                                            |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       | LJUDSTVO V<br>LAOSU            |                                       |                              |                                                                                   | INDON. DEL<br>MOLUKOV               |                                      |                            |                                                                                   | NEKDANJI<br>JAPONSKI<br>PREMIER<br>(HIROBUMI) | PLETENA<br>NARAMMA<br>POSODA                                                        |
|                                                                                 |                       |                                       | 24 UR                          |                                       |                              |                                                                                   | DLAKA NA<br>GLAVI                   |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       | ŠOTNIK NAD<br>KOLESOM        |                                                                                   |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       | FRANZ<br>VRANITZKY           |                                                                                   |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                | KRILNI<br>RAZVOJ<br>LOVCA             |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                |                                       |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            |                                                                                   |                                               |                                                                                     |
|                                                                                 |                       |                                       |                                | VODORAV.<br>ZAPOREDJE<br>POLJ         |                              |                                                                                   |                                     |                                      |                            | OSNOVNA<br>SOLA                                                                   |                                               |                                                                                     |

## METODA PLOŠČINE

Na zadnjem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje so učenci sedmih razredov reševali naslednjo nalogo.

V notranjosti enakostraničnega trikotnika  $ABC$  s stranico  $a$  leži točka  $T$ . Brez merjenja pokaži, da je vsota razdalj točke  $T$  do vseh stranic enaka višini tega trikotnika, ne glede na to, kje v notranjosti si izbereš točko (slika 1).

Rešitev bo sicer objavljena v poročilu s tekmovanja, a si jo vseeno oglejmo. Ker je točka  $T$  v notranjosti trikotnika, lahko trikotnik razdelimo na tri manjše trikotnike, kot kaže slika. Z nje razberemo, da lahko zapišemo dvojno ploščino trikotnika na dva načina:



Slika 1.

$$a \cdot x + a \cdot y + a \cdot z = a \cdot v.$$

Če na levi strani izpostavimo faktor  $a$  in nato z njim delimo (smemo, saj  $a \neq 0$ ), sledi  $x + y + z = v$ .

Vidimo, da je vsota razdalj  $x, y, z$  vedno enaka višini enakostraničnega trikotnika, ne glede na to, kje smo točko izbrali.

Pravimo, da smo pri reševanju naloge uporabili metodo ploščine. Naloga ne sprašuje po ploščini trikotnika, vendar smo z uporabo ploščine dokazali zvezo med razdaljami točke  $T$  do stranic in višino tega trikotnika. Kadar uporabimo pojem ploščine pri reševanju problema kot sredstvo, s pomočjo katerega dokažemo odnose ali pa jih poiščemo, govorimo o *ploščini kot metodi*. Okvirna ideja metode je naslednja: običajno izrazimo ploščino na dva različna načina, tako dobljena enakost pa nas vodi do nečesa novega.

Naloge, ki jih lahko rešimo z metodo ploščine, kažejo nekatere značilnosti. Poskusimo jih razbrati iz naslednjih primerov:

1. V pravokotnem trikotniku s katetama, dolgima 30 cm in 40 cm, obstaja notranja točka  $T$ , ki je od vsake katete oddaljena 5 cm. Koliko je ta točka oddaljena od hipotenuze?

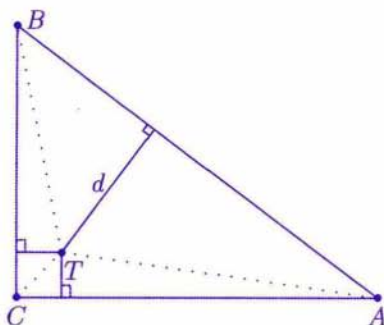
Sklepamo kot v prvi nalogi in ploščino trikotnika izrazimo na dva načina:

$$2S = 30 \cdot 40 = 30 \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 50 \cdot d,$$

kjer je  $d$  oddaljenost točke  $T$  od hipotenuze (slika 2).

Iz dobljene enačbe izračunamo razdaljo  $d = 17$  cm.

Nalogo lahko rešimo tudi drugače. Ena od možnosti je večkratna uporaba Pitagorovega izreka. Postopek reševanja je daljši in bolj zapleten. Poskusite!

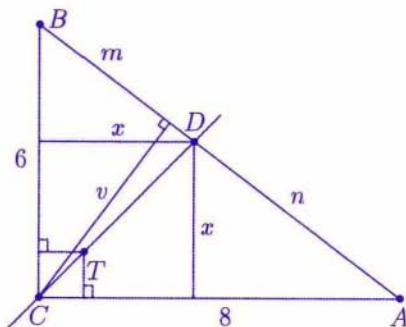


Slika 2.

2. V pravokotnem trikotniku s katetama, dolgima 6 cm in 8 cm, obstaja notranja točka  $T$ , ki je od vsake katete oddaljena 1 cm. Skozi oglišče  $C$  in točko  $T$  narišemo premico. V kakšnem razmerju ta premica deli hipotenuzo?

Izberimo oznake kot na sliki 3. Trikotniki  $ABC$ ,  $BCD$  in  $ACD$  imajo zapored enake višine na stranice  $AB$ ,  $BD$  in  $AD$ . Ploščini trikotnikov  $BCD$  in  $ACD$  izračunamo na dva načina.

Za trikotnik  $BCD$  velja:  $6 \cdot x = m \cdot v$  in podobno za trikotnik  $ACD$ :  $8 \cdot x = n \cdot v$ . Od tod sledi enačba  $\frac{m \cdot v}{n \cdot v} = \frac{6 \cdot x}{8 \cdot x}$ . Po krajšanju dobimo  $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$ . Ker smo spraševali po razmerju, ni bilo treba izračunati dolžin  $v$  in  $x$ .



Slika 3.

Iz podatkov razberemo, da je naša premica simetrala pravega kota, iz rezultata naloge pa, da je razmerje odsekov na hipotenuzi enako razmerju katet. Zastavimo si nekaj vprašanj.

- Razmerje odsekov na hipotenuzi je enako razmerju katet. Ali je to naključje?
- Ali lastnost, da kotna simetrala deli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic, velja samo za simetralo pravega kota?
- Ali velja tudi za druge kote v pravokotnem trikotniku?



- Ali simetrala notranjega kota trikotnika deli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic v vsakem trikotniku?
- Poskusite poiskati posamezne primere, za katere je domneva resnična.

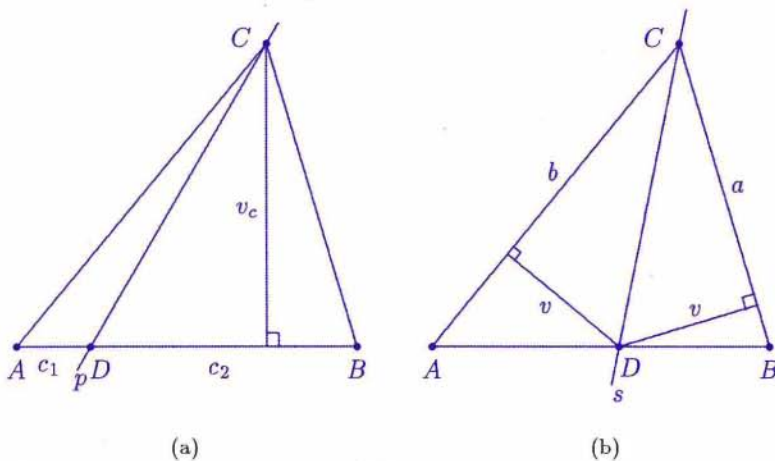
Posamezni primeri nas pripeljejo do splošnejše domneve, da velja lastnost v poljubnem trikotniku. Njeno pravilnost bomo dokazali z metodo ploščine.

*Izrek o simetrali notranjega kota trikotnika* pravi: Simetrala notranjega kota trikotnika deli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic.

Izrek lahko elegantno dokažemo, če predhodno dokažemo naslednjo pomožno trditev:

3. Naj bo  $p$  poljubna premica, ki poteka skozi oglišče  $C$  trikotnika  $ABC$  in razdeli ta trikotnik na dva trikotnika  $ADC$  in  $BCD$ . Potem sta ploščini trikotnikov  $ADC$  in  $BCD$  v razmerju njunih osnovnic  $AD$  in  $BD$ .

Trikotnika  $ADC$  in  $BCD$  (slika 4a) imata skupno višino  $v_c$  na osnovnici  $c_1$  oziroma  $c_2$ . Zato je  $2S_1 = c_1 \cdot v_c$  in  $2S_2 = c_2 \cdot v_c$ . Od tod že sledi naša trditev:  $S_1 : S_2 = c_1 : c_2$ .



Slika 4.

*Dokaz izreka o simetrali kota:*

Naj bo sedaj premica  $s$  simetrala kota pri  $C$  (slika 4b). Torej sta razdalji točke  $D$  od stranic  $a$  in  $b$  med seboj enaki, npr.  $v$ . Potem lahko zapišemo ploščini  $S_1$  in  $S_2$  še drugače:  $2S_1 = b \cdot v$  in  $2S_2 = a \cdot v$ . Od tod sledi najprej  $S_1 : S_2 = b : a$  in nato iz pomožne trditve  $c_1 : c_2 = b : a$ .

In kdaj naj pri reševanju pomislimo na metodo ploščine?

To storimo vedno, kadar se v nalogi pojavi pravokotnost. Ta pa je povezana s pojmi višina, oddaljenost, polmer.

Sicer pa – vaja dela mojstra!

*Primeri podobnih nalog:*

4. Naj bo  $AB$  osnovnica enakokrakega trikotnika  $ABC$ . Dokaži, da je za vse točke  $T \in AB$  vsota razdalj točke  $T$  od krakov trikotnika ista.
5. Trikotniku je včrtana krožnica s polmerom 4 cm. Eno od stranic trikotnika razdeli dotikalnišče včrtane krožnice na dela, ki sta dolga 6 cm in 8 cm. Izračunaj dolžini preostalih stranic (Heronova formula).
6. Naj bo  $S$  notranja točka trikotnika  $ABC$ , katere oddaljenosti od stranic trikotnika so  $a_1, b_1, c_1$ . Dokaži, da je:

$$\frac{a_1}{v_a} + \frac{b_1}{v_b} + \frac{c_1}{v_c} = 1,$$

kjer so  $v_a, v_b, v_c$  višine trikotnika.

