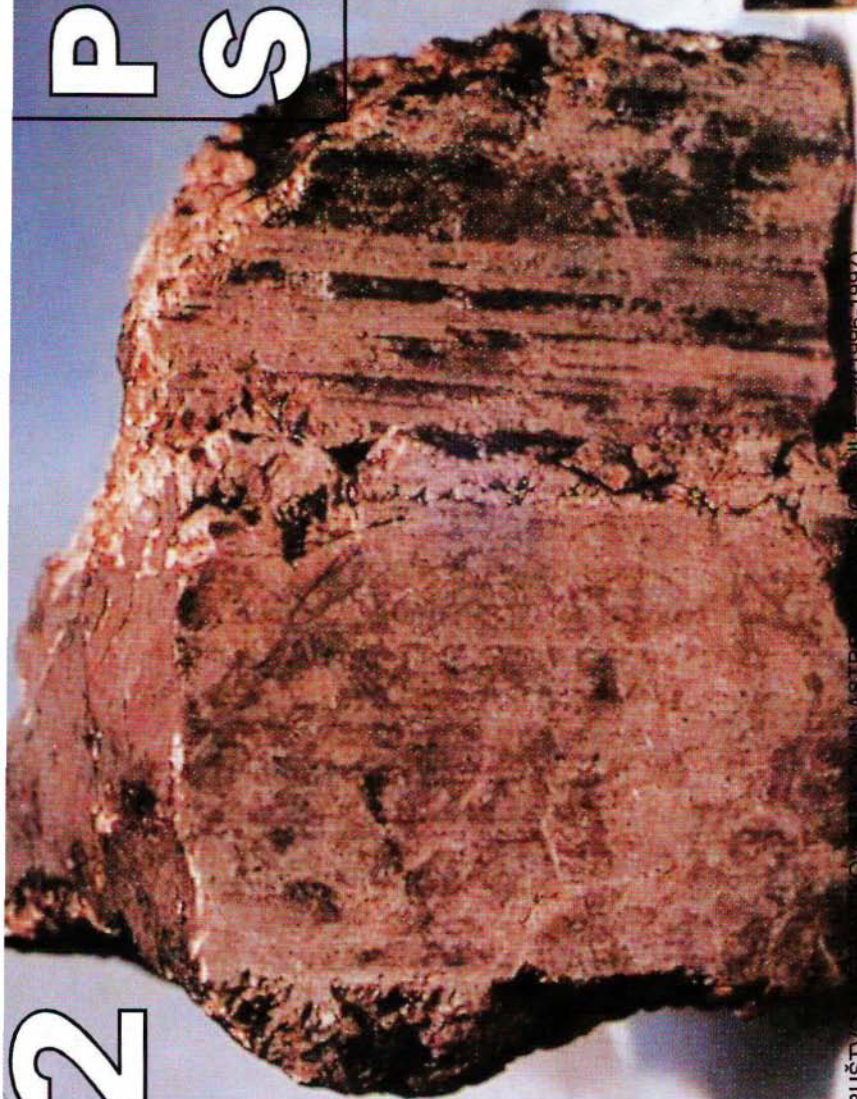


2

PRE SEK



1511

E

DRUŠTVO ZA ŠTUDIJSKO IZVOĐENJE IZ OBLASTI INŽENJERINGA I ARHITEKTURE
ISSN 0351-1000 (2006) 24(1996-1997)

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
24. letnik, leto 1996/97, številka 2, strani 65–128

VSEBINA

MATEMATIKA	Višinska točka trikotnika in stožnice (Nada Razpet) ..	74-77
FIZIKA	Aristotel in Arhimed o vzvodu (Janez Strnad)	70-72
	Sprehod po megli (Jože Rakovec)	102-106
ASTRONOMIJA	Iskanje izvenzemeljskih civilizacij in bakterije z Marsa (Mirjam Galičič)	65-69
	Hijade (Marian Prosén)	92-94
RAČUNALNIŠTVO	Narišimo mrežo kocke (Matija Lokar)	78-81
NOVICE	Gottfried Wilhelm Leibniz (Petar Pavešič)	84-88
NALOGE	Praštevilske vrednosti polinoma (Dušan Murovec)	69
	Kvadrati praštevil (Boris Lavrič)	83
	Vse manj je dobrih gostiln (Marija Vencelj)	83
	Kateri slavni matematik je to? (Marija Vencelj)	100
	Prištevanka za dva (Marija Vencelj)	III
REŠITVE NALOG	Ali je vsota kvadratov samih neničelnih števil lahko enaka nič? – s str. 13 (Jurij Kovič)	72
	Zaporedna števila – s str. 27 (Martin Juvan)	73
	Skrit račun – s str. 53 (Marija Vencelj)	77
	Tri naloge iz geometrije – s str. 52 (Borut Zalar)	81-83
	Podaljšana Langfordova zaporedja – s str. 53 (Martin Juvan)	88-90
	Križanka "Računalniške povezave" – s str. 32 (Marko Bokalič)	90
	Kako hitro hoditi? – s str. 1 (Marija Vencelj)	91
	Knjižni nakupi – s str. 25 (Vilko Domajnko)	91
	Zapeljivi radiolar – s str. 26 (Vilko Domajnko)	94-95
	Nekaj zanimivih nalog za najmlajše bralce – s str. 24 (D. M. Milošević, prev. B. Japelj)	95
	Razpis na temo 1997 – Rešitev s str. 18 (Marija Vencelj)	98-100
	Pisani krogi – s str. 19 (Martin Juvan)	101
RAZVEDRILO	Križanka "Presekovi uredniki" (Marko Bokalič)	96-97
TEKMOVANJA	Mednarodna matematična olimpiada 1997 (Matjaž Željko)	107
	11. državno tekmovanje v računalništvu za osnovnošolce – naloge, 1. del (Tihomil Šlenc) ...	107-111
	31. področno tekmovanje za Srebrno Vegovo priznanje – naloge (Aleksander Potočnik)	112-116
	16. področno tekmovanje iz fizike za osnovnošolce – naloge (Mojca Čepič)	117-119
	Mednarodno matematično tekmovanje mest, 1. del (Matjaž Željko)	119-122
	Izbirno tekmovanje iz matematike – naloge (Matjaž Željko)	123-124
	Naloge s predtekmovanja iz srednješolske fizike (Ciril Dominko)	124-128
NA OVITKU	Meteorit ALH84001. Za to približno štiri in pol milijarde let stara skalo verjamejo, da je nekoč bila del Marsa. V njej so našli fosilne ostanke primitivnega življenja. Glej članek na strani 65.	I
	Slike k članku na strani 65.	III-IV

ISKANJE IZVENZEMELJSKIH CIVILIZACIJ IN BAKTERIJE Z MARSA

Avgusta letos so naslovne strani vseh časopisov po svetu posredovale Nasino vest o "odkritju ostankov primitivnega življenja na Marsu". V stavku bomo povedali nekaj besed o tem, kakšni dvomi so vendarle prisotni ob "odkritju stoletja" in še prej pregledali, kaj se dogaja z razvpitim projektom SETI, v okviru katerega znanstveniki iščejo sporočila oddaljenih civilizacij.

Vzpon in zaton projekta SETI

Vprašanje, ali izven Zemlje obstajajo inteligentna bitja, je eno od velikih vprašanj, ki si jih od nekdaj zastavlja človeštvo. Ljudje bi radi vedeli, ali smo mar res v vesolju sami. Radi bi tudi bolje razumeli svoj položaj v vesolju in nastanek ter razvoj svoje civilizacije.

V dvajsetem stoletju je prišlo do možnosti, da se s tem vprašanjem začne ukvarjati ne le posameznikova domišljija in pisci znanstvene fantastike ampak tudi znanost. Prvi začetki projekta *Iskanje izvenzemeljskih civilizacij* (*Search for Extraterrestrial Intelligence – SETI*) segajo v davno leto 1959. Tedaj je ameriški fizik Philip Morrison predlagal, da bi za iskanje mikrovalovnih signalov, ki jih morda namerno pošiljajo v okolico druga inteligentna bitja, lahko uporabili radijske teleskope. O tem je pisala tudi ugledna ameriška znanstvena revija *Nature*. Med pomembnimi znanstveniki, ki sodelujejo pri iskanju inteligentnih signalov iz vesolja, so še znani astrofizik in pisec astronomskih tekstov ter znanstvene fantastike Carl Sagan, astrofizičarka Jill Tarter, fizik in elektronik Paul Horowitz in astronom Frank Drake, idejni vodja postavitve največjega radijskega teleskopa na svetu, 305-metrške antene observatorija Arecibo v Puerto Ricu.

Frank Drake je poznan tudi po eni od enačb, ki se seveda imenuje *Drakova enačba* in z njo ocenimo število inteligentnih civilizacij v naši Galaksiji. Pravi, da je to število sorazmerno številu zvezd v Galaksiji. Sorazmernostnih faktorjev pa je lepo število. Obsegajo delež zvezd, ki imajo planete; delež planetov, ki so podobni Zemlji; delež planetov, na katerih bi se lahko razvilo življenje; delež tistih, kjer bi nastalo življenje prišlo do stopnje intelligence, tako da bi bilo sposobno namerno oddajati signale; delež tistih od nazadnje naštetih planetov, kjer civilizacija želi komunicirati z okolico in na koncu je še faktor, ki upošteva povprečen življenjski čas inteligentne civilizacije. Enačba je po svojem nastanku bolj kone "fomenološka", torej ne izvira iz osnovnih fizikalnih zakonov. Velika težava je v tem, da so ocene za vse od naštetih faktorjev zelo slabe, o njih lahko pravzaprav le ugibamo, saj primanjkuje opazovalnih

podatkov. Bolj kot konkretne ocene nam ta enačba da misliti, kako veliko je dejavnikov, ki vplivajo na število za nas opaznih inteligentnih civilizacij in kako majhne so naše možnosti, da bi zares slišali pozdrave "majhnih zelenih možictev".

Dolgoletne sanje in trdo delo pionirjev projekta SETI je končno dobilo potrditev leta 1992, ko je NASA začela z desetletnim programom iskanja radijskih signalov, ki bi jih morebiti proizvedle izvenzemeljske civilizacije. Prve meritve so bile opravljene ravno z radijsko anteno v Arecibu. Poskusne meritve preteklih let so pokazale, da je v radijskem področju ogromno šuma. To so raznovrstni signali (pomislino samo na radijske oddajnike), ki jih proizvajajo ljudje na Zemlji. Radijski teleskopi jih zaznavajo in če hočejo astronomi ločiti zrno (signale iz vesolja) od plev (šuma), potrebujejo za to ustrezno razvite metode, pri katerih je uporaba elektronskih priprav in računalnika nujna. Ker ne vemo, pri kateri frekvenci oziroma valovni dolžini bi druga bitja oddajala, moramo biti sposobni zaznavati signale hkrati pri čimveč različnih frekvencah, ali kot pravijo eksperimentalki, na različnih kanalih. Tako so pod vodstvom Paula Horowitza razvili napravo, ki je sposobna zbirati signale in analizirati več milijonov kanalov hkrati.

Med množico zbranih podatkov so sicer našli nekatere, ki so se jim zdeli še posebej nenavadni in obetajoči, vendar se je navadno izkazalo, da se jih da prav lepo identificirati in razložiti njihov nastanek. Z objavljanjem alarmantnih vesti pa so bili znanstveniki še posebej previdni, saj bi te med ljudmi povzročile najmanj preplah. Zato se iskalci izvenzemeljskih civilizacij trdno držijo znanstvenega načela, da je treba z objavo počakati, dokler trditev ni večkrat in neodvisno preverjena. Projekt SETI je bil kratkega diha, zaključiti so ga morali veliko prej, kot so pričakovali njegovi načrtovalci. Čeprav je uporabljal največji radijski teleskop, sodelovali pa so še mnogi manjši, ni bil odkrit in potrjen noben signal, ki bi prihajal od drugih civilizacij.

Med drugimi projekti je treba omeniti še program META, ki poteka pod okriljem znane ameriške organizacije za raziskave Osončja, *The Planetary Society*. Konec osemdesetih so v okviru tega projekta začeli s petletnim programom pregleda severnega neba. Ravno pri tem projektu uporabljajo Horowitzovo napravo za hkratno analizo milijonov signalov. To napravo elektroniki še izboljšujejo, dosegla naj bi skoraj stokrat večjo zmogljivost od začetne. Dosedanji rezultati projekta META so prikazani na sliki 1 na notranji strani ovitka.

SETI postane Feniks

Projekt SETI je skoraj umrl, ko je leta 1994 ameriški kongres zaradi velikega primanjkljaja v državni blagajni ukinil njegovo financiranje. Nekaj

navdušenih privržencev, ki so pri projektu sodelovali od vsega začetka, je nemudoma začelo z iskanjem denarja na svojo roko. Tako Jill Tarter pravi, da so v štirih tednih uspeli najti prvo večjo privatno donacijo, s pomočjo katere se je rodil projekt *Phoenix*. (Pri simbolično izbranim imenu gre seveda za mitološkega ptiča starih Egipčanov, Feniksa, ki je sam sebe sežgal in nato pomlajen izletel iz pepela.)

Projektu je za nekaj mesecev dal streho nad glavo avstralski radijski teleskop Parkes, drugi največji radijski teleskop na južni zemeljski polobli (slika 2 na zadnji strani ovitka). Parkes je majhno mesto 300 kilometrov severozahodno od Sydneya. Doslej se je ta teleskop odlikoval po velikem številu pomembnih astronomskih odkritij, uporabljali pa so ga tudi pri sledenju medplanetarnih vesoljskih ladij, v zadnjem času npr. *Galilea* (v eni naslednjih številk Preseka boste našli sestavek *Kaj je doslej odkrilo vesoljsko plovilo Galileo?*). Februarja 1995 pa so ameriški znanstveniki začeli z opazovanjem dvestotih zvezd, podobnih Soncu, da bi zaznali neobičajne radijske signale z njih. Projekt seveda javnosti ni ostal skrit, zato je bilo po besedah avstralskega koordinatorja, Kevina Wellingtona, iz bližine Parkesa zelo težko odgnati privržence NLP-jev.

Znanstveniki so teleskop Parkes povezali z manjšim teleskopom Mopra, ki je postavljen 200 kilometrov severneje. Začeli so s testiranjem in izpopolnjevanjem nove metode, tako imenovane pseudointerferometrije, s pomočjo katere znajo izločiti skoraj vse lažne alarme, kakršni so v preteklosti tako pogosto vzbujali velike upe, na koncu pa so se vsi po vrsti izkazali kot nekaj človeškega. Z novo tehniko tako zmorejo iz več kot dvajset tisoč opazovanj izločiti kakih sto tistih, od katerih si obetajo kaj posebnega. Za večino slednjih se izkaže, da jih povzročijo umetni sateliti.

Medtem se je projekt *Phoenix* za nekaj časa preselil na radijske teleskope observatorija Green Bank v ZDA. Naslednji cilj skupine raziskovalcev je izpopolniti metodo opazovanj na daljavo. V prihodnosti naj bi tako vsa opazovanja izvajali iz kraja Mountain View v Kaliforniji, kjer stoji eden od Nasinih raziskovalnih centrov in kjer deluje Inštitut SETI.

Odkritje fosilnih ostankov bakterij v meteoritu z Marsa

Iskanje znakov inteligentnega življenja izven Osončja doslej ni obrodilo sadov. V začetku letošnjega avgusta (1996) pa je svet obšla alarmantna vest, da so Nasini raziskovalci odkrili primitivno obliko mikroskopskega življenja, ki je morda obstajalo na Marsu pred več kot tremi milijardami let. Če se bo vest izkazala za resnično, potem gre za prvo odkritje življenja, ki je nastalo zunaj našega planeta. Do ugotovitev, ki seveda še niso dokončne, so prišli na osnovi raziskav pradavnega meteorita ALH84001, ki naj bi se zaril v antarktični led pred kakimi trinajst tisoč leti. NASA

poudarja, da ne gre za male zelene možice. Tisto, kar so odkrili, so izjemno majhne, enocelične strukture, ki nekoliko spominjajo na zemeljske bakterije.

Zadnjih dvajset let smo živeli v prepričanju, da na Marsu ni življenja. Podatki, ki nam jih je posredovala vesoljska sonda *Viking 1*, ki je na Marsu pristala 20. julija 1976, so pokazali, da na tem planetu ni sledov življenja. Iskanje znakov živih bitij je bila namreč ena od pglavitnih nalog projekta *Viking*. Med druge osupljive dosežke *Vikinga 1* sodi na primer delo dveh njegovih orbiterjev, ki sta posnela kopico slik Marsovega površja, tako da je poslikanih celih 97 odstotkov le-tega. Pristajalna modula, ki sta med drugim prinesla vzorce Marsove zemlje, sta bila opremljena z različnimi inštrumenti, ki naj bi bili sposobni zaznati sledove življenja (procese presnove) vse od preprostih bakterij preko rastlin do živali. Ker je šlo za zbiranje vzorcev le na teh dveh mestih, medtem ko je vse ostalo površje planeta ostalo nepreiskano, je Gerald Soffen, eden vodilnih znanstvenikov projekta *Viking*, dejal, da njihovi rezultati še ne pomenijo, da na Marsu ni sledov življenja, ampak le to, da na preiskanih dveh mestih verjetno ni živih organizmov. Analize Marsove atmosfere in prsti pa so pokazale, da na Marsu obstajajo vsi za življenje ključni kemični elementi: ogljik, dušik, vodik, kisik in fosfor. Dokazali so tudi, da na Marsu obstaja za življenje, kakršnega poznamo, bistvena snov, voda, in sicer v dveh agregatnih stanjih, kot para in kot led.

Meteorit z oznako ALH84001 (slika na naslovni strani) so našli leta 1984 na Antarktiki. Gre za 1.9 kg težak meteorit, skalo nepravilne oblike, ki pa v desetih letih ni posebej pritegnila znanstvenikov. Le-ti so vedeli, da so nekateri meteoriti, ki jih najdemo na Zemlji, koščki Lune ali Marsa. In kako so prišli na Zemljo? Ko se je nekoč asteroid ali komet zaletel v Mars, je ob siloviti eksploziji ob padcu lahko odkrušil kakšen kos, ki je nato ob vpadu kakega drugega meteorita zapustil Mars, milijone let krožil okrog Zemlje, ta ga je ujela in končno je padel nanjo. ALH84001 se v začetku ni zdel te vrste. Mislili so, da gre za običajen meteorit, ki izvira iz asteroidnega pasu. Pred dvema letoma pa sta dva Nasina znanstvenika opazila drobne podrobnosti, na podlagi katerih so ga uvrstili med doslej 12 meteoritov, za katere verjamejo, da so marsovskega izvora.

ALH84001 naj bi se strdil in postal del Marsove skorje pred štiri in pol milijardami let. Tako predstavlja najstarejšo znano nam skalo s kateregakoli planeta. Najdeni minerali in sledi življenja naj bi bili stari okrog 3.6 milijard let. Sedaj objavljena odkritja je omogočila zapletena nova metoda preiskav z laserjem. Tako so biokemiki odkrili komplicirane organske molekule. Geolog David McKay, vodja skupine znanstvenikov, ki se ukvarja s tem meteoritom, ne trdi, da so odkrili življenje na Marsu,

ampak da so našli le znake v tej smeri. Poziva tudi preostalo znanstveno srenjo, da neodvisno preuči meteorit in potrdi ali ovrže njihova spoznanja. Številni ugledni znanstveniki so nemudoma reagirali skeptično, vendar pa so hkrati poudarili, da bo v primeru, če bodo prvi zaključki znova potrjeni, šlo za zelo pomembno odkritje. Nekateri dopuščajo možnost, da se je meteorit obogatil z organskimi molekulami v času, ko je potoval po Zemljini atmosferi; drugi spet trdijo, da bi glede na sestavo skala prav tako lahko izvirala z Zemlje. Nastala naj bi ob vpadu kakega meteorita, podobno kot smo zgoraj povedali za njen nastanek na Marsu, le da bi potem ostala v okolici Zemlje in se na koncu vrnila na njeno površje. Tudi če je skala zares z Marsa, so takoiimenovani fosilni ostanki še vedno lahko nastali tudi na drugačne, kemijske načine – brez prisotnosti živih organizmov. Bistveno pa je, da fosilne "globule" (glej sliko 3 na zadnji strani ovitka) v meteoritu močno spominjajo na podobne bakterijske fosile, ki so jih našli na Zemlji, zato McKay verjame, da je razlaga, kakršno je podala njegova skupina, najverjetnejša. Na odgovor, ali je bilo avgusta leta 1996 svetu sporočeno "znanstveno odkritje stoletja" ali ne, bo treba počakati še nekaj časa. Medtem bodo številni znanstveniki posvetili dneve in dneve trdega dela nadaljnjim raziskavam, preverjanju in zbiranju novih podatkov.

Nova misija na Mars je zelo blizu. Vzlet Nasinega plovila *Mars Global Surveyor* je načrtovan za 2. december 1997. (Polete na Mars poleg Američanov pripravljajo tudi Rusi in Japonci.) Med njegovimi cilji je zbiranje podatkov, ki naj bi odgovorili na vprašanja, kakšna je bila vloga vode v Marsovem razvoju in ali je v preteklosti na Marsu morda obstajalo življenje. Dogajanja in spreminjanja v atmosferi nameravajo opazovati tekom Marsovega leta, saj bi radi videli, kako potekajo Marsovi letni časi. Na osnovi dragocenih Vikingovih opazovanj in zaradi razvite tehnologije, posebej računalnikov, si znanstveniki obetajo, da bomo po tej misiji mnogo bolje poznali in razumeli Rdeči planet. Upajo tudi, da bodo našli nove dokaze, na podlagi katerih bodo lahko trdneje govorili o pradašnjem obstoju preprostih življenjskih oblik na tem planetu.

Mirjam Galičič

PRAŠTEVILSKE VREDNOSTI POLINOMA

Ali obstajata taki naravni števili m in n , da ima polinom

$$p(x) = 3x^2 + 7x + m$$

praštevilske vrednosti pri $x = n - 1$, $x = n$ in $x = n + 1$.

