

3

PRE SEK



DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 24(1996-1997)
ISSN 0351-6652



Matematična olimpijska ekipa po vrnitvi iz Indije na brniškem letališču (foto Matjaž Željko).



Ekipa Slovenije na Mednarodni fizikalni olimpiadi v Oslu (foto Ciril Dominko).

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
24. letnik, leto 1996/97, številka 3, strani 129–192

VSEBINA

MATEMATIKA	Porazdelitev praštevil v množici $\mathbb{N}$ (Gregor Pavlič)	140-143
FIZIKA	Svetlobni mlinček (Janez Strnad)	130-134
	Hálo, čudoviti naravni pojav – 2. del (Matej Rovšek) ...	144-145
ASTRONOMIJA	Izmerimo Lunin premer (Marijan Prosén)	138-139
RAČUNALNIŠTVO	Posplošena Fibonaccijeva zaporedja (Martin Juvan)	150-152
NOVICE	37. mednarodna matematična olimpiada (Matjaž Željko) ...	135
	27. mednarodna fizikalna olimpiada (Ciril Dominko)....	136-137
	Novo največje znano praštevilo (Matija Lokar)	154-155
	27. fizikalna olimpiada v deželi Vikingov (Klemen Žagar) ..	156-157
NALOGE	Izpitni nalogi (Dušan Murovec)	134
	Soda pred liha (Martin Juvan)	139
	Dediščina (Marija Vencelj)	152
	Komutativnost množenja (Marija Vencelj)	157
REŠITVE NALOG	Prištevanka za dva – s str. III, P-2 (Marija Vencelj)	137
	Kateri slavni matematik je to? – s str. 100 (Marija Vencelj) ..	153
	Praštevilske vrednosti polinoma – s str. 69 (Dušan Murovec) ..	153
	Vse manj je dobrih gostiln – s str. 83 (Marija Vencelj)	153
	Križanka "Presekovi uredniki" – s str. 96 (Marko Bokalič) ..	159
	Kolikokrat bo treba tehtati? – nagradna naloga s str. 5 (Marija Vencelj)	162-163
	Kvadrati praštevil – s str. 83 (Boris Lavrič)	163-164
ZANIMIVOSTI	Napišite pesmico (Marija Vencelj)	158-159
RAZVEDRILO	Križanka "Družabne igre" (Marko Bokalič)	160-161
PISMA BRALCEV	Razpis na temo 1997 s str. 18 – odgovori (Marija Vencelj) ..	146-149
TEKMOVANJA	Urniki tekmovanj v letu 1997 (Darjo Felda)	165-167
	Rešitve nalog s predtekmovanja iz srednješolske fizike – s str. 124 (Bojan Golli)	167-173
	31. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje – rešitve s str. 112 (Aleksander Potočnik)	173-175
	Rešitve nalog s področnega tekmovanja iz fizike za osnovnošolce – s str. 117 (Mojca Čepič)	175-178
	11. državno tekmovanje v računalništvu za osnovno- šolce, 1. del – rešitve s str. 107 (Tihomil Šlenc)	179-181
	11. državno tekmovanje v računalništvu za osnovno- šolce – naloge, 2. del (Tihomil Šlenc)	182-184
	Mednarodno matematično tekmovanje mest, 2. del (Matjaž Željko)	185-187
	Izbirno tekmovanje iz matematike – rešitve s str. 123 (Matjaž Željko)	188-192
NA OVITKU	Vrtilo demonstracijskega modela za prikaz pojavov hála v labora- toriju (izdelal Andrej Trontelj, foto Matej Rovšek)	I
	Slovenski olimpijski ekipi na 37. matematični in 27. fizikalni med- narodni olimpiadi. Glej prispevke na straneh 135, 136 in 156. II	
	Svetlobni mlinček (foto Marjan Smerke). Glej tudi članek na strani 130. Oktobrski delni Sončev mrk (foto Anja Čerin)....	III
	Slike pojavov hála v laboratoriju (foto Matej Rovšek). Glej tudi stran 144	IV

SVETLOBNİ MLINČEK

V nekaterih šolskih laboratorijih je mogoče še opaziti *svetlobni mlinček*. To je steklena bučka, v kateri je ostanek zraka pod nizkim tlakom. Na ost je posajen vodoraven križ s štirimi majhnimi navpičnimi loputami na krajiščih. Na eni strani so prevlečene s črno barvo, na drugi z zrcalno plastjo ali z belo barvo. Na soncu se križ z loputami počasi vrti. Loputa, katere črna stran je obrnjena proti svetlobi, se giblje navznoter, in loputa, katere bela stran je obrnjena proti svetlobi, navzven (slika na predzadnji strani ovitka).

Napravica, ki jo danes le poredko uporabijo, je preživela veliko boljše čase, ko so se z njo ukvarjali znani fiziki. Proti koncu 18. stoletja je še prevladovalo mnenje, da sestavljajo svetlobo hitri delci. Tedaj so maloštevilni nasprotniki tega mnenja – med njimi Thomas Young – trdili, da bi morali opaziti silo svetlobe, če bi šlo za delce. Misel se je obdržala še dolgo v 19. stoletje. Augustin Fresnel, ki je nadaljeval Youngovo teorijo o svetlobi kot valovanju, je leta 1825 prvi izmeril silo, kakršna deluje v svetlobnem mlinčku. Toda to delo ob svojem času ni zbudilo pozornosti in je zatonilo v pozabo.

William Crookes je določil atomsko maso elementa talija, ki ga je odkril po značilnih črtah v spektru. Pri tehtanju v posodi z razredčenim plinom je opazil, da so segreti vzorci tehtali manj. Tedaj so uporabljali izboljšano vakuumsko črpalko, ki je omogočila, da so dosegli dokaj nizke tlake preostalega plina. Da bi pojav bolje raziskal, je v cev z znižanim tlakom postavil preprost vzvod z bezgovima kroglicama na krajiščih. Kroglica se je dvignila, če ji je toplo telo približal od spodaj, in se spustila, če ji ga je približal od zgoraj. Leta 1874 je članom Kraljeve ustanove v Londonu pokazal podoben poskus. V izsesani posodici je na nitki visel vzvod z bezgovo kroglico. Kroglica se je odklonila od goreče sveče, ki ji jo je približal.

Poskus je opazoval tudi Osborne Reynolds, ki je sklepal, da pojav ni povezan s silo svetlobe, ampak s tem, da se kroglica na strani plamena segreje. Razlago je podrobneje izdelal leta 1876. Molekule v plinu na toplejši strani od kroglice odletijo v povprečju z malo večjo hitrostjo, kot priletijo na kroglico. Povprečna kinetična energija molekule je namreč sorazmerna s temperaturo. Učinek močnejšega odriva molekul na segreti strani je tak, kot da bi se tam malo povišal tlak plina in odrinil kroglico.

Vzemimo, da prileti molekula na loputo s hitrostjo v , ki ustreza temperaturi T , in se odbije s hitrostjo $v + \Delta v$, ki ustreza temperaturi $T + \Delta T$. Po izreku o gibalni količini, je sunek sile lopute na molekulo

enak spremembi gibalne količine. Velja $F_1 t = m_1(v + \Delta v) - m_1(-v) = 2m_1 v + m_1 \Delta v$, če je F_1 sila molekule na loputo in m_1 masa molekule. V časovni enoti prileti na ploskovno enoto lopute število molekul, ki je sorazmerno s hitrostjo v . Tako je tlak plina na loputo $p + \Delta p$ sorazmeren z $2v^2 + v\Delta v$, medtem ko je tlak p sorazmeren z $2v^2$. Delimo ustrežni enačbi, da se znebimo sorazmernostnega koeficienta, pa preostane $\Delta p/p = \Delta v/2v$.

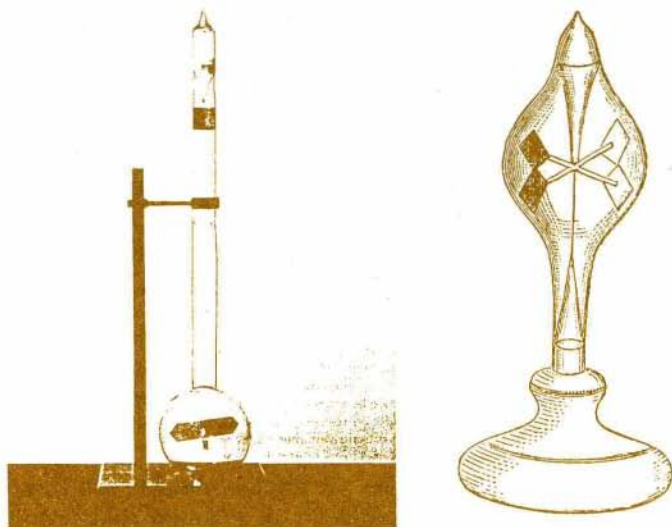
Nadalje upoštevajmo, da je kinetična energija molekule sorazmerna s temperaturo: $\frac{1}{2}m_1 v^2 \propto T$ in $\frac{1}{2}m_1(v + \Delta v)^2 = \frac{1}{2}m_1 v^2 + m_1 v \Delta v \propto T + \Delta T$. Pri tem smo zanemarili člen z $(\Delta v)^2$ v primeri z drugimi členi. Zopet delimo ustrežni enačbi, da se znebimo sorazmernostnega koeficienta, in dobimo $2\Delta v/v = \Delta T/2T$. Iz obeh zapisanih enačb sledi zveza med spremembo tlaka in spremembo temperature $\Delta p/p = \Delta T/4T$.

Reynoldsa so opozorili na to, da je nekaj spregledal. Molekule, ki se odrinejo na steni z malo višjo temperaturo z malo večjo hitrostjo, tudi malo pogostejše trčijo z molekulami, ki se gibljejo v nasprotni smeri, in pri teh trkih hitro izgubijo presežno hitrost. Tlak se po vsem plinu v posodici izenači, četudi temperatura ni povsod enaka.

Crookes je nadaljeval s poskusi. Na nitko je obesil vzvod s črno in belo loputo in opazil, da se je vzvod odklonil, če je loputi enako osvetlil. Pri nekaterih poskusi se je vzvod zasukal. Tako se mu je porodila misel, da je leta 1876 izdelal svetlobni mlinček, ki ga je imenoval *radiometer* (slika 1). Tedaj je bil še vedno prepričan, da naravnost meri silo svetlobe. Danes poznamo preprost nasprotni razlog. Beli del lopute svetlobo v glavnem odbije, črni pa v glavnem vpije. Mislimo si vodno kolo, na katerem se na eni strani vodni curek na lopatici odbije, na drugi strani pa ob lopatici spolzi na tla. Sila odbitega curka je dvakrat večja od sile curka, ki se ne odbije. Če bi bilo podobno pri mlinčku, bi se morala loputa, katere bela stran je obrnjena proti svetlobi, gibati navznoter in loputa s črno stranjo navzven.

Reynoldsov sodelavec Arthur Schuster je naredil leta 1876 zanimiv poskus. Ohišje radiometra je obesil na dve nitki in radiometer osvetlil. Telo, ki visi na dveh vzporednih nitkah, ima zelo jasno izraženo ravnovesno lego. Ohišje se je odklonilo v nasprotno smer, kot se je vrtil radiometer, ko ga je osvetlil. Če bi na svetlo loputo delovala svetloba z manjšo silo in na temno z večjo silo, bi zaradi razlike sil na vzvod deloval navor. Z navorom povezana sprememba vrtilne količine bi se preko plina in trenja v osi prenesla na ohišje radiometra, ki bi se odklonilo v isto smer kot radiometer. Poskus je pokazal, da je vrtenje radiometra vendarle povzročil

povečani tlak plina pred črno loputo, ki se je hitreje segrevala kot bela. Plin se je začel hitreje gibati od lopute in gibanje se je preneslo na ohišje. Pri tem se je ohranila skupna vrtilna količina, plin se je vrtel v nasprotni smeri kot radiometer in njegovo vrtenje se je preneslo tudi na ohišje.



Slika 1. Crookesov radiometer s prečko na nitki iz leta 1876 (levo). Ob istem času je Heinrich Geissler v Nemčiji raziskoval radiometer s štirimi loputami (desno). Geissler si je zamislil novo učinkovito vakuumsko črpalko, v kateri je za tesnjenje uporabil živo srebro.

Prvotna Reynoldsova razlaga je potemtakem morala vsebovati vsaj zrnce resnice. To se je pokazalo, ko sta delovanje radiometra nekoliko podrobneje pojasnila James Clerk Maxwell in Osborne Reynolds neodvisno drug od drugega leta 1879. Njunjo razlago so dopolnili še okoli leta 1920. Nekoliko poenostavljeno lahko rečemo, da se sicer učinka toka molekul z nekoliko večjo hitrostjo od črne lopute in pogostejših trkov teh molekul z nasproti prihajajočimi molekulami zares izravnata, vendar velja to samo nad loputo. Ne izravnata pa se v zelo tankem območju nad robom lopute. Tam prevlada učinek hitrejših molekul in povzroči, da se črna loputa giblje navznoter in bela navzven. Debelino tega območja ocenimo s *povprečno prosto potjo*, kakor imenujemo razdaljo, ki jo v povprečju preleti molekula v plinu med zaporednima trkoma.

V preprostem približku se je lotil računa tudi Albert Einstein v članku *K teoriji radiometrskih sil* leta 1924. Izpeljal je silo na telo v plinu, v katerem teče toplotni tok, če je telo majhno v primeri s povprečno prosto potjo. Obdelal je tudi silo na loputo, ki je pravokotna na toplotni tok, če je loputa velika v primeri s povprečno prosto potjo. Računi v uporabljenem približku so preprosti in bi jih lahko navedli, če ne bi bili tako dolgi in če bi neposredno zadevali svetlobni mlinček. Pri sili na rob lopute, ki ima na eni strani za ΔT višjo temperaturo kot na drugi, pa v plinu ni znatnega toplotnega toka in ni mogoče narediti preprostega približka. Silo na enoto roba lopute lahko le ocenimo s $\bar{p}\bar{l}\Delta T/T = k\Delta T/\pi(2r_1)^2$. Pri tem je $\bar{l} = 1/\pi n(2r_1)^2$ povprečna prosta pot z gostoto molekul n , to je številom molekul v prostorninski enoti, in s premerom molekule $2r_1$. Gostoto molekul povezuje s tlakom p in temperaturo T enačba $p = nkT$, v kateri je $k = 138 \cdot 10^{-23}$ J/K Boltzmannova konstanta. To je samo eden od dveh prispevkov k *radiometriki sili*. Pri temperaturni razliki nekaj kelvinov doseže nekaj desettisočin newtona na meter, če premer molekule ocenimo z nekaj 10^{-10} m. Rob lopute meri nekaj centimetrov, tako da sila na rob lopute doseže le nekaj milijonin newtona.

Radiometer, ki ga damo v hladilnik, se vrti v nasprotni smeri. Črna stran lopute se namreč s sevanjem hitreje ohladi kot bela, tako da zapuščajo črna stran lopute molekule, ki imajo v povprečju malo manjšo hitrost od prihajajočih. Ob robu lopute prevlada ta učinek nad učinkom malo redkejših trkov teh molekul z nasproti prihajajočimi molekulami. Radiometer se vrti v nasprotni smeri kakih deset minut, dokler se temperatura vseh delov radiometra ne izenači. Radiometer se vrti v navadni smeri, ko ga damo iz hladilnika, četudi ga ne osvetlimo. Tudi to vrtenje poneha po kakih desetih minutah, ko se vsi deli radiometra segrejejo na sobno temperaturo. Na soncu deluje radiometer neprekinjeno, ker se nikoli vsi deli ne segrejejo na temperaturo, ki ustreza temperaturi na površju Sonca.

Crookes in nekateri drugi so poskusili rešiti prvotno Reynoldsovo razlago po drugi poti. Tlak v radiometriki posodici naj bi bil tako nizek, da bi molekule, ki se gibljejo od črne lopute, na poti do stene posodice sploh ne trčile z drugimi molekulami. Če bi bilo tako, bi lahko obveljala prvotna Reynoldsova razlaga. Toda povprečna prosta pot pri navadnem tlaku meri komaj nekaj desettisočin milimetra. Pri desettisočkrat manjšem tlaku,

to je pri tlaku desetine milibara, kolikor je navadno tlak v radiometriški posodici, meri desettisočkrat več, torej nekaj milimetrov. Crookesov radiometer se je vrtel še pri tlaku okoli 50 milibarov, ko je povprečna prosta pot merila samo petstotino milimetra. Prvotna Reynoldsova razlaga zares ni bila uporabna.

Raziskovanje radiometra je zbudilo zanimanje za pojave v razredčenih plinih, v katerih povprečna prosta pot v primeri s posodico ali z opazovanim telesom ni tako velika, da bi lahko govorili o vakuumu, a ni tako majhna, da bi veljale enačbe za tekočinski tok. Veliko fizikov, ki so se ukvarjali z radiometrom in so obvladali delo z vakuumskimi črpalkami, je začelo raziskovati električni tok po razredčenih plinih in predvsem katodne žarke. Crookes je to storil tudi zato, ker je vsaj spočetka napačno mislil, da molekule v radiometru ne trkajo med seboj. On in Schuster sta veliko prispevala k raziskovanju katodnih žarkov in rentgenske svetlobe. To raziskovanje je Johna Josepha Thomsona leta 1897 pripeljalo do odkritja, da sestavlja katodne žarke negativno naelektreni delci. Te delce s skoraj dvatisočkrat manjšo maso od vodikovega atoma so pozneje imenovali elektroni. Raziskovanje radiometra je tedaj povezano tudi z odkritjem elektrona, katerega stoletnico bomo v kratkem slavili.

Janez Strnad

IZPITNI NALOGI

Oglemo si dve od šestih nalog, ki so jih leta 1993 reševali kandidati za vpis na mehanično-matematično fakulteto na moskovski državni univerzi. Se vam zdita težki?

1. Določi vse vrednosti za p , pri katerih enačba

$$4^x + (p^2 + 5) \cdot 2^x + 9 - p^2 = 0$$

nima rešitve!

2. Dve krožnici s središčema A in B imata polmera 2 in 1 ter se dotikata. Točka C leži na skupni tangenti obeh krožnic v oddaljenosti $3 \cdot \sqrt{3}/(2 \cdot \sqrt{2})$ od sredine daljice AB . Poiščite ploščino p trikotnika ABC , če velja $p > 2$.

Dušan Murovec

37. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA

Karavana mladih matematikov se je letos ustavila v Bombayu – petnajst-milijonskem mestu na otoku ob zahodni obali Indije. Prvih nekaj dni smo preživeli ob privajanju na nove klimatske razmere in spoznavanju lokalne favne. Predstavniki družin *Blattidae*,¹ *Culicidae*² in *Sauria*³ so na nas napravili nepozaben vtis. Zaradi monsuma, ki je v tistem času obiskal Indijo, temperature niso presegle 35° C, vlažnost pa ni padla pod 80%.

Še posebej "vroče" je bilo 10. in 11. julija, ko so se Polona GREŠAK z Gimnazije in ESS Trbovlje, Igor KLEP s ŠŠC in Gimnazije Ptuj, Matjaž KONVALINKA in Tadej STARČIČ z Gimnazije Bežigrad, Andrej ZORKO z Gimnazije in ESS Brežice in Sašo ŽIVANOVIČ iz ŠC Celje, Gimnazije Lava, spoprijeli z nalogami na 37. mednarodni matematični olimpiadi. Tekmovalci so v naslednjih dneh spoznali Bombay in njegovo okolico, spremljevalca Darjo FELDA in Matjaž ŽELJKO pa sva se v tistih dneh ukvarjala s pregledovanjem izdelkov in predstavitvijo le-teh mednarodnim ocenjevalcem.

Za slovensko ekipo je bilo najbolj svečano 16. julija, ko sta Igor KLEP in Matjaž KONVALINKA prejela bronasti odličji. Kot zanimivost objavimo nalogo, pri kateri je Igor Klep prejel več točk kot celotna kitajska ekipo.

Naj bo $ABCDEF$ konveksni šestkotnik, pri katerem je stranica AB vzporedna stranici DE , stranica BC vzporedna stranici EF in stranica CD vzporedna stranici AF . Z R_A , R_B in R_C označimo polmere krožnic, očrtanih trikotnikom FAB , BCD in DEF , s P pa obseg šestkotnika. Dokaži, da je

$$R_A + R_B + R_C \geq \frac{1}{2}P.$$

Zahvala za uspehe naših olimpijcev in tekmovalcev na drugih tekmovanjih gre predvsem učiteljem-mentorjem, ki mladim nadobudnežem pomagajo pri spoznavanju matematike. Nastop na olimpiadi pa sta v veliki meri omogočili Ministrstvo za šolstvo in šport ter Ministrstvo za znanost in tehnologijo.

Matjaž Željko

¹ ščurki

² komarji

³ kuščarji

27. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

Na letošnji, za nas jubilejni peti olimpiadi, odkar se jih udeležujemo kot samostojna država, smo dosegli doslej največji uspeh: srebrno medaljo, bronasto medaljo in dve pohvali.

Na olimpiadi, ki je potekala med 30. junijem in 7. julijem v Oslu na Norveškem, je sodelovalo 260 tekmovalcev in 107 spremljevalcev iz 55 držav. Slovensko ekipo (pet tekmovalcev in dva spremljevalca) so sestavljali: Klemen ŽAGAR, Gimnazija Šentvid Ljubljana ter Miha VUK, Andrija LEBAR, Peter JEGLIČ in Anže SLOSAR, vsi z Gimnazije Bežigrad Ljubljana. Spremljevalca in hkrati člana mednarodne komisije sva bila Bojan Golli, Pedagoška fakulteta v Ljubljani, in Ciril Dominko, DMFA Slovenije.