7. Če so  $v_a, v_b, v_c$  višine poljubnega trikotnika in  $r$  polmer trikotniku včrtane krožnice, velja:

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{r}.$$

Dokaži!

8. Dolžine stranic trikotnika so obratno sorazmerne pripadajočim dolžinam višin. Dokaži!
9. Poišči točko v notranjosti trikotnika z lastnostjo, da je produkt oddaljenosti te točke od stranic trikotnika največji.

*Silva Kmetič*

## SESTAVLJANJE ŠTEVIL – Rešitev s str. 199

S štirimi štiricami lahko števila 13, 19, 33 in 85 zapišemo takole:

$$13 = 4! - 44/4$$

$$19 = 4! - 4 - 4/4$$

$$33 = 4! + (4 - .4)/.4$$

$$85 = 4! + (4! + .4)/.4$$

*Martin Juvan*

## KATERI DATUM MANJKA?

V zadnjem času smo lahko dvakrat brali o določanju dneva v tednu, na katerega pade znani datum: Martin Juvan je to počel v Preseku **23** (1995-1996), str. 334-337 z računalnikom, Dušan Čop pa v Proteusu **58** (1995-1996), str. 406-409, "peš". Ker sem včasih tudi sam premišljal o koledarju, naj še jaz pristavim drobtinico.

Matematično gledano je koledar za posamezno leto preslikava iz množice datumov (sestavljениh iz številke dneva v mesecu in imena meseca) v množico dni v tednu. Ker vemo, kako si dnevi v tednu slede, je koledar določen že s podatkom o tem, na kateri dan v tednu pade izbrani datum, npr. 1. januar. Seveda je množica datumov v prestopnem letu drugačna kot v navadnem, zato obstaja natanko 14 različnih koledarjev: 7 za navadna in 7 za prestopna leta. Poimenujmo leta po 1. januarju: nedeljsko leto, ponedeljkovo leto, ..., sobotno leto.

Denimo, da nas zanima, na katere dni v tednu v posameznih mesecih izbranega leta pade določen datum, npr. trinajsti. Oštevilčimo dni v tednu od 0 do 6. Od 13. januarja do 13. februarja mine 31 dni (toliko, kot jih ima januar). Če je bil torej 13. januar dan 0, bo 13. februar dan 3 (= ostanek pri deljenju 31 s 7). Podobno lahko določimo 13. dan še za ostale mesece, če izračunamo ostanke, ki jih dajejo števila dni posameznih mesecev pri deljenju s 7.

| mesec              | jan | feb | mar | apr | maj | jun | jul | avg | sep | okt | nov | dec | jan |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| št. dni            | 31  | 28  | 31  | 30  | 31  | 30  | 31  | 31  | 30  | 31  | 30  | 31  |     |
| ost. pri delj. s 7 | 3   | 0   | 3   | 2   | 3   | 2   | 3   | 3   | 2   | 3   | 2   | 3   |     |
| dan v tednu        | 0   | 3   | 3   | 6   | 1   | 4   | 6   | 2   | 5   | 0   | 3   | 5   | 1   |

Zadnja vrstica nam pove dan v tednu, na katerega pade izbrani datum, če je padel januarja na dan 0. Dobimo jo takole: začnemo z 0, vsak naslednji element pa je vsota elementov v prejšnjem stolpcu, nadomeščena s svojim ostankom pri deljenju s 7.

Gornja tabela velja za navadno leto. Za prestopno leto pa je takale:

| mesec              | jan | feb | mar | apr | maj | jun | jul | avg | sep | okt | nov | dec | jan |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| št. dni            | 31  | 29  | 31  | 30  | 31  | 30  | 31  | 31  | 30  | 31  | 30  | 31  |     |
| ost. pri delj. s 7 | 3   | 1   | 3   | 2   | 3   | 2   | 3   | 3   | 2   | 3   | 2   | 3   |     |
| dan v tednu        | 0   | 3   | 4   | 0   | 2   | 5   | 0   | 3   | 6   | 1   | 4   | 6   | 2   |



Opazimo, da se v zadnji vrstici ene in druge tabele pojavijo vsa števila od 0 do 6. To pomeni, da *vsako leto vsak datum pade vsaj enkrat na vsak dan v tednu!* Vsaj en petek, 13., nam torej ne uide. Če ne prej, se pojavi oktobra (v sobotnem prestopnem letu). Največ pa so lahko v enem letu trije – v četrtkovem navadnem in v nedeljskem prestopnem letu.

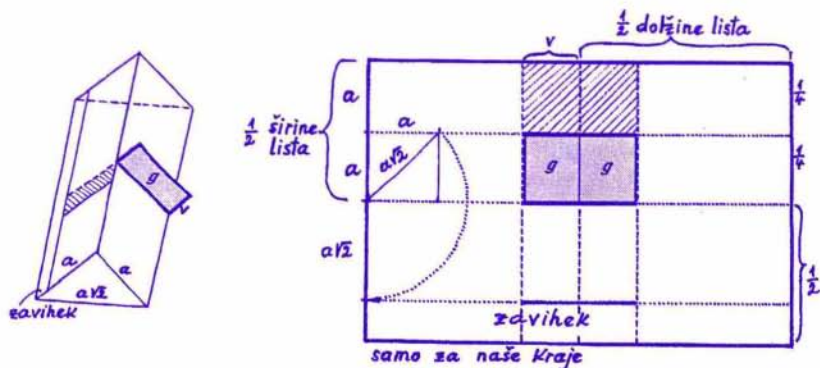
### Vprašanja:

1. Gornja trditev, da vsako leto vsak datum pade na vsak dan v tednu, *ne drži*. Kje je napaka v razmisleku?
2. Pokaži, da vsako leto “manjka” natanko ena kombinacija (dan v tednu, številka med 1 in 31). Katera je to letos?
3. Koliko let je treba čakati, da zberemo vseh 14 različnih koledarjev?

Marko Petkovšek

## POLARNA SONČNA URA IZ ENEGA KOSA PAPIRJA – Odgovor na vprašanje s str. 220

Papir (A3 ali A4) prepognemo po črtkanih črtah in ga prerežemo po treh polnih črtah (daljicah). Zložimo, kot kaže slika. Srednji greben  $g$  je na ravnino številčnice pravokoten, na ostali dve ploskvi pa ga prilepimo ali spnemo. V vetru te ure raje ne preskušamo, če pa že, jo znotraj obtežimo.



Marijan Prosén

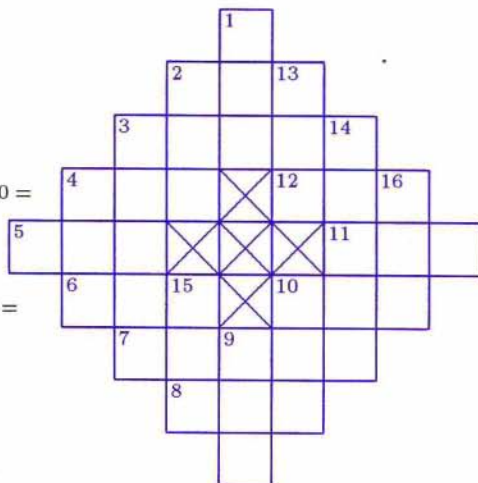
## ŠTEVILSKA KRIŽANKA

## Vodoravno:

2.  $3 \cdot 141 =$
3.  $31239 + 22222 + 851 =$
4.  $378 + 611 =$
5.  $1600 - 4945 : 5 =$
6.  $4 + 30 + 350 + 350 =$
7.  $(50000 + 9) + (2000 + 40) + 800 =$
8.  $8^3 + 3^2 + 3 \cdot 10^2 + 11 =$
10.  $600 - 2 - 2 + 2 - 2 =$
11.  $10\% \text{ od } 3210 =$
12.  $451 - 20 + 15 + 5 - 30 + 15 \cdot 2 =$

## Navpično:

1.  $321 - 198 =$
2.  $400 + 49 =$
3.  $58134 + 1 =$
4.  $(917 : 2) \cdot 2 =$
9.  $535 + 299 =$
10.  $501 + 41 =$
13.  $4396 : 14 =$
14.  $76197 : 3 =$
15.  $(428 : 2) \cdot (4 : 2) =$
16.  $42 \cdot 3 =$



Miha Eder, OŠ Janka Glazerja, Ruše

POLETNA RAZISKOVALNA TABORA –  
SPUHLJA 96

Poleti 1996 sta bila že drugo leto zapored v poletnih počitnicah izvedena srednješolska raziskovalna tabora z naslovom *Od jezika do dokaza* in *Keplerjev sončni sistem*, prvi v drugem, drugi pa v tretjem tednu julija v mladinskem domu ČŠOD v Spuhlji pri Ptuj. Udeležili so se ju dijaki in dijakinje iz vse Slovenije, čeprav večinoma z Gimnazije Bežigrad v Ljubljani, pripravila in vodila pa sva ju podpisana, profesorja matematike oziroma filozofije na omenjeni gimnaziji.

Raziskovalni tabor *Od jezika do dokaza*, kjer so se udeleženci seznanjali z nekaterimi temeljnimi zakonitostmi logičnega sklepanja, je obsegel obravnavo naslednjih tematskih sklopov:

- Jezik,
- Matematika kot jezik,
- Pojmi in definicije,
- Sklepanje,
- Semantika in sintaksa jezika,
- Dokazovalni postopki,
- Aksiomi in aksiomatski sistemi,
- Problemi dokazovanja,
- Logično in čutno,
- O trdnosti in gotovosti spoznavanja.

Namen celotedskega dela je bil osvetliti vlogo dokazovanja, tako v matematiki kakor tudi v pogovoru nasploh, poiskati vezi med obema procesoma, hkrati pa tudi opozoriti na točke njunih razhajanj. Cilj smo s skupnimi močmi logično in uspešno osvojili ter s tem dokazali eksistenco prijetno-koristnih počitnic.