Dušan Murovec

ARISTOTEL IN ARHIMED O VZVODU

Od vej fizike se je mehanika začela razvijati že v antičnih časih. Pri tem so *statika*, *kinematika* in *dinamika* šle po različnih poteh. V prvi, ki obravnava mirujoča telesa, so bila nekatera vprašanja dovolj preprosta, da so jih rešili s *sorazmerjem*. Sorazmerje je bilo tedaj edino izdelano matematično orodje. Druga, ki raziskuje gibanje teles, je s sorazmerjem lahko zajela le premo enakomerno gibanje. Tretjo, ki si prizadeva podrobno pojasniti gibanje teles, so tedaj šteli v filozofijo, kar namiguje na to, da je bila za fiziko še prezahtevna.

Eno izmed prvih spoznanj v statiki je bil *izrek o vzvodu*, s katerim so obvladali ravnovesje bremen na ravnem vzvodu. V ravnovesju sta ročici, to sta razdalji pritrdišč od osi, v obratnem razmerju bremen:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (1)$$

Do spoznanja so najbrž prišli najprej s preprostim poskušanjem. Spoznanje je omogočalo tehtanje, uporabno v vsakdanjem življenju.

Zanimivo je, kako je izrek utemeljil Aristotel (384 do 322 pr.n.š.). Najprej je ugotovil, da bi se pri vrtenju vzvoda okoli osi gibali krajišči vzvoda s hitrostma, ki sta sorazmerni z ročicama:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (2)$$

(Danes bi rekli, da je vzvod tog in se okoli osi zavrti z določeno kotno hitrostjo.) Nato se je oprl na svoj "zakon gibanja", po katerem je hitrost telesa tem večja, čim manjši je upor. Mislil je, da je pri gibanju vzvoda treba breme na nasprotnem krajišču upoštevati kot upor. Zato naj bi hitrost drugega krajišča bila obratno sorazmerna z bremenom v prvem krajišču in hitrost prvega krajišča obratno sorazmerna z bremenom v drugem krajišču:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{F_1}{F_2}. \quad (3)$$

Iz enačb (2) in (3) sledi izrek o vzvodu (1). To ni bilo zadnjič, da je v fiziki kriva pot pripeljala do pravega sklepa.

Arhimed (287 do 212 pr.n.š.) se je zadeve že lotil drugače. Za razliko od Aristotela se je ukvarjal z matematiko. Njegovo osnovno stališče je mogoče razbrati iz pisma:

“Arhimed Eratostenu pozdrav:

določene stvari so mi najprej postale jasne na mehanični način, čeprav sem jih moral pozneje dokazati geometrijsko, ker raziskovanje na povedani način ni dalo pravega dokaza. Seveda pa je lažje priti do dokaza, če smo prej s tem načinom dobili nekaj znanja o vprašanih, kot bi bilo brez prejšnjega znanja.”

Geometrijsko dokazovanje v Evklidovem duhu se fiziku danes zdi dokaj zapleteno. Nasprotno pa se mu zdi to, kar je imenoval mehanični način, zanimivo in poučno. Poskusimo mu slediti.

Zelo lahek vzvod je v ravnovesju, če sta bremeni enaki in ročici enaki. Razmere so simetrične in obe strani vzvoda enakovredni, tako da ni razloga, da bi se vzvod nagnil na eno stran ali na drugo.

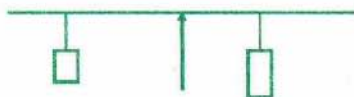
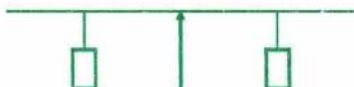
To velja tudi, če bremeni razdelimo na več enakih uteži in jih v enakih razmikih razporedimo po vzvodu. Razdelimo ju na 10 uteži.

Združimo nekaj uteži na eni strani v njihovem težišču in preostale uteži na drugi strani v njihovem težišču. S tem prvi korak naredimo v nasprotni smeri. Zdaj razmere, gledano v

celoti, niso več simetrične. Toda težišče prve skupine uteži še vedno leži simetrično glede na to skupino in težišče druge skupine glede na to skupino. Združimo na levi 4 uteži in in na desni preostalih 6.

Težišče leve skupine je v razdalji 3 Pp od osi in težišče desne skupine 2 Pp od osi, če je 1 Pp ali 1 Presekov palec razdalja med sosednjima bremenoma. Za izbrani primer sta ročici v razmerju $3 : 2 = 6 : 4$, kar je enako obratni vrednosti razmerja uteži 4 : 6.

Za bralce, ki jih zgled ni prepričal, ponovimo računanje splošno. Razdelimo bremeni na skupno N uteži. Zelo lahek vzvod razdelimo potem na $N - 1$ enakih delov, od katerih meri vsak 1 Pp. Združimo na levi strani n uteži in na desni jih preostane $N - n$. Na levo skupino odpade del vzvoda $(n - 1)$ Pp, na desno pa del $(N - n - 1)$ Pp. Zaradi simetrije skupin je težišče prve skupine $\frac{1}{2}(n - 1)$ Pp od levega krajišča vzvoda in težišče desne $\frac{1}{2}(N - n - 1)$ Pp od desnega krajišča. Od osi na sredini vzvoda je levo težišče oddaljeno $\frac{1}{2}(N - 1) - \frac{1}{2}(n - 1)$ Pp = $\frac{1}{2}(N - n)$ Pp, desno pa $\frac{1}{2}(N - 1) - \frac{1}{2}(N - n - 1)$ Pp = $\frac{1}{2}n$ Pp. Ročici bremen sta torej v razmerju $(N - n)/n$, ko sta bremeni v razmerju $n/(N - n)$. To potrjuje izrek (3).



Arhimed je lahko vzkliknil:

“Dajte mi trdno točko in premaknil bom Zemljo!”,

ko se je splošno prepričal, da velja izrek o vzvodu. Poročajo, da je presenetil meščane Sirakuz, ko je dal z vzvodi dvigniti in prestaviti ladjo. Nihče ni mislil, da je kaj takega mogoče.

Upajmo, da se je zdel bralcem Preseka pogled v daljno preteklost fizike zanimiv. Vendar pri takem površnem presojanju nekdanjih razmer z današnjimi očmi lahko hitro prenagljeno sklepamo. Pri podrobnejšem razmisleku bi kazalo upoštevati, da tedaj količin niso vpeljali tako kot mi, jih niso zaznamovali z algebrskimi simboli in niso pisali enačb.

Arhimed je vedel, da je treba podpreti vzvod v osi s “silo”, ki ustreza vsoti bremen. To je lahko ugotovil, če je vzvod obesil na škripec in ga uravnovesil. Znal je določiti tudi težišče nesimetričnih likov. Vendar zakona gibanja ni poznal. Z dinamiko je začel Galileo Galilei na začetku 17. stoletja, ko je raziskal enakomerno pospešeno gibanje pri kotaljenju kroglice po blagem klancu in sklepe razširil na prosto padanje. Zakon gibanja je postavil leta 1687 Isaac Newton. Vpeljal je pojem sile kot mero za delovanje telesa na telo (zato smo govorili o “bremenu”, a ne o “teži” ali “sili”). Odtlej je pojasnjevala dinamika gibanje teles z delovanjem drugih teles in je postala teža sila, s katero Zemlja privlači telo. Aristotel je s svojim “zakonom gibanja” poskusil opisati voz, ki ga po ravnih tleh vleče konj. Ta “zakon” je mejni primer Newtonovega zakona gibanja za telo, na katero deluje s hitrostjo sorazmerni upor.

Iz Newtonovega zakona izpeljemo izrek o vzvodu preko ravnovesja navorov: $r_1 F_1 = r_2 F_2$. Arhimed se je oprl na simetrijo, ko še ni poznal zakona gibanja. Podobno si današnji fiziki s simetrijo pomagajo na primer pri raziskovanju osnovnih delcev, ko še ne poznajo zakona gibanja.

Janez Strnad

ALI JE VSOTA KVADRATOV SAMIH NENIČELNIH ŠTEVIL LAHKO ENAKA NIČ? – Rešitev s str. 13

Naj bodo a , b , c poljubna realna števila, ki zadoščajo pogoju $ab + bc + ca = 0$. Tedaj je

$$(a+bi)^2 + (b+ci)^2 + (c+ai)^2 = a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + 2i(ab+bc+ca) = 0.$$

Primer: Za $a = 2$, $b = 2$ in $c = -\frac{ab}{a+b} = -1$ dobimo:

$$(2+2i)^2 + (2-i)^2 + (-1+2i)^2 = 0.$$

Jurij Kovič

ZAPOREDNA ŠTEVILA – Rešitev s str. 27

Naj bo naravno število n vsota k zaporednih naravnih števil. Če z d označimo najmanjši člen v vsoti, imamo

$$\begin{aligned} n &= d + (d+1) + \dots + (d+k-1) = kd + (1 + \dots + k-1) \\ &= kd + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+2d-1)}{2} \end{aligned}$$

oziroma $2n = k(k+2d-1)$. Ker sta faktorja k in $k+2d-1$ različne parnosti, je natanko eno od števil k , $k+2d-1$ sodo, drugo pa je liho. Kandidati za število k so tako vsi delitelji števila $2n$, za katere je eno od števil k ali $\frac{2n}{k}$ liho. Pri izbranem k -ju mora veljati $d = \frac{1}{2}(\frac{2n}{k} - k + 1) = \frac{2n - k(k-1)}{2k}$. Izbira števila k nam zagotavlja, da je tako določeno število d vedno celo. Vendar pa vsaka taka izbira še ne določa zapisa števila n kot vsote dveh ali več zaporednih naravnih števil. Veljati mora namreč še $k > 1$ in $d \geq 1$. S preoblikovanjem zadnje neenakosti dobimo $2n \geq k(k+1)$ oziroma $k \leq \frac{\sqrt{1+8n}-1}{2}$. Izbrani delitelj k torej ne sme biti prevelik.

Poglejmo, za katera naravna števila n lahko poiščemo število k , ki ustreza vsem zgornjim zahtevam. Število $2n$ lahko enolično zapišemo kot $2n = 2^a b$, kjer je b liho število. Naj bo $k = \min\{2^a, b\}$. Očitno je eno od števil k , $\frac{2n}{k}$ liho. Ker sta števili 2^a in b različni, je tudi $k(k+1) \leq 2^a b = 2n$. Če je še $b > 1$, potem je tudi $k > 1$. Če pa je $b = 1$, potem sta $k = 1$ in $k = 2n$ edina delitelja števila $2n$, za katera je eno od števil k , $\frac{2n}{k}$ liho. Ker pa nobeno od njiju ne ustreza dodatnima neenakostma, naloga za taka števila n nima rešitve. Kot vsoto dveh ali več zaporednih naravnih števil lahko torej zapišemo natanko tista naravna števila, ki niso potenca števila 2. Omenimo, da nam zgornja izbira števila k za lih n da zapis $n = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}$, ki je bil omenjen v besedilu naloge.

Za konec si oglejmo še vse zapise števila $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ v iskani obliki. Vsi lihi delitelji števila 180 so 1, 3, 5, 9, 15 in 45. Možne izbire za k so torej ti delitelji in njihovi osemkratniki. Med temi števili pa dodatnima zahtevama $k > 1$ in $k(k+1) \leq 360$ zadoščajo le 3, 5, 8, 9 in 15. Tako dobimo zapise

$$\begin{aligned} 180 &= 59 + 60 + 61 = \\ &= 34 + 35 + 36 + 37 + 38 = \\ &= 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 = \\ &= 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 = \\ &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19. \end{aligned}$$

Martin Juvan

VIŠINSKA TOČKA TRIKOTNIKA IN STOŽNICE

Že v starih časih so nekateri ljudje poznali in znali izkoristiti gibanje posameznih točk pri raznih napravah, na primer vodnih črpalkah, parnih strojih, urah itd. Takšna opazovanja so lahko zanimiva še danes. Zanimivo je vedeti, kakšno krivuljo opisuje na primer ventil ali določena točka na obodu kolesa, ko se brez drsenja peljemo po vodoravni cesti. Te krivulje zlahka tudi narišemo; zadostujeta svinčnik in papir. Svinčnik prilepimo na obod krožne plošče, ki jo kotalimo ob ravnilu, in krivulja se zariše na papirju. Nekateri računalniški programi omogočajo opazovanje različnih gibanj. Eden izmed njih je Cabri-géomètre, ki so ga izdelali na univerzi v Grenoblu v Franciji in ga že imajo tudi pri nas na nekaterih šolah. Tudi novi žepni računalnik TI92 ga že ima vgrajenega v svoji spominski enoti (poleg njega pa še program DERIVE, o katerem je bilo v Preseku že nekaj napisano).

S programom Cabri-géomètre bomo odgovorili na naslednje zanimivo geometrijsko vprašanje:

Kakšno krivuljo opiše višinska točka V trikotnika $\triangle ABC$ z negibno stranico AB , ko oglišče C premikamo po izbrani premici p ?

Če imamo na voljo omenjeni program, potem najprej narišemo poljubni trikotnik $\triangle ABC$ in poljubno premico p . V trikotniku $\triangle ABC$ konstruiramo višinsko točko V . Dogovorimo se, da bo imela stranica AB konstantno dolžino in bo negibna (ne bomo je premikali). Program omogoča, da oglišče C pripeljemo na premico p in ga nanjo nekako prilepimo, kar pomeni, da se nato točka C lahko premika le po premici p . Opazujemo, kako se pri tem giblje točka V . Izkaze se, da je oblika krivulje odvisna od lege premice. Ločimo tri bistveno različne primere: ko je premica p vzporedna stranici AB , ko je na stranico AB pravokotna in ko jo seka (ali pa njeno nosilko) pod kotom, ki ni enak 90° .

Premica p je vzporedna stranici AB

Če premikamo oglišče C po premici p , ki je vzporedna stranici AB , se višinska točka V giblje po krivulji, za katero bi z risbe, narisane s programom Cabri-géomètre, lahko sklepali, da je parabola, ki poteka skozi oglišči A in B . Preverimo našo domnevo z računom.

Najprej si izberimo pravokotni koordinatni sistem. Koordinatno izhodišče postavimo v oglišče A , os x naj bo nosilka stranice AB . Oglišče C naj leži na premici p , ki je za $|d| > 0$ oddaljena od osi x . Naš trikotnik ima torej oglišča $A(0, 0)$, $B(b, 0)$ in $C(t, d)$. Pri tem je b realna konstanta in t parameter, ki se spreminja, če spreminjamo lego točke C . Premica p ima enačbo $y = d$.

Poiščimo koordinate točke V , ki je presečišče nosilke višine na stranico AB in nosilke višine na stranico CB . Prva je premica $x = t$, druga pa je premica, ki gre skozi koordinatno izhodišče in je pravokotna na stranico CB . Zato je njena enačba

$$y = \frac{b-t}{d}x.$$

Sledi, da ima trikotnik ABC višinsko točko $V(t, \frac{1}{d}t(b-t))$. Ko se točka C giblje po premici p , višinska točka V potuje po krivulji z enačbo

$$y = \frac{1}{d}x(b-x).$$

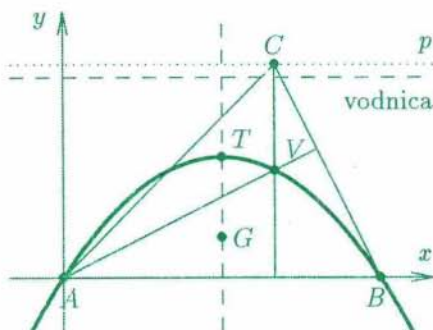
Enačbo prepišemo v obliko

$$d(y - \frac{b^2}{4d}) = -(x - \frac{b}{2})^2, \quad (1)$$

iz katere razberemo, da je krivulja parabola s temenom v točki $T(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4d})$. Parabola seka os x v točkah z abscisama $x_1 = 0$ in $x_2 = b$, torej v točkah A in B .

Kot je znano iz analitične geometrije, pomeni absolutna vrednost koeficienta d v enačbi (1) 4-kratno goriščno razdaljo parabole. Vemo tudi, da teme leži na sredini med premico vodnico in goriščem. Preprost račun pokaže, da je gorišče parabole v točki $G(\frac{b}{2}, \frac{b^2-d^2}{4d})$, vodnica pa ima enačbo $y = \frac{b^2+d^2}{4d}$.

Dokler sta notranja kota $\sphericalangle CAB$ in $\sphericalangle ABC$ oba ostra, opisuje višinska točka del parabole, ki je nad osnovnico, sicer pa preostali del parabole (slika 1).

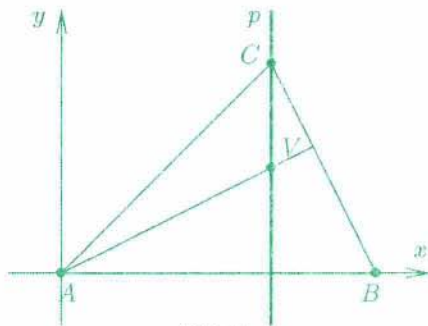


Slika 1.

Premica p je pravokotna na stranico AB

V tem primeru je premica p nosilka ene od višin. Če premikamo oglišče C po p , se po njej giblje tudi točka V (slika 2).

Poseben primer dobimo, če gre premica p skozi oglišče A (ali pa B). V teh dveh primerih je trikotnik $\triangle ABC$ ves čas pravokoten (s pravim kotom v A oziroma v B) in točka V se ne giblje, ostane kar v A oziroma v B .



Slika 2.

Premica p seka nosilko stranice AB pod kotom $\alpha \neq 90^\circ$

Vzemimo, da ima premica p , po kateri potuje točka C , enačbo $\alpha x + \beta y - \delta = 0$, pri čemer sta koeficienta α in β oba različna od nič. (Primeri, ko je bodisi $\alpha = 0$ ali $\beta = 0$, smo že obravnavali. Če sta oba koeficienta hkrati nič, to ni enačba premice.)

Če izberemo koordinatni sistem tako kot v prvem primeru, ima oglišče C koordinati t in $y = (\delta - \alpha t)/\beta$. Višinska točka V leži na premicah z enačbama

$$x = t \quad \text{in} \quad y = \frac{\beta(b - t)}{\delta - \alpha t} x.$$

Od tod sledi:

Ko se točka C giblje po premici p , točka V opisuje krivuljo z enačbo

$$y = \frac{\beta x(b - x)}{\delta - \alpha x} \quad (2)$$

oziroma

$$\beta x^2 - \alpha xy - \beta bx + \delta y = 0. \quad (3)$$

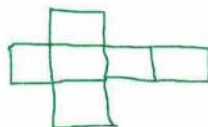
Enačba (3) pove, da je iskana krivulja stožnica. Iz enačbe (2) razberemo, da ima krivulja navpično asimptoto

$$x = \frac{\delta}{\alpha}.$$

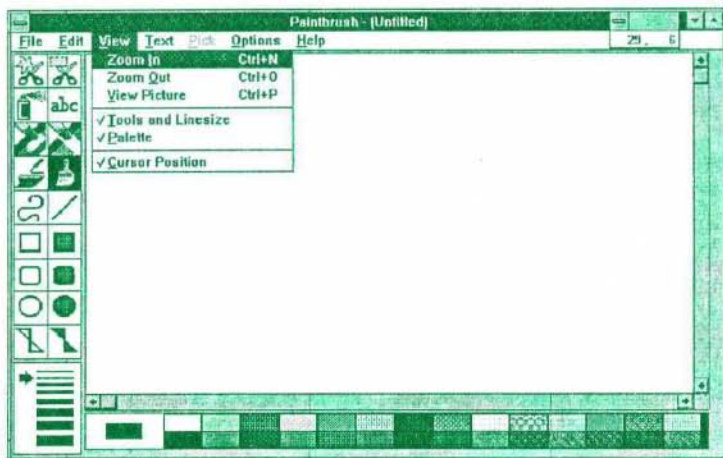
NARIŠIMO MREŽO KOCKE

Radi bi naredili model kocke. Zanj potrebujemo mrežo kocke. Seveda bi jo zlahka narisali s pomočjo ravnila in svinčnika. Vendar zakaj preprosto, če gre težje. In ker smo ravno postali ponosni lastnik računalnika, je rešitev kot na dlani: uporabili bomo računalnik. Čeprav bi nalogo lahko opravili enostavneje s posebnim risarskim program, kot sta na primer CorelDraw ali pa AutoCAD, poskusimo zadevo rešiti kar z risarskim programom, ki ga vsebuje že samo okolje Windows – s programom PaintBrush. Mimo-grede se bomo naučili uporabljati še nekaj njegovih morda malo manj znanih lastnosti, pa še naša denarnica nam bo hvaležna. Zgoraj omenjena posebna risarska programa namreč nista ravno poceni.

Torej – lotimo se dela. Na papir skicirajmo mrežo kocke, da bomo vedeli, kaj pravzaprav rišemo. Višek lepote naša skica (slika 1) res ni, a se bomo pri pravem risanju toliko bolj potrudili. Zaženimo program PaintBrush. Ker bi radi risali natančno, bi nam zelo prav prišel koordinatni sistem. Prikazovanje položaja grafične točke (točke risanja) vključimo tako, da v izbiri **View** izberemo **Cursor Position**. V desnem zgornjem kotu okna se pojavi okence, kjer se kažejo koordinate točke, ki jo z miško premikamo po risalni površini. Če ponovno izberemo **View**, vidimo, da je pred to izbiro sedaj kljukica (slika 2).



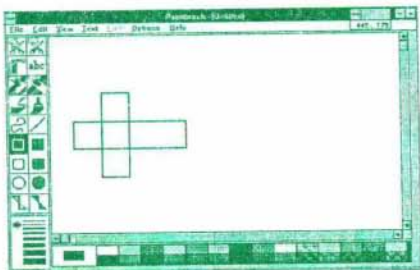
Slika 1. Skica mreže kocke.



Slika 2. Vkllop prikaza položaja grafičnega kazalca.

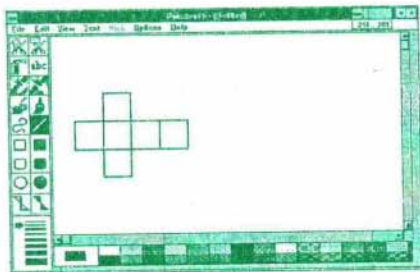
Najprej narišimo vzdolžne štiri kvadrate. Naj bo stranica naše kocke dolga 50 enot. Zato najprej narišimo pravokotnik, širok 50 in dolg 200 enot. Ustrezno risarsko orodje izberemo tako, da kliknemo na nepobarvan kvadrat  na levi strani okna programa PaintBrush.