Tako kot vsako leto je bilo treba tudi letos v petih urah rešiti tri teoretične naloge in po dnevu počitka še dve eksperimentalni nalogi. Organizatorji so letos prvič spremenili eno izmed teoretičnih nalog tako, da je bila sestavljena iz večih, med seboj neodvisnih kratkih nalog. S tem so uspeli v tej nalogi postaviti težke in lahke probleme, hkrati pa so pokrili precejšen del kataloga. Prav tako je bila v primerjavi z zadnjimi olimpiadami nenavadna eksperimentalna naloga, saj so tekmovalci z isto eksperimentalno napravo reševali dve eksperimentalni nalogi.

Tudi letos so imeli največ uspeha kitajski tekmovalci, saj je vseh pet dobilo zlato medaljo. Njihov že več let konstantni uspeh ni presenetljiv: poleg seveda največje izbire tekmovalcev na svetu se njihovi tekmovalci še pol leta intenzivno pripravljajo na tekmovanje pod vodstvom univerzitetnih profesorjev. Podobne priprave imajo tudi druge ekipe: Romunija, Slovaška, Češka itd. Naša ekipa se je pripravljala osem dni na FMF, Oddelek za fiziko, pri čemer pa so bile priprave zelo motene, ker so tekmovalci vmes odhajali na maturitetne izpite.

Uspeh tekmovalcev na fizikalni olimpiadi se določa na podlagi povprečja doseženih točk prvih treh tekmovalcev. Za zlato medaljo je potrebno zbrati najmanj 90% točk tega povprečja, za srebrno od 78% do 89%, za bronasto od 65% do 77% in za pohvalo od 50% do 64%. Pri izračunavanju točk, ki na posamezni olimpiadi ustrezajo omenjenim mejam, se izračunana vrednost ne zaokrožuje, ampak se vzame celi del izračunane meje.

Letos je bilo povprečje treh najboljših tekmovalcev 47 točk (na vsaki olimpiadi je največje možno število točk 50), za zlato medaljo je bilo potrebno zbrati najmanj 42 točk, za srebrno vsaj 36, za bronasto 30 in za pohvalo najmanj 23.

Med našimi tekmovalci je Klemen Žagar dosegel 39,5 točke in s tem srebrno medaljo, Miha Vuk 35,5 točke in bronasto medaljo, Anže Slosar s 25,5 točkami in Peter Jeglič s 23 točkami pa pohvali. Andriji Lebarju je za pohvalo zmanjkalo 1,5 točke. Na olimpiadi tekmujejo tekmovalci kot posamezniki in ne kot ekipa. Kljub temu navadno spremljevalci zračunamo povprečje cele ekipe, da se lahko medsebojno neuradno primerjamo. Naše povprečje nas letos uvršča v prvo tretjino sodelujočih držav, za nami pa so se med drugimi uvrstile tudi naslednje države: Velika Britanija, Avstralija, Avstrija, Kanada, Švica, Nizozemska, Norveška, Belgija, Finska, Španija, vse novonastale države na ozemlju bivše Jugoslavije, itd.

Naslednja, 28. mednarodna fizikalna olimpiada, bo med 13. in 21. julijem 1997 v majhnem kanadskem mestu Sudbury (država Ontario), ki leži 400 km severno od Toronta.

Ciril Dominko

PRIŠTEVANKA ZA DVA – Rešitev s str. III, P–2

Oglejmo si še enkrat zaporedje zmagovite strategije za $a = 10$ in $A = 100$:

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

Če igralec lahko navede zadnje število iz tega zaporedja, to je 89, sme po pravilih igre njegov nasprotnik navesti le eno od števil od vključno 90 do vključno 99. Katerokoli od teh števil pa lahko prvi igralec v skladu s pravili igre nadaljuje s 100. Podoben premislek pove, da bo igralec zanesljivo lahko navedel število 89, če bo pred tem navedel število 78, itd. Opazimo, da je vsa strategija v tem, da je razlika med zaporednimi členi zmagovitega zaporedja (in zadnjim členom ter A) takšna, da je z enim korakom igre ne moremo premostiti, z dvema pa vedno lahko. To je možno le, če je razlika za 1 večja od a , v našem primeru 11.

Po tem premisleku je pred nami že tudi splošna rešitev. Zmagovito zaporedje vsebuje vsa števila oblike

$$A - n \cdot (a + 1),$$

ki leže med 0 in A .

Primer: Za $A = 40$ in $a = 6$, dobimo iz izraza $40 - 7n$ zmagovito zaporedje

5, 12, 19, 26, 33.

Tako. Z malo vaje se boste navadili, da boste od igre do igre spremenjali obe števili in veselo zmagovali. Le prej preverite, če vaš nasprotnik ni slučajno bralec Preseka!

Marija Vencelj

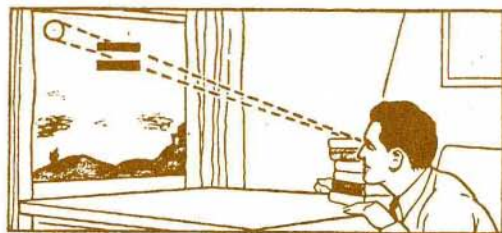
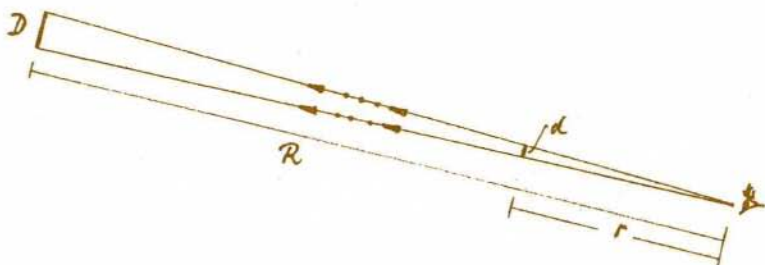
IZMERIMO LUNIN PREMER

Če ne vemo, kako velika je Luna, bi pa to radi vedeli, imamo na razpolago vsaj dve možnosti. Podatek preberemo v astronomskem učbeniku oziroma enciklopediji ali pa se lotimo meritev. Mi bomo ubrali drugo možnost. *Velikost oz. premer Lune* bomo ocenili iz opazovanja.

Za opazovanje izberemo jasno noč ob ščipu (polni luni) ali kak dan prej ali pozneje. Luno opazujemo vsaj tri ure po vzhodu. Opazujemo jo lahko kar skozi okno sobe. Odrežemo dva lepilna neprozorna trakca in ju vodoravno nalepimo na okensko steklo 3 do 4 cm narazen. Pripravimo premakljivo mizico s kupom knjig. Toliko časa jo premikamo, da čez zgornjo knjigo vidimo Lunin disk "ležati" med traccema tako, da se ravno navidezno dotika notranjih robov trakcev.

Da določimo točko našega opazovališča, kjer je oko, z enim vogalom vrhnje knjige to točko označimo. Čim natančneje izmerimo razdaljo r med vogalom te knjige in traccema. Zaradi večje natančnosti razdaljo izmerimo vsaj trikrat in upoštevamo njeno povprečno vrednost. Nato izmerimo še razdaljo d med notranjima robovoma trakcev. Razdaljo od Zemlje do Lune so izmerili že astronomi in meri $R = 380000$ km, kar je približno 30 premerov Zemlje.

Trikotnika na sliki sta si podobna, zato velja $D/R = d/r$. Vstavimo izmerjene podatke in iz enačbe izračunamo premer Lune $D = Rd/r$.



Merjenje Luninega premera.

Natančna vrednost Luninega premera je $D_0 = 3400$ km. Ugotovimo, koliko se naša meritev razlikuje od natančne vrednosti, to je $|D - D_0| = |\Delta D|$. Izračunamo relativno napako meritve $|\Delta D|/D_0 = \dots\%$. Če je napaka blizu 10 %, je naša meritev kar dobra.

Nalogi

1. Lunin premer ocenimo tudi tako, da polno luno prvič gledamo z enim očesom, drugič pa z drugim (paralaksa). Opazujemo lahko tudi skozi okno sobe. Toliko časa se odmikamo od okna, da prvič vidimo vso Luno, ki se navidezno dotika navpičnega okenskega robu, drugič pa Luna ravno izgine za rob. Meritev delata dva. Eden opazuje, drugi meri razdalje. Nato zamenjata vlogi.
2. Lunin premer ocenimo tudi iz časa zahajanja polne lune za goro. Meritev delata dva. Eden opazuje zahajanje Lune, drugi zapiše izmerjeni čas zahajanja. Znajdite se. Upoštevamo, da kotu 1° ustreza čas 4 minut. Meritev je razmeroma zahtevna.

Ko Lunin premer ocenimo na več načinov, ocene primerjamo s pravo vrednostjo in ugotovimo, po katerem načinu smo dobili najboljši rezultat.

Marijan Prosén

SODA PRED LIHA

Tokrat bomo preurejali sezname. Dani sta naslednji deklaraciji v pascalu:

```
type
  kcelica = ↑celica;
  celica = record
    stev: integer;
    nasl: kcelica;
  end;
```

Vaša naloga je, da sestavite podprogram, ki kot parameter dobi kazalec na seznam števil gornje oblike in števila v seznamu preuredi tako, da bodo vsa soda števila pred vsemi lihimi. Relativni vrstni red znotraj sodih števil naj se zamenja, znotraj lihih števil pa naj ostane nespremenjen. Na primer, podprogram naj seznam, ki po vrsti vsebuje števila 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, preuredi v 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7.

Martin Juvan

PORAZDELITEV PRAŠTEVIL V MNOŽICI IN

Ena od poti ugotavljanja gostote praštevil je proučevanje zaporedja znanih praštevil. Ali se morda v njem skriva kakšen vzorec?

Tako vidimo, da je med prvimi 100 naravnimi števili 25 praštevil:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, \\ 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,$$

da so še kar enakomerno porazdeljena, da se med njimi pojavljajo opazne praznine, da pa je med njimi kar 8 parov oblike $p, p + 2$, imenovanih tudi praštevilski dvojčki.

Med 101 in 200 je 21 praštevil

$$101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, \\ 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199$$

in med njimi 7 praštevilskih dvojčkov, praznine pa so že bolj opazne. Tako si lahko postavimo vprašanje: ali obstajajo med zaporednima prašteviloma tudi večji skoki in ali je praštevilskih dvojčkov neskončno mnogo. Zanimivo je, da je odgovor na prvo vprašanje zelo enostaven, odgovora na drugo vprašanje pa še ni; obstaja le domneva, da je odgovor pritrdilen. Do leta 1994 največja znana praštevilska dvojčka sta 1 000 000 000 061 in 1 000 000 000 063.

Poglejmo torej odgovor na prvo vprašanje. Najdaljši niz zaporednih sestavljenih števil med prvimi 200 naravnimi števili je 182, 183, ... 190. Ali je mogoče brez truda sestaviti še daljši tak niz, ne da bi izpopolnjevali tabelo praštevil? To je mogoče in lahko je niz celo poljubno dolg, le da je vsa ta števila težko izpisati, ker so zelo velika. Primer za niz 9 zaporednih sestavljenih števil je

$$10! + 2, 10! + 3, \dots, 10! + 10$$

in na splošno za niz n zaporednih sestavljenih števil

$$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1).$$

Ali je po ugotovitvi, da je med zaporednima prašteviloma lahko poljubno velika "razpoka", sploh še vredno ugotavljati porazdeljenost praštevil? Pokazali bomo, da vendarle veljajo določene zakonitosti. V ta namen definirajmo aritmetično funkcijo $\pi(x)$, katere vrednost naj bo število praštevil, ki so manjša ali enaka številu x . Očitno je $\pi(100) = 25$ in $\pi(200) = 46$. Zakonitosti pa se pokažejo šele takrat, ko zberemo zelo veliko podatkov. Zato si pogledjmo tabelo vrednosti funkcije π za nekatere x do vrednosti 10^{10} , relativne frekvence praštevil in njihove obratne vrednosti.

x	$\pi(x)$	$\frac{\pi(x)}{x}$	$r(x) = \frac{x}{\pi(x)}$
10	4	0,40000000	2,50000000
100	25	0,25000000	4,00000000
1 000	168	0,16800000	5,95238095
10 000	1 229	0,12290000	8,13669650
100 000	9 592	0,09592000	10,4253545
1 000 000	78 498	0,07849800	12,7391781
10 000 000	664 579	0,06645790	15,0471201
100 000 000	5 761 455	0,05761455	17,3567267
1 000 000 000	50 847 534	0,05084753	19,6666387
10 000 000 000	455 052 512	0,04550525	21,9754863

V tabeli je posebej pomemben tretji stolpec, ki nam kaže "gostoto" praštevil.

Vzemimo prvih milijon naravnih števil; med njimi je 78 498 oziroma 7,85 % praštevil, večina (okrog 92 %) pa je sestavljenih števil. Iz tabele lahko razberemo, da je ta odstotek pri prvih 10 milijonih naravnih števil še manjši; funkcija $\frac{\pi(x)}{x}$ je očitno padajoča. V tabeli pa je še četrti stolpec in izkazalo se bo, da je funkcija r zelo pomembna. Matematiki niso obupali pri iskanju zakonitosti v napisani tabeli, čeprav je na prvi pogled vsak napor že vnaprej obsojen na neuspeh. Pot do rešitve se je nepričakovano pokazala preko števila e in naravnega logaritma.

Da bi videli razvoj reševanja problema, naredimo še eno tabelo.

x	$r(x) = \frac{x}{\pi(x)}$	$e^{r(x)}$
10	2,50000000	12,182494
100	4,00000000	54,598150
1 000	5,95238095	384,668150
10 000	8,13669650	3 417,609127
100 000	10,4253545	33 703,4168
1 000 000	12,7391781	340 843,2932
10 000 000	15,0471201	3 426 740,583
100 000 000	17,3567267	34 508 861,36
1 000 000 000	19,6666387	347 626 331,2
10 000 000 000	21,9754863	3 498 101 746,

Desni stolpec v tabeli sicer ne kaže neke popolne zakonitosti, vendar se takoj vidi, da je vsako število nižje v stolpcu približno desekratnik predhodnega višje ležečega. Opaženo dejstvo bi lahko opisali z izrazom

$$e^{r(10x)} \approx 10 e^{r(x)} \quad \text{za velike } x \quad (1)$$

ali z besedami: če spremenljivko povečamo od x na $10x$, je vrednost funkcije $e^{r(10x)}$ pri povečani neodvisni spremenljivki x približno desekratnik vrednosti funkcije $e^{r(x)}$ pri prvotni spremenljivki x . V tem spoznanju je pot do rešitve. Zakonitost sicer ne velja za vsako funkcijo $r(x)$, če pa najdemo tako, da zanjo enakost velja, smo že blizu rešitve.

Izkazalo se je, da je iskana funkcija ravno logaritemska funkcija z osnovo e . Potrebovali bomo identiteti

$$\ln(e^x) = x \quad \text{in} \quad e^{\ln x} = x.$$

V (1) nadomestimo funkcijo $r(x)$ z logaritemsko funkcijo $\ln x$

$$e^{\ln(10x)} = 10 e^{\ln x}$$

in primerjajmo oba izraza

$$e^{r(10x)} \approx 10 e^{r(x)}, \quad e^{\ln(10x)} = 10 e^{\ln x}.$$

Takoj lahko ugotovimo, da sta enakosti približno enakovredni za dovolj velike vrednosti neodvisne spremenljivke x . Ta ugotovitev pa je ena od oblik znamenitega prašteviskega izreka:

Razmerje med številom praštevil, manjših ali enakih naravnemu številu n , in tem naravnim številom n , oziroma gostota praštevil v množici naravnih števil, je za velike n približno enaka obratni vrednosti naravnega logaritma števila n .

S tem seveda slavnega izreka nismo dokazali, smo pa na dokaj enostaven način našli kar natančno aproksimacijsko funkcijo, saj se število $\frac{1}{\ln 10\,000\,000\,000}$ od prave vrednosti funkcije $\frac{\pi(10\,000\,000\,000)}{10\,000\,000\,000}$ razlikuje le za 0,002.

Najbolj nenavadno za to "izpeljavo" pa je, da so našli med zapiski 15-letnega Carla Fridericha Gaussa iz leta 1792 naslednji zapis:

$$\text{praštevila pod } a (= \infty) \frac{a}{\ln a}.$$

Če besedilo "praštevila pod a " nadomestimo z ekvivalentno vrednostjo $\pi(a)$, znak $\ln a$ z $\ln a$ in $(= \infty)$ z besedilom za velike a , dobimo ravno

$$\pi(a) \approx \frac{a}{\ln a} \quad \text{za velike } a,$$

z deljenjem z a pa obliko praštevilskega izreka, ki smo jo "izpeljali". Očitno je mladostnik Gauss že razumel to lastnost praštevil, zakaj pa je ni razvil in tudi ne dokazal, najverjetneje ne bomo nikoli izvedeli.

Drugi resni poskus, da bi ugotovil število praštevil, manjših od danega naravnega števila n , je s študijem aritmetične funkcije $\pi(n)$ naredil francoski matematik Legendre leta 1808. Pri delu si je pomagal z Eratostenovim sitom. Kasneje so se s tem problemom močno ukvarjali še Čebišev, Riemann, Mertens in Sylvester. Šele leta 1896 sta praštevilski izrek neodvisno dokazala Jacques Hadamard (1865-1963) in C. J. de la Vallée Poussin (1866-1962). Pri tem sta uporabila Riemannovo zeta funkcijo in dosežke mnogih svojih predhodnikov v analitični teoriji števil.

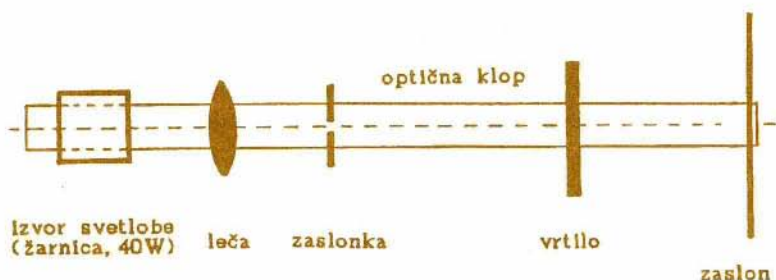
Dolgo časa so bili matematiki prepričani, da se pri dokazovanju tega izreka ne da izogniti analitičnim metodam, zato je bil elementarni dokaz, ki sta ga leta 1949 objavila P. Erdős in A. Selberg, prava senzacija. Alte Selberg je bil zato nagrajen s Fieldsovo medaljo – nagrado, ki je po pomembnosti enakovredna Nobelovi nagradi, Paul Erdős pa je dobil Coleovo nagrado.

Gregor Pavlič

HÁLO, ČUDOVITI NARAVNI POJAV – 2. del

V prvi številki letošnjega Preseka smo obljubili, da bomo ilustrirali nastanek pojavov hála tudi s poskusi v laboratoriju.

Sedaj že vemo, da so cirusni oblaki sestavljeni iz nešteto majhnih ledenih kristalčkov v obliki šeststrane prizme. Ti so praviloma poljubno orientirani, v posebnih primerih pa jih je velik del orientiranih približno v isto smer. Za poskus bi težko ustvarili z oblakom primerljivo število poljubno orientiranih kristalov, zato smo si nalogo zastavili nekoliko drugače. Na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljano smo izdelali demonstracijski model, ki uspešno povzema stanje v naravi. Sestavljen je iz izvora svetlobe, leče, zaslonke, optična klop, vrtila in zaslona (slika 1).



Slika 1. Zaporedje sestavnih delov demonstracijskega modela za prikaz hála.

Prvi del modela poskrbi za vzporedni snop žarkov, osrednji del – vrtilo, ki omogoča vrtenje prizme, pa si podrobneje oglejmo. Sestavljeno je iz treh obročev, vpetih z drsnimi ležaji v nosilni obroč. Da bi imeli obroči čim večje vztrajnostne momente, so narejeni iz medenine. Prizma, ki je izdelana iz pleksi stekla, je vpeta v notranji obroč (slika na naslovni strani).

Obroči poskrbijo, da se lahko prizma vrti okoli glavne osi ter okoli vseh tistih nanjo pravokotnih osi, ki prebadajo središče prizme. Vse kristale v oblaku tako nadomestimo z eno samo vrtečo se prizmo. Med vrtenjem se obrača v vse smeri in s tem spreminja orientacijo glavne osi. Tako po nekem času nadomesti lego vsakega izmed kristalov v oblaku. Slika, ki nastane na zaslonu po dvakratnem lomu žarka skozi tako prizmo, torej ne nastane sočasno, ampak jo žarki narišejo v določenem časovnem intervalu, katerega dolžina je odvisna od hitrosti vrtenja prizme.

Zavrtno prizmo okoli dveh pravokotnih osi hkrati. Po nekem času zavzame dovolj leg, da zariše nekaj pojavov hála. Prizma ob takem vrtenju

lahko zavzame katerokoli lego in bi praviloma po zelo dolgem času zarisala vse možne oblike hála. Ker pojavi ne nastanejo sočasno, jih v enotno sliko sešteje fotografski aparat, ki smo mu čas osvetlitve filma nastavili na približno 4 sekunde. Na fotografiji (slika 2 na zadnji strani ovitka, kjer najdete tudi ostale slike iz tega članka) se lepo vidita sosonci, delno mali háló in na levi strani zgornji ter spodnji Lowitzov lok.

V nadaljevanju zavrtimo prizmo okoli vnaprej določenih osi glede na to, katerega od pojavov hála želimo izzvati. Lahko bi rekli, da na ta način zajamemo iz oblaka vse za določeni pojav odgovorne kristalčke.