Tematsko precej pester je bil tudi tabor *Keplerjev sončni sistem*, kjer smo se lotevali pojmov nazornosti in modela. Kot odlično izhodišče za tak podvig nam je služila dejavnost znanega astronoma Johannesesa Keplerja iz 17. stoletja. Tako nam ni bilo treba drugega, kakor da smo se kot matematiki študiozno zazirali v njegov pravljичno lep geometrijski model vesolja, se treznili ob elipsah, zatem kot poslušalci uživali v njegovi t.i. nebesni glasbi in kot preprosto zvedavi v toplih nočeh zrli v komete, satelite, planete in zvezde na nočnem nebu. Sicer pa za ilustracijo tudi to pot še pregled obravnavanih tem:

- Johannes Kepler – kdo in kdaj,
- Kepler – astronom, mistik in matematik,
- Keplerjevi zakoni o gibanju planetov,
- Elipsa,
- Keplerjev poliederski model Osončja,
- Poliedri,
- Glasbeni intervali in Keplerjeva nebesna glasba.

Ob vsem tem smo uspeli razdreti še kopico matematičnih, logičnih in spretnostnih nalog, obiskati s kolesi mikavni Ptuj, bližnji grad Borl in dvorec v Dornavi, prepričevati drug drugega o svojih mojstrstvih v



namiznem tenisu, odbojki, nogometu in še kje, se prepuščati blagodejnostim nihanja kitarških strun, oguliti kar nekaj kompletov kart za tarok, najnajspretnější pa so celo ujeli kak trenutek za spanje.

Interdisciplinarnost obeh taborov (v prvem primeru v koordinatah filozofije, lingvistike, logike in matematike, v drugem pa astronomije, filozofije, glasbe in matematike) se je izkazala kakor naročena za našo počitniško sproščenost, hkrati pa nam je ponujala lep okvir za zanimive dejavnosti, ki jim sicer v šoli največkrat ne znamo najti mesta. Kogar mika zvedeti več o tem, kaj podobnega in kaj novega načrtujeva za poletne počitnice 1997, kje in kakšni bodo najini-naši novi tabori in podobno, mu ne preostane drugega, kakor da o tem povpraša na naslov:

Vilko Domajnko, Jani Kovačič  
Gimnazija Bežigrad  
Peričeva 4, 1000 Ljubljana.

Tudi s prijaviteli velja pohiteti, saj je število udeležencev teh taborov kajpak omejeno.

*Vilko Domajnko, Jani Kovačič*

## DEDIŠČINA – Rešitev s str. 152

- a) Označimo z  $x$  število otrok. Zadnji otrok dobi natanko  $100x$  zlatih, saj bi od nič različni ostanek, od katerega naj bi dobil še desetino, pomenil, da bi premoženja ne razdelili v celoti (nerazdeljenih bi ostalo devet desetih tega ostanka). Ker so deleži otrok enaki, je vrednost zapuščine  $100x^2$ . Izenačimo na dva načina izračunani delež prvega otroka:

$$100 + \frac{100x^2 - 100}{10} = 100x.$$

Ta enačba ima dve rešitvi:  $x = 9$  in  $x = 1$ . Druga ne pride v poštev, saj je v nalogi rečeno, da je mož zapustiti večje število otrok.

Kaj pa prva rešitev? Razlika deležev dveh zaporednih otrok,  $k$ -tega:

$$100k + \frac{100x^2 - (k-1) \cdot 100x - 100k}{10}$$

in  $(k+1)$ -tega:

$$100(k+1) + \frac{100x^2 - k \cdot 100x - 100(k+1)}{10}$$

je za vse  $k$  ista:

$$100 - \frac{100x + 100}{10}.$$

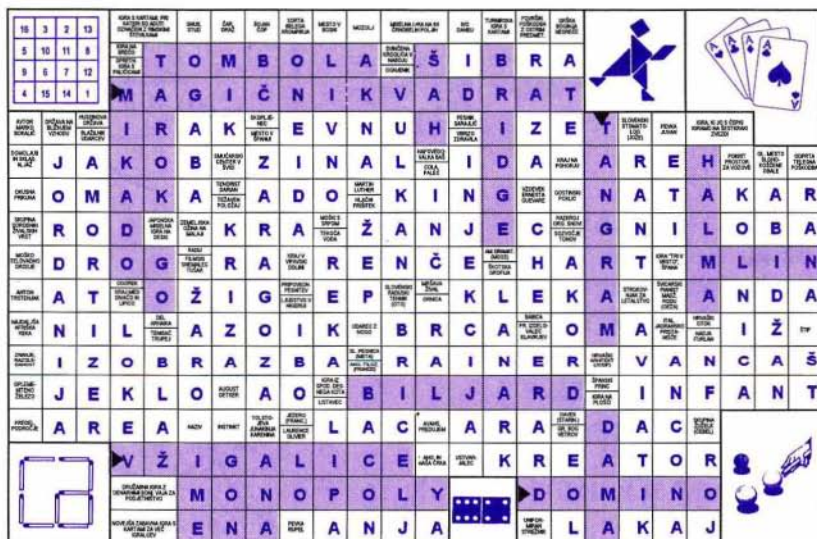
Ker je pri  $x = 9$  ta razlika enaka nič, prva rešitev ustreza.

Otrok je bilo torej devet, vrednost zapuščine pa 8100 zlatnikov.

- b) Z enakim premislekom kot v prejšnji točki ugotovimo, da je število otrok enako  $n - 1$ , premoženje pa vredno  $(n - 1)^2 a$ . Dopustimo lahko tudi trivialno rešitev  $x = 1$ , ko edini otrok na prvem koraku vzame vse premoženje, ki je seveda enako  $a$ .
- c) Iz odgovora b) sledi, da je najmanjše število bonbonov, pri katerem se predpisano deljenje izide, enako  $m^2$ . Potrebujemo najmanj toliko bonbonov, kot je kvadrat števila otrok, ki bi jih radi obdarili. Tedaj vzamemo  $a = 1$  in  $n = m + 1$ .

Marija Vencelj

## KRIŽANKA "DRUŽABNE IGRE" – Rešitev s str. 160



## IZPITNI NALOGI – Rešitev s str. 134

1. Ker je eksponentna funkcija  $2^x$  vedno pozitivna in ker vsako pozitivno vrednost tudi zavzame, je dana enačba brez rešitve natanko takrat, ko enačba

$$y^2 + (p^2 + 5) \cdot y + 9 - p^2 = 0 \quad (1)$$

nima pozitivne rešitve.

Če zapišemo enačbo v obliki  $y^2 + (p^2 + 5) \cdot y = -(9 - p^2)$ , je pri pozitivnih vrednostih za  $y$  leva stran pozitivna in mora biti taka tudi desna stran. Torej enačba zagotovo nima pozitivne rešitve, če je  $9 - p^2 \geq 0$ .

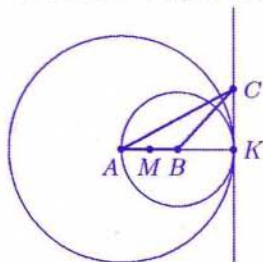
Za  $9 - p^2 < 0$ , je diskriminanta enačbe (1) zanesljivo pozitivna in enačba ima dve realni rešitvi. Ker je prosti člen v enačbi negativen, je po Viétovih formulah ena rešitev pozitivna, druga negativna.

Torej dana enačba nima rešitve natanko tedaj, ko je  $9 - p^2 \geq 0$ , to je za  $p \in [-3, 3]$ .

2. Ločimo tri primere. V vseh bomo z  $M$  označili sredo daljice  $AB$ .

- (a) Manjša krožnica leži v notranjosti večje.  $K$  naj bo skupna točka obeh krožnic in skupne tangente.

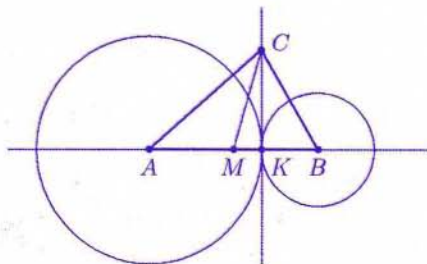
Trikotnik  $ABC$  ima osnovnico  $AB = 1$  in višino  $KC < MC = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ , kar je precej manj kot 4. Za ta primer torej ni  $p > 2$ .



- (b) Točka  $C$  leži na skupni notranji tangenti krožnic, ki se dotikata od zunaj. Izberimo oznake kot v primeru (a).

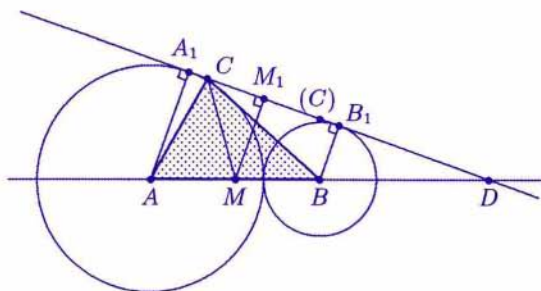
Iz  $MC = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$  in  $MK = \frac{1}{2}$  dobimo po Pitagorovem izreku  $KC = \frac{5}{4}\sqrt{2}$ . Ker je nadalje  $AB = 3$ , sledi

$$p = \frac{1}{2} AB \cdot KC = \frac{15}{8} \sqrt{2}.$$





- (c) Točka  $C$  leži na skupni zunanji tangenti krožnic, ki se dotikata od zunaj. Izberimo oznake kot kaže slika.



Ker so daljice  $AA_1$ ,  $BB_1$  in  $MM_1$  vzporedne, dobimo iz podatkov  $AA_1 = 2$ ,  $BB_1 = 1$  in  $AB = 3$  po Talesovem izreku o sorazmerjih najprej  $BD = 3$  in iz  $AM = MB = \frac{3}{2}$  še  $MM_1 = \frac{3}{2}$ .

S Pitagorovim izrekom izračunamo dve dolžini:

$$M_1D = \sqrt{MD^2 - MM_1^2} = 3\sqrt{2},$$

$$M_1C = \sqrt{MC^2 - MM_1^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Od tod dobimo za razdaljo  $DC$  dve možnosti

$$DC = \frac{3\sqrt{2}}{4}(4 \pm 1).$$

Trikotnika  $ABC$  in  $BDC$  imata skupen vrh  $C$  ter enaki osnovnici  $AB$  in  $BD$  na skupni nosilki. Torej imata enaki ploščini. Lažje izračunamo ploščino drugega, tako da vzamemo za osnovnico stranico  $DC$ . Višina na to stranico je  $BB_1 = 1$ . Sledi

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}(4 \pm 1).$$

Zaradi omejitve  $p > 2$  pride v poštev le rezultat

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}(4 + 1) = \frac{15}{8}\sqrt{2}.$$

Dušan Murovec, priredila Marija Vencelj

## 32. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE

V soboto, 25. maja 1996, se je 187 sedmošolcev in 318 osmošolcev, ki so se na občinskem tekmovanju najbolj odrezali, zbralo v Ljubljani, Mariboru, Celju, Kopru, Novi Gorici in Novem mestu na državnem tekmovanju slovenskih osnovnošolcev v znanju matematike.