Da smo naredili prav, vidimo po tem, da je polje sedaj črno. V programu PaintBrush je namreč orodje, s katerim rišemo ali popravljamo risbo, vedno obarvano črno. Miško postavimo na položaj (40, 150) in pritisnemo na levi gumb. S pritisnjenim gumbom vlečemo, dokler ne odčitamo, da smo na položaju (240, 200). Takrat gumb spustimo. Na začetku se bomo verjetno precej trudili, da bomo miško pripeljali res točno na željeno mesto, a z malo vaje nam bo zagotovo uspelo. Če naš pravokotnik ni prave velikosti, ker nam roke ni uspelo voditi ustrezno mirno, si pomagamo tako, da v izbiri Edit izberemo Undo. S tem prekličemo zadnji korak in lahko postopek ponovimo. Nato se postavimo na položaj (90, 100) in naredimo pravokotnik do (130, 250) (slika 3).



Slika 3. Nastajanje mreže.

Manjka nam le še navpična črta od (190, 150) do (190, 200). Izberemo si orodje za ravne črte in se postavimo na (190, 150). Spet pritisnemo na levi gumb miške in vlečemo miško do (190, 200). Da nam bo lažje, držimo pritisnjen še gumb **SHIFT**. S tem programu PaintBrush povemo, da želimo risati le navpične oz. vodoravne črte, ne pa poševnih (no, lahko narišemo tudi take pod kotom 45 stopinj). Zato nam na prvo koordinato ni potrebno gledati in poskrbimo le, da je druga 200. Spustimo miškin gumb in šele potem spustimo tudi **SHIFT**, da ne bo črta na koncu poševna. Tako, končali smo. Naša mreža je narisana (slika 4).



Slika 4. Mreža je narisana.

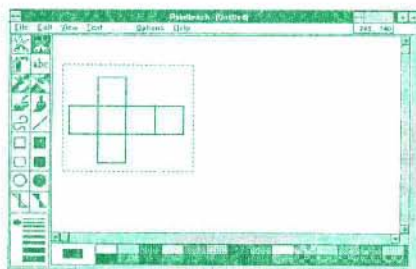
Ponovimo, kaj smo pri risanju uporabili:

- v izbiri **View** smo s **Cursor Position** vklopili prikazovanje koordinat,
- uporabili smo orodji za risanje kvadratov in ravnih črt,

- izbira **Edit/Undo** razveljavi zadnjo storjeno akcijo: uporabimo jo, če kaj storimo narobe,
- če pri risanju ravne črte držimo pritisnjeno tipko **SHIFT**, narišemo le vodoravno oziroma navpično črto ali pa črto pod kotom 45 stopinj.

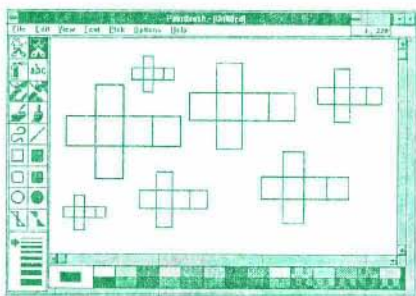
Ko natisnemo našo mrežo na papir, ugotovimo, da smo izbrali premajhno enoto. Stranica naše kocke bi morala biti nekoliko večja. Kaj pa sedaj? Ponoviti postopek od začetka z večjimi stranicami? Gre tudi hitreje. PaintBrush nam namreč omogoča, da del slike povečamo. Izberimo orodje za pravokotne iz-

reze . Označiti moramo pravokotno območje, ki bo zajemalo celotno narisano mrežo. Postavimo se levo zgoraj od mreže in s stisnjenim miškinim gumbom zaznamemo mrežo v črtkast okvir (slika 5).



Slika 5. Označimo del risbe.

Sedaj izberimo **Pick** in tam izbiro **Shrink + Grow**. Znova narišemo črtkast pravokotnik (izbrano orodje so še vedno škarje). Ko ga narišemo, se v njem pojavi nova kopija mreže kocke. Če je označen pravokotnik večji od začetnega, bo nova slika mreže večja, če pa je manjši, bo manjša. Ko narišemo več pravokotnikov, ugotovimo, da tako zlahka razmnožimo mrežo v poljubno število kopij. Paziti moramo le, da pri določanju pravokotnikov držimo pritisnjeno tipko **SHIFT**, saj sicer lahko spremenimo razmerje med dolžino in višino slike.

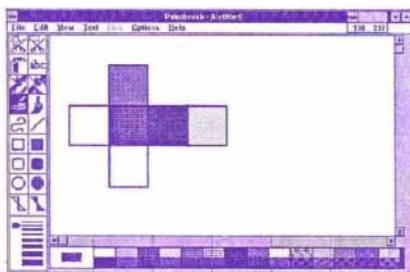


Slika 6. Pomnožena mreža kocke.

Aha, pa le ni bilo odveč, da smo se mučili z računalnikom. Poskusite povečati in razmnožiti risbo, ki ste jo narisali z ravnilom in svinčnikom (uporaba fotokopirnega stroja ne velja)! Za konec pa našo mrežo še po-

barvajmo. To storimo z valjčkom – orodjem  (Pleskarji mu rečejo maček.). Z miškinim kazalcem pokažemo nanj in pritisnemo levi gumb. Kako pa izberemo barvo? Zelo enostavno. Z miško pokažemo na zeleno barvo v paleti na spodnjem delu okna in pritisnemo na levi gumb. Izbrano barvo vidimo kot notranji pravokotnik na začetku seznama barv.

Povejmo še to, da je okoli nje barva ozadja, ki jo spreminjamo s pritiskom desnega gumba. Ko smo izbrali pravo barvo, se postavimo znotraj izbranega kvadrata in pritisnemo levi gumb. Zamenjamo barvo in postopek ponavljamo, dokler ne dobimo res pisane mreže kocke.



Slika 7. Barvamo mrežo.

Za konec pa še nekaj nalog:

1. Nariši mrežo kvadra.
2. Nariši še druge možne mreže kocke.
3. Nariši mrežo valja (potreboval boš še orodje za risanje krogov – spomni se na trik s tipko SHIFT).

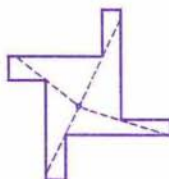
Matija Lokar

TRI NALOGE IZ GEOMETRIJE – Rešitev s str. 52

1. naloga.

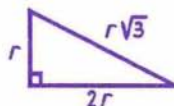
Primer za tako sobo je naslednji tloris:

Obstaja pa še dosti drugih možnosti.

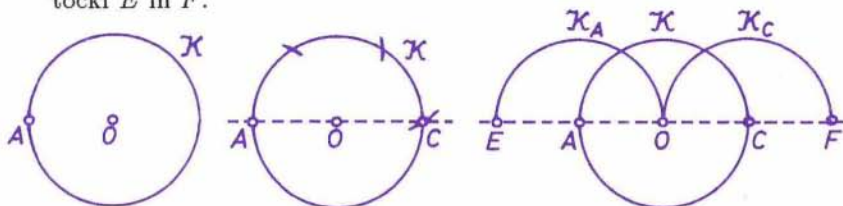


2. naloga.

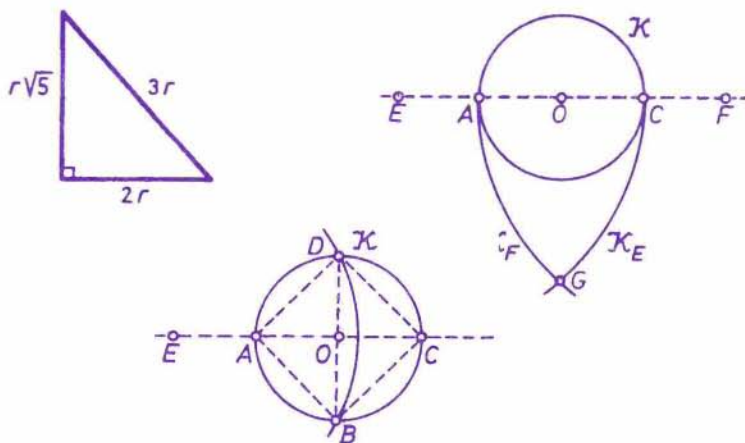
Osnovna ideja rešitve je v pravokotnem trikotniku: kjer je r polmer kroga, ki ga lahko dobimo v šestilo, ker imamo označeno središče kroga. Postopamo takole:



- Izberemo si katerokoli točko na krožnici $\mathcal{K}$ in jo označimo z A .
- Konstruiramo točko C tako, da trikrat nanesemo polmer po krožnici. Tako smo dobili razdaljo $2r$ med točkama A in C .
- Načrtamo krožnici $\mathcal{K}_A$ in $\mathcal{K}_C$ ter trikrat nanesemo polmer, da dobimo točki E in F .



- Razdaljo $r\sqrt{5}$ lahko dobimo tudi v spodnjem pravokotnem trikotniku, ki ga lahko načrtamo tako, da vzamemo v šestilo $3r$ (kar je razdalja med točkama E in C) in narišemo dve krožnici $\mathcal{K}_E$ in $\mathcal{K}_F$. Njun presek je točka G . Razdalja med G in O je točno $r\sqrt{5}$.
- Vzamemo v šestilo $r\sqrt{5}$ in iz točke E načrtamo krožnico. Tam, kjer ta krožnica seka krožnico $\mathcal{K}$, sta točki B in D .

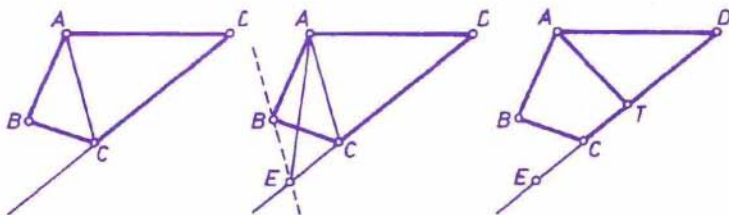


3. naloga.

Najprej premislimo, kako bi rešili podobno nalogo za trikotnik. Če v trikotniku ABC razpolovimo stranico AB in potegnemo premico skozi točki C in T , potem imata trikotnika ATC in ATB enako dolgi osnovnici in isto višino, kar pomeni, da imata enaki ploščini.

V primeru, ko je dani lik štirikotnik $ABCD$, moramo najprej konstruirati trikotnik, ki ima enako ploščino kot štirikotnik, in tega potem razdeliti na pol. To poteka na naslednji način:

- Potegnemo daljico AC . Predpostavimo lahko, da so oglišča postavljena tako, da ima trikotnik ABC manjšo ploščino kot trikotnik ACD .
- Podaljšamo stranico CD .
- Skozi točko B potegnemo vzporednico k stranici AC in tako dobimo točko E .
- Ker imata trikotnika ABC in AEC isto stranico AC in enako višino, imata enaki ploščini. Zato ima trikotnik AED enako ploščino kot štirikotnik $ABCD$.
- Razpolovimo daljico ED in dobimo točko T . Tedaj imata trikotnik ATD in štirikotnik $ABCT$ enaki ploščini.



Borut Zalar

KVADRATI PRAŠTEVIL

1. Dokaži, da vsota kvadratov dveh oziroma treh, ne nujno različnih praštevil, ni kvadrat praštevila.
2. Poišči štiri praštevila, ki jih lahko razdelimo v dve skupini z enako vsoto kvadratov njunih elementov, pri čemer nobeno praštevilo ni v obeh skupinah hkrati.
3. Pet ne nujno različnih praštevil razdelimo v dve skupini. Dokaži, da sta vsoti kvadratov števil iz obeh skupin različni.
4. Dokaži, da za vsako naravno število $n > 5$ obstaja taka skupina n -tih ne nujno različnih praštevil, da jo lahko razdelimo na dve skupini z enako vsoto kvadratov njunih elementov, pri čemer nobeno praštevilo ni v obeh skupinah hkrati.

Boris Lavrič

VSE MANJ JE DOBRIH GOSTILN

Ob istem času so Martina in Lojzeta vrgli iz gostilne; Martina iz gostilne Pri Micki, Lojzeta iz bifeja Pri pošti.

Še vedno žejni Martin se je odpravil proti bifeju Pri pošti, Lojze se je namenil pogledati, kako je Pri Micki. Na pot sta krenila ob istem času in hodila z enakomerno hitrostjo. Ko sta se srečala, je Martin takole mimogrede pripomnil, da je naredil 100 m več poti kot Lojze. Ta je pripombo vzel kot osebno žalitev in planil v Martina. Sledil je neizogibni pretep. Po končanem ravsu sta se pobotala, se v solzah objela in nadaljevala pot vsak v svoji prvotni smeri.

Ker sta bila nekoliko zdelana, je vsak od njiju zmogel le polovično prejšnjo hitrost. Tako je Martin prišel do bifeja Pri pošti v 4 minutah, Lojze pa je do gostilne Pri Micki potreboval 9 minut.

Kako daleč narazen ležita gostilna Pri Micki in bife Pri pošti?

Marija Vencelj

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Letos je ena najpomembnejših matematičnih obletnic nedvomno 350-letnica rojstva nemškega filozofa in matematika Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Bil je eden izmed najodličnejših umov vseh časov, njegovo delo pa je zaznamovalo marsikatero področje znanosti. V sestavku se bomo omejili predvsem na njegovo matematično delo, natančneje na njegov najpomembnejši dosežek – izum diferencialnega in integralnega računa.

Leibniz se je rodil leta 1646 v Leipzigu, umrl pa v Hannovru 70 let kasneje. Oče Friedrich je bil profesor moralne filozofije na leipziški univerzi in tudi mati Katarina Schmuck je bila iz akademske družine. Že kot otroka so ga spodbujali, da je brskal po veliki očetovi knjižnici, kar je iz malega Leibniza kmalu naredilo nenasitnega bralca. Ko je bil star 15 let, je začel študij filozofije in prava na leipziški univerzi. Pri 20 letih je napisal pomembno razpravo o moralni filozofiji, za katero so mu na Univerzi v Altdorfu podelili doktorat (in to potem, ko so mu ga v Leipzigu zavrnil izgovorom, da je premlad).

V obdobje študija v Leipzigu sodi tudi prvo Leibnizovo resno srečanje z matematiko: med poletnim obiskom v Jeni leta 1663 je izrabil priložnost, da je študiral Evklidove Elemente, delo, ki je imelo takrat že dvatisočletni sloves modela matematičnega aksiomatičnega sklepanja. Pomanjkanje formalne matematične izobrazbe je zaznamovalo vse Leibnizovo ukvarjanje z matematiko. Čeprav je bil pravi vrelec daljnosežnih idej in dejanski začetnik mnogih matematičnih področij, od kombinatorike in matematične logike do topologije, je v njegovem delu večina teh zamisli ostala le v povojih – bile so nezadostno dodelane, da bi lahko zbudile pozornost sodobnikov. Leta 1666 je izšlo Leibnizovo prvo matematično delo *Dissertatio de arte combinatoria*, v katerem je skušal razviti 'račun logičnih resnic', predhodnika sodobne matematične logike. Kot je sam napisal, je '...želel podati metodo, v kateri bi bile razumske resnice prevedene v neko vrst računa. Ta bi bil hkrati nekakšen jezik ali univerzalna pisava, vendar bi se zelo razlikoval od vseh dozdaj zasnovanih, ker bi v njem črke in celo besede vodile razum, napake pa bi bile samo računske'.

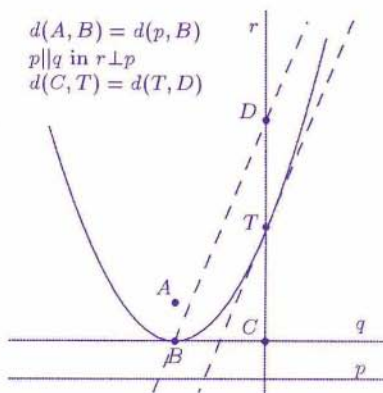


Po doktoratu je Leibniz dobil službo pri volilnem knezu v Mainzu. Ta mu je med ostalim omogočala, da je prebil veliko časa v Parizu, kjer je spoznal Christiana Huygensa (članek o njem je bil objavljen v 6. številki XXII. letnika Preseka), enega najbolj znanih astronomov in matematikov tistega časa. Prijateljstvo s Huygensom je bilo odločilno za Leibnizov nadaljnji matematični razvoj. V letih od 1672 do 1676 je nastal največji del Leibnizovih matematičnih rezultatov iz teorije nealgebraskih enačb, številskih vrst, diferenčnega računa in interpolacije funkcij. Najpomembnejše od vsega pa je, da se je takrat oblikoval tudi njegov diferencialni in integralni račun ali, kot so ga takrat imenovali, infinitezimalni račun.

V sedemnajstem stoletju je beseda infinitezimalni račun označevala metode za računanje ploščin, prostornin in težišč, torej tisto, čemur danes običajno pravimo integralni račun. Vemo, da ravninskemu liku, omejenemu z daljicami, lahko določimo ploščino tako, da ga razrežemo na trikotnike. Če pa lik oklepajo bolj zapletene krivulje, se ta prijem seveda ne obnese. Že stari Grki (Arhimed, Evdoks in drugi) so poznali metodo izčrpavanja, pri kateri so v krivočrtni lik vrisovali vedno manjše trikotnike, in znali seštetati ploščine teh neskončno mnogih trikotnikov ter tako izračunati željeno ploščino. Pri tem je bilo potrebno veliko računske in geometrične spretnosti. Matematiki šestnajstega in sedemnajstega stoletja (Cavalieri, Roberval, Toricelli, Fermat, Pascal in drugi) so te metode še izostrili: praviloma so lik ali telo rezali na 'neskončno' majhne kose – imenovane infinitezimale – in potem ploščine in prostornine dobili s seštevanjem. Eden ključnih korakov, ki so omogočili, da posamezne metode dobijo sistematično obliko, je naredil Descartes (članek o njem je bil objavljen v 6. številki lanskega letnika Preseka), ko je začel krivulje upodabljati v (po njem poimenovanih) kartezičnih koordinatah. S tem je bil poudarek prenešen z geometričnega objekta – krivulje na algebraski objekt – funkcijo, podano s formulo, katere graf je obravnavana krivulja. Za končni korak, določanje ploščine pod krivuljo s pomočjo operacije na funkciji, ki to krivuljo podaja, je bilo potrebno odkriti še, da je ta naloga tesno povezana z določanjem tangente na dano krivuljo.

Problem določanja tangent danes rešujemo z diferencialnim računom, t. j. z odvajanjem. Do sedemnajstega stoletja pa so matematiki za konstrukcijo tangent v glavnem uporabljali geometrične metode. Oglejmo si dva primera. Vsi znamo konstruirati tangento na krožnico: v izbrani točki krožnice potegnemo premico pravokotno na polmer. Kako pa bi dobili tangento na parabolo v kaki izbrani točki?

Naj bo recimo parabola podana geometrično, t. j. kot množica točk ravnine, ki so enako oddaljene od dane točke A in dane premice p . Naj bo T točka na paraboli, skozi katero želimo potegniti tangento. Vpeljimo še naslednje oznake: B naj bo razpolovišče najkrajše daljice med A in p ; q naj bo premica skozi B , vzporedna s p ; r naj bo premica skozi T , pravokotna na p ; C naj bo presečišče q in r ; D naj bo točka zrcalna točki C glede na T . Potem je tangenta na parabolo skozi točko T vzporedna s premico skozi B in D . Dokaz, da je konstrukcija pravilna, prepuščamo bralcem.



(Namig: verjetno je najlažje opisano konstrukcijo prevesti v koordinatni zapis in pokazati, da se premica dotika parabole v točki T .)

Obstajajo podobne konstrukcije za določanje tangent tudi za druge krivulje, težava je le, da nam ne dajo sistematičnega postopka, ki bi vedno pripeljal do rešitve. Vprašanje je pomembno, kajti veliko matematičnih problemov lahko prevedemo na iskanje tangente z določenimi lastnostmi. Na primer, če je krivulja narisana v koordinatnem sistemu kot graf neke funkcije, potem je v točkah, kjer zavzame funkcija svojo največjo in najmanjšo vrednost, tangenta na krivuljo vzporedna z absciso. Če bi poznali postopek za iskanje tangente na poljubno krivuljo, bi nam to olajšalo problem iskanja največjih in najmanjših vrednosti funkcij. Tako sistematično rešitev nam daje odvod funkcije, ki je osnovni pojem diferencialnega računa.

Angleška matematika John Wallis in Isaac Barrow (Newtonov učitelj in zaščitnik) sta bržda prva opazila, da je za določanje ploščine pod krivuljo dovolj, če znamo določiti krivuljo, ko so podane njene tangente. To dejstvo sta uporabljala v geometrični obliki. Vidimo torej, da so se mnogi znameniti matematiki zelo približali današnji obliki infinitezimalnega računa. Za dokončno sintezo teh dvatisočletnih geometričnih in nekoliko sodobnejših algebraskih poskusov sta poskrbela Newton in Leibniz. Oba sta obravnavala krivulje kot grafe funkcij, znala sta konstruirati tangente s pomočjo odvodov in izračunati ploščino pod krivuljo s pomočjo integriranja funkcije. Oba sta tudi ugotovila, da je v tej algebraski formulaciji računanje ploščine z integracijo funkcije obratna operacija k odvajanju, torej določanju tangente na krivuljo. Temu dejstvu danes pravimo Newton-Leibnizov izrek oziroma kar osnovni izrek matematične analize.

Kljub izjemnim znanstvenim dosežkom Leibnizu ni uspelo dobiti proforskega mesta ne v Parizu ne v Londonu, čeprav je to nekajkrat poskušal, zato se je preselil v Hannover, kjer je stopil v službo mogočnega grofa Brunswick – Lüneberga kot svetovalec, knjižničar in nadzornik del. Ko je leta 1679 grof umrl, so njegovi nasledniki naročili Leibnizu, da sestavi podrobno genealogijo njihove plemiške družine z namenom, da utemelji njihove številne dinastične zahteve. Te bizarne naloge se je lotil z neverjetnim žarom, ki ga lahko vsaj delno razumemo, če vemo, da mu je omogočila popotovanja po celi Evropi, obiske knjižnic in srečanje z mnogimi umnimi ljudmi. Poleg brskanja po zaprašenih listinah je Leibniz namreč našel čas tudi za druge dejavnosti. Ukvarjal se je s filozofijo, predvsem z etiko in teologijo; ustanovil in podpiral je gibanje, ki je poskušalo združiti rimsko cerkev z novonastalimi protestantskimi ločinami; ustanovil je nekaj znanstvenih akademij, najpomembnejši, berlinski Akademiji znanosti pa je dolga leta tudi predsedoval.