Za ponazoritev malega oz. 22-stopinjskega hála se mora prizma vrteti okoli ene izmed osi, ki je pravokotna na glavno os. Ta pa mora biti pravokotna na smer vpadnega žarka. Tako prizma ponazarja orientacije vseh tistih kristalčkov v oblaku, ki imajo glavno os orientirano vodoravno. Ob takem vrtenju prizme nastane na zaslonu pojav, ki ga kaže slika 3. Notranji krog je mali háló, zunanji pa je posledica nesimetrične namestitve prizme v obroč in za pojav ni pomemben.

Na naslednji fotografiji si pogledjmo nastanek sosonc. Spomnimo se: sosonci povzročajo kristalčki, ki imajo glavno os navpično. Za nastanek slike 4, kjer sta sosonci na obodu malega hála, se je torej prizma vrtela okoli glavne osi, stoječe pravokotno na vpadni žarek. V naravi bi bilo tedaj sonce na horizontu. Nato glavno os nagnemo za 15° proti žarku. Na sliki 5 opazimo, da sta sedaj pegi nekoliko dvignjeni in bolj oddaljeni od središča, kot v prejšnjem primeru. Z nagnjenostjo glavne osi glede na vpadni žarek namreč ponazorimo višino sonca nad horizontom, ki bi bila sedaj 15° . Obe sliki se torej lepo ujemata s teorijo, ki smo jo obravnavali v prejšnjem članku o hálu. Podobno dobimo tudi zadnji fotografiji spodnjega in zgornjega Lowitzovega loka (sliki 6 in 7). Gibanje prizme omejimo le na vrtenje, ki prizmo postavlja v lege kristalčkov, potrebnih za nastanek teh dveh lokov. Spet se spomnimo na razlago v prvi številki Preseka: Lowitzovi loki nastanejo, ko so kristalčki usmerjeni pretežno tako, da imajo glavno os navpično, toda pri tem nihajo okrog osi, vzporedne osnovni ploskvi kristalčka.

Poskus lahko zasnujemo tudi na drugačen način, nekoliko bližji dejanskemu stanju v naravi. V prozorno posodo z vodo vstavimo veliko število prozornih prizmic z isto gostoto kot voda. Posodo postavimo pred zaslon in skozi jo posvetimo s snopom vzporednih žarkov. Vsebinsko posode nato rahlo mešamo, da se lebdeče prizmice vrtijo in tako spreminjajo smer glavne osi. Na ta način bi na zaslonu dobili kar nekaj pojavov hála. Bralci naj premislijo, v čem bi bila pomembna razlika med prejšnjim in pravkar opisanim poskusom.

Matej Rovšek

RAZPIS NA TEMO 1997 s str. 18 – ODGOVORI

Odziv na nalogo je bil izjemen in, kar nas še posebej veseli, od bralcev vseh starostnih stopenj. Dobili smo toliko zapisov števil med 0 in 128 s števili 1, 9, 9, 7 (uporabljenih v tem vrstnem redu), da bi samo z njimi lahko napolnili več kot dve številki naše revije.

Prvi (popolni) seznam, ki sta nam ga poslala najhitrejša reševalca, smo objavili v prejšnji številki Preseka.

Od ostalih reševalcev sta še Jakob Andrejčič in Matjaž Konvalinka našla zapise za vsa števila. Drugim so največ preglavic delala števila 108, 109, 111, 114, 115, 117. Dva od reševalcev sta si za iskanje zapisov pripravila računalniška programa in sta zato ostala zunaj konkurence, kar sta tudi sama predlagala. Povejmo pa, da je Drago Bokal s svojim programom našel kar 1810 zapisov (čeprav mu štiri števila manjkajo), od tega 133 zapisov samo za število 1.

Poleg pomanjkanja prostora je tudi to vplivalo na našo odločitev, da objavimo za posamezno število največ štiri zapise (vključno z že objavljenimi v prejšnji številki). Prednost pri avtorstvu smo določili v skladu z razpisom. Tako je nastal naslednji seznam. Imena reševalcev si slede v vrstnem redu, v kakršnem smo dobivali njihovo pošto. Vsakemu imenu smo pripisali še število **pravilno zapisanih števil**, ki nam jih je reševalec poslal, ne glede na število zapisov posameznega števila. Upoštevali smo števila od 1 do 127.

Marija Vencelj

Robert Meolic, Murska Sobota (123)
Računalniška rešitev.

Lucija Dolinar, Trgovska akademija, Ljubljana (65)

$$1 = (1 + 9 - 9)^7 = (1 + \sqrt{9} + \sqrt{9}) : 7$$

$$2 = 1 - \sqrt{9} - \sqrt{9} + 7$$

$$3 = 1^9 + 9 - 7 = \sqrt{19 - \sqrt{9} - 7}$$

$$4 = \sqrt{1 + \sqrt{9} + 9} - 7$$

$$5 = \sqrt{1 \cdot 9 + 9 + 7} = \sqrt{1 \cdot (9 + 9 + 7)}$$

$$7 = (1 + \sqrt{9} - \sqrt{9}) \cdot 7 = 1 \cdot 9 - (9 - 7)$$

$$8 = \sqrt{1^9 + 9 \cdot 7}$$

$$9 = -1 + 9 : \sqrt{9} + 7 = 19 - \sqrt{9} - 7$$

$$10 = 1 \cdot 9 : \sqrt{9} + 7$$

$$11 = 1 + 9 : \sqrt{9} + 7 = 1^9 + \sqrt{9} + 7$$

$$12 = 1 + 9 + 9 - 7$$

$$13 = \sqrt{1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + 7}$$

$$14 = 1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} + 7$$

$$15 = 19 + \sqrt{9} - 7$$

$$16 = (-1 + 9) \cdot (9 - 7) = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + 7$$

$$17 = 1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + 7$$

$$18 = -1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9} \cdot 7 = 1 \cdot 9 \cdot (9 - 7)$$

$$19 = 1 + 9 \cdot (9 - 7)$$

$$20 = -1 + 9 : \sqrt{9} \cdot 7$$

$$21 = 1 \cdot 9 : \sqrt{9} \cdot 7$$

$$22 = 1 + 9 : \sqrt{9} \cdot 7$$

$$23 = 19 - \sqrt{9} + 7$$

$$24 = 1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9} \cdot 7 = -1 + 9 + 9 + 7$$

$$25 = 1 \cdot 9 + 9 + 7 = 1 \cdot (9 + 9 + 7)$$

$$28 = (1 + 9 : \sqrt{9}) \cdot 7$$

$$49 = (1 + \sqrt{9} + \sqrt{9}) \cdot 7$$

$$63 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot 7$$

$$64 = 1^9 + 9 \cdot 7$$

$$70 = (1^9 + 9) \cdot 7$$

$$73 = 1 + 9 + 9 \cdot 7$$

$$77 = (-1 + \sqrt{9} + 9) \cdot 7$$

$$87 = -1 - 9 + 97$$

$$93 = -1 - \sqrt{9} + 97$$

$$99 = \sqrt{1 + \sqrt{9} + 97}$$

$$105 = -1 + 9 + 97$$

$$106 = 1 \cdot 9 + 97$$

Jakob Andrejčič, Novo mesto (vse)

$$\begin{aligned}
2 &= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} - 7 \\
3 &= 19 - 9 - 7 \\
13 &= 1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9} + 7 \\
15 &= -1 + \sqrt{9} \cdot 9 + 7 \\
17 &= -1 + 9 \cdot (9 - 7) \\
20 &= (1 + 9) \cdot (9 - 7) \\
21 &= 19 + 9 - 7 \\
22 &= (1 + \sqrt{9})! - 9 + 7 \\
28 &= -1 + \sqrt{9}! \cdot \sqrt{9}! - 7 \\
29 &= 19 + \sqrt{9} + 7 \\
32 &= -1 - 9 + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
33 &= -1 + 9 \cdot \sqrt{9} + 7 \\
34 &= 1 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} + 7 \\
35 &= 19 + 9 + 7 \\
36 &= -1 \cdot \sqrt{9}! + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
37 &= 1 - \sqrt{9}! + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
38 &= 19 \cdot (9 - 7) \\
39 &= -1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
40 &= 19 + \sqrt{9} \cdot 7 \\
42 &= 1 \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9}) \cdot 7 \\
43 &= 1 + (\sqrt{9} + \sqrt{9}) \cdot 7 \\
44 &= -1 + \sqrt{9} + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
45 &= 1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
47 &= -1 + \sqrt{9}! + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
48 &= 1 \cdot \sqrt{9}! + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
56 &= -1 - \sqrt{9}! + 9 \cdot 7 \\
57 &= -1 \cdot \sqrt{9}! + 9 \cdot 7 \\
61 &= 1 \cdot 9 \cdot \sqrt{9}! + 7 \\
62 &= 1 + 9 \cdot \sqrt{9}! + 7 \\
65 &= (1 + \sqrt{9})! \cdot \sqrt{9} - 7 \\
71 &= -1 + \sqrt{9} \cdot (-\sqrt{9} + 7)! \\
72 &= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (-\sqrt{9} \cdot 7)! \\
77 &= (-1 + 9 + \sqrt{9}) \cdot 7 \\
82 &= 1 + 9^9 - 7 \\
83 &= -1 + (\sqrt{9} + 9) \cdot 7 \\
84 &= (1 \cdot \sqrt{9} + 9) \cdot 7 \\
85 &= 1 + (\sqrt{9} + 9) \cdot 7 \\
86 &= -1 - 9 - 9 + 7!! \\
90 &= -1 - \sqrt{9}! + 97 \\
96 &= 1 \cdot \sqrt{9}! \cdot (9 + 7) \\
98 &= (-1 + \sqrt{9}! + 9) \cdot 7 \\
100 &= 1 \cdot \sqrt{9} + 97 \\
104 &= 1 + \sqrt{9}! + 97 \\
108 &= 1 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} + 7!! \\
109 &= \sqrt{19 - \sqrt{9} + 7!!} \\
110 &= \sqrt{19 + \sqrt{9}! + 7!!} \\
112 &= (19 - \sqrt{9}) \cdot 7 \\
113 &= -1 + \sqrt{9}! + \sqrt{9} + 7!! \\
114 &= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + 7!!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
115 &= 1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + 7!! \\
116 &= -1 + \sqrt{9}! + \sqrt{9}! + 7!! \\
118 &= 1 + 9 + \sqrt{9} + 7!! \\
122 &= -1 + 9 + 9 + 7!! \\
124 &= 1 + 9 + 9 + 7!! \\
126 &= (1 \cdot 9 + 9) \cdot 7 \\
127 &= -1 + (\sqrt{9}! : \sqrt{9})^7
\end{aligned}$$

Vesna Jere, Trgovska akademija, Ljubljana (24)

$$\begin{aligned}
5 &= (1 + \sqrt{9}) \cdot \sqrt{9} - 7 \\
7 &= (1 + 9 - 9) \cdot 7 \\
16 &= (1 - 9) \cdot (-9 + 7) \\
21 &= 1 + \sqrt{9} \cdot 9 - 7 \\
23 &= (1 + 9) \cdot \sqrt{9} - 7 \\
32 &= (1 - \sqrt{9}) \cdot (-9 - 7) \\
34 &= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot 9 + 7 \\
35 &= 1 + \sqrt{9} \cdot 9 + 7 \\
49 &= (1 - \sqrt{9} + 9) \cdot 7 \\
57 &= (1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9}} - 7 \\
91 &= (1 + \sqrt{9} + 9) \cdot 7
\end{aligned}$$

Aleš Janko, Ravne (117)

$$\begin{aligned}
2 &= 1 + \sqrt{9} - 9 + 7 \\
4 &= -1 + \sqrt{9} + 9 - 7 \\
11 &= -1 - 9 + \sqrt{9} \cdot 7 \\
13 &= 1 + \sqrt{9} \cdot (-\sqrt{9} + 7) \\
15 &= -1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} + 7 \\
17 &= 19 - 9 + 7 \\
18 &= -1 + \sqrt{9} + 9 + 7 \\
19 &= -1 + \sqrt{9}^{\sqrt{9}} - 7 \\
20 &= 1 + \sqrt{9} + 9 + 7 \\
28 &= 1 + \sqrt{9}! + \sqrt{9} \cdot 7 \\
32 &= 19 + \sqrt{9}! + 7 \\
41 &= -1^9 + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
42 &= 1 \cdot (-\sqrt{9} + 9) \cdot 7 \\
43 &= 1^9 + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
46 &= -1 + 9 \cdot \sqrt{9}! - 7 \\
48 &= 1 + 9 \cdot \sqrt{9}! - 7 \\
50 &= -1 + 9 + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
56 &= (1 + \sqrt{9}!) \cdot 9 - 7 \\
60 &= -1 + 9 \cdot \sqrt{9}! + 7 \\
61 &= 19 + \sqrt{9}! \cdot 7 \\
65 &= -1 + \sqrt{9} + 9 \cdot 7 \\
67 &= (1 + 9) \cdot \sqrt{9}! + 7 \\
70 &= (1 + \sqrt{9}!) \cdot 9 + 7 \\
80 &= -1 + 9^9 - 7 \\
83 &= -1 + (9 + \sqrt{9}) \cdot 7 \\
84 &= (-1 + \sqrt{9}) \cdot (\sqrt{9}! \cdot 7) \\
85 &= 1 + (9 + \sqrt{9}) \cdot 7 \\
88 &= -1 \cdot 9 + 97
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 89 &= 1 - 9 + 97 \\
 91 &= -1 \cdot \sqrt{9!} + 97 \\
 92 &= 1 - \sqrt{9!} + 97 \\
 107 &= 1 + 9 + 97 \\
 113 &= (-1 - \sqrt{9} + 9)! - 7 \\
 118 &= (-1 + \sqrt{9!})! - 9 + 7 \\
 119 &= -1 + (\sqrt{9} + 9 - 7)! \\
 120 &= 1 \cdot (\sqrt{9} + 9 - 7)! \\
 121 &= 19 \cdot \sqrt{9!} + 7 \\
 125 &= -1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9!} \cdot 7 \\
 126 &= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9!} \cdot 7 \\
 127 &= (-1 - \sqrt{9} + 9)! + 7
 \end{aligned}$$

David Lednik, Mozirje (10)

$$\begin{aligned}
 6 &= 1 + \sqrt{9} + 9 - 7 \\
 70 &= (19 - 9) \cdot 7
 \end{aligned}$$

Simon Koren, Maribor (20)

$$\begin{aligned}
 6 &= 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (9 - 7) \\
 14 &= (1 + 9 : 9) \cdot 7 \\
 19 &= -1 + 9 \cdot \sqrt{9} - 7
 \end{aligned}$$

Stanka Šarc, Trgovska akademija, Ljubljana (31)

$$\begin{aligned}
 8 &= 1 : 9 \cdot 9 + 7 \\
 10 &= 1^9 \cdot \sqrt{9} + 7
 \end{aligned}$$

Matic Svršina, Trgovska akademija, Ljubljana (79)

$$\begin{aligned}
 8 &= 1 \cdot 9 : 9 + 7 \\
 25 &= (-1 + \sqrt{9}) \cdot 9 + 7 \\
 31 &= (-1 + 9) \cdot \sqrt{9} + 7 \\
 33 &= -1 + \sqrt{9} \cdot 9 + 7 \\
 36 &= -1 \cdot 9 \cdot (\sqrt{9} - 7) \\
 40 &= (-1 - 9) \cdot (\sqrt{9} - 7) \\
 42 &= (1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9}) \cdot 7 \\
 56 &= (-1^9 + 9) \cdot 7 \\
 62 &= -1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot 7 \\
 64 &= 1 + \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot 7 \\
 65 &= (1 - 9) \cdot (-9) - 7 \\
 79 &= (1 - 9) \cdot (-9) + 7 \\
 84 &= (-1 - \sqrt{9}) \cdot (-\sqrt{9}) \cdot 7 \\
 100 &= (1 + 9) \cdot (\sqrt{9} + 7)
 \end{aligned}$$

Mojca Miklavc, OŠ Srečka Kosovelja, Sežana (120)

$$\begin{aligned}
 4 &= -1 \cdot 9 : \sqrt{9} + 7 \\
 6 &= -1 \cdot 9 : 9 + 7 \\
 14 &= 1 + 9 + \sqrt{9} + 7 \\
 23 &= 19 + \sqrt{9} + 7 \\
 29 &= -1 + 9 + \sqrt{9} \cdot 7 \\
 34 &= 1 - 9 + \sqrt{9!} \cdot 7 \\
 35 &= -1 + 9 \cdot \sqrt{9} + 7 \\
 36 &= 1 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} + 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 37 &= 1 + 9 \cdot \sqrt{9} + 7 \\
 38 &= (-1 + \sqrt{9!}) \cdot 9 - 7 \\
 44 &= 1 + \sqrt{9!} \cdot \sqrt{9!} + 7 \\
 47 &= 1 \cdot 9 \cdot \sqrt{9!} - 7 \\
 49 &= (1 + \sqrt{9!}) \cdot \sqrt{9!} + 7 \\
 50 &= (-1 + \sqrt{9!}) \cdot (\sqrt{9} + 7) \\
 52 &= (-1 + \sqrt{9!}) \cdot 9 + 7 \\
 76 &= 19 \cdot \sqrt{9} + 7 \\
 78 &= (-1 + \sqrt{9!})! - \sqrt{9!} \cdot 7 \\
 95 &= -1 + \sqrt{9!} \cdot (9 + 7) \\
 97 &= 1^9 \cdot 97 \\
 99 &= (-1 + \sqrt{9!})! - \sqrt{9} \cdot 7 \\
 110 &= (-1 + \sqrt{9!})! - (\sqrt{9} + 7) \\
 112 &= (1 + \sqrt{9!} + 9) \cdot 7 \\
 113 &= (-1 + 9 - \sqrt{9})! - 7 \\
 120 &= (-1 + \sqrt{9!}) \cdot (-\sqrt{9} + 7)! \\
 121 &= (-1 + \sqrt{9!})! - \sqrt{9!} + 7
 \end{aligned}$$

Matevž Strgar, Trgovska akademija, Ljubljana (65)

$$12 = -1 \cdot 9 + \sqrt{9} \cdot 7$$

4.e razred, Trgovska akademija, Ljubljana (85)

$$\begin{aligned}
 12 &= -1 + 9 + \sqrt{9} + 7 \\
 27 &= \sqrt{1 : 9 \cdot 9^7} \\
 54 &= 1 \cdot (-9) + 9 \cdot 7 \\
 92 &= 1 \cdot (99 - 7) \\
 104 &= (-1 + 9\sqrt{9}) : 7 \\
 106 &= 1 \cdot (99 + 7)
 \end{aligned}$$

Tatjana Špehar, Črnomelj (113)

$$\begin{aligned}
 10 &= 1 : \sqrt{9} \cdot 9 + 7 \\
 22 &= 1 - \sqrt{9} + (-\sqrt{9} + 7)! \\
 27 &= 1 \cdot \sqrt{9} + (-\sqrt{9} + 7)! \\
 33 &= 1 \cdot 9 + (-\sqrt{9} + 7)! \\
 37 &= (1 + \sqrt{9})! + \sqrt{9!} + 7 \\
 47 &= 1 \cdot \sqrt{9!} \cdot 9 - 7 \\
 48 &= (-1 + \sqrt{9}) \cdot (-\sqrt{9} + 7)! \\
 91 &= (1 + 9 + \sqrt{9}) \cdot 7 \\
 127 &= (-1 + \sqrt{9} + \sqrt{9})! + 7
 \end{aligned}$$

Maša Žlajpah, Trgovska akademija, Ljubljana (83)

$$\begin{aligned}
 40 &= (1 + 9) \cdot (-\sqrt{9} + 7) \\
 41 &= -1 + (9 - \sqrt{9}) \cdot 7 \\
 43 &= 1 + (9 - \sqrt{9}) \cdot 7 \\
 89 &= -1 + 9 \cdot (\sqrt{9} + 7)
 \end{aligned}$$

Nejc Ropret, Gimnazija Jesenice (95)

$$\begin{aligned}
 64 &= (1 + \sqrt{9}) \cdot (9 + 7) \\
 126 &= (-1 + \sqrt{9}) \cdot 9 \cdot 7
 \end{aligned}$$

Andreja Petrun, OŠ Ribnica na Pohorju (76)

Vse njene zapise najdemo med zapisi prejšnjih reševalcev.