Zlato Vegovo priznanje je osvojilo 82 sedmošolcev in 100 osmošolcev, prejeli pa so ga sedmošolci, ki so osvojili vsaj 13 od 25 možnih točk, in osmošolci, ki so osvojili najmanj 13 od 25 možnih točk.

Državna tekmovalna komisija, ki jo je vodila predsednica prof. Terzija Uran, je pripravila naloge, pregledala rešitve in določila kriterij za podelitev zlatih Vegovih priznanj. Tekmovalci so reševali naslednje naloge:

### 7. razred

1. Monika in Andrej trenirata tek, Monika na 600 m, Andrej na 1000 m. Monika je svoj rezultat izboljšala od 2 minut na 1 minuto 54 sekund, Andrej pa od 2 minut in pol na 2 minuti 24 sekund. Izboljšavi izrazi v odstotkih in ju primerjaj.
2. Za katere vrednosti spremenljivke  $t$  je vrednost izraza

$$\left(0, 125 \cdot (-2)^3 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) - \frac{2}{3}t\right) : 1996$$

enaka nič?

3. Pokaži, da je vrednost izraza  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  večkratnik števila 10 za vsako naravno število  $n$ .
4. V notranjosti enakostraničnega trikotnika  $\triangle ABC$  s stranico  $a$  leži točka  $T$ . Pokaži *brez merjenja*, da je vsota razdalj točke  $T$  do vseh stranic trikotnika enaka višini tega trikotnika, ne glede na to, kje v notranjosti si izbereš točko  $T$ .
5. Krog  $K_1$  s središčem  $S_1$  ima obseg  $2\pi$  cm. Krog  $K_2$  ima središče  $S_2$  in petkrat daljši obseg. Krožnici, ki omejujeta dana kroga, se dotikata. Izračunaj obseg kroga  $K_3$ , ki ima premer  $S_1S_2$ .

### 8. razred

1. V trgovini so imeli 180 kg sadja, nekaj je bilo jabolk in nekaj hrušk. Ko so prodali  $\frac{3}{5}$  jabolk in  $\frac{3}{10}$  hrušk, so prodali tretjino vsega sadja. Koliko kilogramov jabolk so imeli v trgovini? Koliko pa hrušk?

2. Dana je linearna funkcija  $f(x) = (5m - 2)x + 12m - 3$ . Graf funkcije seka abscisno os v točki, katere abscisa je rešitev enačbe

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} (x + 2) \right) \right) + \frac{3}{4} = 0.$$

- a) Poišči vrednost za  $m$ .  
b) Zapiši funkcijo  $f(x)$ .
3. V pravokotnem trikotniku  $\triangle ABC$  s katetama  $a$ ,  $b$  in hipotenuzo  $c$  sta težiščnici na kateti dolgi  $\sqrt{52}$  cm in  $\sqrt{73}$  cm. Izračunaj dolžino hipotenuze  $c$ .
4. Krožnici s polmeroma  $r$  in  $R$  ( $r < R$ ) se dotikata obeh krakov pravega kota. Večja gre skozi središče manjše. Zapiši razmerje med polmeroma manjše in večje krožnice ( $r : R$ ).
5. Pravilna tristrana piramida ima osnovni rob  $a$ . Njene stranske ploskve oklepajo z osnovno ploskvijo kot  $60^\circ$ . Mersko število površine je enako merskemu številu prostornine. Izračunaj dolžino roba  $a$ .

Aleksander Potočnik

## 16. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

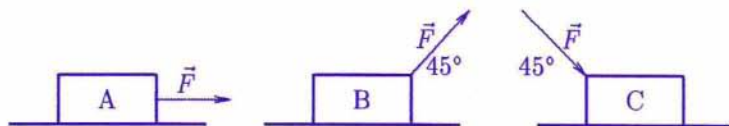
### 7. razred

#### Teoretične naloge:

1. Celzijeva temperaturna lestvica je nastala tako, da je švedski fizik Anders Celsius pripisal 0 stopinj tališču ledu in 100 stopinj vrelišču vode. V Ameriki je še vedno pretežno v uporabi lestvica, ki jo je uvedel pruski fizik Daniel Fahrenheit, pri kateri je tališče ledu pri 32 stopinjah, vrelišče vode pa pri 212 stopinjah. V New Yorku je nekega svežega pomladnega dne temperatura 50 stopinj Fahrenheita. Koliko je to stopinj Celzija?
2. Sila trenja med telesom in podlago je sorazmerna s tisto komponento rezultante vsote sile teže in vlečne (ali potisne) sile, ki je pravokotna na podlago; smer sile trenja je zmeraj nasprotna smeri gibanja telesa. Na sliki so tri enaka telesa na enaki hrapavi podlagi. Telesa imajo enako hitrost v desno, ko jih začnemo vleči ali potiskati s silami, ki so prikazane na sliki. Sile so enako velike, razlikujejo se le po smeri. Pri vseh treh telesih počakamo, da se premaknejo za 1 m.
- a) Razvrstite po velikosti delo, ki ga opravijo na sliki prikazane sile na telesih A, B in C!
- b) Uredite po velikosti sile trenja, ki delujejo med telesi A, B in C in podlago.



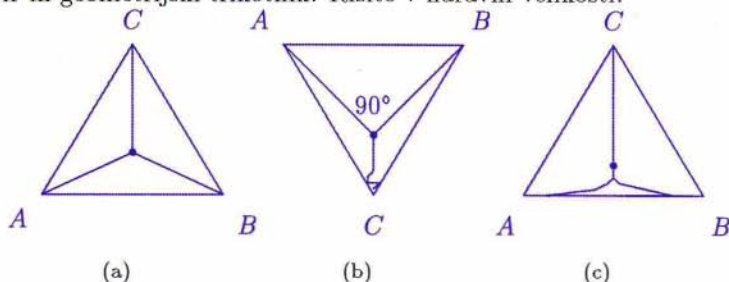
Odgovora utemelji s sliko in besedo.



3. V enakostranični trikotnik privežemo 100-gramsko utež s tremi 10 cm dolgimi elastikami. Slika a kaže trikotnik z utežjo, ko ga položimo vodoravno na mizo; elastike so ravne, a ravno še neraztegnjene. Nato postavimo trikotnik navpično na oglišče C. Gornji elastiki se raztegneta toliko, da oklepata kot  $90^\circ$ , spodnja pa prosto visi in se zverži (slika b). Nato zasučemo trikotnik še vedno v navpični ravnini in ga postavimo na stranico AB (slika c).

Narišite sile, ki delujejo na utež v primerih b in c! Za koliko se podaljša elastika, ki je privezana na oglišče C, v primeru c?

Nalogo lahko rešujete z načrtovanjem. Na voljo imate milimetrski papir in geometrijski trikotnik. Rišite v naravni velikosti.



Upoštevajte, da elastike s silo raztegnemo, ne moremo pa jih stisniti, saj se tedaj brez odpora zveržijo. Raztezek elastike je sorazmeren s silo, s katero je elastika raztegnjena.

### Eksperimentalni nalogi:

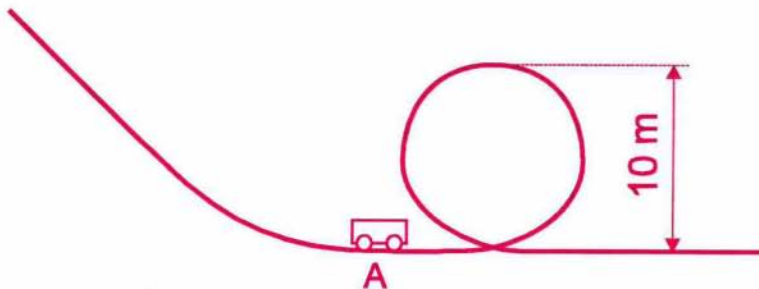
- Na razpolago imate iz plastenke narejeno upogibno tehtnico, 5,6-gramske uteži sive barve in kozarec vode. Določite gostoto dveh neznanih predmetov zlate in rumene barve!  
Navodilo: S 5,6-gramskimi utežmi izdelajte umeritveno krivuljo za upogibno tehtnico. Nato stehtajte neznana predmeta, najprej na zraku, nato tako, da sta potopljena v vodo.
- a) V banjo nalijte vodo do višine 2 cm. Vanjo postavite kozarec s svečo v njem. Prižgite svečo in počakajte minuto, da se plamen razgori. Prekrijte kozarec s čašo. Opazujte višino vodne gladine v čaši!

- i) Narišite stanje ob začetku poskusa.
  - ii) Narišite stanje, ko sveča ugasne.
  - iii) Narišite stanje ob koncu poskusa, ko se pod čašo nič več ne spreminja!
  - iv) Izmerite, za koliko se spremeni tlak od začetka do konca poskusa. Opišite, kako ste izmerili tlačno razliko!
- b) V banjo nalijte vodo do višine 2 cm. Vanjo postavite kozarec s svečo. Ob kozarec s svečo pristonite cevko, ki sega do vrha kozarca na eni strani in do roba banjice na drugi strani. Prižgite svečo in počakajte minuto, da se plamen razgori. Prekrijte kozarec s čašo tako, da se zrak pod čašo lahko skozi cevko izmenjuje z zrakom v okolici.
- i) Narišite stanje ob začetku poskusa.
  - ii) Narišite stanje, ko sveča ugasne.
  - iii) Narišite stanje ob koncu poskusa.
  - iv) Opišite razlike med poskusoma (a) in (b) in jih razložite.
- Na razpolago imate banjo, vrč z vodo, čašo, kozarec, 2 sveči, vžigalice, ravnilo in cevko.