V tem času je njegova matematična dejavnost zamrla, kljub temu pa je leta 1682 sodeloval v nastajanju znanstvene revije *Acta Eruditorum*, v kateri je potem objavil svoji najslavnejši matematični deli *Nova methodis pro maximis et minimis* (Nova metoda za maksimume in minimume, 1684) in *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (O skriti geometriji in analizi nedeljivih in neskončno majhnih količin, 1686). V prvem je izpeljal osnovna pravila odvajanja in vpeljal

oznako $\frac{dy}{dx}$, ki jo še danes uporabljamo. V drugem pa je vpeljal oznako $\int$ za integral in dokazal osnovni izrek matematične analize, ki je verjetno najpomembnejši izrek višje matematike nasploh. Poudariti moramo pa, da Leibniz ni bil prvi, ki je poznal te rezultate. Ker gre za eno najbolj zanimivih in kontroverznih epizod v zgodovini matematike, jo bomo na kratko povzeli.

Koreni diferencialnega in integralnega računa sežejo zelo daleč, vse tja do starih Grkov, ki so že poznali metode za določanje tangent na krivulje in računanje ploščin likov. Njihove metode so bile izrazito geometrične in zato niso bile primerne za formalno računanje. Šele simbolični račun, ki ga je prvi razvil Francois Viète (danes bi temu rekli računanje s splošnimi števili), in vpeljava opisovanja geometričnih objektov s pomočjo koordinat sta odprla pot rojstvu integralnega in diferencialnega računa. V obdobju med 1550 in 1660 so mnogi matematiki s pridom uporabljali nove prijeme za lažje reševanje starih problemov in spopadanje z novimi, ki so bili do takrat nerešljivi. Vendar pa so se skoraj vsi teh problemov lotevali bodisi geometrično bodisi algebrasko. Kot smo že omenili, sta Newton in Leibniz prva naredila odločilni preboj in združila dotedanje prijeme v novo vejo matematike – v diferencialni in integralni račun. Prvemu je to uspelo, sodeč po ohranjenih zapiskih in pismih, v letih 1665-1666, drugemu pa v času bivanja v Parizu, 1673-1676. Čeprav Newton svojih rezultatov ni objavil, je bil Leibniz z njimi delno seznanjen v dveh pismih, ki jih je leta 1676 dobil od Newtona ob posredovanju Nemca Henryja Oldenburga, takratnega tajnika Kraljeve družbe. To ga je spodbudilo, da je svojim dosežkom dal dokončno obliko in jih v obdobju 1684-1693 tudi objavil. Njegove metode so se takoj razširile med matematiki in imele za posledico spektakularne rezultate, še najbolj v delih bratov Bernoulli. Ta bliskovit napredek dobro ponazarja dejstvo, da so skoraj vsi rezultati matematične analize, ki se jih danes učimo na osnovni stopnji, vključno s prvim letnikom fakultete, nastali že pred letom 1700. Prvi učbenik, ki je vseboval Leibnizove rezultate, je leta 1696 objavil francoski matematik L'Hospital. Šele kasneje, v letih 1704-1736, je tudi Newton objavil svoje rezultate, čeprav je že iz njegovih zgodnejših del, predvsem iz njegovega najpomembnejšega dela *Philosophie Naturalis Principia Mathematica* (Matematične osnove naravne filozofije, 1687) razvidno, da je za izpeljevanje rezultatov že uporabljal odvajanje in integriranje. Treba je še povedati, da je Newton svoje dosežke leta 1669 in 1671 ponudil Kraljevi družbi in Univerzi v Cambridgu v objavo, vendar so mu jih, kakor se to danes neverjetno sliši, zavrnil, ker so menili, da so nezanimivi. Tako se je zgodilo, da so prve objave teh osnovnih rezultatov današnje matematike bile Leibnizove. Ko so njegovi članki povzročili pravi plaz novih matematičnih rezultatov,

se je med Newtonom in Leibnizom ter njunimi učenci in pristaši razvila ogorčena in občasno zelo groba razprava o prvenstvu, ki je obema, vendar predvsem Leibnizu, zagrenila zadnja leta življenja. Danes, ko imamo na razpolago ne le objavljena dela temveč tudi zapiske in pisma, je nedvomno, da je do osnovnih rezultatov vendarle prej prišel Newton, večji vpliv na razvoj matematike pa je imel Leibniz. Do svojih rezultatov je prišel sam, neodvisno od Newtona, bili so v matematično bolj zreli obliki, njegov zapis, oznake in terminologija so prevladali in jih še danes uporabljamo.

Zadnja leta Leibnizovega življenja niso bila preveč srečna. Poleg prerekanja z Newtonom in njegovimi privrženci je nadaljeval še s preučevanjem dinastičnih zvez Brunswickovih, ki pa takrat družine niti niso več zanimale. Ko je leta 1716 Leibniz umrl, je bil na pogrebu prisoten le njegov osebni tajnik. Genealogijo Brunswickovih so objavili šele leta 1843.

Petar Pavešić

PODALJŠANA LANGFORDOVA ZAPOREDJA – Rešitev s str. 53

Iščemo najmanjše naravno število n , za katero obstaja zaporedje $3n$ števil, v katerem vsako od števil med 1 in n nastopa natanko trikrat, pri čemer je med vsakima zaporednima pojavitvama števila i natanko i drugih členov zaporedja. Taka zaporedja smo imenovali podaljšana Langfordova zaporedja. Krajši premislek in nekaj poskušanja nas poučita, da zelo kratka zaporedja take oblike ne obstajajo. Zato se iskanja lotimo z računalnikom. Navedeni program zaporedoma poskuša zgraditi vedno daljša zaporedja zahtevane oblike in se ustavi, ko uspe najti prvo podaljšano Langfordovo zaporedje. Pri tem uporablja metodo sestopanja. Zaporedje gradi tako, da vanj postopno dodaja nova števila in sproti skrbi, da ima že določeni del zaporedja željeno lastnost. Najprej v zaporedje postavi vse tri pojavitve števila n , in sicer tako, da je med zaporednima pojavitvama prostora še za natanko n drugih členov. Nato pri že postavljenih številih n na prosta mesta postavi tri števila $n - 1$, zopet z ustreznim razmikom. Potem sledi postavljanje števil $n - 2$, itn. Če se postavljanje zaplete, se vrne nivo nazaj in poskuša z novo postavitvijo trojke prejšnjih števil. Tako sistematično pregleduje možnosti, dokler ne najde iskanega zaporedja ali pa ne pregleda vseh možnosti in ugotovi, da iskano zaporedje izbrane dolžine ne obstaja.

Rešitev je seveda sprogramirana rekurzivno.


```

program PodaljsaniLangford;
{ S sestopanjem poišče najkrajše podaljšano Langfordovo zaporedje. }
const
  MaxN = 20; { Iščemo do zaporedij dolžine 3*MaxN. }
var
  t: array[1..3*MaxN] of integer; { tabela s členi zaporedja }
  n: integer; { Zaporedje ima 3*n členov. }
  konec: boolean; { Ko najdemo zaporedje, postavimo konec=true. }

procedure Postavi(k: integer);
{ Uporablja globalne spremenljivke t, n in konec. }
var i: integer;
begin
  if k < 1 then { Našli smo zaporedje. }
    begin
      write(n, ' '); for i := 1 to 3*n do write(' ', t[i]); writeln;
      konec := true;
    end
  else begin
    i := 1; { V zaporedju na mesta i, i+k+1, i+2*k+2 postavimo števila k. }
    while not konec and (i <= 3*n-2*k-2) do begin
      if (t[i]=0) and (t[i+k+1]=0) and (t[i+2*k+2]=0) then begin
        t[i] := k; t[i+k+1] := k; t[i+2*k+2] := k; { Postavimo tri števila k. }
        Postavi(k-1); { Naslednjič postavljamo k-1. }
        t[i] := 0; t[i+k+1] := 0; t[i+2*k+2] := 0; { Počistimo za seboj. }
      end;
      i := i+1;
    end; { while }
  end; { else }
end; { Postavi }

begin
  for n := 1 to 3*MaxN do t[n] := 0; { Inicializacija tabele členov zaporedja. }
  n := 0; konec := false;
  while not konec and (n < MaxN) do begin
    n := n+1;
    Postavi(n); { Poskušamo zgraditi zaporedje dolžine 3*n. }
  end; { while }
  if konec then
    writeln('Najkrajše zaporedje ima ', 3*n, ' členov.')
  else
    writeln('Zaporedje z <= ', 3*MaxN, ' členi ne obstaja.');
```

end.

Kot rešitev kar hitro dobimo zaporedje

1 9 1 6 1 8 2 5 7 2 6 9 2 5 8 4 7 6 3 5 4 9 3 8 7 4 3,

ki ima 27 členov. Z majhnimi dopolnitvami lahko gornji program spremenimo tako, da poišče vsa podaljšana Langfordova zaporedja izbrane

KAKO HITRO HODITI? – Rešitev s str. 1

Nalogo zlahka uženemo tako, da zapišemo in rešimo ustrezno algebrائيčno enačbo (ali sistem).

Lahko pa jo rešimo tudi s preprostim aritmetičnim premislekom:

Ko so turisti pospešili hojo s 3 km/h na 4 km/h, so na vsakem kilometru prihranili

$$\frac{1}{3} \text{ ure} - \frac{1}{4} \text{ ure} = \frac{1}{12} \text{ ure}.$$

Ker so s to hitrostjo prišli v pristanišče

$$85 \text{ minut} = \frac{85}{60} \text{ ure} = \frac{17}{12} \text{ ure} = 17 \cdot \frac{1}{12} \text{ ure}$$

prej, so imeli po spremembi hitrosti do cilja še 17 km.

Pri hitrosti 3 km/h bi za to pot potrebovali

$$\frac{17}{3} \text{ ure} = 5 \text{ ur } 40 \text{ minut}$$

časa in bi ladjo zamudili za 40 minut. Da bi prišli turisti v pristanišče hkrati z ladjo, bi morali 17 km prehoditi v 5 urah. Torej bi bila potrebna hitrost $\frac{17}{5} \text{ km/h} = 3.4 \text{ km/h}$.

Marija Vencelj

KNJIŽNI NAKUPI – Rešitev s str. 25

Označimo z x število knjig, ki jih je kupil eden izmed očetov, z y pa število tistih knjig, ki jih je kupila njegova hči. Tedaj je:

$$x \cdot 200 \cdot x + y \cdot 200 \cdot y = 13\,000 \quad (x, y \in \mathbb{N}),$$

oziroma

$$x^2 + y^2 = 65 \quad (x, y \in \mathbb{N}).$$

Vse naravne rešitve te diofantske enačbe so zbrane v spodnji tabeli. In sedaj ob pomoči ostalih podatkov iz naloge ni več težko ugotoviti, da je kupila Vlasta 7 knjig, Žiga 8 knjig, in da je Uršin oče Žiga.

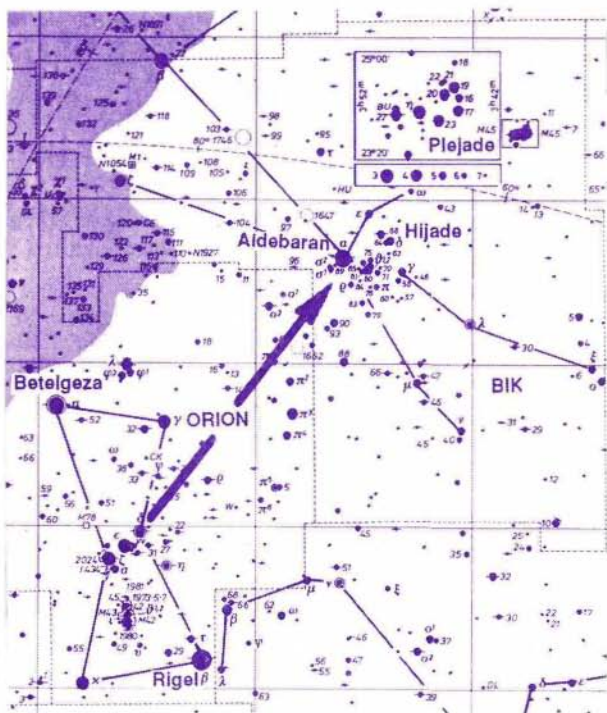
x	8	7	4	1
y	1	4	7	8

Vilko Domajnko

HIJADE

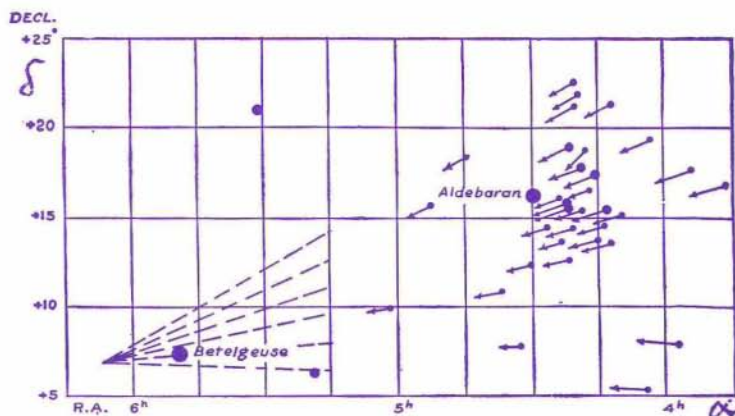
V jesenskih in zimskih večerih in nočeh lahko opazujemo prelepo skupnico zvezd v neposredni bližini Aldebarana, najsvetlejšje zvezde v ozvezdju Bik. Ta zvezdna kopica ima obliko postrani ležeče črke V, Aldebaran pa leži približno v stičišču zvezdnih krakov, ki sestavljata črko.

Slika 1. Takole s pomočjo ozvezdja Orion najdemo zvezdo Aldebaran (α Bika) in ob njem Hijade. S prostim očesom zasledimo pet zvezd, že z daljnogledom manjše povečave pa poleg teh še veliko število šibkejših zvezd.



Kopica je dobila ime *Hijade* – *Deževnice* najbrž zato, ker so pred tisočletji te zvezde vzhajale tik pred zoro ob spomladanskih deževjih.

Deževen sloves Hijad poskuša pojasniti grški mit. Po njem so bile Hijade hčerke velikana Atlasa (Atlanta) in boginje oblakov Nefele. Ker je bil njihov oče kruto obsojen, da mora za vse večne čase na svojih usločenih in razbolelih ramah nositi celoten nebesni svod, so tako žalostno in dolgo jokale, da so ganile vrhovnega boga Zeusa, ki jih je spremenil v zvezde. Njihovo žalovanje se nadaljuje na zvezdnem nebu, saj jim solze kar lijejo v spomladanski dež.



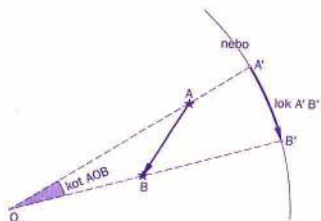
Slika 2. Gibanje zvezd v Hijadah. Zvezde Hijad, vidne v obliki črke V, hitijo proti točki, ki leži na nebu nekoliko vzhodno od zvezde Betelgeze v Orionu. Dolžine puščic predstavljajo lastno gibanje zvezd kopice v časovnem presledku 50000 let.

Druga različica mita pa pripoveduje, da so nimfe Hijade, sestre Plejad (glej članek *Sedem sester*, Presek 22, 62), silno žalovale za svojim bratom Hijasom, ki se je smrtno ponesrečil na lovu. Zevs ni mogel prenašati njihove zemeljske žalosti in jih je postavil na nebo in ovekovečil v zvezdah.

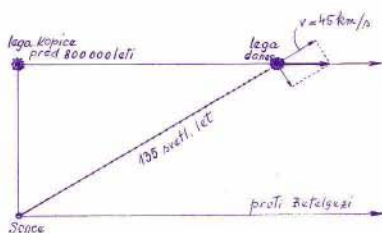
Hijade so vidne s prostim očesom. To je slikovita, z dvogledom izredno lepo vidna odprta zvezdna kopica. Resnično smo nagrajeni za pogled, če jih pogledamo vsaj skozi lovski daljnogled. Na žalost zvezde te skupine zasenči svetloba oranžnega Aldebarana, ki leži pred kopico in torej ni član skupine. Aldebaran nam je dosti bližji (oddaljenost 70 svetlobnih let) kot kopica (135 svetlobnih let) in po naključju leži v isti smeri.

Oddaljenost Hijad od nas so ugotovili z meritvami gibanja zvezd v kopici. Ker je kopica razmeroma blizu, zaznavamo njeno gibanje glede na bolj oddaljene zvezde (zvezdno ozadje). Zdi se, da smeri zvezdnih gibanj kažejo proti določeni točki v vesolju. Vzoredne poti zvezd v kaki kopici so usmerjene proti taki točki v prostoru takrat, če kopica drvi stran od nas. Gre za učinek perspektive, ki je posebno opazen v lastnem gibanju zvezd v Hijadah, ki so tako blizu nas, da pokrivajo kar velik kos neba (približno v premeru 20°).

Hijade vključujejo med seboj sorodne, z gravitacijsko silo povezane zvezde (razen Aldebarana, ki ima neodvisno gibanje in ni prikazan na sliki). V kopici je najmanj 150 zvezd, gostejši del ima premer okoli 30 svetlobnih let, njegovo težišče pa je oddaljeno okoli 135 svetlobnih let od Sonca. V prostoru se zvezde Hijad gibljejo proti vzhodu in stran od Sonca. Točka, proti kateri se premikajo, pa leži nekoliko vzhodno od zvezde Betelgeze v Orionu.



Slika 3. Lastno gibanje zvezde. Če se v prostoru zvezda premakne iz lege A v lego B, njeno lastno gibanje predstavlja kot AOB, oziroma lok A'B' na nebu. Lastno gibanje zvezde je večje, če je zvezda bližje in se hitreje giblje.



Slika 4. Gibanje Hijad. Najbližje Soncu so bile pred 800 000 leti na oddaljenosti okoli 65 svetlobnih let.

Hijade zelo lahko najdemo na temnem in jasnem nebu. Zato predlagamo, da jih res opazujete.

Izberite jasno noč brez mesečine. Počakate vsaj četrt ure, da se oko prilagodi temi. Najprej jih opazujete s prostim očesom, nato pa še z dvogledom ali daljnogledom pri različnih povečavah. Na koncu poskusite še narisati, kar opazujete.

Vendar ne ostanite samo pri tem opazovanju. S prostim očesom in z daljnogledom se sprehodite še po ostalih ozvezdijih in objektih čudovito lepega zimskega neba.

Marijan Prosén

ZAPELJIVI RADIOLAR – Rešitev s str. 26

Kot vemo že iz teksta samega, se je matematik pri dokazovanju, da polieder s samimi šestkotnimi ploskvami (o pravih šestkotnikih v tem primeru seveda sploh ne more biti govora!) ne obstaja, oprl na Eulerjevo polieder-sko formulo:

$$o + p = r + 2.$$

Ta opisuje povezavo med številom oglišč (o), ploskev (p) in robov (r) poljubnega poliedra.

Pa denimo, da bi omenjeni polieder obstajal, pri čemer bi imel n stranskih ploskev. Ker bi vsaki ploskvi pripadalo po 6 robov, vsak od njih pa bi hkrati mejil dve ploskvi, bi imel tak polieder vsega skupaj $r = \frac{6n}{2} = 3n$ robov. Podobno izračunamo še število oglišč. Ker bi vsaki stranski ploskvi pripadalo po 6 oglišč poliedra, v vsakem oglišču pa bi se, v skladu z biologovo trditvijo, stikali po trije robovi, bi imel polieder vsega skupaj $o = \frac{6n}{3} = 2n$ oglišč.

Če vstavimo izračunane količine v Eulerjevo formulo:

$$2n + 3n = 6n + 2,$$

dobimo enačbo, ki nima rešitve v množici naravnih števil, kar bi bilo z ozirom na naravo števila n pač edino smiselno. Zaradi tega smo prisiljeni zavreči obstoj poliedra z opisanimi lastnostmi.

Po podobni poti zavrnilo tudi obstoj sploh kakršnegakoli poliedra, ki bi imel zgolj šestkotne ploskve. V zgornjem dokazu namreč nismo obravnavali tistih tovrstnih teles, pri katerih se samo v nekaterih ogliščih stikajo po trije robovi, v vseh ostalih pa po več.

Poskusite torej dokazati, da ne obstaja polieder, omejen s samimi šestkotniki, v ogliščih katerih bi se stikali, denimo, zgolj po trije ali štirje robovi.

Vilko Domajnko

NEKAJ ZANIMIVIH NALOG ZA NAJMLAJŠE BRALCE – Rešitev s str. 24

Bankovci

Maja je imela 2800 tolarjev. Navodilo: Z dvema bankovcema je lahko plačala zneske 400, 700 ali 1000 tolarjev. Za darilo je plačala trikrat več kot za hrano (zakaj?), od koder sklepamo, da je dala zanj 1200, 2100 ali 3000 tolarjev, itd.

Kroglice v škatli

a) 16. b) 4. c) 29.

Mojstrova domislica

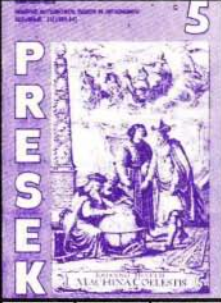
Mojster je vsako kocko razžagal na osem kock. S tem površino vsake kocke zmanjšal na četrtino, število kock pa je postalo osemkrat večje. Torej se je skupna površina kock podvojila.

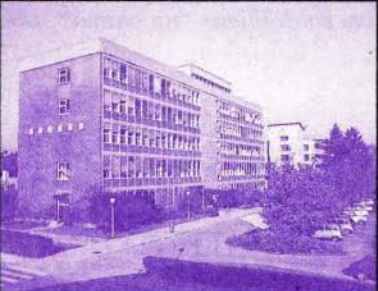
Peščena ura in rokometna tekma

Na začetku tekme je Jure pustil, da je pesek začel istočasno teči v obeh urah. Takoj, ko je iztekel ves pesek iz prve (dvanajstminutne) ure, jo je obrnil. V naslednjih 4 minutah je iztekel ves pesek iz druge ure. V trenutku, ko se je to zgodilo, je ponovno obrnil prvo uro. Pesek je teklen še štiri minute, torej je zadnje zrno steklo 20 minut po začetku merjenja časa. Enako je Jure ravnal v drugi polovici tekme.