Natan Osterman, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana (117)

$$46 = -1 + \sqrt{9! \cdot 9} - 7$$

$$57 = (-1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9!}} - 7$$

$$63 = 1 \cdot \sqrt{9 \cdot 9} \cdot 7$$

$$71 = (-1 + \sqrt{9})^{\sqrt{9!}} + 7$$

$$77 = -1 + \sqrt{9! \cdot (\sqrt{9!} + 7)}$$

$$78 = 1 \cdot \sqrt{9! \cdot (\sqrt{9!} + 7)}$$

$$79 = 1 + \sqrt{9! \cdot (\sqrt{9!} + 7)}$$

$$87 = 1 \cdot (\sqrt{9!})! : 9 + 7$$

$$88 = 1 + (\sqrt{9!})! : 9 + 7$$

$$107 = 19 \cdot \sqrt{9!} - 7$$

$$112 = (1 + \sqrt{9!}) \cdot (9 + 7)$$

$$116 = -1 + 9 \cdot (\sqrt{9!} + 7)$$

$$118 = 1 + 9 \cdot (\sqrt{9!} + 7)$$

$$120 = (-1 + \sqrt{9!}) \cdot (\sqrt{9!} + 7)!$$

$$124 = (-1 + \sqrt{9!})! + \sqrt{9 + 7}$$

Anja Černe, OŠ Frana Erjavca, Nova Gorica (63)

$$31 = 1 + \sqrt{9 \cdot (\sqrt{9} + 7)}$$

$$98 = 1^9 + 97$$

Sebastjan Rupnik, OŠ Frana Erjavca, Nova Gorica (95)

$$81 = (1 \cdot 9)^{9-7}$$

Miha Mihelič, OŠ Frana Erjavca, Nova Gorica (44)

$$30 = 1 \cdot \sqrt{9 \cdot (\sqrt{9} + 7)}$$

Samo Juretič, Srednja šola Nova Gorica (122)

$$39 = 1 \cdot \sqrt{9 \cdot (\sqrt{9!} + 7)}$$

$$52 = (1 + \sqrt{9}) \cdot (\sqrt{9!} + 7)$$

$$62 = -1 + \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 7}$$

$$63 = \sqrt{1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7}$$

$$66 = -(1 \cdot \sqrt{9})! + 9! : 7!$$

$$68 = -1 - \sqrt{9} + 9! : 7!$$

$$69 = -1 \cdot \sqrt{9} + 9! : 7!$$

$$71 = -1 + \sqrt{9 \cdot 9!} : 7!$$

$$81 = 1 \cdot 9 + 9! : 7!$$

$$103 = (1 \cdot \sqrt{9})! + 97$$

$$114 = 1 + (\sqrt{9!})! : \sqrt{9!} - 7$$

Mojca Kozole, Senovo (28)

Velja isto kot za Andrejo Petrun.

Matjaž Konvalinka, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana (vse)

$$27 = 1 \cdot \sqrt{9}^{\sqrt{9!}} = -1 \cdot 9 + \left(\frac{9}{7}\right)$$

$$29 = -1 + \sqrt{9 \cdot (\sqrt{9} + 7)}$$

$$45 = 1 \cdot 9 + \left(\frac{9}{7}\right) = -1 + (\sqrt{9!})! - 9 + 7$$

$$46 = 1 \cdot (\sqrt{9!})! - 9 + 7$$

$$51 = 1 \cdot (9 + \sqrt{9!} \cdot 7)$$

$$79 = (1 + \sqrt{9})! \cdot \sqrt{9} + 7$$

$$102 = 1 \cdot ((\sqrt{9!})! - \sqrt{9!}) : 7$$

$$103 = 1 + ((\sqrt{9!})! - \sqrt{9!}) : 7$$

$$104 = (-1 + (\sqrt{9!})! + 9) : 7$$

$$111 = (-1 + \sqrt{9!})! - 9!_{[7]} = (-1 + \sqrt{9!})! - 9!! : 7!!$$

$$114 = (-1 + \sqrt{9!})! - \sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)} = 19 \cdot (\sqrt{9!_{[7]}})!$$

$$123 = \sqrt{1 \cdot 9 + \sqrt{9} \cdot 7!}$$

Emil Polajnar, Cerklje (56)

$$9 = 1 + (9 - 9)! + 7$$

$$62 = 1 + \sqrt{9! \cdot 9} + 7$$

$$80 = -1 + 9 + 9! : 7!$$

$$87 = (1 + \sqrt{9})! + 9 \cdot 7$$

Gec Tadej, FMF Ljubljana (122)

$$76 = 1 + \sqrt{9} + 9! : 7!$$

$$78 = 1 \cdot \sqrt{9!} + 9! : 7!$$

$$82 = 1 + 9 + 9! : 7!$$

$$97 = (1 + 9) \cdot 9 \cdot 7$$

$$119 = (-1 + \sqrt{9!})! + \sqrt{9!} - 7$$

Drago Bokal, FMF Ljubljana (123)
Računalniška rešitev.

Katja Hafner, Prva gimnazija Maribor (116)

$$54 = 1 \cdot (-9 + 9 \cdot 7)$$

$$60 = 1 \cdot \sqrt{9!} \cdot (\sqrt{9} + 7)$$

$$121 = 1 + (9 + \sqrt{9} - 7)!$$

Že po končanem urejanju te številke smo prejeli še nekaj odgovorov. Navajamo le imena reševalcev in število pravilno zapisanih števil:

Aleš Jelen, Gimnazija Šentvid, Ljubljana (121)

Drago Kolar, Gimnazija in ekonomska šola Brežice (91)

Sebastjan Zamuda, FMF Ljubljana (121)

Seznam uredil Matjaž Vencelj

POSPLOŠENA FIBONACCIJEVA ZAPOREDJA

Gotovo poznate Fibonaccijevo zaporedje. Njegovi začetni členi so 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Pravijo, da je nanj prvi naletel Leonardo (Fibonacci) iz Pise (1180?–1250), ko je opazoval spreminjanje števila zajcev. Naj bo dovolj govoric. Bolj natančno to zaporedje opišemo takole. Začetna člena f_1 in f_2 sta enaka ena: $f_1 = 1$ in $f_2 = 1$; n -ti člen zaporedja f_n , kjer je $n > 2$, pa je enak vsoti dveh prejšnjih členov: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Definiciji, kakršna je pravkar opisana, pravimo *rekurzivna*. Pri njej naslednji člen izračunamo iz nekaj prejšnjih.

Če ohranimo rekurzivno zvezo, začetna člena pa poljubno spremenimo, dobimo *posplošeno Fibonaccijevo zaporedje*. Za začetna člena a_1 in a_2 torej vzamemo poljubni števili a in b : $a_1 = a$ in $a_2 = b$; naslednji členi zaporedja a_n pa so kot prej enaki vsoti dveh prejšnjih členov: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Za $a = 1$ in $b = 4$ tako dobimo zaporedje z začetnimi členi 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, ...

Zapišimo prvih nekaj členov posplošenega Fibonaccijevega zaporedja: $a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, 8a+13b, \dots$. Hitro opazimo, da so koeficienti pred začetnima členoma a in b ravno členi običajnega Fibonaccijevega zaporedja. To seveda ni naključje. Z matematično indukcijo lahko dokažemo, da za $n \geq 3$ velja

$$a_n = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b.$$

Sedaj pa je že čas, da si zastavimo nekaj vprašanj. Pred časom je gospod Kukrika v prilogi Programer revije Monitor spraševal po tistih posplošenih Fibonaccijevih zaporedjih s pozitivnima začetnima členoma $a, b > 0$, ki vsebujejo število 1000000 in imajo pri tem čim manjšo vsoto $a + b$ obeh začetnih členov.

Oglejmo si nalogo nekoliko natančneje. Naprej bomo pokazali, da naloga v zgornji obliki pravzaprav nima prave rešitve, saj lahko poiščemo posplošena Fibonaccijeva zaporedja, ki vsebujejo število 1000000, pri katerih je vsota $a + b$ poljubno majhna. Takole sklepamo. Če naj število 1000000 nastopi v zaporedju, mora za neko naravno število n veljati

$$1000000 = a_n = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b.$$

Zaradi lažjega računanja vzemimo $a = b$. Potem je

$$1000000 = f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot a = f_n \cdot a.$$

Začetna člena $a = b = \frac{1000000}{f_n}$ torej rešita nalogo. Ker pa Fibonaccijeva števila postanejo z rastočim n poljubno velika, lahko naredimo vsoto $a + b$ poljubno majhno.

Pogoje v nalogi moramo torej nekoliko zaostriti. Zahtevajmo še, da sta začetna člena a in b naravni števili. Naloga ima potem gotovo rešitev, saj so možne vrednosti za a in b le števila med 1 in 999999. Pregledati moramo torej le končno mnogo možnosti. Ker pa je teh možnosti vendarle kar precej, preproste analitične rešitve pa ni pri roki, si bomo pri reševanju pomagali z računalnikom. Najprej opazimo, da iz dveh zaporednih členov zaporedja lahko izračunamo vse prejšnje člene. Če torej izberemo število, ki je v iskanem zaporedju pred številom 1000000, v programu ga bomo hranili v spremenljivki **prej**, lahko iz njega izračunamo a in b . Ker so kandidati le števila od 1 do 999999, teh pa ni preveč, jih preizkusimo s spodnjim programom. Pri tem člene zaporedja hranimo v spremenljivkah tipa **longint**, saj imajo običajna cela števila premajhen obseg.

```
program posploseni.Fibonacci;
{ Z vzvratnim računanjem poišče začetna člena posplošenega }
{ Fibonaccijevega zaporedja. }
const
  elt = 1000000;                                { dani člen zaporedja }
var
  prej: longint;                                { člen, ki je v zaporedju pred členom elt }
  a1,a2,a3: longint;                            { členi zaporedja: a3=a2+a1 }
  min,amin,bmin,pmin: longint;                 { (trenutno) najboljša rešitev }
begin
  min := elt+1;                                { trenutno najmanjša vsota a+b }
  for prej:=elt-1 downto 1 do begin
    a3 := elt; a2 := prej; a1 := a3-a2;        { izračun začetnih členov zaporedja }
    while a1>0 do begin
      a3 := a2; a2 := a1; a1 := a3-a2;
    end; { while }
    if a2+a3<min then begin                    { nova najboljša rešitev }
      min := a2+a3; amin := a2; bmin := a3; pmin := prej;
    end;
  end; { for }
  writeln('Vsota: ',min:8, ' a = ',amin, ' b = ',bmin, ' (predzadnji člen ',pmin,')');
  readln;
end.
```

Kot rešitev v nekaj sekundah dobimo števili $a = 154$ in $b = 144$ z vsoto 298. Pri teh začetnih členih ima zaporedje naslednje elemente:

154, 144, 298, 442, 740, 1182, 1922, 3104, 5026, 8130, 13156, 21286,
34442, 55728, 90170, 145898, 236068, 381966, 618034, 1000000, ...

Tako, nalogo smo uspešno rešili. Kot neobvezno domačo nalogo pa lahko poskušate ugnati še naslednja problema.

1. Poišči tisti posplošeni Fibonaccijevi zaporedji z nenegativnima začetnima členoma $a, b \geq 0$, ki kot 13. člen vsebujeta število 1996, za kateri je vsota $a + b$
 - a) najmanjša,
 - b) največja.Naj opozorim, da vam pri tej nalogi računalnik ne bo veliko pomagal.
2. Ta naloga je bolj računalniška. Če razumete gornji program, potem vam ga ne bo težko spremeniti tako, da bo rešil v prispevku obravnavano nalogo za število 1996 namesto za število 1000000. Če pa se vam zdi to prelahko, potem lahko poskusite nalogo rešiti še za število 19961996.

Martin Juvan

DEDIŠČINA

Premožen mož je svojim številnim otrokom zapustil precejšnje premoženje v zlatnikih. V oporoki je določil, naj najstarejši vzame 100 zlatnikov in desetino ostanka, drugi naj vzame 200 zlatnikov in desetino novega ostanka, tretji 300 zlatnikov in še desetino novega ostanka, četrti 400 zlatnikov in spet desetino nastalega ostanka, itd. Izkazalo se je, da so si otroci na ta način razdelili vse zlatnike in to na enake dele.

- a) Kolikšno premoženje in koliko otrok je mož zapustil?

To nalogo je že pred več kot 200 leti zastavil veliki švicarski matematik Leonhard Euler. Poleg rešitve te naloge poiščite še odgovora na naslednji vprašanji:

- b) Kolikšno je premoženje in koliko je otrok, če vzame k -ti otrok ka enot premoženja in $\frac{1}{n}$ -ti del vsakokratnega ostanka, ter se tudi ta delitev izide na enake deleže. Pri tem je $a > 0$ in $n \in \mathbb{N}$.
- c) Denimo, da bi radi na sličen način, kot je opisan v zgornjem primeru, razdelili bonbone med m otrok. Kolikšna je najmanjša količina bonbonov, ki jo za to potrebujete. Kako boste izbrali vrednosti za a in za n ?

Marija Vencelj

**KATERI SLAVNI MATEMATIK JE TO? –
Rešitev s str. 100**

Iz podatkov sledi, da je a naravno število. Lahko vzamemo, da je $a > 1$, ker leta 0 niso zabeležili smrti nobenega velikega matematika. Mož, po katerem sprašuje naloga, je umrl leta

$$a^3 - a = (a - 1)a(a + 1),$$

kar je produkt treh zaporednih naravnih števil. Tudi letnice s to lastnostjo niso nič bolj pogoste kot popolni kubi. Seznam vseh dosedanjih

6, 24, 60, 120, 210, 336, 504, 720, 990, 1320, 1716

vsebuje eno samo letnico iz zlatega obdobja matematike. Leta 1716 je umrl veliki matematik Gottfried Wilhelm Leibniz, o katerem ste lahko prebrali zapis (in našli zapisano leto smrti) v prejšnji številki Preseka.

Marija Vencelj

**PRAŠTEVILSKÉ VREDNOSTI POLINOMA –
Rešitev s str. 69**

Naj bo n tako naravno število, da ima polinom $p(x) = 3x^2 + 7x + m$ za $x = n - 1$, $x = n$ in $x = n + 1$ praštevilske vrednosti. Števila $p(n - 1)$, $p(n)$ in $p(n + 1)$ dajo pri deljenju s 3 same različne ostanke. Torej je eno od njih deljivo s 3 in enako 3, če naj bo praštevilo. Ker je $p(1) \geq m + 10 > 3$ in je za $x \geq 0$ polinom $p(x)$ naraščajoča funkcija, je lahko vrednost polinoma enaka 3 le pri $x = 0$, odkoder sledi za n edina možnost $n = 1$. Iz $p(0) = 3$ sledi še $m = 3$. Ker sta $p(1) = 13$ in $p(2) = 29$ praštevili, je par $m = 3$ in $n = 1$ tudi res rešitev naloge.

Dušan Murovec

VSE MANJ JE DOBRIH GOSTILN – Rešitev s str. 83

Od gostilne Pri Micki do bifeja Pri pošti je 500 m.

Marija Vencelj

NOVO NAJVEČJE ZNANO PRAŠTEVILO

Prav na začetku tega šolskega leta, natančneje 3. septembra, so našli novo največje znano praštevilo. To je število $2^{1257787} - 1$. Podvig je uspel strokovnjakom pri podjetju Cray Research, kjer izdelujejo ene najzmogljivejših računalnikov na svetu. Zaradi nesoglasij z uredništvom žal ne moremo objaviti vseh 378632 števk tega števila. Pravijo, da bi bil potem Presek preobširen. Poglejmo! Na Presekovo stran bi lahko spravili okoli 3000 števk. Torej bi bil Presek z vsemi objavljenimi števki debel vsaj 125 strani. No ja, res nekoliko preveč. Če v roke vzamemo še meter in izmerimo, da za 10 zapisanih števk porabimo točno 1,5 cm, bi za lepo v vrsto zapisano število potrebovali dobrega pol kilometra oziroma, natančneje, dva milimetra manj kot 568 metrov. Da Presek res ne bo predebel, zapišimo le prvih in zadnjih 30 števk. Te so

412245773621428674725323218466 in 135855267131257188976089366527.

Oglejmo si sedaj 10 največjih do sedaj znanih praštevil, skupaj s številom števk in letom njihovega odkritja:

število	števki	leto
$2^{1257787} - 1$	378632	1996
$2^{859433} - 1$	258716	1994
$2^{756839} - 1$	227832	1992
$391581 \cdot 2^{216193} - 1$	65087	1989
$2^{216091} - 1$	65050	1985
$3 \cdot 2^{157169} + 1$	47314	1995
$9 \cdot 2^{149143} + 1$	44898	1995
$9 \cdot 2^{147073} + 1$	44275	1995
$9 \cdot 2^{145247} + 1$	43725	1995
$2^{132049} - 1$	39751	1983

Vsa ta praštevila spadajo med tako imenovana gigantska praštevila, to je taka praštevila, ki imajo vsaj 10000 števk.

In kako se je z leti spreminjalo največje znano praštevilo:

leto	število	števki
1588	$2^{17} - 1$	6
1588	$2^{19} - 1$	6
1772	$2^{31} - 1$	10
1867	$(2^{59} - 1)/179951$	13
1876	$2^{127} - 1$	39
1951	$(2^{148} + 1)/17$	44

Zadnje od teh praštevil je bilo ugotovljeno s pomočjo mehanskega računalnika, vsa prejšnja praštevila pa so bila izračunana "peš". Še danes je število

$$2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$$

največje brez pripomočkov izračunano praštevilo.

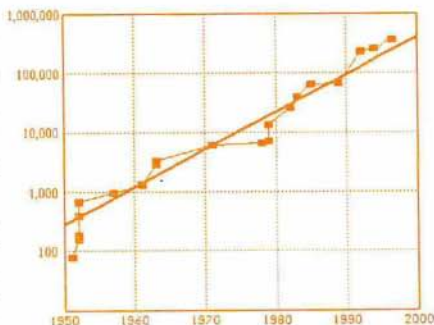
Nato pa so nastopili elektronski računalniki in število števki največjega znanega praštevil je hitro raslo. Zanimivo si je ogledati graf, ki prikazuje, kako se je z leti spreminjalo število števki največjega znanega praštevil:

In kdaj bomo našli prvo praštevilo z več kot milijon števki? Glede na regresijsko premico naj bi se to zgodilo leta 2007. Pa bo to res? Težko je reči, saj je to odvisno tako od razvoja računalnikov kot tudi od morebitnih novih spoznanj v matematiki.

Veliko podatkov o praštevilih lahko najdete tudi na Internetu. Tako sem večino snovi za ta članek našel na naslovu

<http://www.utm.edu/research/primes/>,

kjer si med drugim lahko odgledate tudi vseh 378632 števki novega največjega znanega praštevil.



Matija Lokar

27. FIZIKALNA OLIMPIADA V DEŽELI VIKINGOV

Zgodaj zjutraj v nedeljo, zadnjega dne v juniju, se nas je sedmerica zbrala na Brniku, od koder smo poleteli proti Oslu. Najprej nas je Adria Airways pripeljala do Frankfurta, po razmeroma kratkem čakanju pa smo se skupaj s hrvaško olimpijsko ekipo vkrcali na letalo skandinavske družbe SAS, iz katerega smo izstopili dve uri kasneje na letališču Fornebu v Oslu. Tam nas je že čakal naš vodič Tore, ki nas je pospremil do našega enotedenskega bivališča. Naša spremljevalca (Ciril Dominko in Bojan Golli) so nastanili v več kilometrov oddaljenem dijaškem domu, da bi tako onemogočili vsak poskus predčasnega posredovanja informacij o nalogah s tekmovanja. To jim je še predobro uspelo, saj vse do zadnjega dne nismo zvedeli niti tega, koliko točk smo zbrali na tekmovanju.

Komaj smo odložili kovčke, že so nas povabili na predavanje o aditivnem in subtraktivnem mešanju barv s prizmo in rezo. Po predavanju smo se sestradani napotili na večerjo v jedilnico, kjer smo naleteli na polne mize dobrot. Veselili smo se že kosila (če je že večerja takšna, kakšno mora biti potem šele kosilo...), a smo bili naslednjega dne nekoliko razočarani ob spoznanju, da je na Norveškem glavni obrok večerja. Nad hrano pa se vseeno nismo pritoževali, saj je ustrezala našim okusom, pa tudi zmanjkovalo je ni. Zvečer smo si na televiziji ogledali finale evropskega prvenstva v nogometu med reprezentancama Nemčije in Češke. Štirje iz naše ekipe smo pozdravili zmago Nemčije, peti, ki je češkega rodu, pa seveda ne.

V ponedeljek je bila na sporedu formalna otvoritev fizikalne olimpiade. Lepo oblečeni smo se zbrali v mestni hiši. Tam smo se pričeli seznanjati s tekmovalci iz ostalih držav: z Američani, Argentinci, Makedonci, Bosanci, Čehi... Mnoge smo pozdravili kar v njihovem maternem jeziku, saj smo poleg angleščine, nemščine in seveda slovenščine v ekipi govorili tudi špansko in češko. Med otvoritvijo smo prisluhnili glasbi norveških ljudskih glasbil.

V torek smo se pomerili v reševanju teoretičnih nalog. V petih urah smo morali rešiti tri strukturirane naloge, v katerih smo med drugimi obravnavali prevajanje toplote med dvema kovinskima ploščama, gibanje elektronov v koaksialni žici, izračunali pa naj bi tudi, za koliko je plima višja od oseke. Dva dni kasneje smo se spoprijeli z eksperimentom, v katerem smo s pomočjo nihanja palice merili gravitacijski pospešek v Oslu (na 0,2% natančno!) in magnetni dipolni moment majhnega magnetka, vstavljenega v krajišče palice.

O tem, kako smo se na tekmovanju odrezali, smo zvedeli v soboto na zaključni prireditvi. Slovenci smo, kot ste že seznanjeni, dosegli doslej

največji uspeh. Presenetljiv pa je bil tudi komaj trinajstletni Američan, ki je osvojil zlato medaljo.

Kljub temu, da so imeli organizatorji olimpiade nemalo finančnih težav, so se zelo potrudili in udeležencem pokazali veliko zanimivosti. Niso nas sicer osrečili z ogledom fjordov na zahodni obali Norveške, so pa zato dobro organizirali ogled zanimivosti v Oslu: parka Vigeland, v katerem kar mrgoli kipov; tehničnega muzeja; ogled ladje Fram, ki je sodelovala pri raziskovanju Arktike in Antarktike; narodne galerije; muzeja Edvarda Muncha, najbolj znanega skandinavskega ekspresionističnega slikarja; skakalnice Holmenkollen... Peljali so nas tudi v zabavišni park Tusenfryd in v deželo Vikingov, kjer smo se поблиže seznanili z njihovim vsakdanjim življenjem in odkritji. Pred zaključno prireditvijo smo križarili po Oslofjordu in iz ladij, grajenih v vikinškem slogu, opazovali letala, ki so pristajala na Fornebuju.