## 8. razred

### Teoretične naloge:

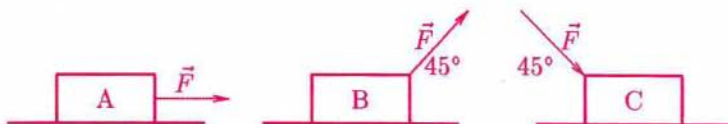
1. V zabaviščnem parku na progi smrti (slika) je voziček v legi A in ima ravno dovolj veliko hitrost, da varno prevozi obroč smrti ("looping"), ki je v najvišji točki visok 10 m. Da bo voziček varno peljal po obroču, mora imeti v najvišji točki hitrost vsaj 8 m/s. Kolikšna je hitrost vozička preden zapelje v obroč, če lahko trenje in upor zraka zanemarimo? S kolikšno hitrostjo pa mora voziček zapeljati v obroč, če zaradi trenja in upora zraka izgubi petino začetne energije?



2. Sila trenja med telesom in podlago je sorazmerna s tisto komponento vsote sile teže in vlečne (ali potisne) sile, ki je pravokotna na podlago; smer sile trenja je zmeraj nasprotna smeri gibanja telesa.

Na sliki so tri enaka telesa na enaki hrapavi podlagi. Telesa imajo enako hitrost v desno, ko začnejo nanje delovati sile, kot so prikazane na sliki. Sile so enako velike, razlikujejo se le po smeri. Pri vseh treh telesih počakamo, da se premaknejo za 1 m. Hitrost telesa A je tudi po premiku enaka kot na začetku.

Obkrožite pravilne odgovore in jih utemeljite s sliko in besedo.



- a) Po premiku za 1 m je hitrost telesa C
  - a) večja b) manjša c) enaka,
 kot je bila na začetku.
- b) Primerjajte velikosti sil, s katerimi vlečemo ali potiskamo predmete A, B in C, z velikostjo sil trenja, ki delujejo na telesa A, B in C, in za vsako od sil povejte, ali je večja, manjša ali enaka sili trenja.
  - i) Velikost sile, ki vleče predmet A, je
    - a) večja b) manjša c) enaka
 kot sila trenja med predmetom A in podlago.
  - ii) Velikost sile, ki vleče predmet B, je
    - a) večja b) manjša c) enaka
 kot sila trenja med predmetom B in podlago.
  - iii) Velikost sile, ki potiska predmet C, je
    - a) večja b) manjša c) enaka
 kot sila trenja med predmetom C in podlago.
3. Ob katerem času med 6. in 7. uro pokrije veliki urni kazalec malega?
 

Odgovor utemeljite z računom!

*Odgovor je neodvisen od dolžine kazalcev, zato si dolžine kazalcev, če želite, lahko izmislite sami.*

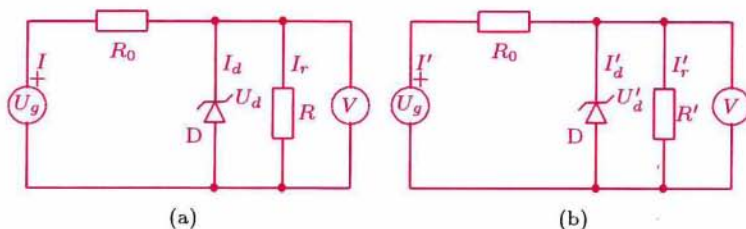
### Eksperimentalni nalogi:

1. Izmerite goriščno razdaljo  $f$  leče! Nato izmerite za pet različnih leg svetlobnega vira razdaljo  $a$  med virom in goriščem leče na strani vira ter razdaljo  $b$  med sliko vira in goriščem leče na strani slike. Izračunaj za vsako meritev še produkt  $ab$  ter izmerjene in izračunane vrednosti vnesite v tabelo.



| $a$ | $b$ | $ab$ |
|-----|-----|------|
|     |     |      |
|     |     |      |
|     |     |      |
|     |     |      |
|     |     |      |

- i) Kako se spreminja  $b$ , ko se povečuje  $a$ ?
  - ii) Vrednosti posamezne meritve primerjajte s kvadratom goriščne razdalje  $f^2$ . Ali lahko iz meritev sklepate na kakšno splošno zakonitost?
2. V shemah na obeh slikah je **D** Zenerjeva dioda. Dioda se obnaša kot upornik, ki se mu pri zanjo značilni napetosti (v našem primeru 8,2 V) upor bistveno zmanjša. To lastnost diode lahko izkoristimo tako, da z diodo vzporedno vezani upornik zamenjamo z drugim, ki ima znatno večji upor, ne da bi se napetost na diodi in s tem tudi na uporniku bistveno povečala.
- Izberemo napetostni vir z napetostjo  $U_g = 10$  V. Zenerjeva dioda ima značilno napetost  $U = 8,2$  V, ko teče po njej tok  $I_d = 5$  mA. Izberemo tak upornik, da teče skozenj  $I_r = 55$  mA.
- V vezju je tudi dodatni upornik  $R_0$ , ki poskrbi, da je na diodi res napetost 8,2 V. Tok v njem označimo z  $I$ .
- a) Iz navedenih podatkov izračunajte upor  $R_0$  dodatnega upornika.
  - b) Iz navedenih podatkov izračunajte tudi upor  $R$  z diodo vzporednega upornika.
  - c) Na voljo imate 5 različnih upornikov: za 33  $\Omega$ , 150  $\Omega$ , 330  $\Omega$ , 820  $\Omega$  in 1500  $\Omega$  (nekateri so v dvojniku). Na podlagi vaših izračunov izberite najbolj ustrezna upornika (izračunani upor se lahko razlikuje od izbranega do 10%). Vstavite ju v vezje po shemi na sliki (a). Izmerite napetost na vzporedno vezanem uporniku  $R$  in na diodi. Ta se lahko nekoliko razlikuje od značilne napetosti 8,2 V.



- d) Zamenjajte z diodo vzporedno vezani upornik z uporom  $R$  z novim upornikom, ki ima približno 5-krat večji upor. Novi upor označite z  $R'$ . Izmerite napetost  $U'$  na njem (slika (b)).
- e) Izračunajte tok  $I'_r$  skozi upornik  $R'$ .
- f) Izračunajte skupni tok  $I'$  skozi dodatni upornik  $R_0$ .
- g) Izračunajte tok  $I'_d$  skozi diodo.

Račune pišite pregledno, urejeno (po točkah) in z enotami.

Mojca Čepič

## 11. DRŽAVNO TEKMOVANJE V RAČUNALNIŠTVU ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve nalog

### 2. dela s str. 182

Od devetih nalog višjih treh skupin smo za objavo izbrali pet in originalne rešitve nekoliko "polepšali". Pripravljene so v pascalu.

#### Rešitvi za 4. skupino (6. razred)

Primer rešitve 1. naloge

```

program menjava;
{ V besedilu, ki ga vnašamo preko tipkovnice, zamenja kratico "OS" z nizom
  "Osnovna sola". Nalogo in originalno rešitev je pripravil Janez Pečovnik. }
uses Crt;
const
  maxV = 20; { Preberemo največ maxV vrstic besedila. }
var
  vrstaV: string; { vhodna vrstica, ki vsebuje kratice }
  vrstaI: string; { izhodna vrstica z zamenjanimi kraticami }
  stV: integer; { število prebranih vrstic }
  i: integer;

begin
  ClrScr;
  stV := 0;
  repeat
    write('Vpisi vhodni niz: '); readln(vrstaV);
    vrstaV := vrstaV+' '; { Dodamo presledek, da poenostavimo iskanje. }
    vrstaI := '';
    i := 1;
    while (i<=Length(vrstaV)) do begin
      if (vrstaV[i]<>'O') or (vrstaV[i+1]<>'S') then
        vrstaI := vrstaI+vrstaV[i]
      else
        begin vrstaI := vrstaI+'Osnovna sola'; i := i+1; end;
      i := i+1;
    end; { while }
  
```

```

    writeln('Izhodni niz      : ',vrstaI);
    writeln;
    stV := stV+1;
    until (stV=maxV) or (vrstaV=' ');
    readkey;
end.

```

### Primer rešitve 3. naloge

```

program RimskaStevila;
{ Poišče rimski zapis števila, podanega v arabskem zapisu. Vhodno število
  mora biti manjše od 4000. Nalogo in originalno rešitev je pripravil
  Sandi Bižal. }
var
    stevilo: integer;                                { število }
    zapis: string;                                   { zapis števila z rimskimi številkami }

procedure pretvori(
    var st: integer;                                { število }
    var rim: string;                                { rimski zapis števila }
    c: string;                                       { rimska števka }
    vel: integer);                                  { vrednost števke }
{ Ugotovi, kolikokrat rimska števka c, ki ima desetiško vrednost vel,
  nastopa v zapisu števila st, in ustrezno podaljša rimski zapis rim. }
begin
    while st>=vel do begin
        rim := rim+c;
        st := st-vel;
    end;
end; { pretvori }

begin
    write('Vtipkaj arabsko zapisano število: '); readln(stevilo);
    zapis := '';
    pretvori(stevilo,zapis,'M',1000);
    pretvori(stevilo,zapis,'CM',900);
    pretvori(stevilo,zapis,'D',500);
    pretvori(stevilo,zapis,'CD',400);
    pretvori(stevilo,zapis,'C',100);
    pretvori(stevilo,zapis,'XC',90);
    pretvori(stevilo,zapis,'L',50);
    pretvori(stevilo,zapis,'XL',40);
    pretvori(stevilo,zapis,'X',10);
    pretvori(stevilo,zapis,'IX',9);
    pretvori(stevilo,zapis,'V',5);
    pretvori(stevilo,zapis,'IV',4);
    pretvori(stevilo,zapis,'I',1);
    writeln('Rimski zapis: ',zapis);
end.

```



## Rešitvi za 5. skupino (7. razred)

## Primer rešitve 2. naloge

```

program MestniZapis;
{ Za naključno število med 0 in 999 ugotovi, koliko stotic, desetic in enic
  vsebuje. Nalogo in originalno rešitev je pripravil Jelko Urbančič. }
var
  stevilo: integer;
  stotice, desetice, enice: integer;

begin
  randomize;
  stevilo := random(1000);
  write(stevilo, ' ');
  stotice := stevilo div 100;
  stevilo := stevilo mod 100;
  desetice := stevilo div 10;
  enice := stevilo mod 10;
  writeln(stotice, 'S ', desetice, 'D ', enice, 'E');
end.