Dragoljub M. Milošević – prev. in prir. Barbara Japelj

KRIŽANKA “PRESEKOVI UREDNIKI”

			ROMAN POLANSKI	OBDONAV. KRAJ NA HRVASKEM	RAZLIČICA, VARIANTA	PRITOK DRAVE PRI LIENZU	NEMŠKO STEKLAR. MESTO	ALO.JZ KODRE		CILJ. NAMEN
									TV NOVINAR (JANEZ)	
									ODG. UR. UREDNICA ZA MATEM.	
									ALTAJSKI VAPITI	
			DREVO S TRD. LESOM						OTOK SEV. OD DOLGEGA OTOKA	
			GIBANJE PLANKTONA							
AVTOR MARKO BOKALIČ	ZVEZDO-SLOVJE	MESTO V BOSNI						OČKA		
		UREDNIK ZA RAČUNAL.						RENAULT. MODEL		
ITAL. IZDELOVALCI GODAL						PRIPOVEDNO PESNIŠTVO	KVARNER. OTOK			
							ZAJEDAVEC NA LISTIH			
RIBIŠKA MREŽA				DELAVEC V ZELEZARNI						
RASTLINA Z VOTLIM STEBLOM				POMLADNI MESEC						JED IZ IKER
				SL. KOLESAR (PRIMOŽ)						SKEPSA
KOŠČEK KOPNEGA KI ŠTRLI V MORJE					IGRALEC BAN				"KIPARSKI" PORTRET	
									SREBRO	
DESNI PRITOK SENE PRI PARIZU					KARLOVAC			KAMNINA Z AVALE		
					ZORAN PREDIN					
NURSULTAN NAZAR-BAJEV			DES. PRITOK DRINE					VISOKA PLANOTA V SIRJI		
			PISAČELJ JANČAR					VRTNA ROŽA		
JOKASTIN SIN IN MOZ						ANDREJ ARNOL			UREDNIK ZA ASTRONOM.	
						NATRIJEV KARBONAT			FR. PISAČELJ (EMIL)	
SLOV. PESNIK (JOSIP)					GL. MESTO ELAMA					AMER. PISAČELJ (GEORGE)
					NAJHULJA JEZA					
VRSTA VRBE				TEHNIČNI UREDNIK						
				NICK NOLTE						
TOPOL Z NAVZGOR OBRNJEJEN. VEJAMI							KOT, KI IMA LOK ENAK POLMERU			
ČASOPISNI OGLAS							MESTO V TOSKANI			

GRŠKI STRONOM IN UČITELJ GEOMETRIJE	RŽEVO ZGANJE	TANEK SKUPEK VLAKEN	ZAPOREDNI ČRVI	ČEŠKI PISATELJ (KAREL)		KAZENSKI STREL PRI SPORTU	UREDNIK ZA FIZIKO	ŠKOTSKI PISATELJ (WALTER)	VRSTA HRASTA	DEČEK S ČUDEZNO SVETILKO	LJUBLJANA
					FR. MATEM. (BLAISE)						
					TURŠKO JEZERO						
			V GR. MIT. PRVA UMRLJIVA ZENSKA								ORGAN VIDA
			PRISTAS MONIZMA								
		SL. PESNIK (JANEZ)							1. SOLMIZ. ZLOG		
		PRIMORSKI HRIBOVCI							PRIBOR ZA REZANJE		
	DUŠEVNI PRETRES				ORGANIZ. ENOTA STUDIJA						
	STAROJUG. DESETNIK				MEHANIČNO UČENJE						
VINSKA PLESEN				NEKO. ALŽ. VLADAR. NASLOV				3. OSEBA SR. SPOLA			
MEDVEDEK VREČAR				ANCONA				VINO Z OTOKA VISA			
						KRAJ JUŽ OD BLOK				PRIMOR. PEKOVSKO PEČJO (MNOŽINA)	PASTIR. KOČA
						TURIST. TABOR					
									BOJAN STUPICA		
									DLAKA NA GLAVI		
				MAGMAT. TELO V OBLIKU GOBE							
			ODMEV	GOROVJE V SZ AFRIKI	MESTO V JV SPANJI						
					NAVNA UMETNOST						
DEL TENISKE IGRE	1. OSEBA EDNINE	7. GRŠKA ČRKA				KOLIČNIK POTI IN HITROSTI					
		ČEŠKA PRITRDLI- NICA									
			IGRALKA GARDNER								
			SKANDIN. LETAL DRUŽBA								

RAZPIS NA TEMO 1997 – Rešitev s str. 18

Šlo je hitreje, kot smo pričakovali! Tiskarsko črnilo na Presekovih straneh se je komaj posušilo, že je v uredništvo prispel prvi seznam števil, zapisanih s števki 1, 9, 9, 7. In to kar popoln! Nastal je v družinski izvedbi in ga v celoti objavljamo s pisemcem njegovih avtorjev vred.

Opombe. Precejkrat sta sestavljalca uporabila funkcijo $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, za šest števil v zadnji petini seznama pa tudi $7!!$, to je dvojno fakulteto. Za tiste, ki te funkcije ne poznate, povejmo, da $n!!$ dobimo, če v produktu za $n!$ opustimo vsak drugi faktor, začenši z $n-1$. Tako je npr. $10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 1920$ in $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$.

Dve od šestih števil, zapisanih z dvojno fakulteto, 108 in 109 sta reševalca zapisala tudi drugače, z uporabo binomskega simbola. Za števili 111 in 115 tudi v uredništvu ne poznamo zapisov brez dvojne fakultete. Števili 114 in 123 pa lahko zapišemo tudi drugače. Poskusite!

Ker v uredništvo še prihajajo rešitve, smo se odločili, da bomo počakali na vse zapise, ki jih bomo prejeli do izida te številke, ki jo držite v rokah. O njih in njihovih avtorjih bomo poročali v tretji številki.

Marija Vencelj

Poglejmo, kaj sta nam napisala naša najhitrejša reševalca:

Razpis "1997"

Ko sva prelistavala novi Presek, naju je takoj pritegnila zamisel o razpisu na temo letnice 1997. Malo sva poskušala in rešitve so se hitro začele nabirati. Najprej sva šla po vrsti, potem pa sva ugotovila, da je bolje, če si narediva spisek vseh števil in vanj vstavljava rešitve, kakor nastajajo. Po celem popoldnevu imenitne zabave nama je preostalo še 25 praznin. Naslednji dan sva jih zapolnila do zadnje.

Za priloženi spisek sva od večkratnih rešitev praviloma izbrala najpreprostejšo, razen, če je bil vmes "cukrček", ki vsebuje zanimivo idejo. Vse rešitve so dobljene "na pamet", brez računalnika.

Jurij in Alojz Kodre

$0 = 1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} - 7$	$5 = -1 - 9 : 9 + 7$
$1 = 1 + (9 - 9)^7 = 1^{997}$	$6 = -1 + 9 - 9 + 7$
$2 = 1 + (9 : 9)^7$	$7 = 1 \cdot (9 - 9) + 7$
$3 = \sqrt{1 + 9 : 9 + 7}$	$8 = 1 + 9 - 9 + 7$
$4 = (19 + 9) : 7$	$9 = 1 + 9 : 9 + 7$

$10 = -1 + 9 + 9 - 7$	$43 = (1 + \sqrt{9}) \cdot 9 + 7$
$11 = 1 \cdot 9 + 9 - 7$	$44 = -19 + 9 \cdot 7$
$12 = -1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} + 7$	$45 = (1 + \sqrt{9})! + \sqrt{9} \cdot 7$
$13 = 1 \cdot (\sqrt{9} + \sqrt{9}) + 7$	$46 = 1 + \sqrt{9} + \sqrt{9}! \cdot 7$
$14 = (-1 + 99) : 7$	$47 = -1 + \sqrt{9} \cdot (9 + 7)$
$15 = -1^9 + 9 + 7$	$48 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (9 + 7)$
$16 = (1 + \sqrt{9})^{9-7}$	$49 = 1 + \sqrt{9} \cdot (9 + 7)$
$17 = 1^9 + 9 + 7$	$50 = 19 \cdot \sqrt{9} - 7$
$18 = -1 + 9 + \sqrt{9} + 7$	$51 = 1 \cdot 9 + \sqrt{9}! \cdot 7$
$19 = 1 \cdot \sqrt{9} + 9 + 7$	$52 = 1 + 9 + \sqrt{9}! \cdot 7$
$20 = 1 + 9 + \sqrt{9} + 7$	$53 = -1 - 9 + 9 \cdot 7$
$21 = 1^9 \cdot \sqrt{9} \cdot 7$	$54 = -1 \cdot 9 + 9 \cdot 7$
$22 = 1^9 + \sqrt{9} \cdot 7$	$55 = 1 - 9 + 9 \cdot 7$
$23 = -1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} \cdot 7$	$56 = (1 + \sqrt{9})! : \sqrt{9} \cdot 7$
$24 = (-1 + \sqrt{9})^{9-7}!$	$57 = (-1 + \sqrt{9}!)! - 9 \cdot 7$
$25 = 1 + \sqrt{9} + \sqrt{9} \cdot 7$	$58 = 1 - \sqrt{9}! + 9 \cdot 7$
$26 = 1 + 9 + 9 + 7 = (1 + \sqrt{9})! + 9 - 7$	$59 = -1 - \sqrt{9} + 9 \cdot 7$
$27 = 1 \cdot \sqrt{9}! + \sqrt{9} \cdot 7$	$60 = -1 \cdot \sqrt{9} + 9 \cdot 7$
$28 = (1^9 + \sqrt{9}) \cdot 7$	$61 = 1 - \sqrt{9} + 9 \cdot 7$
$29 = (1 + \sqrt{9}) \cdot 9 - 7$	$62 = -1^9 + 9 \cdot 7$
$30 = 1 \cdot 9 + \sqrt{9} \cdot 7$	$63 = 1^9 \cdot 9 \cdot 7$
$31 = 1 + 9 + \sqrt{9} \cdot 7$	$64 = 19 \cdot \sqrt{9} + 7$
$32 = (-1 + \sqrt{9}) \cdot (9 + 7)$	$65 = (-1 + 9) \cdot 9 - 7$
$33 = -1 \cdot 9 + \sqrt{9}! \cdot 7$	$66 = 1 \cdot \sqrt{9} + 9 \cdot 7$
$34 = (1 + \sqrt{9})! + \sqrt{9} + 7$	$67 = 1 + \sqrt{9} + 9 \cdot 7$
$35 = (-1 + \sqrt{9} + \sqrt{9}) \cdot 7$	$68 = -1 + \sqrt{9}! + 9 \cdot 7$
$36 = 1 \cdot 9 \cdot (-\sqrt{9} + 7)$	$69 = 1 \cdot \sqrt{9}! + 9 \cdot 7$
$37 = (1 + 9) \cdot \sqrt{9} + 7$	$70 = \sqrt{1 + 99} \cdot 7$
$38 = -1 - \sqrt{9} + \sqrt{9}! \cdot 7$	$71 = -1 + 9 + 9 \cdot 7$
$39 = -(1 + \sqrt{9})! + 9 \cdot 7$	$72 = 1 \cdot 9 + 9 \cdot 7$
$40 = (1 + \sqrt{9}) \cdot (\sqrt{9} + 7)$	$73 = -1 + 9 \cdot 9 - 7$
$41 = -1 + (\sqrt{9} + \sqrt{9}) \cdot 7$	$74 = 1 \cdot 9 \cdot 9 - 7$
$42 = (1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9}) \cdot 7$	$75 = 1 + 9 \cdot 9 - 7$

$76 = 19 \cdot (-\sqrt{9} + 7)$	$103 = 1 \cdot \sqrt{9}! + 97$
$77 = (-1 + \sqrt{9}! + \sqrt{9}!) \cdot 7$	$104 = (-1 + \sqrt{9}!)! - 9 - 7$
$78 = -19 + 97$	$105 = -1 + 99 + 7$
$79 = (-1 + 9) \cdot 9 + 7$	$106 = 1 \cdot 99 + 7$
$80 = (-1 + 9) \cdot (\sqrt{9} + 7)$	$107 = 1 + 99 + 7$
$81 = 1 \cdot 9^{9-7}$	$108 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot \left(\frac{9}{7}\right) = 1^9 \cdot \sqrt{9} + 7!!$
$82 = 19 + 9 \cdot 7$	$109 = 1 + \sqrt{9} \cdot \left(\frac{9}{7}\right) = 1^9 + \sqrt{9} + 7!!$
$83 = (1 + 9) \cdot 9 - 7$	$110 = (-1 + \sqrt{9}!)! - \sqrt{9} - 7$
$84 = (1 + \sqrt{9}) \cdot \sqrt{9} \cdot 7$	$111 = 1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{9} + 7!!$
$85 = 1 + (\sqrt{9}! + \sqrt{9}!) \cdot 7$	$112 = (1 + 9 + \sqrt{9}!) \cdot 7$
$86 = -1 + (\sqrt{9}!)! : 9 + 7$	$113 = (-1 + \sqrt{9} + \sqrt{9}!)! - 7$
$87 = -1 + 9 \cdot 9 + 7$	$114 = 1^9 \cdot 9 + 7!!$
$88 = 1 \cdot 9 \cdot 9 + 7$	$115 = 1^9 + 9 + 7!!$
$89 = 1 + 9 \cdot 9 + 7$	$116 = 19 + 97$
$90 = 1 \cdot 9 \cdot (\sqrt{9} + 7)$	$117 = 1 \cdot 9 \cdot (\sqrt{9}! + 7)$
$91 = -1 + 99 - 7$	$118 = (-1 + \sqrt{9}!)! - 9 + 7$
$92 = 1 \cdot 99 - 7$	$119 = (-1 + 9 + 9) \cdot 7$
$93 = 1 + 99 - 7$	$120 = (-1 - 9 : 9 + 7)! $
$94 = -1 \cdot \sqrt{9} + 97$	$121 = (1 + \sqrt{9}!)! + 97$
$95 = 1 - \sqrt{9} + 97$	$122 = (-1 + \sqrt{9}!)! + 9 - 7$
$96 = -1^9 + 97$	$123 = 1 \cdot 9 + 9 + 7!!$
$97 = (1 + 9) \cdot 9 + 7$	$124 = (-1 + \sqrt{9}!)! - \sqrt{9} + 7$
$98 = 1^9 + 97$	$125 = -1 + (9 + 9) \cdot 7$
$99 = -1 + \sqrt{9} + 97$	$126 = 1 \cdot (9 + 9) \cdot 7$
$100 = (1 + 9)^{9-7}$	$127 = 1 + (9 + 9) \cdot 7$
$101 = 1 + \sqrt{9} + 97$	$128 = (1 + 9 : 9)^7$
$102 = -1 + \sqrt{9}! + 97$	

KATERI SLAVNI MATEMATIK JE TO?

Malo je bilo v našem štetju letnic, ki so popolni kubi. Mož, po katerem sprašujemo, je umrl a let pred letnico, ki je kub števila a . Kateri slavní matematik je bil to?

Marija Vencelj

PISANI KROGI – Rešitev s str. 19

V programskem jeziku logo želimo sestaviti ukaz `krogi :n :r`, ki nariše `:n` koncentričnih krogov s polmeri od `:r` do `:r - :n` in dobljene krožne kolobarje pobarva z naključnimi barvami. Rešitev bomo sprogramirali v MSWLogu, različici Berkeley loga za Okna. Ta različica loga je v prostem razširjanju, dobite pa jo lahko prek Interneta na naslovu

<http://vlado.mat.uni-lj.si/ftps.htm#logo>.

V tej različici loga krog polmera `:r` narišemo z ukazom `ARC 360 :r`. Pri tem je središče kroga na mestu, kjer se pri klicu ukaza nahaja želva. Pred klicem mora biti pero spuščeno. Omejeno območje pobarvamo z ukazom `FILL`. Tudi barvanje se začne v točki, v kateri se nahaja želva. Barvo, s katero barvamo, določimo z ukazom `SETFLOODCOLOR`. V Berkeley logu opis barve podamo v obliki RGB, torej kot seznam treh števil med 0 in 255. Prvo število pomeni jakost rdeče, drugo zelene in tretje jakost modre barve. Tako na primer seznam `[0 0 0]` določa črno, seznam `[0 255 0]` zeleno in seznam `[255 255 255]` belo barvo. Naključno število med 0 in 255 dobimo s klicem `RANDOM 256`. Naključno barvo zapolnjevanja tako nastavimo s klicem

```
SETFLOODCOLOR (LIST RANDOM 256 RANDOM 256 RANDOM 256)
```

Zapišimo še celotni ukaz.

```
TO krogi :n :r
  REPEAT :n [
    ARC 360 REPCOUNT*:r ;narišemo krog
    PU
    FD REPCOUNT*:r - :r/2 ;pomik na sredo novega kolobarja
    SETFLOODCOLOR (LIST RANDOM 256 RANDOM 256 RANDOM 256)
    FILL ;barvanje
    BK REPCOUNT*:r - :r/2 ;vrnitev na začetni položaj
    PD
  ]
END
```

V ukazu smo uporabili še eno posebnost Berkeley loga, vgrajeni ukaz `REPCOUNT`. Ta ukaz lahko uporabimo znotraj zanke `REPEAT`. Vrne nam število, ki pove, v kateri ponovitvi zanke se nahajamo. Tako v prvi ponovitvi dobimo 1, v drugi 2, itn. S pomočjo tega ukaza izračunamo, kam moramo postaviti želvo pred klicem ukaza `FILL`, da pobarvamo novo nastali kolobar. Seveda bi namesto tega ukaza lahko uporabili tudi pomožno spremenljivko. Omenimo še, da del vrstice za znakom `;` logo razume kot komentar.

Martin Juvan

SPREHOD PO MEGLI

Pred dvema letoma je bilo v Preseku (Presek 21/6), lani pa v angleški popularni reviji *Weather*, opisano, da smo od spredaj enako mokri, če neko razdaljo po dežju hitro pretečemo ali če jo prehodimo počasneje. Seveda pa "od zgoraj" dobimo več moče, če hodimo počasi in smo torej dalj časa na dežju.

Pri hoji po megli pa ni tako. Če hodimo, smo spredaj skoraj suhi. Razlog za to je, da se kapljice, ki lebdijo v zraku, pri razmeroma počasnem premikanju lahko skupaj z zrakom pred nami razmaknejo. Zakaj?

Najprej povejmo, da dežne kaplje padajo, meglene kapljice pa skoraj mirno lebdijo v zraku. Sila teže F_t jih sicer sili navzdol in nekoliko res padajo - toda le tako hitro, da je sila upora F_u enaka teži (vzgon v zraku lahko zanemarimo). Za majhno kroglico je sila upora premo sorazmerna hitrosti padanja v in polmeru kroglice r ; tedaj velja Stokesov linearni zakon upora $F_u = F_s = 6\pi\mu r v$ (tu je μ viskoznost zraka, okrog $1.72 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$). Teža kapljice pa je $F_t = mg = \rho_{\text{vode}} \frac{4\pi r^3}{3} g$ (tu je ρ_{vode} gostota vode, g pa težnostni pospešek). Torej iz ravnotežja

$$F_t = F_s, \quad (1)$$

$$\frac{4\pi r^3}{3} \rho_{\text{vode}} g = 6\pi\mu r v \quad (2)$$

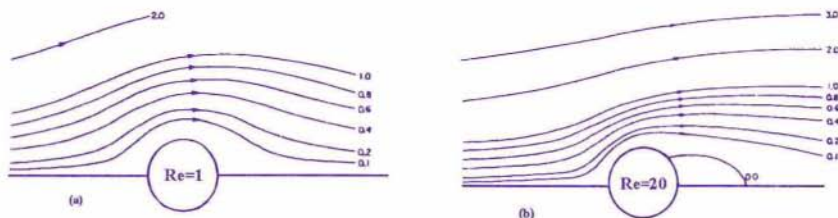
dobimo za hitrost enakomernega padanja skozi zrak

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho_{\text{vode}} g}{\mu} r^2. \quad (3)$$

Za tipično megleno kapljico, ki ima polmer $r = 10$ mikrometrov, je torej hitrost padanja skozi zrak le približno 1 centimeter na sekundo, kar je res zelo malo. To pomeni, da meglene kapljice lebdijo v zraku.

Zato bomo obravnavali le hitrost vodoravne hoje skozi meglo. Pri hoji se nam zrak "umika" s poti približno tako, kot to ponazarja slika 1. V skladu s sliko privzemimo, da je naše telo približno valjaste oblike in da nas zrak obteka podobno, kot obteka dolg valj. Iz slike ugotovimo, da je v naši bližini hitrost odmikavanja zraka v stran v_z le malo manjša od hitrosti hoje; zaradi preprostosti vzamemo, da je kar enaka hitrosti hoje.

Vodne kapljice imajo tisočkrat večjo gostoto kot zrak in zato tudi večjo vztrajnost. Zato se nekaj časa njihova hitrost v_k prilagaja hitrosti zraka. Vsaj v začetku sta hitrosti različni in zrak potiska kapljico v stran. Spet upoštevamo Stokesov linearni zakon upora: Komponenta sile upora



Slika 1. Tokovnice za tok zraka okrog dolgega valja za dve hitrosti oz. za dve Reynoldsovi števili: $Re = 1$ in $Re = 20$; hitrost okrog enako velikega valja je v primeru b) dvajsetkrat večja kot v primeru a). Številke ob tokovnicah povedo, za kolikšen del polmera je bila kaka tokovnica oddaljena od osi skozi valj, preden se je pričela odmikati vstran.

zaradi razlike hitrosti $F_s = 6\pi\mu r(v_z - v_k)$ kapljico pospešuje vstran s pospeškom $a = \frac{\Delta v_k}{\Delta t}$:

$$ma = F_s, \quad (4)$$

$$\frac{4\pi r^3}{3} \rho_{\text{vode}} \frac{\Delta v_k}{\Delta t} = 6\pi\mu r(v_z - v_k). \quad (5)$$

Ko preteče nekaj časa, se njena hitrost že precej prilagodi hitrosti zraka. Iz gornje enačbe dobimo

$$\frac{\Delta v_k}{(v_z - v_k)} = \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho_{\text{vode}} r^2} \Delta t. \quad (6)$$

Če hočemo ugotoviti, kako narašča hitrost kapljice, moramo enačbo integrirati. S tem dobimo enačbo, ki pove, kako hitro se hitrost kapljice prilagaja hitrosti umikajočega se zraka:

$$v_k(t) = v_z(1 - e^{t/\tau_1}), \quad (7)$$

kjer je τ_1 karakteristični čas prilagajanja hitrosti: $\tau_1 = (2/9)(\rho_{\text{vode}}/\mu)r^2$. Za megleno kapljico s polmerom 10 mikrometrov znaša ta čas le nekaj več kot tisočinko sekunde. (Za dežno kapljo s polmerom 1 milimeter bi bil ta čas dobrih 10 sekund. Torej se dežne kaplje zelo slabo umikajo; zato se ob hoji ali teku zaletimo vanje in smo spredaj mokri.)