Poleg že omenjenega sta bili organizirani še dve predavanji. V enem je profesor Alv Egeland razkril skrivnost polarne sija (aurora borealis) in pokazal veliko čudovitih diapozitivov, ki so jih nekateri navdušeni poslušalci hoteli kar slikati, in to z bliskavico! Drugo predavanje je imel norveški Nobelov nagrajenec za fiziko, Ivar Giaver, ki nam je dal nekaj napotkov, kako priti do te prestižne nagrade.

Za zabavo smo poskrbeli tudi sami: Slovenci smo imeli v ekipi tri kitariste in enega organista, tako da radijskega sprejemnika nismo pogrešali. Večkrat smo se tudi znesli nad nogometno žogo in jo brcali vsepovprek, pri čemer so nam pomagali kolegi iz Bolgarije, Portugalske in Cipra. Še bolj mednarodna zasedba pa je obračunala z žogo za odbojko.

Domov smo se vrnili v nedeljo, sedmega julija. Bili smo zadovoljni tako z uvrstitvijo na tekmovanju kot tudi z gostitelji. Le ena stvar nam ni ugajala: vreme. V Oslu je bilo namreč ves teden oblačno, zelo pogosto pa je tudi deževalo. Potolažili pa smo se že takoj po pristanku na Brniku, ko so nam svojci povedali, da je bilo enako vreme tudi doma.

Klemen Žagar

KOMUTATIVNOST MNOŽENJA

Poišči dvomestno število z naslednjo lastnostjo:

Če ga pomnožimo s številom, ki ima števki v zamenjanem vrstnem redu, je rezultat trimestno število, ki se ne spremeni, če mu zamenjamo vrstni red števk.

Marija Vencelj

NAPIŠITE PESMICO

Več pesmic, s pomočjo katerih si zapomnimo nekaj začetnih števk števila π , je Presek predstavil v svojem osmem letniku leta 1980. Števila črk v zaporednih besedah pesmic, z lepim skupnim imenom Spominčice števila π , pomenijo zaporedne številke v desetiškem zapisu števila π . Tako ima prva beseda 3 črke, druga 1 črko, tretja 4, četrta 1, peta 5 itd.

Tokrat vas vabimo k sestavljanju nekoliko drugačne spominčice.

Začnimo s srednjeveško zgodenco:

Ladja, na kateri se je nahajalo 15 gusarjev in 15 Turkov, je zašla v močan vihar in bila na tem, da potone. Kapitan (seveda gusar) je razložil, da lahko reši ladjo in 15 mož, če drugih 15 mož vržejo v morje. Da bi bilo vse pošteno in prav, je predlagal, naj bi žrtve izbrali z odštevanko. Vseh 30 mož naj bi se postavilo v vrsto, nakar bi petnajstkrat zapored šteli od 1 do 9 in vsakič devetega vrgli v morje. Pri tem štetju naj bi za zadnjim v vrsti vedno sledil prvi v vrsti.

Domenjeno, storjeno! Toda, kako je lahko pri na videz poštenem postopku kapitan rešil vse svoje gusarje, vseh 15 Turkov pa je romalo čez krov?

Preprosto! Mesta, kamor naj v vrsti postavi svoje može, je vnaprej določil s poskušanjem. Na list papirja je narisal 30 črtic in v skladu z odštevanko vsako deveto spremenil v T (Turek). Pri tem je pri štetju moral paziti, da je že dobljene T preskakoval (ker jih ni mogel sproti metati v morje). Tako je dobil naslednji niz:

| | | | T T T T T | | T | | |
 T | T T | | T T T | T T T | T

Vrstni red je torej moral biti takle: 4 gusarji, 5 Turkov, 2 gusarja, 1 Turek, 3 gusarji, 1 Turek, 1 gusar, 2 Turka, 2 gusarja, 3 Turki, 1 gusar, 2 Turka, 2 gusarja, 1 Turek. Seveda gusarski kapitan ni smel pri postavljanju mož v vrsto gledati na listek. Zmotiti se pa tudi ni smel! Zato si je – pesniška duša – v pomoč izmislil naslednjo pesmico v francoščini:

Mort, tu ne falliras pas,

En me livrant le trépas!

Če smo pozorni le na samoglasnike v teh dveh verzih, dobimo zaporedje

o, u, e, a, i, a, a, e, e, i, a, e, e, a.

Priredimo samoglasnikom a, e, i, o, u v tem vrstnem redu zapored števila 1, 2, 3, 4, 5. Potem kapitanova pesmica natanko določa vrstni red števil, v katerih si morajo izmenoma slediti v vrsti gusarji in Turki.

Veliko različnih zgodbic na to temo najdemo v zabavni matematični literaturi. In tudi spominčic. Poglejmo še tri: angleško, nemško in latinško.

From numbers' aid and art
Never will fame depart!

Gott schlug den mann in Amalek,
Den Israel bezwang!

Populeam virgam mater regina ferebat.

Vabimo vas, da na enak način sestavite slovensko spominčico in nam jo pošljete.

V njej morate upoštevati zgoraj navedeni vrstni red samoglasnikov. Tudi vsebina pesmice naj bo povezana z nalogo.

Marija Vencelj

KRIŽANKA "PRESEKOVI UREDNIKI" – Rešitev s str. 96

	PRESEK	RE	VI	I	J	A	ST	AN	IČ	P	AS	C	A	L	
	PRESEK	PRE	SE	K	M	ARI	J	AV	ENC	EL	J				
	DREN	M	OL	A	T				P	AND	O	R	A		
	TU	Z	L	A		A	T	E	K	M	E	N	A	R	T
	A	M	A	T	I		C	R	E	S		S	O	K	
	S	A	K	J	E	K	L	A	R	K	A	N	D	E	J
	T	R	S	A	P	R	I	L	K	A	V	I	A	R	L
	R	T	I	Č	I	V	O		D	O	P	R	S	N	I
	O	I	S	E	K	A		A	V	A	L	I	T	L	A
	N	N	R	Z	A	V		G	O	L	A	N			
	O	J	D	I	P	A	A		M	A	R	I	J	A	N
	M	U	R	N		S	U	S	A		E	T	A		
	I	V	A		B	O	Š	T	J	A	N	J	A	K	L
	J	A	G	N	E	D		R	A	D	I	A	N	A	V
	A	N	O	N	S	A		A	R	E	Z	Z	O	S	A

KRIŽANKA “DRUŽABNE IGRE”

<table><tr><td>16</td><td>3</td><td>2</td><td>13</td></tr><tr><td>5</td><td>10</td><td>11</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>6</td><td>7</td><td>12</td></tr><tr><td>4</td><td>15</td><td>14</td><td>1</td></tr></table>				16	3	2	13	5	10	11	8	9	6	7	12	4	15	14	1	IGRA S KARTAMI, PRI KATERI SO ADUTI OZNAČENI Z RIMSKIMI ŠTEVILKAMI		GNUS, STUD	ČAR, DRAŽ	BOJAN COP	SORTA BELEGA KROMPIRJA	MESTO V BOSNI	MOZOLJ	MISI CR
16	3	2	13																									
5	10	11	8																									
9	6	7	12																									
4	15	14	1																									
				IGRA NA SREČO						SVINČ KROGL NABI																		
				SPRETN. IGRA S PALIGICAMI						OGNJ																		
				▶																								
AVTOR MARKO BOKALIČ	DRŽAVA NA BLIŽNJEM VZHODU	HUSEINOVA DRŽAVA	BLAŽILNIK UDARCEV				SKOPLJE-NEC																					
							MESTO V SPANJLI																					
DOMOLJUB IN SKLAD. ALJAZ							SMUČARSKI CENTER V SVICI																					
OKUSNA PRIKUHA						TENORIST DARIAN			MARTIN LUTHER																			
						TEŽAVEN POLOŽAJ			HLAČNI PRISITEK																			
SKUPINA SORODNIH ZIVALSKIH VRST				JAPONSKA MISELNA IGRA NA DESKI	ZEMLJSKA OŽINA NA MALAJI				MOŠKI S SRPOM																			
									TEKOČA VODA																			
MOŠKO TELOVADNO ORODJE					RADIJ		KRAJ V VIPAVSKI DOLINI																					
					FILMSKI SNEMALEC TUSAR																							
ANTON TRSTENJAK			OGOREK				PRIPOVEDN. PESNITEV			SLOV. RAC. TEI (O)																		
				KRAJ MED DIVAČO IN LIPICO			LJUDSTVO V NIGERIJ																					
NAJDAJŠA AFRISKA REKA				DEL ARHAIKA					UDAREC Z NOGO																			
				TENISAČ TRUPEJ																								
ZNANJE, RAZGLE- DANOST									SL. PESNICA (META)																			
									ANG. FILOZ. (FRANCIS)																			
OPEME- NITENO ZELEZO						AUGUST OETKER			IGRA IZ SPOD. DES- NEGA KOTA																			
								LISTAVEC																				
PREDEL PODROČJE					NAZIV	INSTINKT	TOLSTO- JEVA JUNAČINJA KARENINA	JEZERO (FRANC.)																				
							LAURENCE OLIVIER																					
				▶																								
					DRUŽABNA IGRA Z DENARNIMI BONI, VAJA ZA PODJETNIŠTVO																							
					NOVEJŠA ZABAVNA IGRA S KARTAMI ZA VEČ IGRALCEV			PEVKA RUPEL																				

KOLIKOKRAT BO TREBA TEHTATI? – Rešitev nagradne naloge s str. 5

Do 15. oktobra je pravilne odgovore na vprašanje poslalo pet reševalcev: Katarina Kokalovič in Peter Movrin iz Ljubljane, srednješolca Benjamin Bezek iz Kamnika in Jože Rihtaršič iz Kranja in osnovnošolec Tomaž Kuzma iz Črnomlja. Žreb je določil, da prejme knjigo Zlatka Šporerja Matematični leksikon za nematematike Tomaž Kuzma, knjigo Keitha Devlina Nova zlata doba matematike pa Jože Rihtaršič.¹

Naloga seveda sprašuje, kako z enim samim tehtanjem ugotoviti, v kateri od posod so katere od kroglic. Odgovora zagotovo ne bomo dobili, če bomo dali na tehtnico kroglice iz ene same posode, ker s tem ne bomo mogli razlikovati med vsebinama ostalih dveh posod. Torej bo treba dati na tehtnico hkrati po nekaj kroglic iz dveh ali celo iz vseh treh posod.

Poglejmo na nalogo čimbolj splošno. Najprej označimo, katera posoda je prva, katera druga in katera tretja posoda. Denimo, da damo na tehtnico iz prve posode a kroglic, iz druge b kroglic in iz tretje c kroglic. Pri tem morajo biti števila a , b , c taka, da bomo iz dobljene teže lahko ugotovili porazdelitev kroglic. To bo mogoče, če bodo vrednosti izrazov

$$\begin{array}{lll} a + 2b + 3c & 2a + b + 3c & 3a + b + 2c \\ a + 3b + 2c & 2a + 3b + c & 3a + 2b + c \end{array}$$

paroma različne.

To idejo so uporabili vsi naši reševalci. Le realizirali so jo različno. Najmlajši reševalec predlaga za a , b , c števila 1, 15, 30. Ostali so našli tudi najbolj ekonomično možnost, ki jo na kratko lahko opišemo takole: Če damo na tehtnico eno kroglico iz prve posode, tri iz druge, iz tretje pa nobene, lahko iz dobljene teže s pomočjo naslednje tabele ugotovimo, kje so enogramske, kje dvogramske in kje trigramske kroglice.

I. posoda	II. posoda	III. posoda	teža
1	2	3	7
1	3	2	10
2	1	3	5
2	3	1	11
3	1	2	6
3	2	1	9

¹ Obe knjigi sta naprodaj pri Komisiji za tisk DMFAS, Ljubljana, Jadranska 19, tel. (061) 123-24-60.

Seveda navedeni možnosti nista edini izbiri za števila a , b , c . Če zveze med zgornjimi izrazi nekoliko preračunamo, sledi, da so lahko a , b , c poljubna paroma različna nenegativna cela števila, le nobeno ne sme biti aritmetična sredina ostalih dveh. Torej

$$a \neq b \neq c \neq a$$

in

$$a \neq \frac{b+c}{2}, \quad b \neq \frac{c+a}{2}, \quad c \neq \frac{a+b}{2}.$$

Zato možnost $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, ki bi bila enostavnejša od tiste, ki so jo predlagali reševalci, ne pride v poštev. Ustreza pa tem pogojem Tomaževa rešitev $a = 1$, $b = 15$, $c = 30$.

Omenimo še zelo elegantno rešitev Jožeta Rihtaršiča, ki jo lahko uporabimo, če je na razpolago dovolj kroglic. Predlaga, da iz prve posode vzamemo 1 kroglico in iz druge posode 10 kroglic. Sami si napravite ustrezno tabelo in videli boste, da je rešitev res priročna.

Marija Vencelj

KVADRATI PRAŠTEVIL – Rešitev s str. 83

Pri nalogah 1 in 3 si bomo pomagali z dejstvom, da popolni kvadrat lihega števila pri deljenju z 8 da ostanek 1. To lastnost števil zlahka razberemo iz enakosti

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1, \quad 0 \leq k \in \mathbb{Z},$$

če le upoštevamo, da je pri tem število $k(k+1)$ sodo.

1. Edino sodo praštevilo je 2, torej po prejšnjem vsota kvadratov dveh praštevil pri deljenju z 8 da ostanek 0, 5 ali 2 in zato ne more biti kvadrat praštevil. Vsota kvadratov treh lihih praštevil pri deljenju z 8 da ostanek 3, zato ne more biti kvadrat praštevil. Vsota kvadratov dveh lihih praštevil in števila 4 je sodo število, večje od 4, zato ni kvadrat praštevil. Dokazati moramo le še, da enačba $x^2 + 8 = y^2$ nima rešitve v praštevilih x in y . Ker v primeru $x = 3$ število y ni praštevilo, lahko predpostavimo, da je x praštevilo, ki ni deljivo s 3. Torej je x oblike $3k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$, in zato

$$y^2 = x^2 + 8 = 3(3k^2 \pm 2k + 3).$$

Od tod sledi, da je število y deljivo s 3 in zaradi $y^2 = x^2 + 8 > 9$ večje od 3, torej ni praštevilo.

2. Zabeležimo rešitve

$$\{7, 23; 17, 17\}, \quad \{7, 19; 11, 17\}, \quad \{11, 23; 17, 19\},$$

bralec pa lahko poišče še kakšno.

3. Zaznamujemo s P skupino petih praštevil. Če je vsota kvadratov vseh števil iz P liho število, trditev naloge 3 očitno velja. Če je vsota kvadratov vseh števil iz P sodo število, vsebuje P bodisi eno dvojko bodisi tri dvojke bodisi pet dvojk. Razdelimo P v skupini P_1 in P_2 in predpostavimo najprej, da je v P le ena dvojka. Denimo, da je ta dvojka v P_1 in da je v P_1 še n lihih praštevil, kjer je $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Potem vsota kvadratov števil iz P_1 pri deljenju z 8 da ostanek $n + 4$, vsota kvadratov števil iz P_2 pa ostanek $4 - n$. Ostanaka v obeh skupinah sta enaka le pri $n = 0$, v tem primeru pa trditev očitno velja. Predpostavimo zdaj, da so v P točno 3 dvojke. Potem so trije kvadrati števil iz P enaki 4, druga dva kvadrata pa pri deljenju z 8 dasta ostanek 1. Od tod brez težav sledi, da vsota kvadratov števil iz P_1 pri deljenju z 8 da drugačen ostanek kot vsota kvadratov števil iz P_2 . Kadar je v P pet dvojk, je trditev očitna.

4. Zapišimo 13 osnovnih skupin in jih s podpičji ločimo na ustrezni podskupini. Vse ostale skupine dobimo tako, da v vsaki osnovni skupini prvi podskupini dodamo $9k$ dvojk, drugi pa $4k$ trojk, kjer je k poljubno naravno število.

$$\begin{array}{cc}
 \{2, 2, 5, 5; 3, 7\}, & \{2, 11; \overbrace{5, \dots, 5}^5\} \\
 \overbrace{\{2, \dots, 2, 5; 7\}}^6, & \{2, 2, 2, 7; \overbrace{3, \dots, 3, 5}^4\} \\
 \overbrace{\{11; 3, \dots, 3, 7\}}^8, & \overbrace{\{2, \dots, 2, 5; 3, \dots, 3\}}^5 \\
 \overbrace{\{2, \dots, 2, 5, \dots, 5; 3, 3, 7, 7\}}^4, & \overbrace{\{2, \dots, 2; 3, \dots, 3\}}^9 \\
 \overbrace{\{2, 2, 11, 11; 5, \dots, 5\}}^{10}, & \overbrace{\{2, \dots, 2, 5, 7, 19; 3, \dots, 3, 11, 17\}}^5 \\
 \overbrace{\{2, \dots, 2, 5, 5; 7, 7\}}^{12}, & \overbrace{\{2, \dots, 2, 5, 5, 5; 3, \dots, 3, 7\}}^7, & \overbrace{\{2, \dots, 2, 7; 3, \dots, 3\}}^8, & \overbrace{\{2, \dots, 2, 7; 3, \dots, 3\}}^9
 \end{array}$$

Bralec naj premisli, zakaj smo s tem zajeli vse možnosti z $n > 5$.

Boris Lavrič

URNIK TEKMOVANJ V LETU 1997

področje	šola	tekmovanje	datum
matematika	osnovna	šolsko področno državno	21. marec 19. april 17. maj
	srednja	šolsko izbirno državno olimpiada	21. marec 12. april 17. in 18. maj julij
fizika	osnovna	šolsko področno državno	do 15. marca 5. april 10. maj
	srednja	področno državno olimpiada	22. marec 19. april julij
logika	osnovna in srednja	šolsko izbirno državno	september oktober november
matematika za razvedrilo	osnovna in srednja	državno	6. september
računalništvo	osnovna	šolsko področno državno	do 20. marca 18. april 10. maj
	srednja	državno	9. do 11. maj

Nekaj informacij o tekmovanjih

Matematika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju matematike za Vegova priznanja*. Pojasnila lahko dobite pri g. Aleksandru POTOČNIKU, OŠ Božidarja Jakca, Nusdorferjeva 10, Ljubljana, telefon (061)-443-074 ali (061)-442-900.

Matematika – srednja šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju srednješolcev v znanju matematike*.

Naj še posebej poudarimo, da tudi v šolskem letu 1996/97 že potekajo celoletne priprave na mednarodno matematično olimpiado, ki bo julija 1997 v Argentini. Teh se udeležujejo dijaki, ki so jih predlagali

bodisi člani *Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli* bodisi učitelji-mentorji ali pa so se prijaviili sami. Olimpijska ekipa bo izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov, državnega tekmovanja in mednarodnega matematičnega tekmovanja mest. Vsak od izbirnih testov in državno tekmovanje bodo prinesli po 30 % točk, jesenski in pomladanski del tekmovanja mest pa po 5 %. Prvi izbirni test bo 24. januarja 1997, drugi pa 25. aprila 1997. Datume mednarodnega matematičnega tekmovanja mest nam mednarodni organizatorji sporočijo le nekaj dni pred samim tekmovanjem. Podrobnejše informacije dajeta g. Darjo FELDA, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-17-68-233 ali (061)-17-68-234 in g. Matjaž Željko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061)-17-66-551, dobite pa jih tudi po elektronski pošti na naslovu "math.comp@fmf.uni-lj.si". Koledar aktivnosti (z ažuriranimi datumi) je ob vsakem času dostopen po Internetu: URL: "www.fmf.uni-lj.si/~mathcomp/koledar.html".

Fizika – osnovna šola

Vsa tekmovanja bodo potekala v skladu s *Pravilnikom o tekmovanju učencev osnovne šole v znanju fizike za Stefanova priznanja*. V februarju bomo na šole poslali razpis tekmovanj. Dodatne informacije dobite pri ge. Jelki SAKELŠEK, OŠ Ketteja in Murna, Koširjeva 2, Ljubljana, tel. (061)-444-401 ali (061)-444-181.

Fizika – srednja šola

Razpis za tekmovanja bomo skupaj s prijavnicami poslali na šole do konca februarja. Informacije dobite pri g. Cirilu DOMINKU na Gimnaziji Bežigrad, Peričeva 4, Ljubljana, telefon (061)-13-19-293.

Matematika za razvedrilo

Vse informacije dobite v časopisih *Logika & Razvedrilna matematika* in *Ugankarski domenek*.

Logika

Na državnem tekmovanju tekmujejo učenci, ki bodo v času tekmovanj na predmetni stopnji osnovne šole, učenci srednjih šol in študenti. Šole, ki bodo organizirale izbirno tekmovanje, se morajo prijaviti na razpis do **1. junija** na ZOTKS, Komisija za logiko, Lepi pot 6, Ljubljana. Druge informacije daje g. Andrej JUS na ZOTKS, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

Računalništvo – osnovna šola

Razpis tekmovanja je bil skupaj z obvestilom o spremenjeni vsebini tekmovanj in prijavnico že poslan na šole. Informacije dobite pri g. Andreju JUSU, ZOTKS – Svet za tehnično vzgojo mladine, Lepi pot 6, Ljubljana, tel. (061)-213-727, faks (061)-222-487.

Računalništvo – srednja šola**I. Raziskovalne naloge**

Strokovna komisija bo pregledala naloge, ki bodo do **1. maja** prispele na naslov Gibanje znanost mladini, Lepi pot 6, Ljubljana. Na osnovi dobljenih ocen bo določila tiste učence, ki bodo svoje naloge ustno zagovarjali. Podrobnejša pojasnila daje g. R. DORN, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Tržaška 25, Ljubljana, tel. (061)-17-68-411.