```

{ Odrežemo stotice. }

## Primer rešitve 3. naloge

```

program Sahovnica;
{ Na sredino zaslona nariše šahovnico z oznakami vrstic in stolpcev.
  Nalogo in originalno rešitev je pripravil Janez Pečovnik. }
uses Crt;
const
  BELO = chr(219)+chr(219);
  CRNO = ' ';
var
  v,s: integer;
  znak1,znak2: string;

begin
  ClrScr;
  for v:=8 to 15 do begin
    GotoXY(30,v);
    write(16-v, ' ');
    if odd(v) then
      begin znak1 := BELO; znak2 := CRNO; end
    else
      begin znak1 := CRNO; znak2 := BELO; end;
    for s:=1 to 4 do
      write(znak1,znak2);
    end;
    GotoXY(32,17);
    for s:=0 to 7 do write(chr(ord('A')+s), ' ');
    readkey;
  end.

```

{ belo polje }  
 { črno polje }  
 { števca vrstic in stolpcev }  
 { Izpis oznake vrstice: števila od 8 do 1. }  
 { Lihe vrstice se začno z belim poljem. }  
 { Izpis oznak stolpcev: črke od A do H. }

## Rešitev za 6. skupino (8. razred)

Primer rešitve 1. naloge

```

program Datoteke;
{ Nalogo in originalno rešitev je pripravil Sandi Bižal. }
var
    imeVhod,imeIzhod: string;
    zacetek,konec: integer;

procedure PrepisiVrstice(vhodIme,izhodIme: string; zac,kon: integer);
{ Z datoteke vhodIme prepise vrstice od zac do kon na datoteko izhodIme. }
var
    vhodDat,izhodDat: text;                                { datotečni spremenljivki }
    besedilo: string;
    vrstica: integer;                                       { številka tekoče vrstice vhodne datoteke }
begin
    assign(vhodDat,vhodIme); reset(vhodDat);
    assign(izhodDat,izhodIme); rewrite(izhodDat);
    vrstica := 1;
    { Preskočimo vrstice od 1 do zac-1. }
    while (vrstica<zac) and (not eof(vhodDat)) do begin
        readln(vhodDat);
        vrstica := vrstica+1;
    end;
    { Prepisovanje vrstic. }
    while (vrstica<=kon) and (not eof(vhodDat)) do begin
        readln(vhodDat,besedilo);
        writeln(izhodDat,besedilo);
        vrstica := vrstica+1;
    end;
    close(vhodDat);
    close(izhodDat);
end;

begin
    write('Vhodna datoteka: '); readln(imeVhod);
    write('Izhodna datoteka: '); readln(imeIzhod);
    write('Pri kateri vrstici naj zacnem prepisovati: '); readln(zacetek);
    write('Pri kateri vrstici naj koncam prepisovanje: '); readln(konec);
    PrepisiVrstice(imeVhod,imeIzhod,zacetek,konec);
end.

```

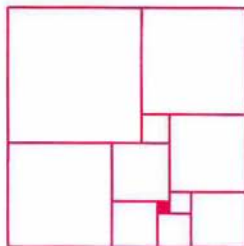
Martin Juvan

## DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE ZA SREDNJEŠOLCE

Poročilo s 40. državnega tekmovanja iz matematike za srednješolce smo objavili v prvi letošnji številki Preseka, sedaj pa razkrijmo še naloge:

## Prvi letnik

1. Dana so praštevila  $a$ ,  $b$  in  $c$ . Prvo števko števila  $a$  označimo z  $x$ . Izračunaj produkt  $ax$ , če veš, da je  $b - c = x$  in  $a = b^2 + c^2 + (bc)^2$ .
2. Izmed naravnih števil od vključno 1 do vključno 25 poljubno izberemo 17 števil. Dokaži, da med izbranimi števili obstajata dve različni števili, katerih produkt je popolni kvadrat.
3. Naj bo  $ABC$  pravokotni trikotnik s ploščino 1. Vsako od oglišč  $A$ ,  $B$  in  $C$  prezrcalimo preko njemu nasprotne stranice trikotnika. Zrcalne slike zaporedoma označimo z  $A'$ ,  $B'$  in  $C'$ . Izračunaj ploščino trikotnika  $A'B'C'$ .
4. Iz enajstih kvadratov različnih dimenzij smo sestavili pravokotnik tako, kot vidimo na sliki. Izračunaj dolžini stranic pravokotnika, če ima najmanjši (osenčeni) kvadrat stranico 9.



## Drugi letnik

1. Bodita  $a$  in  $b$  taki naravni števili, da  $a$  deli  $b + 1$  in  $b$  deli  $a^2 - 2$ . Dokaži, da je število  $\frac{b+1}{2}$  celo in je popolni kvadrat.
2. Naj bo  $\angle BAD$  ostri kot romba  $ABCD$ . Presečišče diagonal označimo z  $S$ . Naj bosta  $V$  in  $T$  pravokotni projekciji točk  $D$  in  $S$  na stranico  $AB$ , točka  $U$  pa razpolovišče daljice  $DV$ . Dokaži, da je daljica  $BU$  pravokotna na daljico  $TC$ .
3. Kvadratu vrtamo krožnico in nanjo postavimo tangento, ki ni vzporedna nobeni stranici kvadrata. Pokaži, da je dolžina hipotenuze pravokotnega trikotnika, ki ga tangenta odreže od kvadrata, manjša od polmera in večja od  $\frac{2}{3}$  polmera vrtane krožnice.
4. V neki vasi živi  $n$  klepetulj in vsaka izmed njih ve nekaj, česar druge ne vedo. Ko pokliče ena klepetulja drugo, ji pove vse, kar ve, vendar drugi ne pusti do besede, tako da od nje ne izve ničesar. Koliko telefonskih klicev je najmanj potrebno, da bodo vse klepetulje vedele vse?

## Tretji letnik

1. Naj bo  $p$  polinom s celoštevilskimi koeficienti, ki v štirih različnih celih številih zavzame vrednost 1. Pokaži, da v nobenem celem številu ne zavzame vrednosti 42.



- Naj bosta  $A$  in  $B$  različni točki na premici  $p$ . Narišimo polkrožnico s premerom  $AB$  in njen vrh označimo s  $C$ . Na krožnem loku izberemo poljubno točko  $P$ , ki ne sovpada z  $A$ ,  $B$  ali  $C$ . Premica  $CP$  naj seka premico  $p$  v točki  $Q$ , pravokotnica na premico  $p$  skozi točko  $Q$  pa naj seka premico  $AP$  v točki  $R$ . Dokaži, da je  $|BQ| = |QR|$ .
- Naj bosta  $p$  in  $q$  tuji si naravni števili. Dokaži, da velja

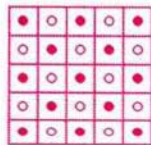
$$\sum_{k=1}^{q-1} \left[ \frac{kp}{q} \right] = \sum_{k=1}^{p-1} \left[ \frac{kq}{p} \right],$$

kjer  $[x]$  označuje največje celo število, ki ne presega realnega števila  $x$ .

- Na šahovskem turnirju je vsak udeleženec odigral po eno partijo z vsakim drugim udeležencem. Zmagovalec vsake partije je dobil 1 točko, poraženec je ostal praznih rok, pri remiju pa sta prejela oba igralca po  $\frac{1}{2}$  točke. Pogled na tabelo rezultatov ob koncu turnirja pove, da je vsak tekmovalec dosegel polovico svojih točk proti zadnjim trem uvrščenim. Koliko tekmovalcev je bilo na turnirju?

#### Četrty letnik

- Naj bosta  $a$  in  $b$  lihi naravni števili. Označimo  $a_1 = a$  in  $a_2 = b$ . Za vsako naravno število  $n$  naj  $a_{n+2}$  označuje največji lihi delitelj števila  $a_n + a_{n+1}$ . Pokaži, da je zaporedje  $a_1, a_2, a_3, \dots$  od nekega člena dalje konstantno in to konstanto tudi izračunaj.
- Podmnožica  $M$  množice  $\{1, 2, \dots, 99\}$  naj ima deset elementov. Pokaži, da obstajata taki disjunktni neprazni podmnožici  $A$  in  $B$  množice  $M$ , da je vsota števil v množici  $A$  enaka vsoti števil v množici  $B$ .
- Naj bo  $C$  od krajišč različna točka premera  $AB$  krožnice  $\mathcal{K}$ . Za vsako točko  $X \in \mathcal{K}$  označimo z  $Y_X$  tisto točko na poltraku  $XC$ , za katero je  $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|XC|}{|CY_X|}$  in točka  $C$  leži na daljici  $XY_X$ . Določi množico  $\{Y_X; X \in \mathcal{K}\}$ .
- Pokrijmo tablo  $5 \times 5$  s 13 črnimi in 12 belimi žetoni, kot kaže slika. Igro začne igralec z belimi žetoni tako, da odstrani poljubni črni žeton in ostane na potezi. V nadaljevanju igre igralec z belimi žetoni in igralec s črnimi žetoni izmenično premikata žetone. Igralec, ki je na potezi, mora na prazno polje premakniti enega izmed žetonov svoje barve s polja, ki ima s praznim poljem skupno stranico. Igralec, ki ne more narediti poteze, izgubi. (Na sosednjih poljih praznega polja tedaj ni nobenega njegovega žetona.)
  - Dokaži, da se igra vedno konča.
  - Kateri igralec ima zmagovito strategijo?