Kako hitro se torej hitrost meglene kapljice prilagodi hitrosti zraka vstran, recimo na 99 % hitrosti zraka? Vstavimo namesto $v_k(t) = 0.99v_z$, pa dobimo

$$0.99v_z = v_z(1 - e^{t/\tau_1}), \quad (8)$$

$$0.01 = e^{t/\tau_1} \quad (9)$$

in od tod po logaritmiranju enačbe

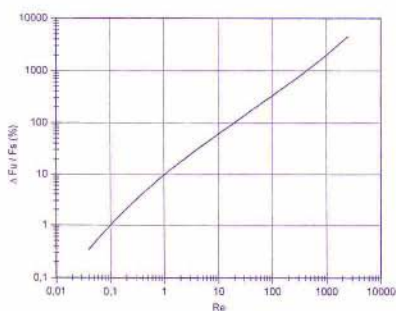
$$t_{99\%} = -\ln(0.01)\tau_1 \approx 4,6\tau_1. \quad (10)$$

Torej se hitrost meglene kapljice praktično v hipu (v nekaj tisočinkah sekunde) prilagodi hitrosti zraka.

Denimo, da se mora zrak umakniti vstran za pol premera našega telesa, torej za kakih 30 cm. To se pri počasnem sprehajanju, ko je npr. hitrost $v_z = 0.3$ m/s, zgodi v eni sekundi. Ker je trajalo le nekaj tisočink sekunde, da se je hitost kapljice prilagodila hitrosti zraka, pri tem kapljice za zrakom skoraj nič ne zaostanejo (račun pokaže, da le za kak centimeter). Torej se skoraj tako hitro kot zrak, skupaj z njim, pred nami odmikajo tudi drobne kapljice.

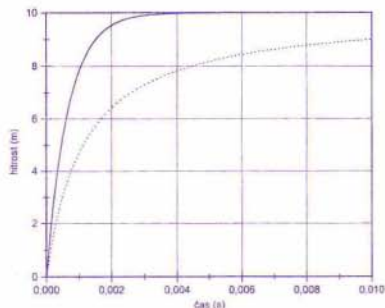
Kaj pa, če se vozimo skozi meglo s kolesom, npr. s hitrostjo 10 m/s, in je tudi hitrost vstran približno taka? Ali hitrost odmikanja vstran kaj vpliva na trke? Najprej moramo oceniti, za koliko se pri večji hitrosti poveča sila upora. Pri tem se žal podrobna obravnava zaplete, ker pri večji hitrosti tok zraka kaj hitro postane turbulenten, kar pomeni, da se v toku pojavijo najrazličnejše vijuge, sunki hitrosti, vrtinci. Mera za tovrstno lastnost toka je brezdimenzijsko *Reynoldsovo število* $Re = \frac{2rv}{\mu/\rho_{\text{zraka}}}$. Čim večje je to število, tem bolj gotovo je tok turbulenten. Ker je viskoznost zraka μ majhna, se tok zraka kaj hitro sprevrže v neurejeno gibanje.

Trdemu orehu preračunavanj tega, kakšen je v resnici tok zraka, ki ga povzročamo s svojim premikanjem, in tega, kaj se v tem toku dogaja s kapljicami, se izognemo tako, da se za približno oceno zadovoljimo s sliko 2. Ta nam pove, da je pri $Re \approx 10$ (za 10 mikrometrsko kroglico in za hitrost 10 m/s je namreč $Re \approx 10$) sila upora na kroglico približno dvakrat tolikšna kot pri počasnem gibanju, ko linearni, Stokesov zakon upora dobro velja: $F_u = 2F_s$. Zato je za polovico

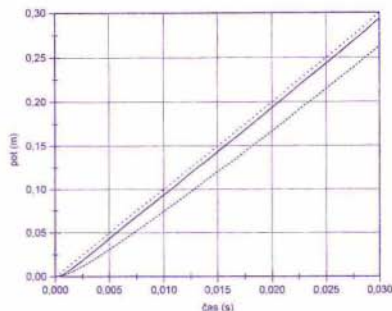


Slika 2. Povečanje upora ΔF_u zaradi turbulentnega gibanja zraka okrog vodne kapljice, glede na Stokesov upor F_s , ki velja za laminarno gibanje. Mera za turbulentnost je Reynoldsovo število Re .

krajši tudi karakteristični čas $\tau_2 = \tau_1/2$. Ker pa sprememba ni zelo, zelo velika, sklepamo, da vsaj približno še velja linearni zakon upora in da se nam tudi pri tej hitrosti večina kapljic umakne s poti (glej sliki 3 in 4).



Slika 3. Primerjava med prilagajanjem hitrosti kapljice, ko se zrak umika vstran s hitrostjo 10 m/s. Gornja krivulja velja za linearni, za faktor dva povečani Stokesov upor, spodnja pa za primer, če bi računali po kvadratnem zakonu upora.



Slika 4. Primerjava med potjo kapljice vstran po linearnem, za faktor dva povečanem Stokesovem upor, in med potjo, ko jo v istem času opravi kapljica, če bi upoštevali kvadratni upor. Črtkano je narisana pot, ki jo vstran opravi zrak.

Včasih pa smo tudi v megli mokri. Predvsem tedaj, ko so kapljice večje in se zaradi večje vztrajnosti torej manj odmikajo. In še en vzrok je treba omeniti: Čim večja je hitrost in čim večji je premer telesa, okrog katerega teče zrak, tem večje je Reynoldsovo število in tem bolj gotovo je tok turbulenten. Okrog nas je tok sorazmerno gladek le pri res počasnem sprehajanju. Pri malo večji hitrosti pa je že precej turbulenten in tedaj je računanje pospeševanja vstran, kot smo ga naredili, vse manj upravičeno.

Pri večjih hitrostih bi zagotovo morali uporabiti kvadratni zakon upora. Da ugotovimo, kako se glede pospeševanja kapljic vstran spremene razmere, ko postane upor sorazmeren kvadratu hitrosti, si ponovno oglejmo sliki 3 in 4. Slika 3 pove, da se ob upoštevanju lineranega zakona upora in ob karakterističnem času τ_2 hitrost kapljice prilagodi hitrosti zraka spet v nekaj tisočinkah sekunde (gornja krivulja). Če pa bi računali po kvadratnem upor, bi prilagajanje trajalo precej dlje, nekaj stotink sekunde (spodnja, črtkana krivulja). Ustrezno velja za pot vstran (slika 4): Zrak se umika tako, da v 3 stotinkah sekunde napravi pot 0,3 m vstran (premica linearne sorazmernosti – narisana s pikami). Račun po linearnem zakonu pove, da bi se kapljice umaknile skoraj enako hitro (le v prvih tisočinkah sekunde je ta krivulja malo drugačna, sicer pa sta vzporedni). Pri upoštevanju kvadratnega upora pa bi ugotovili nekoliko večji zaostanek za zrakom (spodnja, bolj položna črtkana krivulja).

Kadar je treba upoštevati kvadratni upor, je umikanje kapljic torej nekoliko počasnejše. Z besedami matematike bi to razložili takole: Za majhne pozitivne x je $x^2 < x$. Za razlago, kaj se dogaja s kapljico, v katero trčimo, bi pa bilo morda najbolje reči takole: Okoli nas je v turbulentnem toku zraka veliko slučajnih motenj in neurejenih gibanj na vse strani. Kakšen od teh slučajnih sunkov v toku morda zanese kapljice prav v nas.

Ponavadi pri počasni hoji skozi meglo nismo nič mokri. Le če so kapljice megle večje od običajnih, nas močijo (podobno kot dež). Nekoliko vpliva tudi hitrost premikanja skozi meglo: Pri večji hitrosti je večja verjetnost, da se zaradi manj urejenega toka okrog nas v nas zaletijo nekatere kapljice.

Torej če nikakor nočemo biti mokri, potem skozi meglo ne tecimo in se ne vozimo s kolesom, temveč se lepo počasi sprehajajmo (kadar imamo seveda za to dovolj časa). Če so v megli kapljice večje kot navadno, je ta nasvet še toliko bolj vredno upoštevati.

Trki s kapljicami in snežinkami pa niso pomembni samo za to, ali bomo ljudje v megli ali dežju mokri. Ta pojav ima še nekatere zanimive in pomembne posledice. Trki in zlivanje oziroma sprijemanje so eden od dveh glavnih načinov rasti oblačnih kapljic in kristalčkov do take velikosti, da potem kot dež ali sneg padejo do tal. Sodra in toča, ki lahko zrasteta tudi toliko, da povzročita znatno škodo, pridobivata vedno večjo maso prav s trki in primrzovanjem podhlajenih oblačnih kapljic. Žled nastaja podobno, ko kaplje dežja zadevajo ob mrzle veje, stebre in žice daljnovidov. Če je žleda dosti, lahko povzroči tudi zlome zaradi prevelike teže. Manj škodljivo, pa zato lepše je ivje. Nastane tako, da lahna sapa nosi s seboj podhlajene meglene kapljice. Kar oglejte si kdaj ivje, ko se zjutraj po megleni noči zdani. Ponavadi se ga večina nabere po eni strani vejic ali bilk. Tako lahko ugotovimo, da je ponoči iz tiste smeri na lahno vleklo in prinašalo vedno nove in nove kapljice. In morda še en primer: Zaledenitve na nosu in krilih letala tudi nastajajo s trki in primrzovanjem podhlajenih oblačnih in dežnih kapelj. Ker ogrožajo varnost letenja, morajo imeti letala posebne naprave za odstranjevanje ledu med letom.

Jože Rakovec

HÁLO – ČUDOVITI NARAVNI POJAV. V prejšnji številki smo za to številko napovedali opis laboratorijskega prikaza pojava hála. Vendar smo morali zaradi majhnega števila barvnih strani v Preseku prispevek odložiti na kasneje.

Iz uredništva

MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIADA 1997

V šolskem letu 1996/97 bo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organiziralo celoletne priprave na mednarodno matematično olimpiado, ki bo julija 1997 v Argentini. Na pripravah, ki bodo potekale enkrat mesečno, bodo kandidati ob reševanju nalog olimpijskega tipa obdelali tudi pripadajočo teorijo.

Olimpijska ekipa bo v letu 1997 izbrana na podlagi rezultatov dveh izbirnih testov, državnega tekmovanja in mednarodnega tekmovanja mest. Vsak od izbirnih testov in državno tekmovanje prinesejo po 30% točk, jesenski in pomladanski del tekmovanja mest pa po 5%.

Prvi izbirni test bo 24. januarja 1997, drugi izbirni test bo 25. aprila 1997, državno tekmovanje bo predvidoma 17. in 18. maja 1997, datumi tekmovanja mest (predvidoma v oktobru 1996 in marcu 1997) pa še niso določeni. Dijaki lahko dobijo podrobnejše informacije pri svojem mentorju oz. profesorju matematike ali po elektronski pošti na naslovu:

`math.comp@fmf.uni-lj.si`,

koledar aktivnosti (z ažuriranimi datumi) pa je ob vsakem času dostopen po Internetu: URL:

`www.fmf.uni-lj.si/mathcomp/koledar.html`.

Informacije lahko dobite tudi pri spodaj podpisanem na Fakulteti za matematiko in fiziko, Jadranska 19, Ljubljana, tel. (061) 1766-551.

Matjaž Željko

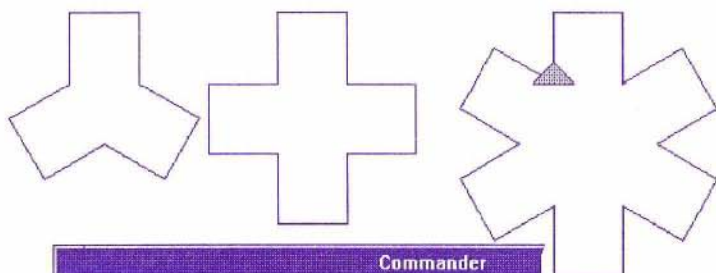
11. DRŽAVNO TEKMOVANJE V RAČUNALNIŠTVU ZA OSNOVNOŠOLCE – 1. del

Učenci so reševali naloge v programskem jeziku LOGO (do 5. razreda) in v pascalu, oziroma v basicu (od 6. do 8. razreda). V tej številki objavljamo naloge za prve tri skupine, naloge za ostale skupine bomo objavili v naslednji številki Preseka.

Naloge za 1. skupino – LOGO (učenci do 3. razreda)

1. naloga:

Sestavi program, ki bo risal like iz kvadratov, kot jih vidiš na sliki. Ukaz `LIK :n :d` naj ima dva parametra: prvi določa število "kvadratov", drugi pa določa dolžino črt.



```
clearscreen lik 4 50
```

```
penup left 90 forward 150 right 90 pendown
```

```
lik 3 50
```

```
penup right 90 forward 350 left 90 pendown
```

```
lik 6 50
```

LIK 3 50 nariše levi lik, LIK 4 50 nariše križ, LIK 6 50 nariše znak, kot ga vidiš na avtomobilih prve pomoči itd.

2. naloga:

Program VECKRAT :n naj izpiše na zaslon prvih 20 večkratnikov danega števila :n.

```
veckrat 5
5
10
15
20
25
30
35
```

3. naloga:

Program SKOKI :n :v naj riše pot, ki jo žogica-skokica opiše, ko jo vržemo na tla. Žogica se zaustavi po toliko skokih, kot jih določa spremenljivka :n. Spremenljivka :v določa velikost prvega polkroga, ostali "skoki" pa se enakomerno manjšajo.

Primer: Ukaz SKOKI 5 10 naj izriše 5 polkrogov, ki se enakomerno manjšajo:

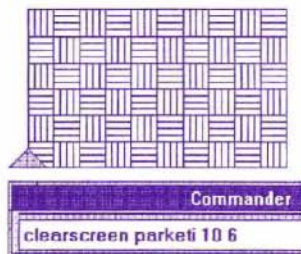


```
Commander
```

```
clearscreen skoki 5 10
```

4. naloga:

Računalnik naj izriše tla, pokrita s parke-
tom v takem vzorcu, kot ga vidiš na sliki.
V vsakem kvadratu naj bodo 4 "deščice",
dolge 20 in široke 5 pik. Ukaz **PARKET :d :v**
naj izriše sliko **z :d** kvadrati po dolžini in
:v kvadrati po višini. Nalogo rešuj samo za
soda (parna) števila **:d** in **:v**. Po risanju
naj bo želvica v levem spodnjem kotu slike.

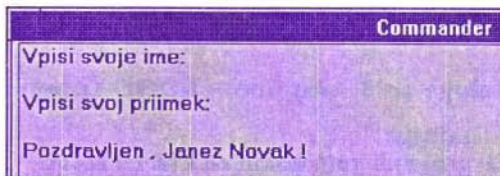


Priporočilo: pripravi ukaze **PRAVOKOTNIK**, **KVADRAT**, **DVAKVADRATA**, **VR-**
STA, **DVEVRSTI** in **PARKET**.

Naloge za 2. skupino – LOGO (učenci 4. razreda)**1. naloga:**

Sestavi ukaz **POZDRAV**, ki bo opravil naslednje naloge:

- a) zbrisal bo besedilo na tekstnem zaslonu;
- b) zapisal bo navodilo: "Vpiši svoje ime!";
- c) s tipkovnice bo odčital vtipkano ime (npr. *Janez*);
- č) zapisal bo navodilo: "Vpiši svoj priimek!";
- d) s tipkovnice bo odčital vtipkani priimek (npr. *Novak*);
- e) izpisal bo pozdrav (npr. *Pozdravljen, Janez Novak!*).

**2. naloga:**

Tvoj program naj izriše zvezdo, kot jo na prsih nosi slavní šerif Hitroroki Janez. Program naj omogoča risanje različno velikih zvezd, napis pa lahko prilagodiš velikosti, pri kateri preizkušaš delovanje ukazov. Na spodnji sliki so ravne črte dolge 50 pik.

Opombe: Za napis na zvezdi uporabi ukaz:

LABEL "Sheriff."

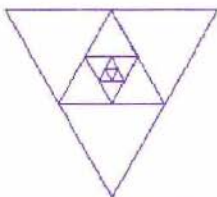
Smer in lega napisa je odvisna od lege želvice in od smeri, v katero je želvica obrnjena. Velikost črk na sliki je 34, pisava pa je Arial. Velikost črk in pisavo izberi preko menija (izbira: **SET/FONT**).



3. naloga:

Program **TRIKOT** :n naj nariše enakostranični trikotnik s tako veliko stranico, kot je vrednost spremenljivke :n; vanj naj vpiše trikotnik s pol manjšo stranico, v tega ponovno trikotnik s še pol manjšo stranico itd.

V programu uporabi rekurzijo. Postopek naj se konča, ko program ugotovi, da bi bila naslednja velikost stranice manj kot 5 pik.

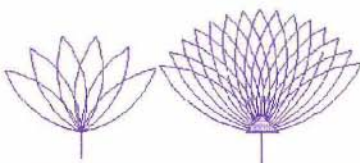


Commander

```
hideturtle clearscreen right 90 trikot 150
```

4. naloga:

Sestavi ukaz **LOK** :d, ki naj predstavlja šestino krožnice. Iz dveh lokov sestavi listek. Ukaz **CVET** :n :d naj izriše cvet iz :n listkov (približno take oblike, kot je na sliki). Listki naj bodo razporejeni tako, da skrajna dva oklepata kot 120 stopinj.



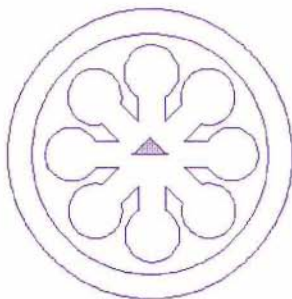
Commander

```
cvet 6 8 penup right 90 forward 170 left 90 pendown cvet 15 10
```

Naloge za 3. skupino – LOGO (učenci 5. razreda)**1. naloga:**

Na pročeljih romanskih cerkva lahko občudujemo čudovite rozete - okrogla okna z okraski. Poskusi s pomočjo želvice narisati rozeto, kot jo vidiš na sliki. Dolžina ravnih črt na sliki je 20 pik, uporabljen pa je del krožnice, ki ustreza petim šestinam celotne krožnice.

Nasvet: za risanje krožnih lokov uporabi ukaz **ARC**.

**2. naloga:**

Kavboj Jimmy rad igra poker. Danes ima s seboj 300 \$. Odločil se je, da bo igral toliko časa, dokler bo imel več kot 100 \$. Prvo igro dobi, drugo izgubi, tretjo dobi, četrto izgubi itd. Žal pa vsakič nekoliko več izgubi,

kot pa v predhodni igri dobi. Zneski, ki jih Jimmy dobi, znašajo največ 150 \$, tisti, ki jih izgubi, pa so do 50 \$ večji od ravnokar pridobljenega zneska.

Zapiši program, ki naključno izbira dobitke in izgubo Jimmyja ter izpisuje stanje v Jimmyjevem žepu.

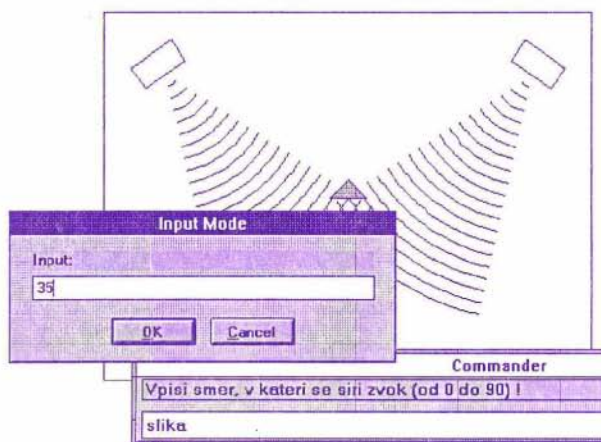
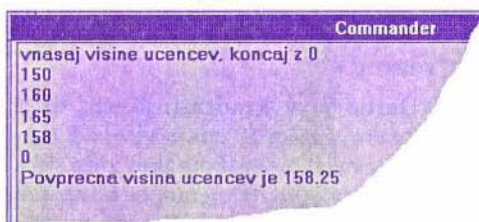
Namig: uporabi rekurzijo!

3. naloga:

Zapiši program, ki izračuna in na zaslon izpiše povprečno višino učencev. Podatke vnašaš preko tipkovnice, z vnašanjem pa končaš tako, da vtipkaš za višino vrednost 0 (glej primer).

4. naloga:

Na sliki je soba z dvema zvočnikoma, loki pa nakazujejo smer zvoka. Zapiši program, ki izriše tako skico. Program naj povpraša po kotu *alfa* (med 0° in 90°), nato pa postavi zvočnike in "zvok" v izbrano smer. Pri tem naj bo *alfa* velikost kota med levo steno in smerjo zvoka iz levega zvočnika, na desni strani pa je slika simetrična. Loki, ki predstavljajo zvok, naj pripadajo središčnemu kotu 45° .