II. Tekmovanje iz znanja računalništva

Mentorji naj pošljejo prijavo šole s poimenskim seznamom tekmovalcev (ne več kot po 5 učencev za vsako od treh tekmovalnih skupin) do **15. aprila** na Gibanje znanost mladini. Pri tem naj upoštevajo pravila, ki že vrsto let veljajo za to tekmovanje.

Potrditev prijav in natančni razpored tekmovanja bodo šole dobile teden dni pred tekmovanjem. Šolam priporočamo, da izvedejo predtekmovanja in tako izberejo najboljše predstavnike. Informacije dobite pri ZOTKS – Komisija za računalništvo, Lepi pot 6, Ljubljana, tel (061)-213-727, faks (061)-222-487.

Darjo Felda

REŠITVE NALOG S PREDTEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE – s str. 124

Skupina A

1. Podatki: $h = 2,4$ m, $F_g = 20$ N, $k = 30$ N/m.

- a) Elastika se raztegne za $s = \sqrt{h^2 + l^2} - h$, sila elastike na telo je $F = ks$ s komponentama

$$F_x = F \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} = ks \frac{l}{s + h}, \quad F_y = F \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} = ks \frac{h}{s + h}.$$

Ko telo poskoči, je razlika sil $F_g - F_y$ negativna; v mejnem primeru pa ravno enaka 0. Iz enačbe $F_g = ksh/(s + h)$ dobimo $s = F_g h / (kh - F_g) = 0,92$ m in $l = \sqrt{(s + h)^2 - h^2} = 2,3$ m.

- b)
- $l = 1$
- m.

Elastika se raztegne za $s = \sqrt{h^2 + l^2} - h = 0,2$ m, sila elastike na telo je $F = ks = 6,0$ N s komponentama

$$F_x = F \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} = 2,31 \text{ N}, \quad F_y = F \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} = 5,5 \text{ N}.$$

Sila podlage je $F_p = F_g - F_y = 14,5$ N in koeficient lepenja $k_l \geq F_x/F_p = 0,16$.

2. Podatki: $l = 1$ m, $S_0 = 1$ m², $S = 0,5$ m², $F_g = 50$ N, $\Delta l = 10$ cm, $\sigma = 10^4$ N/m², $\Phi = 0,1$ l/s.

- a) Volumen vode v večji posodi se ne spremeni: $S_0 l - Sz = \frac{3}{4} S_0 l$, manjša posoda je potopljena za $z = \frac{1}{4} (S_0/S) l = l/2 = 50$ cm. Višino vode v notranji posodi (x) dobimo iz ravnovesja sil – vzgon je enak teži posode in vode v njej: $\sigma Sz = F_g + \sigma Sx$, $x = 49$ cm, torej manjši od z , in zgornja rešitev je upravičena.

- b) Ravnovesje sil pove $\sigma Sz = F_g + \sigma Sx$, ohranitev volumna pa sedaj zahteva $S_0(l - \Delta l) - Sz = \frac{3}{4} S_0 l$. Od tod dobimo $z = (S_0/S)(\frac{1}{4}l - \Delta l) = 30$ cm in $x = z - F_g/\sigma S = 29$ cm. Volumen vode v manjši posodi je $V = Sx = 145$ l in čas natakanja $t = V/\Phi = 24$ min.

- 3a. Podatki: $h = 2,5$ m, $l = 1,6$ m, $\Delta h = 30$ cm, $F_g = 1000$ N, $F_m = 200$ N.

S F_1 označimo navpično silo podlage na krak, na katerem stoji človek, s F_2 pa navpično silo podlage na drugi krak. Velja $F_g = F_1 + F_2$. Vpeljimo še $F = 2F_m$. Ravnovesje navorov napišemo za os na vrhu lestve. Za drugi krak velja $\frac{1}{2}hF = lF_2$, za prvega pa $\frac{1}{2}hF + xF_g = lF_1$, če je x vodoravna komponenta vektorja, ki sega od osi do človeka. Če je y njena navpična komponenta, dobimo iz podobnih trikotnikov $x = yl/h$. Višina, ki jo še lahko doseže človek, je potem $z = h - y = h^2 F / l F_g = 156$ cm; torej varno še stoji na petem klinu.

- 3b. Podatki: $l_a = 3,5$ m, $l_t = 6$ m, $l_v = 14$ m, $v_0 = 50$ km/h, $v_m = 80$ km/h, $s_a = 150$ m.

S t_0 označimo čas pospeševanja s pospeškom a in s t_1 celotni čas prehitevanja. Vpeljimo še $\Delta s = 2l_v + l_a + l_t$ – razliko poti avtomobila in tovornjaka. Velja

$$v_m = v_0 + at_0, \quad s_a = v_0 t_0 + \frac{1}{2} at_0^2 + v_m(t_1 - t_0), \quad s_t = s_a - \Delta s = v_0 t_1.$$

Iz tretje enačbe takoj sledi $t_1 = (s_a - \Delta s)/v_0 = 8,1$ s. Iz prve izrazimo t_0 z a in vstavimo v drugo. Preuredimo in dobimo $a = (v_m - v_0)^2 / 2(v_m t_1 - s_0) = 1,2$ m/s².

Skupina B

1. Podatki: $\Phi = 20 \text{ l/s}$, $m = 8,0 \text{ kg}$, $v_0 = 5,0 \text{ m/s}$.

Teža Toma uravnovesi silo curka: $\rho\Phi v\sqrt{v_0^2 - 2gh} = mg$, kjer je $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$, torej

$$h = \frac{1}{2g} \left(v_0^2 - \left(\frac{mg}{\rho\Phi} \right)^2 \right) = 0,45 \text{ m}.$$

2. Podatki: $l = 2,0 \text{ m}$, $m = 0,50 \text{ kg}$, $\Delta s_0 = 0,5 \text{ m}$.

- a) Koeficient vzmeti je $k = mg/\Delta s_0 = 10 \text{ N/m}$. V navpični smeri je teža telesa uravnotežena z navpično komponento sile vrvice

$$k\Delta s \cos \varphi = mg,$$

v vodoravni smeri pa vodoravna komponenta povzroča kroženje s kotno hitrostjo ω

$$k\Delta s \sin \varphi = m\omega^2 r = m\omega^2 (l + \Delta s) \sin \varphi.$$

Iz druge enačbe dobimo raztezek

$$\Delta s = \frac{\omega^2 l}{\frac{g}{\Delta s_0} - \omega^2}.$$

Iz prve enačbe sledi $\cos \varphi = mg/k\Delta s = \Delta s_0/\Delta s = (g - \omega^2 \Delta s_0)/\omega^2 l$. Da rešitev obstaja, mora veljati $\cos \varphi \leq 1$, torej $\omega \geq \sqrt{g/(l + \Delta s_0)} = 2,0 \text{ s}^{-1}$.

- b) Pri $\varphi = 30^\circ$ dobimo iz zgornjih enačb $\omega = 2,1 \text{ s}^{-1}$ in $v = r\omega = (l + \Delta s) \sin \varphi \omega = (l + \Delta s_0/\cos \varphi) \sin \varphi \omega = 2,7 \text{ m/s}$.
3. Podatki: $M = 2,0 \text{ kg}$, $m = 2,0 \text{ kg}$, $k = 3,0 \text{ N/cm}$.

Ko pade ilovica v skodelico, se ravnovesna lega zniža za $x_0 = mg/k = 6,7 \text{ cm}$. Okrog te lege zaniha skodelica z ilovico; ko zaniha višje od mirovne lege, vleče sila vzmeti klado navzgor. Klada se ravno še ne odlepi, če je sila vzmeti manjša od teže klade, ko se skodelica zaustavi v zgornji legi. Raztezek vzmeti v tej legi je $s = s_0 - x_0$, če je s_0 amplituda nihanja. Torej $k(s_0 - x_0) \leq Mg$, največja amplituda je $s_0 = 13,3 \text{ cm}$. Iz ohranitve potencialne in prožnostne energije dobimo $mgh = \frac{1}{2}k(s_0 + x_0)^2$, če postavimo končno lego v najnižjo točko, ki jo skodelica z ilovico doseže. Dobimo $h = 30 \text{ cm}$, kar pomeni $\Delta h = h - (s_0 + x_0) = 10 \text{ cm}$ nad lego prazne skodelice.

4. Podatki: $M = 0,1 \text{ kg}$, $m = 0,05 \text{ kg}$, $v = 3,0 \text{ m/s}$, $h = 1,0 \text{ m}$, $h_0 = 3,0 \text{ m}$.

Hitrost kroglice v trenutku trka je $v_0 = \sqrt{2gh} = 4,5 \text{ m/s}$. Pri trku se ohrani skupna gibalna količina, v navpični smeri $Mv_0 = (m + M)v_y$ in v vodoravni $mv = (m + M)v_x$, od koder dobimo hitrosti tik po trku $v_y = 3 \text{ m/s}$ in $v_x = 1 \text{ m/s}$. Iz enačbe za pot v navpični smeri $h_0 - h = v_y + \frac{1}{2}gt^2$ dobimo čas padanja $t = 0,4 \text{ s}$. Zlepek pade na tla na razdalji $x = v_xt = 0,4 \text{ m}$ od točke, kamor bi padla kroglice, če ne bi trčila.

Skupina C

1. Podatki: $I_1 = 0,20 \text{ A}$, $I_2 = 0,10 \text{ A}$, $I_3 = 0,18 \text{ A}$, $R = 30 \Omega$.

Največji tok dobimo, če ampermeter priključimo direktno na izvir; najmanjši tok pa tedaj, če elemente vezemo zaporedno. Če vezemo ampermeter in upornik vzporedno, dobimo vmesno vrednost toka ($0,18 \text{ A}$): skozi baterijo tedaj sicer teče večji tok kot v prvem primeru, vendar je padec napetosti na bateriji večji, na ampermetru pa je zato manjša napetost.

Enačbi za prva dva primera sta $U_g = (R_A + R_n)I_1$ in $U_g = (R_A + R_n + R)I_2$. Enačbi odštejemo, upoštevamo $I_1 = 2I_2$ in dobimo $R_A + R_n = R$. Iz prve takoj sledi $U_g = 6,0 \text{ V}$.

Zapišimo še tretjo enačbo za neznani R_A , $R_n = R - R_A$:

$$U_g = I_0 \left(R - R_A + \frac{RR_A}{R + R_A} \right), \quad I_3 = \frac{R}{R + R_A} I_0,$$

$$R_A^2 - RR_A + \left(\frac{U_g}{I_3} - R \right) R = 0.$$

Z I_0 smo označili tok skozi izvir. Kvadratna enačba da dve rešitvi, $R_A = 26 \Omega$, $R_n = 4 \Omega$ ter $R_A = 4 \Omega$, $R_n = 26 \Omega$. Obe sta smiselni, zato notranjega upora ne moremo enolično določiti.

2. Podatki: $m = 1,0 \text{ g}$, $l = 10 \text{ cm}$, $d = 2,0 \text{ mm}$, $B = 0,10 \text{ T}$, $R = 1 \Omega$, $s = 25 \text{ cm}$, $s_0 = 5 \text{ cm}$.

Da se palčka dvigne za $s - s_0$, potrebuje začetno hitrost $v_0 = \sqrt{2g(s - s_0)} = 2 \text{ m/s}$. Pospešek dobi zaradi magnetne sile, ta pa obstaja le, ko ima palčka stik z vzmetjo, torej le na razdalji d . Pospešek, potreben za hitrost v_0 , je $a = v_0^2/2d = 1,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$, sila pa $F = ma = 1,0 \text{ N}$. Na vzmeti moramo torej priključiti napetost $U = RI = RF/lB = 100 \text{ V}$.

3. Podatki: $R = 1,0 \text{ M}\Omega$, $C_1 = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 3,0 \text{ }\mu\text{F}$, $e_1 = 5,0 \text{ }\mu\text{As}$, $e_2 = 10 \text{ }\mu\text{As}$.
- a) Napetost na C_1 je $U_1 = e_1/C_1 = 5,0 \text{ V}$ in na C_2 $U_2 = 3,33 \text{ V}$. Ko sklenemo, je vsota padcev napetosti na elementih enaka 0: $U_1 - IR - U_2 = 0$. Na začetku je tok $I = (U_1 - U_2)/R = 1,7 \text{ }\mu\text{A}$.
- b) Na koncu se izenačita napetosti: $U'_1 = U'_2 = U'$, torej $e'_1/C_1 = e'_2/C_2$, če z e' označimo naboja na koncu. Velja tudi ohranitev naboja $e = e_1 + e_2 = e'_1 + e'_2$. Dobimo $e'_1 = eC_1/(C_1 + C_2) = 3,75 \text{ }\mu\text{As}$ in $e'_2 = eC_2/(C_1 + C_2) = 11,25 \text{ }\mu\text{As}$ in $U' = 3,75 \text{ V}$.
Toplota, ki se potroši na uporniku, je enaka spremembi energije kondenzatorjev

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1^2}{C_1} + \frac{e_2^2}{C_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{e_1'^2}{C_1} + \frac{e_2'^2}{C_2} \right) = 1,0 \text{ }\mu\text{J}.$$

Skupina D

1. Podatki: $v_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, $B = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$, $\vartheta_{\max} = 1,0^\circ$, $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
Komponento hitrosti elektrona v smeri curka lahko zapišemo kot $v_{\parallel} \cong v_0$ in v pravokotni smeri $v_{\perp} \cong v_0 \vartheta$, saj so koti majhni. V ravnini, pravokotni na B , elektroni krožijo; radij krožnice je $r = m_0 v_{\perp} / eB$ in kotna hitrost kroženja $\omega = v_{\perp} / r = e_0 B / m_0$, ki je za vse elektrone enaka. Elektroni se ponovno fokusirajo po enem obhodu: $t = 2\pi / \omega = 2\pi m_0 / e_0 B$ in pri tem naredijo pot $l = v_{\parallel} t = 2\pi m_0 v_0 / e_0 B = 36 \text{ cm}$. Največji premer curka je enak dvakratnemu premeru največjega kroga v pravokotni ravnini $d_{\max} = 4r = 4m_0 v_0 \vartheta_{\max} / e_0 B = 4 \text{ mm}$.
2. Podatki: $r_1 = 6700 \text{ km}$, $r_2 = 6720 \text{ km}$, $R = 6400 \text{ km}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.
Zapišimo 2. Newtonov zakon za prvi in drugi satelit

$$m\omega^2 r_1 = mg \left(\frac{R}{r_1} \right)^2 - F, \quad m\omega^2 r_2 = mg \left(\frac{R}{r_2} \right)^2 + F,$$

če je ω kotna hitrost kroženja in F sila vrvice. Enačbi odštejemo in dobimo

$$\omega = \sqrt{\frac{gR^2}{r_1 + r_2} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right)}, \quad \text{in} \quad v_2 = \omega r_2.$$

Pri kroženju se ohranja vrtilna količina satelita in vsota kinetične in potencialne energije. Obe količini zapišemo v začetni legi in v legi,

ko je satelit najbolj oddaljen od Zemlje – v obeh legah ima hitrost le tangentno smer.

$$mr_2 v_2 = mr_2' v_2', \quad \frac{1}{2} m v_2^2 - mg \left(\frac{R^2}{r_2} \right) = \frac{1}{2} m v_2'^2 - mg \left(\frac{R^2}{r_2'} \right),$$

pri čemer smo količini v končni legi označili s črticami in upoštevali $\kappa M = g R^2$. Iz prve enačbe izrazimo v_2' in dobimo kvadratno enačbo za količino $r_2/r_2' \equiv x$

$$x^2 - 2\beta x + 2\beta - 1 = 0, \quad \beta = \frac{R^2 g}{v_2 r_2} = \frac{1+z}{z(1+z^2)}, \quad z = \frac{r_2}{r_1},$$

z rešitvijo $x = \beta \pm (\beta - 1)$. Rešitev s predznakom '–' predstavlja kar začetno lego in nas seveda ne zanima. Sprememba višine je potem

$$\Delta r = r_2' - r_2 = \left(\frac{1}{x} - 1 \right) r_2 = \left(\frac{1}{2\beta - 1} - 1 \right) r_2 = \frac{2(z^3 - 1)}{2 + z - z^3} r_2 = 60 \text{ km}.$$

Satelit doseže višino 380 km.

3. Podatki: $R = 1,0 \text{ M}\Omega$, $C_1 = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 3,0 \text{ }\mu\text{F}$, $e_1 = 5,0 \text{ }\mu\text{As}$, $e_2 = 10 \text{ }\mu\text{As}$.

a) Napetost na C_1 je $U_1 = e_1/C_1 = 5,0 \text{ V}$ in na C_2 $U_2 = 3,33 \text{ V}$. Ko sklenemo, je vsota padcev napetosti na elementih enaka 0: $U_1 - IR - U_2 = 0$. Na začetku je tok $I = (U_1 - U_2)/R = 1,7 \text{ }\mu\text{A}$.

b) Na koncu se izenačita napetosti: $U_1' = U_2' = U'$, torej $e_1'/C_1 = e_2'/C_2$, če z e' označimo naboja na koncu. Velja tudi ohranitev naboja $e = e_1 + e_2 = e_1' + e_2'$. Dobimo $e_1' = e C_1/(C_1 + C_2) = 3,75 \text{ }\mu\text{As}$ in $e_2' = e C_2/(C_1 + C_2) = 11,25 \text{ }\mu\text{As}$ in $U' = 3,75 \text{ V}$. Toplota, ki se potroši na uporniku, je enaka spremembi energije kondenzatorjev:

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1^2}{C_1} + \frac{e_2^2}{C_2} \right), \quad W' = \frac{1}{2} \left(\frac{e_1'^2}{C_1} + \frac{e_2'^2}{C_2} \right), \quad Q = W - W' = 1,0 \text{ }\mu\text{J}.$$

- c) Ko se sprosti polovica energije, je energija kondenzatorja enaka

$$W'' = \frac{1}{2} (C_1 U_1''^2 + C_2 U_2''^2) = W' + \frac{1}{2} Q.$$

Velja tudi ohranitev naboja $C_1 U_1'' + C_2 U_2'' = e$. Dobimo kvadratno enačbo za U_1''

$$\frac{1}{2} C_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) U_1''^2 - e \frac{C_1}{C_2} U_1'' + \frac{1}{2} \frac{e^2}{C_2} - W' - \frac{1}{2} Q = 0$$

s smiselno rešitvijo $U_1'' = 4,63$ V in $U_2'' = 3,45$ V. Napetost na uporniku je $U(t) = U_1'' - U_2'' = 1,18$ V. (Kar je pravzaprav $U_0/\sqrt{2}$ – rezultat, ki bi ga dobili z integracijo.) Končno

$$U(t) = U_0 e^{-t/RC}, \quad U_0 = U_1 - U_2, \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

$$t = RC \ln(U_0/U(t)) = 0,26 \text{ s}.$$

4. Podatki: $H = 4,0$ m, $h = 1,2$ m.

Lastna krožna frekvenca nihanja jahte je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Koeficient k dobimo z naslednjim razmislekom: če jahto potopimo za x , je sila, ki potiska jahto v ravnovesni položaj, enaka $F_{\text{vzgon}} - mg = S(h+x)\rho g - Sh\rho g = Sx\rho g \equiv kx$. Frekvenca nihanja je potem

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} = 0,46 \text{ s}^{-1}.$$

- a) $\lambda = c/\nu = 2\pi\sqrt{Hh} = 14$ m, kar je več od dvojne globine pristanišča in izbira formule za hitrost je pravilna.
b) $\lambda = \sqrt{2\pi}\sqrt{h\lambda}$, $\lambda = 2\pi h = 7,5$ m.

Bojan Golli

31. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 112

6. razred

Sklop A

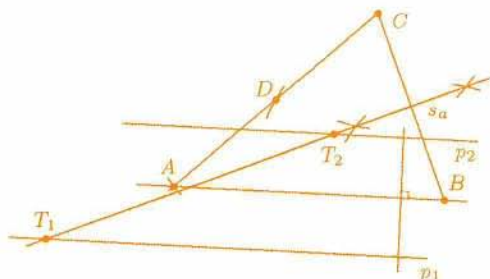
naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	Č	B	A	C	D	A	Č	D

Sklop B

B1 Vrednost izraza je 1.

B2 Cisterna drži 3000 litrov. Kupili so 5400 l kurilnega olja, porabili pa 3400 l.

- B3** Konstruiramo trikotnik $\triangle ABC$. Premici p_1 in p_2 sta vzporedni z nosilko stranice c in od nje oddaljeni 1,5 cm. Iskani točki sta T_1 , ki je presek premice p_1 in simetrale stranice a , in T_2 , ki je presek premice p_2 in simetrale stranice a .



7. razred

Sklop A

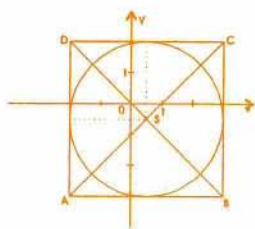
naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	C	D	Č	B	D	A	C	B

Sklop B

- B1** Vrednost izraza je -120 .

- B2** Za zapis enomestnih števil potrebujemo 9 števk. Za zapis dvomestnih števil potrebujemo $90 \cdot 2 = 180$ števk. Za zapis trimestnih števil ostane 945 števk, kar pomeni, da je 315 strani oštevilčenih s trimestnimi števili. Knjiga ima torej $9 + 180 + 315 = 414$ strani.

- B3** Koordinate iskanih točk so $C(3, 2)$, $D(-2, 2)$ in $S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, polmer kroga $r = 2,5$ dolžinskih enot, njegova ploščina $6,25\pi$ ploščinskih enot, ploščina kvadrata pa 25 ploščinskih enot. Ploščina kroga je približno 79 % ploščine kvadrata.