Matjaž Željko

### 37. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA – Rešitev izbrane naloge s str. 135

Označimo  $\angle FAB = \angle CDE = \alpha$ ,  $\angle ABC = \angle DEF = \beta$  in  $\angle BCD = \angle EFA = \gamma$ . Ker sta stranici  $BC$  in  $EF$  vzporedni, lahko konstruiramo pravokotnik  $PQRS$ , kot kaže slika. Potem velja

$$\begin{aligned} |PS| &= |PA| + |AS| = \\ &= |AB| \sin \angle ABP + \\ &\quad + |AF| \sin \angle AFS. \end{aligned}$$

Ker sta kota  $\angle ABP$  in  $\beta$  ter  $\angle AFS$  in  $\gamma$  suplementarna, je  $\sin \angle ABP = \sin \beta$  in  $\sin \angle AFS = \sin \gamma$ . Torej je

$$|PS| = |AB| \sin \beta + |AF| \sin \gamma.$$

Podobno je tudi

$$|QR| = |CD| \sin \gamma + |DE| \sin \beta.$$

Upoštevajmo sedaj, da je  $|BF| \geq |PS| = |QR|$  oz.  $2|BF| \geq |PS| + |QR|$ , in dobimo

$$2|BF| \geq (|AB| \sin \beta + |AF| \sin \gamma) + (|CD| \sin \gamma + |DE| \sin \beta).$$

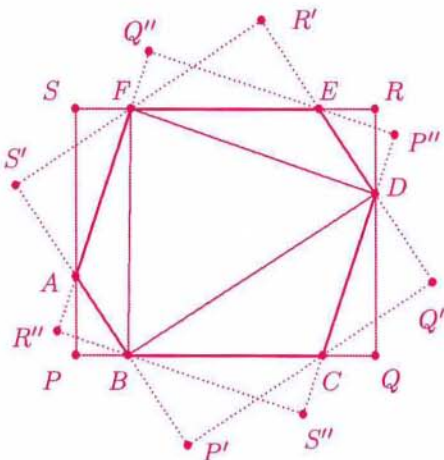
Ker je  $R_A = \frac{|BF|}{2 \sin \alpha}$ , lahko tako zapišemo

$$4 R_A \geq |AB| \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + |AF| \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + |CD| \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + |DE| \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

S pomočjo pravokotnikov  $P'Q'R'S'$  in  $P''Q''R''S''$  (glej sliko) lahko podobno kot zgoraj izpeljemo še

$$4 R_C \geq |BC| \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + |CD| \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + |EF| \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + |AF| \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

$$4 R_E \geq |DE| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + |EF| \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + |BC| \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + |AB| \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$



Združimo dobljene enačbe:

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq |AB| \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) + |BC| \left( \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) + \\ + |CD| \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right) + |DE| \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right) + \\ + |EF| \left( \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) + |AF| \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \right).$$

Ker za vsako pozitivno realno število  $x$  velja ocena  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ , je izraz v vsakem oklepaju večji ali enak 2. Torej je  $4(R_A + R_C + R_E) \geq 2P$  in zato

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{1}{2} P.$$

Pripomimo še, da v gornji enakosti velja znak enakosti natanko tedaj, ko je  $\alpha = \beta = \gamma$  in  $BF \perp BC$ ,  $BD \perp DE$  in  $DE \perp FA$  – torej natanko tedaj, ko je šestkotnik  $ABCDEF$  pravilni.

Matjaž Željko

## NALOGE Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE

### Skupina A

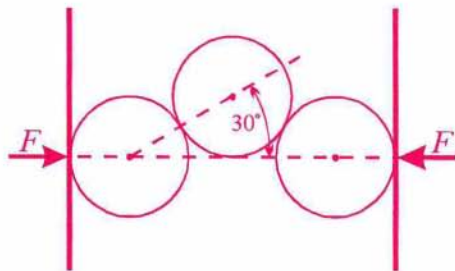
- Na večji oddaljenosti od nas je v morje padlo veliko telo in ob padcu povzročilo valovanje z različnimi valovnimi dolžinami. V nekem trenutku nas dosežejo valovi z valovno dolžino 20 m, čez 280 s pa valovi z valovno dolžino 15 m. Kako daleč od tega mesta je izvir valov? Hitrost razširjanja morskih valov je odvisna od njihove valovne dolžine:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

- kjer je  $\lambda$  valovna dolžina in  $g = 10 \text{ m/s}^2$  težnostni pospešek.
- V morju plava boja v obliki pokončnega valja s premerom 20 cm, ki je z elastično vrvjo (njen prožnostni koeficient je  $250 \text{ N/m}$ ) pritrjena na dno. Ob oseki je vrv navpična, nenapeta in meri 3,0 m. Iz vode tedaj gleda del boje z višino 18 cm. Za koliko se zviša gladina morja, ko voda ravno prekrije vrhnji del boje? Specifična teža vode je  $10 \text{ kN/m}^3$ .

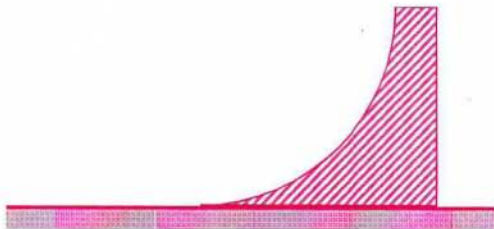


3. Med dve navpični steni postavimo tri enake valje s težo 10 N, kot kaže slika. Koeficient lepenja med valjema označimo s  $k_1$ , med steno in valjem pa s  $k_2$ . S kolikšno najmanjšo silo  $F$  moramo stiskati steni skupaj, da valji ostanejo v narisanim položaju? Najmanj kolikšna morata biti koeficienta  $k_1$  in  $k_2$ , da je to možno?



### Skupina B

1. Rolkarji uporabljajo za izvajanje svojih spretnosti rampo – stezo z navpičnim vrhom. Rampe si sposodijo drsalci, jo polijejo z vodo in, ko ta zmrzne, jo dajejo na led. Kolikšna je razlika višin, ki jo lahko dosežeta rolkar in drsalec, vsak z maso 70 kg, če ima vsak od njiju tik pred vznožjem rampe hitrost 30 km/h? Masa rampe je 100 kg. Rolkar uporablja rampo na asfaltu, kjer rampa ne more drseti.
2. Garažna streha je 15 cm debela vodoravna betonska plošča s toplotno prevodnostjo 1,35 W/mK. Streha je na začetku prekrita z 22 cm debelo snežno odejo. Zunanja temperatura je  $-15^{\circ}\text{C}$ , v garaži pa je  $20^{\circ}\text{C}$ . Gostota snega je  $400\text{ kg/m}^3$ , specifična talilna toplota  $0,334\text{ MJ/kg}$ , toplotna prevodnost pa  $0,45\text{ W/mK}$ . S kolikšno hitrostjo se na začetku tanjša debelina snežne plasti? Voda pri taljenju nemoteno odteka s strehe. Pri kolikšni debelini pa se snežna plast preneha taliti?
3. Na planetu v obliki krogle, na katerem traja dan 6,0 ur, z vzmetno tehtnico ugotovimo, da tehtajo telesa na ekvatorju za 10 % manj kot na polu. Kolikšna je povprečna gostota planeta? Gravitacijska konstanta je  $6,7 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .



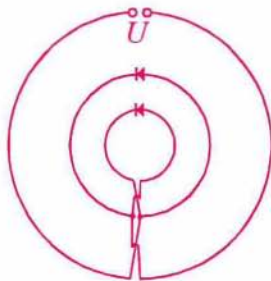
4. V poskusni komori v obliki kocke z dolžino notranje stranice 1,000 m leži na sredini osnovne ploskve majhno telo. Komoro lahko premikamo v vse smeri z izjemno velikimi pospeški.
- V nekem trenutku se začne komora gibati v desno s konstantno hitrostjo 0,40 m/s in navpično navzdol s konstantnim pospeškom 1,2 g, ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). Določi točko v komori, kjer se telo (prvič) dotakne stene.
  - Kje pa se dotakne stene, če komoro iz mirovanja poženemo s konstantnim pospeškom 12 g v desno in s konstantno hitrostjo 0,50 m/s navpično navzdol?

V obeh primerih podaj lego točke na nedvoumen način!

### Skupina C

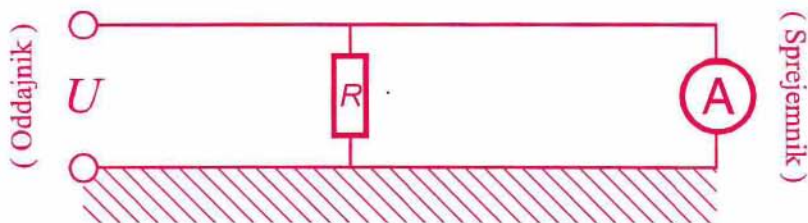
1. V velikem ploščatem kondenzatorju z razmikom 10 cm med vodoravnima ploščama ležijo na spodnji plošči tri enako težke majhne prevodne kroglice. Na vsako je pritrjena lahka neprevodna vrstica. Proste konce vrvic zvežemo skupaj in vozle dvignemo do sredine kondenzatorja, pri čemer na vsaki kroglici ostane 2,3 nAs naboja. Zveznice med kroglicami in vrvice tvorijo tedaj robove pravilnega tetraedra s stranicami po 5,0 cm. Za koliko moramo povečati napetost na kondenzatorju, da bodo kroglice kar najbolj razmaknjene? Influenčna konstanta je  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ .

2. Tri žične krožne zanke, ki so povezane, kot kaže slika, priključimo na enosmerno napetost. Radij najmanše zanke označimo z  $r_1$ , srednje z  $r_2$  in največje z  $2r_2$ . Kolikšno mora biti razmerje  $r_1/r_2$ , da bo magnetno polje v središču zank enako ne glede na to, kako obrnemo pola napetosti? Dioda prevaja tok, ko tok teče v smeri puščice; takrat je upor diode nič. Vezne žice med posameznimi zankami imajo praktično radialno smer; njihov upor je zanemarljivo majhen v primerjavi z uporom zank.

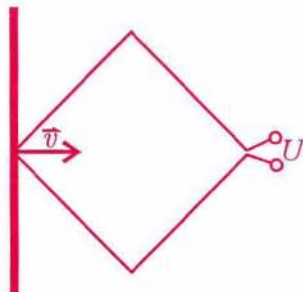


Gostota magnetnega polja v središču krožne zanke z radijem  $r$ , po kateri teče tok  $I$ , je enaka  $\frac{\mu_0 I}{2r}$ , pri čemer je induksijska konstanta  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ .

3. Na telefonskem daljnovodu z eno žico je prišlo do poškodbe izolacije, kar ima enak učinek, kot če bi daljnovod ozemljili preko upora  $R$ . Dokaži, da bo tok v sprejemniku  $A$  najmanjši, če pride do poškodbe na sredini daljnovoda. Oddajnik je idealni izvir z napetostjo  $U$ , upor žice na dolžinsko enoto je  $\rho$ , upor sprejemnika pa je zanemarljivo majhen v primerjavi z uporom žice.