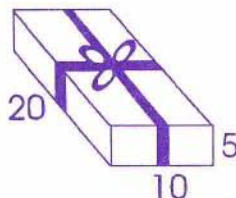
Tihomil Šlenc

31. PODROČNO TEKMOVANJE ZA SREBRNO VEGOVO PRIZNANJE

20. aprila 1996 se je 1863 šestošolcev, 1706 sedmošolcev in 1790 osmošolcev na področnem tekmovanju potegovalo za srebrno Vegovo priznanje. Osvojilo ga je 534 učencev 6. razreda, 519 učencev 7. razreda in 568 učencev 8. razreda. Tudi letos so učenci reševali naloge v dveh sklopih. Prvih osem nalog je bilo izbirnega tipa z obkrožanjem ustreznega odgovora, nato pa še tri "klasične" naloge. Poglejmo naloge:

6. razred

A1 Darilo je v kvadrasti škatli, ki je dolga 20 cm, široka 10 cm in visoka 5 cm. Škatla je povezana s trakom, kot kaže slika. Kako dolg trak potrebujemo, če bomo pentljo izdelali iz 40 cm traku?



(A) 60 cm (B) 80 cm (C) 100 cm

(Č) 120 cm (D) 140 cm

A2 Janez in Tone sta reševala naloge. V času, ko je Janez rešil tri naloge, je Tone rešil le dve nalogi. V štirih urah sta skupaj rešila 60 nalog. Koliko nalog je Janez rešil v štirih urah?

(A) 40 (B) 36 (C) 30 (Č) 24 (D) 12

A3 kateri od ulomkov $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{11}$ je najmanjši?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{2}{7}$ (Č) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{3}{11}$

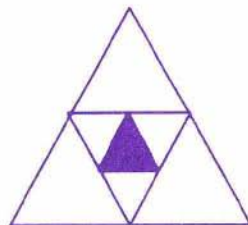
A4 S koliko ničlami se končuje produkt $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (Č) 10 (D) 12

A5 Kolikšen del ploščine največjega trikotnika je ploščina črnega trikotnika?

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$

(Č) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{16}$



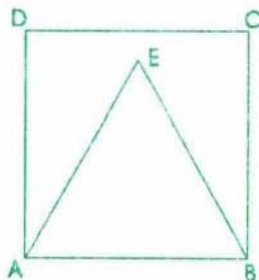
- A6** V slovenski nogometni ligi igra 10 moštev za naslov državnega prvaka. V jesenskem in pomladanskem delu tekmovanja igra vsako moštvo z vsakim v domačem kraju in v gosteh. Nobena tekma se ne ponovi. Koliko tekem odigrajo vsa moštva v eni sezoni?

(A) 180 (B) 120 (C) 100 (Č) 90 (D) 45

- A7** V kvadratu $ABCD$ je narisana enakostranični trikotnik $\triangle ABE$, kot kaže slika. Kolika je velikost kota $\angle CED$?

(A) 50° (B) 75° (C) 120°

(Č) 150° (D) 300°



- A8** Od nekega zneska odštejemo desetino tega zneska. Novi znesek zmanjšamo za njegovo devetino. Dobljeni znesek razdelimo štirim osebam, vsaka dobi 1800 SIT. Kolikšen je bil znesek na začetku?

(A) 6480 SIT (B) 7200 SIT (C) 8000 SIT

(Č) 8800 SIT (D) 9000 SIT

- B1** Izračunaj vrednost izraza

$$\left(1 + \frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} - \left(1\frac{3}{4} - 2\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{21}\right) \cdot \frac{2}{5}.$$

- B2** Oče je na začetku kurilne sezone napolnil prazno cisterno s kurilnim oljem. Ko so porabili $\frac{4}{5}$ olja iz cisterne, je oče cisterno ponovno napolnil. Do konca kurilne sezone so nato porabili še $\frac{1}{3}$ cisterne olja, 2000 litrov olja pa jim je ostalo.

- Koliko litrov kurilnega olja so kupili v tej sezoni?
- Koliko litrov olja so porabili?

- B3** V ravnini trikotnika $\triangle ABC$ s podatki: $a=5$ cm, $t_b=5$ cm, $\gamma = 70^\circ$ poišči vse tiste točke, ki so od nosilke stranice c oddaljene 1,5 cm, od oglišča B pa toliko kot od oglišča C .

7. razred

- A1 Otroci so stari šest, osem in deset let. Skupaj dobijo 1200 tolarjev žepnine tedensko, razdelijo pa jo premosorazmerno s svojo starostjo. Koliko dobi najstarejši?

(A) 300 SIT (B) 400 SIT (C) 500 SIT (Č) 600 SIT (D) 1000 SIT

- A2 Iz belih kock z robom 1 cm sestavimo večjo kocko z robom 3 cm. Površje te kocke rdeče pobarvamo. Koliko kock z robom 1 cm ima rdeče pobarvani natanko dve ploskvi?

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (Č) 8 (D) 12

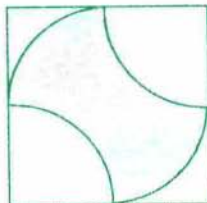
- A3 Na kmetiji porabijo za vsako kravo in pol povprečno 15 kg krme v dnevu in pol. Koliko kilogramov krme porabijo za tri krave v petih dneh?

(A) 30 kg (B) 60 kg (C) 75 kg (Č) 100 kg (D) 150 kg

- A4 Koliko odstotkov ploščine kvadrata je ploščina osenčenega lika?

(A) 80% (B) 50% (C) 45%

(Č) 30% (D) 25%



- A5 Izraz $\frac{7-x}{2x+1}$ nima pomena, če je

(A) $x = 7$ (B) $x = 0$ (C) $x = -2$ (Č) $x = \frac{1}{2}$ (D) $x = -\frac{1}{2}$.

- A6 Koliko dvomestnih naravnih števil se poveča za 11, če števki med seboj zamenjamo?

(A) nobeno (B) 4 (C) 3 (Č) 2 (D) 1

- A7 Kolikšen kot oklepata urina kazalca, ko je ura dvajset minut čez osem?

(A) 120° (B) 125° (C) 130° (Č) 135° (D) 140°

- A8 Pravokotnik z osnovnico a ima obseg $2a + 4$. Ploščina tega pravokotnika je:

(A) $4a$ (B) $2a$ (C) $4a^2$ (Č) $a^2 + 4a$ (D) $a^2 + 2a$.

B1 Izračunaj vrednost izraza $\frac{15}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{(-2)^3}{(-1)^2}}}}$.

B2 Za oštevilčenje strani v knjigi potrebujemo 1134 števk (cifer). Koliko strani ima ta knjiga?

B3 Točki $A(-2, -3)$ in $B(3, -3)$ sta oglišči kvadrata, ki je pozitivno orientiran.

- Nariši kvadrat z oglišči A, B, C, D v koordinatni sistem.
- Kvadratu vrtaj krog, središče kroga označi z S .
- Zapiši koordinate točk C, D in S .
- Izračunaj ploščino vrtanega kroga.
- Koliko odstotkov ploščine kvadrata je ploščina kroga?

8. razred

A1 Na tem tekmovanju lahko rešuješ naloge 120 minut. Koliko časa ti bo ostalo za tri daljše naloge, če porabiš za vsako nalogo izbirnega tipa (A1, ..., A8) 6 minut?

(A) 72 minut (B) pol ure (C) 24 minut (Č) 24 sekund (D) 15 minut

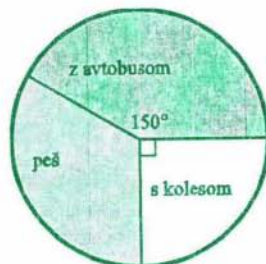
A2 Zidar potrebuje za gradnjo 10000 zidakov. Iz izkušenj ve, da se jih pri prevozu razbije največ 7%. Zidake prodajajo v svežnjih po 100. Najmanj koliko zidakov mora naročiti, da jih bo imel zagotovo dovolj?

(A) 10500 (B) 10600 (C) 10700 (Č) 10800 (D) 10900

A3 Krožni diagram prikazuje, na kakšne načine prihaja 180 otrok v šolo. Koliko otrok prihaja v šolo peš?

(A) 45 (B) 60 (C) 75

(Č) 90 (D) 120



A4 Katere izmed zapisanih števil je najboljši približek vrednosti izraza

$$\frac{487 \cdot 12027 + 9621 \cdot 487}{19367 \cdot 0,05}?$$

(A) deset (B) sto (C) tisoč (Č) deset tisoč (D) sto tisoč

A5 Naj bo $a^2 = a + 2$. Tedaj je a^3 enako

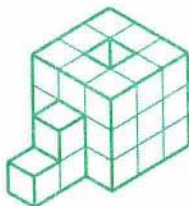
- (A) $a + 4$ (B) $2a + 8$ (C) $3a + 2$ (Č) $4a + 8$ (D) $27a + 8$.

A6 Smrklja je obsedena s hujšanjem. Na začetku letošnjega leta je tehtala 60 kg. V januarju je shujšala za 10% svoje mase. V februarju se je zredila za 10% nove mase. V marcu je spet shujšala za 10% svoje februarske mase, na začetku aprila pa se je spet zredila za 10% svoje marčeve mase. Koliko tehta smrklja aprila letos?

- (A) 60 kg (B) toliko kot v februarju (C) 54 kg
(Č) 53 kg 460 g (D) 58 kg 806 g

A7 Iz 27 kock z robom a smo sestavili večjo kocko. Nato smo iz sredine te kocke vzeli tri kocke z robom a in jih postavili, kot kaže slika. Za koliko je površina telesa na sliki večja od površine večje kocke?

- (A) za $20a^2$ (B) za $18a^2$ (C) za $16a^2$
(Č) za $12a^2$ (D) površini sta enaki



A8 Vrednost izraza $\frac{(\sqrt{17}-\sqrt{13})(\sqrt{17}+\sqrt{13})}{17^2-13^2}$ je

- (A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{30}$ (Č) $\frac{4}{30}$ (D) $\frac{1}{40}$.

B1 Dve različni trimesetni števili sta zapisani z enakimi števki (ciframi). Vemo: manjše število ima 7 enic, večje pa 7 stotic in drugi dve števki v takem zaporedju kot manjše število. Če večje število delimo z manjšim, dobimo količnik 2 in ostanek 40. Izračunaj trimesetni števili.

B2 Osnovnici trapeza $ABCD$ merita 25 cm in 15 cm, krak pa 8 cm. Vsota notranjih kotov ob daljši osnovnici je 90° . Izračunaj obseg in ploščino trapeza.

B3 Diagonalni presek kvadra je kvadrat. Stranici osnovne ploskve sta v razmerju 3 : 4, njen obseg pa meri 56 cm. Izračunaj prostornino kvadra.

16. PODROČNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE

Naloge za 7. razred

1. Kocka tehta na zraku 20 N, če jo hočemo povsem potopiti pod vodo, pa jo moramo tiščati navzdol s silo 5 N. Kolikšna je specifična teža snovi, iz katere je kocka?
- 2.* V toplotno izolirano posodo, ki ima temperaturo 0°C , vržemo 100 gramov zdrobljenega ledu in prilijemo 2 dl vode s temperaturo 0°C . V posodo potopimo grelec, ki odda vsako sekundo 500 J toplote. Ko grelec vključimo, začnemo meriti temperaturo vode. Koliko pokaže termometer po eni minuti? Koliko pokaže termometer po dveh minutah? Skiciraj potek temperature, ki jo kaže termometer, v odvisnosti od časa! Diagram opremi z enotami in merilom!
3. Po gasilski cevi s presekom 40 cm^2 preteče med gašenjem vsako minuto 1000 l vode. Kolikšna je hitrost vode v cevi? Za gašenje 15 m visokih hiš, mora biti hitrost vode, ki izstopa iz cevi, vsaj 30 m/s. Kolikšen sme biti največji presek šobe, ki jo gasilec natakne na cev?
- 4.* V mrzlem zimskem dnevu, ko je temperatura -20°C , pade v 1 cm široko režo med 15 m dolgima jeklenima železniškima tračnicama steklena frnikula s premerom 6 mm. Koliko se lahko segrejeta tračnici, preden zdrobita frnikulo? Raztezanje frnikule lahko zanemariš.
5. V visoko posodo, katere dno ima obliko kvadrata s stranico 10 cm, natočimo 1 liter vode in 1 liter olja, ki ima enako specifično težo kot alkohol, vendar se z vodo ne meša. V merilu nariši, kaj dobimo! Kolikšen je tlak 3 cm nad dnom posode? Zunanji zračni tlak je 100 kPa.

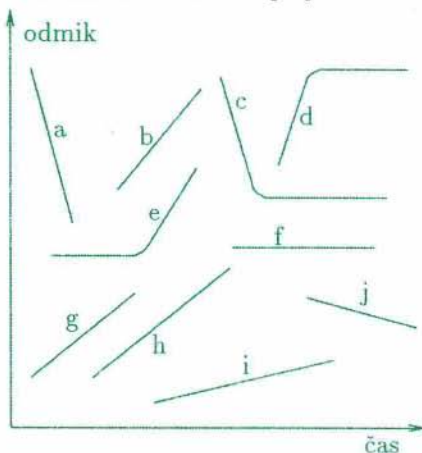
Če se ti zdi, da pri kateri od nalog manjka kakšen podatek, ga poišči v učbeniku!

Učencem nalog, označenih z zvezdico, ni bilo treba reševati!

Naloge za 8. razred

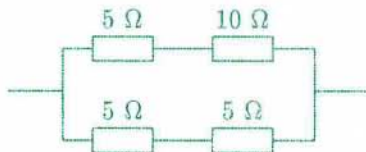
1. Žogica za golf prileti navpično navzdol s hitrostjo 15 m/s na betonsko podlago in se odbije s hitrostjo 10 m/s. Kolikšen je povprečni pospešek, ki ga čuti žogica, če je bila v stiku s podlago stotinko sekunde?

2. Slika 1 kaže oddaljenost avtomobilov od neke izhodiščne točke v odvisnosti od časa. Odgovori na naslednja vprašanja:
- Kateri avtomobili se gibljejo naprej s stalno hitrostjo (se oddaljujejo od izhodišča)?
 - Kateri avtomobili se gibljejo nazaj s stalno hitrostjo (se približujejo izhodišču)?
 - Kateri avto ima največjo stalno hitrost (naprej ali nazaj)?
 - Kateri avto ima največjo stalno hitrost v smeri naprej?
 - Kateri avto ima največjo stalno hitrost v smeri nazaj?
 - Kateri avtomobili imajo enako hitrost?
 - Kateri avto se sploh ne premika?
 - Kateri avto je najprej miroval, potem pa se je pospešil do stalne hitrosti?
 - Kateri avto se je gibal naprej, potem pa se ustavil?
 - Kateri avto se je gibal nazaj, potem pa se ustavil?



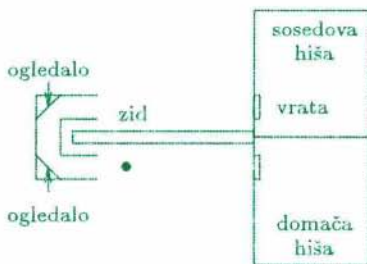
Slika 1.

3. Družina se je v torek popoldan ob šestih odpeljala na počitnice. Vrnila se je čez štirinajst dni ob isti uri. Najmlajši otrok je pozabil v svoji sobi prižgano žarnico z močjo 40 W. Za koliko tolarjev je bil račun za elektriko večji zaradi te pozabljivosti? Kilovatna ura električne energije, porabljena v nedeljo, vsak delavnik med drugo in peto uro popoldne ter enajsto uro zvečer in sedmo uro zjutraj, stane 7,282 tolarja, medtem ko v preostalem času stane kilovatna ura električne energije 12,375 tolarjev.
4. Na sliki je električno vezje, ki je sestavljeno iz štirih upornikov. Kolikšna je upornost vezja? Kako moramo povezati peti upornik z upornostjo 10 Ω , da bosta tokova v obeh vejah enaka?



Slika 2.

5. V naselju vrstnih hiš stoji med sosednjima hišama visok zid. Ker so otroci radovedni, so si naredili opazovalno napravo, ki jo vidiš na sliki 3a, s katero lahko gledajo okoli zidu. Otrok opazuje z mesta (označenega s piko na sliki 3a) sosedova vrata, na katerih je napisan priimek stanovalcev (slika 3b). Nariši vrata, kot jih vidi otrok skozi napravo! Odgovor preveri z načrtovanjem!



Slika 3a.



Slika 3b.

Mojca Čepič

MEDNARODNO MATEMATIČNO TEKMOVANJE MEST – 1. del

Ob koncu šolskega leta nas je mednarodna tekmovalna komisija prijetno presenetila z rezultati 16. tekmovanja mest. Za uspešno reševanje nalog je prejelo pohvale naslednjih devet dijakov: Andrej Vodopivec z Gimnazije Celje, Sašo Živanovič s Srednješolskega centra Celje – Gimnazije Lava, Mitja Pirc z Gimnazije in ekonomske srednje šole Brežice, Martin Klanjšek, Mitja Šlenc, Anže Slosar, Gorazd Bizjak in Miha Vuk z Gimnazije Bežigrad in Jernej Barbič z Gimnazije Tolmin.

Naši dijaki dosegajo na tekmovanju mest res odlične rezultate. V začetku avgusta so bili Matija Mazi z Gimnazije Bežigrad, Igor Klep z Gimnazije Ptuj in Andrej Vodopivec z Gimnazije Celje vabljeni na konferenco tekmovanja mest, ki je bila letos v Ugliču, mestu ob Volgi, ki leži 250 km severno od Moskve. Podrobno poročilo s konference bomo objavili v eni prihodnjih številki Preseka. V tej in naslednji številki Preseka objavljamo rešitve izbranih nalog iz pomladanskega kroga 17. tekmovanja mest.

Rešitve nalog prvega dela:

Prva skupina

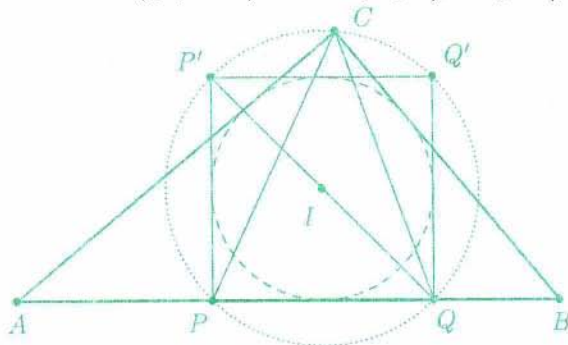
1. Označimo najmanjši kot s φ . Potem je $5\varphi < 90^\circ$, oziroma $\varphi < 18^\circ$. Ker meri največji kot 5φ , najmanjši pa φ , meri tretji kot največ 5φ in je zato $11\varphi > 180^\circ$. Torej je $\varphi > 16^\circ$, od koder sledi $\varphi = 17^\circ$, druga kota pa merita 85° in 78° .

2. (a) Za praštevilo $n = 101$ sta tudi števila $n - 96 = 5$ in $n + 96 = 197$ praštevili.

(b) Tako naravno število n ne obstaja. Ker je $n - 1996 \equiv n - 1 \pmod{3}$ in $n + 1996 \equiv n + 1 \pmod{3}$, je med števili $n - 1996$, n in $n + 1996$ natanko eno deljivo s 3. Torej mora biti $n - 1996 = 3$, vendar tedaj število $n + 1996 = 3995$ ni praštevilo.

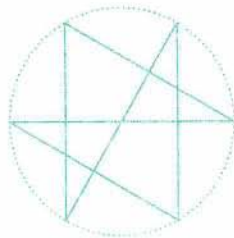
3. Označimo središče vrtane krožnice trikotnika z I .

Spomnimo se, da ležijo točke, iz katerih vidimo dano krožnico pod fiksnim zornim kotom, na krožnici, katere središče se ujema z dano krožnico. Torej ležijo točke, iz katerih vidimo vrtano krožnico pod pravim kotom, na krožnici s središčem I . Označimo to krožnico s $\mathcal{K}$. Ker je pri oglišču C pravi kot in sta točki P in Q dobljeni kot pravokotni projekciji vrtane krožnice na hipotenuzo, ležijo tudi točke C , P in Q na krožnici $\mathcal{K}$. Očitno je, da ležijo oglišča kvadrata $PQQ'P'$ s stranico PQ , ki je očrtan vrtani krožnici, na krožnici $\mathcal{K}$ (glej sliko). Potem pa je $\angle PCQ = \angle PP'Q = \frac{\pi}{4}$.



4. (a) Kot bomo dokazali v točki (b), ima krivulja iz množice C največ 7 samopresečišč. Primer take krivulje je na sliki.

(b) Izberimo in fiksirajmo šestkotnik (tj. krivuljo) iz C in si oglejmo njegovo poljubno stranico ℓ . Če ležijo druga štiri oglišča na isti polravnini glede na ℓ , krivulja nima samopresečišč na ℓ . Če leži eno oglišče na eni strani, tri pa na drugi



strani stranice ℓ , ima lahko krivulja največ dve samopresečišči na ℓ . Če pa ležita po dve oglišči na vsaki strani stranice ℓ , ima lahko krivulja največ tri samopresečišča na ℓ , saj mora biti vsaj eno izmed teh štirih oglišč povezano s krajišči stranice ℓ . Opazimo še, da lahko obstajajo največ tri stranice, pri katerih ležijo preostala oglišča po dve na vsaki strani. Torej ima lahko krivulja največ $3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 15$ samopresečišč. Ker smo vsako samopresečišče šteli dvakrat, je 7 res maksimalno število samopresečišč.

5. (a) Prvi igralec lahko vedno igra neodločeno, če označi polje, ki leži simetrično polju, ki ga je označil drugi igralec glede na premico, ki razdeli tabelo na dve tabeli dimenzij 10×5 . Pri prvi potezi ali pa če je simetrično polje že označeno, označi prvi igralec poljubno polje. Na koncu je tabela označena simetrično, kar pomeni $a = b$.

(b) Če uporabi drugi igralec gornjo strategijo, igrata neodločeno, kar pomeni, da zmagovita strategija za prvega igralca ne obstaja.

Druga skupina

1. Iz enakosti $a + b + c = 100$ in $a + b/2 = 40$ izrazimo $a - c = 2(a + b/2) - (a + b + c) = -20$.

2. Vpeljimo oznako: $\overline{xyz}$ naj označuje trimestno število s števki x, y in z . Naj bo sedaj $(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$ poljubna permutacija števil $1, 2, \dots, 9$. Potem je

$$\overline{abc} + \overline{bcd} + \dots + \overline{ghi} = 100a + 110b + 111(c + d + e + f + g) + 10h + i$$

in to število je lahko največ

$$100 \cdot 3 + 110 \cdot 4 + 111(9 + 8 + 7 + 6 + 5) + 10 \cdot 2 + 1 = 4606.$$

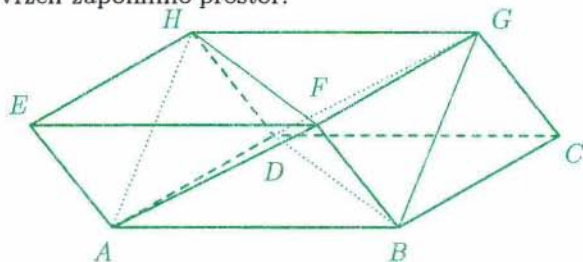
Ta vrednost je tudi dosežena, kar kaže primer 3, 4, 9, 8, 7, 6, 5, 2, 1.