8. razred

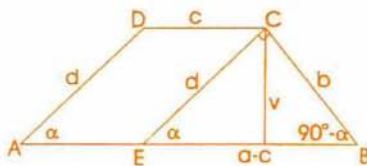
Sklop A

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
pravilni odgovor	A	Č	B	Č	C	D	A	C

Sklop B

B1 Iz pogojev naloge dobimo enačbo $700 + (10a + b) = 2(10(10a + b) + 7) + 40$ in jo uredimo $10a + b = 34$. Rešitev enačbe je $a = 3$ in $b = 4$. Iskani števili sta 347 in 734.

B2 Trikotnik $\triangle EBC$ je pravokoten ($\angle BCE = 90^\circ$), zato je $d^2 = (a - c)^2 + b^2$ in $d = 6$ cm. Obseg trapeza je 54 cm. Zaradi $p_{EBC} = \frac{db}{2} = \frac{(a - c)v}{2}$ je $v = \frac{db}{a - c} = 4,8$ cm in zato je ploščina trapeza 96 cm².



B3 Iz $a : b = 3 : 4$ in $2a + 2b = 56$ dobimo $a = 12$ cm in $b = 16$ cm. Ker je diagonalni presek kvadra kvadrat, je njegova višina enaka diagonali osnovne ploskve, torej $c^2 = a^2 + b^2$ in $c = 20$ cm. Prostornina kvadra je 3840 cm³.



Aleksander Potočnik

REŠITVE NALOG S PODROČNEGA TEKMOVANJA IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – s str. 117

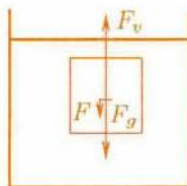
7. razred

1. Na sliki 1 so sila teže F_g , sila F , s katero pod vodo potiskamo kocko, in sila vzgona F_v v ravnovesju, ker kocka miruje. Torej velja

$$F + F_g = F_v = 25 \text{ N}.$$

Sila vzgona ali teža izpodrinjene tekočine je 25 N, kar pomeni, da je kocka izpodrinila 2,5 dm³ vode (V_k). Specifična teža snovi, iz katere je kocka, je

$$\sigma = \frac{F_g}{V_k} = \frac{20 \text{ N}}{2,5 \text{ dm}^3} = 8 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3}.$$



Slika 1.

2. Količina toplote, ki jo je oddal grelec v $t = 1$ min, je

$$Q = Pt = 500 \frac{\text{J}}{\text{s}} \times 60 \text{ s} = 30 \text{ kJ}.$$

Ali se je stalil že ves led? Podatek za toploto, ki jo moramo dovesti kilogramu ledu, da se bo stalil, najdemo v učbeniku in znaša $q_t = 336 \text{ kJ/kg}$. Stalilo se je

$$m_{l1} = Q/q_t = \frac{30 \text{ kJ}}{336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 89 \text{ g}$$

ledu. Temperatura je 0°C , ker se še ni stalil ves led.

V naslednji minuti je grelec ponovno oddal 30 kJ toplote. Ker se je že po eni minuti stalil skoraj ves led, bo led za taljenje potreboval še nekaj toplote

$$Q = (m_l - m_{l1})q_t = 0,011 \text{ kg} \times 336 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 3,7 \text{ kJ},$$

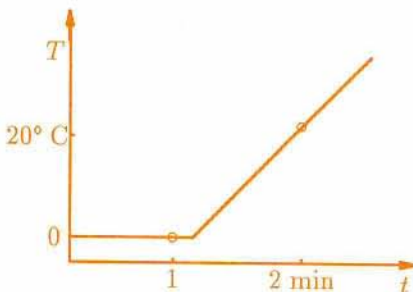
ki jo od grelca dobi v

$$t_2 = \frac{3700 \text{ J}}{500 \frac{\text{J}}{\text{s}}} = 7,4 \text{ s}.$$

V preostalem času druge minute se bosta voda in staljeni led segrevala. Ker je

$$Q = P(t - t_2) = (m_v + m_l)c_p \Delta T,$$

bo temperatura mešanice po dveh minutah



Slika 2.

$$\Delta T = \frac{P(t - t_2)}{(m_v + m_l)c_p} = \frac{500 \frac{\text{J}}{\text{s}} \times (60 \text{ s} - 7,4 \text{ s})}{(0,2 \text{ kg} + 0,1 \text{ kg}) \times 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 21^\circ \text{C}.$$

3. Hitrost vode v cevi v_c je obratno sorazmerna s presekom cevi S in premo sorazmerna s pretokom vode Φ_v

$$v_c = \frac{\Phi_v}{S} = \frac{1 \frac{\text{m}^3}{60 \text{ s}}}{(0,004 \text{ m})^2} = 4,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Gasilec natakne na cev šobo z manjšim presekom, zato se hitrost vode (v_i), ki izstopa iz šobe s presekom $S_{\bar{s}}$, poveča, ker je pretok vode skozi cev in šobo enak

$$S_{\bar{s}} = \frac{\Phi_v}{v_i} = \frac{1 \frac{\text{m}^3}{60 \text{ s}}}{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5,6 \text{ cm}^2.$$

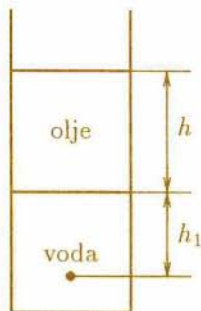
4. Frnikola se bo zdrobila, ko jo bosta tračnici začeli stiskati. To se bo zgodilo, ko bo se bo reza med tračnicama zmanjšala na premer frnikole, oziroma se bo posamezna tračnica raztegnila za $\Delta l = 4 \text{ mm}$. V učbeniku najdemo, da se metrska jeklena palica raztegne za 1,2 stotinki mm, če jo segrejemo za eno stopinjo. Tračnica z dolžino 15 m se bo podaljšala 15-krat več, to je 0,18 mm. Zato, da se bo podaljšala za 4 mm, se mora segreti za

$$\frac{4}{0,18} ^\circ \text{C} = 22 ^\circ \text{C}.$$

5. V posodi je na dnu voda in sega do višine 10 cm, na njej pa plava 10 cm olja, kot je videti na sliki.

Tlak 3 cm nad dnom posode je vsota zunanega tlaka (p_0) in tlakov, ki ju prispevata olje (p_{ol}) in voda (p_v). Podatke za specifično težo vode ($\sigma_v = 10 \text{ N/dm}^3$) in specifično težo olja (alkohola, $\sigma_{ol} = 8 \text{ N/dm}^3$) najdemo v učbeniku

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_{ol} + p_v = p_0 + \sigma_{ol} h_1 + \sigma_v h = \\ &= 100 \text{ kPa} + 8000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0,1 \text{ m} + 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0,07 \text{ m} = 101,5 \text{ kPa}. \end{aligned}$$



Slika 3.

8. razred

1. Žogici za golf se spremeni hitrost v času $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ od hitrosti $v_d = 15 \text{ m/s}$, s katero je priletela navpično navzdol, do hitrosti $v_g = -10 \text{ m/s}$, s katero se je odbila. Povprečni pospešek je

$$a = \frac{v_d - v_g}{t} = \frac{15 \frac{\text{m}}{\text{s}} - (-10) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,01 \text{ s}} = 2500 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2. (a) b, g, h, i; (b) a, j; (c) a; (d) b; (e) a; (f) g, h; (g) f; (h) e; (i) d; (j) c.

3. Žarnica je vsako uro porabila

$$W_e = Pt = 0,04 \text{ kW} \times 1 \text{ ura} = 0,04 \text{ kWh}.$$

Žarnica je gorela 12 delavnikov in 2 nedelji. Ob delavnikih je gorela vsak dan 11 ur v času, ko je cena električne energije nižja. Prav tako je nižja cena električne energije vseh 24 ur v nedeljo. Za gorenje žarnice v tem času bo znesek na položnici višji za

$$(12 \times 11 + 2 \times 24) \times 0,04 \times 7,282 \text{ SIT} = 52,43 \text{ SIT}.$$

Za porabljeno energijo v preostalem času bo znesek na položnici višji za

$$(12 \times 13) \times 0,04 \times 12,375 \text{ SIT} = 77,22 \text{ SIT},$$

oziroma celotni račun bo višji za 130 tolarjev.

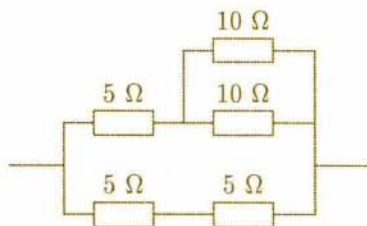
4. V vezju sta po dva zaporedno vezana upornika povezana vzporedno. Nadomestno upornost vseh štirih upornikov izračunamo iz

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{5\Omega + 5\Omega} + \frac{1}{5\Omega + 10\Omega} = \frac{1}{6\Omega}$$

in je

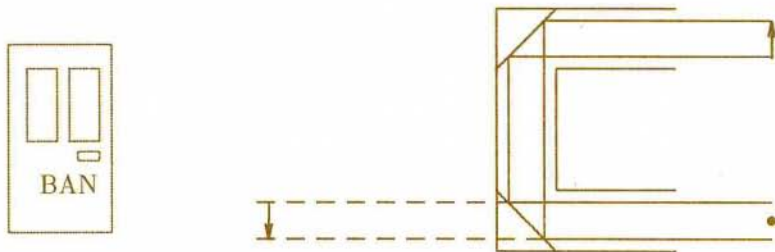
$$R = 6\Omega.$$

Upornost obeh vej mora biti enaka. Zato vzporedno z večjim upornikom povežemo dodatni upornik.



Slika 4.

5. Sliko vrat in poti žarkov kaže skica:



Slika 5.

Mojca Čepič

11. DRŽAVNO TEKMOVANJE V RAČUNALNIŠTVU ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve nalog

1. dela s str. 107

Tokrat objavljamo rešitve izbranih nalog iz prvih treh skupin. Primeri rešitev so pripravljani v MSW Logu.

Rešitve za 1. skupino (do 3. razreda)

Primer rešitve 1. naloge

```

TO kvad :d
  REPEAT 3 [ FORWARD :d RIGHT 90 ]
  RIGHT 90
END

TO lik :n :d
  REPEAT :n [ kvad :d RIGHT 360/:n ]
END

```

Primer rešitve 2. naloge

```

TO veckrat :n
  MAKE "v :n
  REPEAT 20 [ PRINT :v MAKE "v :v+:n ]
END

```

Primer rešitve 3. naloge

```

TO polkrog :v
  RIGHT 5 REPEAT 18 [ FORWARD :v RIGHT 10 ] LEFT 5
  RIGHT 180
END

TO skoki :n :v
  MAKE "del :v/:n
  REPEAT :n [ polkrog :v MAKE "v :v-:del ]
END

```

Rešitve za 2. skupino (4. razred)

Primer rešitve 1. naloge

```

TO pozdrav
  TEXTSCREEN CLEARTEXT
  PRINT [ Vpisi svoje ime: ]
  MAKE "ime READWORD
  PRINT [ ]
  PRINT [ Vpisi svoj priimek: ]
  MAKE "priimek READWORD
  PRINT [ ]
  PRINT (SENTENCE "Pozdravljen ", :ime :priimek "! )
END

```

Primer rešitve 3. naloge

```
TO trikot :n
  IF :n < 5 [ STOP ]
  REPEAT 3 [ FORWARD :n RIGHT 120 ]
  FORWARD :n/2 RIGHT 60
  trikot :n/2
END
```

Primer rešitve 4. naloge

```
TO lok :n
  RIGHT 2
  REPEAT 15 [ FORWARD :d RIGHT 4 ]
  LEFT 2
END

TO listek :d
  LEFT 30
  REPEAT 2 [ lok :d RIGHT 120 ]
  RIGHT 30
END

TO cvet :n :d
  BACK 3*:d FORWARD 3*:d
  LEFT 60
  RIGHT 60/:n REPEAT :n [ listek :d RIGHT 120/:n ] LEFT 60/:n
  LEFT 60
END
```

Rešitve za 3. skupino (5. razred)

Primer rešitve 1. naloge

```
TO izrez
  REPEAT 8 [
    FORWARD 20
    PENUP RIGHT 30 FORWARD 20 PENDOWN
    ARC 300 20
    PENUP RIGHT 120 FORWARD 20 LEFT 150 PENDOWN
    BACK 20
    RIGHT 360/8
  ]
END

TO krog :r
  ARC 360 :r
END
```

```

TO rozeta
  PENUP FORWARD 25 LEFT 90 FORWARD 10 RIGHT 90 PENDOWN
  izrez
  PENUP LEFT 90 BACK 10 RIGHT 90 BACK 25 PENDOWN
  krog 100
  krog 120
END

```

Primer rešitve 2. naloge

```

TO igra
  TEXTSCREEN
  CLEARTEXT
  MAKE "zacetno 300
  MAKE "meja 100
  PRINT [zacetno stanje je 300 $]
  PRINT [ ]
  potek
  PRINT [igre je konec]
END

```

```

TO potek
  IF :zacetno<:meja [ STOP ]
  MAKE "dobitek 1 + RANDOM 150
  MAKE "izguba :dobitek + 1 + RANDOM 50
  MAKE "zacetno :zacetno + :dobitek - :izguba
  PRINT (SENTENCE [dobitek:] :dobitek)
  PRINT (SENTENCE [izguba:] :izguba)
  PRINT (SENTENCE [stanje:] :zacetno)
  potek
END

```

Primer rešitve 3. naloge

```

TO povprecje
  ; "n je stevilo ucencev, "p povprecje, "v visina ucenca
  ; "vsota je vsota vseh visin
  TEXTSCREEN
  CLEARTEXT
  MAKE "n 0 MAKE "vsota 0
  PRINT [ vnasaj visine ucencev, koncaj z 0 ]
  WHILE [ :v > 0 ] [
    MAKE "v READWORD MAKE "vsota :vsota+:v MAKE "n :n+1 PRINT :v
  ]
  MAKE "p :vsota/(:n-1)
  PRINT (SENTENCE [ Povprecna visina ucencev je ] :p)
END

```

Tihomil Šlenc

11. DRŽAVNO TEKMOVANJE V RAČUNALNIŠTVU ZA OSNOVNOŠOLCE – 2. del

Naloge za 4. skupino – pascal ali basic (učenci 6. razreda)

1. naloga:

Včasih želimo v besedilu zamenjati kakšno besedo z drugo. V našem primeru bomo vpisovali naslove šol. Da nam bo šlo vpisovanje naslovov hitreje od rok, bomo pri vpisovanju uporabili kratico "OŠ", pri izpisu seznama na zaslon pa želimo imeti besedilo v celoti: "Osnovna šola". Sestavi program, ki bo v besedilu (tega vnašamo preko tipkovnice) zamenjal kratico "OŠ" z besedilom "Osnovna šola". Vnesti želimo do 20 naslovov osnovnih šol.

Primer:

Vnos:

OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana

Izpis:

Osnovna šola Majde Vrhovnik, Ljubljana

2. naloga:

Napiši program, ki izračuna in na zaslon izpiše število dni med dvema datumoma v letošnjem letu! Oba datuma podamo preko tipkovnice.

3. naloga:

Napiši podprogram, ki bo naravno število (naj ne bo večje od 2000) zapisal z rimskimi številkami:

$$1000 = M, 500 = D, 100 = C, 50 = L, 10 = X, 5 = V, 1 = I$$

Upoštevati moraš tudi pravilo, da si lahko sledijo največ trije enaki znaki, tako da pišemo 4 v obliki *1 manj kot 5* itd., npr.:

$$4 = IV, 9 = IX, 40 = XL, 90 = XC, \dots$$

Števila preko tipkovnice vnašamo zapisana z običajnimi (arabskimi) številkami.

Naloge za 5. skupino – pascal ali basic (učenci 7. razreda)

1. naloga:

Včasih moramo sešteti veliko decimalnih števil. Zanima nas, ali se zaradi zaokroževanja števil pred seštevanjem natančnost dobljene vsote zmanjša. Sestavi program, ki bo v tabelo zapisal 1000 slučajno izbranih realnih števil med 0.00 in 100.00 z natančnostjo na dve decimalki. Izračunal bo vsoto teh 1000 števil in jo zaokrožil na celo število. Seštel pa bo tudi ista števila tako, da bo vsako *pred seštevanjem* zaokrožil na celo

število. Razlika obeh vsot je napaka, ki je nastala zaradi zaokroževanja posameznih števil. Program naj izračun ponovi dvajsetkrat (vsakokrat z novimi števili) in rezultate v obliki tabele izpiše na zaslon. Izpiše naj tudi največjo in najmanjšo razliko.

Primer izpisa na zaslon:

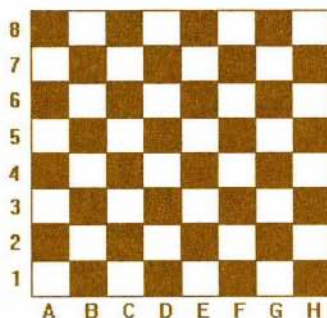
Vsota števil	Vsota zaokroženih števil	Razlika
50196	50199	-3.00
52791	52787	4.00
⋮	⋮	⋮
50268	50280	-12.00
Največja razlika: 12		Najmanjša razlika: 3.00

2. naloga:

Napiši program, ki naključno izbere naravno število med 0 in 999 ter ga izpiše razbitega na stotice, desetice in enice. Npr.: 267 = 2S 6D 7E, 32 = 0S 3D 2E.

3. naloga:

Program, ki ga boš sestavil, naj nariše na sredino zaslona šahovnico (kako izgleda pravilno narisana šahovnica, vidiš na spodnji sliki). Za belo polje uporabi po dva znaka s kodo 219, za črno pa po dva presledka (koda je 255). Ob levem in ob spodnjem robu naj program vpiše oznake vrstic oz. stolpcev.



Naloge za 6. skupino – pascal ali basic (učenci 8. razreda)

1. naloga:

Napiši podprogram, ki bo z izbrane tekstovne datoteke prenesel poljubno število vrstic na drugo (novo) datoteko. Začetna in končna zaporedna številka vrstice naj bosta parameterna podprograma. Privzeti smeš, da vhodna tekstovna datoteka obstaja.

2. naloga:

Dano imaš tabelo ničel in enic, ki je deklarirana kot

ARRAY[1..max,1..max] OF 0..1.

Napiši podprogram, ki bo na zaslon izpisal dolžine najdaljših nizov enic (brez vmesnih ničel) v posamezni vrstici!

Primer je ponazorjen spodaj. Velikost tabele je 5×5 . Izpisan je tudi rezultat za posamezne vrstice:

1	0	1	1	0	2
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	2
1	1	1	0	1	3

3. naloga:

Napiši program (varčevalec zaslona), ki bo po ekranu premikal "zvezdice" v obliki pik. Zvezdice naj bodo velikosti 1 pike zaslona in naj se premikajo od levega roba proti desnemu. Barva posamezne zvezdice je lahko temnosiva (8), siva (7) ali bela (15). Svetlejša kot je zvezdica, hitreje naj potuje po zaslonu. Zvezdico opišemo na naslednji način:

Zvezda = **RECORD**

x, y : integer; { koordinati x in y }

h : integer; { hitrost zvezdice }

d : integer; { barva zvezdice; vrednosti: 8, 7 ali 15 }

END;

Podatki o zvezdicah so zapisani v tabeli. Na zaslonu naj se nahaja 31 zvezdic. Ko zvezdica pripotuje do desnega roba, naj izgine in se zopet pojavi v isti vrstici ob levem robu. Program naj se konča ob pritisku na poljubno tipko.

Za pomoč sta dana podprograma OdpriGraf, ki odpre grafični način dela, in ZapriGraf, ki zapre grafični način dela, ter funkcijo PutPixel(x,y,barva).

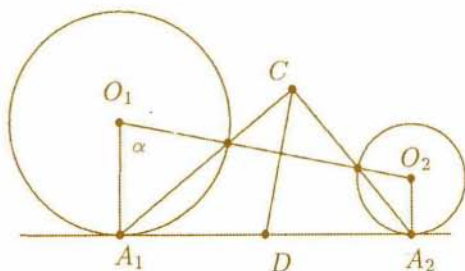
Tihomil Šlenc

MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – 2. del

Rešitve nalog drugega dela:

Prva skupina

1. Označimo $\alpha = \angle B_1 O_1 A_1$. Potem je $\angle B_2 O_2 A_2 = \pi - \alpha$. Kot med tetivo $A_1 B_1$ in tangento $A_1 A_2$ je enak polovici središčnega kota $\angle B_1 O_1 A_1$. Torej je $\angle C A_1 A_2 = \alpha/2$. Trikotnik $O_1 B_1 A_1$ je enakokrak z vrhom O_1 . Potem je $\angle O_1 B_1 A_1 = \pi/2 - \alpha/2$ in za-



radi pravokotnosti daljic CD in $B_1 B_2$ je zato $\angle B_1 C D = \alpha/2$. Trikotnik $A_1 D C$ je tako enakokrak z vrhom D . Povsem podobno dokažemo, da je tudi trikotnik $A_2 D C$ enakokrak z vrhom D . Naloga je tako rešena. Iz dokaza vidimo, da je točka D pravzaprav središče (pravokotnemu) trikotniku $A_1 C A_2$ očrtane krožnice.