4. V ravnini, ki je pravokotna na magnetno polje z gostoto  $1,0 \text{ T}$ , leži žica zvita v nesklenjen kvadrat in priključena na izvir napetosti, kot kaže slika. Stranica kvadrata meri  $10 \text{ cm}$ , skupni upor žic, ki tvorijo kvadrat, pa je  $105 \, \Omega$ . Na ta okvir položimo v levo oglišče vzporedno z diagonalo kvadrata prevodno palčko, daljšo od diagonale kvadrata. Palčko sunemo tako, da se začne s hitrostjo  $1,0 \text{ m/s}$  premikati proti oglišču na drugi strani. Kako se mora s časom spreminjati napetost izvira, da se palica giblje enakomerno vse do desnega oglišča?



### Skupina D

- Kroglo z radijem  $30 \text{ cm}$  spuščamo po klancu, ki ima na začetku naklon  $30^\circ$ , nato pa se prelomi v klanec z naklonom  $45^\circ$ . S kolikšne največje višine, merjeno od preloma navzgor, lahko spustimo kroglo, da ob prelomu ne bo poskočila? Krogla se kotali brez podrsavanja.
- Pri napravah, ki izkoriščajo sončno energijo, uporabljajo Braytonov toplotni stroj. Določena količina zraka, ki je v tem primeru delovna snov, opravi naslednjo krožno spremembo:
  - Zrak vstopi v kompresor (točka 1), kjer ga bat hitro stisne (do točke 2).
  - V prvem toplotnem izmenjevalcu se segreva pri konstantnem tlaku (od točke 2 do točke 3), dokler temperatura ne doseže  $1540^\circ\text{C}$ .
  - Nato vstopi v turbino (točka 3), kjer se ob premikanju bata hitro razpne, tako da ima v točki 4 spet enak tlak kot na začetku (v točki 1), njegova temperatura pa je v točki 4 enaka  $700^\circ\text{C}$ .
  - Končno se v drugem toplotnem izmenjevalcu zrak ohlaja pri konstantnem tlaku (od točke 4 do točke 1), tako da se spet vrne v začetno stanje.



Stiskanje in razpenjanje zraka obravnavaj kot adiabatna procesa in privzemi, da se specifični toploti zraka s temperaturo ne spreminjata.

- i) Izračunaj izkoristek zgoraj opisanega Braytonovega toplotnega stroja.
  - ii) V izobarnem procesu 2 – 3 se prostornina delovne snovi poveča trikrat. Kolikokrat večji izkoristek od zgoraj izračunanega bi imel Carnotov toplotni stroj, ki bi deloval med najnižjo in najvišjo temperaturo, ki ju doseže zrak v opisanem Braytonovem ciklu?
3. V enem od zgodnjih modelov vodikovega atoma so predpostavili, da je atom enakomerno pozitivno nabita kroglica z nabojem  $e_0$  in radijem  $r_0$ , znotraj katere se giblje elektron z maso  $m_0$ . Iz odvisnosti sile na elektron ugotovi, da je (klasično) gibanje elektrona v tem modelu kar sinusno nihanje. Zapiši energijo takšnega nihala (oscilatorja) v primeru, ko je amplituda nihanja elektrona natančno enaka radiju atoma  $r_0$ . Kolikšen mora biti radij  $r_0$ , da bo ta energija enaka rezultatu, ki ga da kvantna teorija za najnižjo energijo enodimenzionalnega oscilatorja

$$W_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

kjer je  $\omega$  krožna frekvenca nihala. Rezultat izrazi kar v enotah Bohrovega radija

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e_0^2 m_0} = 0,053 \text{ nm}.$$

4. *Eksperimentalna naloga:* Magnetno polje tuljave
- i) Izmeri magnetno polje, ki ga ustvarja izmenični tok skozi veliko tuljavo na osi velike tuljave. Primerjaj izmerjeno vrednost magnetnega polja v središču tuljave z izračunano vrednostjo, ki jo dobiš iz izraza za magnetno polje na osi tuljave.
  - ii) Na osi zunaj tuljave predpostavimo, da polje pojema s potenco razdalje  $z$  od središča tuljave ( $B = Cz^{-n}$ ). Preveri, če je ta predpostavka upravičena, in določi neznano potenco  $n$ .

*Potrebščine:* velika tuljava s 136 ovoji, mala tuljavica s  $300 \pm 2$  ovoji, digitalni voltmeter (za odčitavanje napetosti na mali tuljavici – izmenično območje), ampermeter za merjenje toka v veliki tuljavi (nastavi na izmenično območje), izvir izmenične napetosti (50 Hz), priključne žice, ravnilo, stiroporne podložke, lepilni trak, kljunasto merilo, milimetrski papir.

**Napotki:** Pazi, da bo tok skozi veliko tuljavo okoli 2 A! Meri tako, da pomikaš tuljavico vzdolž osi velike tuljave in meriš inducirano napetost na tuljavici. Polje izmeri vsaj v desetih točkah. Iz meritev inducirane napetosti izrazi gostoto magnetnega polja. Tok v veliki tuljavi nastavi na približno 2A. Primerjaj izmerjeno vrednost magnetnega polja v središču tuljave z izračunano vrednostjo, ki jo dobiš iz izraza za magnetno polje znotraj dolge tuljave. Primerjaj še s točnim izrazom za magnetno polje na osi tuljave v središču tuljave

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{l^2 + (2R)^2}}$$

in na krajišču tuljave

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{l^2 + R^2}},$$

ki upošteva končno dolžino tuljave. V izrazu je  $N$  število ovojev,  $l$  tok v tuljavi,  $l$  dolžina tuljave in  $2R$  premer tuljave.

Izmeri kako pojema magnetno polje na osi zunaj tuljave. Potenco  $n$  najlažje določiš z logaritmiranjem izraza  $B = C z^{-n}$ .

*Jure Bajc*

#### PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje  
24. letnik, šolsko leto 1996/97, številka 4, strani 193 – 256

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

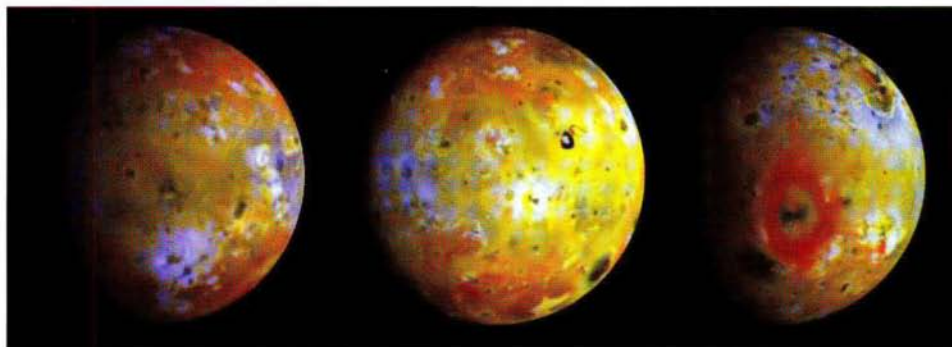
Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1996/97 je za posamezne naročnike 1.500 SIT, za skupinska naročila šol 1.200 SIT, posamezna številka 300 SIT, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ  
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

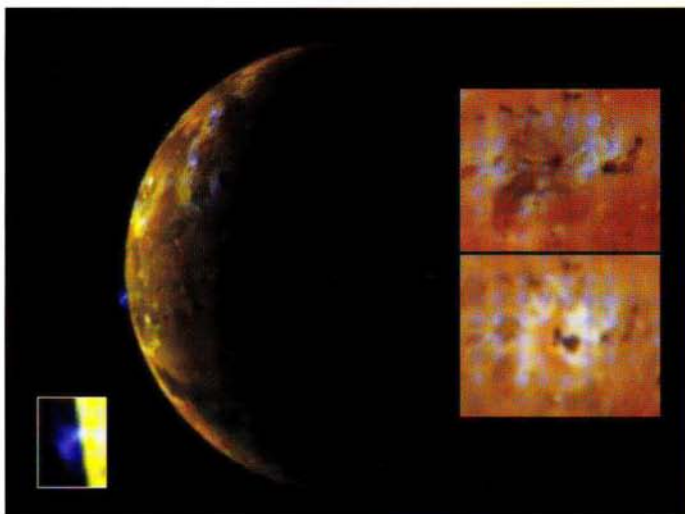
© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1301

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

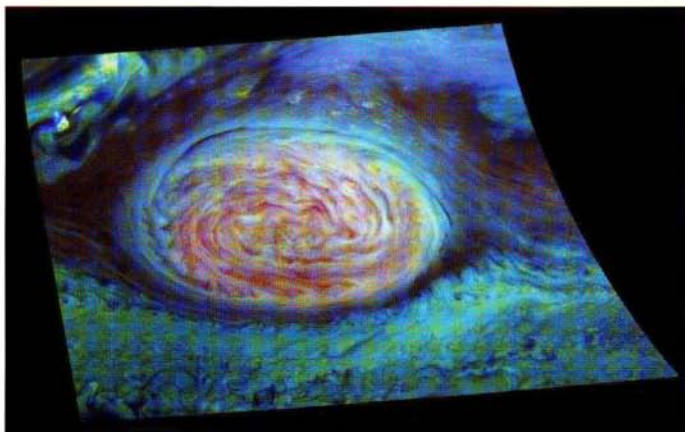


Slika 1. Trije posnetki Jupitrove lune Io kažejo, da so se v letih, odkar je površje Io posnel Voyager, na njem zgodile številne vulkanske preobrazbe. Rdeče obarvana področja prikazujejo nedavne vulkanske nanose. Posnetki so bili narejeni junija 1996.

Slika 2. Izbruh na Io. Izrez spodaj levo prikazuje vulkanski izbruh, ki se razteza okrog sto kilometrov nad površjem. Modra barva izbruhanine potrjuje prisotnost žveplovega dioksida. Slike na desni strani prikazujejo primerjavo med posnetki Voyagerja in Galileja.



Slika 4. Tudi na Internetu se je pojavil Galilejev posnetek Jupitrove Rdeče pege. (Barve na sliki niso realne.) Slika je sestavljena iz osemnajstih posnetkov v treh različnih infrardečih filterih.







Slika 3. Projekcija Sončevega mrka na avtomobilu (foto Miha Lobnik).



Slika 4. Povečana slika projekcij mrka (foto Miha Lobnik).