3. Računajmo:

$$\begin{aligned} 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdots 100! &= (2!)^2 \cdot 3 \cdot (4!)^2 \cdot 5 \cdots (98!)^2 \cdot 99 \cdot 100! = \\ &= (\dots)^2 (3 \cdot 5 \cdots 99)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdots 100 = \\ &= (\dots)^2 2^{50} 50! = (\dots)^2 50!. \end{aligned}$$

Če torej iz produkta izpustimo faktor $50!$, bo dobljeno število popolni kvadrat.

4. Iz oktaedra $ABDHFG$ in tetraedrov $AFHE$ ter $BCDG$ lahko sestavimo enakorobi paralelepiped $ABCDEFGH$; s takimi paralelepipedi pa lahko brez vrzeli zapolnimo prostor.

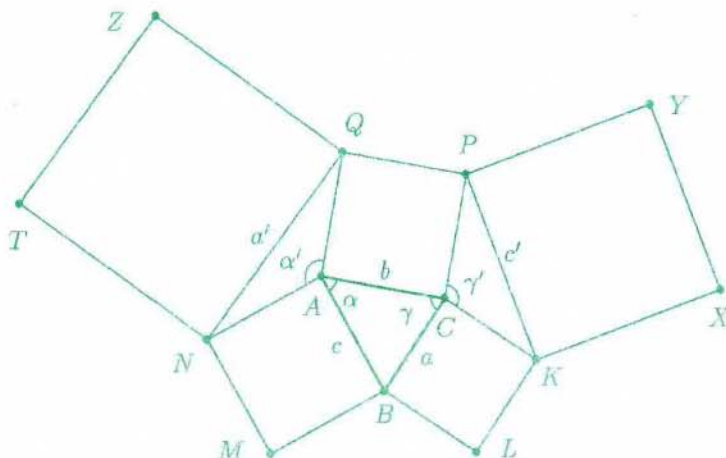


5. Zadošča rešiti točko (b). Vpeljimo običajne oznake v trikotniku ABC (glej sliko). Po kosinusnem izreku v trikotniku ABC je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

po kosinusnem izreku v trikotniku AQN pa

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha'.$$



Ker sta kota α in α' suplementarna, je $\cos \alpha + \cos \alpha' = 0$, zato iz gornjih enačb sledi $a^2 + a'^2 = 2b^2 + 2c^2$. Podobno s pomočjo kotov γ in γ' izpeljemo zvezo $c^2 + c'^2 = 2a^2 + 2b^2$. Sledi $a'^2 - c'^2 = 3(c^2 - a^2) = 3d$.

Matjaž Željko

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

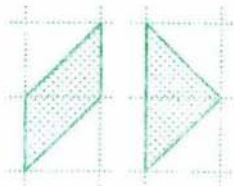
V soboto 20. aprila 1996 se je 3500 dijakov s 65 gimnazij in srednjih šol spoprijelo z naslednjimi nalogami:

Prvi letnik

1. Dokaži, da v nobenem številskem sistemu ne obstaja neničelna števka a , za katero bi veljalo $\overline{aaa} = a^3$, kjer $\overline{aaa}$ označuje trimestno število, ki ima na vseh mestih števko a .
2. Na voljo imamo dve peščen uri, 7- in 11-minutno. Kako izmeriti 17 minut?
3. Naj bo n poljubno naravno število. Naj bo $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Katero od števil x^y ali y^x je večje?
4. V pravokotnem trikotniku ABC je kateta BC trikrat daljša od katete AC . Točka F naj bo razpolovišče hipotenuze AB , točki D in E pa naj razdelita kateto BC na tri enake dele. Dokaži, da je DFE enakokrak pravokotni trikotnik.

Drugi letnik

1. Naj bodo p, q in r paroma tuja naravna števila. Poišči vsa cela števila x, y in z , ki zadoščajo enačbi $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$.
2. Dan je ostrokotni trikotnik ABC . Simetrala kota $\angle BCA$ naj seka stranico AB v točki D , nožišče višine trikotnika BCD na stranico CD naj bo v točki E , točka F pa naj označuje razpolovišče stranice AB . Izrazi dolžino daljice EF z dolžinami stranic trikotnika ABC .
3. V krog je včrtan osemkotnik $A_1A_2 \dots A_8$. Stranica A_1A_2 je vzporedna s stranico A_5A_6 , A_2A_3 z A_6A_7 in A_3A_4 z A_7A_8 . Pokaži, da sta stranici A_8A_1 in A_4A_5 enako dolgi.
4. Kvadrat je sestavljen iz 169 enotskih kvadratkov. Na razpolago imamo dovolj trikotnikov in paralelogramov (oblike kot na sliki). Ali lahko z njimi pokrijemo kvadrat tako, da se liki ne prekrivajo in da ležijo katete trikotnikov in daljše stranice paralelogramov na diagonalah enotskih kvadratkov?

**Tretji letnik**

1. Naj bodo α, β in γ koti ostrokotnega trikotnika. Pokaži, da velja neenakost $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}$. Ali je enakost kdaj dosežena?

2. Poišči vse polinome p z realnimi koeficienti, ki zadoščajo enačbi

$$x p(x-1) = (x-1996) p(x)$$

za vsa realna števila x .

3. Poišči vsa realna števila x in y , ki zadoščajo enačbi

$$\log_2(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy}) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}.$$

4. Dan je trikotnik ABC . Kot med stranico AC in težiščnico skozi A meri 30° in je enak kotu med stranico BC in težiščnico skozi B . Dokaži, da je trikotnik enakostraničen.

Četrty letnik

1. V ravnini je dana množica $\mathcal{M}$, ki je sestavljena iz sedmih točk. Nobene tri izmed teh točk niso kolinearne. Koliko različnih štirikotnikov, ki imajo oglišča v $\mathcal{M}$, lahko narišemo?
2. Naj bosta p in q različni praštevili in S množica vseh naravnih števil, večjih od 1, ki nimajo drugih praštevilskih deliteljev kot p ali q . Izračunaj vsoto vseh števil oblike $\frac{1}{s}$, kjer število s pripada množici S .
3. Za funkcijo $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ velja:
 - $f(m) > f(n)$, če je $m > n$,
 - $f(mn) = f(m)f(n)$ za vsa naravna števila m in n in
 - $f(2) = 2$.

Dokaži, da je $f(n) = n$ za vsa naravna števila n .

4. Stranica pokončnega stožca, katerega osnovna ploskev je krog s polmerom r , meri s enot ($s > 2r$). Naj bo P poljubna točka na robu osnovne ploskve. Izračunaj razdaljo od vrha stožca do najkrajše poti skozi točko P , ki objame plašč stožca.

Matjaž Željko

NALOGE S PREDTEKMOVANJA IZ SREDNJEŠOLSKE FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1995/96

Tekmovanje je bilo izvedeno 30. marca 1996 po regijah. Sodelovalo je okrog 800 dijakov iz 52 srednjih šol, po 30 najboljših iz vsake skupine pa se je potem udeležilo državnega tekmovanja.

V skupini A sta bili na predtekmovanju dve verziji nalog, ki pa sta se razlikovali samo v tretji nalogi. Tekmovalec je tako reševal samo eno nalogo – 3a ali 3b.

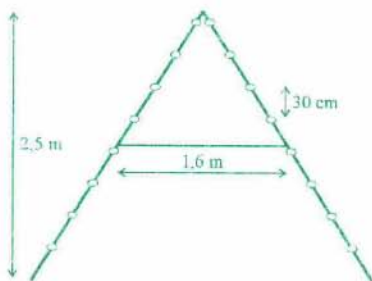
Skupina A

1. Na strop pritrdimo 2,4 m dolgo lahko elastiko in nanjo obesimo majhno telo s težo 20 N tako, da telo leži na tleh in je elastika navpična, vendar nenapeta. Prožnostni koeficient elastike je 30 N/m. Telo odmaknemo v vodoravni smeri.

- Največ kolikšen je lahko vodoravni odmik klade, da le-ta ne bo poskočila, ko jo spustimo?
- Najmanj kolikšen je koeficient lepenja med podlago in tlemi, da telo obmiruje, ko ga v vodoravni smeri odmaknemo za 1,0 m?

2. Posoda z višino 1,0 m in ploščino osnovne ploskve $1,0 \text{ m}^2$ je napolnjena z vodo do treh četrtin višine. Vanjo položimo manjšo posodo s ploščino osnovne ploskve $0,50 \text{ m}^2$ in težo 50 N tako, da posoda plava. Nato začnemo v plavajočo posodo počasi enakomerno natakati vodo, tako da vsako sekundo priteče v posodo 1,0 dl vode. Najmanj kako visoka mora biti manjša plavajoča posoda, da se ne potopi, preden začne teči voda preko roba večje posode? Koliko časa po začetku natakanja sega voda v veliki posodi 10 cm do roba? Specifična teža vode je $1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$.

- 3a. Lahka aluminijasta lestev v obliki črke "A" je visoka 2,5 m in je na sredini povezana z dvema vodoravnima vrvema dolžine 1,6 m. Do katerega klina se lahko povzpne človek s težo 1000 N, če lestev postavimo na ledeno ploskev, klini pa so v navpični smeri v razmiku 30 cm? Posamezna vrvica lahko zdrži največjo silo 200 N.



- 3b. Avtomobil dolžine 3,5 m vozi za 6,0 m dolgim tovornjakom. Na začetku imata obe vozili enako hitrost 50 km/h, med njima pa je varnostna razdalja 14 m. S kolikšnim konstantnim pospeškom naj avtomobil pospešuje pri prehitevanju, da bo varno prehitel tovornjak na poti 150 m, če je maksimalna dovoljena hitrost vožnje 80 km/h? Prehitevanje je končano, ko je avtomobil v varnostni razdalji pred tovornjakom, tovornjak pa vozi ves čas s konstantno hitrostjo.

Skupina B

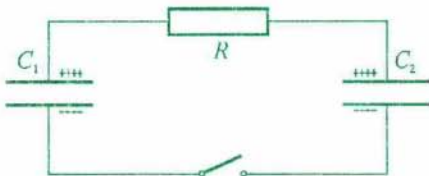
1. Jerry hoče prestrašiti Toma tako, da pod njim odpre močan curek vode, ki vzdigne Toma – sedečega na lahki ravni plošči – v zrak. Iz odprtine brizga vsako sekundo 20 litrov vode navpično navzgor s hitrostjo 5,0 m/s. Kako visoko se dvigne 8,0 kg težak Tom? Gostota vode je 1000 kg/m^3 .
2. Na strop je pritrjena dolga lahka vzmet dolžine 2,0 m. Nanjo obesimo utež z maso 0,50 kg in vzmet se podaljša za 50 cm. Nato sunemo utež v tangetni smeri tako, da kroži v vodoravni ravnini.
 - a) Kolikšna je najmanjša kotna hitrost, pri kateri telo kroži?
 - b) S kolikšno obodno hitrostjo moramo suniti utež, da bo krožila pod kotom 30° (kot med navpičnico in vzmetjo)?
3. Na tleh stoji klada z maso 2,0 kg, nanjo pa je pritrjena navpična vijačna vzmet s prožnostnim koeficientom $3,0 \text{ N/cm}$, ki nosi lahko skodelico. S kolikšne največje višine smemo spustiti kepo ilovice z maso 2,0 kg, da se klada še ne bo odlepila s podlage? Trk ilovice s skodelico je popolnoma neprožen, ilovica pa se sprime s skodelico.
4. Kroglico z maso 100 g spustimo z višine 3,0 m. Ko prepotuje razdaljo 1,0 m, prileti vanjo v vodoravni smeri kos plastelina z maso 50 g in hitrostjo 3,0 m/s ter se prilepi na kroglico. Kje pade zlepek na tla?

Skupina C

1. Prijatelj je meril gonilno napetost in notranji upor baterije. Z ampermetrom z neznanim notranjim uporom in upornikom za 30Ω je naredil tri meritve pri treh možnih vezavah elementov. Sporočil ti je vrednosti za tokove 0,10 A, 0,18 A in 0,20 A, ni pa povedal, kateri vezavi ustreza katera meritev. Lahko kljub temu določiš merjene količine?
2. Z domačimi pripomočki si mladi fizik sestavi naslednje vezje: Jekleno palčko z maso 1,0 g položi na dve enaki lahki navpično stoječi vzmeti, razmaknjeni za 10 cm, da palčka leži vodoravno. Vsaka vzmet se skrči za 2,0 mm. Med vzmeti veže izvir enosmerne napetosti in vse skupaj postavi v vodoravno magnetno polje z gostoto 0,10 T, ki je pravokotno na jekleno palčko. Skupni upor sestavljenega vezja je $1,0 \Omega$. Na začetku izvir napetosti ni vključen. Izračunaj, na katero napetost mora biti nastavljen izvir, ko ga vključi, da bo palčka skočila do višine 25 cm nad mizo? Dolžina neraztegnjenih vzmeti je 5,0 cm. Skiciraj vezje in na skici označi smer magnetnega polja in polariteto priključene napetosti!

3. Upornik $R = 1,0 \text{ M}\Omega$, kondenzatorja $C_1 = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$ in $C_2 = 3,0 \text{ }\mu\text{F}$ ter stikalo so povezani v električni krog, kot kaže slika. Na kondenzatorju C_1 je naboj $5,0 \text{ }\mu\text{As}$, na kondenzatorju C_2 pa $10 \text{ }\mu\text{As}$.

- a) Kolikšen tok steče skozi upornik takoj po sklenitvi stikala?
- b) Koliko toplote se sprosti na uporniku po daljšem času po sklenitvi stikala?

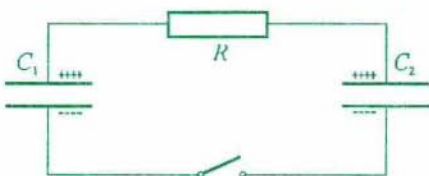


Skupina D

1. V magnetnem polju z gostoto $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ je izvir elektronov. Elektroni izhajajo s hitrostjo $1,0 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, vendar curek elektronov ni vzporeden, ampak rahlo divergenten. Divergenca je taka, da elektroni izstopajo iz izvira pod različnimi koti, največji kot izstopa pa je $1,0^\circ$ glede na smer magnetnega polja. Na kolikšni razdalji se bo curek znova fokusiral in kolikšna je največja širina curka? Masa elektrona je $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, naboj pa $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$. Upoštevaj, da so koti majhni!

2. Dva enaka satelita, povezana z lahko vrstico, krožita okoli Zemlje po krožnih orbitah z enako kotno hitrostjo. Prvi je na višini 300 km nad površino Zemlje, drugi pa na višini 320 km . V nekem trenutku se vrstica pretrga. Kolikšno največjo višino doseže drugi satelit? Radij Zemlje je 6400 km , težnostni pospešek na površini Zemlje pa 10 m/s^2 . Potencialna energija telesa z maso m v okolici okroglega homogenega telesa z maso M je v razdalji r od središča enaka $W_p = -\frac{\kappa M m}{r}$, kjer je κ gravitacijska konstanta.

3. Upornik $R = 1,0 \text{ M}\Omega$, kondenzatorja $C_1 = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$ in $C_2 = 3,0 \text{ }\mu\text{F}$ ter stikalo so povezani v električni krog, kot kaže slika. Na kondenzatorju C_1 je naboj $5,0 \text{ }\mu\text{As}$, na kondenzatorju C_2 pa $10 \text{ }\mu\text{As}$.



- a) Kolikšen tok steče skozi upornik takoj po sklenitvi stikala?
 - b) Koliko toplote se sprosti na uporniku po daljšem času po sklenitvi stikala?
 - c) Čez koliko časa po sklenitvi stikala se bo na uporniku sprostil polovico sproščene toplote? Pri praznjenju kondenzatorja s kapaciteto C preko upora R se napetost na kondenzatorju spreminja s časom po enačbi $U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.
4. V 4,0 m globokem pristanišču je zasidrana jahta tako, da sega njeno dno 1,2 m globoko. Morje v zalivu in pristanišču je povsem mirno in vlada brezvetrje. Zaradi razposajenosti posadke pa jahta rahlo vertikalno niha.
- a) Kolikšna je valovna dolžina valov, ki nastajajo na morski gladini ob jahti, torej še v pristanišču?
 - b) Valovi, ki nastajajo ob jahti, se širijo iz pristanišča. Izračunaj njihovo valovno dolžino v globoki vodi.
- Predpostavi, da ima trup jahte obliko kvadra. Dno jahte predstavlja eno izmed ploskev kvadra. Hitrost valovanja na površini vode, katere globina H je manjša od polovične valovne dolžine, je $c = \sqrt{gH}$. Če pa je voda globlja, je hitrost valovanja na njeni površini odvisna od valovne dolžine λ : $c = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}$.

Ciril Dominko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

24. letnik, šolsko leto 1996/97, številka 2, strani 65 – 128

UREDNIŠKI ODBOR: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Dušica Boben (oblikovanje teksta), Vilko Domajnko, Roman Drnovšek (novice), Darjo Felda (tekmovanja), Bojan Golli, Marjan Hribar, Boštjan Jaklič (tehnični urednik), Martin Juvan (računalništvo), Sandi Klavžar, Boris Lavrič, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Bojan Magajna (glavni urednik), Franci Oblak, Peter Petek, Marijan Prosén (astronomija), Marjan Smerke (svetovalec za fotografijo), Miha Štalec, Marija Vencelj (matematika, odgovorna urednica).

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1996/97 je za posamezne naročnike 1.500 SIT, za skupinska naročila šol 1.200 SIT, posamezna številka 300 SIT, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ

Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 1295

PRIŠTEVANKA ZA DVA

Naslednja igra za dva je tako stara, da jo najdemo celo v knjigi *Zanimivi in zabavni problemi, ki jih lahko zastavimo s števili* iz leta 1612 (avtor je francoski matematik Bachet de Méziriac).

Prvi igralec prične igro s poljubnim številom, ki je manjše od 100. Nato igralca izmenoma navajata čedalje večja (naravna) števila, vendar nobeden ne sme števila, ki ga je soigralec povedal pred tem, povečati za več kot za 10. Zmaga tisti, ki lahko prvi navede število 100 (in seveda tega ne spregleda).

Izkaže se, da v tej igri vedno zmaga tisti, ki prvi uspe navesti eno od števil

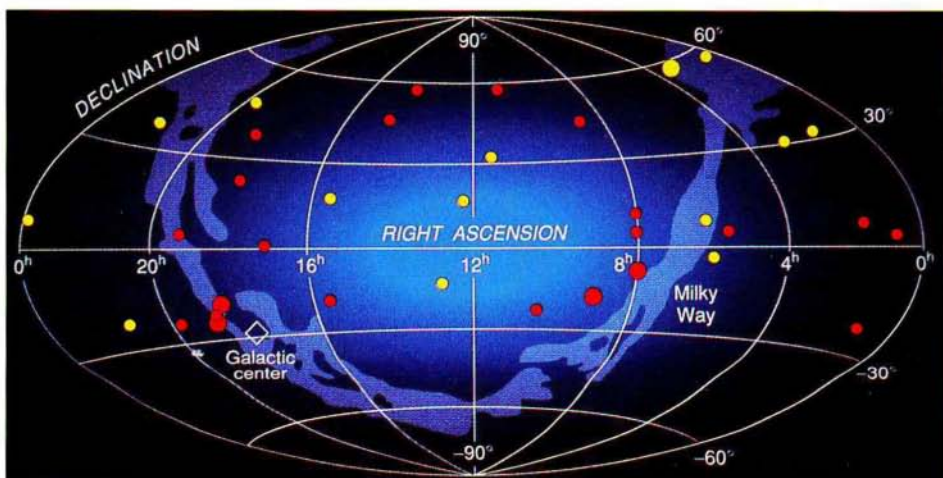
1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89

in tudi kasneje navaja le števila iz tega zaporedja. Premislite, zakaj!

Če igralec, ki to strategijo pozna, začne igro kot prvi, je zmaga njegova. Če začne igro kot drugi, jo bo izgubil, če bo njegov soigralec navajal le števila iz zgornjega niza. Igro pa bo dobil, kakor hitro bo drugi igralec navedel število, ki ga ni med navedenimi. Tedaj bo lahko prvi igralec navedel število iz zgornjega niza (zakaj?) in dobil možnost, da zmaga.

In še naloga: Naj poljubni naravni števili a in A , $a < A$, v igri nadomestita števili 10 in 100. Poiščite zmagovito strategijo za tak splošnejši primer.

Marija Vencelj



Slika 1. Znanstveniki projekta META zasledujejo 37 nenavadnih signalov, ki so na sliki narisani v ekvatorialnem koordinatnem sistemu. Njegovi koordinati sta deklinacija in rektascenzija in ustrezata zemeljskima zemljepisni širini in dolžini. Moder pas nepravilne oblike prikazuje Rimsko cesto. Označeno je središče galaksije. Signali so označeni z rdečimi in rumenimi pikami; barvi označujeta dve različni valovni dolžini, pri katerih so opazovali s 26-metrsko radijsko anteno na Harvardu, ZDA. Največje pike označujejo najmočnejše signale.



Slika 2. Antena avstralskega radijskega teleskopa Parkes, ki je nekaj mesecev v letu 1995 iskala signale zunajzemeljskih civilizacij. Antena ima premer 64 metrov in tehta 300 ton. Sprva je bila izdelana za opazovanja pri valovnih dolžinah 10, 21 in 75 centimetrov, kasneje pa so jo dopolnili tako, da deluje tudi pri krajših valovnih dolžinah.



Slika 3. Oranžno obarvane mineralne globule, ki so prikazane na tej fotografiji, so našli v meteoritu ALH84001. Znanstveniki menijo, da so te globule nastale ob prisotnosti primitivnih, bakterijam podobnih organizmov.