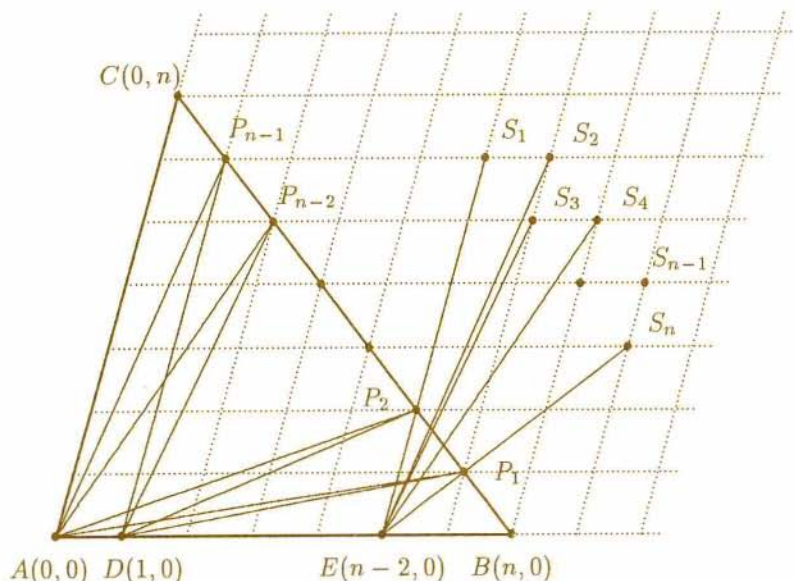
2. Privzamemo lahko, da je $m \geq n$. Igra je v primeru $m = 1$ precej nezanimiva, zato naj bo $m > 1$. Zmagovita strategija za prvega igralca je tedaj povsem enostavna – igralec mora vedno premakniti trdnjavo v smer najdaljšega možnega pomika. (Če sta možni smeri dve, lahko izbere katerokoli.)

Dokažimo, da je opisana strategija res zmagovita. Po prvi potezi prvega igralca je pas ob daljši stranici pravokotnika pobarvan in drugi igralec lahko naredi svojo morebitno potezo le v smeri krajše stranice pravokotnika. Preostali pravokotnik je dimenzij $m \times (n-1)$ in $m > n-1$. Če je $n = 1$, drugi igralec izgubi, saj ne more narediti poteze. Če pa je $n > 1$, postane po potezi drugega igralca pobarvan del pasu ob krajšem robu table $m \times (n-1)$. Ker je $m \geq 2$, lahko potem prvi igralec naredi potezo v skladu z opisano strategijo. Po njegovi potezi obstane trdnjava na takem pobarvanem polju, da lahko drugi igralec naredi svojo morebitno potezo le v smeri krajše stranice enega od nepobarvanih pravokotnikov.

Sedaj pa že vidimo, da se položaj drugega igralca kvalitativno ni spremenil. Morebitno potezo lahko naredi le v smeri krajše stranice in če lahko potezo res naredi, jo lahko potem naredi tudi prvi igralec. Ker se dimenzija nepobarvanega pravokotnika zmanjšuje, drugi igralec izgubi.

Druga skupina

1. Naj bo $n > 2$ poljubno naravno število. Vpeljimo poševni koordinatni sistem. Koordinatno izhodišče naj bo točka A , osi pa naj ležita na straneh trikotnika. Privzamemo lahko, da leži stranica BC v prvem kvadrantu in da je $|AB| = |AC| = n$ (glej sliko).



Postavimo točke $E(n-2,0)$, $S_1(n-2, n-1)$, $S_2(n-1, n-1)$, $S_3(n, n-2)$, ..., $S_n(n-2 + [\frac{n}{2}], [\frac{n}{2}])$, kjer oglati oklepaj označuje celi del. Potem je $\angle DP_{n-1}A = \angle S_1ES_2$, $\angle DP_1A = \angle S_2ES_3$, $\angle DP_{n-2}A = \angle S_3ES_4$, $\angle DP_2A = \angle S_4ES_5$, ..., od koder sledi

$$\sum_{i=1}^{n-1} \angle DP_iA = \sum_{i=1}^{n-1} \angle S_iES_{i+1} = \angle S_1AS_n = \frac{1}{2} \angle CAB.$$

2. Dokazali bomo le točko (b). Za $i = 1, 2, \dots, 2^n$ naj a_i označuje i -to vrstico – tj. vektor z n komponentami. Privzamemo lahko, da je $a_1 = (1, 1, \dots, 1)$ in $a_{2^n} = (-1, -1, \dots, -1)$. Ker so vse vrstice različne, je s predpisom $f: a_i \mapsto f(a_i)$ natančno določena preslikava f , kjer $f(a_i)$

označuje spremenjeno i -to vrstico. Za poljuben vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ označimo $g(x) = (1 - 2x_1, 1 - 2x_2, \dots, 1 - 2x_n)$. Enostavno povedano: 0 spremenimo v 1, 1 pa v -1 .

Tvorimo zaporedje: $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = b_1 + f(g(b_1))$, $b_3 = b_2 + f(g(b_2))$, $\dots$, $b_{2^n} = b_{2^n-1} + f(g(b_{2^n-1}))$. Iz definicije zaporedja vidimo, da so vse komponente vsakega vektorja b_i enake 0 ali 1. Če obstajata v zaporedju $(b_i)_i$ enaka vektorja b_m in b_n ($m > n$), izbremo števili m in n tako, da ima razlika $m - n$ najmanjšo možno vrednost. (Vektorji $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{m-1}$ so tedaj različni.) Potem je

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + f(g(b_n)) \\ b_{n+2} &= b_{n+1} + f(g(b_{n+1})) \\ &\vdots \\ b_m &= b_{m-1} + f(g(b_{m-1})). \end{aligned}$$

Ko seštejemo vse leve in desne strani gornjih enačb in upoštevamo enakost $b_m = b_n$, dobimo

$$f(g(b_n)) + f(g(b_{n+1})) + \dots + f(g(b_{m-1})) = (0, 0, \dots, 0)$$

in naloga je v tem primeru rešena.

Če pa so v zaporedju $(b_i)_i$ vsi členi različni, je $b_i = (0, 0, \dots, 0)$ za neki indeks i . Potem je

$$\begin{aligned} b_2 &= f(g(b_1)) \\ b_3 &= b_2 + f(g(b_2)) \\ &\vdots \\ b_i &= b_{i-1} + f(g(b_{i-1})). \end{aligned}$$

Upoštevajmo sedaj, da je b_i ničelni vektor, in podobno kot zgoraj dobimo

$$f(g(b_1)) + f(g(b_2)) + \dots + f(g(b_{i-1})) = (0, 0, \dots, 0).$$

Naloga je tudi v tem primeru rešena.

Matjaž Željko

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE – Rešitve nalog s str. 123

I/1 Osnovo številskega sistema označimo z m . Torej je $am^2 + am + a = a^3$. Ker je $a \neq 0$, lahko enačbo delimo z a in dobimo $m^2 + m + 1 = a^2$. Ker je

$$m^2 < m^2 + m + 1 < (m+1)^2,$$

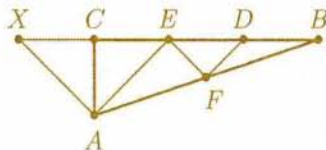
število a ne more biti celo.

I/2 Najprej obrnemo obe peščeni uri. Po 7 minutah obrnemo prvo, po 11 minutah drugo, po 14 minutah pa spet obe. V drugi peščeni uri se bo pesek pretočil po 17 minutah, 3 minute po zadnjem obratu.

I/3 Števili sta enaki, kot kaže naslednji račun:

$$\begin{aligned} x^y &= \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{(n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right)^{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = y^x. \end{aligned}$$

I/4 Naj bo b dolžina katete AC . Ker leži točka E bližje oglišču C kot točka D , je $|CE| = b$. Na nosilki katete BC označimo z X točko, ki ne leži na kateti BC in je od oglišča C oddaljena za b . Trikotnik XCA je torej enakokrak in, ker je kot



$\angle XCA$ pravi, je $\angle CXA = 45^\circ$. Enakokrak je tudi pravokotni trikotnik AEC , zato je tudi kot CEA enak 45° .

Nadalje je $\frac{|XE|}{|EB|} = \frac{|AF|}{|FB|}$, zato je daljica XA vzporedna z daljico EF . Ker pa je $\frac{|ED|}{|DB|} = \frac{|AF|}{|FB|}$, sta tudi daljici AE in FD vzporedni. Zato oba kota DEF in EDF merita 45° in trikotnik DEF je enakokrak in pravokoten.

II/1 Pomnožimo enačbo s $p^2 q^2 r^2$ in preoblikujemo:

$$x^2 q^2 r^2 + y^2 p^2 r^2 + z^2 p^2 q^2 = p^2 q^2 r^2.$$

Ker so števila p , q in r paroma tuja, je število x deljivo s p , število y deljivo s q in število z deljivo s r . Torej lahko zapišemo $x = kp$, $y = lq$ in $y = mr$, kjer so k, l in m cela števila. Slednje vstavimo v prvotno enačbo in dobimo enačbo

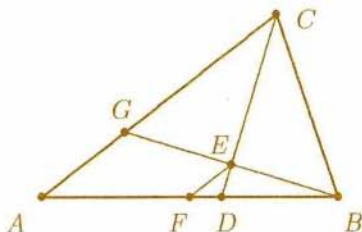
$$k^2 + l^2 + m^2 = 1,$$

ki ima natanko 6 celoštevilskih rešitev: $k = \pm 1$ in $l = m = 0$, $l = \pm 1$ in $k = m = 0$ ter $m = \pm 1$ in $k = l = 0$. Nalogo torej rešijo naslednje trojice števil:

$$(\pm p, 0, 0), (0, \pm q, 0) \text{ in } (0, 0, \pm r).$$

II/2 Ločimo tri primere. Če je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$, točki E in F sovpadeta in tedaj je $|EF| = 0$.

Če je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BAC$, označimo z G presečišče stranice AC in nosilke daljice EB . Potem sta si trikotnika FBE in ABG podobna.



Od tod sledi

$$|EF| = \frac{|FB|}{|AB|} |GA| = \frac{1}{2} |GA| = \frac{1}{2} (|AC| - |GC|).$$

Ker sta si podobna tudi trikotnika EGC in EBC , je $|GC| = |BC|$. Od tod sledi $|EF| = \frac{1}{2} (|AC| - |BC|)$.

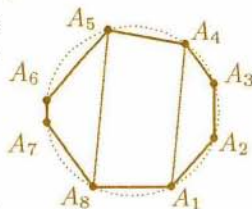
Če pa je $\sphericalangle ABC < \sphericalangle BAC$, podobno kot v drugem primeru izpeljemo, da je $|EF| = \frac{1}{2} (|BC| - |AC|)$. Splošni rezultat je torej $|EF| = \frac{1}{2} ||AC| - |BC||$.

II/3 Kota $\sphericalangle A_1 A_2 A_3$ in $\sphericalangle A_5 A_6 A_7$ imata vzporedne krake, zato sta enako velika, na primer α . Štirikotnik $A_1 A_2 A_3 A_4$ je tetiven, zato je

$$\sphericalangle A_3 A_4 A_1 = \pi - \sphericalangle A_1 A_2 A_3 = \pi - \alpha.$$

Tudi štirikotnik $A_5 A_6 A_7 A_8$ je tetiven, zato je

$\sphericalangle A_7 A_8 A_5 = \pi - \alpha$. Ker je $\sphericalangle A_7 A_8 A_5 = \sphericalangle A_3 A_4 A_1$, je $A_1 A_4 \parallel A_5 A_8$. Daljici $A_8 A_1$ in $A_4 A_5$ sta tetivi nad istim središčnim kotom, zato sta enako dolgi.



II/4 Dokažimo s protislovjem, da kvadrata ne moremo prekriti na zahtevani način.

Denimo nasprotno. Pobarvamo polja kot šahovnico. Vsaka domina mora ležati na dveh sosednjih poljih, sosednji polji pa sta različne barve. Polovica vsake domine leži na črnem, polovica pa na belem polju. Torej bi moralo biti črnih kvadratkov enako kot belih, kar pa ni res.

III/1 Preoblikujmo izraz:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \\&= \frac{1}{2} \cos \alpha (\cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma)) = \\&= \frac{1}{2} \cos \alpha (\cos(\beta - \gamma) - \cos \alpha) = \\&= \frac{1}{2} \cos \alpha (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} \cos \alpha (1 - \cos(\beta - \gamma)) = \\&= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \alpha\right)^2 - \frac{1}{2} \cos \alpha (1 - \cos(\beta - \gamma)).\end{aligned}$$

Neenakost je dokazana, saj je $(\frac{1}{2} - \cos \alpha)^2 \geq 0$, $\cos \alpha > 0$ in $1 - \cos(\beta - \gamma) \geq 0$. Enakost velja le v primeru, ko je $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ in $\beta = \gamma$, torej v primeru, ko je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

III/2 V enačbo vstavimo $x = 0$ in dobimo, da je 0 ničla polinoma p . Nato vstavimo $x = 1$ in ugotovimo, da je tudi 1 ničla polinoma p . Tako lahko nadaljujemo do števila 1995 in izpeljemo $p(x) = x(x - 1) \cdots (x - 1995)q(x)$. Za polinom q velja enačba $q(x - 1) = q(x)$. To pa je mogoče le, če je polinom q konstanten, torej je

$$p(x) = c x(x - 1) \cdots (x - 1995)$$

za poljubno realno število c .

III/3 Da bo izraz na levi sploh definiran, mora biti $xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ za vsako celo število k . Ker je logaritem strogo monotona funkcija, velja

$$\begin{aligned}\log_2 \left(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy} \right) &= \\&= \log_2 \left(\cos^2 xy - 2 \frac{\cos^2 xy}{\cos^2 xy} + \frac{1}{\cos^2 xy} + 2 \right) = \\&= \log_2 \left(\left(\cos xy - \frac{1}{\cos xy} \right)^2 + 2 \right) \geq \log_2 2 = 1,\end{aligned}$$

torej je leva stran enakosti večja od 1 ali enaka 1. Po drugi strani pa je desna stran enakosti manjša od 1 ali enaka 1, saj je

$$\frac{1}{y^2-2y+2} = \frac{1}{(y-1)^2+1} \leq 1.$$

Enakost je dosežena le, če je $\cos xy - \frac{1}{\cos xy} = 0$ in $\frac{1}{(y-1)^2+1} = 1$. Iz druge enačbe sledi $y = 1$, nato pa iz prve enačbe izpeljemo, da je $x = m\pi$, kjer je m poljubno celo število.

III/4 Naj bosta T_A in T_B razpolovišči stranic BC in AC . Trikotnika AT_AC in BT_BC sta si podobna, zato je

$$|AC| : \frac{1}{2}|BC| = |BC| : \frac{1}{2}|AC|,$$

torej je $|AC| = |BC|$. Iz sinusnega izreka za trikotnik AT_AC sledi, da je kot $\sphericalangle AT_AC$ pravi. Potem pa se trikotnika AT_AB in AT_AC ujemata v dveh stranicah in enem kotu, torej sta skladna. Od tod sledi $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Podobno dobimo še $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, zato je trikotnik ABC res enakostraničen.

IV/1 Štiri točke izmed sedmih lahko izberemo na $\binom{7}{4} = 35$ načinov. Če te štiri točke niso oglišča konveksnega štirikotnika, določajo tri različne konkavne štirikotnike.



Naj bo k število tistih štiric točk, ki ne določajo konveksnega štirikotnika. Potem je število vseh iskanih štirikotnikov enako

$$(\binom{7}{4} - k) \cdot 3 + k = 105 - 2k.$$

IV/2 Očitno je $S = \{p^i q^j; i, j \in \mathbb{Z}, i, j \geq 0\} \setminus \{1\}$. Računajmo

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{s} = \sum_{i,j \geq 0} \frac{1}{p^i q^j} - 1 = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{p^i} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{q^j} - 1 = \frac{pq}{(p-1)(q-1)} - 1.$$

IV/3 Ker je $2 = f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2)f(1) = 2f(1)$, je $f(1) = 1$. Z indukcijo zlahka dokažemo, da je $f(2^k) = 2^k$ za vsa nenegativna cela števila k . Potem pa iz verige neenakosti

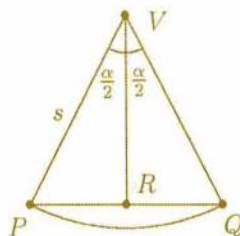
$$2^k < 2^k + 1 < 2^k + 2 < \dots < 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}$$

sledi

$$f(2^k) < f(2^k + 1) < f(2^k + 2) < \dots < f(2^{k+1} - 1) < f(2^{k+1}).$$

Ker leži med številoma $f(2^k) = 2^k$ in $f(2^{k+1}) = 2^{k+1}$ natanko $2^k - 1$ celih števil, mora biti $f(2^k + j) = 2^k + j$ za vse $j = 1, 2, \dots, 2^k - 1$.

IV/4 Označimo vrh stožca z V , prerežimo njegov plašč vzdolž daljice PV in ga razgrnimo v ravnino. Potem je najkrajša pot kar daljica PQ in iskana razdalja je enaka višini na osnovnico PQ enakokrakega trikotnika PQV . Označimo $\alpha = \angle PVQ$. Potem je $\alpha s = 2\pi r$ in $|VR| = s \cos \frac{\alpha}{2} = s \cos(\frac{r}{s}\pi)$.



Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

24. letnik, šolsko leto 1996/97, številka 3, strani 129 – 192

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1996/97 je za posamezne naročnike 1.500 SIT, za skupinska naročila šol 1.200 SIT, posamezna številka 300 SIT, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1298



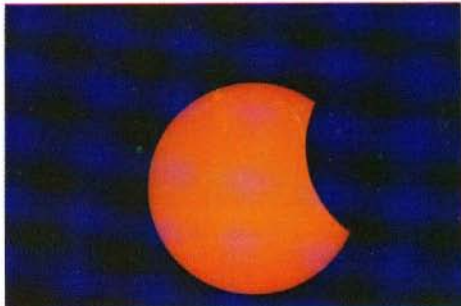
Svetlobni mlinček iz fizikalne zbirke: neosvetljen miruje (levo), osvetljen se vrti (desno). Slika k članku na strani 130.

PREDZADNJI SONČEV MRK V TEM STOLETJU

Slike prikazujejo štiri faze naraščanja Sončevega mrka, ki smo ga 12. oktobra letos lahko opazovali tudi pri nas. Posnete so z 10 palčnim teleskopom MEADE LX-200, f/6,3 na film POLAROID 100ASA. Številke ob slikah pomenijo trajanje osvetlitve in čas posnetka.



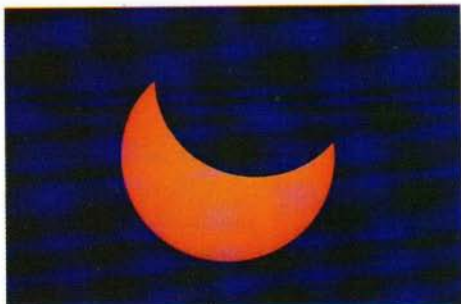
1/30 s; 15:35



1/125 s; 15:50

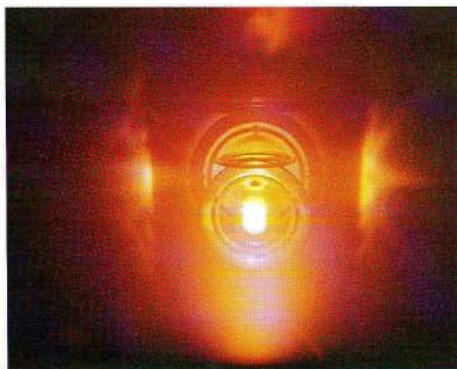


1/125 s; 16:13

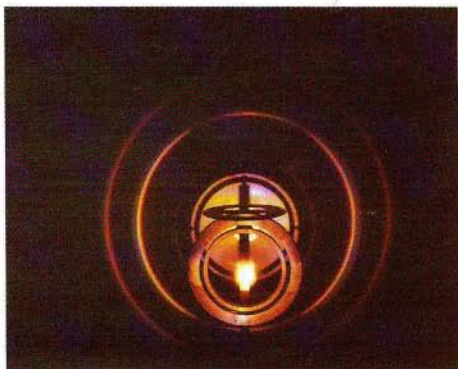


1/15 s; 16:43 (vrh mrka)

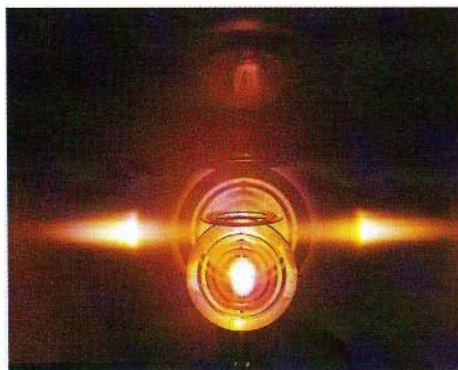
Foto Anja Čerin s prijatelji



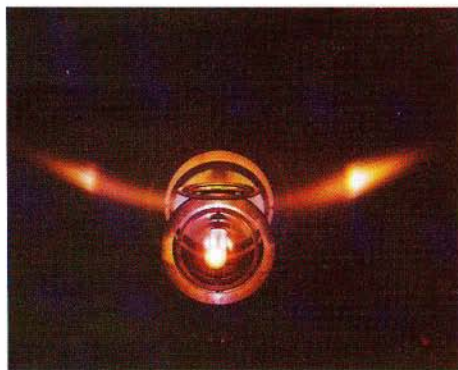
Slika 2. Posnetek sosonc, na levi strani pa sta vidna še zgornji in spodnji Lowitzov lok ter delno mali hálo.



Slika 3. Notranji krog je posnetek malega hála.



Slika 4. Posnetek sosonc za primer, ki ustreza soncu na horizontu.



Slika 5. Posnetek sosonc pri nagibu glavne osi prizme za 15° glede na navpičnico.



Sliki 6 in 7. Posnetka zgornjega in spodnjega Lowitzovega loka.

